

20713



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FORMULACIÓN HAMILTONIANA PARA LAGRANGIANOS
NO LOCALES

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F Í S I C O
P R E S E N T A

RAÚL PATRICIO ESQUIVEL SIRVENT

MEXICO, D. F.

1989

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Introducción.	1
1 Interacción Relativista entre Partículas	3
1.1 Formulación de las interacciones entre partículas.	4
1.2 Electrodinámica de Wheeler-Feynman.	6
1.3 Problemas asociados a las acciones tipo Fokker.	11
2 Formulación Canónica para Lagrangianos tipo Fokker	13
3 Introducción a las Teorías de Campo no Locales	23
3.1 Introducción.	24
3.2 Ecuaciones de orden finito superior al segundo.	25
3.3 Ecuaciones diferenciales de orden infinito.	28
3.4 Problemática de las teorías de campo no locales.	33
4 Formulación Canónica para Lagrangianos no Locales	35
4.1 Formulación canónica para teorías no locales de campo.	36
4.2 Modelo de Kristensen y Møller.	38
4.3 Formulación canónica para el modelo de Kristensen y Møller.	40
Conclusiones	46
Apendice A Método Variacional Generalizado	48
Apendice B Construcción del espacio fase para lagrangianos tipo Fokker	55
Apendice C Método variacional generalizado para campos	56
Apendice D Generalización del formalismo canónico para el caso de campos	61
Referencias	65

Introducción

La finalidad de esta tesis es dar una introducción a los modelos descritos por la mecánica clásica relativista no local, haciendo énfasis en la construcción de un formalismo canónico. Aunque este último punto ha sido muy estudiado, aún presenta problemas básicos que han dificultado su solución. La importancia de un formalismo hamiltoniano, radica en que además de proporcionar información adicional del sistema, es el único camino conocido para cuantizar una teoría.

En el capítulo 1 se muestra que las teorías no locales con un número finito de variables dinámicas permiten describir la interacción entre partículas clásicas relativistas sin la intermediación de campos; para esto, se utiliza un principio de acción estacionaria. En particular, se discute la electrodinámica de Wheeler-Feynman. Análogamente, en el capítulo 3 se da una introducción a las teorías de campos no locales; los campos $\Psi(x)$ que se estudian, son sobre el espacio-tiempo. Se muestra que estos modelos pueden ser útiles para describir partículas cuánticas con un factor de forma, es decir, objetos extendidos; o bien familias de partículas cuánticas.

En el capítulo 2 se da una manera de construir el hamiltoniano para partículas clásicas relativistas descritas por lagrangianos no locales. Se presentan los resultados de Jaen, Jauregui et al. (Phys.Rev.D 36,2386,1987). Finalmente, en el capítulo 4 se extienden estos resultados al caso de teorías de campos no locales. La construcción de un hamiltoniano para estas teorías es la contribución principal de esta tesis. Explícitamente, se trabaja con el modelo de Kristensen y Møller, que pretende

describir la interacción entre nucleones (partículas extendidas) mediante el intercambio de iones. Se eligió este modelo por ser muy intuitivo y estar ampliamente tratado en la literatura.

Por último, se presentan las conclusiones y las perspectivas que tiene este trabajo.

CAPITULO 1

Interacción relativista entre partículas

En este capítulo se presenta una introducción al problema de la interacción relativista entre partículas con especial atención a su descripción a partir de un principio de acción estacionaria; en particular, se estudia la acción tipo Fokker. Se mencionan también los obstáculos que existen para establecer una formulación a partir de este acción.

Finalmente, se estudia la electrodinámica de Wheeler-Feynman, que es la teoría relativista de acción a distancia más conocida, y se comentan los problemas asociados con este tipo de modelos.

1.1 Formulación de las interacciones entre partículas

Por "acción a distancia" entendemos una interacción entre partículas sin la mediación de campos. Un ejemplo es la teoría de gravitación de Newton en la que dos partículas de masa m_1 y m_2 , se atraen con una fuerza igual a:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (1.1)$$

donde r es la distancia que separa a los cuerpos y G la constante de la gravitación. También podemos considerar dos cargas eléctricas las cuales se atraerán o repelerán según la ley de Coulomb.

En ambos casos la interacción se realiza en el mismo instante independientemente de la distancia que separa a los cuerpos.

Con la teoría de la relatividad el concepto de acción a distancia deja de ser invariante. En consecuencia, se considera generalmente que los sistemas relativistas requieren, para su descripción, de teorías de campo; es decir, no es posible construir una teoría relativista de acción a distancia. Sin embargo, esto no siempre es cierto; hay formas de construir dichas teorías. Por ejemplo, se pueden buscar ecuaciones de segundo orden que describan el movimiento de las partículas en un instante dado y en un sistema de referencia arbitrario. Estas ecuaciones deben ser invariantes ante el grupo de Poincaré, es decir, la transformada de Lorentz de las soluciones es también solución de las ecuaciones.^{1,2}

Otra manera de describir teorías de acción a distancia, y en la cual centraremos mayor atención, es la teoría de acción a distancia propuesta primeramente por Fokker.³ En esta descripción de la

naturaleza no se utiliza el concepto de campo como identidad dinámica independiente. Cada partícula se mueve de acuerdo al principio de acción estacionaria:

$$\delta S = 0$$

siendo

$$S = \sum m_i c \int ds_i + \sum_i \sum_j \int d\lambda_i \int d\lambda_j P^{(ij)}(x_i^\mu, x_j^\mu, u_i^\nu, u_j^\nu) \quad (1.2)$$

En esta expresión, el primer sumando del lado derecho es la energía cinética; en el segundo sumando λ es el parámetro de evolución y la función P depende de las posiciones y derivadas de orden superior. Esta función caracteriza la interacción que se está estudiando y los índices i, j se refieren al número de partículas involucradas.

A partir de esta acción se pueden construir las ecuaciones de movimiento análogas a las de Euler-Lagrange.

Uno de los ejemplos más estudiados, aplicando la acción 1.2, es la electrodinámica de Wheeler-Feynman. Por su importancia será descrita más adelante en detalle.

Otra manera de dar las ecuaciones de movimiento para teorías relativistas de acción a distancia, es a través de una formulación hamiltoniana.

Historicamente, un obstáculo para construir modelos bajo esta formulación fue el teorema de no interacción de Curie, Jordan y Sudarshan⁴. Su formulación original se dio en un espacio fase (x, p) de $6N$ dimensiones para N partículas. El teorema establece que :

1. Dinámica hamiltoniana

2. Covariancia relativista (es decir, covariancia ante el grupo de Poincare)
 3. Líneas de universo invariantes (es decir, diferentes observadores obtienen conjuntos de líneas de universo iguales desde el punto de vista físico), y
 4. Coordenadas físicas como variables canónicas,
- son consistentes solo para movimiento libre.

Sin embargo, a pesar de este teorema, es posible construir una formulación hamiltoniana relativista si se omiten algunas de las hipótesis; por ejemplo, renunciando al concepto de coordenadas físicas canónicas. De manera alternativa aunque no forzosamente se puede intentar sustituir la teoría relativista de acción a distancia, por una teoría hamiltoniana de partículas y campos interactuando localmente.³

1.2 Electrodinámica de Wheeler-Feynman

Como se mencionó anteriormente, centraremos la atención en los modelos obtenidos a partir de la acción 1.2. En particular, se discutirá en esta sección la electrodinámica de Wheeler-Feynman y se mostrará que es posible obtener una teoría consistente a partir de una acción tipo Fokker.

La electrodinámica de Maxwell y Lorentz, descrita por las ecuaciones

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi j^{\mu} \quad (1.3)$$

$$F_{(\mu\nu)\sigma} = 0 \quad (1.4)$$

$$m_a \ddot{x}_a^\mu = e_a F_{\mu\nu} \dot{x}_a^\nu \quad (1.5)$$

donde J^μ es la corriente debida a las partículas, e es la carga y m es la masa; la coma indica derivada y los parentesis cuadrados indican permutaciones de los índices. Ésta es una teoría formulada en términos de campos. La interacción entre las cargas está mediada por el campo electromagnético $F^{\mu\nu}$. Esta formulación considera que: a) el campo posee grados de libertad propios y b) las cargas pueden interactuar consigo mismas, lo que implica una energía infinita de autointeracción.

Si se quiere formular la teoría prescindiendo de estos puntos, la manera más natural para hacerlo es por medio de una teoría relativista de acción a distancia. Esta prescripción alternativa es básicamente la electrodinámica de Wheeler-Feynman^{7,8} la cual parte de la acción tipo Fokker dada por:

$$S = -\sum_a m_a c \int (-dx_\mu dx^\mu)^{1/2} + \sum_a e_a e_b \iint \delta(s_{xy}^2) (dx_\mu dx^\mu) \quad (1.6)$$

siendo

$$s_{xy}^2 = (x^a - y^a)(x_a - y_a) = xy_a xy^a ;$$

el primer término es la energía cinética de la partícula y el segundo miembro describe la interacción; x y y son las coordenadas de dos puntos en las líneas de universo de las partículas a y b .

A partir de esta acción se puede describir la electrodinámica recuperándose las ecuaciones de Maxwell y Lorentz para campos mitad avanzados y mitad retardados. Para hacer esto, definimos las siguientes cantidades:

$$A_{\mu}^{(b)}(x) = e_b \int \delta(x y_{\nu} x y^{\nu}) dy_{\mu} \quad (1.7)$$

$$\text{con } x^{\mu}(x) = dx^{\mu} dx$$

$$y \quad F_{\mu\nu}^{(b)}(x) = \frac{\partial A_{\nu}^{(b)}(x)}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}^{(b)}(x)}{\partial x^{\nu}} \quad (1.8)$$

Ahora, si la identidad de Dirac:

$$\frac{\partial^2 \delta(x y_{\nu} x y^{\nu})}{\partial x_{\mu} \partial x^{\mu}} = -4\pi \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) \delta(x_3 - y_3) \delta(x_4 - y_4) \quad (1.9)$$

la multiplicamos por $dy_m(\beta) = y_m(\beta) d\beta$ en ambos lados e integramos sobre todo el espacio, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 A_{\nu}^{(b)}(x)}{\partial x_{\mu} \partial x^{\mu}} = -4\pi J_{\nu}^{(b)}(x) \quad (1.10)$$

donde:

$$J_{\mu}^{(b)}(x) = e_b \int \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) \delta(x_3 - y_3) \delta(x_4 - y_4) \quad (1.11)$$

es el cuadrivector de densidad de corriente en el punto x debido a la partícula b .

Por otro lado, la expresión 1.7 tiene divergencia nula:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\mu^{(b)}(x) = 2e_b \delta(x - x_\nu^{(b)} x_\nu^{(b)}) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (1.12)$$

Diferenciando esta expresión respecto a x^m y restándole la expresión 1.10, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} F_{\mu\nu}^{(b)}(x) = 4\pi J^\nu(x) \quad (1.13)$$

que es igual a la expresión 1.3. De aquí vemos que 1.7 y 1.8 se pueden interpretar como el potencial cuadrivectorial y el campo electromagnético, respectivamente, producidos por la partícula b. A estos campos se les conoce como campos adjuntos.

Para obtener las ecuaciones de movimiento a partir de la acción, variemos la línea de universo de la partícula a; esto producirá una variación en la acción 1.6 dada por:

$$\delta S = m_a c \int \left\{ \frac{\delta x^\mu}{c - x_\nu x_\nu^{1/2}} \right\} dx + \delta \int e_a c^{-1} \int A_\nu^{(b)}(x) x^\nu(x) dx = 0 \quad (1.14)$$

Integrando esta expresión por partes e igualando a cero los términos donde δa^m se anulan obtenemos, después de aplicar la expresión 9:

$$m_a c^2 \dot{x}_a^\mu = e_a \int F_{\mu\nu}^{(b)} x^\nu \quad (1.15)$$

Así pues, a partir de la acción 1.6 se puede hacer una descripción consistente de la electrodinámica, pero difiere de la de

Maxwell y Lorentz en :

a) Los potenciales definidos en 1.7 son la suma de potenciales mitad avanzados mas mitad retardados, es decir:

$$A_m^{(b)}(x) = \frac{1}{2} R_m^{(b)}(x) + \frac{1}{2} S_m^{(b)}(x) \quad (1.15)$$

donde R es el potencial retardado y S el potencial avanzado.

De aquí se observa que existe simetría en el tiempo lo que hace necesario reconsiderar el concepto de causalidad.

b) Quedan excluidas las interacciones del electron consigo mismo.

c) No existe el concepto de campo como una identidad independiente con grados de libertad propios.

Como una consecuencia del inciso b, no están presentes en la ecuación 1.15 los términos que corresponden a la reacción de radiación.⁹ De hecho, no hay efectos de radiación en esta teoría.

Para incluir los efectos radiativos se tiene que hacer uso de la teoría del absorbedor perfecto de Wheeler y Feynman¹⁰, la cual permite incluir los efectos radiativos y explica por que solo se observan en la naturaleza los potenciales retardados. Para ver esto, reescribamos la ecuación 1.15 como:

$$m_0 c^2 \ddot{x}_\mu = e_0 x_\nu \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu'} F_{\mu\nu}^{\text{ret}} - \frac{1}{2} \sum_{\mu'} F_{\mu\nu}^{\text{av}} \right\} \quad (1.18)$$

Sumando y restando las contribuciones de la partícula α sobre la cual se debe presentar los efectos radiativos se obtiene:

$$m_3 c^2 \ddot{x}_\mu^{\alpha} = e_3 \dot{x}_\mu^{\alpha} \left(\sum_H F_{\mu\nu}^{(H) \text{ret}} + \frac{1}{2} \left[F_{\mu\nu}^{\alpha \text{ret}} - F_{\mu\nu}^{\alpha \text{av}} \right] - \frac{1}{2} \left[F_{\mu\nu}^{\beta \text{ret}} - F_{\mu\nu}^{\beta \text{av}} \right] \right) \quad (1.19)$$

Segun la teoria del absorbente perfecto, el universo absorbe parte de la señal avanzada y retardada. Este fracción absorbida corresponde al tercer término del miembro derecho de 1.19. Así pues, tenemos que:

$$m_3 c^2 \ddot{x}_\mu^{\alpha} = e_3 \dot{x}_\mu^{\alpha} \left(\sum_H F_{\mu\nu}^{\beta \text{ret}} + \frac{1}{2} \left[F_{\mu\nu}^{\alpha \text{ret}} - F_{\mu\nu}^{\alpha \text{av}} \right] \right) \quad (1.20)$$

En esta expresión obtenemos la señal retardada que observa la partícula α debida a todas las demas partículas y los efectos radiativos de la partícula α .

Ya con esta interpretación, la acción 1.6 da la descripción completa de un sistema de partículas interactuando.

Originalmente la electrodinámica de Wheeler y Feynman se planteó como una posible manera de atacar el problema de la electrodinámica cuántica. La idea original era construir a partir de la acción 1.6 un formalismo hamiltoniano con el cual se pudiera cuantizar la teoría. Sin embargo, esto no fue posible por los problemas que posteriormente señalaremos.

1.3 Problemas asociados a las acciones tipo Fokker

A continuación se discutirán algunos puntos de las teorías relativistas de acción a distancia, que hacen necesaria la generalización de algunos conceptos manejados en la mecánica clásica

no relativista.

Primeramente se tiene que la obtencion de las ecuaciones de movimiento que se derivan de una accion tipo Fokker, no se puede generalizar trivialmente a partir de lo hecho para lagrangianos usuales $L(x, \dot{x}, t)$. Esto se debe a que la accion no local no depende únicamente de la posicion y la velocidad a un tiempo dado. Por esto, es necesario generalizar el principio variacional. El primero en trabajar la generalizacion del metodo variacional fue Marnelius. El metodo que desarrollo lo presentamos en el apéndice A .

Una vez que se generaliza el metodo variacional, también se obtiene la funcion generadora. En principio, esto nos permite obtener las cantidades conservadas, con la salvedad de tener que interpretar qué se entiende por cantidad conservada en el caso no local.

Otro problema que se tiene es que las ecuaciones de movimiento que resultan son del tipo funcional diferencial y requieren para especificar su solucion un numero infinito de condiciones iniciales. Por esto, no es trivial hacer un formalismo canónico. Aún mas, el espacio de evolución no está bien entendido. Estos dos puntos se discuten en detalle en el capítulo 2.

CAPITULO 2

Formulación Canónica para Lagrangianos tipo Fokker

En analogía con la mecánica clásica usual, a partir de una acción tipo Fokker se construye la formulación lagrangiana y la función generadora; a partir de estas se obtienen las cantidades conservadas y las ecuaciones de movimiento; se establecen sus diferencias con la mecánica clásica usual.

Para completar la descripción dinámica con base en estas teorías, se construye un formalismo hamiltoniano y se muestra su equivalencia con la descripción lagrangiana del sistema.

Formulación canónica para el caso de partículas

En la mecánica usual, la descripción dinámica de un sistema se puede hacer a partir de una acción, de la que podemos construir las ecuaciones de movimiento, la función lagrangiana y, aplicando la transformada de Legendre, obtener el hamiltoniano.

En este capítulo se va a generalizar esta descripción para las acciones tipo Fokker (1.2) y se construirá el formalismo hamiltoniano para estos sistemas. Los resultados que aquí se presentan están basados en la referencia 11.

Partamos de la acción

$$S = - \sum_{a=1}^N m_a \int (-\dot{x}_a^2)^{1/2} dt_a - \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^N g_a g_b \int dt'' dt' W_{ab}^r(t'', t') \quad (2.1)$$

donde

$$W_{ab}^r(t'', t') = G_{ab} \left[x_a(t'') - x_b(t') \right]^2 \left[-\dot{x}_a(t'') \dot{x}_b(t') \right]^r \cdot \left[-\dot{x}_a^2(t'') \right]^{(1-r)/2} \left[-\dot{x}_b^2(t') \right]^{(1-r)/2} \quad (2.2)$$

es un término que caracteriza la interacción particular con la que se está trabajando y g_a son las constantes de acoplamiento. El caso $r = 0$ corresponde a la teoría en que la interacción está mediada por un campo escalar; $r = 1$ se refiere a un campo vectorial, por ejemplo, el campo electromagnético; para $r = 2$ se tiene un campo tensorial con el que se describen ciertas teorías gravitacionales.

La acción 2.1 tiene como características importantes ser:

a) invariante relativista y, b) invariante ante reparametrizaciones, es decir, la acción no cambia al variar los parámetros t_0 por una función $t = f(t_0)$.

Para establecer una analogía con la mecánica usual hay que construir la función lagrangiana, es decir, hay que escribir 2.1 como:

$$S = \int dt L(t) \quad (2.3)$$

Para esto referimos los parámetros que aparecen en 2.1 a un parámetro común t y a un parámetro relativo ξ ¹¹

Así, si

$$t'' = t - \alpha\xi, \quad t' = t + (1 - \alpha)\xi, \quad \alpha = \text{constante} \quad (2.4)$$

la acción 2.1 se puede escribir de la forma

$$S = \int dt L(x_a(t'), t) \quad (2.5)$$

donde:

$$L = - \sum_{a=1}^N m_a (-\dot{x}_a^2)^{1/2} - \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^N g_{ab} \int_R d\xi W_{ab}^r(t - \alpha\xi, t + (1 - \alpha)\xi) \quad (2.6)$$

El valor de α puede ser cualquiera; por esto, no hay un solo lagrangiano asociado a 2.1. De hecho hay un número infinito.

Para obtener las ecuaciones de movimiento a partir de 2.5, se puede tomar la variación funcional de la acción o bien hacerlo a partir del método variacional expuesto en el apéndice A.

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen son:

$$m_a \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{x}_a(t)}{(\dot{x}_a^2)^{1/2}} \right] = g_a \sum g_b \int d\xi \left\{ -\frac{d}{dt} \left[(G_{ab} \dot{x}_a \dot{x}_b) (\dot{x}_a^2 \dot{x}_b^2)^{(1-r)/2} \right] \right. \\ \left. \cdot \left[r \frac{\dot{x}_a^r}{\dot{x}_a \dot{x}_b} + (1-r) \frac{\dot{x}_a}{(\dot{x}_a^2)} \right] \right\} + \frac{\partial G_{ab}}{\partial x_a} (\dot{x}_a \dot{x}_b)^r (\dot{x}_a^2 \dot{x}_b^2)^{(1-r)/2} \quad (2.7)$$

Esta expresión es independiente del parámetro α , por lo que no depende de la elección que se haga del lagrangiano.

La función generadora de transformaciones que se obtiene es:

$$F^r(t) = \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{(\dot{x}_a^2)^{1/2}} \dot{x}_a \delta_0 x_a(t) + \sum_{a,b=1}^N \frac{1}{2} \int d\xi F_{ab,a}^r(t, \xi) - L^r(t) \delta t \quad (2.8)$$

Como se mencionó en el capítulo 1, a partir de la función generadora se obtienen las cantidades conservadas. Esto se hace a partir de las propiedades de invariancia de la integral de acción escogiendo transformadas específicas. Esto es esencialmente el método de Dettman y Schild¹². Para ejemplificarlo consideremos una translación infinitesimal espacio-temporal: $x_a \longrightarrow x_a + \epsilon$, donde ϵ es una constante. Las variaciones de esta transformación son: $\delta x_a = \epsilon$ y $\delta t = 0$ lo que nos da la expresión para la función generadora:

$$F_a^r(t) = \epsilon P^r \quad (2.9)$$

donde P es el vector de energía-momento. Después de algunas operaciones algebraicas resulta:

$$P^0 = \sum \frac{m_a(t)}{[\dot{x}_a^2(t)]^{1/2}} \dot{x}_a(t) + \sum_a g_b \int dt \int dt' G_{ab} [x_a(t') - x_b(t'-\tau)] \cdot x [\dot{x}_a^2(t') \dot{x}_b^2(t'-\tau)]^{1/2} \quad (2.10)$$

Este método es muy laborioso y no queda clara la relación de la divergencia de las cantidades conservadas con las derivadas del lagrangiano. Sin embargo, esto es parte esencial del teorema de Noether cuya generalización para el caso no local fue desarrollada por Herman¹².

Con lo que hemos visto hasta aquí se puede explicar la expresión 2.4, el porqué del parámetro común t y lo que se entiende por cantidad conservada en el caso no local.

Cada partícula en un sistema depende de un parámetro t_a , es decir, $x_a(t_a)$; la acción está descrita en términos de estos parámetros

$$S = S [t_1, \dots, t_n] \quad (2.11)$$

A partir de ésta se pueden obtener, por ejemplo, expresiones para el vector de energía momento, que será una expresión multitemporal:

$$P(t_1, \dots, t_n)$$

Para saber si es una cantidad conservada, primero habría que determinarse respecto a cuál de todos los parámetros se da la conservación.

Para resolver este problema, identificamos los parámetros t_0 con un parámetro común t lo cual nos permite obtener cantidades unitemporales (e.g. 2.10) y la acción se puede poner en la forma 2.3.

Hasta ahora el parámetro t no se ha identificado con una cantidad particular. Como por facilidad lo que se busca es construir una teoría completamente análoga con la mecánica clásica no relativista, la manera de identificar t es:

$$x_1^0(t) = x_2^0(t) = \dots = x_n^0(t) = t \quad (2.13)$$

es decir, t se identifica con una cantidad medible que es el tiempo que se observa en un sistema inercial de referencia arbitrario.

Así pues, la conservación de una cantidad se determina respecto al parámetro t .

Otro problema de la formulación presentada, es que las ecuaciones de movimiento son de la forma funcional-diferencial, que en los casos más simples son ecuaciones con retardo y para especificar su solución se requiere de un número infinito de condiciones iniciales. Esto hace difícil entender el espacio de configuración y no es claro cómo se puede construir el espacio fase.

Para entender qué pasa con las ecuaciones de movimiento y el espacio fase, se trabajarán aquellas trayectorias de clase C^∞ . Físicamente, esta hipótesis requiere que el sistema siempre haya estado interactuando de acuerdo a 2.1. Es decir, las integrales en 2.1 son sobre \mathbb{R} . Matemáticamente, el ser C^∞ nos garantiza que las trayectorias pueden escribirse en términos de una serie de Taylor.

La sustitución de éstas en las ecuaciones de movimiento conduce a ecuaciones diferenciales ordinarias pero de orden infinito; por tanto, el especificar una solución requiere de un número infinito de condiciones iniciales.

El especificar un número infinito de condiciones iniciales más el hecho de que las trayectorias sean de clase C^∞ , genera una función que puede ser solución del problema planteado; es decir, si conocemos un tramo de la trayectoria, podemos conocerla toda vía una serie de Taylor. La pregunta que surge es: ¿qué papel juegan ecuaciones de Euler?

La función que se obtiene de las condiciones iniciales no necesariamente es solución al problema a menos que satisfaga las ecuaciones de Euler; por esto, éstas se pueden interpretar como constricciones que deben ser cumplidas por las condiciones iniciales. Así pues, ya podemos construir el espacio de evolución.

Ahora solo falta definir el espacio fase. Una posible manera para hacerlo es la siguiente: Partamos de un lagrangiano ordinario $L(q, \dot{q}, t)$ y apliquemos la transformada de Ostrogradski (apéndice A) como si el lagrangiano fuera de orden n . La transformada que resulta es singular, es decir, hay más variables de las necesarias y esto permite definir algunas constricciones¹⁴. Una vez eliminadas las variables que sobran por medio de las constricciones se obtiene un formalismo canónico análogo a la transformada de Legendre. Para esto, generalizamos el formalismo de Ostrogradski para el caso no local tomando en cuenta la posibilidad de escribir las trayectorias como series de Taylor y en consecuencia se obtiene un lagrangiano de orden $n \rightarrow \infty$.

Consideremos el lagrangiano:

$$L_t = \int_R d\xi_1 \dots d\xi_m \mathcal{L}(q_a(t+\xi_a), \dot{q}_b(t+\xi_b), \xi_c) \quad (2.14)$$

Cualquier lagrangiano de la forma 2.4 puede escribirse de esta manera utilizando funciones δ de Dirac.

Lo que se va a buscar es construir, a partir de 2.14, las ecuaciones de movimiento y el espacio de evolución.

Tomemos la acción de 2.14:

$$S = \int_R dt L_t \quad (2.15)$$

Aplicando el principio variacional desarrollado en el apéndice A, tenemos que las ecuaciones de movimiento serán:

$$\int d\xi \left[f_a(\tau-\xi, \xi) - \partial g_a(\tau-\xi, \xi) \right] = 0, \quad a = 1, \dots, m \quad (2.15)$$

donde f y g están dadas por A.10 y A.17.

Las condiciones iniciales del problema serán m curvas $q_a(\xi_a)$, con $\xi \in \mathbb{P}$, que deberán satisfacer las constricciones dadas por 2.15, ya con esto se puede conocer el espacio de evolución.

Para pasar a un formalismo canónico, en analogía con la expresión A.46 para el caso infinito, la forma del hamiltoniano se toma como:

$$H = \sum_{a=1}^m \int_R d\lambda \left[p_a(\lambda) \dot{q}_a(\lambda) - L \left([q_b(\xi_b)] \right) \right] \quad (2.16)$$

donde ξ_b y p_b cumplen con los paréntesis de Poisson elementales dados

por:

$$\left\{ q_a(\xi), p_b(\xi') \right\} = \delta_{ab} \delta(\xi - \xi') \quad (2.17)$$

$$\left\{ q_a(\xi), q_b(\xi') \right\} = \left\{ p_a(\xi), p_b(\xi) \right\} = 0$$

Las ecuaciones de Hamilton que se obtienen son:

$$\dot{H}q_a(\xi) = \left\{ q_a(\xi), H \right\} = \dot{q}_a(\xi) \quad (2.18a)$$

$$\dot{H}p_a(\xi) = \left\{ p_a(\xi), H \right\} = \dot{p}_a(\xi) + \frac{\delta L}{\delta q_a(\xi)} \quad (2.18b)$$

La ecuación 2.18a es el operador de evolución sobre la coordenada $q(\xi)$ y la ecuación 2.18b se puede escribir como:

$$\dot{H}p_a(\xi) = \dot{p}_a(\lambda) + f_a(\lambda) - \partial g(0, \lambda) \quad (2.19)$$

Esta expresión es una ecuación lineal no homogénea cuya integración nos da el operador de evolución $\theta p_a(\lambda)$.

Lo que resta es dar una expresión para el momento $p(\lambda)$ y mostrar la equivalencia entre la descripción lagrangiana dada por 2.14. Es decir, las ecuaciones de movimiento que se obtienen deben ser las mismas en ambos casos.

Dado que las trayectorias son de clase C^∞ , las posiciones se pueden escribir como una serie de Taylor, lo que nos dará una expresión generalizada de la transformada de Ostrogradski

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{a,n} q^{(n)}$$

Si hacemos la hipótesis :

$$\int d\lambda p_a(\lambda) \dot{q}_a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{a,n} q_a^{(n)} \quad (2.20)$$

De aquí que el momento asociado a 2.16 es

$$p_a(\lambda) = g_a(0, \lambda) + \int d\xi \left[f_a(\lambda - \xi, \xi) - \partial g(\lambda - \xi, \xi) \right] \cdot \left[Y(\lambda) Y(\xi - \lambda) - Y(-\lambda) Y(\lambda - \xi) \right] \quad (2.20)$$

donde $Y(\lambda)$ es la función de escalón de Heavside. Los detalles de la construcción de $p(\lambda)$ se presentan en el apéndice B.

En analogía con las ecuaciones de movimiento de Euler interpretamos 2.20 como una restricción que nos mapea el espacio de evolución en el espacio fase.

Restricciones adicionales deben ser consideradas para garantizar la estabilidad del espacio fase bajo una evolución temporal. En el apéndice B se obtiene que estas restricciones son:

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi \left[f_a(\lambda - \xi, \xi) - \partial g(\lambda - \xi, \xi) \right] = 0 \quad (2.21)$$

que coincide con las ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir de la formulación lagrangiana. De aquí que la formulación canónica propuesta sea una generalización de la transformada de Legendre.

CAPITULO 3

Introducción a la Teoría de Campos no Locales

Se presenta una introducción a las teorías de campos no locales. Primero se describen las teorías que involucran ecuaciones con derivadas de orden superior al segundo, pero finito. Se muestra que estas ecuaciones sirven para describir sistemas de partículas extendidas. Posteriormente se trata el caso de ecuaciones de orden infinito y su tratamiento, parte de un principio de acción generalizado. Finalmente, se discuten los problemas inherentes a este tipo de teorías.

3.1 Introducción

En los capítulos anteriores se estudió el formalismo para teorías no locales en el caso de sistemas discretos. En lo que resta del trabajo se extenderán estos conceptos para el caso de campos.

La historia de las teorías relativistas para campos no locales se da de la siguiente manera¹⁵: Un modelo para la electrodinámica que involucrara factores de forma fue propuesto por Wataghin en 1931. En la década de los años cuarenta Feynman y Mc Manus introducen modelos semejantes para tratar de cuantizar teorías como la electrodinámica; sin embargo, las dificultades que se presentan para hacer una formulación canónica impiden que se realice este proyecto.

La motivación principal para este tipo de teorías fue el tratar de eliminar los problemas de divergencias que existían en las teorías como la electrodinámica donde aparecen divergencias por la energía infinita de autoacción del electrón.

Las teorías de campos no locales presentaban varias dificultades como la violación de la causalidad y la aparición de partículas fantasmas, entre otras. Estos problemas y el éxito del programa de renormalización de electrodinámica cuántica, hacen que este tipo de teorías se olviden. No es sino hasta los años setenta que se desarrolla la teoría de cuerdas que permite resolver los problemas antes planteados ya que dentro de sus postulados se pide que los objetos extendidos no violen el principio de causalidad y las anomalías que surgen al cuantizar se eliminan con la elección de ciertos parámetros como la dimensión del espacio tiempo.

Actualmente, las teorías de cuerdas son las más tratadas en la literatura; sin embargo, no trabajaremos con ellas por estar

fuera del alcance de esta tesis.

2.2 Ecuaciones de orden finito superior al segundo

Los modelos no locales se formularon principalmente a partir de ecuaciones de movimiento con derivadas superiores a la segunda pero de orden finito. Una ecuación característica es

$$\left[\prod_{r=2}^N (1 - \alpha_r m_r^2)^2 \right] (1 - m_1^2) \phi(x) = 0 \quad (3.1)$$

siendo $m_r > 0$.

Esta expresión se puede interpretar como la ecuación que describe una familia de partículas, es decir, un conjunto de partículas con las mismas propiedades generales. Otra posible interpretación fue dada por Green¹⁰ quien asoció a la ecuación 3.1 partículas extendidas. Para mostrar esta interpretación reescribimos 3.1 como

$$f(\alpha) \phi(x) = 0 \quad (3.2)$$

Consideremos una fuente puntual caracterizada por la densidad de carga $\rho(r)$. Como es sabido, el factor de forma de la partícula es la transformada de Fourier de la densidad de carga:

$$F(k^2) = \frac{1}{q} \int d^3r \exp(ik \cdot r) \rho(r) \quad (3.3)$$

siendo q la carga total de la partícula.

La ecuación analoga a 3.2 para el caso de un potencial $A_\mu = (A, \phi)$ es la ecuación:

$$\square A_\mu = -4\pi J_\mu \quad (3.4)$$

donde $J = (j, \rho)$ es el cuadrivector de corriente, que es la fuente del campo.

Como caso particular para aplicar estas ecuaciones, consideremos la generalización de la ecuación de Poisson para una fuente puntual:

$$\square \phi(r) = -4\pi q \delta(r) \quad (3.5)$$

donde definimos

$$\phi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \phi(k) \exp(ik \cdot r) \quad (3.6)$$

La transformada de Fourier de 3.5 es:

$$(-k^2)(-k^2)\phi(k) = -4\pi q \quad (3.7)$$

o

$$(-k^2)\phi(k) = -4\pi q F(k^2) \quad (3.8)$$

con

$$F(k^2) = \frac{1}{(-k^2)} \quad (3.9)$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier a 3.8 se obtiene:

$$\nabla^2 \phi(r) = -4\pi\rho(r) \quad (3.10)$$

donde

$$\rho(r) = \int d^3k \, q(k^2) \exp(ik \cdot r) \quad (3.11)$$

Aquí $F(k^2)$ es el factor de forma para la densidad $\rho(r)$. Así pues, vemos que el potencial estático calculado a partir de la ecuación generalizada 3.7 es el mismo que el potencial que satisface la ecuación de Poisson usual, para partículas con un factor de forma $F(k^2)$.

Los resultados que hasta aquí se han presentado muestran que en la formulación no se observan inconsistencias obvias; la ecuación

$$f(\nabla^2)\nabla^2\phi(r) = -4\pi q(r) \quad (3.12)$$

es equivalente a

$$\nabla^2\phi(r) = -4\pi\rho(r) \quad (3.13)$$

El problema que presenta esta formulación es el referente a los campos libres, es decir, soluciones a las ecuaciones de campos para regiones donde el cuadrivector de corriente se anula. La ecuación 3.4 toma la forma:

$$f(\square)\square A_\mu = 0 \quad (3.14)$$

lo cual implica que

$$\partial_{\mu} A_{\mu} = 0 \quad (3.15)$$

o

$$f(\partial)A_{\mu} = (\square - \frac{m^2}{c^2})A_{\mu} = 0 \quad (3.16)$$

La ecuación 3.15 corresponde al caso de partículas con masa cero mientras que la otra ecuación corresponde a partículas con masa m , distinta de cero. Esto viola la experiencia física pues se predice la existencia de una familia de partículas, una de las cuales se comporta como un fotón, mientras que las otras se moverán más lentamente. Para evitar esta inconsistencia se considera que si la fuente es una partícula extendida con una densidad de carga diferente de una función δ de Dirac, entonces en cualquier punto del espacio las componentes de J_{μ} no serán necesariamente cero. Es decir, la ecuación

$$\partial_{\mu} A_{\mu} = 0$$

no es una ecuación de campo válida.

Una discusión más detallada aparece en Rieue y Green. Otros trabajos que tratan las ecuaciones con derivadas de orden superior son el Barut¹⁷, Chang¹⁸ y Wei.¹⁹ En estos trabajos también se discute la formulación canónica para estos modelos.

3.3 Ecuaciones diferenciales de orden infinito

Las teorías de campo no locales en las que fijaremos nuestra atención son aquellas que involucran ecuaciones diferenciales de orden infinito, y es a estos modelos a las que se les construirá un formalismo canónico en el siguiente capítulo.

Para describir estos modelos se usará un principio de acción estacionario generalizado.

Consideremos la acción: ²⁰

$$S = \int d^4x_1 \dots d^4x_n W(x_1, \dots, x_n) \quad n \geq 2 \quad (3.17)$$

siendo

$$W(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n) \Lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \phi_{(x_1)}^{\alpha_1} \dots \phi_{(x_n)}^{\alpha_n} \quad (3.18)$$

Aquí la función F es un factor de forma y Λ es una matriz constante.

El factor de forma se escribe como la transformada de Fourier de una función G que puede ser por ejemplo una distribución de carga.

Para formular un principio de acción de la manera usual tenemos que definir un conjunto de densidades lagrangianas para los campos. Es decir, vamos a escribir 3.17 como:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad (3.20)$$

para una densidad elegida del conjunto.

Como primer paso debemos referir las coordenadas x_i a una coordenada común x^μ ; respecto a ésta, se va a tomar la variación de la acción y se van a medir cantidades conservadas. Si pedimos que la translación $x_i \rightarrow x_i + a$ implique que $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$, podemos escoger x^μ como:

$$x^{\mu} = \sum_{i=1}^n a_i x_i^{\mu}$$

siendo a_i constantes reales que cumplen

$$\sum_{i=0}^n a_i = 1$$

Es conveniente también, introducir coordenadas relativas definidas por

$$\xi_{ij} = x_i - x_j \quad (3.21)$$

que cumplan con las siguientes propiedades:

$$\xi_{kk} = 0$$

$$\xi_{jk} = -\xi_{kj} \quad (3.22)$$

$$\xi_{ik} + \xi_{kj} = \xi_{ij}$$

La elección de estos parámetros se hace por la siguiente razón: como solo se van a considerar acciones invariantes ante el grupo de Poincaré, las funciones de forma son invariantes ante translaciones. Esto implica que F sólo depende de las diferencias entre coordenadas; así pues, podemos definir k funciones F_k , $k=1 \dots n$ de la siguiente manera:

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_k(\xi_{k1}, \dots, \xi_{kn}) \quad (3.23)$$

Utilizando 3.22 tenemos la siguiente relación

$$x_k^{\mu} = x^{\mu} + \sum_i a_i \xi_{ik}^{\mu} \quad (3.24)$$

Así pues, el integrando de la acción 3.17 es:

$$W(x_1, \dots, x_2) = F_k(\xi_{k1}, \dots, \xi_{kn}) \Lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \cdot \phi_{\alpha_1} \left(x + \sum_{i=1}^{\alpha_1} a_i \xi_{i1} \right) \dots \phi_{\alpha_m} \left(x + \sum_{i=1}^{\alpha_m} a_i \xi_{ik} \right) \quad (3.25)$$

Integrando sobre las coordenadas relativas ξ , obtenemos la densidad lagrangiana:

$$L(x) = \int \prod_{j \neq k}^n d^4 \xi_{kj} F_k(\xi_{k1}, \dots, \xi_{kn}) \Lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \cdot \phi_{\alpha_1} \left(x + \sum_{i=1}^{\alpha_1} a_i \xi_{ki} + \rho_k \right) \dots \phi_{\alpha_m} \left(x + \sum_{i=1}^{\alpha_m} a_i \xi_{ki} + \rho_k \right) \quad (3.26)$$

siendo $\rho_k = - \sum_{i=1}^n a_i \xi_{ki}$

Esta densidad lagrangiana no es única ya que depende implícitamente del parámetro a . Sin embargo, se puede demostrar que cualquier lagrangiano que se elija generará las mismas ecuaciones de movimiento.

A diferencia de la teoría de campo local, los campos asociados a 3.26 ya no dependen de un solo punto x , sino de un dominio espacio-temporal en torno a x . Es el factor de forma F lo que determina el tamaño de dicho dominio.

Una vez elegida una densidad lagrangiana se puede aplicar el principio de acción. Sin embargo, esto no es trivial por el

caracter no local de la accion; es necesario generalizar el principio de accion estacionario para este tipo de teorias. La tecnica utilizada para esto se presenta en el apendice C. Aqui sólo se citaran los principales resultados.

La acción funcional es

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad (3.27)$$

Tomando la variación se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} (-\partial_{\mu})^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} (\partial_{\mu})^{\alpha} \phi^{\alpha}} = 0 \quad (3.28)$$

y como funcion generadora:

$$FC(x) = - \int d\sigma_{\mu} \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-\partial_{\lambda})^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} (\partial_{\nu})^{\alpha} (\partial_{\lambda})^{\alpha} \phi^{\alpha}} \delta_{\sigma}^{\nu} (\partial_{\nu})^{\alpha} \phi^{\alpha} \quad (3.29)$$

donde usamos la notación

$$(\partial_{\nu})^{\alpha} = \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_{\alpha}}$$

Aplicando a la funcion generadora rotaciones, translaciones en el espacio-tiempo se obtienen cantidades conservadas, por ejemplo el tensor de energia y momento:

$$T^{\mu\nu} = -x^{\nu} g^{\mu\nu} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-\partial_{\lambda})^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} (\partial_{\rho})^{\alpha} (\partial_{\lambda})^{\alpha} \phi^{\alpha}} \partial^{\nu} (\partial_{\rho})^{\alpha} \phi^{\alpha} \quad (3.30)$$

Al igual que en el caso de partículas este procedimiento resulta laborioso y es necesario generalizar el teorema de Noether para este tipo de teorías.

3.4 Problemática de las teorías de campo no locales

Las teorías de campo no locales difieren de las teorías de campo usuales en que el principio de causalidad deja de ser válido; la no localidad implica que dos eventos separados por un intervalo espacial no dejan de ser independientes²². Para aclarar esto tomemos el siguiente caso particular²³. Considerese una función ψ que describa a una partícula extendida y tomemos como caso particular de ψ una función δ de Dirac al tiempo $t=0$; para $t \neq 0$, ψ no es necesariamente igual a cero fuera de una esfera de radio $r=ct$. Es decir, fuera del cono de luz ψ no se va a cero. Al igual que en el caso de partículas hay que reconsiderar el concepto de causalidad.

Otra diferencia que presentan estas teorías es que las ecuaciones de movimiento son del tipo íntegro-diferencial por lo que no se conoce bien el espacio de evolución. Esto dificulta la construcción de un formalismo canónico para este tipo de teorías.

Aun cuando en esta tesis solo se va a trabajar con campos clásicos, es importante mencionar que al tratar con campos cuánticos no locales no se cumple la completitud asintótica y en principio no es posible definir la matriz S , unitaria y que cumpla con el principio de causalidad cuando hay un factor de forma²⁴ involucrado.

Estos tres puntos constituyen las principales dificultades de las teorías de campo no locales. En el siguiente capítulo se discutirá más a fondo acerca del formalismo canónico y se

presentara una manera para construirlo explotando ciertas analogias con el caso de particulas.

Como se menciona en la introducción, las teorías de cuerdas no presentan estos problemas por las condiciones que deben cumplir como son el que: a) los objetos extendidos cumplan con el principio de causalidad; b) se tengan las suficientes simetrias locales para eliminar un numero infinito de coordenadas temporales que especifican al objeto; y c) que el modelo sea invariante ante reparametrizaciones. Hacemos hincapié en que no trabajaremos con teorías de cuerdas.

Capítulo 4

Formulación Canónica para Lagrangianos no Locales

Partiendo del hecho que cualquier campo se puede desarrollar en series de potencias de variables discretas $q(t)$, se construye un formalismo canónico para teorías de campo no locales aplicando lo desarrollado en el capítulo dos. Para mayor claridad de los resultados se trabaja con el modelo de Kristensen y Møller, para el cual se construyen los momentos correspondientes y se discuten los parentesis de Poisson obtenidos.

4.1 Formulación canónica para teorías no locales de campo

Si se tiene un conjunto infinito numerable de variables dinámicas $q_s, p_s, s = 1, 2, \dots$, la configuración del sistema se conoce al especificar los valores de estas variables en un instante dado. Hay muchos sistemas con un número infinito de grados de libertad como son los sistemas con campos. Su descripción no se hace usualmente en términos de q y p ; por ejemplo, si se tiene un sistema que involucra campos en un espacio tridimensional, su configuración se determina especificando los valores de ciertas funciones en cada punto en un intervalo dado.

En términos generales las variables dependientes del tiempo $q(t)$ y $p(t)$ son reemplazadas por nuevas variables $\phi(x, t)$ y $\pi(x, t)$, respectivamente. Desde un punto de vista hamiltoniano las ϕ son las coordenadas básicas y las π los momentos canónicos.

Estas dos maneras de contar grados de libertad pueden ponerse en correspondencia. Dada la descripción de un sistema en términos de un conjunto q_s y p_s , se definen nuevas variables ϕ y π como ³ :

$$\phi(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} U_s(x) q_s(t)$$

(4.1)

$$\pi(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} V_s(x) p_s(t)$$

y se tienen como paréntesis de Poisson elementales:

$$\{ \phi(x), \phi(y) \} = \{ \pi(x), \pi(y) \} = 0 \quad (4.2)$$

$$\{ \phi(x), \pi(y) \} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) V_n(y)$$

Ademas, si se pide que 4.1 no sea singular en el sentido de que se puede despejar q_n y p_n como:

$$q_n = \int d^3x U_n(x) \phi(x, t) \quad (4.3)$$

$$p_n = \int d^3x V_n(x) \pi(x, t)$$

por lo que se tiene:

$$\phi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3y U_n(x) U_n(y) \phi(y, t) \quad (4.4)$$

$$\pi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3y V_n(x) V_n(y) \pi(y, t)$$

de aqui que se cumplan las siguientes relaciones:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) U_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x) V_n(y) = \delta^3(x-y) \quad (4.5)$$

$$\int d^3x U_r(x) V_s(x) = \delta_{rs} \quad (4.6)$$

La expresion 4.2 se escribirá como:

$$\left\{ \phi(x,t), \phi(y,t) \right\} = \left\{ \pi(x,t), \pi(y,t) \right\} = 0 \quad (4.7)$$

$$\left\{ \phi(x,t), \pi(x,t) \right\} = \delta^3(x-y)$$

4.2 Modelo de Kristensen y Moller

Para entender mejor el procedimiento a seguir para construir un formalismo canonico para teorias no locales de campo, vamos a considerar un modelo particular. Trabajaremos con el modelo de Kristensen y Moller²¹ por ser muy tratado en la literatura.

Este modelo surgió en la d6cada de los cincuenta y consistió en un acoplamiento de Yukawa no local para describir interacciones nucleon-meson. El modelo parte de la accion funcional

$$S = S_0 + S_1 \quad (4.8)$$

siendo

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^4x \left[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 + \bar{\psi} \gamma^\mu \delta_\mu^\nu \psi - m \bar{\psi} \psi \right] \quad (4.9)$$

la accion para la parte libre y

$$S_1 = -g \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 F(x_1, x_2, x_3) \bar{\psi}(x_1) \gamma_5 \phi(x_2) \psi(x_3) \quad (4.10)$$

la accion correspondiente a la parte de interacción. Aqui, ψ

representa a un nucleón y ϕ a un mesón.

El factor de forma F debe ser invariante ante translaciones por lo que cumple con:

$$F(x_1, x_2, x_3) = F(x_2 - x_1, x_3 - x_1), F_2(x_1 - x_2, x_3 - x_2) \text{ o } F(x_1 - x_3, x_2 - x_3)$$

es decir las funciones F_k , $k=1,2,3$ dependen de argumentos que son invariantes de Lorentz.

Para introducir una densidad lagrangiana debemos escribir la acción 4.8 como

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad (4.11)$$

Para esto hagamos el cambio:

$$\xi_1 = x_3 - x_2, \quad \xi_2 = x_1 - x_2, \quad x = x_2$$

Esto nos permite escribir la acción como:

$$S = S_0 - g \int d^4x d^4\xi_1 d^4\xi_2 F(\xi_1, \xi_2) \bar{\psi}(x+\xi_2) \gamma_3 \phi(x) \psi(x+\xi_1) \quad (4.12)$$

De la generalización del principio variacional presentado en el apéndice C tenemos que las ecuaciones de movimiento serán:

$$(\square + m^2)\phi(x) = -g \int d^4x d^4\xi_1 d^4\xi_2 F(\xi_1, \xi_2) \cdot \bar{\psi}(x+\xi_2) \gamma_3 \psi(x+\xi_1) \quad (4.13)$$

$$(-i\partial - m)\psi(x) = g \int d^4\xi_1 d^4\xi_2 F(\xi_1, \xi_2) \cdot \\ \cdot (\gamma_5 \phi(x - \xi_2) \psi(x - \xi_2 + \xi_1)) \quad (4.14)$$

$$-i\partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu - m\bar{\psi}(x) = g \int d^4\xi_1 d^4\xi_2 F(\xi_1, \xi_2) \cdot \\ \cdot \bar{\psi}(x - \xi_1 + \xi_2) (\gamma_5 \phi(x - \xi_1)) \quad (4.15)$$

Utilizando la expresión para la función generadora (c.6) se pueden obtener cantidades conservadas medidas respecto a la parte temporal de la coordenada comun x.

A partir de 4.13 podemos obtener también, la expresión para el lagrangiano asociado a este modelo, que será:

$$L(x) = -\frac{1}{2} \left[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 + i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \right] - \\ - g \int d^4\xi_1 d^4\xi_2 F(\xi_1, \xi_2) \bar{\psi}(x + \xi_2) \gamma_5 \phi(x) \psi(x + \xi_1) \quad (4.18)$$

Finalmente, hay que notar que la acción para este modelo no es invariante ante reparametrizaciones lo que tendrá algunas implicaciones al construir el formalismo hamiltoniano.

4.3 Formulación canonica para el modelo de Kristensen y Moller

Los resultados presentados en la sección 4.1 nos permiten escribir cualquier modelo descrito por medio de campos en términos de variables discretas q_i por lo que se puede aplicar los

resultados obtenidos para el caso de partículas.

Después de algunos desarrollos que se presentan en el apéndice D, tenemos que en analogía con el caso de partículas la variación de la acción 4.8 genera las ecuaciones de movimiento:

$$\int_R d\xi_i \left[f_{\alpha i}^{t_0} (t - \xi_i + t_0, \xi_i - t_0) - \partial_i g_{\alpha i}^{t_0} (t - \xi_i + t_0, \xi_i - t_0) \right] = 0 \quad (4.17)$$

siendo

$$f_{\alpha i}^{t_0} (t - \xi_i + t_0, \xi_i - t_0) = \int_R \prod_{\alpha \neq i}^{m-1} d\xi_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha i} (t)} \quad (4.18)$$

y

$$g_{\alpha i}^{t_0} (t - \xi_i + t_0, \xi_i - t_0) = \int_R \prod_{\alpha \neq i}^{m-1} d\xi_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_{\alpha i} (t))} \quad (4.19)$$

donde \mathcal{L} es la densidad lagrangiana que se obtiene de escribir 4.17 como

$$L = \int \prod d\xi_i^0 \mathcal{L}$$

El subíndice α caracteriza a los distintos campos y el superíndice t_0 indica que la función es un desarrollo en series de potencias en torno a t_0 .

Para pasar al formalismo canónico, tomaremos el hamiltoniano como:

$$H = \int \sum_{i=0}^N \pi_{\alpha_i}^{t_0}(x) \phi_{\alpha_i}^{t_0}(x) dt - x \quad (4.20)$$

siendo $\pi(x)$ los momentos correspondientes a las funciones de campo $\phi(x)$, que cumplen con los parentesis de Poisson:

$$\left\{ \phi_{\alpha_i}^{t_0}(x), \phi_{\alpha_j}^{t_0}(y) \right\} = \left\{ \pi_{\alpha_i}^{t_0}(x), \pi_{\alpha_j}^{t_0}(y) \right\} = 0 \quad (4.21)$$

y

$$\left\{ \phi_{\alpha_i}^{t_0}(x), \pi_{\alpha_j}^{t_0}(y) \right\} = \delta_{ij} \delta^4(x-y) \quad (4.22)$$

Si se hace un desarrollo analogo a 4.1 y se aplica la transformada de Ostrogradski a las variables discretas $q(t)$ como se hizo en el capítulo 2, es posible obtener expresiones para los momentos $\pi(x)$ (apéndice D).

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha_i}^{t_0}(x) = & g_{\alpha_i}^{t_0}(t_0, \xi_i - t_0) + \int d\xi_i \left[f_{\alpha_i}^{t_0}(t - \xi_i + t_0, \xi_i - t_0) - \right. \\ & \left. - \partial_i g_{\alpha_i}^{t_0}(t - \xi_i + t_0, \xi_i - t_0) \right] \times \left[Y(t - t_0) Y(\xi_i - t) - Y(t_0 - t) Y(t - \xi_i) \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para el caso particular del modelo de Kristensen y Moller la forma explícita de los momentos será:

$$\pi_{\alpha_i}^{t_0}(x) = \phi(t_0, \vec{x}^i) \delta(t - t_0) \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \pi_{\psi}^{\dagger 0}(x) &= -\frac{i}{2} \gamma_0^{\alpha\beta} \gamma^0 \bar{\psi}(t_0, \vec{x}) \delta(t-t_0) - i \int d^4\xi_1 d^4\xi_2 \\ &\cdot F(t-\xi_1^0-t_0, \vec{\xi}_1, \xi_2) \bar{\psi}(t-\xi_1^0+t_0, \xi_2^0, \vec{x}+\vec{\xi}_2) \gamma_0 \\ &\cdot \delta^4(\xi_2) \phi(t-\xi_1^0+t_0, \vec{x}) K_i \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \pi_{\bar{\psi}}^{\dagger 0}(x) &= -\frac{i}{2} \gamma^0 \psi(t_0, \vec{x}) \delta(t-t_0) - i \int d^4\xi_1 d^4\xi_2 \\ &\cdot F(t-\xi_2^0-t_0, \vec{\xi}_2, \xi_1) \gamma_0 \phi(t-\xi_2^0+t_0, \vec{x}) \\ &\cdot \psi(t-\xi_2^0+t_0, \xi_1^0, \vec{x}+\vec{\xi}_1) K_i \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde hemos definido :

$$K_i = \left[Y(t-t_0) Y(\xi_i^0-t) - Y(t_0-t) Y(\xi_i^0) \right]$$

Al hacer el desarrollo de los momentos y los campos en torno a t_0 , las componentes del mismo orden de derivación son variables canónicas conjugadas.

La expresión para el momento del campo escalar (4.24) es muy simple y no involucra el término de interacción. Esto se debe a que en la acción 4.11 se privilegió la coordenada correspondiente a este campo. Si la elección se hubiera hecho sobre alguno de los campos espinoriales, éstos no involucrarían la parte de interacción.

Por la misma razón los parentesis de Poisson para el caso escalar se reducen a los usuales, como a continuación se muestra:

Tomemos el parentesis

$$\left\{ \phi^{\dagger 0}(x), \bar{\pi}^{\dagger 0}(y) \right\} = \delta^4(x-y) \quad (4.27)$$

siendo

$$\phi^{\dagger 0}(x) = \int dt \phi(x) \delta(t-t_0)$$

y

$$\bar{\pi}^{\dagger 0}(y) = \phi(x, \vec{y})$$

Así pues tenemos:

$$\begin{aligned} \left\{ \phi^{\dagger 0}(x), \bar{\pi}^{\dagger 0}(y) \right\} &= \int dt \delta(t-t_0) \left\{ \phi(x), \bar{\pi}(t_0, \vec{y}) \right\} \\ &= \int dt \left\{ \phi(t_0, \vec{x}), \bar{\pi}(t_0, \vec{y}) \delta(t-t_0) \right\} \\ &= \int dt \left\{ \phi(t_0, \vec{x}), \bar{\pi}(t, \vec{y}) \right\} \\ &= \int dt \delta^4(x-y) \\ &= \int dt \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta(t-t_0) \\ &= \delta^4(x - y) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Para los momentos de los campos espinoriales los paréntesis involucran un término correspondiente a la parte de interacción por lo que no se reducen a los paréntesis usuales a menos que la interacción sea muy débil: por ejemplo, cuando t_0 tiende a $\pm \infty$. Esto significa que las $\bar{\pi}$ y ϕ no son variables canónicas.

conjugadas. La pregunta que surge es: ¿ se pueden construir campos $\psi(x)$ tales que junto con el campo escalar $\phi(x)$ sean variables canónicas?. Este problema fue tratado por Pauli²⁵, quien sugirió una forma para $\mathcal{U}(x)$ dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x) = & \psi(x) + g \int d^4\xi_1 d^4\xi_2 F(\xi_1, \xi_2) \int d^4x' \\ & \cdot \theta(x_0 - x'_0) S(x-x') \gamma_0 \phi(x' - \xi_2) \psi(x' - \xi_2 + \xi_1) - \\ & - S(x-x' - \xi_2) \gamma_0 \phi(x) \psi(x' + \xi_1) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Esta expresión es muy semejante a los momentos 4.25 y 4.26; faltaría mostrar la equivalencia entre los resultados presentados en la tesis y los de Pauli.

Otros puntos de interés son los siguientes. De la expresión 4.20, vemos que para un lagrangiano que se elija se le puede construir su hamiltoniano. Cada lagrangiano tendrá asociadas ciertas densidades conservadas que no serán las mismas en cada caso; sin embargo, la integral de las densidades conservadas, las cantidades conservadas, deben estar unívocamente determinadas. Un problema que queda abierto es si estas coinciden con las cantidades conservadas que se pueden construir en el espacio fase.

Aun cuando por completez sería interesante tratar los puntos arriba mencionados, vemos que lo desarrollado en este capítulo nos permite obtener una formulación canónica satisfactoria y junto con el formalismo lagrangiano existente, se tiene una descripción formal de la dinámica de las teorías de campos no locales análoga al tratamiento de la mecánica clásica usual.

Conclusiones

La finalidad de esta tesis ha sido obtener una formulación hamiltoniana para campos no locales, utilizando resultados para modelos no locales de partículas.

La formulación canónica para el caso de partículas tiene como problema principal el que el espacio de condiciones iniciales es de dimensión infinita. Si se especifica un número infinito de condiciones iniciales podemos conocer la trayectoria del sistema; además nos restringimos a trayectorias de clase C^{∞} .

La pregunta que surge es : ¿ qué papel juegan las ecuaciones de Euler ? Para especificar las condiciones iniciales se debe tener cuidado que éstas son consistentes con el problema planteado; esto se logra si satisfacen las ecuaciones de Euler. Por esto, dichas ecuaciones se pueden interpretar como constricciones.

La formulación de un formalismo canónico parte de la generalización de la transformada de Ostrogradski, cuando el número de coordenadas tiende a infinito, y considerando las coordenadas de las partículas como un desarrollo en series de potencias en torno a un punto t_0 .

Para aplicar estos resultados al caso de campos sobre el espacio-tiempo, se parte de la hipótesis de que cualquier campo se puede expandir en series de las coordenadas discretas $q(t)$, por lo que la aplicación de los resultados anteriores es directa.

La generalización al caso de campos se hizo con el modelo de Kristensen y Moller para lograr una mayor claridad en los resultados. La acción de este modelo, a diferencia de la tratada en el caso de partículas, no es invariante ante

reparametrizaciones. Si de manera particular privilegiamos una de las coordenadas, se observa que el momento correspondiente toma una forma muy simple y el par de parentesis de Poisson que se obtiene es el usual. En los parentesis para los otros momentos, aparece un termino de interaccion, lo que clásicamente significa que las funciones de campo y los momentos no son variables canónicas conjugadas.

Dados dos lagrangianos, sus respectivas acciones deberían ser invariantes salvo una derivada total; sin embargo, no es claro para el modelo de Kristensen y Moller que exista una función generadora de transformaciones canónicas para que se cumpla esta invariancia. Aún mas, tal vez es necesario generalizar el concepto de transformación canónica.

Para tener una idea de las aplicaciones que el formalismo desarrollado pueda tener, en un trabajo futuro se piensa aplicar a teorías no locales con las que se trabaja actualmente como son las teorías de cuerdas. Por otro lado, un problema que no ha sido tratado es el de formular claramente el teorema de Noether para campos no locales. Esto completaría la descripción de estas teorías, como en el caso de la mecánica usual.

Finalmente, se puede intentar cuantizar la teoría. A diferencia de partículas donde se obtendría una primera cuantización, en el caso de campos se trata de una segunda cuantización. En los trabajos en los que se ha discutido este último punto, aparece como problema la construcción de la matriz S , debido a que no se cuenta con los paréntesis de Poisson usuales; por consiguiente, sigue siendo un problema vigente la cuantización de campos no locales.

APÉNDICE A Método Variacional Generalizado

a) Método variacional generalizado

Aquí se van a presentar los principales resultados del trabajo de Marnelius.

La idea que siguió fue considerar un lagrangiano local de orden n , a partir del cual se obtienen las ecuaciones de movimiento y la función generadora. Estos resultados se generalizan para el caso en que n tiende a infinito. Posteriormente se considera un lagrangiano no local; expandiendo las posiciones como una serie de Taylor, se retoma lo desarrollado para los lagrangianos de orden infinito.

Formalmente estas ideas se desarrollan de la siguiente manera.

Considere un lagrangiano de la forma

$$L^n(t) = L(x_a^t, Dx_a^t, \dots, D^n x_a^t) \quad n < \infty \quad (A.1)$$

donde $D = d/dt$

La acción para este caso es:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L^n(t) \quad (A.2)$$

Tomando la variación de A.2 obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial L^n(t)}{\partial x_a^t(t)} - D p_{a,t}^t = 0, \quad a=1, \dots, n \quad (A.3)$$

y la función generadora:

$$F(t) = - \sum_{a=1}^N \sum_{l=0}^{N-1} p_{a,l+1}^l \delta o D x_a^l - L^n \delta t \quad (\text{A.4})$$

donde:

$$p_{a,r}^l = \sum_{k=0}^{n-r} (-D)^k \frac{\partial L(t)}{\partial D^{k+r} x_a^l}, \quad r = 1, \dots, n; \quad a = 1, \dots, n \quad (\text{A.5})$$

Haciendo n tender a infinito, 1.23 y 1.24 se reescriben como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-D)^k \frac{\partial L(t)}{\partial D^k x_a^l} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$F(t) = - \sum_{a=1}^N \sum_{l,k}^{\infty} (-D)^k \frac{\partial L(t)}{\partial D^{k+l} x_a^l} \delta o D^l x_a^l - L(t) \delta t \quad (\text{A.7})$$

Consideremos ahora un lagrangiano no local de la forma

$$L_I(t) = \int d\xi \mathcal{L}(x_a(t+\xi), \dots) \quad (\text{A.8})$$

donde el significado de t y ξ se explicará posteriormente. Las ecuaciones de movimiento que se derivan de la ultima expresion son:

$$\frac{\partial L_I(t)}{\partial [D^r x_a(t)]} = \int d\xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_a(t+\xi)} \frac{\partial x_a(t+\xi)}{\partial [D^r x_a(t)]} = \int d\xi \mathcal{L}(t, \xi) \frac{\xi^r}{r!} \quad (\text{A.9})$$

de la que hemos definido:

$$f_a(t, \xi) = \frac{\partial L}{\partial x_a(t+\xi)} \quad (A.10)$$

$$\cdot x_a(t+\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\xi^l}{l!} D^l x_a(t) \quad (A.11)$$

De la expresion 1.27 se obtiene que la funcion generadora sera:

$$F_a(t) = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \int d\xi \frac{\xi^k}{(k+l+1)!} c(\xi) D^k f_a(t, \xi) \delta_0 [c(\xi) D^l x_a(t)] \quad (A.12)$$

que puede ser escrita como una convolucion (ver referencia 11):

$$F_a(t) = - \int d\xi \int d\lambda \Delta(t-\lambda, \xi, 2) f_a(t'-\xi, 2, \xi) \delta_0 x_a(t'+\xi, 2) \quad (A.13)$$

donde $\Delta(t, \lambda) = \theta(t+\lambda) - \theta(t-\lambda)$, y θ es la función de escalon.

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir de A.8 y A.9 son:

$$\int d\xi f_a(t-\xi, \xi) = 0 \quad (A.14)$$

Consideremos ahora un lagrangiano con una dependencia funcional en \dot{x} :

$$L'(t) = \int d\xi \mathcal{L}'(\dot{x}_a(t+\xi), \dots) \quad (A.15)$$

Procediendo de la misma manera que con 1.29 tenemos que:

$$\frac{\partial L'(t)}{\partial [D^r x_a(t)]} = \int d\xi \frac{\partial L'}{\partial x_a(t+\xi)} \frac{\partial x_a(t+\xi)}{\partial [D^r x_a(t)]} = \int d\xi g_a(t, \xi) \frac{\xi^{r-1}}{(r-1)!} \quad (\text{A.16})$$

donde definimos:

$$g_a(t, \xi) = \frac{\partial L'}{\partial x_a(t+\xi)} \quad (\text{A.17})$$

$$y \quad x_a(t+\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\xi^l}{l!} D^{l+\xi} x_a(t) \quad (\text{A.18})$$

En este caso la función generadora está dada por:

$$F(t) = -\sum \sum \int d\xi \frac{\xi^k}{(k+1)!} (-\xi D)^k D g_a(t, \xi) \delta_0 [(-\xi D)^k x_a(t)] - \int d\xi g_a(t, \xi) \delta_0 x_a \quad (\text{A.19})$$

Esta expresión también puede ser escrita como una convolución:

$$F_a(t) = \int d\xi \int dt' \Delta(t-t', 1/2) D^k g_a(t'-1/2) \delta_0 x_a(t'+1/2) - \int d\xi g_a(t, t') \delta_0 x_a(t) \quad (\text{A.20})$$

La función generadora para un lagrangiano que depende de las posiciones y las velocidades, estará dada, según A.13 y A.20 por:

$$F(t) = \sum_a F_a(t) + \sum_a F_a(t) - L(t) \delta t \quad (\text{A.21})$$

b) Construcción del formalismo canónico

En esta sección presentamos los principales resultados de la referencia 14 para construir un formalismo canónico.

Basicamente lo que se hace es asociar a los lagrangianos no locales un lagrangiano local de orden n , cuando n tiende a infinito. Para los lagrangianos de orden n , se sabe cómo construirles un formalismo canónico que se generaliza para cuando n tiende a infinito.

Consideremos un lagrangiano no local de la forma:

$$L = - \sum_{a=1}^N m_a (1 - \dot{x}_a^2)^{1/2} - \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N g_a g_b \int_R d\xi W_{ab}(t - a\xi, t + (1-a)\xi) \quad (\text{A.22})$$

Para asociar a A.41 un lagrangiano de orden infinito, consideramos que las posiciones son de clase C^∞ lo cual nos permite escribirlas como una serie de Taylor en torno a un punto t_0 :

$$x_a(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^s}{s!} q_a^{(s)}(t_0) \quad (\text{A.23})$$

Sustituyendo A.23 en A.21 obtenemos:

$$L_a^\infty = - \sum m_a (1 - \dot{x}_a^2)^{1/2} - \frac{1}{2} \sum g_a g_b \sum \frac{1}{(2s)!} \left[(1-\alpha)\hat{D} - \hat{D} \right]^{2s} \\ \left[(1 - \dot{x}_a \dot{x}_b)^s (1 - \dot{x}_a^2)^{(1-s)/2} (1 - \dot{x}_b^2)^{1-s/2} \mathbb{W}_{ab}^s(r_{ab}) \right] \quad (\text{A.24})$$

donde :

$$D = \sum_{a=1}^N D_a, \quad D_a = \sum_{s=0}^{\infty} x_a^{(r+s)} \frac{\partial}{\partial x_a^r}$$

y

$$\delta_{ab}^s(r) = \int d\theta \theta^{r+s} G_{ab}(\theta^2 - r^2) \quad (\text{A.25})$$

Las ecuaciones de movimiento que se derivan de A.43 son:

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-D)^r \frac{\partial L^{\infty}}{\partial x_a^r} = 0 \quad (\text{A.26})$$

Estas ecuaciones son de orden infinito por lo que el espacio de evolución debe ser también, de dimensión infinita.

Para pasar al formalismo hamiltoniano en el caso de un lagrangiano de orden n, se utiliza la transformada de Ostrogradski. Esta convierte el espacio de evolución en el espacio fase, es decir:

$$\langle q_a^{(1)}, q_b^{(1)}, \dots, q_c^{(n-1)}, \dots, q_e^{(2n-1)} \rangle \longrightarrow \langle q_a, \dots, q_c^{(1)}, p_{a0}, p_{b0}, \dots, p_{c,n-1} \rangle$$

El hamiltoniano que se obtiene es:

$$H = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{a=1}^m p_{a,k} q_a^{(k+1)} - LC(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (\text{A.27})$$

donde la transformada de Ostrogradski queda definida como:

$$p_{a,r} = \sum_{k=r+1}^N (-D)^{k-r-1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_a^{(k)}} \right] \quad (\text{A.28})$$

Los momentos así definidos satisfacen los paréntesis de Poisson

elementales:

$$\{q_a^r, p_{b,s}\} = \delta_{ab} \delta_s^r :$$

(A.29)

$$\{q_a, q_b\} = \{p_a, p_b\} = 0$$

Las expresiones A.46 y A.47 se generalizan para el caso infinito, simplemente cambiando n por infinito. Sin embargo, al hacer esta generalización no queda claro como convertir el espacio de evolución en el espacio fase, es decir, no se sabe que derivadas de las posiciones deben convertirse en momentos.

Es a partir de este hamiltoniano infinito que se construye el formalismo hamiltoniano para el caso no local, como se hizo en el capítulo 2.

APENDICE B Construcción del espacio fase para lagrangianos tipo Fokker

En este apéndice se presenta la construcción de los momentos $p(\lambda)$ de la formulación canónica para el caso no local.

Para construir el hamiltoniano no local, se cambiarán las variables discretas por variables continuas y las sumas por integrales. De aquí que la relación entre los momentos en el caso discreto y continuo sea:

$$\int d\lambda p_a(\lambda) \dot{q}_a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{a,n} q_a^{(n+1)} \quad (B.1)$$

Considerando que se ha trabajado con curvas de clase C^∞ y que las posiciones se pueden escribir como:

$$q_a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} q_a^{(n)} \quad (B.2)$$

obtenemos, a partir de B.1:

$$p_{a,n} = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} d\lambda \lambda^n p_a(\lambda) \quad (B.3)$$

Esta expresión sugiere que $p(\lambda)$ se puede considerar como una función generalizada actuando sobre un cierto espacio de funciones de prueba $\phi(\lambda)$, de acuerdo a:

$$\int_{\mathbb{R}} d\lambda P_a(\lambda) \phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{a,n} \phi^{(n)}(0) \quad (\text{B. 4})$$

donde:

$$\phi^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n \phi}{d\lambda^n} \right|_{\lambda=0} \quad (\text{B. 5})$$

Substituyendo la expresi3n A.29. para cuando n tiende a infinito. en B.4 obtenemos:

$$\int d\lambda P_a(\lambda) \phi(\lambda) = \int d\xi \sum_{n=0}^{\infty} (c-D)^n \left[f_a(0, \xi) \frac{\xi^{n+1}}{(n+1)!} + g_a(0, \xi) \frac{\xi^{n+1}}{(n+1)!} \right] \phi^{(n)}(0) \quad (\text{B. 6})$$

Resumando las series se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}} d\lambda P_a(\lambda) \phi(\lambda) = \int_0^{\xi} d\xi \left[g_a(0, \xi) \phi(\xi) + \int_0^{\xi} d\lambda \phi(\lambda) \left[f_a(\lambda-\xi, \xi) - \partial_{\lambda} g_a(\lambda-\xi, \xi) \right] \right] \quad (\text{B. 7})$$

Finalmente. factorizando $\phi(\xi)$ tenemos:

$$P_a(\lambda) = g_a(0, \lambda) + \int d\xi \left[f_a(\lambda-\xi, \xi) - \partial_{\lambda} g_a(\lambda-\xi, \xi) \right] \cdot \left[Y(\lambda)Y(\xi-\lambda) - Y(-\lambda)Y(\lambda-\xi) \right] \quad (\text{B. 8})$$

siendo Y la funci3n escal3n de Heavside.

Ahora sólo falta ver qué condición se debe cumplir para garantizar la estabilidad de las constricciones primarias. Para esto escribamos la expresión B.8 como:

$$p_a(\lambda) = A_a(q_b, \xi_b), \lambda \quad (B.9)$$

o bien:

$$p_a(\lambda) - A_a(q_b, \xi_b), \lambda = 0$$

Para garantizar la estabilidad de B.9 se debe cumplir que:

$$\hat{H}p_a(\lambda) - \hat{H}A_a(q_b, \xi_b), \lambda = 0 \quad (B.10)$$

El operador \hat{H} actúa en el espacio fase mientras que A_a está en función de variables del espacio de evolución; por esto es necesario aplicar a A_a el operador de derivada temporal de su espacio. Es decir hay que demostrar que :

$$\hat{H}p_a(\lambda) - \hat{D}A_a(q_b, \xi_b), \lambda = 0 \quad (B.11)$$

donde $D = \partial_t$

De la expresión 2.19 tenemos que:

$$\begin{aligned} \hat{H}p_a(\lambda) = & \partial_{\lambda} g_a(0, \lambda) - f_a(0, \lambda) + \int_{\mathbb{R}} d\xi \partial_{\lambda} \left[f_a(\lambda - \xi) - \partial_{\lambda} g_a(\lambda - \xi, \xi) \right] \cdot \\ & \cdot \left[Y(\lambda)Y(\xi - \lambda) - Y(\lambda - \xi)Y(\xi) \right] + \delta(\lambda) \int_{\mathbb{R}} d\xi \left[f_a(\lambda - \xi) - \partial_{\lambda} g_a(\lambda - \xi, \xi) \right] + \\ & + f_a(0, \lambda) - \partial_{\lambda} g_a(0, \lambda) \end{aligned} \quad (B.12)$$

y también tenemos que :

$$DA_a([q_b(\xi_b)], \lambda) = \partial_{\xi} g_a(0, \lambda) + \int d\xi \partial_{\lambda} \left[f_a(\lambda - \xi, \xi) - \partial_{\lambda} g_a(\lambda - \xi, \xi) \right] \cdot \left[Y(\lambda) Y(\lambda - \xi) - Y(\lambda - \xi) Y(\lambda - \xi) \right] \quad (B.13)$$

Restando B.13 de B.12 obtenemos:

$$\hat{H}p_a(\lambda) - \hat{D}A_a([q_b(\xi_b)], \lambda) = \delta(\lambda) \int_{\mathbb{R}} d\xi \left[f_a(\lambda - \xi, \xi) - \partial_{\lambda} g_a(\lambda - \xi, \xi) \right] \quad (B.14)$$

Esta expresión se hace cero si:

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi \left[f_a(0, \xi) - \partial_{\lambda} g_a(0, \xi) \right] = 0 \quad (B.15)$$

Hay que notar que las posiciones y momentos se expandieron siempre en torno a un tiempo igual a cero. Si éstas se hubieran hecho en torno a un punto λ_0 , la expresión anterior estaría en función de λ_0 .

Apéndice C

Principio variacional generalizado para el caso de campos

Para generalizar el principio variacional al caso de campos no locales, primero se trabajará con lagrangianos locales de orden superior al segundo pero finitos.

Considérese la siguiente acción:

$$S = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathcal{L}^{(n)}(x) d^4x \quad (c.1)$$

donde σ_1 y σ_2 son superficies espacio temporales.

La variación de esta acción es:

$$\delta S = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sum_{n=0}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu}^{(n)}} \delta_0 \phi_{\mu}^{(n)} \quad (c.2)$$

después de integrar por partes se obtiene como ecuaciones de movimiento

$$\sum_{i=0}^N (-\partial_{\mu}^i)^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu}^{(i)} \phi^{\alpha}} = 0 \quad (c.3)$$

siendo $(\partial_{\nu}^i)^{\alpha} = \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_i}^{\alpha}$.

y como función generadora:

$$FC(\sigma) = - \int_0^\sigma d\sigma_\mu \sum_{\lambda=0}^N (-\partial_\lambda)^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_\mu (\partial_\nu)^m (\partial_\lambda)^l \phi^\alpha} \delta_\sigma (\partial_\nu)^m \phi^\alpha \quad (c.4)$$

Para pasar a la generalización al caso no local, los campos se desarrollan en series de Taylor en torno a un punto x . EL lagrangiano resultante es de orden infinito e involucra derivadas de orden infinito. Las ecuaciones de movimiento y la función generadora que resulta, son iguales a c.3 y c.4 pero haciendo N tender a infinito, es decir:

$$\sum_{l=0}^{\infty} (-\partial_\mu)^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_\mu (\partial_\mu)^l \phi^\alpha} = 0 \quad (c.5)$$

y

$$FC(\sigma) = - \int_0^\sigma d\sigma_\mu \sum_{l=0}^{\infty} (-\partial_\lambda)^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_\mu (\partial_\nu)^m (\partial_\lambda)^l \phi^\alpha} \quad (c.6)$$

Como vemos, prácticamente se sigue el mismo método empleado para el caso de partículas y la aplicación directa de la última expresión nos proporciona información sobre las cantidades conservadas.

Apendice D

Generalización del formalismo canónico al caso de campos

En este apéndice se van a presentar los desarrollos que nos permiten retomar el formalismo de partículas para el caso de campos.

LA acción con la que se trabajará es la de Kristensen y Møller que se escribe como:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \left\{ \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \right\} \prod \delta^4(x - x_i) - g F(x_1, x_2) (\bar{\psi}(x_1) \gamma_5 \phi(x_2) \psi(x_1)) \delta^4(x_1) \quad (D.1)$$

Sustituyendo los campos por:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_n U_n(x) q_n(t) \\ \psi(x) &= \sum_n U_n^b(x) Q_n^b(t) \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_n U_n^{Ma}(x) \gamma_0^{ab} Q_n^{Ma}(t) \end{aligned} \quad (D.2)$$

obtenemos a partir de D.1 la siguiente densidad lagrangiana:

$$\begin{aligned}
Z = & \left[U_{st} \dot{q}_s \dot{q}_t - \dot{U}_{st} q_s q_t - m^2 U_{st} q_s q_t + U_{r\nu} Q^{*b} (l + \xi_2^0) \dot{Q}_\nu^a (l + \xi_1^0) - \right. \\
& - U_{r\nu} Q_r^{*b} (l + \xi_2^0) \dot{Q}_\nu^a (l + \xi_1^0) - U_{r\nu} Q_\nu^a (l + \xi_1^0) \dot{Q}_r^{*b} (l + \xi_2^0) - U_{\nu,r} Q_\nu^a (l + \xi_1^0) \cdot \\
& \left. \cdot \dot{Q}_r^{*b} (l + \xi_2^0) - m U_{r\nu} Q_r^{*b} (l + \xi_2^0) \dot{Q}_\nu^a (l + \xi_1^0) \right] \delta \xi_1^0 \delta \xi_2^0 \delta \xi_3^0 + \\
& + F_{r\nu,s}^{ab} Q^{*b} (l + \xi_2^0) q_s (l + \xi_3^0) \dot{Q}_\nu^a (l + \xi_1^0) \delta \xi_3^0 \quad (D.3)
\end{aligned}$$

siendo

$$U_{st} = \Lambda_{st} U_s (\vec{x} + \vec{\xi}_3) U_t (\vec{x} + \vec{\xi}_3)$$

$$\dot{U}_{st} = \Lambda_{st} \dot{U}_s (\vec{x} + \vec{\xi}_3) \dot{U}_t (\vec{x} + \vec{\xi}_3)$$

(D.4)

$$U_{r\nu} = -i \Lambda_{r\nu} U_r^{*b} (\vec{x} + \vec{\xi}_2) U_\nu^a (\vec{x} + \vec{\xi}_1) \gamma_0^{ab} \gamma^i$$

$$U_{r,\nu} = -i \Lambda_{r\nu} U_r^{*b} (\vec{x} + \vec{\xi}_2) \partial_i U_\nu^a (\vec{x} + \vec{\xi}_1) \gamma_0^{ab} \gamma^i$$

$$\Lambda_{ab} = \sum_{\alpha, \beta} \int d^3 x \prod_i d^3 \xi_i \delta^3 (\xi_i) \quad (D.5)$$

$$\begin{aligned}
F_{r\nu,s}^{ab} = & -g \int \prod d^3 \xi_i d^3 x F(\xi_1, \xi_2) \sum_{r,\nu,s} U_r^{*b} (\vec{x} + \vec{\xi}_2) \gamma_0^{ab} U_s (\vec{x} + \vec{\xi}_3) \cdot \\
& \cdot U_\nu^a (\vec{x} + \vec{\xi}_1) \gamma_0^{ab} \delta^3 (\xi_2) \quad (D.6)
\end{aligned}$$

Al lagrangiano D.3 se le aplica el formalismo desarrollado para el caso de partículas; es decir, desarrollamos las posiciones

en series de Taylor en torno a un tiempo t_0 (A.42), y calculamos las funciones

$$f_{\alpha_i}(t - \xi_i + t_0, \xi_i - t_0) = \int_a^b \prod_{\alpha} d\xi_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha_i}(t)} \quad (D.7)$$

$$g_{\alpha_i}(t - \xi_i + t_0, \xi_i - t_0) = \int_a^b \prod_{\alpha \neq i} d\xi_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha_i}(t)} \quad (D.8)$$

y

$$P_{\alpha_i}^i(t) = g_{\alpha_i}(t, t - t_0) + \int d\xi_i \left[f_{\alpha_i}(t - \xi_i + t_0, \xi_i - t_0) - \partial_i g_{\alpha_i}(t - \xi_i + t_0, \xi_i - t_0) \right] K_i \quad (D.9)$$

siendo

$$K_i = \left[Y(t - t_0) Y(\xi_i - t) - Y(t_0 - t) Y(\xi_i - t_0) \right]$$

Los momentos que se obtienen para el modelo de Kristensen y

Holler son:

$$P_{\phi}^i(t) = \sum_{\mathbf{x}} \int d^3x U_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \phi(t_0, \mathbf{x}) \delta(t - t_0) \quad (D.10)$$

$$\begin{aligned}
P_{\psi}^{l_0}(t) &= \frac{i}{2} \int d^3x \gamma^0 \bar{\psi}(t_0, \vec{x}) \sum_V^{\infty} U_V(\vec{x}) \delta(t-t_0) - \\
&-ig \int d^4x_1 d^4x_2 F(t-x_1+t_0, \vec{x}_1, x_2) \bar{\psi}(t-x_1^0+t_0+x_2^0, \vec{x}+\vec{x}_2) \cdot \\
&\cdot \gamma_3 \delta^4(x_2) \phi(t-x_1^0+t_0+x_2^0, \vec{x}+\vec{x}_2) K_1 \quad (D.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\psi}^{l_0} &= -\frac{i}{2} \int d^3x \psi(t_0, \vec{x}) \gamma_0^{ab} \gamma_0 \sum_U U_U(\vec{x}) \delta(t-t_0) - \\
&-ig \int d^4x_1 d^4x_2 F(x_1, t-x_2^0+t_0, \vec{x}_2) \gamma_3 \phi(t-x_2^0+t_0+x_1^0, \vec{x}+\vec{x}_2) \cdot \\
&\cdot \psi(t-x_2^0+t_0+x_1^0, \vec{x}+\vec{x}_2) K_2 \quad (D.12)
\end{aligned}$$

Para recuperar el formalismo de campos utilizamos la expresion:

$$\Pi(x) = \sum_{\alpha}^{\infty} V_{\alpha}(x) P_{\alpha}(t)$$

con lo que finalmente obtendremos los momentos:

$$\Pi_{\psi}^{l_0} = \phi(t_0, \vec{x}) \delta(t-t_0) \quad (D.13)$$

Referencias

1. D.G. Currie, Phys. Rev. 142 (1966), 817.
2. P.N. Hill, J. Math. Phys. 8 (1967), 201.
3. A.D. Fokker, Zeits. f. Physic. 59, (1929), 386.
4. L. Lusana, Il Nuovo Cimento. 633 no.1 (1981), 135.
5. E.C.G. Sudarshan & N. Mukunda, *Classical Dynamics: A Modern Perspective*, John Wiley & Sons, New York, 1974.
6. J. a Wheeler & R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 21, no. 3 (1949), 425.
7. R.P. Feynman, Physics Today 21, (agosto 1966).
8. F. Hoyle & J.V. Narlikar, *Action at Distance in Physics and Cosmology*, W.H. Friedman & Co., Sn. Francisco, 1974.
9. R.P. Feynman, Phys. Rev. 74, no. 8, (1948), 157.
10. J. A. Wheeler & R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 17, no. 23, (1945), 157.
11. R. Marnelius, Phys. Rev. D. 10, no. 8, (1974).
12. W. Dettman & A. Schild, Phys. Rev. 26, (1985), 1057.
13. W. N. Herman, J. Math. Phys. 26, (1985).
14. X. Jaen & R. Jauregui et al. Phys. Rev. D. 36, no. 8, (1987).
15. R. Marnelius, Phys. Rev. D. 10, no. 10, (1974).
16. G. Furlan (editor), *Superstrings, Unified Theories and Cosmology*, World Scientific, 1987.
17. F. Riewe & E. S. Green, J. Math. Phys. 13, no. 9 (1972), 1374.
18. A. Barut & C. Mullen, Ann. Phys. 20, (1962) 218.
19. T. S. Chang, Proc. Cambridge Phyl. Soc. 44 (1948), 546.
20. J. S. Wet, Proc. Cambridge. Phyl. Soc. 44 (1948), 546.
21. R. Marnelius, Phys. Rev. D 8, no. 8 (1973).
22. A. Pais & G. E. Uhlenbeck, Phys. Rev. 79, no. 1, (1950).
23. H. Yukawa, Phys. Rev. 77, no. 2, (1950).
24. E. C. G. Stuechelberg & G. Wanders, Helv. Phys. Acta 21, (1952), 687.
25. W. Pauli, Nuovo Cimento 10, 648, 1953.