2 y 7


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS


# INTEGRACION NUMERICA APLICADA AL SISTEMA PLANETARIO

T E S I S

Que para obtener el Título de

F I S I C O

p r e s e n t a :


Gabino Castillo Martínez


México, D.F. 1989

# INDICE

# INTRODUCCION

Uno de los problemas fundamentales que ha intrigado al ser humano desde los albores de la civilización ha sido el movimiento planetario.

Los griegos, exceptuando algunos tales como Aristarco (ver mas adelante), que consideraban al hombre como el centro del universo, supusieron que la Tierra estaba inmóbil y que los cuerpos celestes se movían en torno a ella, describiendo órbitas circulares. Los cuerpos conocidos en aquel tiempo fueron ordenados de acuerdo con la distancia a la Tierra: la Luna, Mercurio, Venus, Sol, Marte, Júpiter y Saturno.

En el segundo siglo de la era cristiana, el astrónomo Ptolomeo de Alejandría desarrolló la teoría de los epiciclos (para explicar el movimiento de los cuerpos celestes): suponía que los planetas describían un círculo denominado *epiciclo*, cuyo centro a su vez se desplazaba en un círculo mayor, concéntrico a la Tierra, llamado *deferente*. El sistema de referencia que utilizó es el sistema de referencia geocéntrico.

Esta descripción fué aceptada como correcta hasta que, en el siglo XVI, el monje polaco Nicolás Copérnico (1473-1543), que buscaba una solución más simple, propuso que el movimiento de todos los planetas, incluyendo la Tierra, se efectuaba en torno al Sol. La idea no era nueva, había sido propuesta por primera vez por el astrónomo griego Aristarco en el siglo tercero antes de Cristo. De acuerdo a Copérnico, el orden de las órbitas de los planetas con respecto al Sol era el siguiente: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno, y la Luna giraba alrededor de la Tierra. Lo que Copérnico propuso esencialmente fué otro sistema de referencia situado en el Sol.

Basándose en la idea de Copérnico y en las observaciones del astrónomo Tycho Brahe (1546-1601), el astrónomo Johannes Kepler

(1571-1630) hace el descubrimiento de las leyes del movimiento planetario. Estas leyes denominadas leyes de Kepler, son una descripción cinemática del movimiento planetario y se enuncian de la siguiente manera:

I. Los planetas describen órbitas elípticas, estando el Sol en uno de los focos.

II. El vector posición de cualquier planeta con respecto al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

III. Los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de los planetas al Sol.

La siguiente etapa en la historia de la astronomía fué una discusión de la dinámica del movimiento planetario y un esfuerzo por determinar la interacción responsable de tal movimiento, esto es, entender porque se mueven los planetas. Es aquí donde Issac Newton (1642-1727) llevó a cabo la formulación de la ley de gravitación universal, y nos dice:

La fuerza gravitacional con que se atraen mutuamente dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos.

De este modo podemos establecer para un sistema de N-cuerpos, un sistema de ecuaciones diferenciales cuya solución se encuentra aplicando métodos de integración numérica, que aproximan la solución analítica. El primer método que se aplicó fué el de Euler, actualmente existen métodos de mayor eficiencia (e implícitamente contiene una expansión en serie de Taylor) como: Runge-Kutta, serie de Taylor, Gauss-Jackson, predictor de Adams, Cowell, etc..

En este trabajo aplicamos el método de integración numérica por expansión en serie de Taylor (orden séptimo) a las ecuaciones de movimiento del sistema planetario para determinar las posiciones y velocidades de los planetas en el sistema heliocéntrico, durante un tiempo cercano a dos siglos; y damos el procedimiento de como se construye el método de integración numérica de Gauss-Jackson.

Determinamos el comportamiento de la energía potencial total de cada uno de ellos y la energía cinética total de cada uno de los miembros del sistema planetario y determinamos las energías relativas entre ellos; como una consecuencia del análisis de sus variaciones periódicas es posible reproducir, mediante técnicas de transformadas de Fourier y mínimos cuadrados, los periodos orbitales y sinódicos de cada uno de ellos, además de otros periodos relativos.

También estudiamos las variaciones del potencial de los miembros del sistema planetario, como una introducción a tiempo futuro, para el estudio de captura de cometas.

## 1.1) ECUACION DE MOVIMIENTO

En ocasiones no es necesario considerar un sistema de N cuerpos para describir el comportamiento de dos de sus miembros, es posible plantear las ecuaciones de movimiento mutuas de dos de ellos suponiéndolos aislados, para determinar de manera aproximada su comportamiento orbital real. Por ejemplo sistema Tierra-Luna, un planeta y el Sol. Sin embargo, en ambos casos debemos tomar en cuenta que la acción gravitatoria de otros cuerpos perturba el esquema simple de dos cuerpos.

El problema de dos cuerpos es un caso particular del problema de N cuerpos; tiene dos características importantes:

*i*) Tiene solución analítica.

*ii*) El problema puede simplificarse al de uno solo (masa reducida).

Newton fué el primero en establecerlo y resolverlo pues "si se tiene para un tiempo la posición y la velocidad de dos cuerpos de masas conocidas moviéndose bajo su mutua fuerza gravitatoria, entonces se puede calcular su posición y velocidad para otro tiempo" (A.E.ROY pp 69).

Consideremos un sistema conservativo constituido por dos masas puntuales $m_1$ y $m_2$ sometidas sólo a su fuerza de interacción gravitatoria. Tal sistema tiene 6 grados de libertad, es decir, su movimiento se puede describir en función de seis coordenadas independientes (3 por cada partícula), según se verá a continuación.

Sean $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ los vectores de posición para dos partículas (aisladas) de masas $m_1$ y $m_2$ respectivamente (fig.1.1), que interactúan mutuamente.

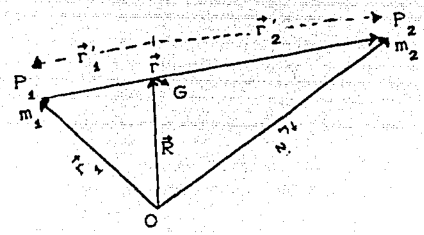



Fig.1.1

Podemos describir su movimiento ubicando el sistema de referencia o bién en el centro de masa ó en alguna de las partículas.

Utilizaremos el segundo procedimiento, ya que con este se simplifica el problema reduciéndolo al problema de un solo cuerpo. Aplicando las leyes de movimiento de Newton y su ley de "gravitación universal" se obtienen las ecuaciones de movimiento de las partículas bajo su mutua atracción gravitatoria:

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} \tag{1.1}$$

y

$$m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}\,. \tag{1.2}$$

Sumando las ecuaciones (1.1) y (1.2), e integrándolas dos veces, tenemos

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{a}t + \vec{b}, \tag{1.3}$$

donde

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores constantes.

Sea $\vec{R}$ el vector de posición del centro de masa de las dos masas puntuales, $\vec{R}$ se define como

$$M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2, \tag{1.4}$$

donde

$M = m_1 + m_2$.

Derivando la ecuación (1.3) con respecto al tiempo, considerando masas constantes y utilizando la ecuación (1.4), tenemos:

$$M\frac{d\dot{\vec{R}}}{dt} = \vec{a}.$$

Esta relación demuestra que el centro de masa del sistema se mueve con velocidad constante.

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) las podemos escribir como

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = Gm_2\,\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{1.5}$$

y

$$\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -Gm_1\,\frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{1.6}$$

Restando la ecuación (1.5) de (1.6), obtenemos la ecuación de movimiento:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \mu\frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \tag{1.7}$$

donde

$$\mu = G(m_1 + m_2)$$

y

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -\,\vec{r}.$$

Multipliquemos vectorialmente $\vec{r}$ con la ecuación (1.7) e integrando, tenemos

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{h}; \tag{1.8}$$

$\vec{h}$ es un vector constante, conocido como vector de momento angular e indica que el movimiento se realiza en un plano.

Para resolver la ecuación de movimiento utilizamos el sistema de coordenadas polares.

Los vectores de posición, velocidad y aceleración en el sistema coordenado polar son (ecuaciones (A.18), (A.21) y (A.23); apéndice A), respectivamente:

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \; ;$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \; ; \qquad (1.9)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta \, .$$

Se puede probar que la norma de $\vec{h}$ (ecuación (1.8)) en el sistema de coordenadas polares está dada por:

$$r^2\dot{\theta} = h. \qquad (1.10)$$

Efectuando el producto escalar de $\dot{\vec{r}}$ con la ecuación (1.7) e integrando, tenemos

$$\frac{1}{2}\,\dot{\vec{r}}.\dot{\vec{r}} - \frac{\mu}{r} = C, \qquad (1.11)$$

donde

C: es una constante.

La ecuación (1.11) es la ecuación de conservación de energía por unidad de masa; $\frac{1}{2}\,\dot{\vec{r}}.\dot{\vec{r}}$ está relacionada con la energía cinética y $-\frac{\mu}{r}$ con la energía potencial.

Sustituyendo (1.9) en la ecuación (1.7), obtenemos la ecuación de movimiento en el sistema de coordenadas polares ; y esta es,

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \qquad (1.12)$$

y

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0. \qquad (1.13)$$

Haciendo la sustitución de $u = 1/r$ y eliminando el tiempo entre las ecuaciones (1.12) y (1.13), tenemos

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}. \qquad (1.14)$$

La solución general de esta ecuación es

$$u = \frac{\mu}{h^2} + A\cos(\theta - \omega), \qquad (1.15)$$

donde A y $\omega$ son dos constantes de integración.

Reintroduciendo r, la ecuación (1.15) se convierte en

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + (Ah^2/\mu)\cos(\theta - \omega)}; \qquad (1.16)$$

puesto que la ecuación de la cónica en forma polar esta dado por:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \omega)}$$

asi que

$$p = h^2/\mu$$

y

$$e = Ah^2/\mu$$

## 1.2) CLASIFICACION DE LAS ORBITAS CON RESPECTO A LA ENERGIA

Como se demostró en la sección 1.1, las únicas órbitas posibles bajo la acción de una fuerza central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia son órbitas elípticas ($0 \le e < 1$), órbitas parabólicas ($e = 1$), y órbitas hiperbólicas ($e > 1$).

Conociendo la excentricidad "e" es posible saber de qué órbita se trata, pero existe otro método para clasificarlas, basado en la energía y es el siguiente:

Se consideran órbitas baricéntricas; en la figura 1.1 $P_1$ y $P_2$ son las posiciones de las dos partículas de masa $m_1$ y $m_2$, O es un punto de referencia fijo, y G es el centro de masa de las dos partículas.

Los vectores desde G a P1 y P2 son $\vec{r}\,'_1$ y $\vec{r}\,'_2$ respectivamente. Entonces

$$m_1\vec{r}\,'_1 = -m_2\vec{r}\,'_2$$

y

$$\vec{r}\,'_1 - \vec{r}\,'_2 = -\vec{r},$$

así que tenemos

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}\,'_1 &= -\left(\frac{m_2}{M}\right)\vec{r}\\ \vec{r}\,'_2 &= \left(\frac{m_1}{M}\right)\vec{r}\end{aligned}\right\} \qquad (1.17)$$

donde M es la suma de las masas.

Como el centro de masa viaja con velocidad constante, y utilizando la segunda ley de Kepler, tenemos

$$\left.\begin{aligned}r'^2_1\dot{\theta} &= h_1\\ r'^2_2\dot{\theta} &= h_2\end{aligned}\right\} \qquad (1.18)$$

Sustituyendo la ecuación (1.17) en la ecuación (1.18), llegamos a:

$$h_1 = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 r^2\dot{\theta} = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 h \ ,$$

ya que

$$r^2\dot{\theta} = h;$$

similarmente

$$h_2 = \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 r^2\dot{\theta} = \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 h.$$

Tomemos la ecuación de la energía (1.11) y reescribámosla de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}\,V^2 - \mu/r = C, \qquad (1.19)$$

donde $\mu = G(m_1 + m_2)$.

Si $V_1$ y $V_2$ son las velocidades de las masas $m_1$ y $m_2$ con respecto al centro de masa, la energía total E está dada por:

$$E = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r}, \tag{1.20}$$

donde la suma de los dos primeros términos es la energía cinética y $-Gm_1m_2/r$ es la energía potencial del sistema.

La velocidad en coordenadas polares para la velocidad $V_1$ es:

$$V_1^2 = \dot{r}_1'^2 + r_1'^2\dot{\theta}^2 = \left[\frac{m_2}{M}\right]^2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \left[\frac{m_2}{M}\right]^2 V^2; \tag{1.21}$$

similarmente para $V_2$:

$$V_2^2 = \left[\frac{m_1}{M}\right]^2 V^2. \tag{1.22}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.21) y (1.22) en la ecuación (1.20) y comparándola con la ecuación (1.19), tenemos:

$$E = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left[\frac{1}{2}V^2 - \mu/r\right] = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}C. \tag{1.23}$$

Sea $m_1$ la masa de una partícula prueba y $m_2$ la masa de un planeta y que se cumpla que $m_2 \gg m_1$, entonces

$$E = m_1 \left[\frac{1}{2}V^2 - \mu'/r\right] = m_1 C, \tag{1.24}$$

donde $\mu' = Gm_2$; se ve que la velocidad V para una distancia dada es el factor de decisión. Así tenemos (Roy pp 75-95):

i) Para una elipse, $V^2 = \mu'[(2/r) - (1/a)]$; Aquí $C = -\mu'/2a$.

ii) Para una parábola, $V^2 = 2\mu'/r$; Aquí $C = 0$.

iii) Para una hipérbola, $V^2 = \mu'[(2/r) + (1/a)]$; Aquí $C = \mu'/2a$.

Aquí para una órbita cerrada, la energía total debe ser negativa.

## 1.3) PERIODOS ORBITAL Y SINODICO

El periodo orbital es el tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta en torno al sol; se calcula a través de la tercera ley de Kepler $T^2 \propto a^3$.

El periodo sinódico es el tiempo entre sucesivas configuraciones similares de dos planetas respecto al sol; particularmente si $T_P$ es el periodo orbital de un planeta y $T_T$ el de la Tierra , el periodo sinódico $T_S$ para un planeta interior (el radio de su órbita es menor que el de la Tierra) está relacionado con $T_P$ y $T_T$ por:

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_P} - \frac{1}{T_T} \tag{1.25}$$

y para un planeta exterior (su radio orbital es mayor al de la Tierra) está dado por:

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_P} \tag{1.26}$$

Estas relaciones son derivadas para órbitas coplanares circulares y el mecanismo es el siguiente:

Suponemos velocidades angulares constantes $d\theta/dt = \omega$, si integramos de 0 a $2\pi$, tenemos

$$2\pi = \omega T,$$

donde T es el periodo orbital. Para el planeta P y la Tierra, tenemos:

$$\omega_P = \frac{2\pi}{T_P} \quad y \quad \omega_T = \frac{2\pi}{T_T}\,. \tag{1.27}$$

Sean $\theta_P$ y $\theta_T$ los desplazamiento angulares del planeta y la Tierra respectivamente.

A medida que el planeta P va avanzando, su distancia angular $\theta$ relativa a la Tierra está cambiando y está dada como $\theta = \theta_P - \theta_T$ ; su variación con el tiempo está dada por $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d(\theta_P - \theta_T)}{dt}$, es decir:

$$\omega = \omega_P - \omega_T. \tag{1.28}$$

Cuando $\theta$ alcanza el valor $2\pi$, el tiempo transcurrido será el periodo sinódico Ts. es decir,

$$\omega = \frac{2\pi}{Ts} .$$

Utilizando las ecuaciones (1.27) y (1.28) en esta última, llegamos a la ecuación (1.25)

$$\frac{1}{Ts} = \frac{1}{T_P} - \frac{1}{T_T}.$$

Si el planeta P es exterior, tomamos la diferencia $\theta = \theta_T - \theta_P$ y siguiendo el desarrollo descrito arriba se llega a la ecuación (1.26).

# CAPITULO 2 INTEGRACION NUMERICA

## 2.1) METODOS DE INTEGRACION NUMERICAS

La solución de una ecuación diferencial mediante algún método de integración numérica nos permite obtener una colección de puntos que representan los valores de las variables a lo largo de un intervalo de integración; para lograr esto es necesario conocer sus valores en el instante $t_i$ de tal manera que nos permitan su evaluación en el instante $t_{i+1}$ mediante un incremento o paso de integración.

En general los métodos de integración numéricas son métodos de iteración de una o varias variables y se pueden clasificar como métodos de un paso y de varios pasos (multipasos).

i)Métodos de un paso:

Son aquellos que para poder determinar la solución al tiempo $t_{i+1}$, utilizan la solución del instante anterior $t_i$. Ejemplos de esta técnica son los métodos de Runge-Kutta, de serie de Taylor, y métodos de extrapolación de Bulirsch y Stoer.

ii)Métodos multipasos:

Son aquellos que para determinar el valor de las variables en el instante $t_{i+1}$, utilizan al menos dos soluciones de la ecuación diferencial de los instantes anteriores $t_i$. Como ejemplos, el método Predictor-Corrector de Adams, y el método de Gauss-Jackson.

## 2.2) METODO RUNGE-KUTTA ORDEN SEXTO DE FEHLBERG (RK6-F)

Los métodos de Runge-Kutta utilizan el error de truncamiento local y al mismo tiempo eliminan el cálculo y la evaluación de las derivadas de $f(x,y)$. El primer paso para derivar el método consiste en definir una función de la siguiente manera:

$$y = y_o + h \sum_{j=0}^{\kappa} c_\kappa f_\kappa ,$$

donde

$f(x,y) = dy/dx,$

$f_o = f(x_o, y_o)$ es el valor inicial.

$$f_\kappa = f\left[ x_o + a_\kappa h, y_o + h \sum_{j=0}^{k-1} b_{\kappa j} f_j \right] \quad \kappa = 1,2,\ldots,n$$

k da el número de evaluaciones

Donde los coeficientes $a_\kappa$, $b_{\kappa j}$ y $c_\kappa$ se determinan aplicando el teorema de Taylor en dos variables (Burden pp 244).

El método más comúnmente aplicado es el de Runge-Kutta de cuarto orden. Se han realizados varios trabajos que mejoran la eficiencia de esta técnica (Shanks(1966) y Bucher(1965). Fehlberg(1968,1972) desarrolló un método para sexto orden, requiriendo unicamente nueve evaluaciones de las derivadas (usualmente conocido como procedimiento RK6-F ), incluye un procedimiento de control para el cambio del paso de integración, el cual está basado en el error de truncamiento local. Por ejemplo para integrar una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x,y)$, se utiliza el siguiente procedimiento:

$f_o = f(x_o, y_o),$

$$f_\kappa = f\left[ x_o + a_\kappa h, y_o + h \sum_{j=0}^{k-1} b_{\kappa j} f_j \right] \quad \kappa = 1,2,\ldots,8$$

donde h es el tamaño del paso ($\Delta x$), entonces el valor de "y" al final del paso está dado como

$$y = y_0 + h \sum_{j=0}^{K} c_K f_K \qquad (\text{error } O(h^7))$$

Al aplicarle el teorema de Taylor en dos variables, se obtienen 37 ecuaciones (NASA TR R-287) que permiten la evaluación de los coeficientes; para resolver estas ecuaciones se requieren algunas condiciones (Nasa TR R -287), por ejemplo:

$$a_7 = a_9 = 1, \; a_8 = 0, \; c_2 = 0, \text{ etc.}$$

Los valores obtenidos de los coeficientes a,b y c se encuentran en la tabla C.2 (apéndice C). y una estimación del error de truncamiento en "y", está dado por

$$TE = \frac{11}{270} (f_0 + f_7 - f_8 - f_9)h.$$

2.3) METODO GAUSS-JACKSON (GJ)

Para encontrar las soluciones de cada una de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, es necesario (para este método) determinar sumas y diferencias entre los datos anteriores al instante en el que se desea evaluar.

Contiene un método predictor (calcula el siguiente dato) y uno corrector (corrige el dato calculado); el predictor está expresado en términos del conjunto de datos anteriores; y el corrector contiene además el dato calculado.

Este método es aplicable a ecuaciones diferenciales de segundo orden y el mecanismo es el siguiente:

Sea $y_i = f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ldots, \dot{y}_n)$ (2.1)

la forma de la ecuación diferencial de segundo orden, donde

i es el índice que denota el número de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Sean

$$y_{i,k}, \dot{y}_{i,k}, y_{i,k} \quad \forall\ k = 0,1,2,\ldots,l$$

los datos iniciales;donde l: denota el orden del proceso.

La idea es construir la primera y segunda suma en término del operador de diferencia hacia atrás. Para llegar a esto hacemos lo siguiente:

Como primer paso vamos a determinar la primera y segunda suma de $f_i$ en términos del operador de diferencia central (ver mas adelante); para determinarlos usaremos los operadores dados en **Allied pp 54.**

Sea

$$D = D_t = \frac{d}{dt} .$$

Si derivamos $\dot{y}_{i,k}$ una vez y dos veces $y_{i,k}$, tenemos

$$D\dot{y}_{i,k} = f_{i,k} \quad y \quad D^2 y_{i,k} = f_{i,k} .$$

Si las integramos e ignoramos las constantes de integración, tenemos

$$\dot{y}_{i,k} = D^{-1} f_{i,k} \tag{2.2}$$

y

$$y_{i,k} = D^{-2} f_{i,k} , \tag{2.3}$$

donde $D^{-1}$ es el operador de integración.

Por otro lado:

$$\nabla^{-1} f_{i,k} = \nabla^{-1} f_{i,k} + h^{-1}\dot{y}_{i,k} - h^{-1}\dot{y}_{i,k} \tag{2.4}$$

$$\delta^{-2} f_{i,k} = \delta^{-2} f_{i,k} + h^{-2} y_{i,k} - h^{-2} y_{i,k} , \tag{2.5}$$

donde $\nabla^{-1}$: es el operador de suma hacia delante y está definido

como $$\nabla^{-1} f_p \equiv \nabla^{-1} f_{p-1} + f_p;$$

$\delta^{-1}$: es el operador de suma central y es definido como

$$\delta^{-1} f_p \equiv \delta^{-1} f_{p-1} + f_{p-1/2},$$

entonces

$$\delta^{-2} f_p = \delta^{-2} f_{p-1} + \delta^{-1} f_{p-1/2} .$$

Utilizando las ecuación (2.2) y (2.3) en las ecuaciones (2.4) y

(2.5), llegamos a las expresiones:

$$\nabla^{-1}f_{i,k} = h^{-1}\dot{y}_{i,k} + [\nabla^{-1} - (hD)^{-1}]f_{i,k} , \qquad (2.6)$$

donde $h = t_{k+1} - t_k$ : es el intervalo de tabulación.

$$\delta^{-2}f_{i,k} = h^{-2}y_{i,k} + [\delta^{-2} - (hD)^{-2}]f_{i,k} .$$

Si le aplicamos a esta última ecuación el vector desplazamiento E, el cual está definido como $Ef_p \equiv f_{p+1}$ y sabiendo que la relación entre los operadores $\delta^{-2}$, E y $\nabla^{-2}$ (ALLIED pp 54 o en la tabla C.1, apéndice C) es $\delta^{-2}E = \nabla^{-2}$, entonces

$$\nabla^{-2}f_{i,k-1} = h^{-2}y_{i,k} + [\delta^{-2} - (hD)^{-2}]f_{i,k} . \qquad (2.7)$$

Por otro lado la relación entre $\mu$ y $\delta$ es $\mu = (1 + \frac{1}{4}\delta^2)^{1/2}$; la relación entre D y $\delta$ es $hD = 2\operatorname{senh}^{-1}(\frac{1}{2}\delta)$; y entre $\nabla^{-1}$, $\mu$ y $\delta^{-1}$ es $\nabla^{-1} = \frac{1}{2} + \mu\delta^{-1}$.

Donde $\mu$: es el operador promedio y está definido como

$$\mu f_p \equiv \tfrac{1}{2}(f_{p+1/2} + f_{p-1/2})$$

Utilizando estas relaciones, sustituyendolas en las ecuaciones (2.6) y (2.7) y haciendo un desarrollo algebráico, obtenemos:

$$\nabla^{-1}f_{i,k} = h^{-1}\dot{y}_{i,k} + \tfrac{1}{2}f_{i,k} + \mu\left\{\delta^{-1} - \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{4}\delta^2)^{-1/2}(\operatorname{senh}^{-1} \tfrac{1}{2}\delta)^{-1}\right\}f_{i,k} \qquad (2.8)$$

y

$$\nabla^{-2}f_{i,k-1} = h^{-2}y_{i,k} + \left\{\delta^{-2} - \tfrac{1}{4}(\operatorname{senh}^{-1} \tfrac{1}{2}\delta)^{-2}\right\}f_{i,k} . \qquad (2.9)$$

Las ecuaciones (2.8) y (2.9) la vamos a desarrollar en serie de potencia; las series que se utilizán son

$$(1 + X)^P = 1 + PX + P\frac{(P - 1)}{2!}X^2 + P\frac{(P - 1)(P - 2)}{3!}X^3 + \dots \qquad (2.10)$$

$$\operatorname{senh}^{-1}X = X - \frac{1}{2.3}X^3 + \frac{1.3}{2.4.5}X^5 - \frac{1.3.5}{2.4.6.7}X^7 + \dots \qquad (2.11)$$

Utilizando la primera serie para desarrollar $(1 + \frac{1}{4}\delta^2)^{-1/2}$, tenemos:

$$(1+\frac{1}{4}\delta^2)^{-1/2} = 1 - \frac{\delta^2}{2^3} + \frac{3}{2^7}\delta^4 - \frac{5}{2^{10}}\delta^6 + \ldots$$

y utilizando la segunda serie para desarrollar $\operatorname{senh}^{-1}\frac{1}{2}\delta$ , tenemos

$$(\operatorname{senh}^{-1}\frac{1}{2}\delta) = \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{3}\frac{\delta^3}{2^4} + \frac{3}{5}\frac{\delta^5}{2^8} - \frac{5}{7}\frac{\delta^7}{2^{11}} + \ldots$$

y desarrollando en serie de potencia a $(\operatorname{senh}^{-1}\frac{1}{2}\delta)^{-1}$; obtenemos

$$\nabla^{-1}f_{i,k} = h^{-1}\dot{y}_{i,k} + \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\mu\delta - \frac{11}{720}\mu\delta^3 + \frac{191}{60480}\mu\delta^5 + \ldots\right\}f_{i,k}; \qquad (2.12)$$

similarmente

$$\nabla^{-2}f_{i,k-1} = h^{-2}y_{i,k} + \left\{-\frac{1}{12} + \frac{1}{240}\delta^2 - \frac{31}{60480}\delta^4 + \ldots\right\}f_{i,k} \qquad (2.13)$$

Como se observa estas dos últimas ecuaciones están en términos del operador de diferencia central.

Como segundo paso hay que transformar estas dos últimas ecuaciones en término del operador de diferencia hacia atras $\nabla$, definido como

$$\nabla f_p \equiv f_p - f_{p-1}$$

y es conveniente utilizarlo para el propósito de programación

La relación entre los operadores $\mu,\delta,\nabla,E$ está dada por

$$\mu\delta = \nabla E - \frac{1}{2}\nabla^2 E;$$

y la relación entre los operadores $\delta,\nabla,E$ es $\delta^2 = \nabla^2 E$.

Tomando estas relaciones entre los operadores y aplicandola a $f_{i,k}$, se tiene

$$\mu\delta^{2n-1}f_{i,k} = \nabla^{2n-1}f_{i,k+n} - \frac{1}{2}\nabla^{2n}f_{i,k+n} \qquad \forall\ n = 1,2,3,\ldots$$

$$\delta^{2n}f_{i,k} = \nabla^{2n}f_{i,k+n} \qquad \forall\ n = 1,2,3,\ldots$$

Utilizando estas dos últimas expresiones en las ecuaciones (2.12) y (2.13), desarrollando y agrupando, tenemos

$$\nabla^{-1}f_{i,k} = h^{-1}\dot{y}_{i,k} - A_0 f_{i,k} - A_1\nabla f_{i,k+1} - A_2\nabla^2 f_{i,k+1} - A_3\nabla^3 f_{i,k+2} - A_4\nabla^4 f_{i,k+2} - \ldots \qquad (2.14)$$

$$\nabla^{-2}f_{i,k-1} = h^{-2}y_{i,k} - B_0 f_{i,k} - B_2\nabla^2 f_{i,k+1} - B_4\nabla^4 f_{i,k+2} - \dots \qquad (2.15)$$

donde los coeficientes A y B están dados en la tabla C.3 (apéndice C); el mecanismo puede ser visto mas claramente en la tabla de diferencias, dada a continuación para octavo orden. Los términos que se encuentran arriba de la diagonal son utilizados para este orden. Los $f_{i,0}$ a $f_{i,8}$ son valores iniciales, los $\nabla^{-1}_{i,4}$ y $\nabla^{-2}_{i,3}$ son calculados usando las ecuaciones (2.14) y (2.15).

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $f_{i,0}$ | | | | | | | | | |
| | $\nabla^{-1}_{i,0}$ | | $\nabla_{i,1}$ | | | | | | | | |
| $\nabla^{-2}_{i,0}$ | | $f_{i,1}$ | | $\nabla^2_{i,2}$ | | | | | | | |
| | $\nabla^{-1}_{i,1}$ | | $\nabla_{i,2}$ | | $\nabla^3_{i,3}$ | | | | | | |
| $\nabla^{-2}_{i,1}$ | | $f_{i,2}$ | | $\nabla^2_{i,3}$ | | $\nabla^4_{i,4}$ | | | | | |
| | $\nabla^{-1}_{i,2}$ | | $\nabla_{i,3}$ | | $\nabla^3_{i,4}$ | | $\nabla^5_{i,5}$ | | | | |
| $\nabla^{-2}_{i,2}$ | | $f_{i,3}$ | | $\nabla^2_{i,4}$ | | $\nabla^4_{i,5}$ | | $\nabla^6_{i,6}$ | | | |
| | $\nabla^{-1}_{i,3}$ | | $\nabla_{i,4}$ | | $\nabla^3_{i,5}$ | | $\nabla^5_{i,6}$ | | $\nabla^7_{i,7}$ | | |
| $\nabla^{-2}_{i,3}$ | | $f_{i,4}$ | | $\nabla^2_{i,5}$ | | $\nabla^4_{i,6}$ | | $\nabla^6_{i,7}$ | | $\nabla^8_{i,8}$ | |
| | $\nabla^{-1}_{i,4}$ | | $\nabla_{i,5}$ | | $\nabla^3_{i,6}$ | | $\nabla^5_{i,7}$ | | $\nabla^7_{i,8}$ | | $\nabla^9_{i,9}$ |
| $\nabla^{-2}_{i,4}$ | | $f_{i,5}$ | | $\nabla^2_{i,6}$ | | $\nabla^4_{i,7}$ | | $\nabla^6_{i,8}$ | | $\nabla^8_{i,9}$ | |
| | $\nabla^{-1}_{i,5}$ | | $\nabla_{i,6}$ | | $\nabla^3_{i,7}$ | | $\nabla^5_{i,8}$ | | $\nabla^7_{i,9}$ | | |
| $\nabla^{-2}_{i,5}$ | | $f_{i,6}$ | | $\nabla^2_{i,7}$ | | $\nabla^4_{i,8}$ | | $\nabla^6_{i,9}$ | | | |
| | $\nabla^{-1}_{i,6}$ | | $\nabla_{i,7}$ | | $\nabla^3_{i,8}$ | | $\nabla^5_{i,9}$ | | | | |
| $\nabla^{-2}_{i,6}$ | | $f_{i,7}$ | | $\nabla^2_{i,8}$ | | $\nabla^4_{i,9}$ | | | | | |
| | $\nabla^{-1}_{i,7}$ | | $\nabla_{i,8}$ | | $\nabla^3_{i,9}$ | | | | | | |
| $\nabla^{-2}_{i,7}$ | | $f_{i,8}$ | | $\nabla^2_{i,9}$ | | | | | | | |
| | $\nabla^{-1}_{i,8}$ | | $\nabla_{i,9}$ | | | | | | | | |
| $\nabla^{-2}_{i,8}$ | | $f_{i,9}$ | | | | | | | | | |
| | $\nabla^{-1}_{i,9}$ | | | | | | | | | | |
| $\nabla^{-2}_{i,9}$ | | | | | | | | | | | |

La construcción del predictor y corrector es como sigue:

*i*) Predictor:

Despejando $\dot{y}_i$ y $y_i$ de las ecuaciones (2.6) y (2.7) respectivamente, aplicandole el operador de desplazamiento y sabiendo que $\delta^{-2}E=\nabla^{-2}$, tenemos

$$\dot{y}_{i,k+1} = h\nabla^{-1}f_{i,k} + h\left\{(hD)^{-1}E - \nabla^{-1}\right\}f_{i,k} \tag{2.16}$$

$$y_{i,k+1} = h^2\nabla^{-2}f_{i,k} + h^2\left\{(hD)^{-2}E - \nabla^{-2}\right\}f_{i,k} \tag{2.17}$$

Expresaremos estas dos últimas ecuaciones en términos de operadores de diferencia de atraso. Se tiene que las relaciones entre los operadores $D,\nabla$ es $hD = -\ln(1-\nabla)$; la relación entre los operadores $\delta^{-1},\nabla^{-1},E$ es $\delta^{-2} = \nabla^{-2}E^{-1}$; y la relación entre los operadores $E,\nabla$ es $E = (1-\nabla)^{-1}$.

Sustituyendo estas relaciones en las ecuaciones (2.16) y (2.17) y aplicando la ecuación (2.10) y la serie de potencia

$$\ln(1-X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} \dots \qquad \forall\ |X| < 1$$

llegamos

$$\dot{y}_{i,k+1} = h\left\{\nabla^{-1}f_{i,k} + F_0 f_{i,k} + \sum_{j=1}^{l} F_j\nabla^j f_{i,k}\right\} \tag{2.18}$$

$$y_{i,k+1} = h^2\left\{\nabla^{-2}f_{i,k} + C_0 f_{i,k} + \sum_{j=1}^{l} C_j\nabla^j f_{i,k}\right\} \tag{2.19}$$

$$\forall\ i = 1,2,\dots,n \quad y \quad k = 0,1,2,\dots,l.$$

donde los coeficientes son dados en la tabla C.3 (apéndice C). El método predictor usa la tabla de diferencia abajo de la linea diagonal (para k=8).

*ii*) Corrector:

Si un método corrector es requerido, las fórmulas relevantes son obtenidas al despejar $\dot{y}_i$ y $y_i$ de las ecuaciones (2.16) y (2.17) y reemplazando $f_{i,k}$ por $E^{-1}f_{i,k+1}$ en el lado derecho, y después de una expansión en serie se llega a

$$\dot{y}_{i,k+1} = h\left\{\nabla^{-1}f_{i,k} + E_0 f_{i,k+1} + \sum_{j=1}^{l} E_j \nabla^j f_{i,k+1}\right\}, \tag{2.20}$$

$$y_{i,k+1} = h^2\left\{\nabla^{-2}f_{i,k} + D_0 f_{i,k+1} + \sum_{j=1}^{l} D_j \nabla^j f_{i,k+1}\right\}, \tag{2.21}$$

donde los coeficientes son dados en la tabla C.3 (apéndice C).

## 2.4) METODO DE SERIE DE TAYLOR

Todos los métodos de integración numérica usados hasta el presente en mecánica celeste, ya sea aquellos que utilizan diferencias o aquellos del tipo Runge-Kutta, se basan en la expansión en serie de Taylor.

El método de integración en serie de Taylor fué aplicado al problema de N cuerpos por **Cruz-Gonzalez y Lecar** (1968), ellos proponen una expansión en serie para las posiciones y velocidades de un sistema de partículas evaluadas para un tiempo $t + \Delta t$. EL desarrollo en serie de Taylor es de la forma

$$F(t+\Delta t) = F(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F^{(i)}(t)}{i!}(\Delta t)^i \tag{2.22}$$

donde $F^{(i)}$ es la i-ésima derivada de F.

El intervalo de integración en lugar de ser variable (como lo toman Cruz-Gonález y Lecar) lo consideramos constantes; dado que Mercurio rige el paso de integración en el sistema planetario, realizamos varias pruebas en torno a esta consideración y encontramos que el paso de integración más adecuado es $\Delta t = 0.2$ días.

Los desarrollos en serie para las posiciones y las velocidades están dadas por:

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \sum_{n=0}^{6} \frac{\vec{r}^{(n)}(t)(\Delta t)^n}{n!} \qquad (2.23)$$

$$\dot{\vec{r}}(t+\Delta t) = \sum_{n=0}^{5} \frac{\vec{r}^{(n+1)}(t)(\Delta t)^n}{n!} \qquad (2.24)$$

Donde los coeficientes de $(\Delta t)^n$ se obtienen al derivar sucesivamente las ecuaciones de movimiento, es decir, derivar la ecuación para la aceleración de cada partícula, que está dada como:

$$\vec{a}_i = -G\sum_{\substack{j=0 \\ j=i}}^{p} m_j \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \qquad (2.25)$$

donde $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$

sabemos

$$r_{ij}^n = (\vec{r}_{ij} . \vec{r}_{ij})^{n/2}$$

derivandola respecto al tiempo, se llega

$$\frac{d}{dt}(r_{ij}^n) = n(\vec{r}_{ij} . \dot{\vec{r}}_{ij}) r_{ij}^{n-2} \qquad (2.26)$$

Derivando sucesivamente la ecuación (2.25) y utilizando la ecuación (2.26), se tienen

$$\vec{r}_i^{(0)} = \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_i^{(1)} = \dot{\vec{r}}_i$$

$$\vec{r}_i^{(2)} = -G\sum_{\substack{j=0 \\ j=i}}^{p} m_j \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}$$

$$\vec{r}_i^{(3)} = -G\sum_{\substack{j=0 \\ j=i}}^{p} m_j \left\{ \frac{\dot{\vec{r}}_{ij}}{r_{ij}^3} - 3\frac{\vec{r}_{ij}(\vec{r}_{ij} . \dot{\vec{r}}_{ij})}{r_{ij}^5} \right\} \qquad (2.27)$$

$$\vec{r}_i^{\,(4)} = -G\sum_{\substack{j=0\\ j=i}}^{9} m_j \left\{ \frac{\vec{r}_{ij}^{\,(2)}}{r_{ij}^3} - 6\frac{\dot{\vec{r}}_{ij}(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})}{r_{ij}^5} + 3\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^5}\left[ 5\frac{(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})^2}{r_{ij}^2} - (\dot{r}_{ij}^2 + \vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_{ij}^{\,(2)}) \right] \right\} \qquad (2.28)$$

Para aplicar este método a un problema de dinámica estelar, Flores (1976), se evaluó el término

$$\vec{r}_i^{\,(5)} = -G\sum_{\substack{j=0\\ j=i}}^{9} m_j \left\{ \frac{\vec{r}_{ij}^{\,(3)}}{r_{ij}^3} - 9\frac{\vec{r}_{ij}^{\,(2)}(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})}{r_{ij}^5} + 9\frac{\dot{\vec{r}}_{ij}}{r_{ij}^5}\left[ 5\frac{(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})^2}{r_{ij}^2} - (\dot{\vec{r}}_{ij}^{\,2} + \vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_{ij}^{\,(2)}) \right] + 3\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^5}\left[ -(3\dot{\vec{r}}_{ij}\cdot\vec{r}_{ij}^{\,(2)} + \vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_{ij}^{\,(3)}) + 15\frac{(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})(\dot{r}_{ij}^2 + \vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_{ij}^{\,(2)})}{r_{ij}^2} - 35\frac{(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})^3}{r_{ij}^4} \right] \right\} \qquad (2.29)$$

Para aplicar este método a las ecuaciones de movimiento del sistema planetario, en este trabajo evaluamos dos términos más:

$$\vec{r}_i^{\,(6)} = -G\sum_{\substack{j=0\\ j=i}}^{9} m_j \left\{ \frac{\vec{r}_{ij}^{\,(4)}}{r_{ij}^3} - 12\frac{\vec{r}_{ij}^{\,(3)}(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})}{r_{ij}^5} + 9\frac{\vec{r}_{ij}^{\,(2)}}{r_{ij}^5}\left[ 10\frac{(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})^2}{r_{ij}^2} - 2(\dot{r}_{ij}^2 + \vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_{ij}^{\,(2)}) \right] + 4\frac{\dot{\vec{r}}_{ij}}{r_{ij}^5}\left[ -3(3\dot{\vec{r}}_{ij}\cdot\vec{r}_{ij}^{\,(2)} + \vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_{ij}^{\,(3)}) + 45\frac{(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})(\dot{r}_{ij}^2 + \vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_{ij}^{\,(2)})}{r_{ij}^2} - 105\frac{(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})^3}{r_{ij}^4} \right]$$

$$3\frac{\vec{r}_{ij}}{r^{3}_{ij}}\left[-[3(r^{(2)}_{ij})^{2}+4\dot{\vec{r}}_{ij}\cdot\vec{r}^{(3)}_{ij}+\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}^{(4)}_{ij}]+\right.$$

$$\left.15\frac{(\dot{r}^{2}_{ij}+\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}^{(2)}_{ij})^{2}}{r^{2}_{ij}}+20\,\frac{(3\dot{\vec{r}}_{ij}\cdot\vec{r}^{(2)}_{ij}+\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}^{(3)}_{ij})(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})}{r^{2}_{ij}}\right]$$

$$-210\frac{(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})^{2}(\dot{r}^{2}_{ij}+\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}^{(2)}_{ij})}{r^{4}_{ij}}+315\frac{(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})^{4}}{r^{6}_{ij}}\Bigg]\Bigg\}\qquad(2.30)$$

$$\vec{r}^{(7)}_{i}=-G\sum_{\substack{j=0\\ j=i}}^{9}m_{j}\left\{\frac{\vec{r}^{(5)}_{ij}}{r^{3}_{ij}}-15\frac{\vec{r}^{(4)}_{ij}(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})}{r^{5}_{ij}}+30\frac{\vec{r}^{(3)}_{ij}}{r^{5}_{ij}}\left[5\frac{(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})^{2}}{r^{2}_{ij}}-(\dot{r}^{2}_{ij}+\right.\right.$$

$$\left.\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}^{(2)}_{ij})\right]-30\frac{\vec{r}^{(2)}_{ij}}{r^{5}_{ij}}\left[(3\dot{\vec{r}}_{ij}\cdot\vec{r}^{(2)}_{ij}+\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}^{(3)}_{ij})+\right.$$

$$\left.-15\frac{(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})(\dot{r}^{2}_{ij}+\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}^{(2)}_{ij})}{r^{2}_{ij}}+45\frac{(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})^{3}}{r^{4}_{ij}}\right]$$

$$15\frac{\dot{\vec{r}}_{ij}}{r^{3}_{ij}}\left[-[3(r^{(2)}_{ij})^{2}+4\dot{\vec{r}}_{ij}\cdot\vec{r}^{(3)}_{ij}+\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}^{(4)}_{ij}]+\right.$$

$$\left.15\frac{(\dot{r}^{2}_{ij}+\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}^{(2)}_{ij})^{2}}{r^{2}_{ij}}+20\,\frac{(3\dot{\vec{r}}_{ij}\cdot\vec{r}^{(2)}_{ij}+\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}^{(3)}_{ij})(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})}{r^{2}_{ij}}\right]$$

$$\left.-210\frac{(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})^{2}(\dot{r}^{2}_{ij}+\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}^{(2)}_{ij})}{r^{4}_{ij}}+315\frac{(\vec{r}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_{ij})^{4}}{r^{6}_{ij}}\right]+$$

$$\frac{\vec r_{ij}}{r^5_{ij}}\Bigg[ -3(10\vec r^{(2)}_{ij}\cdot\vec r^{(3)}_{ij} + 5\dot{\vec r}_{ij}\cdot\vec r^{(4)}_{ij} + \vec r_{ij}\cdot\vec r^{(5)}_{ij}) +$$

$$+150\frac{(3\dot{\vec r}_{ij}\cdot\vec r^{(2)}_{ij} + \vec r_{ij}\cdot\vec r^{(3)}_{ij})(\dot r^2_{ij} + \vec r_{ij}\cdot\vec r^{(2)}_{ij})}{r^2_{ij}} +$$

$$75\frac{[3(r^{(2)}_{ij})^2 + 4\dot{\vec r}_{ij}\cdot\vec r^{(3)}_{ij}) + \vec r_{ij}\cdot\vec r^{(4)}_{ij}](\vec r_{ij}\cdot\dot{\vec r}_{ij})}{r^2_{ij}} -$$

$$1575\frac{(\dot r^2_{ij} + \vec r_{ij}\cdot\vec r^{(2)}_{ij})^2(\vec r_{ij}\cdot\dot{\vec r}_{ij})}{r^4_{ij}} -$$

$$1050\frac{(3\dot{\vec r}_{ij}\cdot\vec r^{(2)}_{ij} + \vec r_{ij}\cdot\vec r^{(3)}_{ij})(\vec r_{ij}\cdot\dot{\vec r}_{ij})^2}{r^4_{ij}}\Bigg] +$$

$$9450\frac{(\vec r_{ij}\cdot\dot{\vec r}_{ij})^3(\dot r^2_{ij} + \vec r_{ij}\cdot\vec r^{(2)}_{ij})}{r^6_{ij}} - 10395\frac{(\vec r_{ij}\cdot\dot{\vec r}_{ij})^5}{r^8_{ij}}\Bigg]\Bigg\} \qquad (2.31)$$

Se han creado técnicas numéricas cuyo objectivo es, generalmente, el encontrar aproximaciones suficientemente exactas con un esfuerzo mínimo, por ello es necesario contar con una forma de comparar la eficiencia de diversos métodos de aproximación con respecto a su uso en computación. Merson (1975), en su estudio comparativo de métodos numéricos de perturbación, concluye que para las ecuaciones de segundo orden el método de octavo orden de Gauss-Jackson aplicado a las ecuaciones de Cowell (con regularización, A.E.ROY pp 217-218) es probablemente la combinación óptima. Las singularidades que ocurren durante colisiones pueden eliminarse mediante la elección apropiada de una variable independiente. Este proceso es conocido como regularización. **Herrick** (1972) dice que el método de Gauss-Jackson (también llamado "de segunda-suma gaussiana") es uno de los más eficientes. Los astrónomos del Real Observatorio de Greenwich (**H. M. Nautical...**) compararon diferentes métodos a través del cálculo de órbitas, y encontraron que para resultados precisos recomienda el método de Cowell o Encke (**Astrodynamic** $\underline{2}$ **pp 22-28**) usando el método de Gauss-Jackson.

## 2.5) ADIMENSIONALIDAD

En la aplicación de los métodos de integración numérica a la solución del problema de N cuerpos, se suelen reducir las variables a su forma adimensional, como los parámetros utilizados en este tipo de problemas llevan a números que exceden la capacidad de las máquinas, el proceso de adimencionalizar permite el cálculo numérico en números más pequeños, otra razón es, al escoger adecuadamente los parámetros de adimensionalidad tendremos mejor precisión (esto está relacionado hasta que cifra significativa es considerada).

El mecanismo para encontrar las expresiones que nos permitan adimensionalizar las variables es el siguiente:

Sean

UL = unidad de longitud.

UM = unidad de masa.

UV = unidad de velocidad.

UA = unidad de aceleración.

UE = unidad de energía.

$\xi_o = 6.672\text{X}10^{-8}$

UL = $K_1$ cm

$UM = K_2 \text{ gr}$

Se sabe que

$$G = 6.672 \times 10^{-8} \text{cm}^3/(\text{gr.seg}^2)$$

donde $K_1$ y $K_2$ son constantes, entonces

$$G = \xi_o \frac{\left(\frac{1UL}{K_1}\right)^3}{\left(\frac{1UM}{K_2}\right)\text{seg}^2} = 1 \frac{UL^3}{UM} \frac{1}{\left(\frac{K_1^3}{K_2 \xi_o} \text{ seg}^2\right)} ;$$

sea

$$UT = \sqrt{\frac{K_1^3}{K_2 \xi_o}} \text{ seg} ,$$

entonces

$$G = 1 \frac{UL^3}{UM(UT)^2} .$$

Se tomó $K_1$ = distancia de la Tierra al Sol ($R_T$).

$K_2$ = masa de la Tierra ($M_T$).

Con

$R_T = 1.49597870 \times 10^{13}$ cm.,

$M_T = 5.974241387 \times 10^{27}$ gr.,

se tiene para el tiempo

$$UT = \sqrt{\frac{R_T^3}{\xi o M_T}} = 2.898136 \times 10^9 \text{seg.} ;$$

para la velocidad

$$UV = \frac{UL}{UT} = \sqrt{\frac{M_T \xi o}{R_T}} = 5.1618657 \times 10^3 \text{cm/seg.} ;$$

para la aceleración

$$UA = \frac{UV}{UT} = \frac{\xi o M_T}{R_T^2} = 1.7810987 \times 10^{-6} \text{cm/seg}^2 ;$$

y para la energía

$$UE = (UM)(UA)(UL) = \frac{\xi o M_T^2}{R_T} = 1.5918281 \times 10^{35} \text{ergs.}$$

# CAPITULO 3 RESULTADOS

## 3.1) TRAYECTORIAS

Para este trabajo los datos iniciales de las posiciones, velocidades y masas están dados en la tabla 3.1 (Tomadas del libro The Astronomical Almanac 1988); las masas incluyen la de las atmósferas y satélites. Las masas (m) de los planetas son dadas en unidades de la masa del sol ($M_\odot = 1.9891\times10^{33}$ gr.). Se consideró arbitrariamente el día 9 de febrero de 1988 como punto de partida para los cálculos.

Tabla 3.1

| Planeta | $1/m$ ($M_\odot^{-1}$) | X(UA) | Y(UA) | Z(UA) |
|---|---|---|---|---|
| Mercurio | 6,023,600 | -0.2106860 | 0.2139100 | 0.1361167 |
| Venus | 408,523.5 | 0.3134507 | 0.5826997 | 0.2398570 |
| Tierra + Luna | 328,900.55 | -0.7514393 | 0.5863964 | 0.2542492 |
| Marte | 3,098,710 | -1.0322644 | -1.0665526 | -0.4612491 |
| Júpiter | 1,047.350 | 4.0565910 | 2.6665650 | 1.0441680 |
| Saturno | 3,498.0 | -0.8003520 | -9.2631060 | -3.7911240 |
| Urano | 22,960 | -0.7805500 | -17.628160 | -7.70953 |
| Neptuno | 19,314 | 4.2723200 | -27.657280 | -11.42666 |
| Plutón | 130,000,000 | -21.586950 | -20.355540 | 0.15245 |

| Planeta | $V_x$(UA/dia) | $V_y$(UA/dia) | $V_z$(UA/dia) |
|---|---|---|---|
| Mercurio | -0.02721815 | -0.01603306 | -0.00574009 |
| Venus | -0.01772437 | 0.00850462 | 0.00494772 |
| Tierra + Luna | -0.01142690 | -0.01208288 | -0.00523898 |
| Marte | 0.01099043 | -0.00725496 | -0.00362503 |
| Júpiter | -0.004451361 | 0.005955999 | 0.002661479 |
| Saturno | 0.005257673 | -0.000340008 | -0.000366525 |
| Urano | 0.003897789 | -0.000288829 | -0.000181720 |
| Neptuno | 0.003084973 | 0.000460285 | 0.000111695 |
| Plutón | 0.002251259 | -0.002321290 | -0.001402743 |

Con el propósito de conocer la precisión de un cálculo introducimos un control de error relativo CRE, usando la diferencia entre energía total inicial E y momentaneo $E^*$:

$$CRE = \frac{|E - E^*|}{|E|}$$

Los valores que alcanza CRE están entre $10^{-4}$ y $10^{-5}$. Al comparar el error obtenido con las series de séptimo y octavo orden (ecuaciones (2.30) y (2.31) respectivamente) no se encontró diferencia sin embargo, el tiempo de computo se incrementó para el octavo orden, aunque no sensiblemente.

Calculamos las efemérides planetarias en coordenadas cartesianas en un intervalo de tiempo cercano a dos siglos (porque este es un intervalo suficientemente largo para determinar los periodos orbitales de los planetas, excepto el de Plutón y suficientemente corto para no prolongar excesivamente el cálculo numérico) en el sistema de referencia heliocentrico; la obtención de las efemérides fué con el fín de saber que tan bueno está nuestro método de integración, y para esto comparamos las posiciones de los planetas con los publicados por el JPL; los valores calculados para la posición, difieren de los publicados por Jet Propulsion Laboratory JPL (**Planetary** ...) en milésimas para los planeta interiores (Venus, Tierra y Marte) y en diezmilésimas para los planetas exteriores; en la tabla 3.2 se muestran las posiciones calculadas aquí y las obtenidas por el JPL, para el 13 de septiembre del año 2000.

Una vez que obtuvimos las posiciones para los planetas, graficamos las trayectorias descritas por ellos durante un tiempo cercano a 1.88 años para los planetas interiores (teniendo así vuelta completa para Marte) y dos siglos aproximadamente para los planetas exteriores; vease las figuras 3.1.1 y 3.1.2 correspondiendo a los planetas interiores y exteriores respectivamente. Las figuras muestran las proyecciones sobre el plano xy de las trayectorias elípticas. Los segmentos descritos por Neptuno y Plutón concuerdan en su actual posición.

Tabla 3.2

| Venus ♀ | X(UA) | Y(UA) | Z(UA) |
|---|---|---|---|
| JPL | -0.44447 | -0.53139 | -0.21093 |
| calculado | -0.44411 | -0.53163 | -0.21107 |
| diferencia | 0.00036 | 0.00024 | 0.00014 |
| Tierra ⊕ | | | |
| JPL | 0.99237 | -0.15225 | -0.06601 |
| calculado | 0.99241 | -0.15198 | -0.06589 |
| diferencia | 0.00004 | 0.00027 | 0.00012 |
| Marte ♂ | | | |
| JPL | -1.14123 | 1.07522 | 0.52402 |
| calculado | -1.14142 | 1.07507 | 0.52396 |
| diferencia | 0.00019 | 0.00015 | 0.00006 |
| Júpiter ♃ | | | |
| JPL | 2.55486 | 3.98913 | 1.64763 |
| calculado | 2.55472 | 3.98921 | 1.64767 |
| diferencia | 0.00014 | 0.00008 | 0.00004 |
| Saturno ♄ | | | |
| JPL | 5.23355 | 6.99445 | 2.66382 |
| calculado | 5.23345 | 6.99447 | 2.66383 |
| diferencia | 0.00010 | 0.00002 | 0.00001 |
| Urano ⛢ | | | |
| JPL | 15.0980 | -11.8625 | -5.4091 |
| calculado | 15.0980 | -11.8624 | -5.4091 |
| diferencia | 0.0000 | 0.0001 | 0.0000 |
| Neptuno ♆ | | | |
| JPL | 17.4648 | -22.5459 | -9.6629 |
| calculado | 17.4648 | -22.5459 | -9.6629 |
| diferencia | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| Plutón ♇ | | | |
| JPL | -9.0991 | -28.2578 | -6.0750 |
| calculado | -9.0991 | -28.2578 | -6.0750 |
| diferencia | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

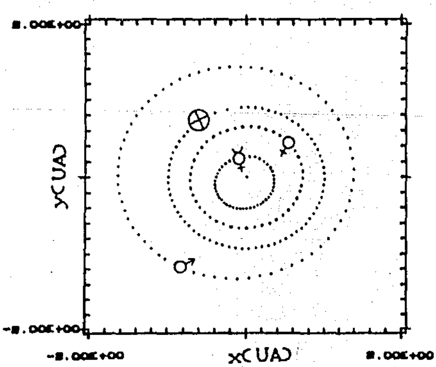



Fig.3.1.1 Gráfica y vs x para las trayectorias de los planetas interiores durante un tiempo cercano a 1.00 años.

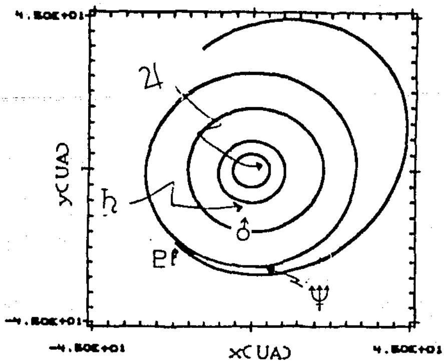



Fig 3.1.2 Gráfica y vs x para las trayectorias de los planetas exteriores durante un tiempo cercano a 200 años.

3.2) PERIODOS

Con el propósito de analizar el comportamiento periódico del sistema planetario y así poder verificar el método de integración que utilizamos, determinamos las energías potenciales relativas entre cada uno de los miembros del sistema solar como función del tiempo, y luego determinamos los periodos a través del método de transformada de Fourier y para un mejor refinamiento en el periodo empleamos el método de mínimos cuadrados.

El método de transformada de Fourier $F(\nu)$ de una función $f(t)$ está definida como

$$F(\nu) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{\iota 2\pi\nu t}\, dt;$$

esta definición nos dice que la transformada de Fourier es una transformación de $f(t)$ en $F(\nu)$, es decir, en una función que dependa de la frecuencia $\nu$ en vez de la función que dependa del tiempo t. En nuestro caso disponemos de un conjunto de datos que están igualmente espaciados en el tiempo (en 10 días); entonces, utilizamos la transformada de Fourier discreta $F_N(\nu)$, la cual está definida como

$$F_N(\nu) \equiv \sum_{i=1}^{N} f(t_K)e^{i2\pi\nu t_K}.$$

Se examina la amplitud al cuadrado de la transformada $|F_N(\nu)|^2$ con el fín de poder determinar con facilidad las frecuencias características en los datos. Es muy importante utilizar la ventana espectral $\delta(\nu)$ que es obtenida como una función de $\nu$ y los tiempos de observación y que está definida como

$$\delta_N(\nu) = \sum_{K=1}^{N} e^{i2\pi\nu t_K};$$

y que nos permite determinar con mayor rapidéz y mejor precisión las frecuencias representativas, esto es, aquellas frecuencias cuyas amplitudes al cuadrado sean mayores. Para determinar la transformada de Fourier discreta utilizamos un programa en Fortran y esencialmente es el siguiente:

Los datos están almacenados en arreglos. F(I) contiene la energía potencial relativa entre dos miembros del sistema solar y T(I), el tiempo, ambos, de la i-ésima observación. Tenemos N observaciones. Es necesario escoger ($\iota$) un intervalo de frecuencia DF, y ($\iota\iota$) el índice de frecuencia alta (KH) y baja (KL), así que la transformada se calcula para toda frecuencia de $\nu$ = KL*DF a $\nu$ = KH*DF, donde KL Y KH son enteros ( en nuestro caso KL=0 y KH=80). La parte real de $F_N(\nu)$ es almacenada en FR(K), donde $\nu$ = K*DF, la parte imaginaria en FI(K), y la amplitud al cuadrado en FF(K) (nosotros la normalizamos al dividirla esta por $N^2$). La parte real de la ventana es D(K), la parte imaginaria es G(K) y la amplitud al cuadrado (ya normalizada) es GG(K). PI tiene el valor $\pi$. El programa básico es el siguiente:

```
DO 1 K= KL,KH
```

```
FR(K) = 0
FI(K) = 0
D(K) = 0
G(K) = 0
A1 = 2.*PI*K*DF
DO 2 I = 1,N
A = A1*T(I)
C = COS(A)
S = SIN (A)
FR(K) = FR(K) + F(I)*C
FI(K) = FI(K) + F(I)*S
D(K) = D(K) + C
G(K) = G(K) + S
2 CONTINUE
FF(K) = (FR(K)*FR(K) + FI(K)*FI(K))/N*N
GG(K) = (D(K)*D(K) +G(K)*G(K))/N*N
1 CONTINUE.
```

Con estos métodos fué posible reproducir los periodos orbital y sinódico de los planetas que damos en la tabla 3.3. En la primera columna indica las parejas de cuerpos, donde el cero indica el sol y del uno al ocho sucesivamente los planetas desde Mercurio a Neptuno; en la segunda columna se dan los coeficientes de correlación múltiple $R^2$ que nos muestran el comportamiento estadístico de los valores de una de las parejas: a medida que $R^2$ tiende a uno el periodo es más comfiable; en la tercera y cuarta columna están los periodos obtenidos por medio del análisis de las energías potenciales relativas y los periodos que se obtuvieron por medio de las ecuaciones (1.25) y (1.26) respectivamente dados en años.

Tabla 3.3

| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cuerpos | $R^2$ | $T_r$(años) | $T_o$(años) | cuerpos | $R^2$ | $T_r$(años) | $T_o$(años) |
| 01 | 0.9580 | 0.24085 | 0.24085 | 26 | 0.6590 | 0.62821 | 0.62833 |
| 02 | 0.9997 | 0.61519 | 0.61521 | 27 | 0.3877 | 0.61974 | 0.61975 |
| 03 | 0.9997 | 1.00004 | 1.00004 | 28 | 0.8945 | 0.61751 | 0.61752 |
| 04 | 0.9913 | 1.88095 | 1.88089 | 34 | 0.6535 | 2.13549 | 2.13540 |
| 05 | 0.9975 | 11.86333 | 11.86223 | 35 | 0.9119 | 1.09209 | 1.09211 |
| 06 | 0.9966 | 29.44348 | 29.45772 | 36 | 0.7914 | 1.03519 | 1.03518 |
| 07 | 0.9976 | 83.93345 | 84.01331 | 37 | 0.5497 | 1.01211 | 1.01209 |
| 08 | 0.9994 | 164.83499 | 164.79345 | 38 | 0.9463 | 1.00615 | 1.00615 |
| 12 | 0.7101 | 0.39580 | 0.39580 | 45 | 0.9348 | 2.23503 | 2.23533 |
| 13 | 0.8292 | 0.31726 | 0.31726 | 46 | 0.8220 | 2.00933 | 2.00918 |
| 14 | 0.7066 | 0.27622 | 0.27622 | 47 | 0.6384 | 1.92411 | 1.92396 |
| 15 | 0.7284 | 0.24584 | 0.24584 | 48 | 0.9645 | 1.90265 | 1.91630 |
| 16 | 0.4611 | 0.24283 | 0.24284 | 56 | 0.8064 | 19.82556 | 19.85932 |
| 17 | 0.1441 | 0.24154 | 0.24120 | 57 | 0.8911 | 13.82643 | 13.81248 |
| 18 | 0.8176 | 0.24123 | 0.24120 | 58 | 0.9810 | 12.78530 | 12.78233 |
| 23 | 0.6602 | 1.59870 | 1.59870 | 67 | 0.8499 | 45.48778 | 45.36361 |
| 24 | 0.7919 | 0.91423 | 0.91425 | 68 | 0.9375 | 35.83651 | 35.86955 |
| 25 | 0.8610 | 0.64918 | 0.64886 | | | | |

Utilizando las mismas técnicas, obtuvimos otro periodo llamado de "eventos" (es el intervalo de tiempo que transcurre entre dos configuraciones similares de dos planetas respecto a un observador externo fijo) dado en la tabla 3.4, en la última columna los datos fueron de Flores(1987).

Tabla 3.4

| cuerpos | $R^2$ | $T_r$(años) | $T_o$(años) |
|---|---|---|---|
| 13 | 0.8321 | 0.96965 | 0.95178 |
| 14 | 0.7935 | 1.89344 | ------- |
| 15 | 0.7543 | 14.44822 | ------- |
| 16 | 0.9729 | 29.75464 | ------- |
| 17 | ------ | 84.30027 | ------- |
| 23 | 0.9997 | 7.98612 | 7.99350 |
| 24 | 0.9998 | 32.65539 | ------- |
| 25 | 0.4510 | 14.85975 | ------- |
| 26 | 0.9992 | 29.22965 | ------- |
| 27 | ------ | 83.67055 | ------- |
| 34 | 0.9980 | 15.78182 | 14.94778 |
| 35 | 0.6061 | 11.86192 | 12.01321 |
| 36 | 0.9992 | 29.47570 | --------- |
| 37 | ------ | 84.02648 | --------- |
| 45 | 0.9461 | 11.86680 | --------- |
| 46 | 0.9895 | 29.28245 | --------- |
| 47 | ------ | 84.65620 | --------- |
| 56 | ------ | 59.61800 | --------- |
| 57 | ------ | 82.84918 | --------- |

En las siguientes figuras (fig. 3.2.1 a 3.2.37) se muestran las energías potenciales relativas (en unidades de 1.592X10$^{35}$erg.) entre pares de cuerpos como función del tiempo (en días), la separación entre los picos nos da el periodo orbital (parejas 01, 02, ..., 09) y sinódico (parejas 12, 13, ..., 68) y la separación entre los mínimos de los mínimos, nos da lo que le llamamos periodo de "eventos". En las figuras 3.2.11-3.2.12, 3.2.17-3.2.19, 3.2.23-3.2.25, 3.2.28-3.2.29, 3.2.31, y 3.2.33-3.2.34 observamos que para un número determinado de periodos sinódicos, tenemos un periodo de "eventos"; por ejemplo Mercurio para tres periodos sinódicos nos da un periodo de "eventos" de 0.97años aproximadamente, Venus para 5 periodos sinódicos da uno de "eventos" de 7.99 años aproximadamente, Marte para 7 periodos sinódicos le corresponde uno de "eventos", etc..

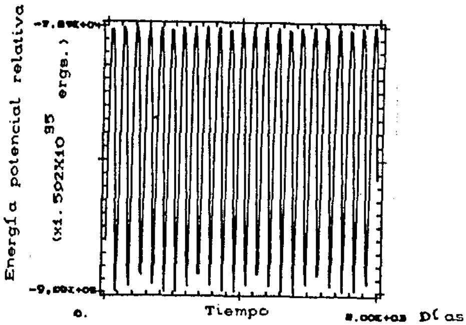


Fig. 3.2.1 Pareja 01

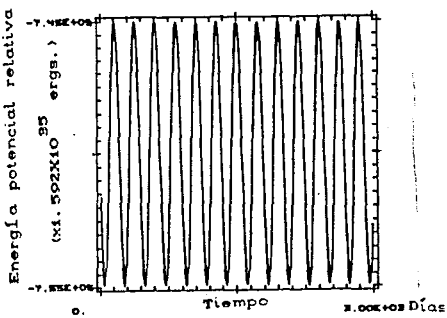


Fig 3.2.2 Pareja 02

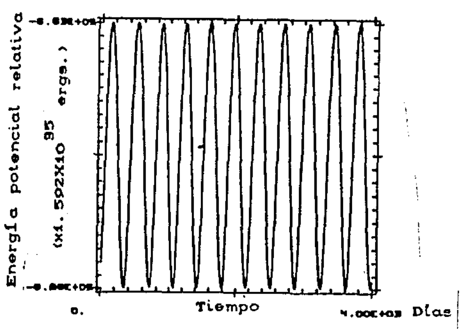


Fig. 3.2.3 Pareja 03

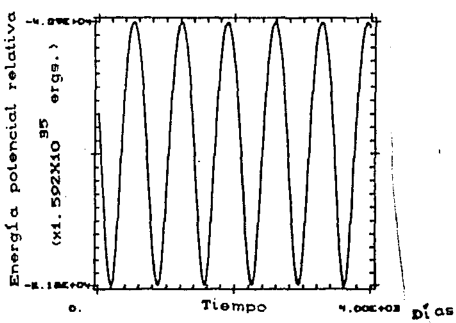


Fig. 3.2.4 Pareja 04

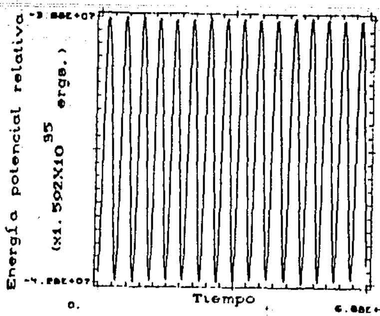



Fig. 3. 2. 5 Pareja 05

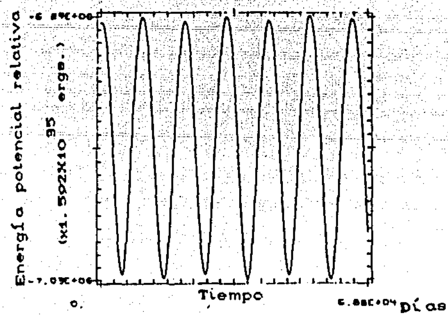



Fig. 3. 2. 6 Pareja 06

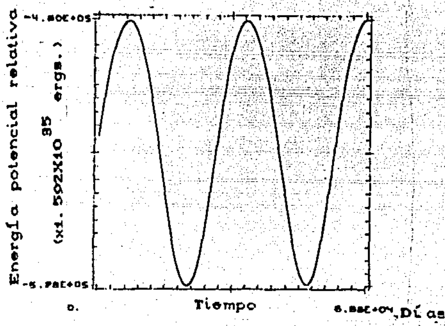



Fig. 3. 2. 7 Pareja 07

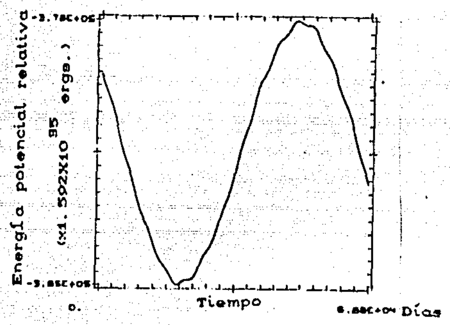



Fig. 3. 2. 8 Pareja 08

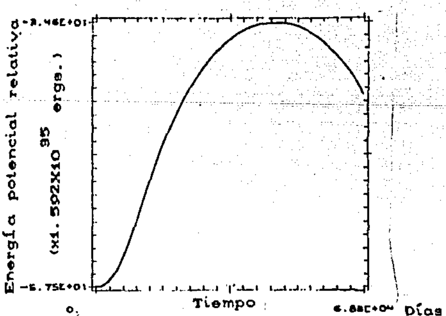



Fig. 3. 2. 9 Pareja 09

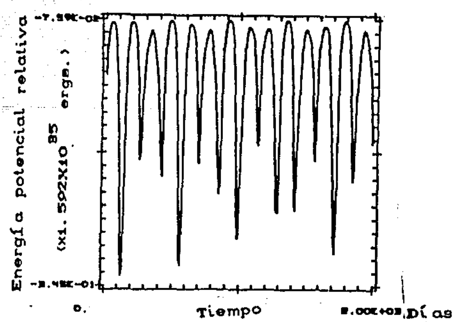



Fig. 3. 2. 10 Pareja 12

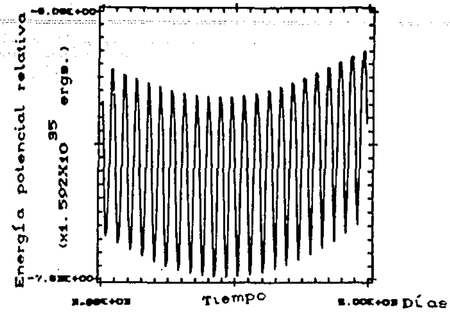


Fig. 3.2.11 Pareja 13

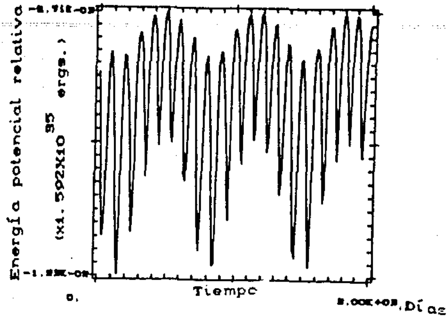


Fig. 3.2.12 Pareja 14

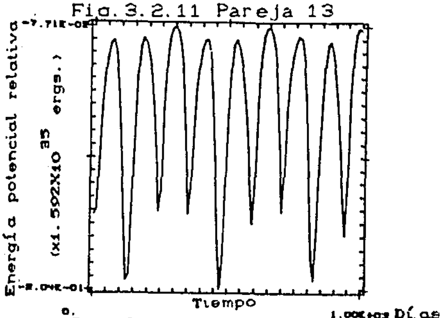


Fig. 3.2.13 Pareja 15

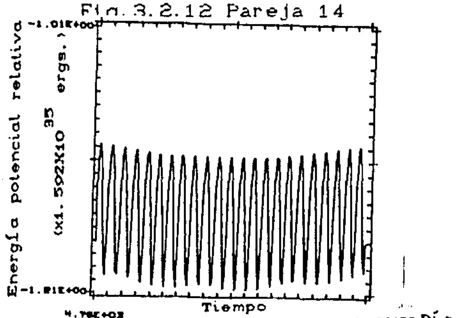


Fig. 3.2.14 Pareja 16

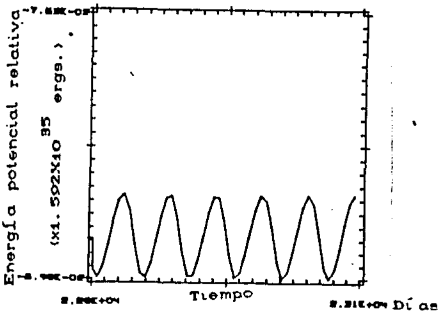


Fig. 3.2.15 Pareja 17

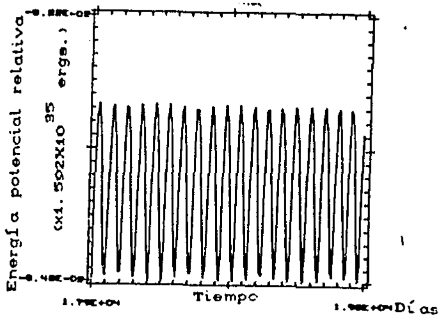


Fig. 3.2.16 Pareja 18

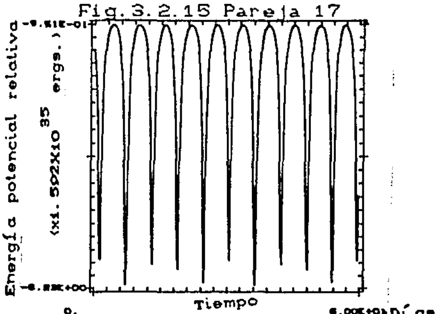


Fig. 3.2.17 Pareja 23

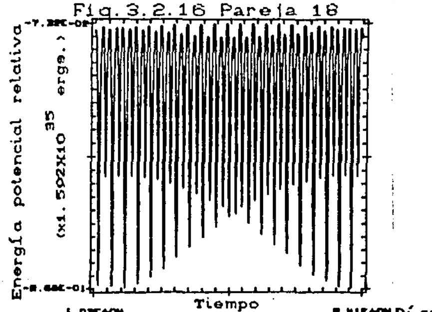


Fig. 3.2.18 Pareja 24

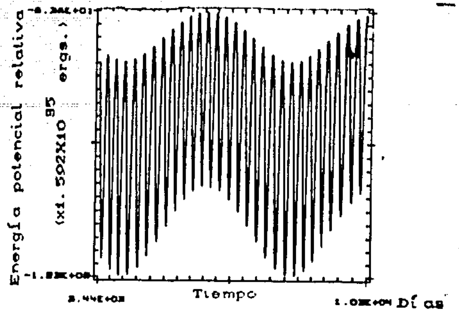



Fig.3.2.19 Pareja 25

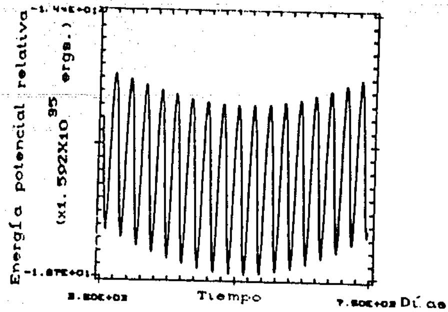



Fig.3.2.20 Pareja 26

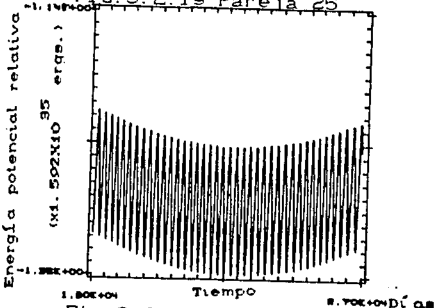



Fig.3.2.21 Pareja 27

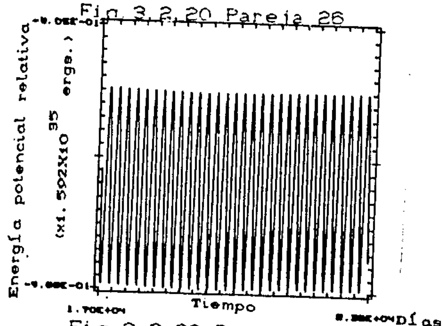



Fig.3.2.22 Pareja 28

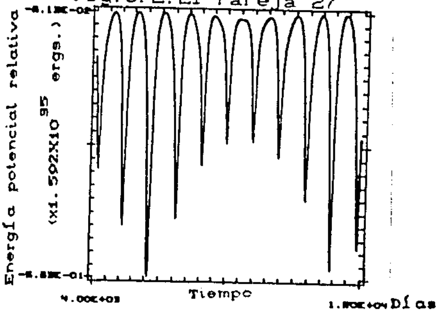



Fig.3.2.23 Pareja 34

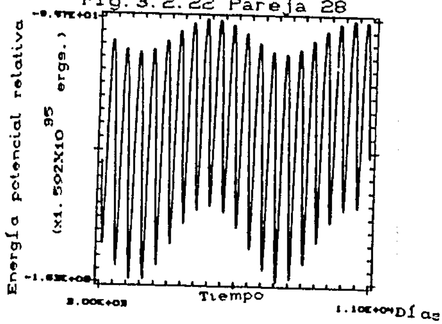



Fig.3.2.24 Pareja 35

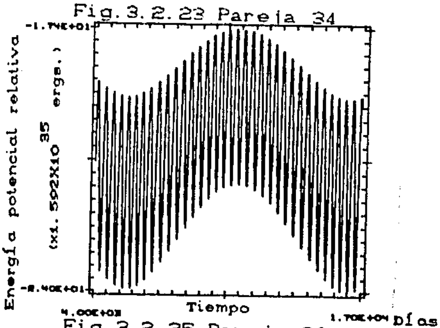



Fig.3.2.25 Pareja 36

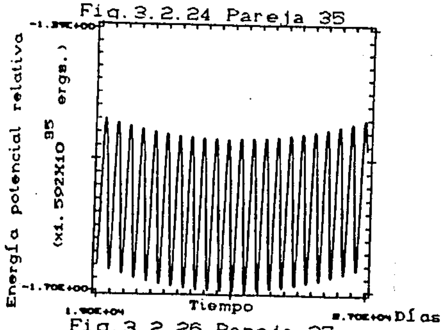



Fig.3.2.26 Pareja 37

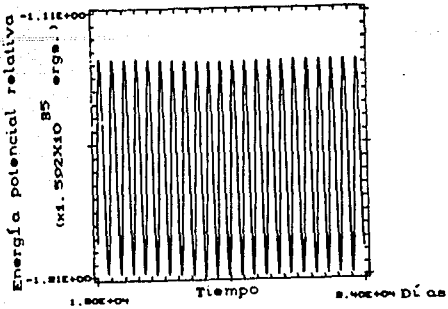


Fig.3.2.27 Pareja 38

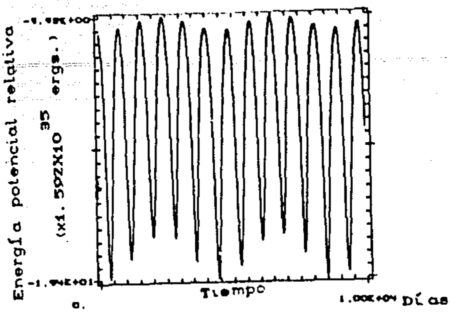


Fig.3.2.28 Pareja 45

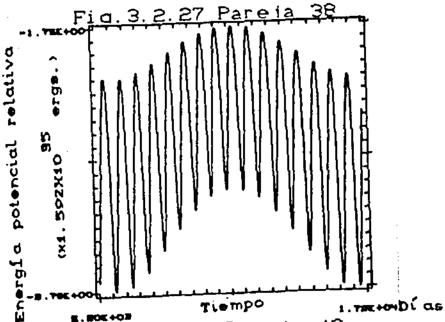


Fig.3.2.29 Pareja 46

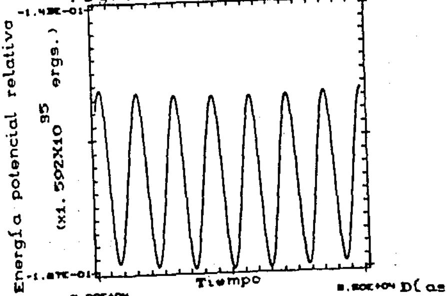


Fig.3.2.30 Pareja 47

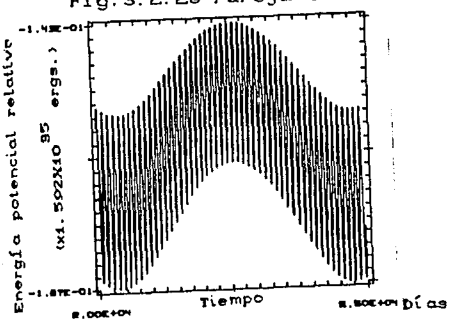


Fig.3.2.31 Pareja 47

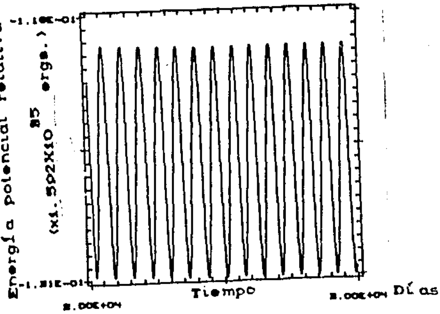


Fig.3.2.32 Pareja 48

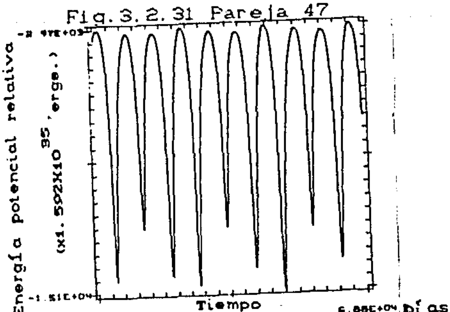


Fig.3.2.33 Pareja 56

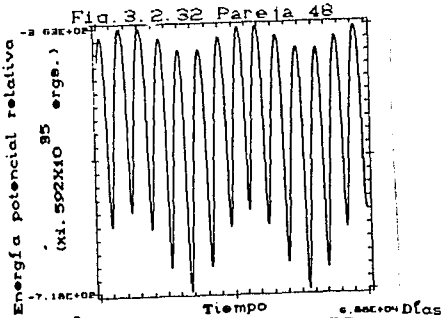


Fig.3.2.34 Pareja 57

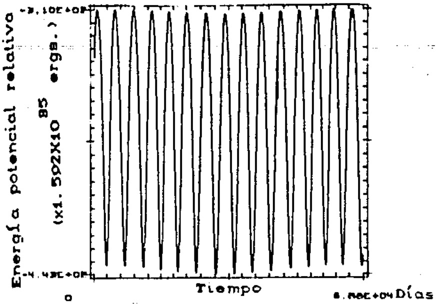



Fig. 3.2.35 Pareja 58

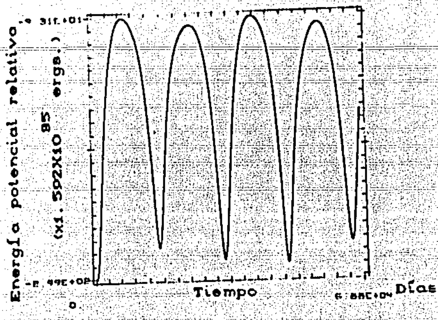



Fig. 3.2.36 Pareja 67

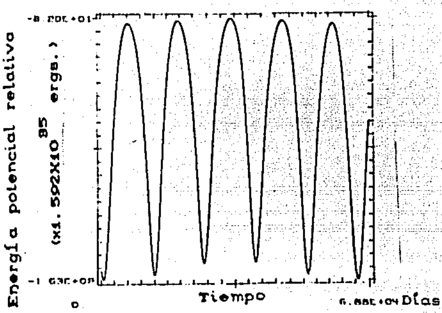



Fig. 3.2.37 Pareja 68

## 3.3) ENERGIAS

En las figuras 3.3.1 Y 3.3.2 se muestran las gráficas de energía potencial y cinética respectivamente, de los planetas y el sol para un tiempo de 6000 días (16.4 años aproximadamente), en ella observamos su variación periódica cuyo máximo a mínimo (para este intervalo de tiempo) se muestran en la tabla 3.5. Podemos notar que la variación de la energía del sol puede relacionarse con Júpiter y Saturno.

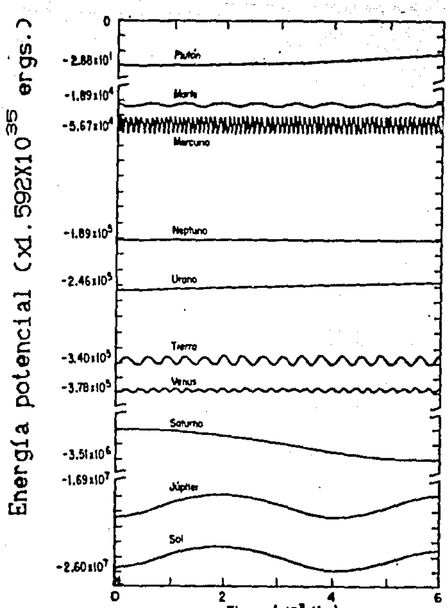



Fig.3.3.1 Gráfica de energía potencial vs tiempo para los planetas y el Sol durante 6000 días

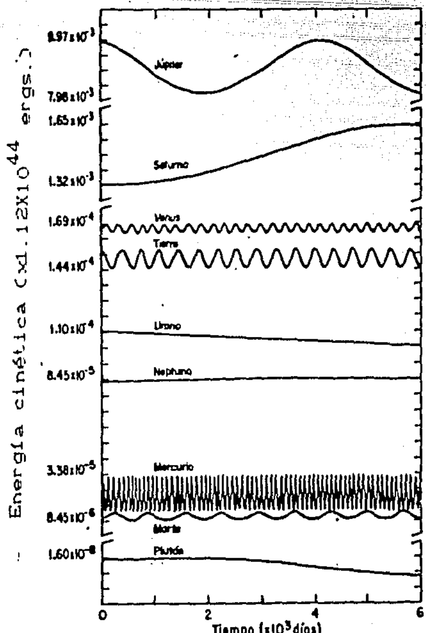



Fig 3.3.2 Gráfica de energía cinética vs tiempo de los planetas durante 6000 días

tabla 3.5

| | Energía potencial ($10^{40}$ ergs.) | | | Energía cinética ($10^{40}$ ergs.) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| cuerpo | mínima | máxima | ΔE | mínima | máxima | ΔE |
| Plutón | −0.0005 | −0.0003 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0002 |
| Marte | −0.4125 | −0.3419 | 0.0706 | 0.1549 | 0.2255 | 0.0706 |
| Mercurio | −0.9528 | −0.6277 | 0.3251 | 0.2493 | 0.5743 | 0.3250 |
| Neptuno | −3.0686 | −3.0157 | 0.0529 | 1.4880 | 1.5504 | 0.0624 |
| Urano | −4.2100 | −3.8287 | 0.3813 | 1.8225 | 2.2122 | 0.3897 |
| Tierra | −5.4577 | −5.2780 | 0.1797 | 2.5943 | 2.7739 | 0.1796 |
| Venus | −6.0135 | −5.9321 | 0.0814 | 2.9454 | 3.0267 | 0.0813 |
| Saturno | −56.0138 | −50.1442 | 5.8696 | 23.7324 | 29.5622 | 5.8298 |
| Júpiter | −340.5517 | −308.8028 | 31.7489 | 146.9414 | 178.7651 | 31.8237 |
| Sol | −415.6223 | −378.1381 | 37.4842 | 0 | 0 | 0 |

En la misma tabla, podemos ver que los planetas y el sol se encuentran en orden decreciente para la energía potencial de cada uno de ellos y en orden creciente para la energía cinética de cada uno de ellos, se observa que ambas energías son del mismo orden. Se observa que la distribución de los planeta en términos de la energía no corresponde directamente a su distribución espacial, ya que las masas y velocidades influyen en su valor; el orden en que se encuentran los planetas respecto a la energía potencial de cada uno de ellos es el mismo para la energía cinética. Calculamos la energía potencial total del sistema (fig.3.3.3) y la comparamos con la energía cinética total del sistema (fig.3.3.4), encontramos que el teorema Virial se satisface, i.e. 1/2 energía potencial total ($\simeq -198.469X10^{40}$ergs.) = menos la energía cinética del sistema ($\simeq 198.974X10^{40}$ergs.). Otra forma de verificar el teorema es graficar un medio de la energía potencial total del sistema contra la energía cinética total del sistema (ver fig.3.3.5) y observamos que la relación es una recta cuya pendiente es menos uno, lo que nos implica que se cumple el teorema virial. En la figura 3.3.6 se muestra el comportamiento de la energía total del sistema solar con respecto al tiempo, durante un tiempo cercano a dos siglos.

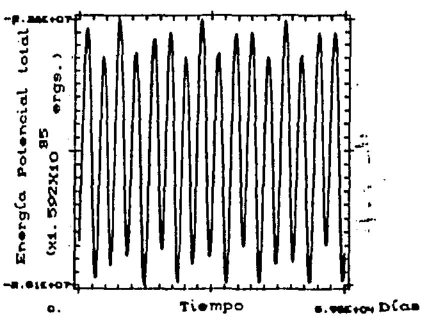


Fig. 3.3.3 Gráfica de energía potencial total del sistema solar vs tiempo, durante un tiempo cercano a dos siglos

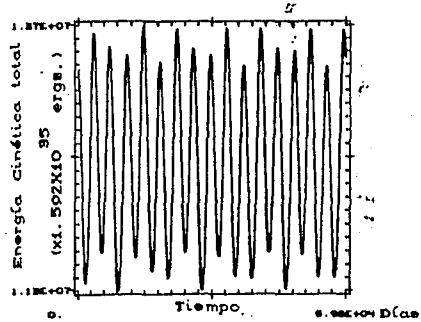


Fig 3.3.4 Gráfica de energía cinética total del sistema solar vs tiempo durante un tiempo cercano a dos siglos

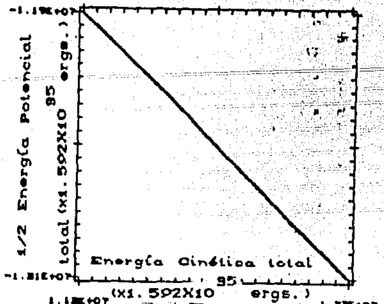



Fig 3.3.6 Gráfica de un medio de la energía potencial total del sistema solar vs la energía cinética total del mismo, durante un tiempo cercano a dos siglos.

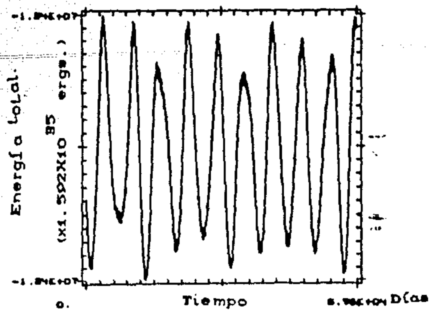



Fig 3.3.6 Gráfica de la energía total del sistema solar vs tiempo durante un tiempo cercano a dos siglos

3.4) POTENCIAL

Con el propósito de estudiar el comportamiento radial del potencial heliocéntrico en el sistema planetario, variamos la posición de un punto prueba, a lo largo de una linea radial al sol que pasa cerca de algún planeta ( la distancia inicial es de 50 UA del sol).

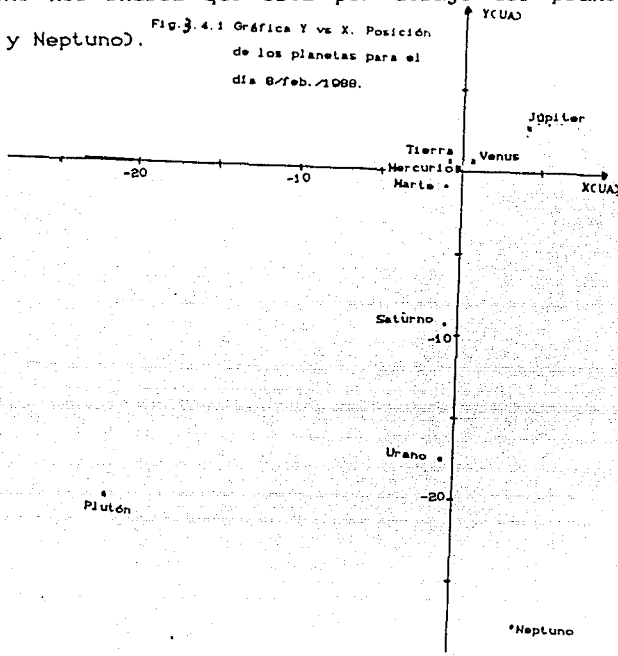
Las posiciones elegidas corresponden a la misma fecha que tomamos como punto de partida para el cálculo numérico (9 de febrero de 1988); graficamos las posiciones para esta fecha en el plano xy (fig.3.4.1), transformamos las posiciones en coordenadas esféricas (ver tabla 3.6).

Tabla 3.6

| Planeta | coordenadas cartesianas | | | coordenadas esfericas | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | x(UA) | y(UA) | z(UA) | r(UA) | θ(grado) | φ(grado) |
| Mercurio | -0.21069 | 0.21391 | 0.13612 | 0.32966 | 65.6126 | 134.5650 |
| venus | 0.35180 | 0.58270 | 0.23986 | 0.72168 | 70.5881 | 58.8793 |
| Tierra | -0.75144 | 0.58640 | 0.25425 | 0.98649 | 75.0645 | 142.0328 |
| Marte | -1.03226 | -1.06655 | -0.46125 | 1.55430 | 107.2629 | 225.9360 |
| Júpiter | 4.05659 | 2.66656 | 1.04417 | 4.96556 | 77.8611 | 33.3186 |
| Saturno | -0.80035 | -9.26311 | -3.79112 | 10.04083 | 112.1833 | 265.0618 |
| Urano | -0.78055 | -17.62816 | -7.70953 | 19.25612 | 113.6012 | 267.4647 |
| Neptuno | 4.27232 | -27.65728 | -11.42666 | 30.22824 | 112.2106 | 278.7813 |
| Plutón | -21.58695 | -20.35554 | 0.15245 | 29.67100 | 89.7056 | 223.3183 |

En la figura 3.4.1 se observa que si hacemos pasar radialmente la partícula cerca de Saturno, en esta fecha particular, esta pasará también cerca de Neptuno, Urano y Marte; donde el símbolo x indica que está por encima del plano (Mercurio, Venus, Tierra, Júpiter y Plutón) y el círculo lleno nos indica que esta por debajo del plano (Marte, Saturno, Urano y Neptuno).

Fig.3.4.1 Gráfica Y vs X. Posición de los planetas para el día 8/feb./1988.




Para determinar la posición del punto prueba a lo largo de la línea radial al Sol, hicimos lo siguiente:

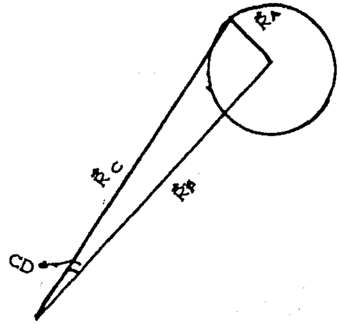



Fig. 3.4.2

Observando la figura 3.4.2 tenemos que

$$R_P = ( x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 )^{1/2}$$

$$R_C = ( R_P^2 + R_A^2 )^{1/2}$$

sabemos

$$\left.\begin{aligned} x_p &= R_P \operatorname{sen}(\theta_P)\cos(\phi_P) \\ y_p &= R_P \operatorname{sen}(\theta_P)\operatorname{sen}(\phi_P) \\ z &= R_P \cos(\theta_P) \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

ver figura 3.4.3

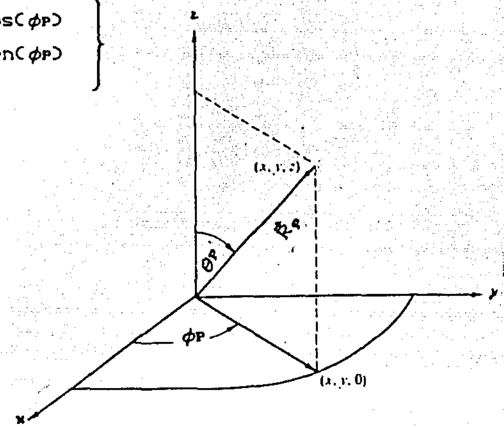



Fig 3.4.3 · Coordenadas polares esféricas

queremos conocer el valor de $\theta_P$ y $\phi_P$ a través de (*), tenemos

$$\theta_P = \cos^{-1}\left( \frac{z_p}{R_P} \right)$$

y

$$\phi_p = \tan^{-1}\left( \frac{y_p}{x_p} \right)$$

para calcular el ángulo CD (ver figura 3.4.4)

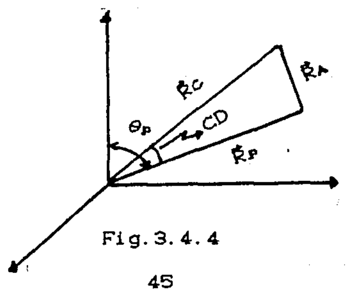



Fig.3.4.4

$$\tan(CD) = \frac{R_A}{R_P}$$

despejando CD, tenemos

$$CD = \tan^{-1}\left(\frac{R_A}{R_P}\right)$$

observando la figura 3.4.4, tenemos

$$\theta_c = \theta_p - CD$$

si suponemos

$$\phi_c = \phi_p$$

entonces podemos determinar la posición del punto prueba en el sistema de referencia heliocéntrico.

Como queremos estudiar el comportamiento radial del potencial heliocéntrico en el sistema solar, las coordenadas polares esféricas son las que mejor se ajustan a nuestra necesidad; hacemos que una partícula prueba que se mueve radialmente respecto al Sol pase cerca del planeta de modo que penetre su esfera de acción (ver **Apendice B**). Para hacer esto, concideramos $\phi c = \phi P$ y que el valor de $\theta c$ esté cerca del valor de $\theta P$. Calculamos el potencial heliocéntrico en el sistema solar como función de la distancia para el día 9 de febrero de 1988.

En las figuras 3.4.5 a 3.4.8 el punto prueba tiene como coordenadas $\theta c = 117^\circ$, $\phi c = 265^\circ$ y Rc de 50 AU a 0.1 AU.

En la figura 3.4.5 mostramos el potencial total del sistema solar (respecto al sistema heliocéntrico) y en la figura 3.4.6 el potencial heliocéntrico de cada uno de sus miembros (Sol y planeta), vemos claramente que el potencial dominante es el del Sol y los demás potenciales están contenidos en la franja muy delgada que se muestra. Ahora describiremos algunos detalles de la franja delgada,en la figura 3.4.7 observamos varios mínimos que representan pozos de potencial, cuya ubicación corresponde a algún planeta, el más profundo corresponde a Saturno, el segundo a Urano y el tercero a Neptuno; una ampliación de esta figura es la 3.4.8 y en ella se puede observar que existe otro pozo de potencial y este corresponde a Marte. En la figura 3.4.9 se observa el potencial de Júpiter cuando el punto prueba tiene como coordenadas $\theta c = 80^{o}$, $\phi c = 33^{o}$ y Rc y se ve un pozo de potencial, lo que indica que la contribución de los demás planeta es despreciable. La figura 3.4.10 se muestra el potencial cuando el punto prueba tiene coordenadas $\theta c = 90^{o}$, $\phi c = 223^{o}$ y Rc (estas coordenadas se eligieron de modo que la partícula prueba penetre la esfera de acción de Plutón) y en ella se observan dos pozos de potencial de los cuales el más profundo corresponde a Saturno y el segundo a Urano; una ampliación de esta figura esta es la 3.4.11 y se ve claramente de que existe otro pozo de potencial que corresponde a Plutón.

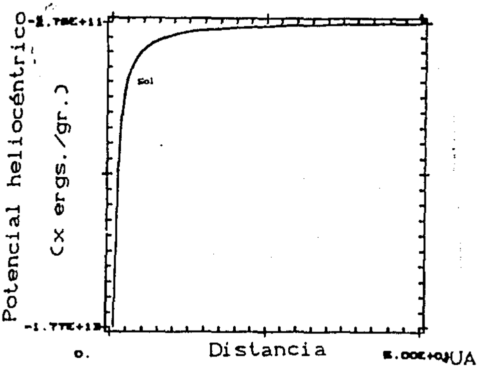



Fig. 3.4.5

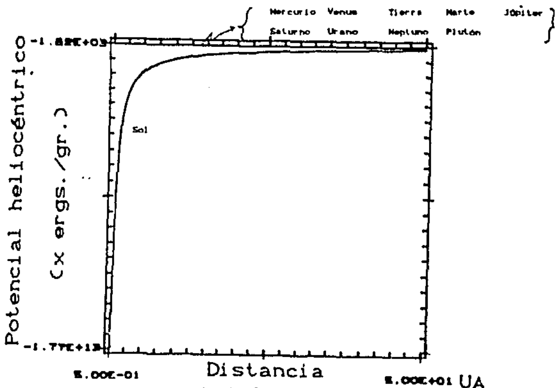



Fig. 3.4.6

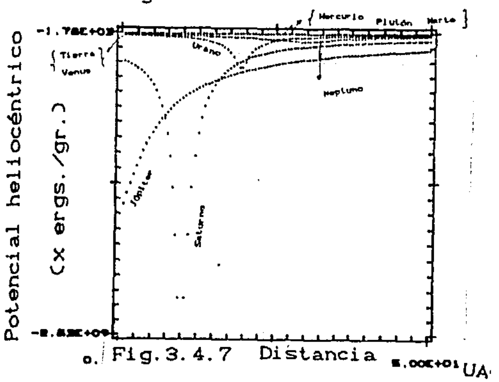



Fig. 3.4.7

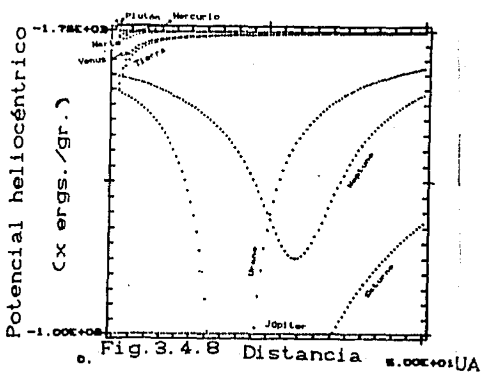



Fig. 3.4.8

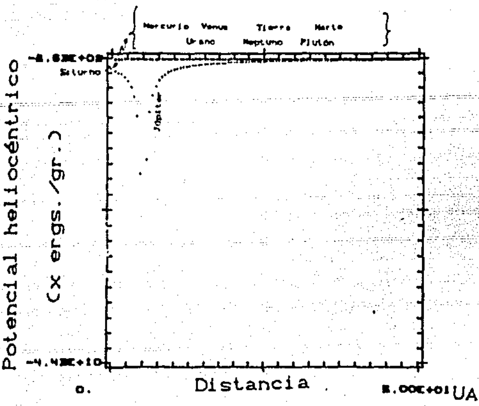


Fig. 3.4.9

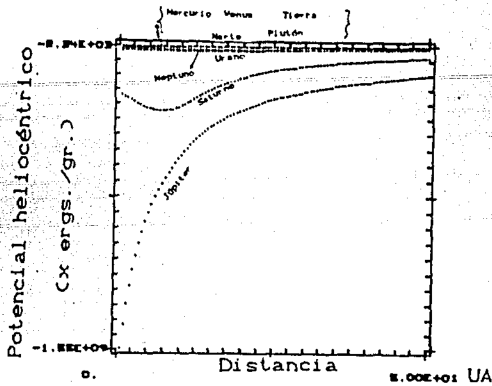


Fig. 3.4.10

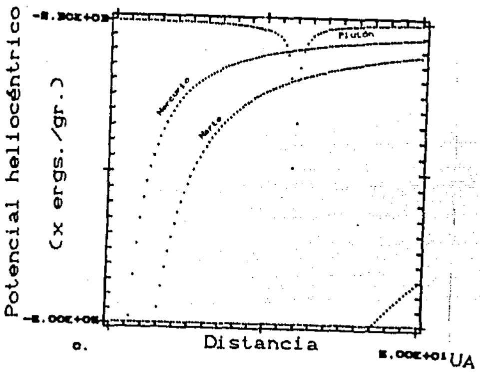


Fig. 3.4.11

## 3.5) RADIO DE ACCION

Dada la posición de algún objeto en el sistema planetario es interesante conocer la interacción que posee con cada uno de sus miembros es decir, qué tan importante es la acción de uno de los miembros del sistema solar respecto de otro.

Deséamos conocer el radio para el cual la acción del planeta es comparable a la acción del sol (radio de acción), la expresión (**Apendice B**) que nos permite evaluarlo es la siguiente:

$$R_A = \left(\frac{m}{M}\right)^{1/5} r_p ,$$

donde $R_A$ es el radio de acción, $r_p$ es el radio orbital del planeta, m y M son las masas del planeta y el Sol respectivamente.

Para tener idéa del tamaño de cada uno de los radios de acción, obtendremos la razón del radio orbital de un satélite respecto del radio de acción del planeta correspondiente, en la tabla 3.7 se muestran sus valores. Como se puede observar los satélites están contenidos en la esfera de acción del planeta al que se asocian.

Tabla 3.7

| Satélites | Radio orbital $10^3$km | Razón de radios |
|---|---|---|
| **Tierra** | | |
| Luna | 384.4 | 0.4156 |
| **Marte** | | |
| Fobos | 9.4 | 0.0624 |
| Deimos | 23.5 | 0.0406 |
| **Jupiter** | | |
| 1979 J3 | 126 | 0.0026 |
| Io | 422 | 0.0088 |
| Europa | 671 | 0.0140 |
| Ganímides | 1071 | 0.0223 |
| Calixto | 1884 | 0.0392 |
| Sinope | 23670 | 0.4921 |
| **Saturno** | | |
| S 15 | 136 | 0.0025 |
| Dione | 377 | 0.0069 |
| Rea | 527 | 0.0096 |
| Titán | 1222 | 0.0224 |
| Japeto | 3562 | 0.0652 |
| Febe | 12960 | 0.2374 |
| **Urano** | | |
| Miranda | 130 | 0.0025 |
| Ariel | 191 | 0.0037 |
| Umbriel | 266 | 0.0051 |
| Titania | 436 | 0.0084 |
| Oberón | 583 | 0.0112 |
| **Neptuno** | | |
| Tritón | 356 | 0.0041 |
| Nereida | 5567 | 0.0641 |
| **Pluton** | | |
| Caronte | 19 | 0.0059 |

## 3.6) ENERGIA POTENCIAL MAS ENERGIA CINETICA AZIMUTAL

En la figura 3.6.1 mostramos la gráfica de la energía potencial más energía cinética en la dirección azimutal contra distancia heliocéntrica de cada planeta, en ella observamos la distribución espacial de esta energía que indican los límites del pozo potencial correspondiente a cada uno, de ellos. La suma de la energía potencial y de la energía cinética azimutal se le conoce como energía potencial efectiva $V_{ef}$. En la figura 3.6.2 se muestra la naturaleza de este pozo de potencial como resultado de la suma de la energía potencial del Sol más la energía cinética azimutal de un planeta, también se muestra los puntos de retornos ($r_1$ y $r_2$). Del intervalo integrado, hemos obtenido el valor mínimo y máximo de la distancia orbital de cada planeta (perihelio y afelio) tabla 3.8.

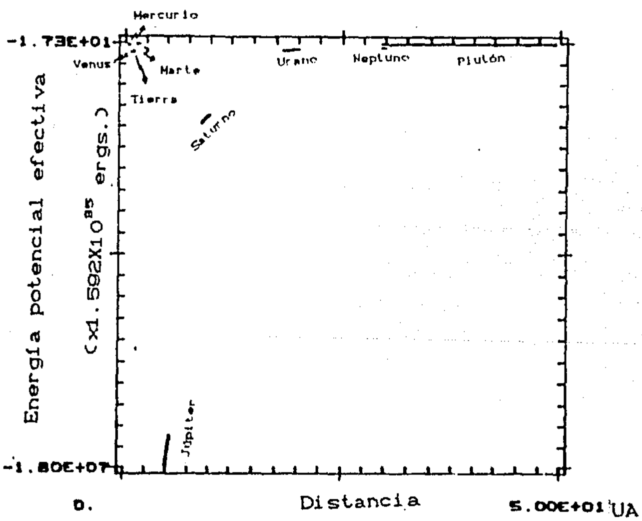



Fig. 3.6.1 Energía potencial efectiva para cada planeta vs Distancia

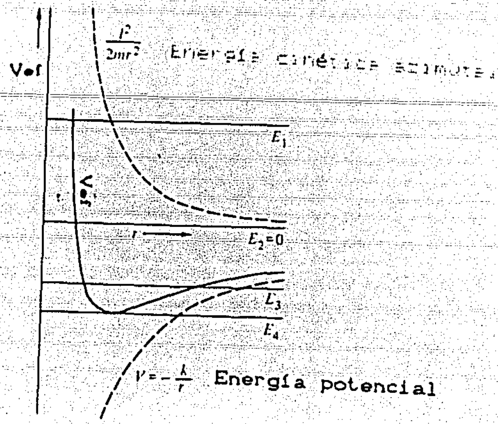



Fig. 3.6.2 Energía potencial efectiva para una fuerza de atracción que varía con el inverso de cuadrado de la distancia.

RADIO ORBITAL DE LOS PLANETAS

| Planeta | mínimo (UA) | máximo (UA) |
|---|---|---|
| Mercurio | 0.30768 | 0.46358 |
| Venus | 0.71842 | 0.72824 |
| Tierra | 0.98340 | 1.01667 |
| Marte | 1.38120 | 1.66603 |
| Júpiter | 4.94839 | 5.45650 |
| Saturno | 9.01488 | 10.0656 |
| Urano | 18.7238 | 20.0988 |
| Neptuno | 29.8236 | 30.2282 |
| Plutón | ------- | 49.3203 |

Para Plutón no fué posible determinar sus distancias mínimas respecto al Sol, dado que los datos de posición que obtuvimos son para un tiempo menor al periodo orbital de él.

# CONCLUSIONES

En el estudio de la dinámica del sistema planetario, las posiciones reales de los planetas representan una parte muy importante para el estudio de su movimiento en grandes intervalos de tiempo (millones de años), aunque en la actualidad se aplican diferentes técnicas de integración numérica a las ecuaciones de movimiento, no puede asegurarse que las posiciones y velocidades calculadas después de algunos millones de años correspondan a la posición real debido principalmente a los errores de redondeo y truncamiento.

Mientras que los métodos de integración del tipo Runge-Kutta y Gauss-Jackson pretenden ser técnicas de aplicación general, pues contienen implícitamente desarrollos de los polinomios de Taylor, consideramos que para los propósitos actuales la integración numérica por expansión en serie de Taylor para resolver las ecuaciones de movimiento del problema de N cuerpos, nos da una evaluación más directa. Por ejemplo el método de Gauss-Jackson por si mismo no es eficiente a menos que tenga de entrada otro método de integración numérica, entonces, dependiendo del método de integración será más ó menos eficiente para resolver este problema. Con respecto a los métodos tipo Runge-Kutta el elegir el orden adecuada implica la eficiencia del método en resolver el problema; caso contrario del que ocurre en el método serie de Taylor, ya que en el consideras hasta que orden de la serie quiere uno llegar para tener mejor precisión.

Los cálculos obtenidos en un intervalo de tiempo cercano a dos siglos en el sistema heliocéntrico, dieron aproximaciones de milésimas en las posiciones de Venus, Tierra y Marte, y diezmilésimas para los planetas exteriores.

Los cálculos obtenidos con las expansiones de orden séptimo y octavo no cambian significativamente, pues la diferencia entre ellas aparece en la décima primera cifra después de 10 años de integración.

Es importante notar que la acción del Sol domina el sistema planetario aunque en la vecindad de algún planeta, es decir, en el interior de su esfera de influencia, la acción es mayor o igual a la del Sol.

# APENDICE A

# SISTEMA DE COORDENADAS

## A.1) SISTEMA DE COORDENADAS CURVILINEAS

Para describir el movimiento de un conjunto de partículas que interactúan, el observador debe definir un sistema de referencia. En general podemos definir un sistema de coordenadas curvilíneas, en función de las cuales se puede analizar el movimiento de una partícula. Las coordenadas más utilizadas son las coordenadas cartesianas, polares y esféricas, también se utilizaban las coordenadas cilíndricas elípticas.

Consideremos las coordenadas rectangulares $(x,y,z)$ y las curvilíneas $(q_1,q_2,q_3)$. Las ecuaciones de transformación entre ellas son de la forma siguiente.

De curvilíneas a cartesianas:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(q_1,q_2,q_3) \\ y &= y(q_1,q_2,q_3) \\ z &= z(q_1,q_2,q_3) \end{aligned}\right\} \tag{A.1}$$

De cartesianas a curvilíneas:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= q_1(x,y,z) \\ q_2 &= q_2(x,y,z) \\ q_3 &= q_3(x,y,z) \end{aligned}\right\} \tag{A.2}$$

Dado un punto P de coordenadas rectangulares $(x,y,z)$ se le asocia, según la transformación (A.2), un conjunto único de números $(q_1,q_2,q_3)$ que llamaremos coordenadas curvilíneas de P.

En las coordenadas cartesianas tratamos con tres familias de planos mutuamente perpendiculares:

$$\left.\begin{array}{l} x = \text{constante} \\ y = \text{constante} \\ z = \text{constante} \end{array}\right\} \qquad (A.3)$$

Imaginemos que sobreponemos en este sistema otras tres familias de superficies coordenadas definidas como:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = \text{constante} \\ q_2 = \text{constante} \\ q_3 = \text{constante} \end{array}\right\} \qquad (A.4)$$

La intersección de cada par de estas superficies definen las líneas coordenadas correspondientes (fig.1.1). Si las superficies coordenadas se cortan en ángulos rectos, el sistema curvilíneo es ortogonal. Las líneas coordenadas $q_1, q_2$ y $q_3$ de un sistema curvilíneo son análogas a los ejes coordenados x,y, z de un sistema rectangular.

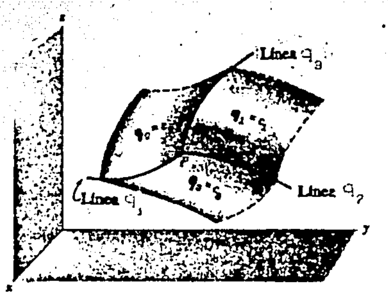



Fig.1.1

En el caso más general, en cada punto P de un sistema de coordenadas curvilíneas se pueden definir dos sistemas de vectores unitarios (fig. 1.2): el primer conjunto es el de los vectores unitarios tangentes $\hat{e}_{q_1}, \hat{e}_{q_2}, \hat{e}_{q_3}$ a las superficies $q_1, q_2, q_3$ y el segundo es el conjunto de vectores normales unitarios $\hat{e}_{Q_1}, \hat{e}_{Q_2}, \hat{e}_{Q_3}$ a estas mismas superficies. Ambas ternas sólo coincidirán en el caso de que el sistema de coordenadas curvilíneas sea ortogonal y derecho, y cada terna juega el mismo papel que los vectores unitarios $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ del sistema de coordenadas rectangulares, con la única diferencia de que aquellos pueden cambiar de dirección y sentido de un punto a otro.

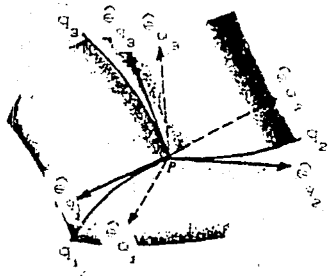



fig.1.2

De acuerdo a lo anterior tenemos

$$\hat{e}_{q_i} \cdot \hat{e}_{q_j} = 0, \qquad \forall\ i=j \quad i,j = 1,2,3. \quad \text{(sistema ortogonal)} \qquad (A.5)$$

$$\left[\hat{e}_{q_1} \cdot \hat{e}_{q_2} X \hat{e}_{q_3}\right] = 1 \quad \text{(sistema derecho)} \qquad (A.6)$$

entonces

$$\hat{e}_{q_i} = \hat{e}_{\alpha_i} \qquad \forall\ i = 1,2,3. \qquad (A.7)$$

Con:

$$\hat{e}_{q_i} = \frac{1}{h_{q_i}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \qquad (A.8)$$

$$h_{q_i} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| \qquad (A.9)$$

$$\hat{e}_{\alpha_i} = \frac{1}{H_{q_i}} \vec{\nabla} q_i \qquad (A.10)$$

$$H_{q_i} = \left| \vec{\nabla} q_i \right| \qquad (A.11)$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición y las $h_{q_1}$, $h_{q_2}$ y $h_{q_3}$ se les conoce como factores de escala ó coeficientes métricos, pues los coeficientes diferenciales $dq_1$, $dq_2$, $dq_3$ deben multriplicarse por ellos respectivamente para obtener longitudes de arco. Los factores de escala dependen de las coordenadas y tienen dimensión. Pero su producto con las coordenadas diferenciales tienen dimensión de longitud. i.e.,

$$ds_{q_i} = h_{q_i} dq_i \quad \forall\ i = 1,2,3. \tag{A.12}$$

demostración:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_{q_i}} \frac{\partial s_{q_i}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_{q_i}} \frac{ds_{q_i}}{dq_i} \qquad \text{(I)}$$

pero

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s_{q_i}} = \hat{e}_{q_i} \qquad (*)$$

utilizando las ecuaciones (A.8) y (*) en la ecuación (I), llegamos

$$h_{q_i} \hat{e}_{q_i} = \frac{ds_{q_i}}{dq_i} \hat{e}_{q_i}$$

entonces

$$ds_{q_i} = h_{q_i} dq_i$$

---

A.2) SISTEMA DE CORDENADAS POLARES

Como aplicación de lo anterior, calcularemos las ecuaciones para la posición, velocidad y aceleración de un punto referido al sistema de coordenadas polares.

Las ecuaciones de transformación son

$$\left.\begin{array}{ll} x = \rho\cos\theta & 0 \le \rho < \infty \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}\right\} \qquad (A.13)$$

El vector de posición en coordenadas cartesianas esta dado como

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \qquad (A.14)$$

y en el sistema cartesiano de coordenas polares es

$$\vec{r} = \rho\cos\theta\ \hat{\imath} + \rho\operatorname{sen}\theta\ \hat{\jmath} \qquad (A.15)$$

Derivando el vector de posición con respecto a cada una de las componentes, obtenemos

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \cos\theta\ \hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\ \hat{\jmath}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = -\rho\operatorname{sen}\theta\ \hat{\imath} + \rho\cos\theta\ \hat{\jmath}$$

y aplicando la ecuación (A.9), tenemos

$$h_\rho = 1$$

$$h_\theta = \rho$$

Ahora encontraremos los vectores unitarios de este sistema. Utilizando estos dos últimos resultados y la ecuación (A.8), obtenemos en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \end{pmatrix} \qquad (A.16)$$

entonces, la matriz de tranformación del sistema coordenado cartesiano al sistema de coordenadas polares es:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y la matriz transpuesta $A^t$ nos dará la transformación del sistema de coordenadas polares al sistema coordenado cartesiano.

A continuación demostraremos que es un sistema ortogonal

Partiendo de la ecuación (A.5), hay que demostrar que

$$\hat{e}_\rho . \hat{e}_\theta = 0$$

demostración:

$$\hat{e}_\rho . \hat{e}_\theta = \left[\cos\theta\ \hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\ \hat{\jmath}\right].\left[-\operatorname{sen}\theta\ \hat{\imath} + \cos\theta\ \hat{\jmath}\right]$$

entonces

$$\hat{e}_\rho . \hat{e}_\theta = 0$$

∴ el sistema coordenado polar es ortogonal.

Una vez obtenida esta demostración, pasaremos a obtener el vector de posición en el sistema de coordenadas polares.

sabemos

$$\vec{r} = (\vec{r}.\hat{e}_\rho)\hat{e}_\rho + (\vec{r}.\hat{e}_\theta)\hat{e}_\theta \tag{A.17}$$

sustituyendo las ecuaciones (A.15) y (A.16) en esta ecuación y haciendo el desarrollo algebráico, llegamos

$$\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho \tag{A.18}$$

este es el radio vector en el sistema de coordenadas polares.

Derivando la ecuación (A.15) con respecto al tiempo, tenemos

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta)\hat{\imath} + (\dot{\rho}\operatorname{sen}\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta)\hat{\jmath} \tag{A.19}$$

sabemos

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{\vec{r}}.\hat{e}_\rho)\hat{e}_\rho + (\dot{\vec{r}}.\hat{e}_\theta)\hat{e}_\theta \tag{A.20}$$

aplicando las ecuaciones (1.16) y (1.19) en esta ecuación, llegamos

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\hat{e}_\theta \tag{A.21}$$

este es el vector de velocidad en el sistema de coordenadas polares.

Con la misma técnica, encontramos la expresión para la aceleración en el sistema de coordenadas polares y esta es

$$\vec{r} = (\rho - \rho\dot{\theta}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\theta)\hat{e}_\theta \tag{A.22}$$

o bién, como

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\hat{e}_\theta \qquad (A.23)$$

Este sistema de coordenadas es el adecuado para resolver el problema de dos cuerpos.

El sistema de coordenadas cilíndricas elípticas no es el adecuado para representar al sistema planetario, y las razones son que cada planeta tiene diferente orientación y que las expresiones son complicadas y se dificulta su manejo.

## APENDICE B
## RADIO DE ACCION

El campo de fuerza que ejerce el Sol sobre cada uno de los planetas es muy intenso a mayor acercamiento; hay ocasiones en que los campos de fuerzas del planeta y del Sol sobre un cuerpo son comparables en intensidad, es por ello que podemos definir una esfera de acción con radio $R_A$ y centrada en el planeta sobre la cual ambas interacciones son iguales. A continuación describimos el procedimiento para calcular el radio de acción.

Para llegar a ello hacemos lo siguiente:

sabemos

$$\ddot{\vec{R}}_i = G \sum_{j=1} \frac{m_j}{r^3_{ij}} \vec{r}_{ij} \quad \forall\ j \neq i \qquad (B.1)$$

donde $\vec{r}_{ij} = \vec{R}_j - \vec{R}_i$

si la ecuación la referimos al cuerpo uno, tenemos

$$\ddot{\vec{R}}_1 = G \sum_{j=2}^{n} \frac{m_j}{r^3_{1j}} \vec{r}_{1j} \qquad (B.2)$$

restando (B.1) de (B.2), obtenemos

$$\ddot{\vec{r}}_{1i} = - G \frac{m_1}{r^3_{1i}} \vec{r}_{1i} + G \sum_{j=2}^{n} \frac{m_j}{r^3_{ij}} \vec{r}_{ij} - G \sum_{j=2}^{n} \frac{m_j}{r^3_{1j}} \vec{r}_{1j}$$

$$\forall\ j \neq i \qquad \forall\ J \in N - \{0,1\}$$

ya que $\vec{r}_{i1} = -\vec{r}_{1i}$; si queremos $\forall\ j \neq i$, entonces le quitamos todas las $j=i$ al último término de la suma, teniendo

$$\ddot{\vec{r}}_{1i} = - G (m_i + m_1) \frac{\vec{r}_{1i}}{r^3_{1i}} + G \sum_{j=2}^{n} m_j \frac{\vec{r}_{ij}}{r^3_{ij}} - G \sum_{j=2}^{n} m_j \frac{\vec{r}_{1j}}{r^3_{1j}} \quad \forall\ j \neq i$$

ahora

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_{1j} - \vec{r}_{1i}$$

$$\text{así que } r^3_{ij} = [(\vec{r}_{1j} - \vec{r}_{1i}).(\vec{r}_{1j} - \vec{r}_{1i})]^{3/2}$$

utilizando estas dos últimas ecuaciones y sustituyendo en $\vec{r}_{1i}$ y quitándole el subíndice 1, tenemos

$$\ddot{\vec{r}}_i + G(m_i + m)\frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = G\sum_{j=2}^{n} m_j\left(\frac{\vec{r}_j - r_i}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3}\right) \quad \forall\ j \neq i \qquad (B.3)$$

Esta es la ecuación de movimiento de la párticula de masa $m_i$ relativo al de la masa m.

En el caso de un encuentro cercano de una partícula prueba (cometa ó nave espacial) con respecto a un planeta, la esfera de influencia (o esfera de acción) es siempre una superficie esférica centrada en el planeta, dentro de la cual es más conveniente a tomar la partícula prueba en órbita planetocéntrica y considerarlo como perturbado por el Sol.

El tamaño de una esfera dada puede ser llevado de la siguiente consideración. Sea P el planeta, S el Sol y V la partícula prueba (figura B.1), tienen masas m, M y m' respectivamente, donde m << M y m' es despreciable con respecto a ellos. Entonces por la ecuación (B.3), tenemos la ecuación de movimiento de la partícula prueba con respecto al Sol y esta dada por

$$\ddot{\vec{r}}_v + G(M + m')\frac{\vec{r}_v}{r_v^3} = Gm\left(\frac{\vec{r}_p - r_v}{r_{vp}^3} - \frac{\vec{r}_p}{r_p^3}\right) \qquad (B.4)$$

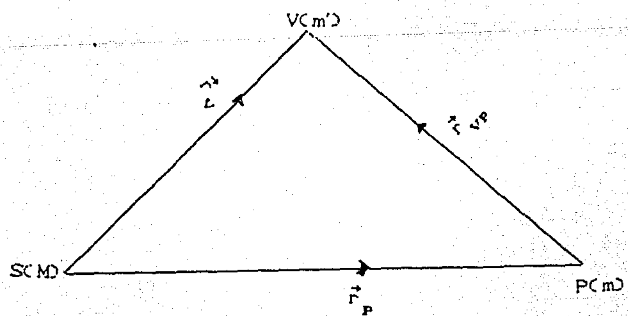



fig.a.1

La ecuación de movimiento de la particula respecto al planeta es

$$\ddot{\vec{r}}_{PV} + G(m + m')\frac{\vec{r}_{PV}}{r^3_{PV}} = GM\left(\frac{-\vec{r}_P - \vec{r}_{PV}}{r^3_V} + \frac{\vec{r}_P}{r^3_P}\right) \tag{B.5}$$

ya que $\vec{r}_{PS} = -\vec{r}_P$

como $\vec{r}_V = \vec{r}_{PV} + \vec{r}_P$ y despreciando la masa m', podemos escribir las ecuaciones (B.4) y (B.5) como

$$\ddot{\vec{r}}_V + GM\frac{\vec{r}_V}{r^3_V} = -Gm\left(\frac{\vec{r}_{PV}}{r^3_{VP}} + \frac{\vec{r}_P}{r^3_P}\right) \tag{B.6}$$

$$\ddot{\vec{r}}_{PV} + Gm\frac{\vec{r}_{PV}}{r^3_{PV}} = -GM\left(\frac{\vec{r}_V}{r^3_V} - \frac{\vec{r}_P}{r^3_P}\right) \tag{B.7}$$

Introduciendo As, Pp, Ap y Ps a ser definidad como:

$$As = GM\frac{\vec{r}_V}{r^3_V}$$

$$Pp = -Gm\left(\frac{\vec{r}_{PV}}{r^3_{PV}} + \frac{\vec{r}_P}{r^3_P}\right)$$

$$Ap = Gm\frac{\vec{r}_{PV}}{r^3_{PV}}$$

$$Ps = -GM\left(\frac{\vec{r}_V}{r^3_V} - \frac{\vec{r}_P}{r^3_P}\right)$$

estas ecuaciones son las fuerzas debidas al planeta P o al Sol S.

Entonces

$$\vec{r}_V + A_S = P_P$$

$$\vec{r}_{PV} + A_P = P_S$$

La razón $|P_p|/|A_s|$ y $|P_s|/|A_p|$ da respetivamente el orden de magnitud de la perturbación del planeta en la órbita heliocéntrica de los dos cuerpos y la del Sol en la órbita planetocéntrica de los dos cuerpos. La esfera de acción es tomada a ser la superficie alrededor del planeta donde estas razones son iguales.

sea

$$\vec{r}_{PV} = (\xi, \eta, \zeta) \quad \text{y} \quad ||\vec{r}_{PV}|| = \rho$$

Coordenadas planetocéntricas de la partícula prueba.

$$\vec{r}_V = (x, y, z) \quad \text{y} \quad ||\vec{r}_V|| = r_V$$

Coordenadas heliocéntricas de la partícula prueba.

$$\vec{r}_P = (x', y', z') \text{ y } ||\vec{r}_P|| = r_P$$

Coordenadas heliocéntricas del planeta.

Entonces, hay que calcular dichas razones

para $|P_p|$

$$|P_p| = Gm \left\{ \left( \frac{\xi}{\rho^3} + \frac{x'}{r_p^3} \right)^2 + \left( \frac{\eta}{\rho^3} + \frac{y'}{r_p^3} \right)^2 + \left( \frac{\zeta}{\rho^3} + \frac{z'}{r_p^3} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

pero

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

$$r_p^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

$$(\xi, \eta, \zeta).(x', y', z') = \xi x' + \eta y' + \zeta z' = \rho r_p \cos\theta$$

entonces

$$|P_p| = \left\{ \frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{r^4_{\ p}} + \frac{2\cos\theta}{\rho^2\ r^2_{\ p}} \right\}^{1/2}$$

para $|A_s|$

$$|A_s| = GM/r_V^2$$

Para $|P_s|$

$$|P_s| = Gm \left\{ \left( \frac{x}{r_V^3} - \frac{x'}{r_p^3} \right)^2 + \left( \frac{y}{r_V^3} - \frac{y'}{r_p^3} \right)^2 + \left( \frac{z}{r_V^3} - \frac{z'}{r_p^3} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

pero

$$r_v^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$x = x' + \xi, \quad y = y' + \eta, \quad z = z' + \zeta$$

$$xx' + yy' + zz' = r_p^2\left(1 + \frac{\rho}{r}\cos\theta\right)$$

y sea $u = \rho/r_p$

entonces

$$|F_s| = GM\left\{\frac{1}{r_v^4} + \frac{1}{r_p^4} - 2r_p^2\frac{(1 + u\cos\theta)}{r_v^2 r_2^2}\right\}^{1/2}$$

y por último, para $|A_p|$

$$|A_p| = Gm/\rho^2$$

una vez obtenidas las normas calculamos las razones e igualamos, y utilizando la siguiente expresión

$$r_v^2 = (x' + \xi)^2 + (y' + \eta)^2 + (z' + \zeta)^2$$

$$= r_p^2(1 + 2u\cos\theta + u^2)$$

entonces, llegamos

$$\left(\frac{m}{M}\right)^2 = \frac{u^4(1+2u\cos\theta+u^2)^{-2}}{(1+2u^2\cos\theta+u^4)^{1/2}}\left\{1+(1+2u\cos\theta+u^2)^2 - 2(1+u\cos\theta)(1+2u\cos\theta+u^2)\right\}^{1/2}$$

Desarrollando en serie de potencia a cada término de esta ecuación, haciendo un desarrollo algebraico, llegamos

$$u = \left(\frac{m/M}{(1+3\cos^2\theta)^{1/2}}\right)^{1/5} + \frac{2}{5}\cos\theta\left(\frac{m/M}{(1+3\cos^2\theta)^{1/2}}\right)^{2/5}\frac{1+6\cos^2\theta}{1+3\cos^2\theta} + \ldots$$

si $\theta = 0^\circ$, entonces

$$u = \left(\frac{m/M}{2}\right)^{1/5} + \frac{7}{10}\left(\frac{m/M}{2}\right)^{2/5} + \ldots$$

si $\theta = 90^\circ$, entonces

$$u = \left(\frac{m}{M}\right)^{1/5}$$

$\therefore$ u está acotada de

$$\left(\frac{m/M}{2}\right)^{1/5} \quad a \quad u = \left(\frac{m}{M}\right)^{1/5}$$

pero

$$u = \rho/r_p \quad \text{y sea } \rho = R_A$$

$\therefore$

$$R_A = \left(\frac{m/M}{2}\right)^{1/5} r_p \quad : \text{cota mínima}$$

$$R_A = \left(\frac{m}{M}\right)^{1/5} r_p \quad : \text{cota máxima}$$

En la siguiente tabla se da el radio de la esfera de acción de cada planeta en unidades astronómicas y en millones de kilómetros.

TABLA B.1

| PLANETAS | RADIO DE LA ESFERA DE ACCION ($R_A$) | |
|---|---|---|
| | AU | Km($10^6$) |
| Mercurio | 0.000747 | 0.122 |
| Venus | 0.00411 | 0.615 |
| Tierra | 0.00619 | 0.925 |
| Marte | 0.00387 | 0.579 |
| Júpiter | 0.322 | 48.1 |
| Saturno | 0.365 | 54.6 |
| Urano | 0.348 | 52.0 |
| Neptuno | 0.581 | 86.9 |
| Plutón | 0.0211 | 3.2 |

# APENDICE C

TABLA C.1

RELACION ENTRE LOS OPERADORES

| | $E$ | $\Delta$ | $\delta, \mu$ | $\nabla$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $E =$ | ——— | $I+\Delta$ | $I+\mu\delta+\frac{1}{2}\delta^2$ | $(I-\nabla)^{-1}$ | $e^{hD}$ |
| $\Delta =$ | $E-I$ | ——— | $\mu\delta+\frac{1}{2}\delta^2$ | $\nabla(I-\nabla)^{-1}$ | $e^{hD}-I$ |
| $\delta =$ | $E^{1/2}-E^{-1/2}$ | $\Delta(I+\Delta)^{-1/2}$ | ——— | $\nabla(I-\nabla)^{-1/2}$ | $2\operatorname{senh}(\frac{1}{2}hD)$ |
| $\nabla =$ | $I-E^{-1}$ | $\Delta(I+\Delta)^{-1}$ | $\mu\delta-\frac{1}{2}\delta$ | ——— | $I-e^{-hD}$ |
| $hD =$ | $\log_e E$ | $\log_e(I+\Delta)$ | $2\operatorname{senh}^{-1}(\frac{1}{2}\delta^2)$ | $-\log_e(I-\nabla)$ | ——— |
| $\mu =$ | $\frac{1}{2}(E^{1/2}+E^{-1/2})$ | | $(I+\frac{1}{4}\delta^2)^{1/2}$ | | $\cosh(\frac{1}{2}hD)$ |

TABLA C.2

Diagrama de Bucher para el método RK6-F

| $a_k$ | $b_{kj}$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | | | | | | | | | | |
| $\frac{2}{33}$ | $\frac{2}{33}$ | | | | | | | | | |
| $\frac{4}{33}$ | $0$ | $\frac{4}{33}$ | | | | | | | | |
| $\frac{2}{11}$ | $\frac{1}{22}$ | $0$ | $\frac{3}{22}$ | | | | | | | |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{43}{64}$ | $0$ | $-\frac{165}{64}$ | $\frac{77}{32}$ | | | | | | |
| $\frac{2}{3}$ | $-\frac{2383}{486}$ | $0$ | $\frac{1067}{54}$ | $-\frac{26312}{1701}$ | $\frac{2176}{1701}$ | | | | | |
| $\frac{6}{7}$ | $\frac{10077}{4802}$ | $0$ | $-\frac{5643}{686}$ | $\frac{116259}{16807}$ | $-\frac{6240}{16807}$ | $\frac{1053}{2401}$ | | | | |
| $1$ | $-\frac{733}{176}$ | $0$ | $\frac{141}{8}$ | $-\frac{335763}{22296}$ | $\frac{216}{77}$ | $\frac{4617}{2816}$ | $\frac{7203}{9152}$ | | | |
| $0$ | $\frac{15}{352}$ | $0$ | $0$ | $-\frac{5445}{46592}$ | $\frac{18}{77}$ | $-\frac{1215}{5632}$ | $\frac{1029}{18304}$ | $0$ | | |
| $1$ | $-\frac{1833}{352}$ | $0$ | $\frac{141}{8}$ | $-\frac{51237}{3584}$ | $\frac{18}{7}$ | $-\frac{729}{512}$ | $\frac{1029}{1408}$ | $0$ | $1$ | |
| $c_k$ | $\frac{77}{1440}$ | $0$ | $0$ | $\frac{1771561}{6289920}$ | $\frac{32}{105}$ | $\frac{243}{2560}$ | $\frac{16807}{74880}$ | $\frac{11}{270}$ | | |

TABLA C.3

Coeficientes para el proceso Gauss-Jackson

| j | $A_j$ | j | $B_j$ |
|---|---|---|---|
| 0 | -1/2 | 0 | 1/12 |
| 1 | -1/12 | 1 | 0 |
| 2 | 1/24 | 2 | -1/240 |
| 3 | 11/720 | 3 | 0 |
| 4 | -11/1440 | 4 | 31/60480 |
| 5 | -191/60480 | 5 | 0 |
| 6 | 191/120960 | 6 | -289/3628800 |
| 7 | 2497/3628800 | 7 | 0 |
| 8 | -2497/7257600 | 8 | 317/22809600 |
| 9 | -14797/95800320 | 9 | 0 |
| 10 | 14797/191600640 | 10 | -6803477/2615348736000 |
| 11 | 92427157/2615348736000 | 11 | 0 |
| 12 | -92427157/5230697472000 | 12 | 3203699/6276836966400 |

TABLA C.3 (continuación)

| $j$ | $C_j$ | $j$ | $F_j$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/12 | 0 | 1/2 |
| 1 | 1/12 | 1 | 5/12 |
| 2 | 19/240 | 2 | 3/8 |
| 3 | 3/40 | 3 | 251/720 |
| 4 | 863/12096 | 4 | 95/288 |
| 5 | 275/4032 | 5 | 19087/60480 |
| 6 | 33953/518400 | 6 | 5257/17280 |
| 7 | 8183/129600 | 7 | 1070017/3628800 |
| 8 | 3250433/53222400 | 8 | 25713/89600 |
| 9 | 4671/78848 | 9 | 26842253/95800320 |
| 10 | 13695779093/237758976000 | 10 | 4777223/17418240 |
| 11 | 2224234463/39626496000 | 11 | 703604254357/2615348736000 |
| 12 | 13228284012 7/241416806400 0 | 12 | 106364763817/402361344000 |

TABLA C.3 (continuación)

| $j$ | $D_j$ | $j$ | $E_j$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/12 | 0 | -1/2 |
| 1 | 0 | 1 | -1/12 |
| 2 | -1/240 | 2 | -1/24 |
| 3 | -1/240 | 3 | -19/720 |
| 4 | -221/60480 | 4 | -3/160 |
| 5 | -19/6048 | 5 | -863/60480 |
| 6 | -9829/3628800 | 6 | -275/24192 |
| 7 | -407/172800 | 7 | -33953/3628800 |
| 8 | -330157/159667200 | 8 | -8183/1036800 |
| 9 | -24377/13305600 | 9 | -3250433/479001600 |
| 10 | -4281164477/2615348736000 | 10 | -4671/7888480 |
| 11 | -70074463/47551795200 | 11 | -13695779093/2615348736000 |
| 12 | -1197622087/896690995200 | 12 | -2224234463/47551795200 0 |

# BIBLIOGRAFIA


| AUTOR | TITULO, ETC. |
|---|---|
| Alonso-Finn | Fisica Vol I: Mecánica. Fondo educativo Interamericano, S.A. (1976), p. 241-286, 411-444. |
| Andrzej Marciniak | Numerical solutions of the N-body problem. P. Reidel Publishing Company (1985). |
| G. Arfken | Métodos matemáticos para físicos. Diana (1981), p. 767-784. |
| ----- | The astronomical Almanac 1988. Nautical Almanac office. |
| M. L. Boas | Mathematical methods in the physical sciences John Wiley & Sons (1983), p. 647-662. |
| P. Blomfield | Fourier analysis of time series: An Introduction. John Wiley & Sons, Inc. (1976), p. 42-49. |
| R. L. Burden<br>J. Douglas | Análisis numérico. Grupo editorial Iberoamericano (1985), p. 221-316. |
| J. C. Butcher | Coefficients for the study of Runge-Kutta Integration Processes. J. Austral. Math. Soc. <u>3</u> 185-201 (1963) |
| J. C. Butcher | On Runge-Kutta processes of high order. J. Austral. Math. Soc. <u>4</u> 179-194 (1964) |
| J. C. Butcher | On the attainable order of Runge-Kutta methods. Math. Comp. <u>19</u>, 408-417 (1965) |

| AUTOR | TITULO, ETC. |
|---|---|
| J. C. Butcher | Implicit Runge-Kutta processes.<br>Math. Comp. <u>18</u>, 50-64 (1964) |
| J. C. Butcher | Implicit Runge-Kutta processes.<br>Math. Comp. <u>18</u>, 50-64 (1964) |
| C. Cruz-Gonzales<br>y M. Lecar | Encounters and escapes.<br>Bull. Astron. 3, 209-211. |
| E. Everhart | Close encounters of comets and planets.<br>Astronomical Journal <u>75</u>,735-750 (1969). |
| E. Fehlberg | New one-step integration methods of high - order accuracy aplied to some problems in celestial mechanics.<br>NASA TR R-248 (1966). |
| E. Fehlberg | Classical Fifth, sixth, seventh and eight - order Runge-Kutta formulae with step-size control.<br>NASA TR R-287 (1968). |
| D. Flores | Origen dinámico de las estrellas desvocadas.<br>Tesis (1976),p. |
| D. Flores | Eventos planetarios periódicos.<br>Rev. Mex. Astron. & astrof. <u>14</u>,643 (1987). |
| H. Goldstein | Classical Mechanics.<br>Addison-Wesley (1980),p. 70-127. |
| B. A. Gould | On the accumulation of errors in numerical integration.<br>Astron. J. <u>46</u>, 149-156 (1937). |

CONTINUACION


| AUTOR | TITULO, ETC. |
|---|---|
| M. Harwit | Astrophysical Concepts<br>John Wiley & Sonc (1983), p. 68-99. |
| W. Hauser | Introducción a los principios de mecánica.<br>Ed. UTEHA (1966), p. 231-267. |
| S. Herrick | Astrodynamics, Vol. II.<br>Van Nostrand Reinhold Company, London (1972), p. 22-28. |
| Hwei P. Hsu | análisis vectorial.<br>Fondo Educativo Interamericano. |
| H. M. Nautical Almanac office | Planetary coordinates for the years 1960-1980.<br>HMSO, London (1958). |
| ------ | Interpolation and Allied Tables. |
| J. Jackson | Note on the numerical integration of<br>$d^2x/dt^2 = f(x,t)$.<br>Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 84, 602 (1924) |
| Kreider, Kuller, Ostherg | An introduction to linear analysis.<br>Addison Wesley Publishing (1966). |
| Lehmann | Geometría analítica.<br>Limusa (1980), 149-210. |
| R. H. Merson | Numerical integration of the differential equations of celestial mechanics. (1975). |
| G. M. Murphy | The matematical of physics and chemistry.<br>Cap. V Van Nostrand Reinhold Company, London (1972), p. 172-197. |

CONTINUACION


| AUTOR | TITULO, ETC. |
|---|---|
| V.F. Myachin y O.A. Sizova | A numerical method of integration by means of Taylor-Steffensen series and its possible use in the study of motions of comets and minor planets. I.A.U. Symposium 45,83-85. |
| ----- | Planetary and Lunar Coordinates: for the years 1984-2000. HMSO. |
| Philip | Data Reduction and Error Analysis for the physical sciences. Mc. Graw-Hill Book Company (1969),p. |
| Bracewell,R. | The fourier transform and Its aplications. Mc. Graw-Hill (1965). |
| Ramón Canal | El nuevo sistema solar. Prensa Científica (1984). |
| A.E.Roy | Orbital Motion. Adam-Hilger Ltd, Bristol 1982,p.69-95, 217-218. |
| E.B.Shanks | Solutions of differential equations by evaluations of functions. Math. Comp. 20, 21-38 (1966) |
| Keith R.Symon | Mechanics. Addison-Wesley Publishing Company (1969),p. |
| Tisserand | Traité de mecanique celeste. Cap.12 Gauthier-Villars, Paris (1889),p. |