29'10

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

HIPERSIMETRIAS EN FISICA BIDIMENSIONAL. UN METODO DIRECTO PARA RELACIONAR PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C O
P R E S E N T A

SERGIO CHAYET KAHAN

MEXICO D.F. 1989

Indice.

4 OBTENCION DE HIPERSIMETRIAS EN PROBLEMAS ESPECIFICOS.

CONCLUSIONES.

APENDICES.

BIBLIOGRAFIA.

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mis maestros de la carrera por la calidad de sus cursos y por la buena disposición —e inagotable paciencia— para aclarar dudas, dentro y fuera del salón de clase. Estoy además obligado por el estímulo incesante y apoyo incondicional que me han brindado.

Al Dr. Sergio Hojman por haberme permitido trabajar en este tema y por la dirección de la presente tesis. Así mismo, extiendo mi gratitud al Dr. Darío Núñez por el entusiasmo mostrado hacia mi trabajo y por las innumerables charlas informales relacionadas con la parte de Mecánica del mismo.

Al M. en C. Enrique López Moreno y a los Dres. Ana María Cetto, Darío Núñez y Manuel Torres por haber accedido gustosamente a formar parte del jurado dictaminador y sobre todo, por el apoyo y el gran esfuerzo que representó el revisar esta tesis en tan poco tiempo, debido a la premura impuesta por las circunstancias.

Al Dr. Marcos Rosenbaum, Director del Instituto de Ciencias Nucleares y a todos los investigadores del Departamento de Física y Matemáticas Aplicadas del mismo instituto por la hospitalidad brindada, además de las facilidades de cómputo proporcionadas que permitieron elaborar este trabajo en TeX.

Finalmente, a todos aquellos que de una u otra forma, me han brindado soporte, comprensión y cariño. En especial a Nancy y Arturo quienes me ayudaron a teclear el presente trabajo.

1
Introducción

En Física Clásica las simetrías proporcionan información útil acerca del problema estudiado, pues cuando se trata de sistemas lagrangianos, están relacionadas con cantidades conservadas a través del Teorema de Nöther .

Una simetría se define en términos generales, como una transformación del espacio solución en sí mismo, con la propiedad de mapear cada una de las soluciones del problema en otra. Cuando esto sucede, las ecuaciones asociadas al problema son invariantes ante la transformación, ya que si dos soluciones pertenecen al *mismo* problema, pueden obtenerse a partir de las mismas ecuaciones.

Las **hipersimetrías** son el resultado de un intento por generalizar la clase de simetrías a la de transformaciones entre espacios solución de problemas *distintos* con la propiedad de mapear las soluciones de un problema en las soluciones de *otro*[1].

La mayor parte de las teorías en Física Clásica están formuladas en términos de principios variacionales o ecuaciones diferenciales que involucran uno o más campos —escalares o vectoriales— para describir el problema específico en cuestión. La Optica Geométrica por ejemplo, se formula a través del principio variacional de Fermat $\delta \int n(\mathbf{r})dl = 0$ donde el índice de refracción $n(\mathbf{r})$ es el campo escalar mediante el cual se describen los distintos medios ópticos.

Asociado a las transformaciones de hipersimetría existe un nuevo tipo de invariancia de las ecuaciones y principios variacionales de la Física. Se dice que una ecuación (o principio variacional) es **hipersimétricamente invariante** —H-invariante— ante cierta transformación, cuando su imagen bajo la transformación en cuestión es la misma ecuación (o principio variacional) pero asociada a campos distintos de los originales y por ende, a un problema específico diferente del descrito por la ecuación (o principio variacional)inicial.

Recientemente S. Hojman mostró la H-invariancia ante transformaciones conformes de los principios variacionales de Fermat en Optica Geométrica y de Maupertius para Mecánica Clásica,así como de la ecuación estacionaria de Schrödinger para Mecánica Ondulatoria. M.A Roque encontró algunas hipersimetrías en Optica Geométrica bidimensional[2], y D. Núñez ha encontrado la existencia de una relación entre las hipersimetrías de la Mecánica Clásica con las de la Mecánica Ondulatoria en dos dimensiones, además de un gran número

[1] El término hipersimetría acuñado por S.Hojman, pretende reflejar el hecho que dicho tipo de transformaciones proporcionan información sobre dos o más problemas en contraste con las simetrías, de las que se obtiene información de uno solo.

[2] Roque [1989].

de ejemplos de hipersimetrías en ambas teorías[3].

En esta tesis se hace una revisión de los resultados existentes en Optica Geométrica y Mecánica, introduciendo el Análisis de Variables Complejas —fuertemente sugerido por el hecho de trabajar con funciones conformes entre espacios bidimensionales—, y se muestra la H-invariancia conforme de la ecuación para las vibraciones transversales de una membrana libre

$$\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t)-\frac{\sigma(\mathbf{r})}{T}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(\mathbf{r},t)=0,$$

así como la de algunas otras ecuaciones de la Física-Matemática.

Conocida la H-invariancia conforme de una ecuación o principio variacional pueden obtenerse hipersimetrías al considerar transformaciones conformes arbitrarias.

En Mecánica Clásica y Ondulatoria, al especificar la transformación conforme, quedan determinados los potenciales que ésta relaciona, mientras que en Optica Geométrica y en las vibraciones de la membrana existe la libertad de elegir uno de los dos índices de refracción y una de las dos densidades superficiales de masa σ respectivamente.

Surge entonces la interrogante acerca de la posibilidad de encontrar el potencial y la transformación conforme que relaciona a éste con un potencial dado en Mecánica, y de poder determinar si dos índices de refracción o dos densidades superficiales de masa están o no hipersimétricamente relacionados y en caso de estarlo, de poder encontrar la transformación conforme que lo logra. En este trabajo se estudia dicho problema de manera general y se obtienen algunos resultados.

La idea de relacionar mediante una transformación dos problemas aparentemente distintos no es nueva.

Darboux encontró un método para relacionar las soluciones de las ecuaciones de valores propios

$$\alpha^2\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)+V(x)\varphi(x)=\lambda\varphi(x) \tag{1.1}$$

y

$$\alpha^2\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+U(x)\psi(x)=\mu\psi(x) \tag{1.2}$$

[3] Hojman y Núñez [1989].

donde α es una constante y

$$U(x) = -V(x) + 2\alpha^2 \left(\frac{\tilde{\varphi}'}{\tilde{\varphi}}\right)^2 \tag{1.3}$$

($\tilde{\varphi}$ es la solución propia de la ecuación (1.1) correspondiente al eigenvalor $\tilde{\lambda}$)[4].

El método muestra que la relación entre las soluciones φ y ψ de las ecuaciones (1.1) y (1.2) es

$$\psi(x) = \alpha \left[\frac{\tilde{\varphi}(x)\varphi(x)}{\tilde{\varphi}(x)} - \varphi'(x)\right] \tag{1.4a}$$

$$\mu = \lambda - 2\tilde{\lambda}. \tag{1.4b}$$

donde $' \equiv \frac{d}{dx}$.

Haciendo $\alpha^2 = \hbar^2/2m$ se obtiene una relación entre los problemas descritos por la ecuacion de Schrödinger unidimensional asociados a los potenciales $V(x)$ y $U(x)$ que satisfacen la condición (1.3). En este caso se utiliza la función propia $\tilde{\varphi}$ para relacionar las soluciones φ y ψ y la transformación en general, no es conforme.

En 1965 Kustaanheimo y Stiefel generalizaron la transformación entre (x, y) y (u, v)

$$x = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right) \tag{1.5a}$$

$$y = uv. \tag{1.5b}$$

a tres dimensiones.

Dicha generalización relaciona el problema del oscilador armónico en cuatro dimensiones y una constricción, con el problema tridimensional de Kepler en Mecánica Clásica y el del átomo de hidrógeno tridimensional en Mecánica Ondulatoria.

Esta transformación permitió a Duru y Kleinert, y a Ho e Inomata calcular la función de Green coulombiana por el método de integrales de trayectoria de Feynman[5].

---

[4] Lamb [1980] p.36.

[5] Cornish [1984].

La transformación (1.5) relaciona los mismos problemas bidimensionales en Mecánica Clásica y Ondulatoria, y aparece como un ejemplo particular de los resultados obtenidos en este trabajo.

Resulta interesante el que dos problemas de la misma teoría aparentemente distintos, estén relacionados y sean por lo tanto equivalentes, ya que a través de estas relaciones se manifiesta un aspecto de la estructura de la teoría y en última instancia de la Física misma.

Desde el punto de vista práctico, una hipersimetría permite obtener información acerca de un problema a partir de lo que se conoce sobre el problema relacionado. Esta información puede ser la de cantidades conservadas, integrabilidad, así como la solución completa del problema.

El método que permite encontrar directamente hipersimetrías entre problemas dados se convierte en una nueva y poderosa alternativa en cuanto a la generación de soluciones exactas en Física bidimensional, así como en la determinación de la existencia de soluciones a problemas específicos.

En el ámbito de este método se obtuvieron los siguientes resultados:

En Mecánica Clásica y Ondulatoria, si el potencial V con energía asociada E satisface la condición $\nabla^2 \ln V = 0$, está relacionado con el potencial $\mathcal{V} = -E\,|f'|^2$ con energía asociada $\mathcal{E}$, donde f es la transformación conforme y

$$F(z) = \int^{z} \left(\frac{V(z',\overline{z}')}{-\mathcal{E}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\int^{(z',\overline{z}')} (\ln V)_{,\xi}d\xi-(\ln V)_{,\overline{\xi}}d\overline{\xi}} dz'$$

donde V se ha expresado como una función de las variables complejas mutuamente conjugadas $z = x + iy$ y $\overline{z} = x - iy$, ya que se trata de un potencial bidimensional, y $F = f^{-1}$.

En membranas y Optica Geométrica, dadas las distribuciones σ_1 y σ_2 y los índices de refracción n_1 y n_2, y

$$\left(\nabla^2 \ln\right)^{m_i} \sigma_i \equiv 0, \qquad \left(\nabla^2 \ln\right)^{m_i} n_i \equiv 0 \qquad m_i \in \mathrm{N}, \quad i = 1, 2,$$

si $m_1 \neq m_2$ los problemas asociados a σ_1 y σ_2 no están hipersimétricamente relacionados a través de una transformación conforme, y lo mismo sucede con los problemas asociados a n_1 y n_2.

Cuando $m_1 = m_2 = m$, se definen f_1 y f_2 como

$$f_i(w) = \int_{w_o}^{w} \left[\left(\nabla^2 \ln \right)^{m-1} \sigma_i(w', \overline{w}') \right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \int_{(w_o', \overline{w}_o')}^{(w', \overline{w}')} \frac{(\nabla^2 \ln)^{m-1} \sigma_{i,\xi}}{(\nabla^2 \ln)^{m-1} \sigma_i} d\xi - \frac{(\nabla^2 \ln)^{m-1} \sigma_{i,\overline{\xi}}}{(\nabla^2 \ln)^{m-1} \sigma_i} d\overline{\xi}} dw' \qquad i = 1, 2. \qquad (1.6)$$

Si σ_i está relacionado con σ_{oi} mediante f_i, para $i = 1, 2$ donde

$$\left(\nabla^2 \ln \right)^{m-1} \sigma_{oi} = 1$$

—lo cual puede probarse a través de una sustitución directa— entonces σ_1 y σ_2 están hipersimétricamente relacionados mediante la transformación

$$f = F_2 \circ f_1, \qquad F_i = f_i^{-1}.$$

Lo mismo ocurre con los índices n_1 y n_2 si se sustituye n_i^2 en lugar de σ_i en la expresión (1.6).

Todos estos resultados son consecuencia de un teorema de variable compleja que proporciona condiciones necesarias y suficientes para que una función de dos variables reales sea el módulo de una función analítica de una variable compleja. Esto se debe a que los problemas asociados al potencial V en Mecánica Clásica y Ondulatoria así como los asociados al índice de refracción n y a la densidad superficial de masa σ de la membrana, están hipersimétricamente relacionados a través de una transformación conforme f con los problemas asociados al potencial $\mathcal{V}$, índice $\tilde{n}$ y densidad $\tilde{\sigma}$ respectivamente si y solo si satisfacen las ecuaciones

$$\left[E - V \left(f(w), \overline{f}(\overline{w}) \right) \right] |f'(w)|^2 = \mathcal{E} - \mathcal{V}(w, \overline{w})$$

$$\tilde{n}(w, \overline{w}) \equiv n \left(f(w), \overline{f}(\overline{w}) \right) |f'(w)|$$

$$\tilde{\sigma}(w, \overline{w}) \equiv \sigma \left(f(w), \overline{f}(\overline{w}) \right) |f'(w)|^2$$

donde $|f'|$ es el módulo de la función analítica f'.

La exposición del trabajo está organizada de acuerdo con el siguiente esquema:

En el capítulo 2 se introducen algunos conceptos del Análisis de Variables Complejas y se muestra la H-invariancia conforme de los principios variacionales bidimensionales de Fermat y Maupertius así como de las ecuaciones de Schrödinger en dos dimensiones y de la ecuación para las oscilaciones transversales de la membrana. Se muestra también la H-invariancia conforme de las ecuaciones bidimensionales de Poisson, de onda y de difusión.

Los resultados asociados a la determinación de las condiciones suficientes para que dos problemas estén hipersimétricamente relacionados mediante transformaciones conformes, forma parte del capítulo 3, donde primero se plantea el problema y se muestra la necesidad del teorema de Variable Compleja mencionado. Posteriormente se demuestra el teorema y se utiliza para enunciar y probar los resultados en Mecánica, Optica Geométrica y membranas.

Finalmente, en el capítulo 4 se desarrollan ejemplos que ilustran el uso de los resultados anteriores en la obtención de hipersimetrías para problemas dados, así como la generación de soluciones exactas a partir de soluciones conocidas para alguno de los problemas. La última sección del capítulo está dedicada a mostrar algunos contraejemplos relacionados con el teorema de Optica Geométrica y membranas.

En las conclusiones se presenta un resumen y una evaluación de los resultados obtenidos, y se proponen distintas direcciones para continuar la investigación relacionada con el material expuesto en este trabajo.

Los resultados que aparecen en la sección 2.3 fueron obtenidos en forma distinta por M.A Roque, al igual que los de las secciones 2.4 y 2.5 obtenidos por D. Núñez, a quien además se deben los ejemplos en Mecánica Clásica de la sección 4.2.

Se consideró conveniente efectuar las demostraciones en coordenadas cartesianas y en general se procuró presentar los resultados de manera sencilla, con el objeto de no obscurecer las ideas esenciales existentes detrás de cada uno de ellos.

En los apéndices se incluyen los mismos resultados en coordenadas generalizadas junto con sus respectivas demostraciones.

2

Hipersimetrías En Física Bidimensional

2.1 Transformaciones conformes y Variable Compleja

Una transformación continua del espacio euclideano n-dimensional ($\mathbf{R}^n$) en sí mismo, mapea arcos de curva en arcos de curva. Si además preserva los ángulos entre curvas que se cortan —entendidos como los formados por los vectores tangentes a éstas en el punto de intersección—, se dice que la transformación es **Conforme.**

Este concepto es inherente a la transformación, por lo que puede aplicarse a mapeos entre cualesquiera dos espacios, siempre y cuando en estos tenga sentido hablar de arcos y ángulos.

Para el caso específico de transformaciones de $\mathbf{R}^2$ en sí mismo resulta muy conveniente identificarlo con el plano complejo **C**, ya que la propiedad de conformalidad está estrechamente ligada con la de diferenciabilidad en **C**.

En este punto es preciso introducir algunas definiciones básicas con el objeto principal de fijar la notación.

Una función

$$f : A \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

es $\mathbf{R}^2$**-diferenciable** en (x_0, y_0), si es diferenciable en ese punto en el sentido de variable real[1], mientras que por **C-diferenciable** en $z_0 \in A \subset \mathbf{C}$ se entenderá la existencia de la derivada compleja en z_0

$$f'(z_0) \equiv \frac{d}{dz} f(z_0) \equiv \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Ambos tipos de diferenciabilidad están relacionados por el siguiente teorema.

TEOREMA 2.1 *$f = u + iv$ es C-diferenciable en $z_0 = x_0 + iy_0$ si y solo si $f = (u, v)$ es $\mathbf{R}^2$-diferenciable en (x_0, y_0) y tanto u como v satisfacen las condiciones de* **Cauchy-Riemann** *en ese punto*[2]*:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

[1] Condiciones suficientes para esto son la existencia y continuidad de las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ en (x_0, y_0).

[2] Marsden [1973], p.48.

De esto se concluye que si las derivadas parciales de u y v son continuas y satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, $f = u + iv$ es C-diferenciable.

f es analítica en una región A si es C-diferenciable en todo punto $z \in A$.

El siguiente teorema muestra que las funciones analíticas no constantes son conformes cuando menos en alguna región.

TEOREMA 2.2 *Si f es analítica en A y $f'(z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in A$*[3] *entonces f es conforme en A.*

Demostración.

La demostración es directa, ya que si Z_1 y Z_2 son dos funciones diferenciables definidas en $[a,b] \subset \mathbf{R}$ con valores en $\mathbf{C}$ —arcos— tales que

$$Z_1(t_o) = Z_2(t_o) = z_o$$

y

$$Z_i'(t_o) \neq 0 \text{ para } i = 1,2 \quad t_o \in [a,b]$$

—existen los vectores tangentes en z_o—, y

$$W_i \equiv f(Z_i(t)) \text{ para } i = 1,2,$$

entonces, por la regla de la cadena

$$W_i'(t_o) = f'(z_o)Z_i'(t_o), \quad i = 1,2,$$

y los vectores tangentes en $f(z_o)$ no se anulan, además

$$\arg W_i'(t_o) = \arg f'(z_o) + \arg Z_i'(t_o). \quad i = 1,2.$$

Finalmente, restando la ecuación anterior para $i = 2$ de aquella con $i = 1$

$$\arg W_1'(t_o) - \arg W_2'(t_o) = \arg Z_1'(t_o) - \arg Z_2'(t_o),$$

[3] Estas mismas hipótesis aseguran, por el Teorema de la Función Inversa que f es invertible en A con inversa f^{-1} analítica y $f'(z_o)f^{-1\prime}(z_o) = 1$. (Marsden [1973], p.339.)

ya que $f'(z_0)$ no depende de la curva en cuestión, y f es por lo tanto conforme en z_0. $\square$

En forma recíproca, puede mostrarse que si en A f es conforme y satisface las condiciones de continuidad entonces es también analítica[4].

Si se tiene la pareja de variables reales independientes (x, y), siempre puede pasarse a la pareja de variables complejas $(z, \bar{z})$ también independientes y viceversa utilizando las transformaciones

$$\begin{aligned} z &= x + iy \qquad & x &= \frac{1}{2}(\bar{z} + z) \\ \bar{z} &= x - iy \qquad & y &= \frac{i}{2}(\bar{z} - z). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si $f = f(x,y)$ entonces $\tilde{f}(z,\bar{z}) = f\big(x(z,\bar{z}), y(z,\bar{z})\big)$, sin embargo se reservará la tilde para otro tipo de transformaciones, y en adelante tanto f como la composición $\tilde{f}$ se denotarán como f, siempre y cuando se utilice la transformación (2.1), *i. e.*

$$\begin{aligned} f(z,\bar{z}) &\equiv f\big(x(z,\bar{z}), y(z,\bar{z})\big) \\ f(x,y) &\equiv f\big(z(x,y), \bar{z}(x,y)\big). \end{aligned} \tag{2.2}$$

De (2.1) se obtienen las relaciones de transformación para los operadores de derivación parcial

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Si $f = u + iv$ entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] + \frac{i}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right],$$

[4] Es necesario que tanto $\frac{\partial f}{\partial x}$ como $\frac{\partial f}{\partial y}$ sean continuas. Para la demostración Cf. Ahlfors [1953], p.73.

y de esta expresión se concluye que las condiciones de Cauchy-Riemann son equivalentes a

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0.$$

Este resultado es sumamente útil , pues si se tiene $f = f(z)$ —o $\bar{f} = \bar{f}(\bar{z})$—, la analicidad queda sujeta únicamente a las condiciones de continuidad. Este hecho simplifica el proceso de determinar si una función dada es analítica o no, así como la tarea de construirla.

En adelante, al hablar sobre cualquier función analítica, se supondrá implícitamente que si depende de alguna variable compleja, no puede depender de la variable conjugada.

2.2 H-invariancia conforme en Física Bidimensional

Como se mencionó en el capítulo anterior, una transformación de hipersimetría es, en términos generales, un mapeo entre dos problemas de la Física aparentemente distintos.

En este trabajo se estudian transformaciones entre dos problemas descritos ya sea por el mismo principio variacional (Principio de Fermat o Principio de Maupertius), o por la misma ecuación diferencial (Ecuación de Schrödinger o Ecuación para las vibraciones de una membrana), donde cada problema específico está caracterizado por un campo escalar al que se llamará genéricamente **potencial generalizado**, y corresponde al índice de refracción en Optica Geométrica, a la densidad superficial de masa en el caso de la membrana y al potencial escalar en Mecánica Clásica y Ondulatoria.

Cada problema está caracterizado por la pareja ecuación-potencial generalizado o principio variacional-potencial generalizado.

Si después de aplicar una cierta transformación se obtiene la misma ecuación o principio variacional, y el mismo u otro potencial generalizado, se dirá que la ecuación —o el principio variacional— es **H-invariante** ante la transformación en cuestión. En el caso de obtenerse el mismo potencial generalizado, la ecuación o el principio variacional será únicamente invariante.

En lo que resta de este capítulo se mostrará la H-invariancia conforme de algunas ecuaciones y principios variacionales de la Física en dos dimensiones.

2.3 H-invariancia conforme en Optica Geométrica

En la aproximación de la Optica Geométrica ($\lambda \to 0$), el problema central consiste en encontrar la trayectoria seguida por los *rayos* de luz.

La trayectoria de un rayo que pasa por los puntos A y B, obedece el **Principio de Fermat**[5]

$$\delta \int_A^B n\, dl = 0 \tag{2.4}$$

donde la variación es sobre todas las trayectorias que pasan por los puntos A y B.

En este caso el potencial generalizado es el índice de refracción n y dl es el elemento de longitud del espacio euclideano.

En espacio bidimensional con coordenadas cartesianas el Principio de Fermat se expresa como

$$\delta \int n(x^1, x^2)\sqrt{dx^{1^2} + dx^{2^2}} = 0 \tag{2.5}$$

con $x^1 = x$ y $x^2 = y$.

Para obtener las ecuaciones que debe satisfacer la trayectoria se introduce el parámetro auxiliar τ, y se consideran x^1 y x^2 funciones de éste:

$$x^i = x^i(\tau) \qquad i = 1, 2.$$

Tomando esto en consideración puede hacerse el cambio de variable en (2.5) e integrar respecto a τ

$$\delta \int_{\tau_o}^{\tau_1} n(x^1, x^2)\sqrt{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2}\, d\tau = 0 \tag{2.6}$$

donde $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\tau}$, para $i = 1, 2$.

---

[5] Born y Wolf (1980), p.740.

La expresión (2.6) aparece muy a menudo en problemas físicos de Cálculo Variacional, y las soluciones son las ecuaciones de Euler[6]:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\left(n\sqrt{(\dot{x}^1)^2+(\dot{x}^2)^2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(n\sqrt{(\dot{x}^1)^2+(\dot{x}^2)^2}\right)=0 \qquad i=1,2.$$

Efectuando las primeras derivadas y recordando que $\sqrt{(\dot{x}^1)^2+(\dot{x}^2)^2} = \frac{dl}{dr}$:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{n\dot{x}^i}{dl/dr}\right]-\frac{\partial n}{\partial x^i}\frac{dl}{dr}=0 \qquad i=1,2.$$

Por último, puede eliminarse el parámetro auxiliar r considerando a l como la variable independiente y cancelando factores comunes, obteniendo

$$\frac{d}{dl}\left[n\frac{dx^i}{dl}\right]-\frac{\partial n}{\partial x^i}=0 \qquad i=1,2,$$

que es equivalente a

$$n\frac{d}{dl}\left[n\frac{dx^i}{dl}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial n^2}{\partial x^i} \qquad i=1,2. \tag{2.7}$$

El procedimiento anterior puede también efectuarse en coordenadas generalizadas, obteniendo ecuaciones análogas. Dicho cálculo y resultados se encuentran en el apéndice 1.

Habiendo indicado la forma de encontrar las trayectorias solución al Principio de Fermat, se muestra a continuación la H-invariancia conforme de dicho principio, para lo que es conveniente expresarlo en las coordenadas $(z,\bar{z})$.

Aplicando las transformaciones (2.1) al principio variacional (2.5) y haciendo uso de las relaciones (2.2) se obtiene

$$\delta\int n(z,\bar{z})|dz|=0 \tag{2.8a}$$

con trayectoria solución γ

$$\begin{gathered} z=\gamma(r) \\ \gamma:[\alpha,\beta]\subset \mathbf{R}\rightarrow \mathbf{C}; \qquad \gamma(\alpha)=z_A, \gamma(\beta)=z_B. \end{gathered} \tag{2.8b}$$

[6] Morse y Feshbach [1953], p276.

Sea $z = f(w)$ una transformación conforme entre las variables $(z, \bar{z})$, y $(w, \bar{w})$ con inversa $w = F(z)$, donde $z = x + iy$ y $w = u + iv$.

Efectuando el cambio de variable en (2.8) se obtiene

$$0 = \delta \int_{\gamma} n(z, \bar{z})|dz| = \delta \int_{F(\gamma)} n\big(f(w), \bar{f}(\bar{z})\big)|f'(w)||dw|$$

lo que implica

$$\delta \int \tilde{n}(w, \bar{w})|dw| = 0 \tag{2.9a}$$

con trayectoria solución $\tilde{\gamma}$

$$\begin{aligned} & w = \tilde{\gamma}(r) \\ \tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{C}; \qquad & \tilde{\gamma}(\alpha) = w_A, \tilde{\gamma}(\beta) = w_B. \end{aligned} \tag{2.9b}$$

donde

$$\tilde{n}(w, \bar{w}) \equiv n\left(f(w), \bar{f}(\bar{w})\right) |f'(w)| \tag{2.10a}$$

y

$$\tilde{\gamma} \equiv F \circ \gamma; \qquad w_A \equiv F(z_A), w_B \equiv F(z_B). \tag{2.10b}$$

□

En esta demostración se utiliza fuertemente el hecho de que ambos problemas están expresados en el mismo tipo de coordenadas, además de considerarse únicamente el caso de coordenadas cartesianas. Sin embargo, tanto la H-invariancia del Principio de Fermat así como las relaciones (2.10) pueden generalizarse en el siguiente sentido:

Si al principio de Fermat expresado en coordenadas arbitrarias se le aplica una transformación conforme seguida de un cambio de coordenadas, se obtiene el Principio de Fermat para un nuevo índice de refracción, expresado además en cualquier tipo de coordenadas (no necesariamente el mismo del que se partió).

El lector interesado puede encontrar la prueba de la proposición anterior en el apéndice 2.

2.4 H-invariancia conforme en Mecánica Clásica

En Mecánica Clásica —a diferencia de como ocurre en Optica Geométrica— para describir completamente el comportamiento dinámico de cualquier sistema, además de conocer la trayectoria espacial seguida por cada una de las partículas que lo componen, es también necesario saber como recorren dichas partículas las trayectorias a través del tiempo.

Existe una gran cantidad de formulaciones de la Mecánica Clásica, sin embargo hay una que resulta sumamente útil para aplicar los resultados obtenidos en Optica Geométrica descritos en la sección anterior. Se trata del principio variacional de Maupertius, con el cual se obtienen directamente las trayectorias y posteriormente, de éstas y una condición adicional, se encuentra la dependencia temporal de los recorridos.

Si el sistema es consevativo se puede mostrar que el Principio de Mínima Acción

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0 \tag{2.11}$$

puede ser reemplazado por el de Maupertius[7]

$$\delta S_o = \delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}^i \, dt = 0 \tag{2.12}$$

donde p_i y q^i son los momentos y coordenadas generalizados del sistema. En adelante —a menos que se especifique lo contrario— se utilizará la convención de suma de Einstein; cuando aparecen dos índices repetidos, uno en forma covariante (subíndice) y el otro en forma contravariante (superíndice), se sobrentiende la suma para todos los valores definidos del índice en cuestión.

Es preciso aclarar que las variaciones en (2.11) y (2.12) son distintas. En el primer caso se trata de desplazamientos virtuales en los cuales el tiempo se mantiene fijo y las coordenadas varían sujetas a las constricciones impuestas al

[7] (Goldstein (1980), p.368.) En cuanto a la nomenclatura, existen algunas variantes en la literatura; al Principio de Mínima Acción se le conoce también como principio de Hamilton, mientras que al de Maupertius se le llama Principio de Mínima Acción. Sin embargo, la mayoría de los autores están de acuerdo respecto a que la forma correcta del principio no se debe a Maupertius sino a Euler y Lagrange.

sistema. Dichas variaciones en general no coinciden con trayectorias físicamente posibles. En el segundo caso, el proceso incluye una variación en el tiempo, aún en los extremos, donde las coordenadas se mantienen fijas. Esto permite exigir que la variación de la trayectoria sea consistente con el movimiento físico. Algunos autores distinguen este proceso del anterior denotando la variación con el símbolo Δ en lugar de δ.

A $S_o = \int p_i dq^i$ se le llama Acción Abreviada.

Si se tiene una sola partícula de masa m en un potencial externo $V = V(q)$ con energía constante E, la integral en (2.12) puede transformarse en otra puramente espacial.

Para ello se utilizan el lagrangiano $L = \frac{1}{2}m\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 - V(q)$ —donde dl es el elemento de trayectoria— y la Ley de Conservación de la Energía $E(q, \frac{dq}{dt}) = E$. De estas ecuaciones se despejan los momentos generalizados y el tiempo en favor de las coordenadas y el elemento de línea dl, obteniendo finalmente[8]:

$$\delta \int \sqrt{2m[E - V(\mathbf{r})]}\, dl = 0. \tag{2.13}$$

El Principio de Maupertius expresado en esta forma es formalmente equivalente al Principio de Fermat (2.4) y la manera de pasar de uno al otro es a través de la identificación

$$n(\mathbf{r}) = \sqrt{[2m(E - V(\mathbf{r})]}. \tag{2.14}$$

Para obtener las ecuaciones de la trayectoria en el caso bidimensional utilizando coordenadas cartesianas, basta hacer la sustitución (2.14) en las ecuaciones (2.7) que son las correspondientes al Principio de Fermat, obteniendo

$$\sqrt{[2m\,(E - V(\mathbf{r}))]}\frac{d}{dl}\left\{\sqrt{[2m\,(E - V(\mathbf{r}))]}\frac{d}{dl}x^i\right\} = -m\frac{\partial}{\partial x^i}V(\mathbf{r}) \qquad i = 1, 2, \tag{2.15}$$

donde $\mathbf{r} = (x^1, x^2)$.

La ecuación anterior puede reparametrizarse arbitrariamente sin afectar las trayectorias solución. Sin embargo de entre la infinidad de parámetros posibles existe solamente uno de interés físico, el **tiempo**, el cual se obtiene a través

[8] Landau y Lifshitz [1960], p.142.

del cambio de variable

$$\frac{d}{dt} = \frac{\sqrt{[2m(E - V(x^1, x^2))]}}{m} \frac{d}{dl}. \qquad (2.16)$$

Utilizando esta reparametrización en las ecuaciones (2.15) se obtiene la Segunda Ley de Newton en coordenadas cartesianas

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x^i}V(x^1, x^2) \qquad i = 1, 2,$$

lo que muestra que el parámetro t es efectivamente el tiempo.

Al parámetro t definido mediante (2.16) se le llama parámetro de Luneburg y es precisamente éste el que permite expresar la ecuación (2.15) de la manera más sencilla posible[9].

Para mostrar la H-invariancia conforme del Principio de Maupertius (2.13) en el caso bidimensional con coordenadas cartesianas, es conveniente expresarlo en términos de las variables $(z, \bar{z})$; lo cual se logra mediante las relaciones (2.1) y (2.2) en forma análoga al caso óptico geométrico obteniendo,

$$\delta \int \sqrt{[2m(E - V(z, \bar{z}))]}\, |dz| = 0 \qquad (2.17a)$$

con trayectoria solución γ

$$\begin{aligned} & z = \gamma(\tau) \\ \gamma : [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{C}; \qquad & \gamma(\alpha) = z_A, \gamma(\beta) = z_B. \end{aligned} \qquad (2.17b)$$

Haciendo el cambio de variables de $(z, \bar{z})$ a $(w, \bar{w})$ con $z = x + iy$, $w = u + iv$ y utilizando para tal motivo la transformación conforme $z = f(w)$ con inversa $w = F(z)$ se obtiene

$$\delta \int \sqrt{[2m(E - V(f(w), \bar{f}(\bar{w})))]\, |f'(w)|^2}\, |dw| = 0. \qquad (2.18)$$

[9] Luneburg [1964].

Para que la expresión anterior represente nuevamente el Principio de Maupertius asociado al potencial $\mathcal{V}(w,\overline{w})$ con energía $\mathcal{E}$, es necesario imponer la condición

$$\left[E - V\left(f(w), \overline{f}(\overline{w})\right)\right] |f'(w)|^2 = \mathcal{E} - \mathcal{V}(w,\overline{w}), \tag{2.19}$$

donde además, el nuevo potencial $\mathcal{V}$ no debe depender de la nueva energía $\mathcal{E}$. Cuando este es el caso la expresión (2.18) se transforma en

$$\delta \int \sqrt{[2m(\mathcal{E} - \mathcal{V}(w,\overline{w}))]}\, |dw| = 0 \tag{2.20a}$$

con trayectoria solución $\tilde{\gamma}$

$$\begin{aligned} &w = \tilde{\gamma}(\tau) \\ \tilde{\gamma} : [\alpha,\beta] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{C}; \qquad &\tilde{\gamma}(\alpha) = w_A, \tilde{\gamma}(\beta) = w_B. \end{aligned} \tag{2.20b}$$

y

$$\tilde{\gamma} \equiv F \circ \gamma; \qquad w_A \equiv F(z_A), w_B \equiv F(z_B). \tag{2.21a}$$

□

La forma más sencilla —aunque no la única— de satisfacer el requerimiento (2.19) es mediante el siguiente par de condiciones

$$V\left(f(w), \overline{f}(\overline{w})\right) |f'(w)|^2 = -\mathcal{E} \tag{2.21b}$$

$$\mathcal{V}(w,\overline{w}) = -E|f'(w)|^2. \tag{2.21c}$$

Como el tiempo se obtiene a partir de la trayectoria, la transformación temporal queda totalmente determinada por el mapeo conforme espacial y la definición (2.16).

Para obtener la relación entre s y t, donde s es el tiempo asociado al problema con potencial $\mathcal{V}$ y energía $\mathcal{E}$, basta hacer uso de la regla de la cadena

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{|dw|}\frac{1}{|f'(w)|}\frac{|dz|}{dt},$$

y utilizando la expresión (2.16) para las derivadas $\frac{|dw|}{ds}$ y $\frac{|dz|}{dt}$ se obtiene

$$\frac{ds}{dt} = \frac{m}{\sqrt{[2m(\mathcal{E} - \mathcal{V}(w,\overline{w}))]}} \frac{\sqrt{[2m(E - V(z,\overline{z}))]}}{m} \frac{1}{|f'(w)|^2}.$$

Simplificando y tomando en cuenta que se satisface la condición (2.19) resulta que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{|f'(w)|^2} = |F'(z)|^2. \tag{2.22}$$

Por último, si C es una constante de movimiento asociada al problema con potencial V y tiempo t

$$C = C\left(z, \bar{z}, \frac{dz}{dt}, \frac{d\bar{z}}{dt}, t\right), \qquad \frac{dC}{dt} = 0,$$

entonces $\tilde{C}$ es constante de movimiento asociada al problema con potencial $\mathcal{V}$ y tiempo s, donde

$$\begin{aligned}\tilde{C}\left(w, \bar{w}, \frac{dw}{ds}, \frac{d\bar{w}}{ds}, s\right) &\equiv C\left(f(w), \bar{f}(\bar{w}), \frac{1}{|f'(w)|^2}\frac{dw}{ds}, \frac{1}{|f'(w)|^2}\frac{d\bar{w}}{ds}, \frac{s}{|f'(w)|^2}\right) \\ &= C\left(z, \bar{z}, \frac{dz}{dt}, \frac{d\bar{z}}{dt}, t\right),\end{aligned}$$

ya que

$$\frac{d\tilde{C}}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dC}{dt} = |f'(w)|^2\frac{dC}{dt} = 0. \tag{2.23}$$

La demostración de la H-invariancia conforme del Principio de Maupertius en coordenadas generalizadas y las expresiones para las relaciones correspondientes entre los potenciales análogas a (2.21) se encuentran en el apéndice 2; así como la obtención también en coordenadas generalizadas, de la relación (2.22).

2.5 H-invariancia conforme en Mecánica Ondulatoria

En esta formulación de la Mecánica Cuántica, el estado del sistema en estudio está caracterizado por la función de onda compleja Ψ, la cual contiene toda la información que se puede obtener de dicho sistema[10].

[10] Sakurai [1985], p.98.

Si el sistema se reduce al de una partícula de masa m, la evolución de la función de onda $\Psi(\mathbf{r},t)$ está descrita por la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t)+V(\mathbf{r},t)\Psi(\mathbf{r},t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) \tag{2.24}$$

donde $V(\mathbf{r},t)$ es, como en Mecánica Clásica, el potencial en el que se encuentra la partícula.

Si además el potencial V es independiente del tiempo, lo cual se supondrá de aquí en adelante, la ecuación (2.24) es separable respecto a las variables temporal y espaciales, dando lugar a *estados estacionarios* caracterizados por

$$\Psi(\mathbf{r},t)=e^{-i\omega t}\psi(\mathbf{r}) \tag{2.25}$$

donde ψ satisface la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r})+V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})=E\psi(\mathbf{r}). \tag{2.26}$$

Un estado estacionario es aquel que tiene una energía bien definida[11] E relacionada con la frecuencia angular ω mediante la expresión de Planck-Einstein $E=\hbar\omega$.

Dado un potencial V, el problema se reduce entonces al de resolver la ecuación (2.26), que en espacio bidimensional y coordenadas cartesianas se expresa mediante

$$\nabla^2\psi(x,y)+\frac{2m}{\hbar^2}\Big[E-V(x,y)\Big]\psi(x,y)=0. \tag{2.27}$$

Para probar la H-invariancia conforme de esta expresión es conveniente utilizar como en los casos anteriores, el par de variables complejas $(z,\bar{z})$.

La expresión para el operador laplaciano en dichas coordenadas se obtiene combinando las relaciones (2.3)

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

---

[11] Cohen-Tannoudji *et al.* [1977], p.33.

obteniendo

$$\nabla^2 = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}. \tag{2.28}$$

Utilizando este hecho junto con las relaciones (2.1) y la convención (2.2) en la ecuación (2.27) se obtiene

$$4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}\psi(z,\overline{z}) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(z,\overline{z})\right]\psi(z,\overline{z}) = 0. \tag{2.29}$$

Sea $z = f(w)$ un mapeo conforme con inversa $w = F(z)$. Para obtener la expresión del primer término de la ecuación (2.29) en las nuevas coordenadas $(w,\overline{w})$ se considera la composición

$$\varphi(w,\overline{w}) \equiv \psi\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right) \tag{2.30}$$

y se utiliza la regla de la cadena dos veces, tomando en cuenta que la analicidad de f y $\overline{f}$ implica

$$\frac{\partial z}{\partial \overline{w}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{w}} = 0, \qquad \frac{\partial \overline{z}}{\partial w} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial w} = 0$$

obteniendo

$$\begin{aligned} 4\frac{\partial^2}{\partial w \partial \overline{w}}\psi\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right) &= 4\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{\partial \psi(z,\overline{z})}{\partial \overline{z}}\Bigg|_{\substack{z=f(w)\\ \overline{z}=\overline{f}(\overline{w})}} \overline{f}'(\overline{w})\right] \\ &= 4\frac{\partial^2 \psi(z,\overline{z})}{\partial z \partial \overline{z}}\Bigg|_{\substack{z=f(w)\\ \overline{z}=\overline{f}(\overline{w})}} f'(w)\overline{f}'(\overline{w}) \end{aligned}$$

y en forma abreviada

$$\nabla^2_{(w,\overline{w})}\varphi(w,\overline{w}) = |f'(w)|^2 \nabla^2_{(z,\overline{z})}\psi(z,\overline{z})\Bigg|_{\substack{z=f(w)\\ \overline{z}=\overline{f}(\overline{w})}}. \tag{2.31}$$

Evaluando la ecuación (2.29) en $\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)$, utilizando la expresión anterior y multiplicando por el factor conforme $|f'(w)|^2$ se obtiene

$$4\frac{\partial^2}{\partial w \partial \overline{w}}\varphi(w,\overline{w}) + \frac{2m}{\hbar^2}\left| f'(w) \right|^2 \left[E - V\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)\right]\varphi(w,\overline{w}) = 0. \tag{2.32}$$

Para obtener nuevamente la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (2.29), esta vez asociada al potencial $\mathcal{V}(w,\overline{w})$ con energía $\mathcal{E}$ es necesario imponer la misma condición que en Mecánica Clásica

$$\left[E - V\left(f(w), \overline{f}(\overline{w})\right)\right] |f'(w)|^2 = \mathcal{E} - \mathcal{V}(w,\overline{w}), \tag{2.19}$$

con $\mathcal{V}$ independiente de la nueva energía $\mathcal{E}$. Si esto sucede, la ecuación (2.32) se transforma en

$$4\frac{\partial^2}{\partial w \partial \overline{w}}\varphi(w,\overline{w}) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[\mathcal{E} - \mathcal{V}(w,\overline{w})\right]\varphi(w,\overline{w}) = 0, \tag{2.33}$$

y las soluciones de ambos problemas están relacionadas a través de la definición (2.30). □

La demostración de la H-invariancia conforme de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en coordenadas generalizadas y la obtención en ese caso de expresiones análogas a (2.31) y (2.19) se desarrollan en el apéndice 3.

Es notable que las condiciones necesarias y suficientes para H-invariancia conforme en los casos clásico y ondulatorio de una partícula en potenciales independientes del tiempo, son exactamente las mismas —(2.19)—. Este hecho permite utilizar directamente en el caso ondulatorio resultados obtenidos para el caso clásico y viceversa.

Un ejemplo de esto son el par de condiciones suficientes (2.21) para satisfacer la condición (2.19)

$$V\left(f(w), \overline{f}(\overline{w})\right) |f'(w)|^2 = -\mathcal{E}$$

$$\mathcal{V}(w,\overline{w}) = -E|f'(w)|^2,$$

y de mayor relevancia la siguiente proposición:

COROLARIO 2.1 *Para el caso de una partícula de masa m, los problemas clásicos caracterizados por los potenciales V y $\mathcal{V}$ independientes del tiempo con energías E y $\mathcal{E}$ respectivamente, están hipersimétricamente relacionados por el mapeo conforme f si y solo si los problemas ondulatorios correspondientes a potenciales V y $\mathcal{V}$ independientes del tiempo y estados estacionarios caracterizados por las energías E y $\mathcal{E}$ respectivamente lo están a través del mismo mapeo f.*

2.6 H-invariancia conforme en las oscilaciones transversales de una membrana

Los casos de Optica Geométrica, Mecánica Clásica y Mecánica Ondulatoria anteriormente tratados, aunque representan areas muy amplias y estudiadas de la Física, son teorías originalmente tridimensionales, y su restricción a espacios bidimensionales reduce considerablemente el número de sistemas *reales* que pueden ser descritos por éstas.

Lo más deseable desde este punto de vista sería el poder extender los resultados obtenidos a espacios tridimensionales, sin embargo existe una serie de argumentos discutidos al final de este capítulo, que muestran que teorías de hipersimetría conforme en dimensiones distintas a dos, estarían a su vez ampliamente restringidas.

Existe sin embargo una manera alternativa de proceder, y es buscando modelos conformalmente H-invariantes en áreas de la Física originalmente bidimensionales. La ecuación de las oscilaciones transversales de una membrana discutida a continuación, es el resultado de dicha búsqueda.

Por membrana se entiende una película plana que no ofrece resistencia a la flexión ni al desplazamiento, extendida sobre un contorno rígido y plano.

El campo $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$ representa el desplazamiento transversal de la membrana del punto de equilibrio $\mathbf{r}$ en el *plano* definido por el contorno, al tiempo t.

Puede probarse que si el desplazamiento Ψ es pequeño[12], la tensión T a la que está sujeta la membrana es constante y uniforme, y Ψ satisface la ecuación

$$\sigma(\mathbf{r}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\mathbf{r}, t) - T \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) = \epsilon(\mathbf{r}, t) \qquad (2.34)$$

donde $\mathbf{r}$ es la posición en el plano del contorno, σ es la densidad superficial de masa de la membrana y ϵ es una densidad de fuerza externa que puede actuar sobre ella[13]

---

[12] Es decir $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^2 \ll \frac{\partial \Psi}{\partial r}$.

[13] Tijonov y Samarsky [1972], p.40.

En coordenadas cartesianas, la ecuación (2.34) aparece como

$$\sigma(x,y)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,y;t) - T\nabla^2\Psi(x,y;t) = \iota(x,y;t),$$

y utilizando las expresiones (2.1), (2.2) y (2.28) puede escribirse en términos de las variables $(z,\overline{z})$

$$\sigma(z,\overline{z})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(z,\overline{z};t) - 4T\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}\Psi(z,\overline{z};t) = \iota(z,\overline{z};t). \tag{2.35}$$

Para probar la H-invariancia conforme de la ecuación (2.35) se utiliza el mapeo conforme $z = f(w)$ con inversa $w = F(z)$, que es una transformación únicamente espacial y no afecta operadores ni variables temporales.

Evaluando la ecuación (2.35) en $\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)$ y utilizando la ecuación (2.31) se obtiene[14]

$$\sigma\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(w,\overline{w};t) - \frac{4}{|f'(w)|^2}T\frac{\partial^2}{\partial w\partial\overline{w}}\Phi(w,\overline{w};t) = \iota\left(f(w),\overline{f}(\overline{w});t\right),$$

y multiplicando por el factor conforme $|f'(w)|^2$ se obtiene nuevamente la ecuación de oscilaciones de la membrana

$$\tilde{\sigma}(w,\overline{w})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(w,\overline{w};t) - 4T\frac{\partial^2}{\partial w\partial\overline{w}}\Phi(w,\overline{w};t) = \tilde{\iota}(w,\overline{w};t). \tag{2.36}$$

donde

$$\Phi(w,\overline{w};t) \equiv \Psi\left(f(w),\overline{f}(\overline{w});t\right), \tag{2.37}$$

$$\tilde{\sigma}(w,\overline{w}) \equiv \sigma\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)|f'(w)|^2, \tag{2.38}$$

$$\tilde{\iota}(w,\overline{w};t) \equiv \iota\left(f(w),\overline{f}(\overline{w});t\right)|f'(w)|^2. \tag{2.39}$$

□

[14] Como el operador laplaciano es puramente espacial, la relación (2.31) no pierde validez si se reemplaza $\Psi(z,\overline{z};t)$ por $\psi(z,\overline{z})$ y $\Phi(w,\overline{w};t)$ por $\varphi(w,\overline{w})$.

La demosración de la H-invariancia conforme de la ecuación de la membrana (2.34) en coordenadas generalizadas se encuentra en el apéndice 3.

En este caso existen dos potenciales generalizados; σ y ϵ, que caracterizan cada problema.

Por simplicidad se tratarán aquí unicamente problemas de "membrana libre" en los que $\epsilon = 0$. La relación (2.39) implica

$$\bar{\epsilon} = 0 \Longleftrightarrow \epsilon = 0$$

por lo que cada problema de membrana libre se transforma en otro también de membrana libre[15]. En este caso la ecuación (2.34) se reduce a la ecuación homogénea de tipo hiperbólico[16]

$$\sigma(\mathbf{r})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(\mathbf{r},t) - T\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t) = 0 \tag{2.40}$$

y el problema tiene asociado únicamente el potencial generalizado σ.

La solución a este tipo de ecuación es única y estable si se especifican, como condiciones iniciales

$$\Psi(\mathbf{r},t_o), \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial t}(\mathbf{r},t_o) \qquad \forall\, \mathbf{r} \in A \tag{2.41}$$

(condiciones de Cauchy), y como condiciones de frontera

$$\Psi(\mathbf{r},t) \qquad \forall\, \mathbf{r} \in \partial A,\ t \geq t_o \tag{2.42}$$

o

$$\nabla\Psi(\mathbf{r},t) \qquad \forall\, \mathbf{r} \in \partial A,\ t \geq t_o \tag{2.43}$$

(condiciones de Dirichlet o Neumann respectivamente) donde A es la región delimitada por la frontera rígida ∂A, que puede ser abierta[17]

Un método comunmente utilizado para resolver la ecuación (2.40) con las condiciones (2.41) y (2.42) homogénea[18]

$$\Psi(\mathbf{r},t) = 0 \qquad \forall\, \mathbf{r} \in \partial A,\ t \geq t_o, \tag{2.44}$$

[15] El teorema 2.2 asegura que $|f'(w)|^2 > 0$ pues f es conforme.

[16] En el espacio-tiempo tridimensional.

[17] Morse y Feshbach [1953], p.684,706.

[18] Las más comunes.

consiste en separar la parte temporal de la ecuación, sustituyendo la solución de prueba

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \tag{2.45}$$

de donde se obtiene la ecuación para la parte espacial ψ

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{T}\sigma(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = 0. \tag{2.46}$$

Asociado a cada función σ hay un conjunto de *coordenadas separables* —que puede ser vacío—. En cada uno de estos sistemas existe una familia completa de soluciones de la ecuación (2.46), cuyas curvas nodales —definidas por $\psi = 0$— coinciden con las curvas coordenadas —$q^i = \mathbf{constante}$—. Si la frontera ∂A por fortuna coincide con porciones de curvas coordenadas, el problema puede resolverse en términos de soluciones a la ecuación (2.46) que satisfacen las condiciones de frontera (eigenfunciones) y corresponden a valores específicos de ω (eigenvalores)[19].

La solución es una combinación lineal de eigenfunciones, y el peso de cada una está determinado por las condiciones iniciales.

Si la frontera es cerrada, los valores propios ω forman un conjunto discreto y existe un valor mínimo ω_0; la *frecuencia fundamental*. Al resto de frecuencias se les llama *sobretonos* y a las funciones asociadas a cada sobretono o frecuencia fundamental *modos normales*[20].

Cuando la razón entre los sobretonos y la frecuencia fundamental es entera, se dice que los sobretonos son *armónicos* .Esta propiedad es fundamental en la Música, ya que permite la construcción de escalas tonales[21]

Una membrana con densidad σ homogénea y frontera circular no tiene sobretonos armónicos[22]. Esta es la razón por la cual el grupo de instrumentos de percusión ocupa un lugar secundario con respecto a los instrumentos musicales capaces de producir una secuencia natural de armónicos, como el grupo de cuerdas[23].

---

[19] Unicamente en estos casos es posible obtener soluciones en forma más útil que series de múltiples variables o integrales. (Morse y Feshbach [1953], p.497.)

[20] Puede haber degeneración; un eigenvalor asociado a eigenfunciones independientes.

[21] Berg y Stork [1982], p.348-351.

[22] Morse e Ingard [1968], p.211

[23] Ramakrishna y Sondhi [1954].

Sin embargo, existen un par de tambores indios: *Mridanga* y *Thabala*, cuyos primeros cuatro sobretonos forman una secuencia armónica natural con la frecuencia fundamental.

Las membranas de este tipo de tambores —a diferencia de las convencionales— tienen adherida una pasta flexible de manera no homogénea, lo que se traduce en una densidad superficial de masa σ que depende de la coordenada radial r.

Distintos autores han propuesto modelos para la función $\sigma(r)$, como Gosh[24], quien sugiere $\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{r}$ y $\sigma = \frac{\sigma_0}{r^2}$, o Ramakrishna que propone una densidad de "escalón" con un valor constante del centro a un cierto radio r_0 y otro valor constante de r_0 al borde[25]. Este último afirma que su modelo reproduce razonablemente los resultados experimentales.

La H-invariancia conforme de la ecuación (2.40) permite encontrar relaciones entre membranas con densidades de masa σ distintas, y proporciona un método alternativo ya sea para ajustar modelos de densidad a los tambores tradicionales o para fabricar nuevos instrumentos de percusión con interesantes propiedades.

2.7 H-invariancia conforme de algunas otras ecuaciones de la Física Matemática

La expresión (2.31) para la transformación del operador laplaciano bajo mapeos conformes en coordenadas cartesianas — o las expresiones correspondientes en coordenadas generalizadas (*A*3.9) y (*A*3.27)— permite mostrar directamente la H-invariancia conforme de otras ecuaciones bidimensionales, en particular la ecuación de Poisson

$$\nabla^2_{(z,\bar{z})}\psi(z,\bar{z}) = \rho(z,\bar{z}), \tag{2.47}$$

y la ecuación de onda

$$\nabla^2\Psi(z,\bar{z};t) - \frac{1}{v^2(z,\bar{z})}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(z,\bar{z};t) = 0 \tag{2.48}$$

---

[24] Gosh [1922].

[25] Ramakrishna y Sondhi [1954].

donde ρ y v son los potenciales generalizados y representan las fuentes del campo y el campo de velocidad de fase respectivamente.

Utilizando una vez más el procedimiento de evaluar en $\left(f(w), \overline{f}(\overline{w})\right)$ y sustituir la expresión (2.31) se obtiene

$$\nabla^2_{(w,\overline{w})}\varphi(w,\overline{w}) = \tilde{\rho}(w,\overline{w}), \tag{2.49}$$

y

$$\nabla^2_{(w,\overline{w})}\Phi(w,\overline{w};t) - \frac{1}{\tilde{v}^2(w,\overline{w})}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(w,\overline{w};t) = 0, \tag{2.50}$$

donde

$$\tilde{\rho}(w,\overline{w}) \equiv |f'(w)|^2 \rho\left(f(w), \overline{f}(\overline{w})\right), \tag{2.51}$$

$$\tilde{v}^2(w,\overline{w}) \equiv \frac{1}{|f'(w)|^2} v^2\left(f(w), \overline{f}(\overline{w})\right) = |F'(w)|^2 v^2\left(f(w), \overline{f}(\overline{w})\right) \tag{2.52}$$

y las soluciones están relacionadas a través de las expresiones

$$\varphi(w,\overline{w}) \equiv \psi\left(f(w), \overline{f}(\overline{w})\right) \tag{2.53}$$

$$\Phi(w,\overline{w};t) \equiv \Psi\left(f(w), \overline{f}(\overline{w}); t\right) \tag{2.54}$$

que son idénticas a (2.30) y (2.37). □

Por último se muestra la H-invariancia conforme de la ecuación bidimensional de difusión, que puede utilizarse para describir la propagación del calor en distintos medios o la difusión de flúidos; ya sea la de un gas en un medio poroso o la de una solución con concentración no homogénea.

Para medios isotrópicos de lenta variación con la temperatura, la ecuación de difusión es

$$k(\mathbf{r})\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t) + \nabla k(\mathbf{r}) \cdot \nabla\Psi(\mathbf{r},t) - c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = -\epsilon(\mathbf{r},t) \tag{2.55}$$

donde Ψ es el campo de temperatura, k el coeficiente de conductividad térmica, c el calor específico, ρ la densidad y ϵ la densidad de fuentes térmicas[26].

---

[26] Los coeficientes k y c por regla general son funciones de la temperatura de variación lenta. Si se toman intervalos de poca variación de temperatura esta dependencia puede ignorarse. Tijunov y Samarsky [1972], p.193-196.

Si se trata de difusión, Ψ es el campo de concentración, k el coeficiente de difusión, el producto $c\rho$ el coeficiente de porosidad[27] y ϵ la densidad de fuentes.

Para mostrar la H-invariancia conforme de esta ecuación es necesario obtener una expresión análoga a (2.31) para el término

$$\nabla k(z,\bar{z}) \cdot \nabla \Psi(z,\bar{z};t).$$

Después de un cálculo directo y similar al que se hace para deducir la expresión (2.31) se concluye que[28]

$$\begin{aligned}\nabla_{(w,\overline{w})} p(w,\overline{w}) \cdot \nabla_{(w,\overline{w})} \Phi(w,\overline{w};t) \\ = |f'(w)|^2 \left[\nabla_{(z,\bar{z})} k(z,\bar{z}) \cdot \nabla_{(z,\bar{z})} \Psi(z,\bar{z};t)\right]_{\substack{z=f(w)\\ \bar{z}=\bar{f}(\overline{w})}}\end{aligned} \tag{2.56}$$

donde

$$p(w,\overline{w}) \equiv k\left(f(w),\bar{f}(\overline{w})\right) \tag{2.57a}$$

$$\Phi(w,\overline{w};t) \equiv \Psi\left(f(w),\bar{f}(\overline{w});t\right). \tag{2.57b}$$

Evaluando la ecuación (2.55) (expresada en coordenadas cartesianas $(z,\bar{z})$) en $\left(f(w),\bar{f}(\overline{w})\right)$ y utilizando las expresiones (2.31) y (2.56) se obtiene

$$\begin{aligned}p(w,\overline{w})\nabla^2\Phi(w,\overline{w};t) + \nabla p(\mathbf{r}) \cdot \nabla\Phi(w,\overline{w};t) \\ -\tilde{c}(w,\overline{w})\tilde{\rho}(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial t}\Phi(w,\overline{w};t) = -\tilde{\epsilon}(w,\overline{w};t)\end{aligned} \tag{2.58}$$

donde

$$\tilde{c}(w,\overline{w})\tilde{\rho}(w,\overline{w}) \equiv |f'(w)|^2 c\left(f(w),\bar{f}(\overline{w})\right)\rho\left(f(w),\bar{f}(\overline{w})\right) \tag{2.59}$$

$$\tilde{\epsilon}(w,\overline{w}) \equiv |f'(w)|^2 \epsilon\left(f(w),\bar{f}(\overline{w})\right). \tag{2.60}$$

Los potenciales generalizados son ϵ y $c\rho$. En el caso de propagación de calor puede escogerse entre c y ρ siempre y cuando el producto se transforme según la relación (2.59). □

---

[27] Se llama coeficiente de porosidad a la relación entre el volumen de los poros y el volumen total. *Ibid.* p.194.

[28] El procedimiento detallado se encuentra en el apéndice 4.

Tanto las ecuaciones de Poisson y de onda como la ecuación de difusión, a diferencia de los principios de Fermat y Maupertius y de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, describen únicamente procesos particulares en algunas ramas de la Física. Además, a diferencia de la ecuación para las oscilaciones de la membrana, representan procesos originalmente tridimensionales.

En esta tesis se consideran únicamente las ecuaciones y los principios variacionales descritos en las secciones anteriores. Sin embargo, los resultados que se obtienen en el siguiente capítulo pueden también aplicarse a las ecuaciones discutidas en esta sección.

Es preciso aclarar que la ecuación de onda (**2.48**) *no* describe los fenómenos de la Optica Ondulatoria bidimensional en medios inhomogéneos[29]

Si se combinan las ecuaciones de Maxwell para medios bidimensionales no homogéneos, se obtiene un sistema de ecuaciones de tipo ondulatorio que no es conformalmente H-invariante.

2.8 Recapitulación y observaciones generales

La H-invariancia conforme de las ecuaciones diferenciales y los principios variacionales discutidos en este capítulo, permite relacionar problemas bidimensionales aparentemente distintos (caracterizados por los potenciales generalizados asociados), y sus soluciones a través de transformaciones conformes.

En Mecánica Clásica y Ondulatoria, el problema de una partícula de masa m sujeta al potencial $V(z,\bar{z})$ con energía E constante en el primer caso y bien definida en el segundo está asociado, a través de la transformación conforme f, con el problema de una partícula de masa m sujeta al potencial $\mathcal{V}(w,\bar{w})$ y energía $\mathcal{E}$, donde

$$\mathcal{V}(w,\bar{w}) = -E|f'(w)|^2, \tag{2.21c}$$

siempre y cuando V satisfaga la condición

$$V\left(f(w),\bar{f}(\bar{w})\right)|f'(w)|^2 = -\mathcal{E}. \tag{2.21b}$$

En Optica Geométrica, el problema de determinar la trayectoria seguida por los rayos luminosos en un medio descrito por el índice de refracción $n(z,\bar{z})$,

[29] Para medios homogéneos la ecuación es correcta, pero este caso carece de interés, ya que las hipersimetrías relacionan potenciales generalizados funcionalmente distintos.

está relacionado al de hallar la trayectoria en el medio descrito por el índice $\tilde{n}(w,\overline{w})$ donde

$$\tilde{n}(w,\overline{w}) \equiv n\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)|f'(w)|. \tag{2.10a}$$

Así mismo el mapeo conforme f asocia el problema de las oscilaciones transversales libres de la membrana con densidad de masa $\sigma(z,\overline{z})$, con el de la membrana de densidad $\tilde{\sigma}(w,\overline{w})$ y oscilaciones tambien libres, con

$$\tilde{\sigma}(w,\overline{w}) \equiv \sigma\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)|f'(w)|^2. \tag{2.38}$$

Las soluciones a los problemas asociados se obtienen aplicando la transformación f a las soluciones de los problemas originales.

En Optica Geométrica y Mecánica Clásica, las trayectorias solución $\tilde{\gamma}$ correspondientes a los problemas asociados al índice de refracción $\tilde{n}(w,\overline{w})$ y al potencial $\mathcal{V}(w,\overline{w})$ respectivamente, se obtienen de las trayectorias solución γ de los problemas asociados al índice $n(z,\overline{z})$ y al potencial $V(z,\overline{z})$ a través de la composición

$$\tilde{\gamma} \equiv F \circ \gamma \qquad (2.10b) \text{ ó } (2.21a)$$

donde $F \equiv f^{-1}$.

En Mecánica Clásica el tiempo se obtiene de la trayectoria aplicando la reparametrización de Luneburg, y la relación entre los tiempos s (asociado al potencial V) y t (asociado al potencial $\mathcal{V}$) es

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{|f'(w)|^2} = |F'(z)|^2. \tag{2.22}$$

Las funciones de onda $\varphi(w,\overline{w})$ y $\Phi(w,\overline{w};t)$ soluciones de los problemas asociados al potencial $\mathcal{V}$ en Mecánica Ondulatoria y a la membrana con densidad $\tilde{\sigma}$ respectivamente, están relacionados con las funciones $\psi(z,\overline{z})$ y $\Psi(z,\overline{z};t)$ correspondientes al potencial $V(z,\overline{z})$ y la densidad $\sigma(z,\overline{z})$ a través de las composiciones

$$\varphi(w,\overline{w}) \equiv \psi\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right) \tag{2.30}$$

$$\Phi(w,\overline{w};t) \equiv \Psi\left(f(w),\overline{f}(\overline{w});t\right). \tag{2.37}$$

Tanto en Optica Geométrica como en las oscilaciones de la membrana, las expresiones (2.10a) y (2.38) aseguran la existencia de los potenciales generalizados asociados $\tilde{n}$ y $\tilde{\sigma}$ para *cualesquiera* potenciales generalizados n y σ respectivamente, y *cualquier* transformación conforme f.

En Mecánica la situación es distinta. Para estar hipersimétricamente relacionados a través de la tranformación conforme f, los potenciales $\mathcal{V}$ y V deben satisfacer la condición

$$\left[E - V\left(f(w), \overline{f}(\overline{w})\right)\right] |f'(w)|^2 = \mathcal{E} - \mathcal{V}(w, \overline{w}), \tag{2.19}$$

y además V y $\mathcal{V}$ deben ser independientes de las energías E y $\mathcal{E}$ respectivamente.

Si se utilizan las condiciones suficientes (2.21b) y (2.21c); dado el potencial V, si existe una transformación conforme f que junto con V satisfaga la relación (2.21b), entonces V está relacionado con el potencial $\mathcal{V}$ a través de la transformación f, donde $\mathcal{V}$ está definido por la expresión (2.21c).

Alternativamente, dada una transformación conforme f cualquiera, los potenciales $\mathcal{V}$ y V que esta relaciona hipersimétricamente son únicos y están determinados por las condiciones (2.21b) y (2.21c)[30].

En general, tanto en la Mecánica Clásica como en la Ondulatoría, la energía juega el papel de un parámetro, más que el de una constante. En la mayoría de los casos en los que se tiene un potencial independiente de la velocidad y el sistema es conservativo, se desea conocer las soluciones al menos para cierto intervalo donde la energía puede tomar valores, los cuales pueden estar distribuidos de manera continua o discreta.

En este sentido, las expresiones (2.21b) y (2.21c) relacionan el problema asociado al potencial V con la *familia* de potenciales

$$\left\{\mathcal{V}_E(w, \overline{w})\right\}_{E\in I}$$

y energía *fija* $\mathcal{E}$, donde I es el intervalo de energías de interés para el potencial V, y

$$\mathcal{V}_E(w, \overline{w}) = -E|f'(w)|^2.$$

Esta observación ilustra el porqué de la interpretación de las transformaciones de hipersimetría como *activas*, en las que el espacio solución descrito por algún tipo de coordenadas se modifica, mientras que el sistema de coordenadas no se altera y se utiliza para describir el espacio solución modificado. A diferencia de ésta, existe la interpretación *pasiva*, en la que no se altera el espacio solución ni el problema físico, modificando únicamente las coordenadas que se utilizan para describirlo.

[30] Cuando se utilizan estas para satisfacer (2.19).

Antes de finalizar este capítulo, es conveniente discutir brevemente sobre la posibilidad de extender los resultados obtenidos a espacios de más de dos dimensiones.

Si se trata de extender la ley de transformación del operador laplaciano (2.31) o ($A3.9$) se observa que es necesario imponer condiciones a la función de onda, al factor conforme —que sea constante— o alguna combinación a ambos, reduciendo el número de problemas para los que podría aplicarse la expresión buscada a un par de ejemplos particulares[31].

A diferencia de las ecuaciones de Schrödinger y de la membrana, para probar la H-invariancia conforme de los principios variacionales de Fermat y Maupertius no es necesaria la hipótesis de espacio bidimensional[32].

Sin embargo, para dimensiones distintas a dos, la clase de transformaciones conformes se reduce al *Grupo Conforme*, generado por un número *finito* de sencillas transformaciones[33].

La razón principal por la que esto sucede se deriva de la expresión de transformación para la métrica en coordenadas generalizadas y dimensión entera ($A3.3$) hallada en el apéndice 3

$$g_{ij}(\bar{q})\alpha^2(\bar{q}) = g_{kl}(\bar{q})\frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i}\frac{\partial q^l}{\partial \bar{q}^j}, \qquad (A3.3)$$

que impone condiciones sobre la transformación conforme f, $q^i = f^i(\bar{q})$.

Como el tensor métrico es simétrico, la expresión ($A3.3$) contiene

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

ecuaciones independientes para las $n+1$ funciones desconocidas; n componentes de la transformación f y el factor conforme α^2.

Restando el número de incógnitas del de ecuaciones se obtiene

$$\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \qquad (2.61)$$

[31] Esto se aprecia en la ecuación ($A3.8$).

[32] La demostración del apéndice 2 es independiente de la dimensión del espacio.

[33] Kuiper [1948].

que es positivo para $n > 2$, lo que implica que en ese caso el sistema está sobredeterminado.

La expresión (2.61) es cero para $n = -1$ que carece de interés físico, y para $n = 2$. En este caso las ecuaciones que resultan de la expresión ($A3.3$) son las condiciones de Cauchy-Riemann.

3

Un Método Directo Para Encontrar Potenciales Generalizados, Hipersimétricamente Relacionados Con Potenciales Dados

3.1 Introducción

La relación hipersimétrica entre distintos potenciales generalizados bidimensionales mediante transformaciones conformes es una relación de equivalencia, porque las expresiones (2.19), (2.10) y (2.38) —encontradas en el capítulo anterior— admiten la función conforme de identidad para relacionar a todo potencial consigo mismo, y además la clase de funciones conformes es cerrada respecto a la inversión y composición.

Como toda relación de equivalencia, la de estar hipersimétricamente relacionados a través de transformaciones conformes, genera una partición del espacio de potenciales generalizados —asociados al mismo principio variacional o a la misma ecuación diferencial— en clases de equivalencia. Este hecho permite utilizar todo lo que se conozca sobre un potencial generalizado —soluciones, leyes de conservación, simetrías, etc.— para el resto de potenciales generalizados que pertenezcan a la misma clase de equivalencia.

Hay una gran cantidad de problemas asociados a potenciales generalizados para los cuales es difícil encontrar soluciones exactas e incluso, en algunas ocasiones, saber si ese tipo de soluciones existen. En estos casos sería de gran utilidad poder determinar si dentro de la clase de equivalencia a la que el potencial pertenece existen otros potenciales, y de ser así, saber cuáles son las transformaciones conformes que los relacionan con el potencial en cuestión. Cuando esto sucede, basta conocer las soluciones exactas o saber sobre la imposibilidad de hallarlas en alguno de los potenciales equivalentes para extender este resultado a los demás, incluyendo el potencial original.

Cuando no pueden encontrarse soluciones exactas y tampoco puede probarse su inexistencia en ninguno de los potenciales equivalentes, al menos se habrá logrado identificar los problemas y, al momento de resolver aguno de ellos, quedarán resueltos los demás.

Como se mencionó al final del capítula anterior, las expresiones

$$\tilde{n}(w,\overline{w}) \equiv n\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)|f'(w)| \tag{2.10a}$$

$$\tilde{\sigma}(w,\overline{w}) \equiv \sigma\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)|f'(w)|^2, \tag{2.38}$$

aseguran la existencia de los potenciales $\tilde{n}$ y $\tilde{\sigma}$ para cualesquiera potenciales n, σ y cualquier función conforme f.

Si se tiene el potencial $n(z,\overline{z})$ y se desea encontrar otro miembro de su clase de equivalencia, basta con introducir alguna función conforme f en la expresión (2.10a). Este procedimiento puede repetirse para distintas funciones conformes y puede iterarse[1] logrando producir una larga lista de potenciales equivalentes a n. Sin embargo, si se desea obtener información sobre el problema asociado al potencial n utilizando la lista de potenciales equivalentes, no hay nada que asegure que será más sencillo obtenerla de dichos potenciales y, peor aún, suponiendo que se hubiese revisado la lista y resultara que para todos los potenciales que en ella aparecen, obtener la información es igual o más difícil que para el potencial original n, siguiendo este método, sería imposible saber si existe algún potencial equivalente a n no incluido en la lista para el cual fuese sencillo obtener la información buscada.

El anterior procedimiento es análogo al de buscar en un directorio telefónico el nombre de un propietario a partir de su número. Aún en este caso la lista es finita y se tiene la certeza de que, buscando secuencialmente puede recorrerse el directorio en su totalidad y, después de un período finito de tiempo, saber si el número corresponde o no a algún propietario y, en caso afirmativo encontrar el nombre buscado. A diferencia de este ejemplo, la lista de potenciales es en principio además de infinita, no numerable, ya que está generada por la clase de funciones conformes cuya cardinalidad para el caso bidimensional tiene esas dos características.

Sería entonces deseable contar con algún método que permitiera probar directamente si dos potenciales generalizados pertenecen o no a la misma clase de equivalencia, y en ese caso, poder encontrar explícitamente la función conforme que los relaciona. Esto permitirá probar si los potenciales cuya información *de antemano* se conoce, están o no relacionados con el potencial en cuestión. De suceder esto, el conocer la transformación conforme que los relaciona resolvería totalmente el problema.

El caso de la membrana con potencial generalizado σ es totalmente análogo al de Optica Geométrica con potencial n arriba discutido. Sin embargo, en Mecánica Clásica y Ondulatoria la situación es distinta, ya que como se mencionó al final del capítulo anterior, si se utilizan las condiciones (2.21), el potencial V está relacionado a través de la función conforme f con un potencial $\mathcal{V}$, si V y f satisfacen

$$V\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)|f'(w)|^2 = -\mathcal{E}, \tag{2.21b}$$

en ese caso, el potencial $\mathcal{V}$ está definido mediante

$$\mathcal{V}(w,\overline{w}) = -E|f'(w)|^2. \tag{2.21c}$$

---

[1] Como ya se mencionó la composición de funciones conformes es conforme.

Si se desea obtener información acerca del problema asociado al potencial V a través del potencial $\mathcal{V}$ hipersimétricamente relacionado, es necesario encontrar una función conforme f que satisfaga la condición $(2.21c)$, lo cual puede intentarse introduciendo funciones "de prueba" en dicha expresión. Con este método de ensayo y error, si después de un par de intentos no se obtiene la solución es imposible determinar si esto se debe a que la solución no existe, o bien, al hecho de que no se ha introducido la función de prueba correcta. Al igual que en los casos de Optica y membranas, este procedimiento podría evitarse en el caso de existir algún método que permitiera determinar, dado un potencial V, si existe una función conforme f que satisfaga la condición $(2.21b)$, y en ese caso, saber de qué función se trata. Esto permitiría calcular el potencial $\mathcal{V}$ a través de la expresión $(2.21c)$.

En el presente capítulo, que constituye la parte central de este trabajo,se enuncia y demuestra una serie de teoremas que proporcionan condiciones suficientes en Optica Geométrica y en las oscilaciones de la membrana para que dos potenciales estén hipersimétricamente relacionados a través de una transformación conforme y, en Mecánica Clásica y Ondulatoria, para que un potencial V satisfaga la condición $(2.21b)$.

En ambos casos, cuando se cumplen las condiciones suficientes puede además calcularse la función conforme f buscada.

3.2 Un teorema de Variable Compleja

Se analizará primero el caso de Mecánica que consiste como ya se indicó, en encontrar condiciones suficientes para que el potencial V satisfaga la expresión

$$V\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)|f'(w)|^2=-\mathcal{E}, \tag{2.21b}$$

y en calcular la función conforme f cuando esto suceda.

En otras palabras, se requiere *despejar* la función f en la expresión $(2.21b)$. Para lograrlo es conveniente cambiar a las variables $(z,\overline{z})$ y utilizar el Teorema de la Función Inversa[2],obteniendo

$$V(z,\overline{z})=-\mathcal{E}|F'(z)|^2$$

[2] Las hipótesis requeridas en el teorema (2.2) son las mismas que requiere el Teorema de la Función Inversa. cf; sección 2.2.

que equivale a

$$\sqrt{\frac{V(z,\bar{z})}{-\mathcal{E}}} = |F'(z)|. \tag{3.1}$$

Esta última expresión es una condición necesaria para el potencial V; el primer miembro debe ser igual al módulo de una función analítica que no se anula[3].

El problema se reduce ahora al de encontrar condiciones suficientes para que una función que toma valores en los Reales sea el módulo de una función analítica.

Por otro lado, las condiciones de analicidad son sumamente restrictivas y a ellas se debe un gran número de poderosos resultados en el Análisis de Variable Compleja, entre los que se encuentra el siguiente teorema:

Si u es una función con valores en los Reales con segundas derivadas continuas en cierta región $A \subset \mathrm{R}^2$ y satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = 0$$

entonces puede ser considerada como la parte real de una función analítica en A. La parte imaginaria puede calcularse y es única salvo una constante de integración[4]

Esto significa que basta con conocer *la mitad* de una función analítica para conocerla por completo —salvo una constante aditiva— , y sugiere que tal vez baste con conocer el módulo de una función analítica para conocer también el argumento, y una vez encontradas las condiciones para satisfacer la expresión (3.1) esto se traduciría en poder calcular a partir del módulo, la función F' probablemente hasta una constante de integración.

Estas ideas conducen a la formulación del siguiente teorema del cual, pese a su relativa sencillez, no pudo hallarse mención alguna en la literatura.

TEOREMA 3.1 *Sea A una región simplemente conexa de R^2, y R una función definida en A que toma valores reales positivos*

---

[3] F' es analítica porque F lo es, y en realidad existen *todas* las derivadas de F y son analíticas.(cf; Ahlfors [1953], p.120.). La condición de no anularse puede satisfacerse siempre que el potencial esté acotado (superior o inferiormente), ya que está definido hasta una constante aditiva

[4] Para la unicidad —salvo la constante de integración— es necesario que A sea simplemente conexa. Una consecuencia de este teorema es que u resulta infinitamente diferenciable en A. cf; Marsden [1973], p.140

$$R : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}.$$

Se supone además que $R \in C^1(A)$ y que existen las segundas derivadas en A.[5]

Si R satisface la condición

$$\nabla^2 \ln R = 0 \tag{3.2}$$

entonces existe una función g analítica en A, única salvo por una constante de fase tal que R es el módulo de g

$$R = |g|$$

y la función g está definida en A mediante

$$g(x,y) = R\, e^{\,i \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{R_{,\eta}(\xi,\eta)}{R} d\xi + \frac{R_{,\xi}(\xi,\eta)}{R} d\eta} \tag{3.3}$$

Demostración.

Se definen las derivadas parciales $\Theta_{,x}$ y $\Theta_{,y}$ como

$$\Theta_{,x}(x,y) \equiv -\frac{R_{,y}(x,y)}{R} = -(\ln R(x,y))_{,y} \tag{3.4a}$$

$$\Theta_{,y}(x,y) \equiv \frac{R_{,x}(x,y)}{R} = (\ln R(x,y))_{,x} \ , \tag{3.4b}$$

que resultan continuas debido a que R toma valores estrictamente positivos y es continua de clase $C^1(A)$. La condición (3.2) implica que las derivadas cruzadas conmutan, ya que

$$0 = (\ln R)_{,xx} + (\ln R)_{,yy} = \Theta_{,yx} - \Theta_{,xy} \, .$$

---

[5] Estas son las mismas condiciones suficientes de continuidad que generalmente se utilizan para obtener $\mathbb{R}^2$ -diferenciabilidad, y pueden ser relajadas en la misma proporción.

Este hecho permite integrar Θ en A, y el valor de la integral es único (salvo por una constante aditiva) en todo A, ya que ésta es una región simplemente conexa.

$$\Theta(x,y) - \Theta(x_o,y_o) = \int_{(x_o,y_o)}^{(x,y)} \Theta_{,\xi}(\xi,\eta)d\xi + \Theta_{,\eta}(\xi,\eta)d\eta$$

$$= \int_{(x_o,y_o)}^{(x,y)} -\frac{R_{,\eta}(\xi,\eta)}{R}d\xi + \frac{R_{,\xi}(\xi,\eta)}{R}d\eta. \qquad (3.5)$$

Definiendo g como

$$g(x,y) = R(x,y)\ e^{i\Theta(x,y)}, \qquad (3.6)$$

resulta que las relaciones (3.4) son las condiciones de Cauchy-Riemann[6].

De la expresión (3.6) se obtienen las partes real e imaginaria de g

$$\mathrm{Re}\, g = R\cos\Theta$$

$$\mathrm{Im}\, g = R\,\mathrm{sen}\,\Theta$$

que son continuas de clase $C^1(A)$ porque R y Θ lo son.

Esto permite utilizar el teorema 2.1 y concluir que g es analítica en A, mientras que de la definición (3.6) se tiene

$$R = |g|,$$

y la expresión (3.3) se obtiene sustituyendo (3.5) en (3.6).

Para probar la unicidad basta suponer que existe otra función analítica $\tilde{g}$ en A con módulo R y argumento $\tilde{\Theta}$; $\tilde{g} = Re^{i\tilde{\Theta}}$.

Sea

$$\Phi \equiv \tilde{\Theta} - \Theta$$

[6] Esto se muestra en el apéndice 5 para cualquier función representada en forma polar.

que está bien definida porque $\tilde{\Theta}$ y Θ lo estan, entonces

$$\Phi(x,y) - \Phi(x_o,y_o) = \int_{(x_o,y_o)}^{(x,y)} \Phi_{,\xi}\, d\xi + \Phi_{,\eta}\, d\eta. \tag{3.7}$$

De las condiciones de Cauchy-Riemann (3.4) se deduce que las derivadas parciales de Θ y $\tilde{\Theta}$ son iguales, ya que los módulos de g y $\tilde{g}$ coinciden.

Consecuentemente las derivadas parciales de Φ se anulan y el segundo miembro de (3.7) es cero, i.e.

$$\Phi(x,y) = \Phi(x_o,y_o) \equiv \Phi_o,$$

y

$$\tilde{g} = Re^{i(\Theta+\Phi_o)}$$

que difiere de g unicamente por la constante de fase Φ_o.

□

Si la función R está expresada en coordenadas distintas a las cartesianas (x,y), es necesario efectuar el cambio de variable correspondiente en la definición (3.5). En el apéndice 6 se obtiene la expresión análoga a (3.3) para g en coordenadas generalizadas.

Introduciendo las variables $(z,\overline{z})$ en dicha expresión se obtiene[7]

$$g(z) = R(z,\overline{z})\, e^{\int_{(z_o,\overline{z}_o)}^{(z,\overline{z})} \frac{R_{,\xi}}{R} d\xi - \frac{R_{,\overline{\xi}}}{R} d\overline{\xi}}. \tag{3.8}$$

Si g es la derivada de una función conforme F —como en la relación (3.1)—, puede obtenerse una expresión para ésta integrando g.

COROLARIO 3.1 *Si R satisface las condiciones del teorema, existe una función F, conforme en A definida como*

[7] g es por construcción analítica y depende solamente de z o $\overline{z}$. Para determinar de cual depende basta derivar la expresión (3.8) respecto a $\overline{z}$, obteniendo $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = 0$.

$$F(x,y) = \int_{(x_o,y_o)}^{(x,y)} R(\tilde{x},\tilde{y})\, e^{\, i \int_{(\tilde{x}_o,\tilde{y}_o)}^{(\tilde{x},\tilde{y})} -\frac{R_{,\eta}(\xi,\eta)}{R} d\xi + \frac{R_{,\xi}(\xi,\eta)}{R} d\eta} (d\tilde{x} + i d\tilde{y}) \qquad (3.9)$$

tal que

$$R = |F'|.$$

F es única salvo por una constante de fase y otra aditiva de integración.

Demostración

Como g es analítica en A, puede integrarse en forma compleja independientemente de la trayectoria, permitiendo definir F como

$$F(x,y) - F(x_o,y_o) = \int_{(x_o,y_o)}^{(x,y)} g(\tilde{x},\tilde{y})(d\tilde{x} + i d\tilde{y}) \qquad (3.10)$$

que es analítica en A y además

$$F' = g.$$

F es única en A salvo por la constante de integración, pues se trata de una región simplemente conexa[8].

Sustituyendo la expresión (3.3) para g en (3.10) se obtiene (3.9) y

$$R = |F'|.$$

La unicidad se deriva de la de g salvo la constante de fase y de la de F salvo la constante aditiva de integración .

Como R no se anula en A, $|F'|$ tampoco, lo que permite utilizar el teorema 2.2 para mostrar que F es conforme en A.

□

---

[8] Esta es la versión compleja del Teorema Fundamental del Cálculo. cf; Marsden [1973], p.93.

Una vez mostrado este teorema, se procede a analizar los problemas planteados en la primera sección del presente capítulo.

3.3 Condiciones que permiten relacionar hipersimétricamente, potenciales dados en Mecánica Clásica y Ondulatoria

Al principio de la sección anterior se mostró que la condición (2.21*b*) para el potencial V

$$V\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)|f'(w)|^2=-\mathcal{E} \qquad (2.21b)$$

es equivalente a la expresión

$$\sqrt{\frac{V(z,\overline{z})}{-\mathcal{E}}}=|F'(z)|. \qquad (3.1)$$

Haciendo la identificación

$$R=\sqrt{\frac{V}{-\mathcal{E}}}$$

se obtiene, para la condición (3.2)

$$\nabla^2\ln\left(\frac{V}{-\mathcal{E}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\nabla^2\ln V-\frac{1}{2}\nabla^2\ln\mathcal{E}=0,$$

equivalente a

$$\nabla^2\ln V=0,$$

y para la definición (3.5) del argumento Θ

$$\begin{aligned}\Theta(x,y)-\Theta(x_o,y_o)&=\int_{(x_o,y_o)}^{(x,y)}-\ln\left(\frac{V}{-\mathcal{E}}\right)^{\frac{1}{2}}{}_{,\eta}\,d\xi+\ln\left(\frac{V}{-\mathcal{E}}\right)^{\frac{1}{2}}{}_{,\xi}\,d\eta\\&=\frac{1}{2}\int_{(x_o,y_o)}^{(x,y)}-[\ln V]_{,\eta}\,d\xi+[\ln V]_{,\xi}\,d\eta\\&=\frac{1}{2}\int_{(x_o,y_o)}^{(x,y)}-\frac{V_{,\eta}}{V}d\xi+\frac{V_{,\xi}}{V}d\eta.\end{aligned} \qquad (3.11)$$

Esto permite enunciar el teorema 3.1 en términos del potencial V independiente de la velocidad.

TEOREMA 3.2 *Sea V un potencial bidimensional definido en una región simplemente conexa A que toma ya sea puros valores estrictamente positivos o puros valores estrictamente negativos*[9]*. Si V satisface la condición*

$$\nabla^2 \ln V = 0 \tag{3.12}$$

en la región A, entonces está hipersimétricamente relacionado con el potencial $\mathcal{V}$ a través de la transformación conforme F definida como

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \left[\frac{V(z',\bar{z}')}{-\mathcal{E}}\right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\int_{(z_0',\bar{z}_0')}^{(z',\bar{z}')} \frac{V_{,\xi}}{V}d\xi - \frac{V_{,\bar{\xi}}}{V}d\bar{\xi}} dz'. \tag{3.13}$$

El potencial $\mathcal{V}$ es

$$\mathcal{V} = -E|f'|^2 \tag{2.21a}$$

donde f es la inversa de la transformación F y los parámetros E y $\mathcal{E}$ son las energías asociadas a los potenciales V y $\mathcal{V}$ respectivamente.

Demostración

Si V toma valores estrictamente positivos se restringe el parámetro $\mathcal{E}$ a valores negativos y viceversa; si V toma valores negativos se restringe $\mathcal{E}$ a valores positivos estrictos. En ambos casos

$$\frac{V}{-\mathcal{E}} > 0,$$

y con la identificación

$$R = \left(\frac{V}{-\mathcal{E}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

R toma valores estrictamente positivos, lo que permite aplicar directamente el teorema 3.1 y su corolario.

---

[9] V debe ser continua de clase $C^1(A)$ y deben existir las segundas derivadas.

La expresión (3.13) se obtiene de (3.10) y (3.6) utilizando para Θ la definición (3.11) y las coordenadas $(z, \bar{z})$[10]

□

La condición de tomar valores de un solo signo restringe la clase de potenciales susceptibles a la aplicación del teorema. Los potenciales acotados —de gran interés en la Física— la satisfacen.

Si V es un potencial acotado inferiormente con cota C, puede redefinirse mediante

$$V' = V + \alpha$$

donde la constante α es tal que $\alpha > -C$, pues los potenciales están definidos hasta una constante aditiva.

Como $V \geq C$ en A entonces

$$V' = V + \alpha \geq C + \alpha > 0$$

en A.

Análogamente, si V es acotado superiormente puede redefinirse de manera que tome únicamente valores negativos.

Si el potencial es no acotado pero satisface las condiciones de continuidad, el problema original puede separarse en dos restringiendo el dominio a las regiones asociadas con valores positivos y negativos de la energía.

Si V_1 y V_2 satisfacen la condición (3.12), el producto $V = V_1 V_2$ también la satisface. Este hecho es útil para generar potenciales que tengan otro asociado según las relaciones (2.21b) y (2.21c).

3.4 Condiciones que permiten relacionar hipersimétricamente, potenciales generalizados en Optica Geométrica y en membranas

En este caso, dados los índices de refracción n y $\tilde{n}$ o las densidades superficiales de masa σ y $\tilde{\sigma}$ se desea encontrar condiciones suficientes para que

[10] Para pasar a estas coordenadas basta comparar con la expresión (3.8).

estén hipersimétricamente relacionados a través de las ecuaciones

$$\tilde{n}(w,\overline{w}) = n\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)|f'(w)| \tag{2.10a}$$

$$\tilde{\sigma}(w,\overline{w}) = \sigma\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)|f'(w)|^2 \tag{2.38}$$

donde f es una función conforme.

A diferencia de como ocurre en Mecánica, si se intenta despejar la función f introduciendo las variables $(z,\overline{z})$ donde $z = f(w)$, se obtienen nuevamente las mismas ecuaciones, salvo que $\tilde{n}$ y n así como $\tilde{\sigma}$ y σ intercambian papeles y aparece F en lugar de f.

Hasta ahora no se ha encontrado un método que permita determinar en general si dos potenciales generalizados dados están o no hipersimétricamente relacionados según las ecuaciones (2.10a) y (2.38), sin embargo se cuenta con condiciones necesarias y suficientes que permiten determinar si los potenciales pertenecen o no a una familia numerable de clases de equivalencia, y si son miembros de la misma clase, en algunos casos puede determinarse si también pertenecen a la misma clase de equivalencia hipersimétrica y cuál es la función conforme que los relaciona.

Dicho resultado es consecuencia de la siguiente proposición.

LEMA 3.1 *Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ funciones dos veces diferenciables definidas en una región $A \subset \mathrm{R}^2$ que toman valores reales estrictamente positivos.*

Si en una cierta región $B \subset A$ están relacionados mediante la expresión

$$\mathfrak{g}(w,\overline{w}) = |f'(w)|^2\mathfrak{h}\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right), \tag{3.14}$$

donde f es una funciómn conforme, entonces en la misma región se verifica la siguiente relación

$$\nabla^2_{(w,\overline{w})}\ln\mathfrak{g}(w,\overline{w}) = |f'(w)|^2\nabla^2_{(z,\overline{z})}\ln\mathfrak{h}(z,\overline{z})\Big|_{\substack{z=f(w)\\ \overline{z}=\overline{f}(\overline{w})}}. \tag{3.15}$$

Demostración

Aplicando el operador $\nabla^2_{(w,\overline{w})}\ln$ a la expresión (3.14) y utilizando las propiedades del logaritmo y del módulo complejo junto con la linealidad del operador laplaciano se obtiene

$$\begin{aligned}\nabla^2_{(w,\overline{w})}\ln\mathfrak{g}(w,\overline{w}) = \nabla^2_{(w,\overline{w})}\ln f(w) + \nabla^2_{(w,\overline{w})}\ln\overline{f}(\overline{w})&\\ + \nabla^2_{(w,\overline{w})}\ln\mathfrak{h}\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right).&\end{aligned} \tag{3.16}$$

De la expresión (2.28) para el laplaciano en las coordenadas $(w,\overline{w})$ se deduce que

$$\nabla^2_{(w,\overline{w})} \ln f(w) = 4\frac{\partial^2}{\partial w \partial \overline{w}} \ln f(w) = 0,$$

$$\nabla^2_{(w,\overline{w})} \ln \overline{f}(\overline{w}) = 4\frac{\partial^2}{\partial w \partial \overline{w}} \ln \overline{f}(\overline{w}) = 0,$$

y este hecho aunado a la regla de la cadena transforma la ecuación (3.16) en

$$4\frac{\partial^2}{\partial w \partial \overline{w}} \ln \mathfrak{g}(w,\overline{w}) = f'(w)\overline{f}'(\overline{w}) 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \ln \mathfrak{h}(z,\overline{z}) \Big|_{\substack{z=f(w)\\ \overline{z}=\overline{f}(\overline{w})}},$$

pues f y $\overline{f}$ son analíticas y por lo tanto independientes de $\overline{w}$ y w respectivamente.

Esta última relación es equivalente a (3.15) a través de las propiedades del módulo complejo y de la expresión (2.28) para el operador laplaciano.

□

Si las funciones $\nabla^2_{(w,\overline{w})} \ln \mathfrak{g}(w,\overline{w})$ y $\nabla^2_{(z,\overline{z})} \ln \mathfrak{h}(z,\overline{z})$ son a su vez dos veces diferenciables y toman valores positivos en cierta región, la expresión (3.15) es de la forma (3.14) y puede aplicarse nuevamente el lema.

Este procedimiento puede iterarse, y la condición (3.14) implica

$$\left(\nabla^2_{(w,\overline{w})} \ln\right)^n \mathfrak{g}(w,\overline{w}) = |f'(w)|^2 \left[\left(\nabla^2_{(z,\overline{z})} \ln\right)^n \mathfrak{h}(z,\overline{z})\right]_{\substack{z=f(w)\\ \overline{z}=\overline{f}(\overline{w})}} \tag{3.17}$$

siempre y cuando las expresiones

$$\left(\nabla^2_{(w,\overline{w})} \ln\right)^n \mathfrak{g}(w,\overline{w}), \qquad \left(\nabla^2_{(z,\overline{z})} \ln\right)^n \mathfrak{h}(z,\overline{z})$$

estén bien definidas, donde

$$\left(\nabla^2 \ln\right)^n \equiv \underbrace{\nabla^2 \ln \cdots \nabla^2 \ln \nabla^2 \ln}_{n \text{ veces}}$$

y $\left(\nabla^2 \ln\right)^0$ es el operador identidad.

Para poder enunciar el resultado principal de esta sección de manera precisa es conveniente introducir algunas definiciones.

Sea $\mathcal{H}_n(A)$ la clase de funciones g definidas en la región $A \subset \mathbb{R}^2$ con valores reales estrictamente positivos tales que la función

$$\left(\nabla^2 \ln\right)^n g \tag{3.18}$$

esté bien definida y además

$$\left(\nabla^2 \ln\right)^n g = 0 \tag{3.19}$$

en A donde n es un número natural.

Si se cumple la condición (3.19) para n, entonces la expresión (3.18) ya no estará definida para $n+1$ y tampoco entonces para ningún $m > n$. Esto implica que si $m \neq n$, las clases $\mathcal{H}_m(A)$ y $\mathcal{H}_n(A)$ son ajenas,por lo que el conjunto de clases $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una partición de la familia $\mathfrak{F}$ definida como

$$\mathfrak{F}(A) \equiv \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n(A),$$

y las $\mathcal{H}$ son clases de equivalencia.

Sin embargo como se verá más adelante, estas *no* son las clases generadas por la relación de equivalencia de hipersimetría[11].

TEOREMA 3.3 *Sean σ, $\tilde{\sigma}$ y n, $\tilde{n}$ densidades superficiales de masa de dos membranas e índices de refracción para dos medios respectivamente, todos ellos miembros de la familia $\mathfrak{F}(A)$.*

Si σ y $\tilde{\sigma}$ están hipersimétricamente relacionados según la expresión

$$\tilde{\sigma}(w,\overline{w}) = \sigma\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)|f'(w)|^2 \tag{2.38}$$

entonces ambos pertenecen a la misma clase $\mathcal{H}_n(A)$ para algún n en los Naturales.

En cada clase $\mathcal{H}_n(A)$ existe al menos un potencial σ_{on} con la propiedad

$$\left(\nabla^2 \ln\right)^{n-1} \sigma_{on} = 1. \tag{3.20}$$

---

[11] Sin embargo estas están contenidas en las clases $\mathcal{H}_n$

Si σ y $\tilde{\sigma}$ están relacionados cada uno con el potencial σ_{on} según la expresión

$$\sigma_i(w,\overline{w}) = \sigma_{on}\left(f_i(w),\overline{f}_i(\overline{w})\right)|f_i'(w)|^2 \qquad i = 1,2. \tag{3.21}$$

con $\sigma_1 \equiv \tilde{\sigma}$ y $\sigma_2 \equiv \sigma$, entonces las expresiones para f_1 y f_2 son

$$f_i(w) = \int_{w_o}^{w}\left[\left(\nabla^2 \ln\right)^{n-1}\sigma_i(w',\overline{w}')\right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\int_{(w_o',\overline{w}_o')}^{(w',\overline{w}')}\frac{(\nabla^2 \ln)^{n-1}\sigma_{i,\xi}}{(\nabla^2 \ln)^{n-1}\sigma_i}d\xi-\frac{(\nabla^2 \ln)^{n-1}\sigma_{i,\overline{\xi}}}{(\nabla^2 \ln)^{n-1}\sigma_i}d\overline{\xi}} dw' \qquad i = 1,2. \tag{3.22}$$

y la función conforme f que relaciona $\tilde{\sigma}$ con σ es

$$f = F_2 \circ f_1 \tag{3.23a}$$

donde

$$F_2 = f_2^{-1}. \tag{3.23b}$$

Análogamente para los índices de refracción $\tilde{n}$ y n relacionados según la expresión

$$\tilde{n}(w,\overline{w}) = n\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)|f'(w)|. \tag{2.10a}$$

En cada clase $\mathcal{H}_n(A)$ existe al menos un potencial n_{om} tal que

$$\left(\nabla^2 \ln\right)^{m-1} n_{om}^2 = 1. \tag{3.24}$$

Si n y $\tilde{n}$ están relacionados cada uno con n_{om} según

$$n_i(w,\overline{w}) = n_{om}\left(f_i(w),\overline{f}_i(\overline{w})\right)|f_i'(w)| \qquad i = 1,2. \tag{3.25}$$

donde $n_1 = \tilde{n}$ y $n_2 = n$, entonces f_1 y f_2 serán

$$f_i(w) = \int_{w_o}^{w}\left[\left(\nabla^2 \ln\right)^{m-1} {n^2}_i(w',\overline{w}')\right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\int_{(w_o',\overline{w}_o')}^{(w',\overline{w}')}\frac{(\nabla^2 \ln)^{m-1}{n^2}_{i,\xi}}{(\nabla^2 \ln)^{m-1}{n^2}_i}d\xi-\frac{(\nabla^2 \ln)^{m-1}{n^2}_{i,\overline{\xi}}}{(\nabla^2 \ln)^{m-1}{n^2}_i}d\overline{\xi}} dw' \qquad i = 1,2. \tag{3.26}$$

y f está dado por las expresiones (3.23).

En ambos casos, la función f es única salvo por una rotación y una traslación, es decir, si g es también solución a las ecuaciones (2.10a) y (2.38) entoces

$$f(w) = g\left(e^{i\theta_0} w + c_0\right) \tag{3.27}$$

donde θ_0 y c_0 son constantes con θ_0 real y c_0 compleja.

Este teorema proporciona únicamente condiciones *necesarias* para que dos potenciales generalizados de la familia $\mathfrak{F}$ estén hipersimétricamente relacionados según las condiciones (2.10a) o (2.38). En el siguiente capítulo se dan contraejemplos que muestran que la condición de pertenecer a la misma clase $\mathcal{H}_n$ no es suficiente.

Si alguno de los dos potenciales satisface la condición (3.21) o (3.24), después de haber encontrado la función f puede construirse la forma general para ésta utilizando la expresión (3.27) y, sustituirse directamente para probar si se cumplen las relaciones (2.10a) o (2.38). Si no existen constantes θ_0 y c_0 que permitan satisfacer las relaciones, la unicidad de la forma general de f asegura que éstas no se satisfacen para ninguna función conforme y los potenciales no están hipersimétricamente relacionados.

Por otro lado, si los dos potenciales generalizados pertenecen a la misma clase $\mathcal{H}_n$ pero uno de ellos no satisface las condiciones (3.21) o (3.25), el teorema no proporciona información suficiente para determinar si los potenciales satisfacen o no las relaciones (2.10a) o (2.38).

Demostración.

Sean σ y $\tilde{\sigma}$ densidades de masa de dos membranas pertenecientes a la familia $\mathfrak{F}$ con $\sigma \in \mathcal{H}_n(A)$ y $\tilde{\sigma} \in \mathcal{H}_m(A)$ relacionadas mediante la expresión

$$\tilde{\sigma}(w, \bar{w}) = |f'(w)|^2 \sigma\left(f(w), \bar{f}(\bar{w})\right).$$

Del lema 3.1 se tiene

$$\left(\nabla^2_{(w,\bar{w})} \ln\right)^k \tilde{\sigma}(w, \bar{w}) = |f'(w)|^2 \left[\left(\nabla^2_{(z,\bar{z})} \ln\right)^k \sigma(z, \bar{z})\right]_{\substack{z=f(w)\\ \bar{z}=\bar{f}(\bar{w})}}. \tag{3.28}$$

Si $n < m$ la expresión (3.28) es válida para $k = n$ y como $\sigma \in \mathcal{H}_n(A)$, el miembro derecho es cero, lo que implica que $\tilde{\sigma} \in \mathcal{H}_n(A)$. Esto contradice el que las clases sean ajenas.

Análogamente, si $n > m$ la expresión es válida para $k = m$ y el miembro izquierdo se anula.

Como el factor conforme $|f'(w)|^2$ no se anula en A, $\sigma \in \mathcal{H}_m(A)$ que es de nuevo una contradicción. Por lo tanto, $n = m$ y los dos potenciales pertenecen a la misma clase $\mathcal{H}_n(A)$.

Para probar la existencia de los potenciales σ_{on} se utiliza la siguiente proposición.

Para cualquier natural n y cualquier función ρ continua de clase $C^1(A)$ existe ψ, solución de la ecuación[12]

$$\left(\nabla^2 \ln\right)^{n-1} \psi(x,y) = \rho(x,y). \tag{3.29}$$

Si $n = 1$ la solución es $\psi = \rho$.

Sea φ la solución de la ecuación de Poisson[13]

$$\nabla^2 \varphi(x,y) = \rho(x,y),$$

entonces $\Phi = e^{\varphi}$ es solución de la ecuación

$$\nabla^2 \ln \Phi(x,y) = \rho(x,y),$$

y es de clase $C^1(A)$ porque φ lo es.

Si $n = k$ y ψ es solución de la ecuación

$$\left(\nabla^2 \ln\right)^{k-2} \psi(x,y) = \Phi(x,y),$$

que existe por hipótesis de inducción, se tiene

$$\left(\nabla^2 \ln\right)^{k-1} \psi(x,y) = \nabla^2 \ln \Phi(x,y) = \rho(x,y).$$

[12] La solución ψ es única con condiciones de Dirichlet o Neumann en una frontera cerrada. Si la frontera es abierta deben especificarse las condiciones en el infinito.

[13] Se trata de una ecuación elíptica, cuya solución existe y es única si se utilizan las condiciones de frontera del pie de página anterior. cf; Morse y Feshbach [1953], p.690,703.

La existencia de las funciones σ_{on} para todo n natural se deriva de la expresión (3.29) haciendo $\rho(x,y) \equiv 1$, y la condición (3.20) implica que $\sigma_{on} \in \mathcal{H}_n(A)$.

Si σ_i está relacionado con σ_{on} según la expresión

$$\sigma_i(w,\overline{w}) = |f_i'(w)|^2 \sigma_{on}\left(f_i(w), \overline{f}_i(\overline{w})\right), \qquad i = 1,2. \tag{3.21}$$

el lema 3.1 implica

$$\left(\nabla^2_{(w,\overline{w})} \ln\right)^{n-1} \sigma_i(w,\overline{w}) = |f'(w)|^2 \left[\left(\nabla^2_{(z,\overline{z})} \ln\right)^{n-1} \sigma_{on}(z,\overline{z})\right]_{\substack{z=f(w)\\ \overline{z}=\overline{f}(\overline{w})}}, \qquad i = 1,2. \tag{3.30}$$

y haciendo uso de la condición (3.20) se obtiene

$$|f_i'(w)| = \left[\left(\nabla^2_{(w,\overline{w})} \ln\right)^{n-1} \sigma_i(w,\overline{w})\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad i = 1.2. \tag{3.31}$$

El segundo miembro de esta expresión es positivo y además como $\sigma_i \in \mathcal{H}_n(A)$

$$\nabla^2 \ln \left[\left(\nabla^2_{(w,\overline{w})} \ln\right)^{n-1} \sigma_i(w,\overline{w})\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\nabla^2 \ln\right)^n \sigma_i(w,\overline{w}) = 0 \qquad i = 1,2.$$

en A, lo que permite aplicar el teorema 3.1 junto con el corolario para $R = |f_i'|$, obteniendo[14]

$$f_i(w) = \int_{w_o}^{w} \left[\left(\nabla^2 \ln\right)^{n-1} \sigma_i(w',\overline{w}')\right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\int_{(w_o',\overline{w}_o')}^{(w',\overline{w}')} \frac{(\nabla^2 \ln)^{n-1}\sigma_{i,\xi}}{(\nabla^2 \ln)^{n-1}\sigma_i} d\xi - \frac{(\nabla^2 \ln)^{n-1}\sigma_{i,\overline{\xi}}}{(\nabla^2 \ln)^{n-1}\sigma_i} d\overline{\xi}} dw'$$

$$i = 1,2. \tag{3.22}$$

Para los índices de refracción n y $\tilde{n}$ miembros de la familia $\mathfrak{F}$, elevando al cuadrado la relación (2.10a) se obtiene

$$\tilde{n}^2 2(w,\overline{w}) = |f'(w)|^2 n^2\left(f(w), \overline{f}(\overline{w})\right). \tag{3.32}$$

[14] No es necesario sustituir la expresión (3.30) para R, basta comparar ésta con la relación (3.1) para V. La relación (3.22) se obtiene directamente de (3.13) identificando f_i con F, y $-\frac{V}{\xi}$ con $\left(\nabla^2 \ln\right)^{n-1}\sigma_i$.

Esta expresión es formalmente igual a (2.38) si se identifican n^2 con σ y $\tilde{n}^2$ con $\tilde{\sigma}$. La condición (2.10a) implica entonces que n^2 y $\tilde{n}^2$ pertenecen a la misma clase $\mathcal{H}_m(A)$.

Como
$$\left(\nabla^2 \ln\right)^m n^2 = 2\left(\nabla^2 \ln\right)^m n,$$
n^2 pertenece a la clase $\mathcal{H}_m(A)$ si y solo si n pertenece, y se tiene entonces que la relación (2.10a) implica que n y $\tilde{n}$ pertenecen a la misma clase $\mathcal{H}_m(A)$.

Si se define $n^2_{om} \equiv \sigma_{om}$ se tiene n_{om} que satisface (3.24) para todo m natural.

Sean n_i relacionados con n_{om} a través de la expresión
$$n_i(w,\overline{w}) = |f_i'(w)|\, n_{om}\left(f_i(w), \overline{f}_i(\overline{w})\right) \qquad i = 1,2. \tag{3.25}$$
que es formalmente igual a (3.21) si se identifican n_i^2 con σ_i. Esto implica la validez de la relación (3.30) para n_i^2 y n^2_{om} y, haciendo uso de la propiedad (3.24) resulta que
$$|f_i'(w)| = \left[\left(\nabla^2_{(w,\overline{w})} \ln\right)^{m-1} n_i^2(w,\overline{w})\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad i = 1.2.$$

Identificando esta expresión con (3.31) se obtiene, de (3.22)
$$f_i(w) = \int_{w_o}^{w} \left[\left(\nabla^2 \ln\right)^{m-1} n^2{}_i(w',\overline{w}')\right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\int_{(w_o',\overline{w}_o')}^{(w',\overline{w}')} \frac{\left(\nabla^2 \ln\right)^{m-1} n^2{}_{i,\xi}}{\left(\nabla^2 \ln\right)^{m-1} n^2{}_i} d\xi - \frac{\left(\nabla^2 \ln\right)^{m-1} n^2{}_{i,\overline{\xi}}}{\left(\nabla^2 \ln\right)^{m-1} n^2{}_i} d\overline{\xi}}\, dw'$$
$$i = 1,2. \tag{3.26}$$

Antes de obtener las relaciones (3.23) es conveniente mostrar la unicidad.

Sean f y g dos funciones conformes que satisfacen, para σ y $\tilde{\sigma}$ la expresión (2.38), que utilizando g y las variables $z = g(w)$ aparece como[15]
$$\sigma(z,\overline{z}) = |(g^{-1})'(z)|^2 \tilde{\sigma}\left(g^{-1}(z), \overline{g}^{-1}(\overline{z})\right).$$

[15] Se ha usado el Teorema de la Función Inversa para expresar $g'(w)$ en términos de z.

Sustituyendo en la ecuación (3.38) para f se obtiene

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(w,\overline{w}) &= \mid f'(w) \mid^2 \mid (g^{-1})'(f(w)) \mid^2 \tilde{\sigma}\left(g^{-1}(f(w)), \overline{g}^{-1}\left(\overline{f}(\overline{w})\right)\right) \\ &= \left| \left(g^{-1}\circ f\right)'(w) \right|^2 \tilde{\sigma}\left(g^{-1}\circ f(w), \overline{g}^{-1}\circ \overline{f}(\overline{w})\right)\end{aligned}$$

como $\tilde{\sigma}$ es arbitraria, haciendo $\tilde{\sigma} \equiv 1$ resulta que

$$\left| \left(g^{-1}\circ f\right)'(w) \right| = 1.$$

Aplicando el teorema para $g^{-1}\circ f$ se obtiene

$$g^{-1}\circ f(w) = \int_{w_o}^{w} 1\cdot e^{i\int_{(x_o,y_o)}^{(x,y)} -0d\xi+0d\eta} dw' = \int_{w_o}^{w} e^{i\theta_o} dw' = e^{i\theta_o} w + c_o$$

de donde

$$f(w) = g\left(e^{i\theta_o} w + c_o\right). \tag{3.27}$$

Expresando ahora la ecuación (3.21) para $i = 2$ en coordenadas $z = f_2(w)$;

$$\sigma_{on}(z,\overline{z}) = |F_2'(z)|^2 \sigma_2\left(F_2(z), \overline{F}_2(\overline{z})\right),$$

donde $F_2 = f_2^{-1}$. Sustituyendo en (3.21) para $i = 1$ se obtiene

$$\sigma_1(w,\overline{w}) = \mid (F_2\circ f_1)'(w) \mid^2 \sigma_2\left((F_2\circ f_1)(w), \overline{(F_2\circ f_1)}(\overline{w})\right)$$

que es la ecuación (2.38), y

$$f = F_2\circ f_1 \tag{3.23a}$$

resulta de utilizar (3.27) y la unicidad.

Las relaciones (3.23) y (3.27) también son válidas para $\tilde{n}$ y n debido a la expresión (3.32).

□

El siguiente capítulo está destinado a ejemplos en Mecánica, Optica y membranas, con el objeto principal de ilustrar las distintas posibilidades de aplicación, así como las limitaciones de los teoremas aquí mostrados.

4

Obtención de Hipersimetrías en Problemas Esfecíficos

4.1 El potencial central

Si el potencial depende únicamente de la distancia al origen r, la fuerza está dirigida radialmente y se dice que tanto ésta como el potencial son **centrales**.

El problema del potencial central resulta de gran interés en este trabajo ya que, puede mostrarse que en ese caso hay conservación de momento angular[1] y esto implica el que, las trayectorias estén restringidas a un plano cuya normal es paralela al *vector* momento angular. Una vez determinada esta dirección, el problema se reduce a uno equivalente en Mecánica bidimensional. Este hecho permite aplicar los resultados obtenidos a problemas originalmente tridimensionales.

Cuando $V = V(r)$, la condición (3.12)

$$\nabla^2 \ln V = 0,$$

hipótesis del teorema 3.2, se transforma en

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\ln V(r)\right) = 0.$$

La solución general de esta ecuación es

$$V(r) = ar^b \tag{4.1.1}$$

con a y b constantes reales.

La relación $r^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}$ permite expresar el potencial central (4.1.1) en las variables $(z, \bar{z})$, obteniendo

$$V(z, \bar{z}) = a(z\bar{z})^{\frac{b}{2}}.$$

Del teorema 3.2 se tiene para la derivada de la transformación conforme

$$F'(z) = \left[\frac{V}{-\mathcal{E}}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2}\int \frac{V_{,z'}}{V}dz' - \frac{V_{,\bar{z}'}}{V}d\bar{z}'\right\}.$$

[1] Goldstein [1980], p.72.

En particular

$$\frac{V_{,z}}{V}=\frac{a\frac{b}{2}(z\bar{z})^{\frac{b}{2}-1}\bar{z}}{a(z\bar{z})^{\frac{b}{2}}}=\frac{b}{2}\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{b}{2z},$$

y en forma análoga

$$\frac{V_{,\bar{z}}}{V}=\frac{b}{2\bar{z}}.$$

sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned}
F'(z) &= \left[\frac{a(z\bar{z})^{\frac{b}{2}}}{-\mathcal{E}}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2}\frac{b}{2}\int \frac{dz'}{z'}-\frac{d\bar{z}'}{\bar{z}'}\right\} \\
&= \left(\frac{a}{-\mathcal{E}}\right)^{\frac{1}{2}} (z\bar{z})^{\frac{b}{4}} \exp\left\{\frac{b}{4}\ln\frac{z}{\bar{z}}\right\} \\
&= \left(\frac{a}{-\mathcal{E}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{z\bar{z}z}{\bar{z}}\right)^{\frac{b}{4}} \\
&= (-a/\mathcal{E})^{\frac{1}{2}} z^{\frac{b}{2}} \qquad (4.1.2)
\end{aligned}$$

Integrando esta expresión se concluye que[2]

$$F(z)=\begin{cases} (-a/\mathcal{E})^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{b+2}\right)z^{\frac{b}{2}+1} & b\neq -2 \\ (-a/\mathcal{E})^{\frac{1}{2}}\ln z & b=-2. \end{cases} \qquad (4.1.3)$$

Para obtener el potencial $\mathcal{V}$ hipersimétricamente relacionado con V es necesario calcular la función f (inversa de F).

Sea $w=F(z)$.

Si $b\neq -2$ entoces

$$w=(-a/\mathcal{E})^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{b+2}\right)z^{\frac{b+2}{2}},$$

$$z=(-\mathcal{E}/a)^{\frac{1}{b+2}}\left[\left(\frac{b+2}{2}\right)w\right]^{\frac{2}{b+2}}.$$

[2] En lo sucesivo se supondrá que en cada caso el dominio se ajusta para ser simplemente conexo. Para el caso específico de z^n y $\ln z$ se efectúan **cortes rama** para asegurar que la integral es univaluada.

Para $b = -2$

$$w = (-a/\mathcal{E})^{\frac{1}{2}} \ln z$$
$$z = e^{(-\mathcal{E}/a)^{\frac{1}{2}} w},$$

es decir

$$f(w) = \begin{cases} (-\mathcal{E}/a)^{\frac{1}{b+2}} \left[\left(\frac{b+2}{2}\right) w\right]^{\frac{2}{b+2}} & b \neq -2 \\ e^{(-\mathcal{E}/a)^{\frac{1}{2}} w} & b = -2, \end{cases} \tag{4.1.4}$$

de donde[3]

$$f'(w) = \begin{cases} (-\mathcal{E}/a)^{\frac{1}{b+2}} \left(\frac{b+2}{2}\right)^{\frac{2}{b+2}} w^{\frac{-b}{b+2}} & b \neq -2 \\ (-\mathcal{E}/a)^{\frac{1}{2}} e^{(-\mathcal{E}/a)^{\frac{1}{2}} w} & b = -2, \end{cases}$$

y

$$|f'(w)|^2 = \begin{cases} (-\mathcal{E}/a)^{\frac{2}{b+2}} \left(\frac{b+2}{2}\right)^{\frac{4}{b+2}} |w|^{\frac{-2b}{b+2}} & b \neq -2 \\ (-\mathcal{E}/a) e^{(-\mathcal{E}/a)^{\frac{1}{2}} (w+\overline{w})} & b = -2. \end{cases}$$

El potencial $\mathcal{V}$ se obtiene de la expresión (2.21a)

$$\mathcal{V}(w, \overline{w}) = \begin{cases} -E(-\mathcal{E}/a)^{\frac{2}{b+2}} \left(\frac{b+2}{2}\right)^{\frac{4}{b+2}} |w|^{\frac{-2b}{b+2}} & b \neq -2 \\ -E(-\mathcal{E}/a) e^{(-\mathcal{E}/a)^{\frac{1}{2}} (w+\overline{w})} & b = -2. \end{cases}$$

Para que $\mathcal{V}$ sea independiente del parámetro de energía $\mathcal{E}$ se hace $a = -\mathcal{E}$, obteniendo finalmente qu el potencial

$$V(r) = -\mathcal{E} r^b \tag{4.1.5}$$

con energía E, está hipersimétricamente relacionado con el potencial $\mathcal{V}$ con energía $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{V}(R) = -EC_b R^{\frac{-2b}{b+2}} \qquad b \neq -2 \tag{4.1.6a}$$
$$\mathcal{V}(u, v) = -Ee^{2u} \qquad b = -2, \tag{4.1.7}$$

[3] La derivada se puede calcular directamente, o utilizar F' de la expresión (4.1.2) junto con (4.1.3) y el Teorema de la función inversa $f' = [F' \circ f]^{-1}$.

donde C_b es constante para cada b, con

$$C_b = \left(\frac{b+2}{2}\right)^{\frac{4}{b+2}}. \tag{4.1.6b}$$

Para resolver el problema de potencial central se utiliza la conservación de la energía

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = E, \tag{4.1.8}$$

y la conservación de momento angular l, que se obtiene de la ecuación ($A1.8$) para $q^2 = \theta$

$$m2r\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0,$$

es decir

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0, \qquad mr^2\dot{\theta} = l. \tag{4.1.9}$$

Sustituyendo $\dot{\theta}$ de la expresión (4.1.9) en (4.1.8) puede despejarse $\dot{r}$ en función de r, obteniendo

$$\frac{dr}{dt} = \left[\frac{2}{m}\left(E - V(r)\right) - \frac{l^2}{m^2r^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.1.10}$$

De esta relación se obtiene la trayectoria expresando r en función de θ y utilizando para $\dot{\theta}$ la ecuación (4.1.9)

$$\frac{l}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} = \left[\frac{2}{m}\left(E - V(r)\right) - \frac{l^2}{m^2r^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

y finalmente

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV(r')}{l^2} - \frac{1}{r'^2}}}. \tag{4.1.11a}$$

La dependencia temporal se obtiene directamente de (4.1.10)

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(r')\right] - \frac{l^2}{m^2r'^2}}}. \tag{4.1.11b}$$

Sustituyendo en la expresión (4.1.11) la forma explícita para el potencial (4.1.1) y efectuando el cambio de variable $\rho = r^{-1}$ se obtiene

$$\theta - \theta_o = -\int_{r_o^{-1}}^{r^{-1}} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2ma}{l^2}\rho^{-b} - \rho^2}}. \tag{4.1.12}$$

Puede mostrarse que esta expresión es integrable en términos de funciones circulares (trigonométricas) o elípticas solamente cuando el parámetro b toma los valores[4]

$$-6,\ -4,\ -3,\ -2,\ -\frac{3}{2},\ -\frac{4}{3},\ -1,\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2},\quad 0,\quad \frac{2}{3},\quad 1,\quad 2,\quad 4,\quad 6.$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones (4.1.5) y (4.1.6) se observa que los problemas de potencial central del tipo (4.1.1), están relacionados —a través de las ecuaciones (2.21)— según la siguiente tabla:

b	6	4	2	1	$\frac{2}{3}$	0	-3	-4
$\frac{-2b}{b+2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	-6	-4

Esto significa que el número de potenciales centrales que pueden resolverse con funciones a lo más elípticas, es menor del que se creía tener antes de conocer estas relaciones de hipersimetría.

En el caso específico de los potenciales

$$V(r) = -\mathcal{E}r^2, \qquad \mathcal{V}(R) = -\frac{1}{2}E R^{-1},$$

que representan el oscilador armónico de frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{-m}}$ con energía E y el problema de Kepler para una constante de fuerza $k = \frac{1}{2}E$ con energía $\mathcal{E}$ respectivamente, la transformación conforme que se obtiene de (4.1.3)

$$F(z) = \frac{1}{2}z^2,$$

[4] Golstein [1980],p.89,90,122.

es precisamente el caso bidimensional de la transformación propuesta por Kustaanheimo y Stiefel en 1965[5].

Ho e Inomata utilizaron esta transformación en 1981 para calcular por vez primera la función de Green en forma exacta para el potencial coulombiano a través del método de integrales de trayectoria de Feynman[6].

Para obtener la trayectoria del oscilador armónico, basta sustituir el valor $b = 2$ en la expresión (4.1.12) y efectuar el cambio de variable $\xi = \rho^2$, de donde

$$\begin{aligned} \theta - \theta_o &= -\frac{1}{2}\int_{r_o^{-2}}^{r^{-2}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2m\mathcal{E}}{l^2} + \frac{2mE}{l^2}\xi - \xi^2}} \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\eta_o}^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}; \qquad \eta_1 = \frac{\frac{l^2}{r^2} - mE}{\sqrt{m^2E^2 + 2m\mathcal{E}l^2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos^{-1}\eta_1 - \cos^{-1}\eta_o\right). \end{aligned}$$

Esta expresión es equivalente a[7]

$$l^2 = r^2\left[mE + \sqrt{m^2E^2 + 2m\mathcal{E}l^2}\cos 2(\theta - \theta_o)\right], \qquad (4.1.13)$$

que es la ecuación de una cónica centrada en el origen con excentricidad

$$e = \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{mE}{\sqrt{m^2E^2 + 2m\mathcal{E}l^2}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Expresando w y z en forma polar se encuentran las relaciones inducidas por la transformación conforme F entre (r, θ) y (R, Θ)

$$Re^{i\Theta} = w = F(z) = \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}r^2e^{i2\theta}. \qquad (4.1.14)$$

---

[5] Cornish [1983].

[6] La idea original se debe a Duru y Kleinert, sin embargo fueron Ho e Inomata quienes realizaron el cálculo explícito. (Ho e Inomata [1981].)

[7] El factor $\sqrt{m^2E^2 + 2m\mathcal{E}l^2}$ es real para valores de la energía mayores que el mínimo del potencial efectivo.

Sustituyendo los valores de (r,θ) en términos de (R,Θ) en la ecuación (4.1.13) se obtiene su imagen bajo F

$$l^2 = 2R\left[mE + \sqrt{m^2E^2 + 2m\mathcal{E}l^2}\cos(\Theta-\Theta_o)\right],$$

y la curva representada por esta ecuación es, según la expresión (2.10a), la trayectoria solución del problema de Kepler, tratándose en este caso de una cónica con uno de sus focos en el origen y excentricidad

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}l^2}{mE^2}}.$$

En forma análoga pueden obtenerse las trayectorias solución exactas para el resto de las parejas de potenciales que aparecen en la tabla; calculando directamente la integral asociada a uno de los dos problemas y aplicando la transformación correspondiente para encontrar la solución del problema hipersimétricamente relacionado.

Salvo en los casos de la partícula libre ($b = 0$), del oscilador armónico y del problema de Kepler, las integrales asociadas a los demás problemas de la tabla son de tipo elíptico.

El potencial proporcional a r^{-2} no aparece en la tabla por estar asociado a través de las ecuaciones (2.21) con un potencial no central. Sin embargo, este problema es equivalente al de la partícula libre con una modificación a la barrera centrífuga $\frac{l^2}{2mr^2}$.

Según el corolario 2.2, también los problemas en Mecánica Ondulatoria asociados a los potenciales (4.1.16) con estados estacionarios caracterizados por el parámetro de energía E, están hipersimétricamente relacionados con los problemas de estados estacionarios asociados a los potenciales (4.1.6) y (4.1.7) con parámetro de energía $\mathcal{E}$.

Para ilustrar este resultado, a continuación se resuelve la ecuación bidimensional de Schrödinger (independiente del tiempo) para el oscilador armónico y, a través de la transformación (4.1.3) se obtiene la solución del átomo de hidrógeno bidimensional.

La ecuación (2.26) para el potencial $V = -\mathcal{E}r^2$ es separable en coordenadas polares y, la solución ψ puede expresarse mediante el producto

$$\psi(r,\theta) = e^{il\theta}\mathcal{R}(r), \qquad (4.1.19)$$

donde l^2 es la constante de separación y $\mathcal{R}$ es la parte radial que debe satisfacer la ecuación

$$\mathcal{R}''(r) + \frac{1}{r}\mathcal{R}'(r) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \mathcal{E}r^2\right) - \frac{l^2}{r^2}\right]\mathcal{R}(r) = 0.$$

Sustituyendo para $\mathcal{R}$ el producto

$$\mathcal{R}(r) = r^{\alpha}e^{-\beta\frac{r^2}{2}}\rho(r), \tag{4.1.20}$$

se obtiene la siguiente ecuación para la función ρ

$$r^{\alpha}\rho''(r) + \left[(2\alpha+1)r^{\alpha-1} - 2\beta r^{\alpha+1}\right]\rho'(r) \\ + \left[(\alpha^2 - l^2)r^{\alpha-2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - 2\beta(\alpha+1)\right)r^{\alpha} + \left(\beta^2 + \frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}\right)r^{\alpha+2}\right]\rho(r) = 0,$$

y definiendo α y β como

$$\alpha^2 = l^2, \qquad \beta^2 = -\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2} \tag{4.1.21}$$

puede eliminarse la dependencia en r^1 del coeficiente de ρ, obteniendo

$$\rho''(r) + \left[(2l+1)r^{-1} - 2\beta r\right]\rho'(r) + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - 2\beta(l+1)\right]\rho(r) = 0,$$

donde por brevedad se utiliza β en lugar de la expresión (4.1.20).

Efectuando el cambio de variable

$$r = \xi^{\gamma} \tag{4.1.22}$$

se obtiene

$$\frac{1}{\gamma^2}\xi^{2-2\gamma}\tilde{\rho}''(\xi) + \left[\left(\frac{1}{\gamma} + 2l\right)\xi^{1-2\gamma} - 2\beta\gamma\right]\frac{1}{\gamma}\tilde{\rho}'(\xi) + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - 2\beta(l+1)\right]\tilde{\rho}(r) = 0$$

donde $\tilde{\rho} \equiv \rho \circ \xi$. Con

$$\gamma = \frac{1}{2} \tag{4.1.21}$$

se simplifica el coeficiente de $\tilde{\rho}'$, obteniendo

$$\xi\tilde{\rho}''(\xi) + [l + 1 - \beta\xi]\,\tilde{\rho}'(\xi) + \frac{1}{2}\left[\frac{mE}{\hbar^2} - \beta(l+1)\right]\tilde{\rho}(\xi) = 0.$$

Finalmente, haciendo

$$\xi = \frac{x}{\beta} \tag{4.1.23}$$

se obtiene

$$xL''(x) + [l + 1 - x]\,L'(x) + \frac{1}{2}\left[\frac{mE}{\beta\hbar^2} - (l+1)\right]L(x) = 0,$$

donde $L \equiv \tilde{\rho} \circ x$, que es la ecuación asociada de Laguerre cuya solución son los polinomios asociados $L^l{}_n(x)$, con

$$n = \frac{1}{2}\left[\frac{mE}{\hbar^2}\frac{\hbar}{\sqrt{-2m\mathcal{E}}} - (l+1)\right]. \tag{4.1.24}$$

Utilizando las relaciones (4.1.19)-(4.1.23) se obtiene la solución completa en términos de r y θ

$$\psi(r,\theta) = e^{il\theta} r^l e^{-\frac{\sqrt{-2m\mathcal{E}}}{\hbar}\frac{r^2}{2}} L^l{}_n\left(\frac{\sqrt{-2m\mathcal{E}}}{\hbar} r^2\right). \tag{4.1.25}$$

Las condicions de univaluación y de frontera (convergencia a cero de la densidad de probabilidad en el infinito para estados ligados), restringen respectivamente a los parámetros l y n a tomar valores en los enteros.

Esto implica la cuantización del cuadrado del momento angular[8], con valores propios

$$\hbar^2 l^2, \qquad l \in \mathbb{Z},$$

y la cuantización de la energía según la expresión (4.1.24).

Para obtener la solución del átomo de hidrógeno bidimensional, es necesario componer la función de onda (4.1.25) con la función conforme f según la relación (2.30). Las condiciones de univaluación y de frontera, así como las

[8] En dos dimensiones solo hay una componente del momento angular y el cuadrado de este vector es simplemente el cuadrado de dicha componente.

de normalización, se deben imponer *después* de la transformación , pues de lo contrario, en algunos casos pueden no obtenerse todas las funciones propias.

Utilizando las relaciones (4.1.14) se obtiene la solución $\varphi = \psi \circ f$ del átomo de hidrógeno bidimensional.

$$\varphi(R,\Theta) = e^{il\frac{\Theta}{2}}(2R)^{\frac{l}{2}}e^{-\sqrt{\frac{-2m\mathcal{E}}{\hbar}}R}L^{l}{}_{n}\left(\sqrt{\frac{-2m\mathcal{E}}{\hbar}}2R\right). \tag{4.1.26}$$

Para que la función de onda sea univaluada es necesario que $\frac{l}{2}$ sea un entero, es decir

$$l = 2k, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

y la expresión (4.1.27) se transforma en

$$\varphi(R,\Theta) = e^{ik\Theta}(2R)^{k}e^{-\sqrt{\frac{-2m\mathcal{E}}{\hbar}}R}L^{2k}{}_{n}\left(\sqrt{\frac{-2m\mathcal{E}}{\hbar}}2R\right). \tag{4.1.26}$$

La condición de convergencia a cero en el infinito restringe al parámetro n a tomar valores enteros, lo que implica la cuantización de la energía $\mathcal{E}$.

De la expresión (4.1.24) se tiene que

$$\mathcal{E} = \frac{-mE^2}{2\left[2(n+k)+1\right]^2} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

La función de onda φ (4.1.27) normalizada es la misma que se obtiene al resolver directamente la ecuación de Schrödinger correspondiente.

4.2 Relación entre potenciales centrales y potenciales tipo Morse

En la sección anterior se obtuvo la relación entre los potenciales $V(r) = -\mathcal{E}r^{-2}$ y $\mathcal{V}(u,v) = -Ee^{2u}$ —(4.1.5) y (4.1.7) respectivamente—.

El potencial más general de este tipo que satisface la condición (3.12) es

$$\mathcal{V}(u,v) = -Ee^{bu}. \tag{4.2.1}$$

Del teorema 3. 2 y las expresiones (3.11) y (3.13) se obtiene

$$
\begin{aligned}
f'(w) &= \left(\frac{\mathcal{V}(w,\overline{w})}{-E}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}\int_{(u_0,v_0)}^{(u,v)} -(\ln \mathcal{V}(\xi,\eta))_{,\eta} d\xi + (\ln \mathcal{V}(\xi,\eta))_{,\xi} d\eta} \\
&= e^{\frac{bu}{2}} e^{\frac{i}{2}\int_{(u_0,v_0)}^{(u,v)} b d\eta} \\
&= e^{\frac{b}{2}(u+iv)} = e^{\frac{b}{2}w}.
\end{aligned} \tag{4.2.2}
$$

Integrando esta expresión se encuentra f y de ésta la inversa F

$$f(w) = \frac{2}{b} e^{\frac{b}{2}w}, \qquad F(z) = \frac{2}{b}\ln\left(\frac{b}{2}z\right). \tag{4.2.3}$$

Entonces

$$F'(z) = \frac{2}{b}\frac{1}{z},$$

y de la expresión (2.21a) se obtiene el potencial V hipersimétricamente relacionado con $\mathcal{V}$ a través de las condiciones (2.21).

$$V(z,\overline{z}) = -\mathcal{E}\left|F'(z)\right|^2 = -\frac{4\mathcal{E}}{b^2}\frac{1}{|z|^2}, \tag{4.2.4}$$

es decir, los problemas asociados al potencial $V(r) = -\frac{4\mathcal{E}}{b^2}r^{-2}$ con energía E y, el potencial $\mathcal{V}(u,v) = -Ee^{bu}$ con energía $\mathcal{E}$ están hipersimétricamente relacionados a través de la transformación (4.2.3).

En el capítulo 2 se mencionó que las relaciones (2.21) no son la única forma de satisfacer la condición (2.19). A continuación se muestra una manera alternativa cuando se cuenta con la relación (2.19) para *otros* problemas.

Sean V y $\mathcal{V}$ dos potenciales hipersimétricamente relacionados a través de la función conforme f

$$\left[E - V\left(f(w), \overline{f}(\overline{w})\right)\right]\left|f'(w)\right|^2 = \mathcal{E} - \mathcal{V}(w,\overline{w}), \tag{2.19}$$

y $V_1 = V_1(z,\overline{z})$ un potencial arbitrario.

restando la expresión

$$\mathcal{V}_1(w,\overline{w}) \equiv V_1\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)\left|f'(w)\right|^2 \tag{4.2.5}$$

de ambos lados de la ecuación (2.19) se obtiene la misma relación pero ahora para los potenciales $\tilde{V}$ y $\tilde{\mathcal{V}}$

$$\left[E-\tilde{V}\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)\right]\left|f'(w)\right|^2 = \mathcal{E}-\tilde{\mathcal{V}}(w,\overline{w}), \tag{4.2.6a}$$

donde

$$\tilde{V} \equiv V + V_1, \qquad \tilde{\mathcal{V}} \equiv \mathcal{V} + \mathcal{V}_1. \tag{4.2.6b}$$

Esta es una forma sencilla de generar relaciones conformes de hipersimetría.

El potencial (4.2.4) puede interpretarse como una corrección a la barrera centrífuga y, si V_1 es un potencial central arbitrario, la solución del problema asociado al potencial

$$\tilde{V}(r) = -\frac{4\mathcal{E}}{b^2}r^{-2} + V_1(r)$$

con energía E y momento angular $l = mr^2\dot{\theta}$, es igual a la del problema asociado al potencial $V_1(r)$ con la misma energía E y momento angular l', donde

$$l'^2 = l^2 - \frac{8m\mathcal{E}}{b^2}.$$

Para mostrar este hecho, basta sustituir la expresión para el momento angular (4.1.9) en la ecuación de conservación de la energía para el potencial $\tilde{V}$ (4.1.8)

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{l^2}{m} - \frac{4\mathcal{E}}{b^2}\right)r^{-2} + V_1(r) = E,$$

y hacer uso de la definición de l' para obtener la expresión de conservación de energía del potencial V_1

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l'^2}{2m}r^{-2} + V_1(r) = E.$$

Entonces, el problema asociado al potencial central $V_1(r)$ con energía E y momento angular l' está hipersimétricamente relacionado, según la expresión

(4.2.6) con el potencial $\tilde{\mathcal{V}}$, donde $\mathcal{V}$, f y $\mathcal{V}_1$ corresponden respectivamente a las relaciones (4.2.1), (4.2.3) y (4.2.5), de donde

$$\mathcal{V}_1(w,\overline{w}) = V_1\left(\left|\frac{2}{b}e^{\frac{b}{2}w}\right|\right)\left|e^{\frac{b}{2}w}\right|^2,$$

y

$$\tilde{\mathcal{V}}(u,v) = -Ee^{bu} + V_1\left(\frac{2}{|b|}e^{\frac{b}{2}u}\right)e^{bu}. \tag{4.2.7}$$

En la sección anterior se resolvió el problema del potencial central en cuadraturas, obteniendo para la trayectoria la expresión

$$\theta - \theta_o = \int_{r_o}^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{\frac{2mE}{l'^2} - \frac{2mV(r')}{l'^2} - \frac{1}{r'^2}}}, \tag{4.1.11a}$$

y para la dependencia temporal

$$t - t_o = \int_{r_o}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(r')\right] - \frac{l'^2}{m^2 r'^2}}}. \tag{4.1.11b}$$

Expresando z en forma polar pueden obtenerse las relaciones entre (r,θ) y (u,v) inducidas por la transformación (4.2.3)

$$re^{i\theta} = \frac{2}{b}e^{\frac{bu}{2}}e^{\frac{ibv}{2}}. \tag{4.2.8}$$

Sustituyendo estas expresiones en la relación (4.1.11a) se obtiene la trayectoria solución en cuadraturas del problema asociado al potencial (4.2.7)

$$v - v_o = \frac{2}{b}\int_{\frac{2}{b}e^{\frac{bu_o}{2}}}^{\frac{2}{b}e^{\frac{bu}{2}}} \frac{d\xi}{\xi^2\sqrt{\frac{2mE}{l'^2} - \frac{2mV_1(\xi)}{l'^2} - \frac{1}{\xi^2}}} \tag{4.2.9}.$$

Si $V_1(r) = ar^c$, el potencial $\tilde{\mathcal{V}}$ se convierte en

$$\tilde{\mathcal{V}}(u.v) = -Ee^{bu} + Ae^{\gamma u} \tag{4.2.10a}$$

donde

$$\gamma = b\left(\frac{c+2}{2}\right), \qquad A = a\left(\frac{2}{b}\right)^c. \tag{4.2.10b}$$

Utilizando la lista de la sección anterior para potenciales centrales monomiales, puede afirmarse que las soluciones de los problemas asociados a

$$\tilde{V}(u,v) = -Ee^{bu} + Ae^{\frac{bn}{2}u}$$

son a lo más funciones elípticas para los siguientes valores de n

$$-4, -2, -1, \quad 0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad 1, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \quad \frac{8}{3}, \quad 3, \quad 4, \quad 6, \quad 8.$$

De la trayectoria solución para el oscilador armónico $V(r) = ar^2$ con energía E y momento angular l'

$$l'^2 = r^2\left[mE + \sqrt{m^2E^2 - 2mal'^2}\cos 2(\theta - \theta_o)\right], \tag{4.1.13}$$

y de las relaciones (4.2.8) se obtiene la trayectoria solución

$$l^2 = \frac{4}{b^2}e^{bu}\left[mE + \sqrt{m^2\left(E^2 + 4A\mathcal{E}\right) - \frac{mAb^2l^2}{2}}\cos b(v - v_o)\right] + \frac{8m\mathcal{E}}{b^2}$$

asociada al potencial $\tilde{V}$ con energía $\mathcal{E}$, donde

$$\tilde{V}(u,v) = -Ee^{bu} + Ae^{2bu}. \tag{4.2.11}$$

El caso de $b < 0$ corresponde al potencial de Morse.

El problema de Kepler, $V(r) = ar^{-1}$ está asociado con el potencial

$$\tilde{V}(u,v) = -Ee^{bu} + Ae^{\frac{b}{2}u},$$

que es equivalente a (4.2.11). Esto no es sorprendente si se sabe que los dos potenciales centrales están relacionados.

El problema asociado al potencial (4.2.7) puede reducirse directamente a cuadraturas utilizando el método de Hamilton-Jacobi.

El hamiltoniano asociado es

$$H(p_u, p_v, u, v) = \frac{1}{2m}\left(p_u^2 + p_v^2\right) + \tilde{V}(u, v),$$

donde $p_u = m\frac{du}{dt}$, $p_v = m\frac{dv}{dt}$ y

$$H(p_u, p_v, u, v) = \mathcal{E}.$$

Como el hamiltoniano se conserva y es cíclico en V, la ecuación de Hamilton-Jacobi puede expresarse en términos de la función característica de Hamilton W, que es separable[9]

$$W = W_1(u) + \alpha_v v$$

donde $p_v = \alpha_v$ que es constante y la ecuación de Hamilton-Jacobi resulta

$$\frac{1}{2m}\left[\left(W_1'(u)\right)^2 + \alpha_v^2\right] - Ee^{bu} + V_1\left(\frac{2}{|b|}e^{\frac{b}{2}u}\right)e^{bu} = \mathcal{E}$$

de donde

$$W_1(u) = \int_{u_o}^{u}\sqrt{2m\left[\mathcal{E} + Ee^{bu'} - V_1\left(\frac{2}{|b|}e^{\frac{b}{2}u'}\right)e^{bu'}\right] - \alpha_v^2}\, du'$$

y

$$t - t_o = \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} = \int_{u_o}^{u}\frac{m\,du'}{\sqrt{2m\left[\mathcal{E} + Ee^{bu'} - V_1\left(\frac{2}{|b|}e^{\frac{b}{2}u'}\right)e^{bu'}\right] - \alpha_v^2}} \qquad (4.2.12a)$$

$$v_o = \frac{\partial W}{\partial \alpha_v} = -\int_{u_o}^{u}\frac{\alpha_v\,du'}{\sqrt{2m\left[\mathcal{E} + Ee^{bu'} - V_1\left(\frac{2}{|b|}e^{\frac{b}{2}u'}\right)e^{bu'}\right] - \alpha_v^2}} + v. \qquad (4.2.12b)$$

Comparando la expresión (4.2.12*b*) con (4.2.9) se obtiene una relación entre ambos tipos de integrales.

---

[9] Golstein [1980], p.451.

Del corolario 2. 1 se infiere una vez más que los problemas ondulatorios de estados estacionarios asociados a los potenciales $\tilde{V}$ y $\tilde{\mathcal{V}}$ (4.2.7), también están hipersimétricamente relacionados a través de la transformación conforme (4.2.3); en particular los potenciales

$$\tilde{V}(r) = -\frac{4\mathcal{E}}{b^2}\frac{1}{r^2} + \frac{b^2}{4}Ar^2 \tag{4.2.13}$$

y energía E con

$$\tilde{\mathcal{V}}(u,v) = -Ee^{bu} + Ae^{2bu} \tag{4.2.11}$$

y energía $\mathcal{E}$.

La ecuación de Schrödinger asociada al potencial (4.2.13) es separable en coordenadas polares —por tratarse de un potencial central— con

$$\psi(r,\theta) = e^{il\theta}\mathcal{R}(r), \tag{4.1.19}$$

y ecuación radial

$$\mathcal{R}''(r) + \frac{1}{r}\mathcal{R}'(r) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{b^2A}{4}r^2 + \frac{4\mathcal{E}}{b^2}\frac{1}{r^2}\right) - \frac{l^2}{r^2}\right]\mathcal{R}(r) = 0.$$

Definiendo l' mediante

$$l'^2 \equiv l^2 - \frac{8m\mathcal{E}}{\hbar^2 b^2}, \tag{4.2.14}$$

la ecuación anterior es equivalente a la ecuación radial para el oscilador armónico con potencial $V(r) = \frac{b^2A}{4}r^2$ y momento angular l' cuya solución aparece en la expresión (4.1.25), de donde se obtiene la solución para (4.2.13):

$$\psi(r,\theta) = e^{il\theta}r^{l'}e^{\frac{-b\sqrt{2mA}}{\hbar}\frac{r^2}{4}}L^{l'}{}_n\left(\frac{b\sqrt{2mA}}{2\hbar}r^2\right) \tag{4.2.15a}$$

con

$$n = \frac{1}{2}\left[\frac{mE}{\sqrt{2mA}}\frac{2}{\hbar b} - (l'+1)\right]. \tag{4.2.15b}$$

Utilizando las relaciones (4.2.8) se obtiene la solución del problema de estados estacionarios asociado al potencial (4.2.11)

$$\varphi(u,v) = e^{il\frac{b}{2}v}\left(\frac{2}{b}\right)^{l'}e^{\frac{bl'}{2}u}e^{-\frac{\sqrt{2mA}}{\hbar b}e^{bu}}L^{l'}{}_n\left(\frac{2\sqrt{2mA}}{\hbar b}e^{bu}\right). \tag{4.2.16a}$$

Como el potencial $\tilde{\mathcal{V}}$ es independiente de v, el factor $e^{il\frac{b}{2}v}$ corresponde al movimiento de partícula libre en esa dirección, asociado con la energía

$$\mathcal{E}_v = \frac{\hbar^2 b^2}{8m} l^2$$

donde $\mathcal{E} = \mathcal{E}_u + \mathcal{E}_v$. Sustituyendo esta última expresión en (4.2.14) se obtiene

$$l'^2 = -\frac{8m\mathcal{E}_u}{\hbar^2 b^2},$$

que permite expresar (4.2.15b) en términos de la energía $\mathcal{E}_u$ como

$$\mathcal{E}_u = -\frac{E^2}{4A} + \frac{E\hbar b}{\sqrt{2mA}}\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar^2 b^2}{2m}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2. \qquad (4.2.16b)$$

La condición de frontera en el infinito restringe el parámetro n a valores enteros y para los estados ligados debe tenerse

$$-\frac{E^2}{4A} < \mathcal{E}_u < 0, \qquad (4.2.17)$$

pues $-\frac{E^2}{4A}$ es el valor mínimo del potencial (4.2.11). Esto implica la cuantización de $\mathcal{E}_u$ y la existencia únicamente de un número finito de estados ligados, ya que la condición (4.2.17) impone sobre n la restricción

$$0 < n < \frac{2mE}{\hbar b\sqrt{2mA}} - \frac{1}{2}.$$

La función de onda (4.2.16a) coincide con la solución del problema asociado al potencial de Morse con $E = 2A$ y $l = 0$ que aparece comunmente en la literatura

$$\varphi(u) = Ce^{\frac{bl'}{2}u}e^{-\frac{\sqrt{2mA}}{\hbar b}e^{bu}}\,{}_1F_1\left(-n, l'+1, \frac{2\sqrt{2mA}}{\hbar b}e^{bu}\right)$$

donde ${}_1F_1$ es la función hipergeométrica confluente y C es una constante de normalización[10].

[10] Flügge (1971), p.162-166.

4.3 Resolución de problemas asociados a potenciales no separables, utilizando hipersimetrías

Existen únicamente cuatro sistemas de coordenadas separables para la ecuación de Schrödinger bidimensional y, dado un potencial, es posible determinar mediante un cálculo directo si la ecuación de Schrödinger asociada es o no separable en cada uno de estos sistemas[11].

La ecuación de Schrödinger asociada al potencial

$$V(\xi,\eta) = \frac{Ae^{a\xi+b\eta}}{\sqrt{\operatorname{senh}^2(a\xi+b\eta+c)+\cos^2(-b\xi+a\eta+d)}}, \tag{4.3.1}$$

donde (ξ,η) son coordenadas bipolares, relacionadas con las coordenadas cartesianas a través de la transformación

$$\begin{aligned} x &= \sigma \cosh\xi \cos\eta \\ y &= \sigma \operatorname{senh}\xi \operatorname{sen}\eta \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

con σ constante, a,b,c,d constantes reales arbitrarias y energía E, en general no es separable en ninguno de los cuatro sistemas de coordenadas mencionados.

En esta sección se aplica el teorema 3 .2 al potencial (4.3.1) y se encuentra el potencial $\mathcal{V}$ hipersimétricamente relacionado con éste según las condiciones (2.21) y, la ecuación de Schrödinger asociada al nuevo potencial resulta ser separable en coordenadas bipolares y exactamente soluble.

Esto permite resolver exactamente la ecuación de Schrödinger asociada al potencial V (4.3.1), así como el problema clásico relacionado con el mismo potencial.

En coordenadas bipolares el laplaciano es

$$\nabla^2_{(\xi,\eta)} = \frac{1}{\sigma^2(\operatorname{senh}^2\xi+\operatorname{sen}^2\eta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right), \tag{4.3.3}$$

y

$$\ln V(\xi,\eta) = \ln A + a\xi + b\eta - \frac{1}{2}\ln\left[\operatorname{senh}^2(a\xi+b\eta+c)+\cos^2(-b\xi+a\eta+d)\right].$$

[11] Eisenhart [1948].

Sean

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv \quad a\xi + b\eta + c \\ \theta &\equiv -b\xi + a\eta + d \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln V &= a - \frac{a \operatorname{senh} \gamma \cosh \gamma + b \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\operatorname{senh}^2 \gamma + \cos^2 \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \ln V &= b - \frac{b \operatorname{senh} \gamma \cosh \gamma - a \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\operatorname{senh}^2 \gamma + \cos^2 \theta} \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \ln V = & \frac{-\left[a^2(\operatorname{senh}^2\gamma + \cosh^2\gamma) + b^2(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)\right]\left[\operatorname{senh}^2\gamma + \cos^2\theta\right]}{(\operatorname{senh}^2\gamma + \cos^2\theta)^2} \\ & + \frac{2\left[a \operatorname{senh}\gamma \cosh\gamma + b \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right]^2}{(\operatorname{senh}^2\gamma + \cos^2\theta)^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \ln V = & \frac{-\left[b^2(\operatorname{senh}^2\gamma + \cosh^2\gamma) + a^2(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)\right]\left[\operatorname{senh}^2\gamma + \cos^2\theta\right]}{(\operatorname{senh}^2\gamma + \cos^2\theta)^2} \\ & + \frac{2\left[b \operatorname{senh}\gamma \cosh\gamma - a \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right]^2}{(\operatorname{senh}^2\gamma + \cos^2\theta)^2}. \end{aligned}$$

Y de esto

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) \ln V = & \frac{-(a^2+b^2)\left[(\operatorname{senh}^2\gamma + \cosh^2\gamma + \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)\right]}{(\operatorname{senh}^2\gamma + \cos^2\theta)} \\ & + \frac{2(\operatorname{senh}^2\gamma \cosh^2\gamma + \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta)}{(\operatorname{senh}^2\gamma + \cos^2\theta)^2} \\ = & \frac{-2(a^2+b^2)\left[\cosh^2\gamma\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{senh}^2\gamma - \operatorname{senh}^2\gamma - \cos^2\theta\right]}{(\operatorname{senh}^2\gamma + \cos^2\theta)^2} \\ = & \frac{-2(a^2+b^2)\left[\operatorname{senh}^2\gamma(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - 1)\right]}{(\operatorname{senh}^2\gamma + \cos^2\theta)^2} = 0, \end{aligned}$$

y de (4.3.3)

$$\nabla^2 \ln V(\xi, \eta) = 0,$$

lo que permite aplicar el teorema 3.2.

De las expresiones (3.11) y (A6.2), el argumento Θ de la derivada de la transformación conforme F es

$$\Theta - \Theta_o = \frac{1}{2}\int \frac{\partial \ln V}{\partial q^i} T^i{}_j dq^j \qquad (4.3.6)$$

donde $x^1 = x, x^2 = y, q^1 = \xi, q^2 = \eta$ y T está definido según la expresión

$$T^i{}_j(q) = \frac{\partial q^i}{\partial x^k} S^k{}_l \frac{\partial x^l}{\partial q^j}, \qquad (A6.2b)$$

con S la métrica simpléctica.

Para calcular T se utiliza la transformación (4.3.2) y el teorema de la función inversa para obtener $\frac{\partial q^i}{\partial x^k}$. Sustituyendo la expresión (A6.2b) resulta que

$$T^1{}_1 = \frac{\sigma \operatorname{senh}\xi \cos\eta \cosh\xi \operatorname{sen}\eta - \sigma \cosh\xi \operatorname{sen}\eta \operatorname{senh}\xi \cos\eta}{\sigma(\operatorname{senh}^2\xi + \cos^2\eta)} = 0$$
$$T^1{}_2 = \frac{\sigma \operatorname{senh}^2\xi \cos^2\eta + \sigma \cosh^2\xi \operatorname{sen}^2\eta}{\sigma(\operatorname{senh}^2\xi + \cos^2\eta)} = 1$$
$$T^2 1 = \frac{-\cosh^2\xi \operatorname{sen}^2\eta - \operatorname{senh}^2\xi \cos^2\eta}{\sigma(\operatorname{senh}^2\xi + \cos^2\eta)} = -1$$
$$T^2{}_2 = \frac{-\sigma \cosh\xi \operatorname{sen}\eta \operatorname{senh}\xi \cos\eta + \sigma \operatorname{senh}\xi \cos\eta \cosh\xi \operatorname{sen}\eta}{\sigma(\operatorname{senh}^2\xi + \cos^2\eta)} = 0,$$

i.e. $T = S$ y de (4.3.6)

$$\Theta - \Theta_o = \frac{1}{2}\int \frac{\partial \ln V}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \ln V}{\partial \eta} d\xi.$$

De las expresiones (4.3.5) para las derivadas parciales de $\ln V$

$$\Theta - \Theta_o = \frac{1}{2}\Big\{-b\xi + a\eta + I\Big\}$$

donde

$$I = \int \frac{(b \operatorname{senh}\gamma \cosh\gamma - a \operatorname{sen}\theta \cos\theta)d\xi - (a \operatorname{senh}\xi \cosh\xi + b \operatorname{sen}\theta \cos\theta)d\eta}{\operatorname{senh}^2\gamma + \cos^2\theta}.$$

Para calcular esta integral se utiliza la trayectoria

$$\eta = \kappa\xi, \qquad \kappa \equiv \frac{\eta_o}{\xi_o},$$

entonces

$$I = \int^{\xi_o} \frac{(b-\kappa a)\,\mathrm{senh}\left((a+\kappa b)\xi + c\right)\cosh\left((a+\kappa b)\xi + c\right)}{\mathrm{senh}^2\left((a+\kappa b)\xi + c\right) + \cos^2\left((b-\kappa a)\xi - d\right)} d\xi$$
$$+ \frac{(a+\kappa b)\,\mathrm{sen}\left((b-\kappa a)\xi - d\right)\cos\left((b-\kappa a)\xi - d\right)}{\mathrm{senh}^2\left((a+\kappa b)\xi + c\right) + \cos^2\left((b-\kappa a)\xi - d\right)} d\xi$$

donde el punto inicial es indefinido[12].

Sean

$$\delta \equiv a + \kappa b \qquad \phi \equiv b - \kappa a.$$

Utilizando estas definiciones y las identidades

$$\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \cosh^2 x - \mathrm{senh}^2 x = 1 \tag{4.3.8}$$

la integral I se transforma en

$$I = \int^{\xi_o} \frac{\phi\left[\tan^2(\phi\xi - d) + 1\right]\tanh(\delta\xi + c) + \delta\left[1 - \tanh^2(\delta\xi + c)\right]\tan(\phi\xi - d)}{1 + \tanh^2(\delta\xi + c)\tan^2(\phi\xi - d)} d\xi$$
$$= \int^{\xi_o} \frac{\phi\frac{\tanh(\delta\xi + c)}{\cos^2(\phi\xi - d)} + \delta\frac{\tan(\phi\xi - d)}{\cosh^2(\delta\xi + c)}}{1 + \tanh^2(\delta\xi + c)\tan^2(\phi\xi - d)} d\xi$$
$$= \int^{\tanh(\delta\xi_o + c)\tan(\phi\xi_o - d)} \frac{du}{1 + u^2}$$
$$= \arctan\left\{\tanh\left[\left(a + b\frac{\eta_o}{\xi_o}\right)\xi_o + c\right]\tan\left[\left(b - a\frac{\eta_o}{\xi_o}\right)\xi_o - d\right]\right\},$$

---

[12] Aquí solo interesa Θ hasta una constante; la constante de fase de F'.

y

$$\Theta = \frac{1}{2}\left\{-b\xi + a\eta + \arctan\left[\tanh(a\xi + b\eta + c) \quad \tan(b\xi - a\eta - d)\right]\right\} + \Theta_o.$$

Entonces

$$\begin{aligned} F'(\xi,\eta) &= \left[\frac{V}{-\mathcal{E}}\right]^{\frac{1}{2}} e^{i\Theta} \\ &= \left[\frac{V}{-\mathcal{E}}\right]^{\frac{1}{2}} \left\{e^{i(-b\xi+a\eta)} e^{i\arctan[\tanh(a\xi+b\eta+c)\tan(b\xi-a\eta-d)]}\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{A}{-\mathcal{E}}\right]^{\frac{1}{2}} \left\{e^{a\xi+b\eta+i(-b\xi+a\eta)}\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\times\left\{\frac{\cosh(a\xi+b\eta+c)\cos(b\xi-a\eta-d)+i\,\mathrm{senh}(a\xi+b\eta+c)\,\mathrm{sen}(b\xi-a\eta-d)}{\mathrm{senh}^2(a\xi+b\eta+c)+\cos^2(b\xi-a\eta-d)}\right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Sean

$$\varsigma = \xi + i\eta \qquad \xi = \frac{1}{2}(\bar{\varsigma} + \varsigma)$$
$$\bar{\varsigma} = \xi - i\eta \qquad \eta = \frac{i}{2}(\bar{\varsigma} - \varsigma)$$

Entonces

$$F'(\varsigma,\bar{\varsigma}) = \left[\frac{A}{-\mathcal{E}}\right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\overline{\alpha}\xi}{2}} \left\{\frac{\cosh\vartheta\cos i\varsigma + i\,\mathrm{senh}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,i\varsigma}{\mathrm{senh}^2\vartheta + \cos^2 i\varsigma}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

donde $\vartheta = \frac{\overline{\alpha}}{2}\varsigma + \frac{\alpha}{2}\bar{\varsigma} + c$, $\varsigma = \frac{\overline{\alpha}}{2}\varsigma - \frac{\alpha}{2}\bar{\varsigma} + id$, $\alpha = a + ib$ y $\overline{\alpha} = a - ib$.

Haciendo uso de las identidades para las funciones trigonométricas e hiperbólicas de la suma de dos argumentos y de las relaciones

$$\mathrm{senh}\, ix = i\,\mathrm{sen}\, x \qquad \cosh ix = \cos x$$

se obtiene

$$F'(\varsigma,\bar{\varsigma}) = \left[\frac{A}{-\mathcal{E}}\right]^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{\cosh(\vartheta - \varsigma)}{\cosh(\vartheta + \varsigma)\cosh(\vartheta - \varsigma)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

y finalmente

$$F'(\varsigma) = \left[\frac{A}{-\mathcal{E}}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{\overline{\alpha}}{2}\varsigma}}{\sqrt{\cosh\left(\overline{\alpha}\varsigma + \beta\right)}} \tag{4.3.7}$$

donde $\beta = c + id$.

Integrando

$$\begin{aligned} F(\varsigma) &= \left[\frac{A}{-\mathcal{E}}\right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-\beta}{2}} \int \frac{e^{\frac{\overline{\alpha}\varsigma+\beta}{2}}}{\sqrt{\cosh\left(\overline{\alpha}\varsigma + \beta\right)}} d\varsigma \\ &= \left[\frac{2A}{-\mathcal{E}}\right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-\beta}{2}} \int \frac{e^{\overline{\alpha}\varsigma+\beta}}{\sqrt{e^{2(\overline{\alpha}\varsigma+\beta)} + 1}} d\varsigma \\ &= \left[\frac{2A}{-\mathcal{E}}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{-\beta}{2}}}{\overline{\alpha}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}}, \qquad u = e^{\overline{\alpha}\varsigma+\beta} \\ &= \left[\frac{2A}{-\mathcal{E}}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{-\beta}{2}}}{\overline{\alpha}} \ln\left[u + \sqrt{u^2 + 1}\right], \end{aligned}$$

y

$$F(\varsigma) = \left[\frac{2A}{-\mathcal{E}}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{-\beta}{2}}}{\overline{\alpha}} \ln\left[e^{\overline{\alpha}\varsigma+\beta} + \sqrt{e^{2(\overline{\alpha}\varsigma+\beta)} + 1}\right]. \tag{4.3.9}$$

Sea

$$\omega = F(\varsigma) \tag{4.3.10}$$

entonces

$$e^{k\omega} = e^{\overline{\alpha}\varsigma+\beta} + \sqrt{e^{2(\overline{\alpha}\varsigma+\beta)} + 1}$$

donde $k \equiv \left(\frac{-\mathcal{E}}{2A}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{\alpha} e^{\frac{\beta}{2}}$.

Restando $e^{\overline{\alpha}\varsigma+\beta}$ y elevando al cuadrado se obtiene

$$2e^{k\omega}e^{\overline{\alpha}\varsigma+\beta} = e^{2k\omega} - 1$$

y finalmente

$$\varsigma = \frac{1}{\overline{\alpha}} \ln \operatorname{senh}\left(k\omega\right) - \frac{\beta}{\overline{\alpha}}.$$

Haciendo $k = 1$, que equivale a definir A como

$$A = -\frac{\mathcal{E}\overline{\alpha}^2 e^{\beta}}{2}$$

se obtiene

$$f(\omega) = \frac{1}{\alpha} \ln \operatorname{senh}(\omega) - \frac{\beta}{\alpha} \tag{4.3.11}$$

$$f'(\omega) = \frac{1}{\alpha} \frac{\cosh \omega}{\operatorname{senh} \omega} \tag{4.3.12}$$

y

$$|f'(\lambda, \mu)|^2 = \frac{1}{|\alpha|^2} \frac{\operatorname{senh}^2 \lambda + \cos^2 \mu}{\operatorname{senh}^2 \lambda + \operatorname{sen}^2 \mu}$$

donde $\omega = \lambda + i\mu$, y λ,μ son también coordenadas bipolares.

De la expresión (2.21a), el potencial $\mathcal{V}$ con energía $\mathcal{E}$ relacionado con V es

$$\mathcal{V}(\lambda, \mu) = \frac{-E}{a^2 + b^2} \left[\frac{\operatorname{senh}^2 \lambda + \cos^2 \mu}{\operatorname{senh}^2 \lambda + \operatorname{sen}^2 \mu} \right]. \tag{4.3.13}$$

Si las coordenadas bipolares (λ, μ) están relacionadas con las cartesianas (u, v) según (4.3.2) donde $\sigma_1^2 = a^2 + b^2$, entonces la ecuación bidimensional de Schrödinger asociada al potencial $\mathcal{V}$ con energía $\mathcal{E}$ es

$$\frac{1}{\sigma_1^2(\operatorname{senh}^2\lambda + \operatorname{sen}^2\mu)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[\mathcal{E} + \frac{E}{(a^2+b^2)} \frac{(\operatorname{senh}^2 \lambda + \cos^2 \mu)}{(\operatorname{senh}^2 \lambda + \operatorname{sen}^2 \mu)} \right] \varphi = 0,$$

donde se ha utilizado la expresión (4.3.2) para el laplaciano en coordenadas bipolares.

Multiplicando por $\sigma_1^2(\operatorname{senh}^2\lambda + \operatorname{sen}^2\mu)$ se obtiene

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \right) \varphi + \frac{2m}{\hbar^2} \left[\mathcal{E} \sigma_1^2 (\operatorname{senh}^2 \lambda + \operatorname{sen}^2 \mu) + E(\operatorname{senh}^2 \lambda + \cos^2 \mu) \right] \varphi = 0,$$

que es separable, a diferencia de la ecuación asociada al potencial V con energía E.

Sustituyendo $\varphi(\lambda, \mu) = L(\lambda) M(\mu)$ se obtienen las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$L''(\lambda) + \left(\frac{2m(E + \sigma_1^2 \mathcal{E})}{\hbar^2} \operatorname{senh}^2 \lambda + Q \right) L(\lambda) = 0 \tag{4.3.13a}$$

$$M''(\mu) + \left(\frac{2m(E - \sigma_1^2 \mathcal{E})}{\hbar^2} \cos^2 \mu + \frac{2m\sigma_1^2 \mathcal{E}}{\hbar^2} - Q \right) M(\mu) = 0 \tag{4.3.13b}$$

donde Q es la constante de separación.

Utilizando las identidades (4.3.8) junto con

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) \qquad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

se obtiene la equivalencia de las ecuaciones (4.3.13) con

$$L''(\lambda) + \left[\frac{m(E+\sigma_1^2\mathcal{E})}{\hbar^2}\cosh 2\lambda + \frac{m(E+\sigma_1^2\mathcal{E})}{\hbar^2} + Q\right] L(\lambda) = 0 \quad (4.3.14)$$

$$M''(\mu) + \left[\frac{m(E-\sigma_1^2\mathcal{E})}{\hbar^2}\cos 2\mu + \frac{m(E+\sigma_1^2\mathcal{E})}{\hbar^2} - Q\right] M(\mu) = 0 \quad (4.3.15)$$

que son las ecuaciones de Mathieu con argumento imaginario y real respectivamente.

Las soluciones de (4.3.14) son las funciones asociadas de Mathieu de primer tipo

$$\begin{aligned} &Ce_n\left(\lambda, \frac{m(E+\sigma_1^2\mathcal{E})}{2\hbar^2}\right), \qquad Se_n\left(\lambda, \frac{m(E+\sigma_1^2\mathcal{E})}{2\hbar^2}\right) \\ &Fe_n\left(\lambda, \frac{m(E+\sigma_1^2\mathcal{E})}{2\hbar^2}\right), \qquad Ge_n\left(\lambda, \frac{m(E+\sigma_1^2\mathcal{E})}{2\hbar^2}\right) \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

con n natural[13].

Las soluciones de (4.3.15) son las funciones de Mathieu de primer tipo

$$\begin{aligned} &ce_m\left(\mu, \frac{m(\sigma_1^2\mathcal{E}-E)}{2\hbar^2}\right), \qquad se_m\left(\mu, \frac{m(\sigma_1^2\mathcal{E}-E)}{2\hbar^2}\right) \\ &fe_m\left(\mu, \frac{m(\sigma_1^2\mathcal{E}-E)}{2\hbar^2}\right), \qquad ge_m\left(\mu, \frac{m(\sigma_1^2\mathcal{E}-E)}{2\hbar^2}\right) \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

con m natural.

Las funciones Ce_n, Se_n, ce_n y se_n son periódicas mientras que Fe_n, Ge_n, fe_n y ge_n no lo son.

---

[13] Gradshteyn y Ryzhik [1965], p.991-993.

Según la relación (2.30), las funciones propias de la ecuación de Schrödinger asociada al potencial bidimensional V con energía E son

$$\psi(\xi,\eta) = L(\lambda(\xi,\eta))M(\mu(\xi,\eta))$$

donde L y M son cualesquiera funciones de Mathieu de (4.3.16) y (4.3.17) respectivamente y, las funciones $\lambda = \lambda(\xi,\eta)$ y $\mu = \mu(\xi,\eta)$ se obtienen de la transformación F (4.3.9) haciendo uso de la relación (4.3.10) y de la definición de λ y μ. Estas son:

$$\lambda = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}\ln\left\{e^{\gamma} + 2\vartheta + e^{\frac{\gamma}{2}}\left[\sqrt{\varsigma+\vartheta}\cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{-\varsigma+\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right]\right\} \quad (4.3.18a)$$

$$\mu = \arctan\left\{\frac{e^{\frac{\gamma}{2}}\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\frac{\theta}{2}\sqrt{-\varsigma+\vartheta} + \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\sqrt{\varsigma+\vartheta}}{e^{\frac{\gamma}{2}}\cos\theta + \cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\varsigma+\vartheta} + \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\sqrt{-\varsigma+\vartheta}}\right\} \quad (4.3.18b)$$

donde $\varsigma = \cosh\gamma\cos\theta$, $\vartheta = \sqrt{\mathrm{senh}^2\gamma + \cos^2\theta}$ y

$$\gamma = a\xi + b\eta + c, \qquad \theta = -b\xi + a\eta + d. \quad (4.3.4)$$

Los correspondientes problemas clásicos también están hipersimétricamente relacionados.

La ecuación de Hamilton-Jacobi para el potencial $\mathcal{V}$ es separable en coordenadas bipolares, lo que no sucede con la ecuación asociada al potencial V.

El lagrangiano asociado a $\mathcal{V}$ es

$$L = \frac{m\sigma_1^2}{2}\left(\mathrm{senh}^2\lambda + \mathrm{sen}^2\mu\right)\left(\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2\right) + \frac{E}{\sigma_1^2}\frac{\mathrm{senh}^2\lambda + \cos^2\mu}{\mathrm{senh}^2\lambda + \mathrm{sen}^2\mu}$$

donde $\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt}$, $\dot{\mu} = \frac{d\mu}{dt}$.

Los momentos generalizados son

$$p_\lambda = \frac{\partial L}{\partial\dot{\lambda}} = m\sigma_1^2\left(\mathrm{senh}^2\lambda + \mathrm{sen}^2\mu\right)\dot{\lambda}$$

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial\dot{\mu}} = m\sigma_1^2\left(\mathrm{senh}^2\lambda + \mathrm{sen}^2\mu\right)\dot{\mu},$$

y el hamiltoniano resulta

$$H\left(\lambda,\mu,p_\lambda,p_\mu\right)=\frac{1}{\sigma_1^2\left(\operatorname{senh}^2\lambda+\operatorname{sen}^2\mu\right)}\left[\frac{1}{2m}\left(p_\lambda^2+p_\mu^2\right)-E(\operatorname{senh}^2\lambda+\cos^2\mu)\right]=\mathcal{E}.$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi para la función característica W es

$$\frac{1}{\sigma_1^2\left(\operatorname{senh}^2\lambda+\operatorname{sen}^2\mu\right)}\left[\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial\mu}\right)^2\right)-E(\operatorname{senh}^2\lambda+\cos^2\mu)\right]=\mathcal{E}.$$

Sustituyendo

$$W(\lambda,\mu)=W_1(\lambda)+W_2(\mu)$$

y multiplicando por $\sigma_1^2(\operatorname{senh}^2\lambda+\operatorname{sen}^2\mu)$ se obtiene la pareja de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\left(W_1'(\lambda)\right)^2=2m\left(\sigma^2\mathcal{E}+E\right)\operatorname{senh}^2\lambda+2m\gamma$$

$$\left(W_2'(\mu)\right)^2=2m\left(\sigma^2\mathcal{E}-E\right)\operatorname{sen}^2\mu+2m(E-\gamma)$$

donde γ es la constante de separación

$$\gamma=\frac{p_\lambda^2}{2m}-\left(\sigma^2\mathcal{E}+E\right)\operatorname{senh}^2\lambda.$$

Integrando ambas ecuaciones y sumando se obtiene

$$W=\int\sqrt{2m\left(\sigma^2\mathcal{E}+E\right)\operatorname{senh}^2\lambda+2m\gamma}\,d\lambda+\int\sqrt{2m\left(\sigma^2\mathcal{E}-E\right)\operatorname{sen}^2\mu+2m(E-\gamma)}\,d\mu.$$

Finalmente

$$t+\beta_1=\frac{\partial W}{\partial\mathcal{E}}=m\sigma^2\int\frac{\operatorname{senh}^2\lambda d\lambda}{\sqrt{2m\left(\sigma^2\mathcal{E}+E\right)\operatorname{senh}^2\lambda+2m\gamma}}+m\sigma^2\int\frac{\operatorname{sen}^2\mu d\mu}{\sqrt{2m\left(\sigma^2\mathcal{E}-E\right)\operatorname{sen}^2\mu+2m(E-\gamma)}} \quad (4.3.19)$$

$$\beta_2=\frac{\partial W}{\partial\gamma}=m\int\frac{d\lambda}{\sqrt{2m\left(\sigma^2\mathcal{E}+E\right)\operatorname{senh}^2\lambda+2m\gamma}}-m\int\frac{d\mu}{\sqrt{2m\left(\sigma^2\mathcal{E}-E\right)\operatorname{sen}^2\mu+2m(E-\gamma)}}. \quad (4.3.20)$$

La trayectoria solución se obtiene de (4.3.20)

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_2}{m} &= \int \frac{d\lambda}{\sqrt{-2m(\sigma^2\mathcal{E}+E)\,\text{sen}^2(i\lambda)+2m\gamma}} \\
&\quad - \int \frac{d\mu}{\sqrt{2m(\sigma^2\mathcal{E}-E)\,\text{sen}^2\mu+2m(E-\gamma)}} \\
&= \frac{-i}{2}\int \frac{du}{\sqrt{m(\sigma^2\mathcal{E}+E)\cos u+m(-\sigma^2\mathcal{E}-E+2\gamma)}} \\
&\quad - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{m(-\sigma^2\mathcal{E}+E)\cos v+m(\sigma^2\mathcal{E}+E-2\gamma)}} \\
&= -\frac{1}{2}\left\{iS_1(2i\lambda)+S_2(2\mu)\right\}. \qquad (4.3.21)
\end{aligned}$$

donde $u = 2i\lambda$, $v = 2\mu$ y S_1, S_2 son integrales elípticas de primer tipo[14].

La trayectoria solución del problema asociado al potencial V (4.3.1) con energía E se obtiene sustituyendo las expresiones para λ y μ (4.3.18) en la relación (4.3.21).

Con este ejemplo se muestra la existencia de relaciones hipersimétricas conformes entre problemas separables y no separables, lo cual permite utilizar el teorema 3.2 para aumentar la clase de problemas exactamente solubles.

Es conveniente hacer notar que los resultados obtenidos en los capítulos 2 y 3 no son suficientes para poder afirmar lo anterior, ya que existiría la posibilidad de que todos los potenciales separables que satisfacen la condición $\nabla^2 \ln V = 0$, estuvieran solamente relacionados con potenciales también separables.

4.4 Indices de refracción y densidades de masa radialmente simétricos

De la relación (2.14) entre el índice de refracción y el potencial mecánico y del ejemplo 4. 1 se concluye que, las trayectorias de los rayos en un medio tridimensional descrito por un índice que depende únicamente de la distancia radial r son planas y, una vez identificado el plano de éstas, el problema se reduce

[14] *Ibid*, p.154.

a uno en espacio bidimensional, lo que permite aplicar las técnicas discutidas en este trabajo

Por otro lado, las membranas con densidad superficial de masa radialmente simétrica $\sigma = \sigma(r)$ resultan de interés en el estudio de los tambores musicales circulares y, específicamente en el problema de ajustar modelos de densidad que reproduzcan las vibraciones armónicas de la *Thabala* mencionado en el capítulo 2.

En esta sección se estudian los índices de refracción y densidades de membrana radiales más sencillos, que son los que pertenecen a la clase $\mathcal{H}_1$.

Por definición, dichos potenciales generalizados deben satisfacer las ecuaciones

$$\nabla^2 \ln n(r) = 0, \qquad \nabla^2 \ln \sigma(r) = 0 \tag{4.4.1}$$

respectivamente, cuya solución general aparece en la sección 4. 1 y es $n(r) = \sigma(r) = ar^b$ o

$$n(w,\overline{w}) = \sigma(w,\overline{w}) = a(w\overline{w})^{\frac{b}{2}} \tag{4.4.2}$$

en coordenadas $(w,\overline{w})$, con a y b constantes reales.

De las expresiones (3.20) y (3.24) que definen los potenciales σ_{on} y n_{om} se tiene que

$$\sigma_{o1}(r) = n_{o1}(r) \equiv 1.$$

A diferencia de como ocurre con el resto de las clases $\mathcal{H}_m$, *todos* los miembros de $\mathcal{H}_1$ están relacionados con los potenciales generalizados σ_{o1} y n_{o1}, ya que al sustituir estos últimos en las condiciones (2.38) y (2.10a) respectivamente se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(w,\overline{w}) &= \left|f'_\sigma(w)\right|^2 \\ \tilde{n}(w,\overline{w}) &= \left|f'_n(w)\right|, \end{aligned}$$

y la hipótesis (4.4.1) junto con el teorema 3. 1 aseguran que los potenciales (4.4.2) las satisfacen.

De la expresión (3.22)

$$\begin{aligned} f'_\sigma(w) &= [\sigma(w,\overline{w})]^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{2}\int_{(w_o,\overline{w}_o)}^{(w,\overline{w})} \frac{\sigma_{,w'}}{\sigma} dw' - \frac{\sigma_{,\overline{w}'}}{\sigma} d\overline{w}'} \\ &= a^{\frac{1}{2}} w^{\frac{b}{2}}, \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

que se obtiene de (4.1.2) haciendo $\mathcal{E} = -1$.

De (3.26)

$$
\begin{aligned}
f_n'(w) &= \left[n^2(w,\overline{w})\right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\int_{(w_0,\overline{w}_0)}^{(w,\overline{w})} \frac{n^2_{,w'}}{n^2}dw' - \frac{n^2_{,\overline{w}'}}{n^2}d\overline{w}'} \\
&= a(w\overline{w})^{\frac{b}{2}} e^{\frac{b}{2}\ln\frac{w}{\overline{w}}} \\
&= aw^b.
\end{aligned} \tag{4.4.4}
$$

Integrando ambas expresiones se obtienen las transformaciones f_σ y f_n

$$
f_\sigma(w) = \begin{cases} \sqrt{a}\frac{2}{b+2}w^{\frac{b+2}{2}} & b \neq -2 \\ \sqrt{a}\ln w & b = -2 \end{cases} \tag{4.4.5}
$$

y

$$
f_n(w) = \begin{cases} \frac{a}{b+1}w^{b+1} & b \neq -1 \\ a\ln w. & b = -1 \end{cases} \tag{4.4.6}
$$

La inversa $F_n(z)$ se obtiene al resolver la ecuación $z = f_n(w)$.
Para $b \neq -1$

$$
z = \frac{a}{b+1}w^{b+1} \qquad w = \left[\frac{b+1}{a}z\right]^{\frac{1}{b+1}}.
$$

Cuando $b = -1$

$$
z = a\ln w \qquad w = e^{\frac{z}{a}}
$$

y

$$
F_n(z) = \begin{cases} \left[\frac{b+1}{a}z\right]^{\frac{1}{b+1}} & b \neq -1 \\ e^{\frac{z}{a}} & b = -1. \end{cases} \tag{4.4.7}
$$

F_σ se obtiene de (4.1.4) haciendo $\mathcal{E} = -1$ y

$$
F_\sigma(z) = \begin{cases} a^{\frac{-1}{b+2}}\left[\frac{b+2}{2}z\right]^{\frac{2}{b+2}} & b \neq -2 \\ e^{\frac{z}{\sqrt{a}}}. & b = -2 \end{cases} \tag{4.4.8}
$$

Para obtener la trayectoria solución de los rayos que pasan entre los puntos (u_o, v_o) y (u_1, v_1) en el medio óptico caracterizado por el índice de refracción n (4.4.2) se calcula la trayectoria entre los puntos (x_o, y_o) y (x_1, y_1) en el medio con índice $n_{o1} = 1$, que resulta ser el segmento

$$z(\tau) = z_o + \tau(z_1 - z_o), \qquad \tau \in [0,1]$$

donde

$$z_j = f_n(w_j), \qquad j = 0, 1. \tag{4.4.9}$$

y $z_j = x_j + iy_j$, $w_j = u_j + iv_j$ para $j = o, 1$. Se calcula la imágen de esta curva bajo la transformación F_n como indica la relación (2.10b)

$$w(\tau) = F_n \circ z(\tau) = \begin{cases} \left[\frac{b+1}{a}\left(z_o + \tau(z_1 - z_o)\right)\right]^{\frac{1}{b+1}} & b \neq -1 \\ e^{\frac{1}{a}\left(z_o + \tau(z_1 - z_o)\right)}. & b = -1 \end{cases}$$

Sustituyendo en esta expresión los valores de z_j de la relación (4.4.9) se obtiene

$$w(\tau) = \begin{cases} \left[w_o^{b+1} + \tau\left(w_1^{b+1} - w_o^{b+1}\right)\right]^{\frac{1}{b+1}} & b \neq -1 \\ z_o \left(\frac{z_1}{z_o}\right)^{\tau}, & b = -1 \end{cases} \tag{4.4.10}$$

que representa las trayectorias solución en forma paramétrica compleja, de la *familia* de problemas asociados a los índices de refracción (4.4.2).

Utilizando las relaciones $w_j = r_j e^{i\theta_j}$ para $j = 0, 1$ se obtienen las ecuaciones paramétricas en forma real

$$r(\tau) = \left[r_o^{2(b+1)}(1-\tau)^2 + r_1^{2(b+1)}\tau^2 + 2(r_o r_1)^{b+1}(1-\tau)\tau \cos[(b+1)(\theta_1 - \theta_o)]\right]^{\frac{1}{2(b+1)}}$$

$$\tan[(b+1)\theta(\tau)] = \frac{(1-\tau)r_o^{b+1} \operatorname{sen}(b+1)\theta_o + \tau r_1^{b+1} \operatorname{sen}(b+1)\theta_1}{(1-\tau)r_o^{b+1} \cos(b+1)\theta_o + \tau r_o^{b+1} \cos(b+1)\theta_1} \tag{4.4.11}$$

para $b \neq -1$ y,

$$\begin{aligned} r(\tau) &= r_o \left(\frac{r_1}{r_o}\right)^{\tau} \\ \tan\theta(\tau) &= \tan\left(\theta_o + \tau(\theta_1 - \theta_o)\right) \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

cuando $b = -1$.

Las familias de soluciones son útiles en el "diseño" de sistemas ópticos. Si la trayectoria requerida forma parte de la familia, la combinación de parámetros que identifican dicha trayectoria proporciona directamente el índice de refracción que la produce.

Análogamente, las membranas caracterizadas por la densidad superficial de masa σ (4.4.2) están hipersimétricamente relacionadas con la de densidad $\sigma_{o1} \equiv 1$ a través de la transformación f_σ (4.4.5).

La ecuación para las vibraciones transversales de la membrana asociada a las densidades de masa $\sigma = \sigma(r)$ es separable en coordenadas polares con soluciones de la forma

$$\psi(r,\theta) = \mathcal{R}(r)\cos(l\theta + \theta_o), \tag{4.4.13}$$

y la ecuación radial para $\mathcal{R}$ es

$$\mathcal{R}''(r) + \frac{1}{r}\mathcal{R}'(r) + \left[\frac{\omega^2}{T}\sigma(r) - \frac{l^2}{r^2}\right]\mathcal{R}(r) = 0 \tag{4.4.14}$$

donde la constante de separación l debe ser un entero para que ψ sea univaluada.

Como se mencionó en el capítulo 2, junto con la ecuación (4.4.2) deben especificarse las condiciones de frontera para que la solución esté bien definida y, cuando la frontera coincide con porciones de las curvas coordenadas, cada una de las eigenfunciones satisface las condiciones de frontera.

Tal es el caso de las membranas circulares con densidad de masa radial y frontera $r = r_o$.

Sustituyendo σ_{o1} en (4.4.14) se obtiene la ecuación de Bessel con argumento $\frac{\omega}{\sqrt{T}}r$

$$r^2\frac{d^2}{dr^2}Z_l\left(\frac{\omega}{\sqrt{T}}r\right) + r\frac{d}{dr}Z_l\left(\frac{\omega}{\sqrt{T}}r\right) + \left[\frac{\omega^2}{T}r^2 - l^2\right]Z_l\left(\frac{\omega}{\sqrt{T}}r\right) = 0,$$

cuyas soluciones independientes son las funciones de Bessel $J_l\left(\frac{\omega}{\sqrt{T}}r\right)$ y las de Neumann $N_n\left(\frac{\omega}{\sqrt{T}}r\right)$, ya que l es entero[15].

[15] Arfken [1985], p.578.

Las condiciones de frontera son

$$\psi(r_o,\theta)=0, \qquad |\psi(r,\theta)|<\infty \quad r\in[0,r_o].$$

Las funciones de Neumann divergen en $r=0$ y deben ser descartadas por incompatibilidad con las condiciones de frontera.

Como consecuencia de exigir $\psi(r_o)=0$ se obtiene la cuantización de la frecuencia angular ω

$$\omega_{lj}=\frac{\sqrt{T}}{r_o}\mu_j^{(l)}. \tag{4.4.15}$$

donde $\mu_j^{(l)}$ es la raíz número j de la función J_l.

A las eigenfunciones

$$\psi_{lj}(r,\theta)=J_l\left(\frac{\omega_{lj}}{\sqrt{T}}r\right)\cos(l\theta+\theta_o) \tag{4.4.16}$$

asociadas a las frecuencias ω_{lj} se les llama modos normales y, la solución espacial al problema de la membrana con densidad de masa $\sigma_{01}=1$ es la serie

$$\psi(r,\theta)=\sum_{l,j\in\mathbb{N}} a_{lj}\,\psi_{lj}(r,\theta). \tag{4.4.17}$$

Los coeficientes a_{lj} se determinan mediante las condiciones iniciales[16].

De la expresión (4.4.15) se concluye que las frecuencias normales ω_{lj} no están armónicamente relacionadas entre sí para la membrana con densidad constante.

Para obtener las soluciones de los problemas de membranas circulares con densidades σ (4.4.2), —según la expresión (2.30)- es necesario aplicar la transformación f_σ a la solución general del problema para σ_{01} y después imponer las condiciones iniciales y de frontera.

Sustituyendo $w=Re^{i\Theta}$ y $z=re^{i\theta}$ en la expresión (4.4.5) se obtienen las relaciones inducidas por f_σ.

[16] Esto se logra expresando las condiciones iniciales ψ_o y ψ'_o como series del tipo (4.4.17), lo cual es posible siempre y cuando ψ_o y ψ'_o sean dos veces diferenciables espacialmente y satisfagan las condiciones de frontera. (Tijunov y Samarsky (1972), p.678.)

Para $b \neq -2$

$$r = \frac{2\sqrt{a}}{b+2} R^{\frac{b+2}{2}}$$
$$\theta = \frac{b+2}{2}\Theta + 2\pi k.$$

Introduciendo estos valores en la solución (4.4.13) se obtiene

$$\Phi(R,\Theta) = \mathcal{R}\left(\frac{2\sqrt{a}}{b+2} R^{\frac{b+2}{2}}\right) \cos\left(\frac{l(b+2)}{2}\Theta\right).$$

La univaluación de la parte angular restringe los valores de l según

$$l = \frac{2m}{b+2}, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Si l es entero, las soluciones radiales son funciones de Bessel y funciones de Neumann, pero estas últimas se descartan porque divergen en $R = 0$, al igual que en el problema de $\sigma_{01} = 1$, quedando

$$J_l\left(\frac{\omega}{\sqrt{T}} \frac{2\sqrt{a}}{b+2} R^{\frac{b+2}{2}}\right), \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Para l no entero las dos soluciones radiales independientes son

$$J_{\pm l}\left(\frac{\omega}{\sqrt{T}} \frac{2\sqrt{a}}{b+2} R^{\frac{b+2}{2}}\right), \qquad l \notin \mathbb{Z}.$$

La condición de frontera $\varphi(R_o, \Theta) = 0$ implica la cuantización de la frecuencia angular

$$\omega_{mj} = \sqrt{\frac{T}{a}} \frac{b+2}{2} R_o^{-\frac{b-2}{2}} \mu_j^{\left(\frac{2m}{b+2}\right)} \qquad \begin{array}{l} m \in \mathbb{Z} \ \text{ si } \ l \notin \mathbb{Z} \\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ \text{ si } \ l \in \mathbb{Z} \end{array} \qquad (4.4.18)$$

donde $\mu_j^{\left(\frac{2m}{b+2}\right)}$ es el cero número j de la función de Bessel J_l, con $l = \frac{2m}{b+2}$.

Los modos normales son

$$\varphi_{mj}(R,\Theta) = J_{\frac{2m}{b+2}}\left(\frac{2\omega_{mj}}{b+2}\sqrt{\frac{a}{T}}R^{\frac{b+2}{2}}\right)\cos(m\Theta+\Theta_o),$$

$$\begin{array}{c} m\in \mathbb{Z} \text{ si } l\notin \mathbb{Z} \\ m\in \mathbb{N}\cup\{0\} \text{ si } l\in\mathbb{Z} \end{array} \tag{4.4.19}$$

y la solución espacial general que satisface las condiciones de frontera es

$$\varphi(r,\Theta) = \sum_{m,j} a_{mj}\,\varphi_{mj}(r,\Theta). \tag{4.4.20}$$

Al sustituir $w = Re^{i\Theta}$ y $z = x+iy$ en la expresión de f_σ para $b=-2$ se obtiene

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a}\ln R \\ y &= \sqrt{a}\Theta. \end{aligned} \tag{4.4.21}$$

La ecuación para las vibraciones de la membrana con densidad σ_{o1} también es separable en coordenadas cartesianas. El par de ecuaciones ordinarias resulta

$$\begin{aligned} &X''(x) + \left(\frac{\omega^2}{T} - k^2\right)X(x) = 0 \\ &Y''(y) + k^2 Y(y) = 0 \end{aligned} \tag{4.4.22}$$

donde k^2 es la constante de separación.

La solución general del sistema (4.4.22) es

$$\begin{aligned} X(x) &= Ae^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{T}-k^2}\,x} \\ Y(y) &= Be^{iky} \end{aligned}$$

con A y B constantes complejas. La solución completa de la ecuación de la membrana resulta

$$\psi(x,y) = Ce^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{T}-k^2}\,x}e^{iky}.$$

Sustituyendo las expresiones (4.4.) (4.4.21) se obtiene la solución espacial general de la ecuación asociada a $\sigma(R) = (\cdot) = aR^{-2}$.

$$\varphi(R,\Theta) = Ce^{i\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{T}\ \frac{c}{T}\ \frac{\omega^2}{T}-k^2\right)a}\,\ln R}\ e^{ik\sqrt{a}\Theta}.$$

Imponiendo las condiciones de u u e univaluación y de frontera $\varphi(R_o,\Theta) = 0$ se obtienen restricciones para k y ω

$$\sqrt{a}k = l \in Z, \qquad \omega_{lj} = \sqrt{\frac{T}{a}\left[\left(\frac{}{1\cdot1}\right)\left(\frac{j\pi}{\ln R_o}\right)^2 - l^2\right]}, \qquad j \in Z \tag{4.4.23}$$

Los modos normales son

$$\varphi_{lj}(R,\Theta) = \operatorname{sen}\sqrt{\frac{\omega_{lj}^2}{Ta} - \frac{\dot{b}}{a} - l^2}\,\ln R\,\cos(l\Theta + \Theta_o) \tag{4.4.24}$$

y la solución espacial completa

$$\varphi(R,\Theta) = \sum_{l,j\in N} \sum_{l\in N} a_{lj}\varphi_{lj}(R,\Theta). \tag{4.4.25}$$

En el marco de los intentos por a ar ajustar modelos de densidad superficial de masa al tambor indio *Thabala*, Gosh[17] a [17] resolvió la ecuación para $\sigma(R) = R^{-1}$ y $\sigma(R) = R^{-2}$.

Por su parte Rao[18] resolvió la ec as ecuación para $\sigma(R) = R^{-n}$, $n > 0$.

En esta sección se ha logrado mo mostrar que las membranas de Gosh y Rao que pertenecen a la clase más gene ne neral $\sigma(R) = aR^b$ son equivalentes a la membrana con densidad constante, adem: ademas de haber encontrado las soluciones de la ecuación de la membrana para toda toda la clase —(4.4.18)–(4.4.20) y (4.4.23)–(4.4.25).

[17] Gosh [1922].

[18] Ramakrishna y Sondhi [1954].

De las expresiones (4.4.18) y (4.4.23) se deduce que los modelos con $\sigma(R) = R^{-n}$, $n > 0$ son inaceptables para describir la Thabala como lo afirman Ramakrishna y Mohan Sondhi en el artículo que proponen una densidad de escalón[19]. Además se concluye que ninguna membrana circular con densidad $\sigma(R) = R^b$, $b \in \mathbf{R}$ tiene modos normales armónicos.

4.5 Contraejemplos

En esta sección se discuten dos contraejemplos asociados al teorema 3.3.

i) Un potencial generalizado que no pertenece a la familia $\mathfrak{F}$.

Se conoce como *ojo de pescado* de Maxwell al medio caracterizado por el índice de refracción

$$n(r) = n_o \left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{-1} \tag{4.5.1}$$

con n_o y a constantes y tiene la propiedead de formar imágenes perfectas de objetos puntuales —todos los rayos que emergen de un punto convergen nuevamente en otro; el punto imagen—.

Al aplicar el operador $\nabla^2 \ln$ al índice (4.5.1) se obtiene

$$\nabla^2 \ln(r) = -\nabla^2 \ln\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)$$

pero

$$\begin{aligned}\nabla^2 \ln\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right) &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\ln\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2\frac{r^2}{a^2}}{1 + \frac{r^2}{a^2}}\right)\\ &= \frac{4}{a^2}\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-2}\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

[19] *Ibid.*

y

$$\nabla^2 \ln n(r) = \frac{4}{a^2}\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)^{-2}.$$

Aplicando nuevamente el mismo operador y utilizando la expresión (4.5.2) se obtiene

$$\begin{aligned}\nabla^2 \ln \nabla^2 \ln n(r) &= \nabla^2 \ln\left(\frac{-4}{a^2}\right) - 2\nabla^2 \ln\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)\\ &= -\frac{8}{a^2}\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)^{-2}.\end{aligned}$$

En general

$$\left(\nabla^2 \ln\right)^k n(r) = -\frac{8}{a^2}\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)^{-2}, \qquad k \geq 2,$$

ya que

$$\left(\nabla^2 \ln\right)^{k+1} n(r) = \nabla^2 \ln\left(-\frac{8}{a^2}\left[1+\frac{r^2}{a^2}\right]^{-2}\right)$$

por hipótesis de inducción y,

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2 \ln\right)^{k+1} n(r) &= \nabla^2 \ln\left(-\frac{8}{a^2}\right) - 2\nabla^2 \ln\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)\\ &= -\frac{8}{a^2}\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)^{-2}.\end{aligned}$$

Resumiendo se tiene

$$\left(\nabla^2 \ln\right)^k n(r) = \begin{cases} -\frac{4}{a^2}\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)^{-2} & k=1 \\ -\frac{8}{a^2}\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)^{-2} & k \in \mathrm{N}, \quad k \geq 2. \end{cases}$$

y

$$\left(\nabla^2 \ln\right)^k n(r) \not\equiv 0 \qquad \forall k \in \mathrm{N},$$

por lo que el ojo de pescado de Maxwell constituye un ejemplo de un índice de refracción que no pertenece a la familia $\mathfrak{F}$ y ésta no puede contener a toda la clase de potenciales generalizados.

El carácter numerable de dicha familia sugiere además que la cardinalidad de ésta debe ser menor que la de su complemento.

ii) Sobre la insuficiencia de las condiciones necesarias del teorema 3.3.

En el capítulo 3 se mencionó que el que dos potenciales generalizados pertenezcan a la misma clase $\mathcal{H}_n$ no es suficiente para que estén hipersimétricamente relacionados según las expresiones (2.10*a*) y (2.38).

Como contraejemplo se utilizan las densidades $\sigma(x,y)$ y $\sigma_1(u,v)$ con

$$\begin{aligned} \sigma(x,y) &= e^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)} \\ \sigma_1(u,v) &= e^{e^{uv}}. \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Aplicando el operador $\nabla^2 \ln$ se obtiene

$$\nabla^2_{(x,y)} \ln \sigma(x,y) = \frac{1}{4}\nabla^2_{(x,y)} \left(x^2+y^2\right) = 1,$$

y esto implica que σ es del tipo σ_{o2} y

$$\nabla^2_{(u,v)} \ln \sigma_1(u,v) = \nabla^2_{(u,v)} e^{uv} = \left(u^2+v^2\right) e^{uv}. \tag{4.5.4}$$

Aplicando nuevamente el mismo operador se obtiene

$$\left(\nabla^2_{(x,y)} \ln\right)^2 \sigma(x,y) \equiv 0$$

y

$$\left(\nabla^2_{(u,v)} \ln\right)^2 \sigma_1(u,v) = \nabla^2_{(u,v)} \ln(u^2+v^2) + \nabla^2_{(u,v)} uv = \nabla^2_{(u,v)} \ln(u^2+v^2),$$

pero

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln(u^2+v^2) = \frac{2u^2-2v^2}{(u^2+v^2)^2}.$$

Análogamente

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} \ln(u^2+v^2) = \frac{2v^2-2u^2}{(u^2+v^2)^2},$$

y sumando se obtiene

$$\left(\nabla^2_{(u,v)} \ln\right)^2 \sigma_1(u,v) \equiv 0,$$

lo que implica que σ y $\sigma_1$pertenecen a la clase $\mathcal{K}_2$.

Como $\sigma = \sigma_{o2}$, si σ y σ_1 están relacionados según (2.38), la función conforme f_1 debe ser

$$f_1(w) = \int_{w_o}^{w} \left[\nabla^2 \ln \sigma_1(w', \overline{w}')\right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\int_{(w_o', \overline{w}_o')}^{(w', \overline{w}')} \frac{(\nabla^2 \ln \sigma_1)_{,\xi}}{\nabla^2 \ln \sigma_1} d\xi - \frac{(\nabla^2 \ln \sigma_1)_{,\overline{\xi}}}{\nabla^2 \ln \sigma_1} d\overline{\xi}} dw'. \quad (3.22)$$

La expresión (4.5.4) en coordenadas $(w, \overline{w})$ aparece como

$$\nabla^2 \ln \sigma_1(w\overline{w}) = w\overline{w} e^{\frac{i}{4}(\overline{w}^2 - w^2)}$$

Sustituyendo en (3.22) se obtiene

$$f_1(w) = 2ie^{-\frac{i}{4}w^2},$$
$$f_1'(w) = we^{-\frac{i}{4}w^2},$$
$$\left|f_1'(w)\right|^2 = |w|^2 e^{-\frac{i}{4}(\overline{w}^2 - w^2)}.$$

Al sustituir en la expresión (2.38) se obtiene

$$\sigma_1(w, \overline{w}) = |w|^2 e^{\frac{i}{4}(\overline{w}^2 - w^2)} e^{e^{\frac{i}{4}(\overline{w}^2 - w^2)}},$$

y en coordenadas (u, v)

$$\sigma_1(u, v) = (u^2 + v^2) e^{uv} e^{e^{uv}},$$

que difiere claramente de la expresión (4.5.3). La contradicción proviene de haber supuesto que σ y σ_1 satisfacían la relación (2.38). De aquí se concluye que los potenciales no están hipersimétricamente relacionados a través de una transformación conforme, aún cuando ambos pertenecen a la clase $\mathcal{K}_2$.

Sea ahora

$$w = \varsigma^{-1}$$

con $\varsigma = \xi + i\eta$. La densidad superficial σ_2 definida mediante la expresión (2.38) como

$$\begin{aligned} \sigma_2(\varsigma,\bar{\varsigma}) &= \left|-\varsigma^{-2}\right|^2 \sigma_1(\varsigma^{-1},\bar{\varsigma}^{-1}) \\ &= |\varsigma|^{-4} e^{e^{\frac{i}{4}(\bar{\varsigma}^{-2}-\varsigma^{-2})}} \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

está, por construcción, hipersimétricamente relacionada con σ_1 a través de $g(\varsigma) = \varsigma^{-1}$ y el teorema asegura que pertenece a la clase $\mathcal{H}_2$.

Si σ_2 estuviera relacionada con σ a través de $f_2(\varsigma)$ se tendría, de (3.22)

$$f_2(\varsigma) = -2ie^{-\frac{i}{4}\varsigma^{-2}},$$

y al sustituir en (2.38) se obtiene

$$\sigma_2(\varsigma,\bar{\varsigma}) = |\varsigma|^{-6} e^{\frac{i}{4}(\bar{\varsigma}^{-2}-\varsigma^{-2})} e^{e^{\frac{i}{4}(\bar{\varsigma}^{-2}-\varsigma^{-2})}}$$

que difiere claramente de la expresión (2.38).

Esto permite concluir que σ_1 y σ_2 están hipersimétricamente relacionados aún cuando no sea a través de la densidad $\sigma = \sigma_{o2}$. Un camino alternativo para mostrar lo anterior es utilizar directamente la transitividad de la equivalencia hipersimétrica conforme para probar que σ_2 y σ no pueden estar relacionados según la expresión (2.38).

Cuando dos potenciales generalizados pertenecen a la misma clase $\mathcal{H}_m$ y no están relacionados a través de n_{om} o σ_{om}, el teorema 3. 3 en general no proporciona información que permita determinar si están o no hipersimétricamente relacionados por una transformación conforme.

Conclusiones

En este trabajo se realizó una revisión de la H-invariancia conforme para las teorías bidimensionales de Optica Geométrica, Mecánica Clásica y Mecánica Ondulatoria , introduciendo el Análisis de Variables Complejas como una poderosa herramienta en el manejo de las transformaciones conformes involucradas.

También se encontraron otras ecuaciones de la Física-Matemática H-invariantes ante transformaciones conformes; las ecuaciones de Poisson y de onda, así como la ecuación para las oscilaciones transversales de membranas. Esta última representa una teoría que describe fenómenos bidimensionales, a diferencia de las anteriores que son modelos asociados a fenómenos originalmente en tres dimensiones.

Al final del capítulo 2 se mencionaron algunas de las limitaciones que tendría una teoría de H-invariancia conforme en más de dos dimensiones. Sin embargo, también es cierto que la transformación de Kustaanheimo-Stiefel —el primer ejemplo de una hipersimetría— puede generalizarse a cuatro dimensiones para relacionar el problema tridimensional de Kepler con el oscilador armónico en cuatro dimensiones y una constricción. Esto costituye un motivo para investigar la teoría tridimensional con y sin constricciones, aún cuando la cardinalidad de la clase de transformaciones conformes de dimensión mayor a dos sea considerablemente menor a la de transformaciones bidimensionales.

Existe también la posibilidad de considerar alguna clase más general que la de las funciones conformes, menos restringida sobre todo en tres y más dimensiones y, buscar teorías en dos y más dimensiones, H-invariantes ante una clase más grande de transformaciones.

Entre otras posibilidades para continuar investigando en relación a este tema estarían, la búsqueda de nuevas ecuaciones o principios variacionales conformalmente H-invariantes y, el tratar de generalizar los resultados obtenidos en Mecánica Clásica y Ondulatoria a otro tipo de potenciales, específicamente aquellos que dependen de las velocidades y coordenadas generalizadas como el potencial electromagnético clásico. Quizá como un proyecto más ambicioso puede mencionarse, el intentar generalizar las transformaciones en teorías de campo clásicas, de manera tal que las "variables" en cuestión sean la función de campo y sus derivadas. Estas juegan el mismo papel que las coordenadas espaciales en teorías de partículas, ya que las transformaciones que se han aplicado en este trabajo a las ecuaciones de Schrödinger y Poisson, así como a la ecuación de onda y a la ecuación de las vibraciones de la membrana, involucran únicamente las coordenadas espaciales, que en las teorías de campo clásicas actúan como parámetros análogos al tiempo.

Una proposición igual de ambiciosa que la anterior sería, la generalización de las hipersimetrías a transformaciones que llevaran de un problema descrito por algun modelo a otro descrito por un modelo *distinto*; por ejemplo, de un problema de oscilaciones de la membrana a otro de trayectorias en Optica Geométrica.

Quizá la aportación prinicipal de este trabajo consista en una serie de resultados comprendidos dentro de lo que podría llamarse "El problema inverso del Cálculo de Hipersimetrías", que de manera general consiste en determinar si dos problemas están o no hipersimétricamente relacionados y, poder encontrar la transformación en caso que lo estén.

En Mecánica Clásica y Ondulatoria se encontró que para el potencial V, la condición $\nabla^2 \ln V = 0$ es necesaria y suficiente para que esté relacionado con el potencial $\mathcal{V}$ a través de las condiciones (2.21). Estas últimas son únicamente un caso particular de la relación (2.19). Cuando esto sucede puede encontrarse la transformación conforme mediante un proceso de integración. Queda entoces por investigar, si existe una versión más general del teorema 3.2, con condiciones para determinar si dos potenciales están relacionados a través de la condición (2.19). De ésta última pueden obtenerse hipersimetrías distintas, como se ilustra con el ejemplo del potencial de tipo Morse en el capítulo 4.

Para las vibraciones de la membrana y el problema de la Optica Geométrica, se hallaron condiciones necesarias que permiten determinar si dos problemas están relacionados y, en ese caso, puede hallarse la transformación mediante un proceso análogo al utilizado en Mecánica. Se mostró además con los contraejemplos del capítulo 4, que dichas condiciones no son suficientes, quedando abierta la posibilidad de una generalización del teorema 3. 3.

Por último, cabe mencionar que los métodos encontrados permiten abordar desde una perspectiva distinta, problemas de "diseño" de medios ópticos o de membranas con densidad no homogénea, a partir de las trayectorias o modos de vibración deseados, como en el caso de ajustar modelos para la Thabala. Por otro lado, el haber podido relacionar un problema en general no separable con uno separable, plantea nuevas interrogantes en torno al problema de separabilidad y generación de soluciones exactas.

Apéndices

Apéndice 1

Obtención de las ecuaciones para las trayectorias de los rayos y de movimiento, en coordenadas generalizadas, a partir de los principios variacionales de Fermat y Maupertius respectivamente.

En una variedad riemanniana de dimensión k con tensor métrico g_{ij} cubierta por un sistema apropiado de coordenadas $\{q\}$, el elemento diferencial de longitud dl se define mediante

$$dl^2 \equiv g_{ij}(q)dq^i dq^j. \tag{A1.1}$$

Utilizando esta expresión en el Principio de Fermat (2.4) e introduciendo el parámetro auxiliar τ se obtiene

$$\delta \int n(q)\frac{dl}{d\tau}d\tau = \delta \int n(q)\sqrt{g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j}\,d\tau = 0 \tag{A1.2}$$

donde $q^l = q^l(\tau)$ y $\dot{q}^l \equiv \frac{dq^l}{d\tau}$.

La trayectoria solución satisface las ecuaciones de Euler[1]

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, k \tag{A1.3}$$

donde

$$L(q, \dot{q}) = n(q)\sqrt{g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j}. \tag{A1.4}$$

Sustituyendo $(A1.4)$ en las ecuaciones $(A1.3)$ se obtiene, para el primer término

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^s}\right) &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}\frac{n(q)}{dl/d\tau}g_{ij}(q)\left[\delta^i{}_s\dot{q}^j + \delta^j{}_s\dot{q}^i\right]\right) \\
&= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}\frac{d\tau}{dl}n(q)\left[g_{sj}(q)\dot{q}^j + g_{is}(q)\dot{q}^i\right]\right) \\
&= \frac{d}{d\tau}\left(n(q)g_{is}(q)\dot{q}^i\frac{d\tau}{dl}\right) \\
&= \frac{dl}{d\tau}\frac{d}{dl}\left(n(q)g_{is}(q)\frac{dq^i}{dl}\right)
\end{aligned}$$

[1] Morse y Feshbach [1953], p. 276.

y para el segundo

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q^s} &= \frac{\partial n(q)}{\partial q^s}\frac{dl}{dr} + \frac{1}{2}\frac{dr}{dl}n(q)\frac{\partial g_{ij}(q)}{\partial q^s}\dot{q}^i\dot{q}^j \\ &= \frac{\partial n(q)}{\partial q^s}\frac{dl}{dr} + \frac{1}{2}n(q)\frac{\partial g_{ij}(q)}{\partial q^s}\frac{dq^i}{dl}\frac{dq^j}{dl}\frac{dl}{dr}.\end{aligned}$$

Restando el segundo término del primero e igualando a cero resulta que

$$\frac{dl}{dr}\left[\frac{d}{dl}\left(n(q)g_{is}(q)\frac{dq^i}{dl}\right) - \frac{\partial n(q)}{\partial q^s} - \frac{1}{2}n(q)\frac{\partial g_{ij}(q)}{\partial q^s}\frac{dq^i}{dl}\frac{dq^j}{dl}\right] = 0 \qquad s = 1,\ldots,k.$$

Finalmente, multiplicando por $n\frac{dr}{dl}$ se obtienen las ecuaciones, en coordenadas generalizadas, para la trayectoria de los rayos correspondientes a las ecuaciones (2.7):

$$n\frac{d}{dl}\left[ng_{is}\frac{dq^i}{dl}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial n}{\partial q^s} + \frac{1}{2}n^2\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^s}\frac{dq^i}{dl}\frac{dq^j}{dl} \qquad s = 1,\ldots,k. \qquad (A1.5)$$

□

Para obtener el Principio de Maupertius de la expresión ($A1.2$) basta hacer la identificación

$$n(q) = \sqrt{2m\left(E - V(q)\right)}, \qquad (A1.6)$$

y para las ecuaciones de movimiento es suficiente con sustituir ($A1.6$) en las ecuaciones ($A1.5$) y utilizar el parámetro de Luneburg definido mediante

$$\frac{d}{dt} = \frac{\sqrt{2m\left(E - V(q)\right)}}{m}\frac{d}{dl} = \frac{n(q)}{m}\frac{d}{dl} \qquad (A1.7),$$

obteniendo

$$m\frac{d}{dt}\left[g_{is}(q)m\frac{dq^i}{dt}\right] = -m\frac{\partial V(q)}{\partial q^s} + \frac{1}{2}m^2\frac{\partial g_{ij}(q)}{\partial q^s}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt}. \qquad s = 1,\ldots,k.$$

Derivando la expresión entre corchetes y agrupando términos se obtiene

$$m\left[\frac{\partial g_{is}(q)}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i + g_{is}(q)\ddot{q}^i - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}(q)}{\partial q^s}\dot{q}^i\dot{q}^j\right] = -\frac{\partial V(q)}{\partial q^s} \qquad s = 1,\ldots,k.$$

donde $\dot{q}^s \equiv \frac{dq^s}{dt}$.

Multiplicando por g^{ls} y observando que los índices j e i aparecen contraidos, la expresión anterior se transforma en

$$m\left[\delta^l{}_i(q)\ddot{q}^i + \frac{1}{2}g^{ls}(q)\left\{\frac{\partial g_{is}(q)}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{js}(q)}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}(q)}{\partial q^s}\right\}\dot{q}^i\dot{q}^j\right]$$
$$= -\frac{\partial V(q)}{\partial q^s}g^{ls}(q), \qquad l = 1,\ldots,k.$$

que equivale finalmente a

$$m\left[\ddot{q}^l + \Gamma^l{}_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\right] = F^l, \qquad l = 1.\ldots,k. \qquad (A1.8)$$

Estas son las ecuaciones de Newton en coordenadas generalizadas, donde Γ representa los coeficientes de la conexión y F la fuerza generalizada, con

$$\Gamma^l{}_{ij} = \frac{1}{2}g^{ls}(q)\left\{\frac{\partial g_{is}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^s}\right\}, \qquad F^l = -g^{ls}\frac{\partial V}{\partial q^s}. \qquad (A1.9)$$

□

Esto mustra que el parámetro de Luneburg definido en términos de la longitud mediante la relación $(A1.7)$ es, efectivamente, el tiempo.

Apéndice 2

H-invariancia conforme de los principios de Fermat y Maupertius en coordenadas generalizadas.

Sea S una variedad riemanniana con tensor métrico g_{ij}. Para la siguiente discuisión es necesario distinguir entre puntos de S y las coordenadas que los representan.

Los distintos puntos de S se denotarán mediante barras (*i.e.* $\bar{q}$), mientras que para denotar las componentes del punto q en distintos sistemas de coordenadas se utilizarán primas (*i.e.* q'^{i}).

Es también preciso distinguir entre dos tipos de transformaciones en S. Una es la transformación *activa*

$$\bar{q}^{i} = f^{i}(q),$$

y proporciona las componentes del punto $\bar{q}$ si se conocen las componentes de q, ambas en el mismo sistema de coordenadas[1].

El otro tipo de transformación es un cambio de coordenadas, y asocia a las componentes del punto q en el sistema C, las componentes del *mismo* punto en el sistema C'

$$q'^{i} = h'^{i}(q).$$

A este tipo se le conoce como transformación *pasiva*[2].

Sea f una transformación activa e invertible de S en sí mismo, con inversa F:

$$q = f(\bar{q}) \qquad \bar{q} = F(q). \tag{A2.1}$$

Según la definición de la sección 2.1, f es conforme si preserva ángulos. En una variedad riemanniana las funciones distancia y ángulo se definen como

$$dl^2(q) \equiv g_{ij}(q)dq^{i}dq^{j}$$

$$\cos\theta \equiv \frac{g_{ij}dq^{i}\delta q^{j}}{\sqrt{|g_{ij}dq^{i}dq^{j}|\cdot|g_{ij}\delta q^{i}\delta q^{j}|}}.$$

---

[1] Es necesario que q y $\bar{q}$ estén cubiertos por la misma carta coordenada.

[2] Fulton, *et.al*, [1962].

Si una región $A \subset S$ es conformalmente mapeada en la región $B \subset S$ y los puntos correspondientes están cubiertos por la misma carta coordenada, los elementos de longitud en ambas regiones se relacionan a través de[3]

$$dl^2(q) = \alpha^2(\overline{q})dl^2(\overline{q}), \qquad (A2.2a)$$

donde

$$\alpha : S \longrightarrow \mathrm{R}^+,$$

$$dl^2(q) = g_{ij}(q)dq^i dq^j, \qquad dl^2(\overline{q}) = g_{ij}(\overline{q})d\overline{q}^i d\overline{q}^j. \qquad (A2.2b)$$

Sean q^i y q'^i dos sistemas de coordenadas relacionados mediante la función h con inversa H

$$q^i = h^i(q') \qquad q'^i = H'^i(q). \qquad (A2.3)$$

Se demuestra primero la H-invariancia conforme del Principo de Fermat, que en coordenadas q^i se expresa mediante

$$\delta \int_\gamma n(q)\sqrt{g_{ij}(q)dq^i dq^j} = 0$$

donde $q = \gamma(r)$ es la trayectoria solución.

Aplicando la transformación $(A2.1)$ y haciendo uso de las relaciones $(A2.2)$ se obtiene

$$\delta \int_{F\circ\gamma} n\left(f(\overline{q})\right) \sqrt{\alpha^2(\overline{q})g_{ij}(\overline{q})d\overline{q}^i d\overline{q}^j} = 0$$

y efectuando el cambio de coordenadas $(A2.3)$:

$$\delta \int_{H'\circ F\circ\gamma} n\left(f\circ h(\overline{q}')\right)\alpha\left(h(\overline{q}')\right)\sqrt{g_{ij}{}'(\overline{q}')d\overline{q}'^i d\overline{q}'^j} = 0, \qquad (A2.4)$$

[3] Kuiper (1948).

es decir,

$$\delta \int_{\tilde{\gamma}} \tilde{n}(\overline{q}') \sqrt{g'_{ij}(\overline{q}') d\overline{q}'^i d\overline{q}'^j} = 0 \qquad (A2.5a)$$

donde

$$\tilde{n}(\overline{q}') = n\big(f \circ h(\overline{q}')\big) \alpha\big(h(\overline{q}')\big) \qquad (A2.5b)$$

y las soluciones γ y $\tilde{\gamma}$ están relacionadas mediante

$$\tilde{\gamma} \equiv H' \circ F \circ \gamma. \qquad (A2.5c)$$

□

Para mostrar la H-invariancia conforme del Principio de Maupertius en coordenadas generalizadas,

$$\delta \int_{\gamma} \sqrt{2m\,(E - V(q))} \sqrt{g_{ij}(q) dq^i dq^j} = 0$$

con solución $q = \gamma(t)$, se hace la identificación

$$n(q) = \sqrt{2m\,(E - V(q))}$$

y se sustituye en la expresión $(A2.4)$ obteniendo

$$\delta \int_{H' \circ F \circ \gamma} \sqrt{2m\,[E - V\,(f \circ h(\overline{q}'))]} \alpha\,(h(\overline{q}'))\, \sqrt{g_{ij}'(\overline{q}') d\overline{q}'^i d\overline{q}'^j} = 0, \qquad (A2.6)$$

con solución

$$\tilde{\gamma} \equiv H' \circ F \circ \gamma. \qquad (A2.7d)$$

Exigiendo la condición adicional

$$\big[E - V\,\big(f \circ h(\overline{q}')\big)\big]\, \alpha^2(h(\overline{q}')) = \mathcal{E} - \mathcal{V}(\overline{q}') \qquad (A2.8)$$

con $\mathcal{V}$ independiente de $\mathcal{E}$, $(A2.6)$ se convierte nuevamente en el Principio de Maupertius

$$\delta \int \sqrt{2m\,(\mathcal{E} - \mathcal{V}(\overline{q}'))} \sqrt{g_{ij}(\overline{q}') d\overline{q}'^i d\overline{q}'^j} = 0. \qquad (A2.7a)$$

Para satisfacer la condición $(A2.8)$ es suficiente si se cumplen

$$V\left(f \circ h(\bar{q}')\right)\alpha^2\left(h(\bar{q}')\right) = -\mathcal{E} \qquad (A2.7b)$$

$$\mathcal{V}(\bar{q}') = -\alpha^2\left(h(\bar{q}')\right)E. \qquad (A2.7c)$$

La transformación temporal (2.22) se obtiene utilizando la regla de la cadena[4]

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dl(\bar{q})}\frac{dl(\bar{q})}{dl(q)}\frac{dl(q)}{dt}. \qquad (A2.8)'$$

De la expresión $(A2.2)$:

$$\frac{dl(\bar{q})}{dl(q)} = \frac{1}{\alpha(\bar{q})},$$

y de la definición del parámetro de Luneburg (2.16):

$$\frac{dl(\bar{q})}{ds} = \frac{\sqrt{2m[\mathcal{E} - \mathcal{V}(\bar{q})]}}{m}, \qquad \frac{dl(q)}{dt} = \frac{\sqrt{2m[E - V(q)]}}{m}.$$

Finalmente, sustituyendo estas expresiones en $(A2.8)$ y utilizando la condición $(A2.8)$ se obtiene

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\alpha^2(\bar{q})}. \qquad (A2.9)$$

□

[4] Como el elemento de longitud es invariante ante cambios de coordenadas, se utiliza $dl^2(\bar{q}) = g_{ij}(\bar{q})d\bar{q}^i d\bar{q}^j$ directamente en lugar de $d\bar{l}^2(\bar{q}) = g'_{ij}(\bar{q}')d\bar{q}'^i d\bar{q}' q^j$.

Apéndice 3

H-invariancia conforme, en coordenadas generalizadas, de las ecuaciones de Schrödinger independiente del tiempo y de las oscilaciones transversales de una membrana.

En coordenadas generalizadas, las ecuciones de Schrödinger independiente del tiempo y de las oscilaciones transversales de una membrana son

$$\nabla^2\psi(q) + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(q)]\psi(q) = 0, \qquad (A3.1)$$

$$T_o\nabla^2\Psi(q,t) - \sigma(q)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(q,t) = -\epsilon(q,t). \qquad (A3.2)$$

Para mostrar la H-invariancia conforme en ambos casos, es necesario encontrar, como en el capítulo 2, la ley de transformación conforme para el operador laplaciano pero ahora en coordenadas generalizadas.

Sea S una variedad riemanniana de dimensión n con tensor métrico g_{ij}, y sea f una transformación activa, conforme en S y con inversa F como en el apéndice 2.

Según las definiciones del apéndice 2 y utilizando la misma notación:

$$q^i = f^i(\overline{q}) \qquad \overline{q}^i = F^i(q). \qquad (A2.1)$$

y los elementos de longitud se transforman según

$$dl^2(q) = \alpha^2(\overline{q})dl^2(\overline{q}), \qquad (A2.2a)$$

donde

$$\alpha : S \longrightarrow \mathbf{R}^+,$$

$$dl^2(q) = g_{ij}(q)dq^i dq^j, \qquad dl^2(\overline{q}) = g_{ij}(\overline{q})d\overline{q}^i d\overline{q}^j. \qquad (A2.2b)$$

Sustituyendo las expresiones $(A2.2b)$ en $(A2.2a)$ y tomando en cuenta la ley de transformación

$$d\overline{q}^i = \frac{\partial\overline{q}^i}{\partial q^j}dq^j$$

se obtiene

$$g_{ij}(q)dq^i dq^j = \alpha^2(\overline{q})g_{kl}(\overline{q})\frac{\partial \overline{q}^k}{\partial q^i}\frac{\partial \overline{q}^l}{\partial q^j}dq^i dq^j$$

y

$$g_{ij}(\overline{q})\alpha^2(\overline{q}) = g_{kl}(q)\frac{\partial q^k}{\partial \overline{q}^i}\frac{\partial q^l}{\partial \overline{q}^j} \tag{A3.3}$$

para la transformación de la métrica[1].

En coordenadas generalizadas y evaluando en el punto $\overline{q}$, la expresión covariante para el laplaciano actuando sobre el campo escalar ϕ es[2]

$$\nabla_{\overline{q}}^{\ 2}\phi(\overline{q}) = \frac{1}{\overline{g}^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial \overline{q}^i}\left(\overline{g}^{\frac{1}{2}}\overline{g}^{ik}\frac{\partial \phi(\overline{q})}{\partial \overline{q}^k}\right), \tag{A3.4}$$

donde por brevedad se ha utilizado la notación

$$\overline{g}^{ik} \equiv g^{ik}(\overline{q}), \qquad g \equiv \det(g_{ij}).$$

En forma análoga a la composición (2.30), se define

$$\phi(\overline{q}) \equiv \psi(f(\overline{q})). \tag{A3.5}$$

Haciendo uso de ($A3.3$) en ($A3.4$) se obtiene

$$\begin{aligned}
\nabla_{\overline{q}}^{\ 2}\psi(f(\overline{q})) &= \frac{1}{\overline{g}^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial \overline{q}^i}\left(\left[\det\left(\frac{1}{\alpha^2}g_{kl}\frac{\partial q^k}{\partial \overline{q}^i}\frac{\partial q^l}{\partial \overline{q}^j}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \overline{q}^i}{\partial q^m}\frac{\partial \overline{q}^k}{\partial q^r}g^{mr}\alpha^2\frac{\partial q^s}{\partial \overline{q}^k}\frac{\partial}{\partial q^s}\psi(f(\overline{q}))\right)\\
&= \frac{1}{\overline{g}^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial \overline{q}^i}\left(\frac{1}{\alpha^n}g^{\frac{1}{2}}\frac{\partial(q)}{\partial(\overline{q})}\frac{\partial \overline{q}^i}{\partial q^m}g^{mr}\alpha^2\frac{\partial}{\partial q^r}\psi(f(\overline{q}))\right)
\end{aligned} \tag{A3.6}$$

---

[1] Nótese la diferencia entre esta expresión y la de covariancia de la métrica, lo cual se debe al carácter activo de la transformación f.

[2] Arfken (1985), p. 165.

donde

$$\frac{\partial(q)}{\partial(\overline{q})} \equiv \det\left(\frac{\partial q^i}{\partial \overline{q}^j}\right)$$

es el jacobiano de la transformación f.

Volviendo a $(A3.6)$

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{\overline{q}}{}^2\psi\left(f(\overline{q})\right)\\
&= \frac{1}{\overline{g}^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{\partial}{\partial\overline{q}^i}\left(\alpha^{2-n}\frac{\partial(q)}{\partial(\overline{q})}\frac{\partial\overline{q}^i}{\partial q^m}\right)g^{\frac{1}{2}}g^{mr}\frac{\partial\psi\left(f(\overline{q})\right)}{\partial q^r}+\alpha^{2-n}\frac{\partial(q)}{\partial(\overline{q})}\frac{\partial}{\partial q^m}\left(g^{\frac{1}{2}}g^{mr}\frac{\partial\psi\left(f(\overline{q})\right)}{\partial q^r}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\overline{g}^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{\partial(q)}{\partial(\overline{q})}\frac{\partial\overline{q}^i}{\partial q^m}\frac{\partial\alpha^{2-n}(\overline{q})}{\partial\overline{q}^i}+\alpha^{2-n}\left[\frac{\partial}{\partial q^m}\left(\frac{\partial(q)}{\partial(\overline{q})}\right)+\frac{\partial(q)}{\partial(\overline{q})}\frac{\partial}{\partial\overline{q}^i}\left(\frac{\partial q^i}{\partial q^m}\right)\right]\right\}\\
&\qquad\times g^{\frac{1}{2}}g^{mr}\frac{\partial}{\partial q^r}\psi\left(f(\overline{q})\right)+\frac{\alpha^{2-n}}{\alpha^{-n}g^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial q^m}\left(g^{\frac{1}{2}}g^{mr}\frac{\partial}{\partial q^r}\psi\left(f(\overline{q})\right)\right)\\
&= \frac{1}{\overline{g}^{\frac{1}{2}}}\left\{(2-n)\frac{\partial(q)}{\partial(\overline{q})}\alpha^{1-n}\frac{\partial\alpha(\overline{q})}{\partial q^m}+\alpha^{2-n}\left[\frac{\partial}{\partial q^m}\left(\frac{\partial(\overline{q})}{\partial(q)}\right)^{-1}+\frac{\partial(q)}{\partial(\overline{q})}\frac{\partial}{\partial\overline{q}^i}\left(\frac{\partial q^i}{\partial q^m}\right)\right]\right\}\\
&\qquad\times g^{\frac{1}{2}}g^{mr}\frac{\partial}{\partial q^r}\psi\left(f(\overline{q})\right)+\alpha^2(\overline{q})\nabla_q{}^2\psi(q)\,\big|_{q=f(\overline{q})}\\
&= (2-n)\alpha\frac{\partial\alpha(q)}{\partial q^m}g^{mr}\frac{\partial}{\partial q^r}\psi\left(f(\overline{q})\right)\\
&\qquad+\alpha^2\frac{\partial(\overline{q})}{\partial(q)}\left[-\left(\frac{\partial(\overline{q})}{\partial(q)}\right)^{-2}\frac{\partial}{\partial q^m}\left(\frac{\partial(\overline{q})}{\partial(q)}\right)+\frac{\partial(q)}{\partial(\overline{q})}\frac{\partial}{\partial\overline{q}^i}\left(\frac{\partial q^i}{\partial q^m}\right)\right]\\
&\qquad\quad\times g^{mr}\frac{\partial}{\partial q^r}\psi\left(f(\overline{q})\right)+\alpha^2(\overline{q})\nabla_q{}^2\psi(q)\,\big|_{q=f(\overline{q})}\\
&= \left\{\frac{(2-n)}{2}\frac{\partial\alpha^2(\overline{q})}{\partial q^m}+\alpha^2\left[\frac{\partial}{\partial\overline{q}^i}\left(\frac{\partial\overline{q}^i}{\partial q^m}\right)-\frac{\partial(q)}{\partial(\overline{q})}\frac{\partial}{\partial q^m}\left(\frac{\partial(\overline{q})}{\partial(q)}\right)\right]\right\}\\
&\qquad\times g^{mr}\frac{\partial\psi(q)}{\partial q^r}\,\big|_{q=f(\overline{q})}+\alpha^2(\overline{q})\nabla_q{}^2\psi(q)\,\big|_{q=f(\overline{q})} \qquad\qquad (A3.7)
\end{aligned}
$$

Pero el término en corchetes de la expresión anterior es cero, ya que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{q}^i}\left(\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^m}\right) - \frac{\partial(q)}{\partial(\bar{q})}\frac{\partial}{\partial q^m}\left(\frac{\partial(\bar{q})}{\partial(q)}\right)
&= \frac{\partial}{\partial \bar{q}^i}\left(\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^m}\right) - \frac{\partial(q)}{\partial(\bar{q})}\frac{\partial(\bar{q})}{\partial(q)}\frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i}\frac{\partial}{\partial q^m}\left(\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial \bar{q}^i}\left(\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^m}\right) - \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i}\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^m}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

La expresión $(AS.7)$ se reduce a

$$\nabla_{\bar{q}}^2\phi(\bar{q}) = \left(\frac{2-n}{2}\right)\frac{\partial\alpha^2(\bar{q})}{\partial q^m}g^{mr}\frac{\partial\psi(q)}{\partial q^r}\bigg|_{q=f(\bar{q})} + \alpha^2(\bar{q})\nabla_q^2\psi(q)\Big|_{q=f(\bar{q})} \qquad (AS.8)$$

y para $n=2$:

$$\nabla_{\bar{q}}^2\phi(\bar{q}) = \alpha^2(\bar{q})\nabla_q^2\psi(q)\Big|_{q=f(\bar{q})}. \qquad (AS.9)$$

□

Esta demostración permite apreciar la importancia de la hipótesis de espacio bidimensional.

Para mostrar la H-invariancia conforme de la ecuación $(AS.1)$ en el caso bidimensional, basta con evaluarla en $q=f(\bar{q})$ y utilizar la relación $(AS.9)$, obteniendo

$$\nabla_{\bar{q}}^2\phi(\bar{q}) + \frac{2m}{\hbar^2}\alpha^2(\bar{q})\left[E - V\left(f(\bar{q})\right)\right]\phi(\bar{q}) = 0, \qquad (AS.10)$$

y exigiendo

$$\left[E - V\left(f(\bar{q})\right)\right]\alpha^2(\bar{q}) = \mathcal{E} - \mathcal{V}(\bar{q}), \qquad (AS.11)$$

se obtiene la nueva ecuación de Schrödinger

$$\nabla_{\bar{q}}^2\phi(\bar{q}) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[\mathcal{E} - \mathcal{V}(\bar{q})\right]\phi(\bar{q}) = 0. \qquad (AS.12)$$

□

En forma análoga, evaluando la ecuación bidimensional $(A3.2)$ en $q = f(\overline{q})$ y utilizando la relación $(A3.9)$ se obtiene

$$T\,\nabla^2_{\overline{q}}\Phi(\overline{q},t) - \alpha^2(\overline{q})\sigma\left(f(\overline{q})\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\overline{q},t) = -\alpha^2(\overline{q})\,\epsilon\left(f(\overline{q}),t\right), \qquad (A3.13)$$

que es equivalente a

$$T\,\nabla^2_{\overline{q}}\Phi(\overline{q},t) - \tilde{\sigma}(\overline{q})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\overline{q},t) = -\tilde{\epsilon}(\overline{q},t) \qquad (A3.14)$$

donde

$$\Phi(\overline{q},t) \equiv \Psi\left(f(\overline{q}),t\right) \qquad (A3.15)$$

$$\tilde{\sigma}(\overline{q}) \equiv \sigma\left(f(\overline{q})\right)\alpha^2(\overline{q}) \qquad (A3.16)$$

$$\tilde{\epsilon}(\overline{q}) \equiv \epsilon\left(f(\overline{q})\right)\alpha^2(\overline{q}), \qquad (A3.17)$$

con lo que concluye la prueba de la H-invariancia conforme de la ecuación $(A3.2)$.

□

La expresión $(A3.4)$ para el poerador laplaciano es covariante ante transformaciones —pasivas— de coordenadas, lo que implica la covariancia bajo transformaciones de coordenadas de las ecuaciones $(A3.12)$ y $(A3.14)$.

Lo anterior significa que si h es una transformación de coordenadas con inversa H:

$$q^i = h^i(q') \qquad\qquad q'^i = H(q) \qquad (A3.18)$$

y las soluciones en el sistema de coordenadas C a los problemas de Schrödinger —independiente del tiempo— con potencial $\mathcal{V}(\overline{q})$ y, de la membrana con densidad de masa $\tilde{\sigma}(\overline{q})$ y densidad de fuerza externa $\epsilon(\overline{q})$, son los campos $\phi(\overline{q})$ y $\Phi(\overline{q},t)$ respectivamente, entonces las soluciones a los mismos problemas en el sistema de coordenadas C' son $\tilde{\phi}(\overline{q}') \equiv \phi\left(h(\overline{q}')\right)$ y $\tilde{\Phi}(\overline{q}') \equiv \Phi\left(h(\overline{q}'),t\right)$.

Lo anterior pude utilizarse para relacionar hipersimétricamente los problemas de Schrödinger asociados a los potenciales $V(q)$ en coordenadas C y $\mathcal{V}(\overline{q}')$ en coordenadas C', siempre y cuando satisfagan la condición

$$\left[E - V\left(f\circ h(\overline{q}')\right)\right]\alpha^2\left(h(\overline{q}')\right) = \mathcal{E} - \mathcal{V}(\overline{q}'). \qquad (A3.19)$$

En este caso, las soluciones se relacionan mediante

$$\tilde{\phi}(\overline{q}') \equiv \phi\left(h(\overline{q}')\right) = \psi\left(f\circ h(\overline{q}')\right), \qquad (A3.20)$$

relaciones que se obtienen aplicando la transformación de coordenadas $(A3.18)$ a las expresiones $(A3.11)$ y $(A3.5)$.

La condición $(A3.19)$ es igual a $(A2.8)$ para el caso clásico y la manera más sencilla de satisfacerla es a través de $(A2.7)$

$$V\left(f \circ h(\vec{q}')\right) \alpha^2 \left(h(\vec{q}')\right) = -\mathcal{E}$$

$$\mathcal{V}(\vec{q}') = -\alpha^2 \left(h(\vec{q}')\right) E.$$

En forma análoga pueden relacionarse los problemas de oscilaciones de membrana asociados a las densidades $\sigma(q)$ y $\tau(q)$ en coordenadas C, con los problemas asociados a las densidades $\tilde{\sigma}(\vec{q}')$ y $\tilde{\tau}(\vec{q}')$ en coordenadas C'; siempre y cuando se cumplan

$$\tilde{\sigma}(\vec{q}') = \sigma\left(f \circ h(\vec{q}')\right) \alpha^2 \left(h(\vec{q}')\right) \qquad (A3.21)$$

$$\tilde{\tau}(\vec{q}') = \left(f \circ h(\vec{q}')\right) \alpha^2 \left(h(\vec{q}')\right) \qquad (A3.22)$$

y las soluciones están relacionadas según

$$\tilde{\Phi}(\vec{q}', t) \equiv \Phi\left(h(\vec{q}'), t\right) = \Psi\left(f \circ h(\vec{q}'), t\right). \qquad (A3.23)$$

Las tres últimas expresiones se obtienen de $(A3.16)$,$(A3.17)$,$(A3.15)$ y la transformación de coordenadas $(A3.18)$.

Apéndice 4

H-invariancia conforme de la ecuación de difusión.

Para mostrar la H-invariancia conforme de la ecuación de difusión

$$k(\mathbf{r})\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t) + \nabla k(\mathbf{r})\cdot\nabla\Psi(\mathbf{r},t) - c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = -\epsilon(\mathbf{r},t) \qquad (2.55)$$

discutida en el capítulo 2, es necesario obtener la expresión (2.56) para el término $\nabla k(\mathbf{r})\cdot\nabla\Psi(\mathbf{r},t)$.

En coordenadas cartesianas (x,y)

$$\nabla k\cdot\nabla\Psi = \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial y} \qquad (A4.1)$$

y para expresar este término en las variables $(z,\bar{z})$ se utiliza la transformación inversa a (2.3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\\ \frac{\partial}{\partial y} &= i\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial}{\partial\bar{z}}.\end{aligned} \qquad (A4.2)$$

Sustituyendo en $(A4.1)$

$$\begin{aligned}\nabla k\cdot\nabla\Psi &= \left(\frac{\partial k}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial\bar{z}}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{z}}\right) - \left(\frac{\partial k}{\partial z} - \frac{\partial k}{\partial\bar{z}}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{z}}\right)\\ &= 2\frac{\partial k(z,\bar{z})}{\partial z}\frac{\partial\Psi(z,\bar{z};t)}{\partial\bar{z}} + 2\frac{\partial k(z,\bar{z})}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\Psi(z,\bar{z};t)}{\partial z}.\end{aligned} \qquad (A4.3)$$

Considerando la transformación $z = f(w)$ y la regla de la cadena, resulta que

$$\frac{\partial k\left(f(w),\bar{f}(\bar{w})\right)}{\partial w} = \left.\frac{\partial k(z,\bar{z})}{\partial z}\right|_{\substack{z=f(w)\\ \bar{z}=\bar{f}(\bar{w})}} f'(w)$$

$$\frac{\partial k\left(f(w),\bar{f}(\bar{w})\right)}{\partial\bar{w}} = \left.\frac{\partial k(z,\bar{z})}{\partial\bar{z}}\right|_{\substack{z=f(w)\\ \bar{z}=\bar{f}(\bar{w})}} \bar{f}'(\bar{w})$$

y para las derivadas de Ψ los resultados son análogos.

Sustituyendo en $(A4.3)$ para las variables $(w,\overline{w})$ se obtiene la relación buscada:

$$\begin{aligned}
\nabla_{(w,\overline{w})} k\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)\cdot\nabla_{(w,\overline{w})}\Psi\left(f(w),\overline{f}(\overline{w});t\right) \\
&= 2\frac{\partial k\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)}{\partial w}\frac{\partial\Psi\left(f(w),\overline{f}(\overline{w});t\right)}{\partial\overline{w}} \\
&\quad +2\frac{\partial k\left(f(w),\overline{f}(\overline{w})\right)}{\partial\overline{w}}\frac{\partial\Psi\left(f(w),\overline{f}(\overline{w});t\right)}{\partial w} \\
&= 2\left|f'(w)\right|^2\left[\frac{\partial k(z,\overline{z})}{\partial z}\frac{\partial\Psi(z,\overline{z};t)}{\partial\overline{z}}+\frac{\partial k(z,\overline{z})}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\Psi(z,\overline{z};t)}{\partial z}\right]_{\substack{z=f(w)\\ \overline{z}=\overline{f}(\overline{w})}} \\
&= \left|f'(w)\right|^2\left[\nabla_{(z,\overline{z})}k(z,\overline{z})\cdot\nabla_{(z,\overline{z})}\Psi(z,\overline{z};t)\right]_{\substack{z=f(w)\\ \overline{z}=\overline{f}(\overline{w})}}. \qquad (A4.4)
\end{aligned}$$

□

La expresión correspondiente en coordenadas generalizadas se obtiene de manera sencilla.

Utilizando la misma notación de los apéndices 2 y 3, el gradiente en coordenadas generalizadas se escribe como[1]

$$\nabla_q k(q) = \frac{\partial k(q)}{\partial q^i}\varepsilon^i$$

donde

$$\varepsilon_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}, \qquad \varepsilon_i\cdot\varepsilon_j = g_{ij}.$$

De las expresiones anteriores

$$\begin{aligned}
\nabla_q k(q)\cdot\nabla_q\Psi(q,t) &= \frac{\partial k(q)}{\partial q^i}\varepsilon^i\cdot\frac{\partial\Psi(q,t)}{\partial q^j}\varepsilon^j \\
&= \frac{\partial k(q)}{\partial q^i}\frac{\partial\Psi(q,t)}{\partial q^j}g^{ki}g^{lj}\varepsilon_k\cdot\varepsilon_l \\
&= \frac{\partial k(q)}{\partial q^i}\frac{\partial\Psi(q,t)}{\partial q^j}g^{ki}g^{lj}g_{kl},
\end{aligned}$$

[1] Arfken [1985], p.158-160.

que implica
$$\nabla_{\bar{q}} p(\bar{q}) \cdot \nabla_{\bar{q}} \Phi(\bar{q},t) = \frac{\partial p(\bar{q})}{\partial \bar{q}^i} \frac{\partial \Phi(\bar{q},t)}{\partial \bar{q}^j} \bar{g}^{ij} \tag{A4.5}$$
donde
$$p(\bar{q}) \equiv k\left(f(\bar{q})\right)$$
$$\Phi(\bar{q},t) \equiv \Psi\left(f(\bar{q}),t\right)$$
y las variables q y $\bar{q}$ están relacionadas a través de la transformación conforme f con inversa F, $q^i = f^i(\bar{q})$.

Utilizando en $(A4.5)$ la ley de transformación para la métrica $(A3.3)$ junto con la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial k\left(f(\bar{q})\right)}{\partial \bar{q}^i} \frac{\partial \Psi\left(f(\bar{q}),t\right)}{\partial \bar{q}^j} \bar{g}^{ij} &= \left.\frac{\partial k(q)}{\partial q^k}\right|_{q=f(\bar{q})} \left.\frac{\partial \Psi(q,t)}{\partial q^l}\right|_{q=f(\bar{q})} \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \frac{\partial q^l}{\partial \bar{q}^j} \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^r} \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^s} g^{rs} \alpha^2(\bar{q}) \\ &= \left.\frac{\partial k(q)}{\partial q^k}\right|_{q=f(\bar{q})} \left.\frac{\partial \Psi(q,t)}{\partial q^l}\right|_{q=f(\bar{q})} g^{kl} \alpha^2(\bar{q}). \end{aligned}$$

es decir
$$\nabla_{\bar{q}} p(\bar{q}) \cdot \nabla_{\bar{q}} \Phi(\bar{q},t) = \alpha^2(\bar{q}) \left[\nabla_q k(q) \cdot \nabla_q \Psi(q,t)\right]_{q=f(\bar{q})}. \tag{A4.6}$$

□

Por otro lado, como se aprecia con el siguiente cálculo directo, la expresión $(A4.5)$ es covariante ante transformaciones de coordenadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial k\left(h(q')\right)}{\partial q'^i} \frac{\partial \Psi\left(h(q'),t\right)}{\partial q'^j} g'^{ij} &= \frac{\partial k(q)}{\partial q^k} \frac{\partial \Psi(q,t)}{\partial q^l} \frac{\partial q^k}{\partial q'^i} \frac{\partial q^l}{\partial q'^j} \frac{\partial q'^i}{\partial q^r} \frac{\partial q'^j}{\partial q^s} g^{rs} \\ &= \frac{\partial k(q)}{\partial q^k} \frac{\partial \Psi(q,t)}{\partial q^l} g^{kl}. \end{aligned} \tag{A4.7}$$

Las expresiones $(A3.9)$ y $(A4.6)$ permiten mostrar la H-invariancia conforme de la ecuación de difusión (2.55) en el sistema de coordenadas C. Debido a la covariancia ante transformaciones de coordenadas del laplaciano $(A3.27)$ así como de la del término $\nabla k \cdot \nabla \Psi$ $(A4.7)$, es posible efectuar el cambio de coordenadas para pasar al sistema C', obteniendo

$$\begin{aligned} &k\left(f \circ h(\bar{q}')\right) \nabla^2_{\bar{q}'} \Psi\left(f \circ h(\bar{q}'),t\right) + \nabla_{\bar{q}'} k\left(f \circ h(\bar{q}')\right) \cdot \nabla_{\bar{q}'} \Psi\left(f \circ h(\bar{q}'),t\right) \\ &\quad - c\left(f \circ h(\bar{q}')\right) \rho\left(f \circ h(\bar{q}')\right) \alpha^2\left(h(\bar{q}')\right) = -\epsilon\left(f \circ h(\bar{q}'),t\right) \alpha^2\left(h(\bar{q}')\right) \end{aligned}$$

que puede reescribirse como

$$\hat{p}(\vec{q}')\nabla^2_{(\vec{q}')}\hat{\Phi}(\vec{q}',t) + \nabla_{(\vec{q}')}\hat{p}(\vec{q}')\cdot\nabla_{(\vec{q}')}\hat{\Phi}(\vec{q}',t) - \hat{c}(\vec{q}')\hat{\rho}(\vec{q}') = -\hat{\imath}(\vec{q}'),$$

definiendo

$$\begin{aligned}
\hat{p}(\vec{q}') &= p\left(h(\vec{q}')\right) = k\left(f\circ h(\vec{q}')\right)\\
\hat{\Phi}(\vec{q}',t) &= \Phi\left(h(\vec{q}'),t\right) = \Psi\left(f\circ h(\vec{q}'),t\right)\\
\hat{c}(\vec{q}')\hat{\rho}(\vec{q}') &= \tilde{c}\left(h(\vec{q}')\right)\tilde{\rho}\left(h(\vec{q}')\right) = \alpha^2\left(h(\vec{q}')\right)c\left(f\circ h(\vec{q}')\right)\rho\left(f\circ h(\vec{q}')\right)\\
\hat{\imath}(\vec{q}') &= \tilde{\imath}\left(h(\vec{q}')\right) = \alpha^2\left(h(\vec{q}')\right)\imath\left(f\circ h(\vec{q}')\right).
\end{aligned}$$

Apéndice 5

Condiciones de Cauchy-Riemann para funciones expresadas en forma polar.

Para la función compleja g expresada en forma cartesiana

$$g(x,y) = u(x,y) + iv(x,y),$$

las condiciones de Cauchy-Riemann son

$$\begin{aligned} u_{,x} &= \quad v_{,y} \\ u_{,y} &= -v_{,x}\,. \end{aligned} \qquad (A5.1)$$

Pero la función g también puede expresarse en forma polar como

$$g(x,y) = R(x,y)e^{i\Theta(x,y)}$$

donde

$$\begin{aligned} u(x,y) &= R(x,y)\cos\Theta(x,y) \\ v(x,y) &= R(x,y)\,\mathrm{sen}\,\Theta(x,y). \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones para las partes real e imaginaria en las condiciones $(A5.1)$ se obtiene el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} \left(R_{,x} - R\,\Theta_{,y}\right)\cos\Theta &= \quad \left(R_{,y} + R\,\Theta_{,x}\right)\mathrm{sen}\,\Theta \\ \left(R_{,x} - R\,\Theta_{,y}\right)\mathrm{sen}\,\Theta &= -\left(R_{,y} + R\,\Theta_{,x}\right)\cos\Theta \end{aligned}$$

que se satisfacen para cualquier pareja de valores (x,y) si y solo si se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} R_{,x} &= \quad R\,\Theta_{,y} \\ R_{,y} &= -R\,\Theta_{,x}\,, \end{aligned}$$

que son entonces equivalentes con $(A5.1)$.

□

Apéndice 6

Obtención de funciones analíticas a partir de su módulo en coordenadas generalizadas.

Para obtener la expresión análoga a (3.3) en coordenadas generalizadas es conveniente introducir la métrica simpléctica bidimensional S, con elementos

$$S^0{}_0 = S^1{}_1 = 0, \qquad S^1{}_2 = 1, \qquad S^2{}_1 = -1.$$

El uso de esta métrica permite escribir la definición (3.5) del argumento Θ como

$$\Theta(\tilde{x}^l) - \Theta(\tilde{x}^l_o) = \int_{\tilde{x}_o}^{\tilde{x}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \ln R\right) S^i{}_j \, dx^j$$

donde $x^1 \equiv x$ y $x^2 \equiv y$.

Utilizando la transformación $x^l = h^l(q)$ que relaciona las coordenadas generalizadas q con las cartesianas x se obtiene

$$\Theta(\tilde{q}^r) - \Theta(\tilde{q}^r_o) = \int_{h(\tilde{q}^r_o)}^{h(\tilde{q}^r)} \left(\frac{\partial}{\partial q^k} \ln R\right) \frac{\partial q^k}{\partial x^i} S^i{}_j \frac{\partial x^j}{\partial q^l} dq^l. \qquad (A6.1)$$

Definiendo la métrica T como

$$T^i{}_j(q) = \frac{\partial q^i}{\partial x^k} S^k{}_l \frac{\partial x^l}{\partial q^j}, \qquad (A6.2b)$$

la expresión $(A6.1)$ se transforma en

$$\Theta(\tilde{q}^r) - \Theta(\tilde{q}^r_o) = \int_{h(\tilde{q}^r_o)}^{h(\tilde{q}^r)} \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \ln R\right) T^i{}_j \, dq^j, \qquad (A6.2a)$$

y la relación (3.6) en

$$g(\tilde{q}^r) = R(\tilde{q}^r) e^{\,i \int_{h(\tilde{q}^r_o)}^{h(\tilde{q}^r)} \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \ln R\right) T^i{}_j \, dq^j}. \qquad (A6.3)$$

□

Bibliografía

Ahlfors [1953].
Ahlfors L.V., *Complex analysis*. Third Edition, 1979. International Student Edition, McGraw-Hill. Singapore.

Arfken [1985].
Arfken G., *Mathematical methods for physicists*. Third Edition. 1985. Academic Press Inc. Orlando, Florida.

Berg y Stork [1982].
Berg R., Stork D., *The physics of sound*. 1982. Prentice Hall. U.S.A.

Born y Wolf [1980].
Born M., Wolf E., *Principles of optics* Sixth Edition, 1980. Pergamon Press, Exter G.B.

Cohen-Tannoudji, *et. al.* [1977].
Cohen-Tannoudji C., Diu B., Laloë F., *Quantum mechanics*. 1977. John Wiley & Sons.-Hermann. Paris.

Cornish [1983].
Cornish F.H.J., *The hydrogen atom and the four-dimensional harmonic oscillator.* J.Phys.A: Math. Gen. **17**, 323-327. (1984).

Cornish [1984].
Cornish F.H.J., *Kepler orbits and the harmonic oscillator.* J.Phys.A: Math. Gen.**17**, 2191-2197. (1984).

Eisenhart [1948].
Eisenhart L.P., *Enumeration of potentials for which one-particle Schrödinger equations are separable.* Phys. Rev. **74**, 1, 87-89. (1948).

Flügge [1971].
Flügge S., *Practical quantum mechanics I*. 1971. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg.

Fulton, *et. al.* [1962].
Fulton T., Rohrich F., Witten L., *Conformal invariance in physics*. Rev. of Modern Phys. **34**, 3, 442-457. (1962).

Goldstein [1980].
Goldstein H., *Classical mechanics*. Second Edition. 1980. Addison-Wesley Publishing Co. Menlo Park, California.

Gosh [1922].

Gosh R.N., *Note on musical drums.* Phys.Rev. 20, 52 526-527. (1922).

Gradshteyn y Ryzhik [1965].

Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M., *Table of integrals, series and products.* 1965. Academic Press Inc. New York.

Hojman y Núñez [1989].

Hojman S., Núñez D., *Hypersymmetries in bidimensional mechanics.* Comunicaciones Internas. ICNUNAM, 1989.

Kuiper [1948].

Kuiper N.H., *On conformally-flat spaces in the large.* Ann. of Math. 50, 4, 916-924. (1949).

Ho e Inomata [1981].

Ho R., Inomata A., *Exact path integral treatment of the hydrogen atom.* Phys. Rev. Lett. 48, 4, 231-234. (1982).

Lamb [1980].

Lamb G.L.Jr., *Elements of soliton theory.* 1980. Pure & Applied Mathematics, John Wiley & Sons. New York.

Landau y Lifshitz [1960].

Landau L.D., Lifshitz E.M., *Mechanics* Third English Edition. 1978. Pergamon Press. Oxford.

Luneburg [1984].

Luneburg R.K., *Mathematical theory of optics.* 1984. U. of California at Berkeley Press. Berkeley, California.

Marsden [1973].

Marsden J.E., *Basic complex analysis.* 1973. W.H. Freeman & Co. San Francisco, California.

Morse y Feshbach [1953].

Morse P.M., Feshbach M., *Methods of theoretical physics.* 1953 .International Student Edition, McGraw-Hill. Japan.

Morse e Ingard [1968].

Morse P., Ingard K., *Theoretical acoustics.* 1968. McGraw-Hill. Japan.

Ramakrishna y Sondhi [1954].
Ramakrishna B.S., Sondhi M.M. *Vibrations of indian musical drums regarded as composite membranes* J.A.S.A. **26**, 4, 523-529. (1954).

Roque [1989].
Roque M.A., *Simetrías y soluciones exactas en Optica Geométrica bidimensional.* Tesis de Licenciatura. FCUNAM, 1989.

Sakurai [1985].
Sakurai J.J., *Modern quantum mechanics.* 1985. The Benjamin/Cumming Publishing Co. Inc. Menlo Park, California.

Tijunov y Samarsky [1972].
Tijunov A.N., Samarsky A.A, *Ecuaciones de la Física Matemática.* 1972. Mir. Moscú.