

01170  
2ej. 1

D I V I S I O N   D E   E S T U D I O S   D E   P O S G R A D O  
F A C U L T A D   D E   I N G E N I E R I A

C O N T R O L   D E   F U E R Z A   D E   U N   D I S P O S I T I V O  
E L E C T R O M E C A N I C O   D E   U N   G R A D O   D E   L I B E R T A D

T E S I S

P R E S E N T A D A   A   L A   D I V I S I O N   D E   E S T U D I O S   D E  
P O S G R A D O   D E   L A

F A C U L T A D   D E   I N G E N I E R I A

D E   L A

U N I V E R S I D A D   N A C I O N A L   A U T O N O M A   D E   M E X I C O

C O M O   R E Q U I S I T O   P A R A   O B T E N E R

E L   G R A D O   D E

M A E S T R O   E N   I N G E N I E R I A

E L E C T R I C A

P O R

R I C A R D O   P A R R I L L A   C E R R I L L O

C I U D A D   U N I V E R S I T A R I A

J U L I O   D E   1 9 8 9

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

Capítulo 1 : Introducción.	1
1.1 Presentación.	1
1.2 Objetivos.	1
1.3 Descripción del dispositivo y adaptaciones.	2
1.4 Descripción de la tesis.	6
Capítulo 2 : Modelado.	7
2.1 Introducción.	7
2.2 Modelado del sistema electromecánico utilizado.	7
2.3 Modelo general para manipuladores.	11
2.4 Valores numéricos de los parámetros del sistema.	11
Capítulo 3 : Control Proporcional.	18
3.1 Introducción.	18
3.2 Análisis en lazo abierto.	18
3.3 Análisis en lazo cerrado.	26
3.4 Resultados experimentales.	31
Capítulo 4 : Control P.I.	37
4.1 Introducción.	37
4.2 Análisis.	37
4.3 Resultados experimentales	47
Capítulo 5 : Control P.I. con Realimentación de Velocidad.	52
5.1 Introducción.	52
5.2 Análisis.	52
5.3 Resultados experimentales.	58
Capítulo 6 : Compensación.	63
6.1 Introducción.	63
6.2 Compensación de los pares $\tau_g$ , $\tau_e$ y $\tau_v$ .	63
6.3 Modelado de la fricción no viscosa.	65
6.4 Compensación completa.	67
6.5 Realización.	69
Capítulo 7: Control no lineal.	73
7.1 Introducción.	73
7.2 Análisis.	73
7.3 Sintonización.	76
7.4 Resultados experimentales.	81

Capítulo 8 : Conclusiones.	85
8.1 Introducción.	85
8.2 Ventajas y puntos en contra de los controladores presentados.	85
8.3 Principales dificultades en la experimentación.	88
8.4 Desarrollos futuros.	89
Referencias.	91
Apéndice : Módulos Adicionales y Sensores	92
a.1 Sensores de fuerza.	92
a.2 Módulo de compensación de la gravedad.	95
a.3 Módulo de compensación de la fricción no viscosa.	96
a.4 Sensor de posición y tacogenerador.	97

# CAPITULO I.

## Introducción.

### 1.1 Presentación.

A partir de los años 60 el área de la robótica se ha desarrollado rápidamente. La aplicación industrial de esta disciplina se hace cada día más accesible gracias al desarrollo general de la tecnología. Así, en la actualidad se diseñan sistemas mecánicos automáticos para que resulten cada vez más económicos, confiables y versátiles.

En este último punto, la versatilidad, se tiene que no solamente se necesitan consignas para seguir trayectorias espaciales específicas, sino que a menudo es necesario obtener determinado tipo de interacción con el medio externo.

Para una interacción adecuada con el medio externo, en muchas ocasiones es necesario el control de fuerza [1].

Existen técnicas de control que combinan consignas de posición y fuerza, también las hay de fuerza solamente. El trabajo que aquí se presenta, trata de una aplicación de control de fuerza en un dispositivo electromecánico de un grado de libertad.

### 1.2 Objetivos.

En la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México se han venido realizando varios estudios sobre control de fuerza en los últimos años. Estos estudios se han complementado con simulaciones en computadora. Dado que era deseable realizar experimentos con prototipos electromecánicos, se pensó en adaptar un equipo ya existente para este fin. Con el prototipo adaptado se podrían hacer algunos experimentos relacionados con estos estudios. Esta adaptación constituiría además un primer paso hacia la experimentación con sistemas más complejos.

Los objetivos de este trabajo son:

a). Adaptar un equipo experimental para que se puedan realizar experimentos de control que involucren consignas de fuerza.

b). Comparar experimentalmente varias estrategias de control de fuerza.

El objetivo a) se describirá brevemente a continuación; el b) se tratará en los capítulos siguientes.

### 1.3 Descripción del dispositivo y las adaptaciones.

Se disponía inicialmente de un equipo experimental marca Feedback para prácticas de control. El material de ese equipo que se utilizó en el presente trabajo consistió en (2):

- 1) Una fuente de poder modelo PS150F de  $\pm 15V$ . corriente directa y 75 watts.
- 2) Un servo amplificador modelo SA150D.
- 3) Un preamplificador modelo PA150C.
- 4) Un motor con tacogenerador acoplado, modelo MT150F de corriente directa de 24V y 15 watts.
- 5) Una unidad sumadora de señales modelo OU150A.
- 6) Un medidor de posición modelo 150K.
- 7) Equipo diverso consistente en potenciómetros, cables, soportes de montaje, etc

El motor con la unidad tacogeneradora y el sensor de posición se muestran a continuación en las figuras 1.1 y 1.2.

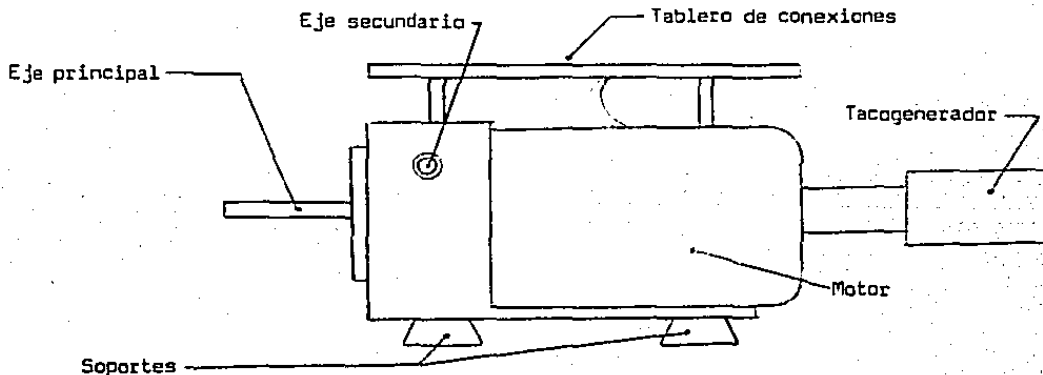


Figura 1.1  
Motor Feedback modelo MT150F.

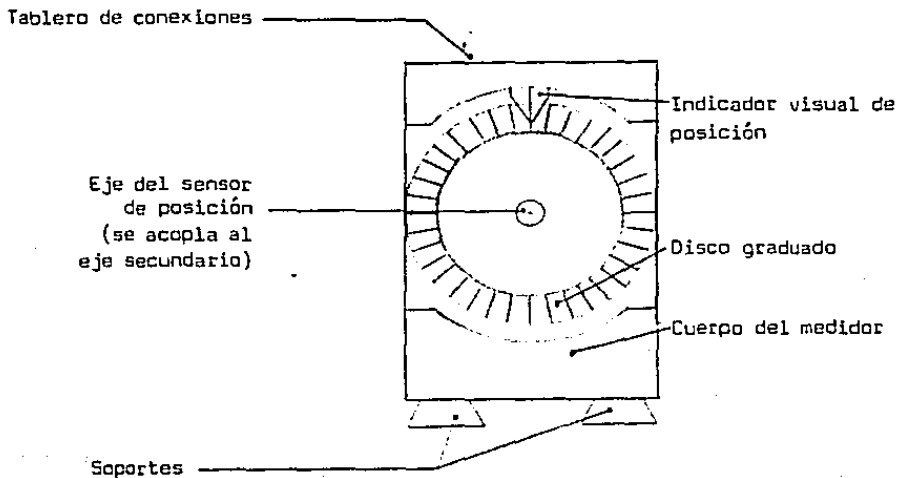


Figura 1.2  
Sensor de posición Feedback modelo 150K.

La adaptación consistió en :

- 1) Construir un sensor de fuerza.
- 2) Construir brazos que permitieran al motor interactuar con el medio externo.
- 3) Dotar al sistema motor-brazo de un medio adecuado de interacción.
- 4) Acoplar el dispositivo al equipo ya existente.

En el punto 2 se menciona la construcción de brazos. Esto se refiere a que se construyeron dos brazos, uno para acoplarse en el eje principal y otro para el eje secundario. Esto se hizo con el objeto de poder efectuar una gama más amplia de experimentos, ya que entre otras cosas, los rangos de operación y las no linealidades asociadas a cada uno de los ejes resultaron muy diferentes. Los brazos se muestran en las figuras 1.3 y 1.4, respectivamente.

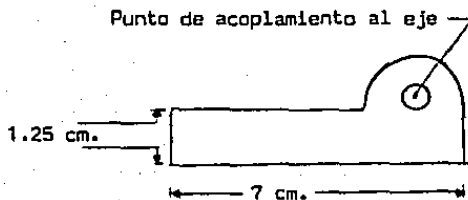


Figura 1.3  
Brazo para el eje principal.

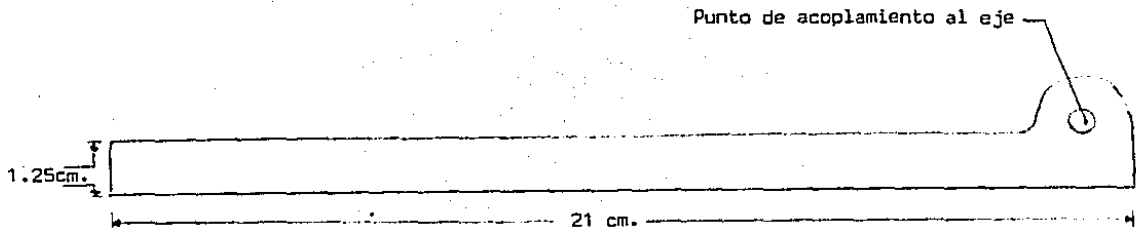


Figura 1.4  
Brazo para el eje secundario.

Para la realización del sensor de fuerza se usaron galgas extensométricas montadas en un elemento elástico que se colocó en el extremo del brazo (figura 1.5).

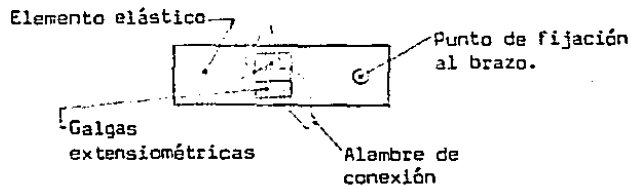


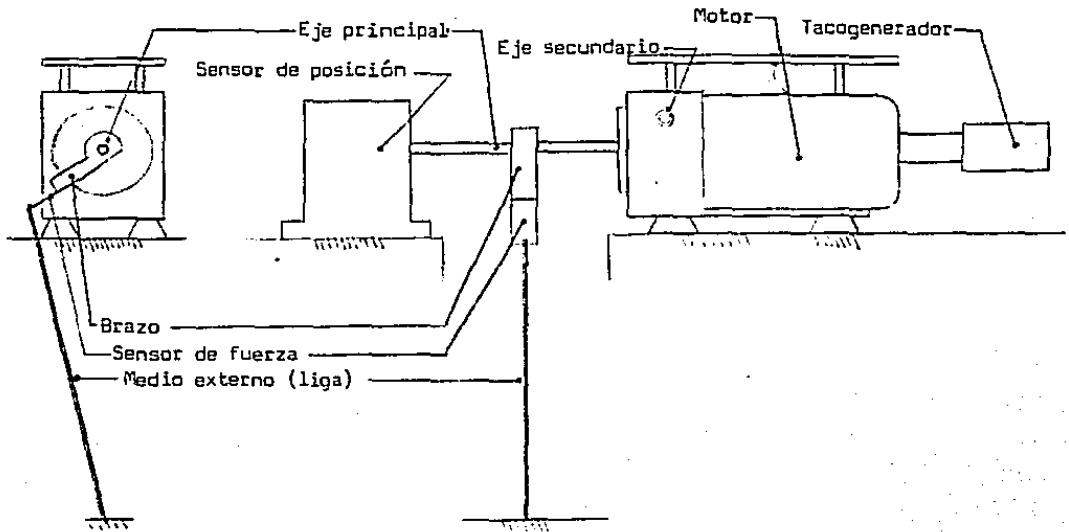
Figura 1.5  
Sensor de fuerza.

Este sensor necesita de circuitos eléctricos de polarización y de amplificación de señales. Por razones concernientes al ruido eléctrico y a la interferencia electromagnética se dispuso que el circuito asociado a las galgas estuviera lo más cerca posible de éstas, por lo que se le colocó en el brazo. Se necesitaron entonces protecciones para el circuito y sus conexiones, que también se situaron en el brazo.

Se realizaron dos diferentes montajes, correspondientes a los experimentos en los que se colocaba el brazo en el eje principal y en el secundario. Para ambos montajes se construyeron soportes especiales para el medio de interacción y para el sensor de posición.

El medio de interacción del dispositivo con el brazo en el eje principal consistió en una liga de elasticidad conveniente que se colocó en el mismo soporte del sensor de posición. En el caso del brazo acoplado al eje secundario, el medio consistió en un elemento elástico también (con la opción de añadir un elemento de inercia). Las figuras 1.6 y 1.7 muestran respectivamente los dos montajes completos que se acaban de mencionar.





a) Vista frontal  
(sin el sensor de posición)

b) Vista lateral

Figura 1.6  
Montaje completo del sistema con  
el brazo acoplado al eje principal.

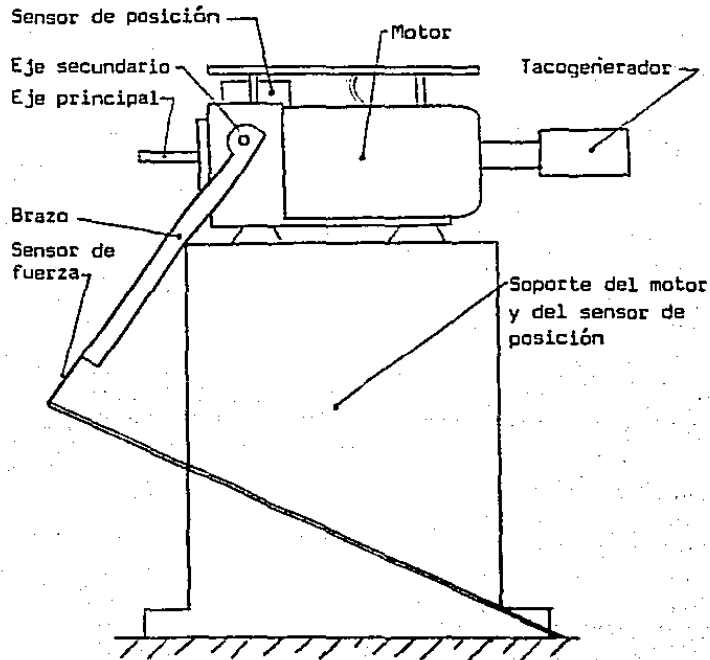


Figura 1.7  
Montaje completo del sistema con  
el brazo acoplado al eje secundario.

En el sistema de la figura 1.6 se tenía una transmisión directa del par y de la velocidad al brazo, mientras que en el de la figura 1.7, esta transmisión se efectuaba a través de un tren de engranes. El sistema con el brazo en el eje principal podía por lo tanto, interactuar con el medio a velocidades más altas. Por otro lado, la interacción en el caso del sistema que tenía el brazo en el eje secundario podía hacerse con un par mayor. Por esta misma razón se tenía una dinámica más lineal en el segundo sistema que en el primero (Algunos efectos no lineales eran reducidos en un factor dado por el cuadrado de la relación del tren de engranes).

Debido a que se tenía interés en experimentar con estrategias de control no lineales, se escogió usar el montaje con el brazo colocado en el eje principal para hacer la experimentación en este trabajo. Así los análisis y resultados que se presentan se refieren al montaje que se muestra en la figura 1.6.

Para finalizar esta sección se listarán los módulos adicionales que se construyeron.

Módulo de compensación de fricción no viscosa.

Módulo de compensación de gravedad.

Módulos de manipulación de señales.

Estos módulos se describen con detalle en el apéndice A.

#### 1.4 Descripción de la tesis.

A continuación se comentan brevemente los capítulos que componen la presente tesis.

En el capítulo 2, se presenta el modelo del motor y los principales experimentos que se realizaron para obtener los valores numéricos de los parámetros del mismo. En el capítulo 3 se estudia el control proporcional de fuerza. En el capítulo 4 se ataca el problema del error en estado permanente mediante un control proporcional integral (P.I.). En el capítulo 5 se trata el control P.I. con realimentación de velocidad. Esta realimentación se efectúa con fines de estabilidad. El capítulo 6 lleva por título compensación y en él se describe una realimentación para linealizar la dinámica del sistema. En dicho capítulo se discute más ampliamente el problema de fricción. El capítulo 7 presenta un control que compensa las no linealidades que aparecen en el sistema y finalmente en el capítulo 8 se presentan las conclusiones del trabajo. Al final se incluye un apéndice que describe los módulos adicionales que se construyeron y las características más importantes de los sensores.

## CAPITULO 2

### Modelado.

#### 2.1 Introducción.

El objetivo del presente capítulo es presentar un modelo para el dispositivo electromecánico utilizado en la experimentación para control de fuerza. Este modelo resulta un caso particular del modelo general para manipuladores de  $n$  grados de libertad.

Este capítulo consta de cuatro partes. En la sección 2.2 se presenta un modelo lineal de un motor de corriente directa controlado por armadura. Posteriormente se estudia la dinámica que resulta de acoplar un brazo a ese motor. Enseguida, se comenta brevemente en la sección 2.3 el modelo dinámico general para robots manipuladores de  $n$  grados de libertad. Finalmente el modelo queda completamente establecido con los valores numéricos de sus diversos parámetros en la sección 2.4.

#### 2.2 Modelado del sistema electromecánico utilizado.

La descripción lineal de un motor de corriente directa controlado por armadura está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones [3].

$$J\ddot{q}(t)+f(t)=K_t I(t) \quad (2.1)$$

$$L\dot{I}(t)+RI(t)+e(t)=v(t) \quad (2.2)$$

$$K_b \dot{q}(t)=e(t) \quad (2.3)$$

en donde las variables  $v(t)$ ,  $q(t)$ ,  $I(t)$  y  $e(t)$  representan la tensión en terminales del motor, la posición angular de su eje, la corriente que circula por su armadura y la fuerza contraelectromotriz.  $J$  es el momento de inercia del eje y  $f(t)$  la fricción que actúa contra éste. Las constantes  $K_t$ ,  $K_b$ ,  $R$  y  $L$  representan características electromecánicas del motor.

Se analiza primeramente el modelo del motor al acoplar un brazo en el eje principal, posteriormente se comenta el acoplamiento en el eje secundario. El brazo tiene las siguientes características: masa  $M$ , longitud  $r$ , momento de inercia  $d$  y centro de gravedad  $rc$  (figura 2.1).

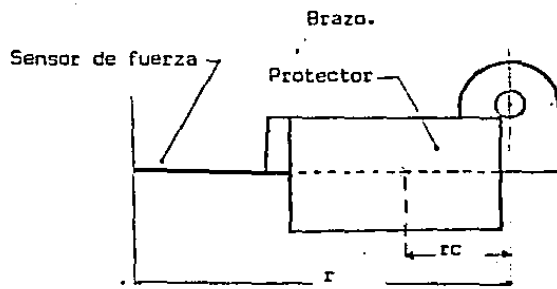


Figura 2.1  
Brazo del motor.

El acoplamiento del brazo al eje del motor introduce un par  $\tau(t)$  que es la suma del par ocasionado por la fuerza de gravedad, el ocasionado por el momento de inercia y el que proviene de la interacción con el medio externo. El par está dado entonces por:

$$\tau(t) = d\ddot{q}(t) + Mr\cos(q(t)) + rF(t) \quad (2.4)$$

en donde  $F(t)$  representa la fuerza de interacción con el medio que se transmite al eje del motor mediante el brazo y  $g$  es la constante de gravedad.

Introduciendo el par en la expresión (2.1) resulta:

$$J\ddot{q}(t) + f(t) + \tau(t) = K_t I(t) \quad (2.5)$$

Si se desprecia la inductancia del motor en la expresión (2.2) y se simplifican las expresiones (2.2), (2.3) y (2.5) se llega a la expresión (2.6):

$$J\ddot{q}(t) + KK_b \dot{q}(t) + f(t) + \tau(t) = K_v v(t) \quad (2.6)$$

en donde

$$K = K_t / R \quad (2.7)$$

Substituyendo (2.4) en (2.6) obtenemos:

$$(d+J)\ddot{q}(t) + Mr\cos(q(t)) + rF(t) + f(t) + KK_b \dot{q}(t) = K_v v(t) \quad (2.8)$$

El modelo se completa tomando las siguientes consideraciones:

En los experimentos realizados la fuerza externa  $F(t)$  es nula hasta la posición angular  $q_0$ , a partir de la cual su incremento es proporcional al incremento de la posición angular. En el par de fricción  $f(t)$  se pueden distinguir un efecto  $f_v(q(t))$  proporcional a la velocidad angular (amortiguamiento viscoso) y otro adicional dado por un efecto no viscoso  $f_{nv}$ . La acción de control se efectúa sobre la tensión de control  $v_c(t)$  que es proporcional a la tensión en las terminales del motor  $v(t)$ . Se distinguen luego, pares debidos a la aceleración angular, a la fuerza de gravedad  $\tau_g$ , a la fuerza externa  $\tau_e$ , a la velocidad angular  $\tau_v$  y a la fricción no viscosa (figura 2.2).

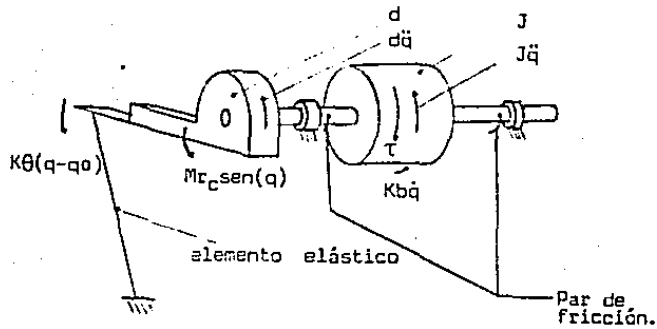


Figura 2.2  
Pares que actúan sobre el motor.

El modelo resulta entonces:

$$(d+J)\ddot{q}(t) + \tau_g + \tau_e + \tau_v + f_{nv} = K_a v_c(t) \quad (2.9)$$

$$\tau_v = K_c \dot{q}(t) = (K \cdot K_b + f_v) \dot{q}(t) \quad (2.10)$$

$$\tau_g = Mrc \operatorname{sen}(q(t)) \quad (2.11)$$

$$\tau_e = g_1 + g_2 q(t) \quad (2.12)$$

con

$$g_1 = \begin{cases} 0, & q(t) < q_0 \\ rF_0 = rK\theta q_0, & q(t) \geq q_0 \end{cases} \quad (2.13)$$

$$g_2 = \begin{cases} 0, & q(t) < q_0 \\ rK\theta, & q(t) \geq q_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

y donde

$$K_a = K \cdot K_t \quad (2.15)$$

La esta dada en unidades par sobre tensión.  $K\theta$  es la constante de elasticidad del medio, que en este caso es solamente un elemento elástico que actúa a partir de  $q_0$ .

Entre los fenómenos de fricción que no son proporcionales a la velocidad, se tiene la fricción de Coulomb. Esta fricción actúa con un valor constante, independientemente de la velocidad, pero siempre en contra del sentido de ésta, y se puede expresar como [4]:

$$\tau_c = C \operatorname{sgn}(\dot{q})$$

donde  $\tau_c$  es el par de fricción de Coulomb y  $C$  es una constante positiva.

La simplificación que se hace al considerar fricción no viscosa como fricción de Coulomb, resulta adecuada en algunos puntos en el análisis. Sin embargo, como se comenta en el capítulo 6, para motivos de compensación se usa un modelo que describe mejor el comportamiento del fenómeno de fricción cuando la velocidad angular es nula.

En lo que respecta al brazo que se acopla al eje secundario, se tiene que el par  $\tau(t)$  que introduce es:

$$\tau(t) = \frac{\tau_s(t)}{n^2} \quad (2.16)$$

donde  $n$  es la relación de vueltas del tren de engranes de transmisión entre el eje primario y secundario, y  $\tau_s(t)$  se dá (igual que el la expresión (2.4) para el eje primario) por:

$$\tau_s(t) = d\ddot{q}(t) + Mrc\operatorname{sgn}(q(t)) + rF(t) \quad (2.17)$$

donde  $M$ ,  $d$ ,  $rc$ , y  $r$  son los parámetros correspondientes al segundo brazo. Utilizando la expresión (2.17) y (2.16), substituyendo en (2.5) y siguiendo el procedimiento anterior, el modelo del dispositivo resulta muy parecido al de las expresiones (2.9), (2.10) y (2.11). El par externo  $\tau$  depende del experimento en cuestión, pudiendo ser diferente del que se tiene en las expresiones (2.12), (2.13) y (2.14).

### 2.3 Modelo general para manipuladores.

El modelo dinámico de robots manipuladores de  $n$  grados de libertad puede expresarse como [5]:

$$T = M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) + J^T(q)F \quad (2.18)$$

en donde:

$T$  es el vector de pares o fuerzas ejercidos por los actuadores

$M(\ddot{q})$  es la matriz de inercia

$V(q, \dot{q})$  es el vector de pares ocasionados por la aceleración centrífuga y de Coriolis.

$G(q)$  es el vector de pares debidos a la gravedad.

$J(q)$  es la matriz Jacobiana del manipulador

$F$  es el vector de fuerzas con las que el manipulador interacciona con el medio ambiente.

Para un manipulador en particular se podría igualar el vector de pares que se dá en la expresión (2.18) con un vector compuesto de cada uno de los pares de los diferentes actuadores en términos de los parámetros de éstos. Así se llegaría a una expresión específica, como la (2.9) en la que se dá la relación entre los pares y la señal de control.

La expresión (2.4), versión simplificada de la (2.18) para nuestro caso en particular, es una ecuación escalar, en la que el valor de  $\tau(t)$  se puede calcular con relativa facilidad. Nótese que todos los términos de la expresión (2.18) aparecen en la (2.4) a excepción de  $V(q, \dot{q})$ . Esto se debe a que, al tener solo un grado de libertad, no aparece el efecto de la aceleración de Coriolis; por otro lado, la aceleración centrífuga actúa en forma normal al eje (mientras que en el modelo se consideran las fuerzas transversales a éste).

### 2.4 Valores numéricos de los parámetros del sistema.

Los valores numéricos que se presentan en la tabla 2.1, se obtuvieron del manual del fabricante así como de mediciones, y corresponden al dispositivo con el brazo acoplado al eje principal del motor.

Parámetro	Símbolo	Unidades
Momento de inercia del brazo.	d	$75 \times 10^{-6}$ Kg·m <sup>2</sup>
Momento de inercia del motor.	J	$85 \times 10^{-6}$ Kg·m <sup>2</sup>
Masa del brazo	M	0.065 Kg
Centro de gravedad del brazo.	rc	0.025m
Longitud del brazo	r	0.07m.
Fuerza equivalente a la posición angular -qo	Fo	-0.1037Nt.
Constante de elasticidad del medio	Kθ	0.198 Nt/rad.
Constante de amortiguamiento viscoso más la constante de la fuerza contraelectromotriz	Kc	$260 \times 10^{-6}$ Kg·m/seg
Valor maximo de la fricción no viscosa.	f <sub>nv</sub> máxima	0.159 Nt-m
Constante de la fricción de Coulomb.	C	.0359Nt-m
Valor de la ganancia del sistema de amplificación.	Ka	0.668Nt-m/V.

Tabla 2.1

A continuación se presentan las mediciones más significativas que se efectuaron, las demás se muestran en el apéndice A.



- i. Medición de la fricción y del par proporcional a la velocidad.

El par proporcional a la velocidad angular se compone del par producido por el amortiguamiento viscoso y la fuerza contraelectromotriz. Este par se mide junto con la fricción no viscosa. Para la medición de los parámetros relacionados con estos pares se hace la conexión que se muestra en la figura 2.3

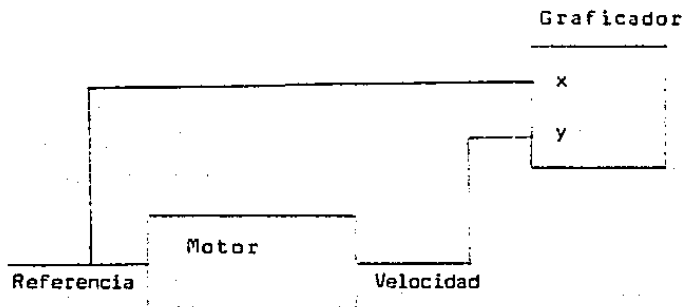


Figura 2.3  
Conexión del equipo para la medición del par proporcional a la velocidad angular.

Al modelo del dispositivo, que se da en la expresión (2.9), se le anulan los términos que introduce el brazo de interacción, que en este caso no está acoplado, resultando:

$$J\ddot{q}(t) + Kc\dot{q}(t) + fnv = Kavc(t) \quad (2.19)$$

Como entrada se tiene señal de tensión de control  $v_c$  y como salida la velocidad del motor. Inicialmente la entrada es nula al igual que la velocidad y la aceleración. Se varía la entrada muy lentamente (respecto a la constante de tiempo del sistema), de manera que la salida del motor represente su respuesta permanente.

La gráfica que se obtiene se muestra en la figura 2.4.

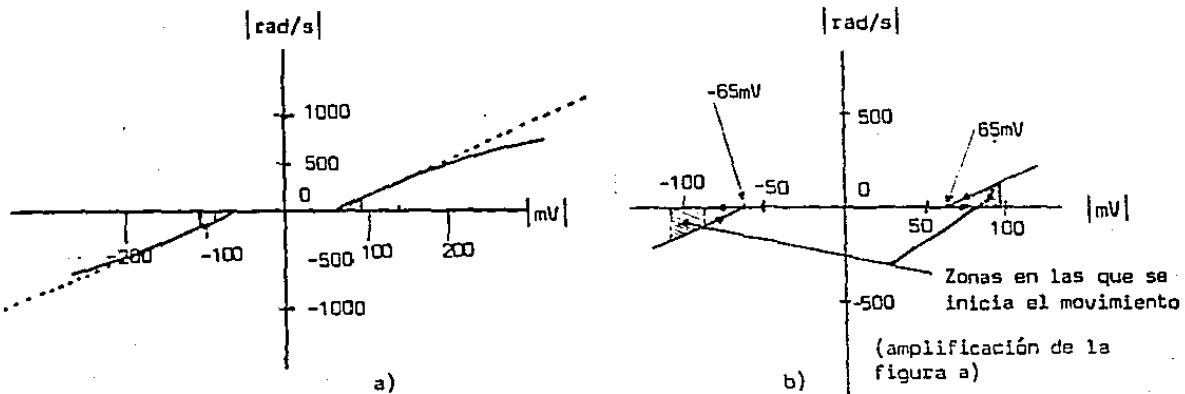


Figura 2.4  
Curva tensión de entrada v.s. velocidad.

La gráfica representa la expresión (2.19) pero con el término de aceleración prácticamente nulo, es decir:

$$K_c \dot{q}(t) + f_{nv} = K_a v_c(t) \quad (2.20)$$

o bien :

$$v_c(t) = \frac{K_c}{K_a} \dot{q}(t) + \frac{f_{nv}}{K_a} \quad (2.21)$$

En la gráfica se aprecia que, una vez iniciado el movimiento, hay dos zonas que pueden modelarse con líneas rectas y que se encuentran de  $\pm 500$  a 0 radianes/segundo. También se puede apreciar que no existe un punto exacto en el que se vence la fricción no viscosa. En los experimentos realizados se midieron valores máximos de fricción no viscosa ( $\tau_{max_1}$ ,  $\tau_{max_2}$ ; para ambos sentidos de giro) dentro de los siguientes valores.

$$84 \text{ mV} \cdot K_a \leq \tau_{max} \leq 96 \text{ mV} \cdot K_a$$

$$87 \text{ mV} \cdot K_a \leq \tau_{max} \leq 106 \text{ mV} \cdot K_a$$

igualmente se aprecia que este par se reduce una vez que se inicia el movimiento a un valor ( $\tau_{coul}$ ) de:

$$\tau_{coul} = 65 \text{ mV} / K_a$$

que se puede considerar el mismo para ambos sentidos. El modelo simplificado de la curva (usando la fricción de Coulumb) se obtiene al considerar que el valor máximo de la fricción cuando el sistema aún no se mueve, es igual al que presenta iniciado el movimiento. La expresión (2.21) con estas consideraciones e introduciendo los valores numéricos resulta:

$$v_c(t) = 0.000389\dot{q}(t) + 0.065\text{sgn}(\dot{q}(t)) \quad (2.22)$$

En la figura 2.5 se muestra la curva simplificada de la fricción según la expresión (2.22).

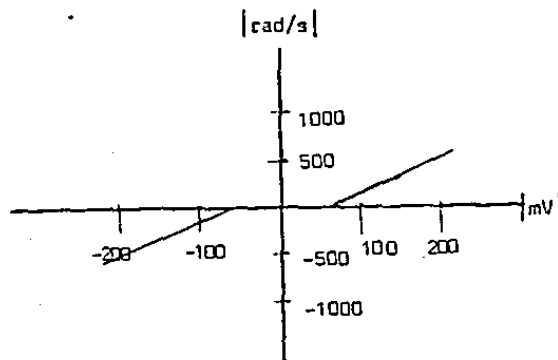


Figura 2.5  
Curva de entrada-velocidad con la característica de fricción simplificada.

ii Medición de la constante de tiempo del sistema.

El diagrama de bloques del sistema con el montaje que se está utilizando para estos experimentos, se presenta en la figura 2.6. Este diagrama corresponde a la expresión (2.23), que equivale a la (2.19) con la fricción no viscosa considerada como fricción de Coulomb:

$$J\ddot{q}(t) = K_a v_c(t) - K_c \dot{q}(t) - C \text{sgn}(\dot{q}(t)) \quad (2.23)$$

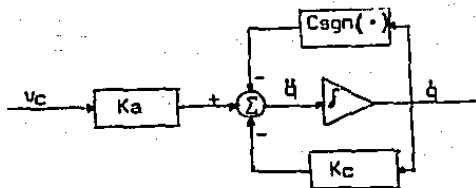


Figura 2.6  
Diagrama de bloques correspondiente a la expresión (2.23).

Para medir la constante de tiempo del sistema, se propone una solución de la expresión (2.23), para una entrada escalón y para una condición inicial no nula según se especifica a continuación:

$$vc(0) = vc_0 > C/Ka \quad (2.24)$$

$$vc(0^+) = vc_1 > vc_0$$

condición inicial:

$$\dot{q}(0) = \frac{Kavc_0 - C}{Kc} \quad (2.25)$$

En este experimento siempre se tiene el mismo signo en la velocidad, que no es nula, por lo que la expresión (2.23), se reduce a:

$$J\ddot{q}(t) = Kavc(t) - Kc\dot{q}(t) - C \quad (2.26)$$

Nótese que  $C$  es constante y que  $vc(t)$  para  $t > 0$  también lo es. La solución de esta ecuación diferencial es:

$$\dot{q}(t) = \frac{Kavc_1 - C}{Kc} - \frac{Ka(vc_1 - vc_0)}{Kc} e^{-\frac{t}{\tau_0}} \quad (2.27)$$

donde la constante de tiempo  $\tau_0$  se dá por

$$\tau_0 = \frac{J}{Kc} \quad (2.28)$$

Experimentalmente, usando una señal de forma de onda cuadrada de baja frecuencia y con una velocidad angular siempre en el mismo sentido, se obtuvo la gráfica de la figura 2.7 que se muestra a continuación.

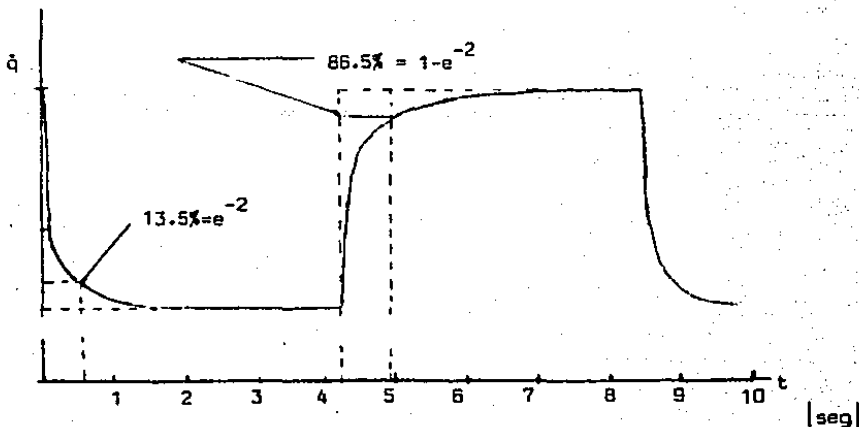


Figura 2.7  
Respuesta experimental del sistema (2.23)  
a la función escalón descrita en (2.24) y (2.25).

En la gráfica se aprecia que el tiempo de subida y el de bajada, es muy parecido, por lo que se considera, para ambos casos, una misma constante de tiempo de 0.327 seg.

Una vez que se tiene este valor, se puede determinar el de la constante  $K_c$ , ya que se tiene el valor del momento de inercia  $J$  (dato proveniente del manual).

$$K_c = \frac{J}{\tau_0} = 327 \times 10^{-6} \text{ Nt-m/seg} \quad (2.29)$$

De las expresiones (2.21) y (2.22) se obtiene el valor de la constante  $K_a$ :

$$K_c/K_a = 0.000389, \quad K_a = 0.668 \text{ Nt-m/V} \quad (2.30)$$

con lo que los valores numéricos de los parámetros de la expresión (2.23), quedan determinados.

### iii Medición de la constante elástica del medio

Los experimentos se realizan en una zona de operación de  $q=0$  a  $q=\pi/2$  radianes. Para la medición de la constante de elasticidad se realiza el montaje que se presenta en la figura 2.8.

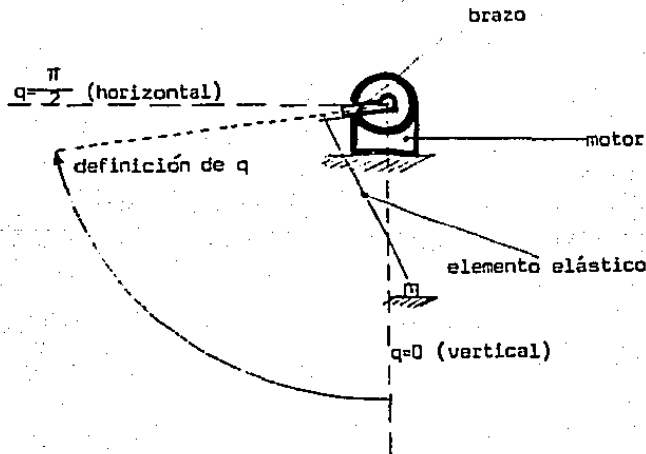


Figura 2.8  
Conexión para la medición de  $K\theta$

En la figura 2.9 se presenta el resultado de la medición, en ella se distingue una zona que se puede aproximar mediante una línea recta, que vá de  $q = \pi/6$  radianes a  $q = \pi/2$  radianes.

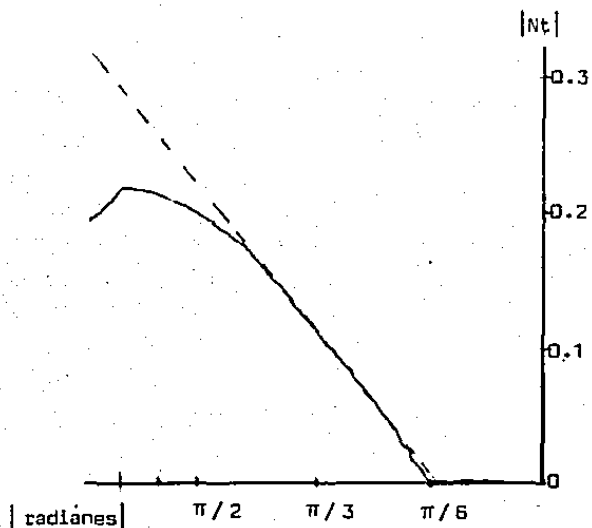


Figura 2.9  
Medición de la constante  $K\theta$ .

De esta gráfica se determina directamente el valor de la constante  $K\theta$  como  $0.198Nt/rad$ .

## CAPITULO 3

### Control Proporcional

#### 3.1 Introducción.

En este capítulo se discute el control de fuerza proporcional para el dispositivo electromecánico. Se analiza primeramente el comportamiento de éste en lazo abierto. La entrada es la referencia de fuerza  $F_d$  y la salida es la fuerza de interacción con el medio externo (sección 3.2). Posteriormente, en la sección 3.3 se analizan y comentan los resultados obtenidos en lazo cerrado, variando la ganancia proporcional. En la sección 3.4, se describen los experimentos realizados.

#### 3.2 Análisis en en lazo abierto.

De las expresiones (2.9), (2.10), (2.11) y (2.12); y de considerar a la fricción no viscosa como fricción de Coulomb, se llega a la expresión (3.1).

$$K_{avc}(t) = (d+J)\ddot{q}(t) + K_c\dot{q}(t) + g_1 + g_2q(t) + C\text{sgn}(\dot{q}(t)) + Mrc\text{sgn}(q(t)) \quad (3.1)$$

La expresión (3.1) describe el comportamiento del sistema en términos de pares. La descripción en términos de fuerzas se obtiene al dividir el par entre la longitud del brazo  $r$ . Entonces, se tiene:

$$K_{avc}(t)/r = \left\{ (d+J)\ddot{q}(t) + K_c\dot{q}(t) + g_1 + g_2q(t) + C\text{sgn}(\dot{q}(t)) + Mrc\text{sgn}(q(t)) \right\} / r \quad (3.2)$$

El diagrama de bloques que corresponde a la ecuación (3.2) se muestra en la figura 3.1.

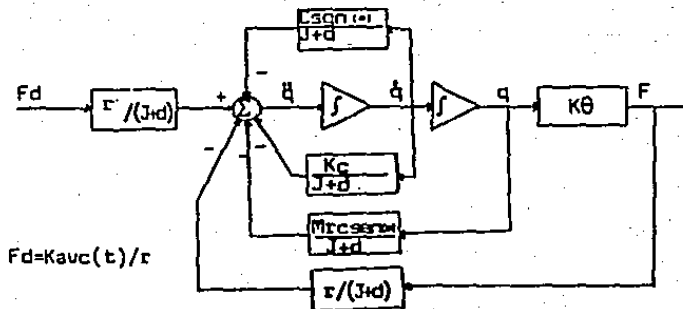


Figura 3.1  
Diagrama de bloques de la expresión 3.2

Para una entrada nula, el sistema se puede describir con las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Kc q_2 - g_1 - g_2 q_1 - C \operatorname{sgn}(q_2) - Mrc \operatorname{sen}(q_1) \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

con

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_2 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

los puntos de equilibrio [6] se obtienen al resolver (3.3) para:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

Un punto de equilibrio se encuentra en el origen, los otros se encuentran donde el desplazamiento angular  $q(t)$  es solución de la expresión:

$$Mrc \operatorname{sen}(q(t)) = -g_1 - g_2 q(t) \quad (3.6)$$

y

$$\dot{q}(t) = 0 \quad (3.7)$$

La solución de (3.6), es factible en varios puntos tal y como lo muestra la gráfica de la figura 3.2

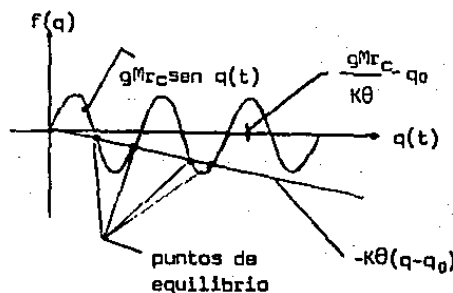


Figura 3.2  
Posibles soluciones de la expresión 3.6.



La figura muestra que no existen puntos de equilibrio para valores de  $q(t)$  tales que:

$$q(t) > \frac{Mrcq}{k\theta} + q_0$$

Observese que el lado izquierdo de la ecuación (3.6) tiene como valor mínimo  $-Mrc$ .

Sin embargo, en nuestros experimentos la zona de operación estuvo dentro de los primeros  $\pi/2$  radianes de desplazamiento angular; luego se tiene un único punto de equilibrio ( $q_1=q_2=0$ ) en esa zona.

Nótese que la ecuación (3.2) corresponde a una ecuación diferencial no lineal en el estado  $(q, \dot{q})$ . El análisis de ecuaciones de este tipo es generalmente difícil de realizar.

Por esto se presentan en la figura 3.3 algunas trayectorias en el plano de fase, que resultan de la simulación del sistema.

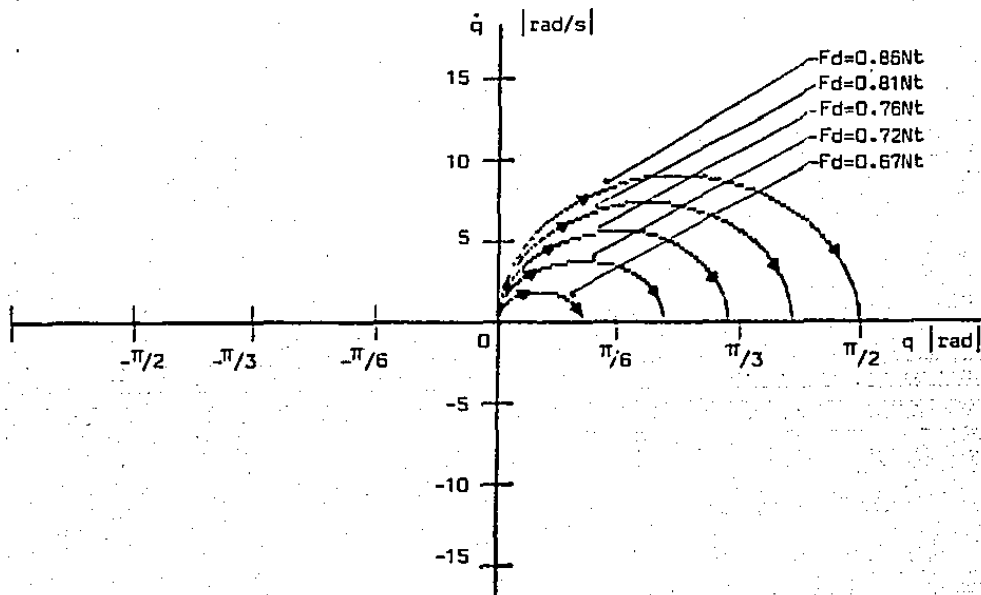


Figura 3.3.  
Trayectorias en el plano de fase del sistema (3.1) simulado.

Se puede hacer una aproximación de la expresión (3.2) considerando que la función  $\text{sen}(q)$  se puede aproximar con bastante exactitud mediante rectas, como se muestra en la figura 3.4.

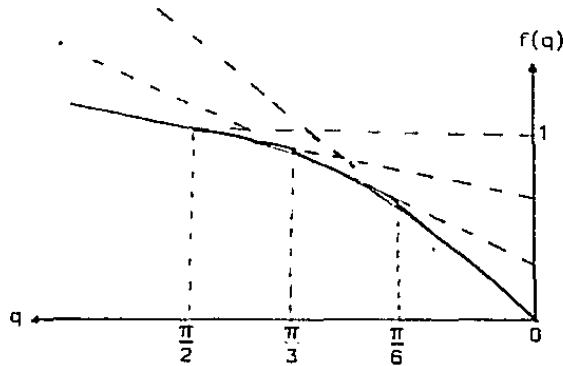


Figura 3.4  
Aproximación para la curva del seno en el primer cuadrante

En este caso se ha considerado que aproximar con tres rectas es adecuado, ya que el error máximo entre el valor del seno y de la función propuesta no es mayor al 4%.

$$\text{sen}(q(t)) \approx g_3 + g_4 q(t) \quad (3.8)$$

$$g_3(t) = \begin{cases} 0, & q(t) < .524 \\ 0.143, & .524 < q(t) \leq 1.047 \\ 0.581, & 1.047 < q(t) \end{cases} \quad (3.9)$$

$$g_4(t) = \begin{cases} 1, & q(t) < .524 \\ 0.73, & .524 < q(t) \leq 1.047 \\ 0.317, & 1.047 < q(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

los valores de  $q(t)$  de estas expresiones están dados en radianes. Si se considera esta aproximación en lugar de la función seno de la expresión (3.2), entonces esta ecuación resulta lineal por segmentos [4], siendo así su análisis más accesible. La expresión (3.2) con la modificación mencionada resulta:

$$\frac{Kavc(t)}{r} = \left( (d+J)\ddot{q}(t) + Kc\dot{q}(t) + g_1 + g_2q(t) + Mrcg(g_3 + g_4q(t)) + Csgn(\dot{q}(t)) \right) / r \quad (3.11)$$

o bien:

$$\ddot{q}(t) + \frac{Kc}{J+d} \dot{q}(t) + \frac{g_2 + Mrcg_4}{J+d} q(t) = \frac{Kavc(t)}{J+d} - \frac{g_1 + Mrcg_3}{J+d} - \frac{Csgn(\dot{q}(t))}{J+d} \quad (3.12)$$

En la expresión (3.12) los valores de las funciones  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$ ,  $g_4$  y  $sgn(\dot{q}(t))$  permanecen constantes en las zonas que se muestran en la figura 3.5.

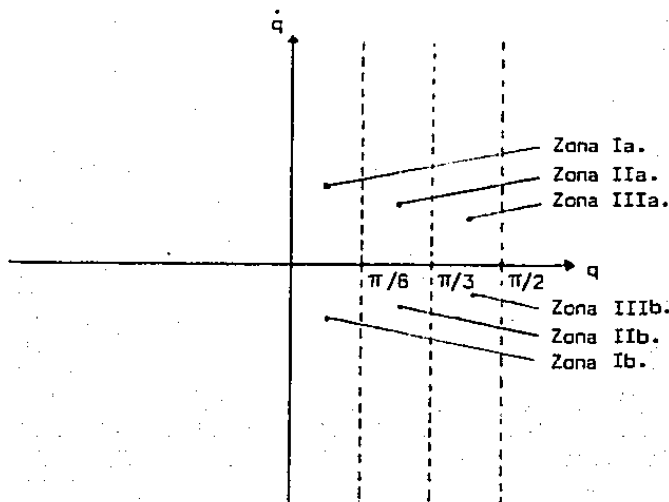


Figura 3.5  
Zonas en las que se divide  
el plano de fase.

Considerando que los valores de estas funciones dentro de una zona determinada son fijos, entonces la solución de la ecuación (3.12), mientras la trayectoria del plano de fase se mantenga dentro de las zonas descritas anteriormente, se compone de la solución de seis ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\ddot{q}(t) + A_1 \dot{q}(t) + A_2 q(t) = A_3 F_d - (A_4 + A_5) \quad (3.13)$$

donde

$$A_1 = \frac{K_c}{J+d} \quad (3.14)$$

$$A_2 = \frac{g_2 + M r c g_2 g}{J+d} \quad (3.15)$$

$$A_3 = \frac{1}{J+d} \quad (3.16)$$

$$A_4 = \frac{g_1 + M r c g_1 g}{J+d} \quad (3.17)$$

$$A_5 = \frac{\pm C}{J+d} \quad (3.18)$$

donde  $F_d$  está dado por  $K_{avc}(t)/r$  y en la que los valores de  $A_2$ ,  $A_4$  y  $A_5$  varían según la zona de operación.

Como el valor de  $A_2$  es cero para los primeros  $\pi/6$  radianes de operación, la parte izquierda de la expresión (3.13) resulta una ecuación diferencial de primer grado de la variable velocidad angular. De  $\pi/6$  a  $\pi/2$  lo es, de segundo grado de la variable posición angular. Se analiza la respuesta de este sistema para un escalón unitario suministrado en condiciones de desplazamiento y velocidad angular nulas.

Se resuelve (3.13) y si la trayectoria de la respuesta cambia de zona, se utiliza como condición inicial de la nueva zona, las condiciones finales del sistema en la zona anterior.

La solución de (3.13) para cuando el sistema se encuentra dentro los primeros  $\pi/6$  radianes de operación es:

$$\dot{q}(t) = C_1 e^{-\sigma t} + \frac{A_3 - (A_4 + A_5)}{A_1} \quad (3.19)$$

donde  $C_1$  está dado por las condiciones iniciales definidas al momento de entrar a la zona de operación. La posición angular se obtiene integrando (3.19).

A partir de  $\pi/6$ , la solución de (3.13) para el caso que se tengan polos complejos es :

$$q(t) = \frac{Fd - (A_4 + A_5)}{A_3} + e^{-\sigma t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) \quad (3.20)$$

con:

$$\sigma = \frac{A_2}{2A_1} \quad (3.21)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{A_3}{A_1} - \left(\frac{A_2}{2A_1}\right)^2} \quad (3.22)$$

$C_1$  y  $C_2$  dadas por las condiciones iniciales  $q(t_i)$  y  $\dot{q}(t_i)$ , donde  $t_i$  es el tiempo en el que se ingresa a la zona de operación.

Sustituyendo los valores numéricos del sistema se obtienen los trazos en el plano de fase que se muestran en la figura 3.6. Estas gráficas se obtienen analíticamente siguiendo las expresiones (3.19), (3.20), (3.21) y (3.22), y corresponden a los mismos valores presentados en la figura 3.3 con objeto de compararlas.

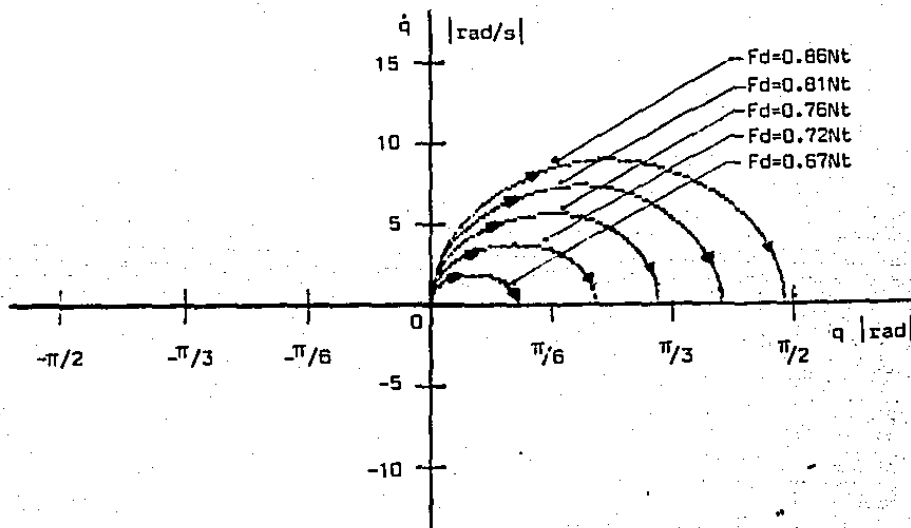


Figura 3.6  
Respuesta del sistema (3.11) a referencias de tipo escalón de diferentes magnitudes.

En todas las zonas de operación el sistema resulta subamortiguado. El valor de la constante de tiempo se obtiene al substituir en la expresión (3.19) los parámetros del sistema. Esta constante resulta de 0.81 seg y es independiente de la zona de operación en que se encuentre. La frecuencia amortiguada es de 9.94 rad/s, 12.65 rad/s y 10.89 rad/s en las zonas de operación I, II y III respectivamente. La respuesta no presenta oscilaciones debido a la fricción no viscosa. Este mismo efecto incrementa el error de fuerza en la respuesta permanente.

### 3.3 Análisis en lazo cerrado.

Se propone para el dispositivo electromecánico de este estudio, un control proporcional dado por:

$$K_{avc}(t)/r = K_p(F_d - F) \quad (3.23)$$

donde  $K_p$  es la constante proporcional,  $F_d$  es la fuerza deseada y  $F$  es la fuerza medida por un captor. El error de fuerza  $F_d - F$  se designa  $\zeta$ . La figura 3.7 muestra el diagrama de bloques del dispositivo con este control.

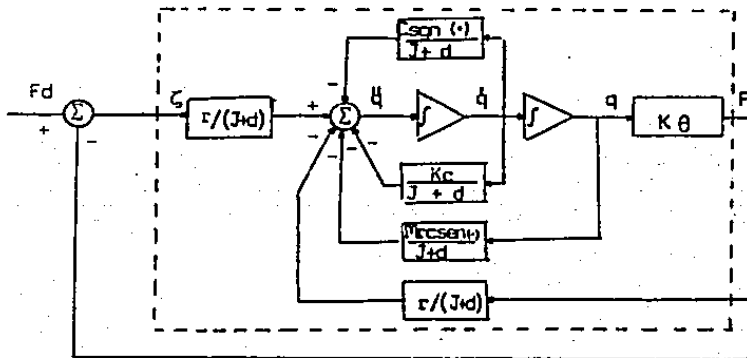


Figura 3.7  
Dispositivo electromecánico con control proporcional de fuerza.

La fuerza  $F$  puede describirse en función de  $q(t)$  como:

$$F=(g_1+g_2q(t))/r \quad (3.24)$$

de la expresión del dispositivo (3.2) junto con la del control (3.23) y usando la (3.24) se obtiene:

$$F_d = \frac{1}{K_p r} \left( (d+J)\ddot{q}(t) + K_c \dot{q}(t) + (g_1 + g_2 q(t))(1+k_p) + C \operatorname{sgn} \dot{q}(t) + g M r c \operatorname{sen} q(t) \right) \quad (3.25)$$

que es la expresión de malla cerrada para el dispositivo electromecánico con control proporcional de fuerza.

Nuevamente se tiene que la expresión que describe el sistema es una ecuación diferencial no lineal que no es sencilla de analizar.

Para ejemplificar el comportamiento del sistema, se muestran a continuación algunas trayectorias obtenidas mediante simulación, que representan la respuesta a funciones escalón para diferentes valores de los parámetros  $F_d$  y  $K_p$  (figuras 3.8 y 3.9 respectivamente).

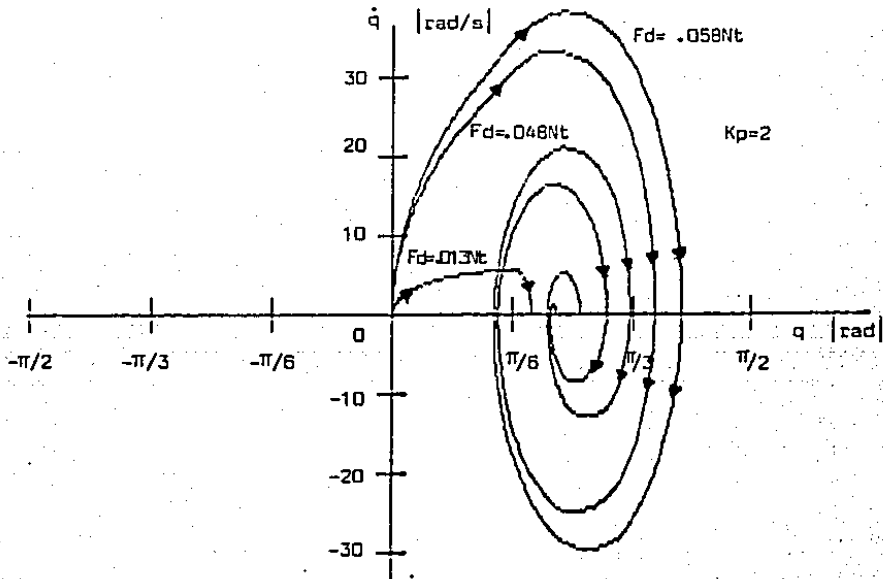


Figura 3.8

Respuesta del sistema con realimentación proporcional a referencias escalón, obtenida mediante simulación

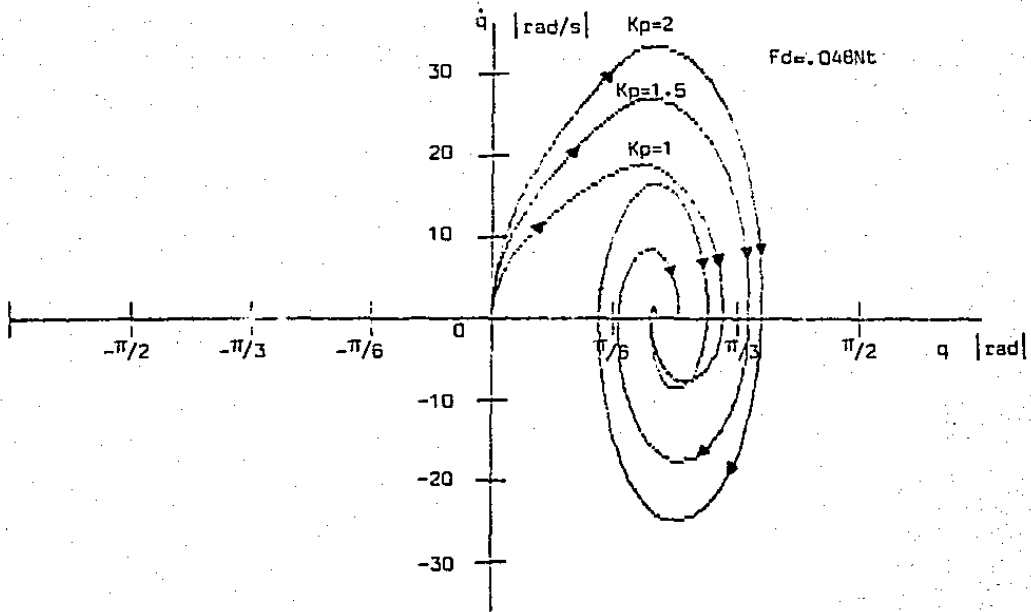


Figura 3.9  
 Respuesta del sistema con realimentación proporcional  
 para diferentes valores de  $K_p$  (simulación).



Si aproximamos la función  $\text{sen } q(t)$  de la expresión (3.25) por medio de rectas como se discute en la sección 3.2 se obtiene la expresión (3.26):

$$F_d = \frac{1}{K_{pr}} \left\{ (d+J)\ddot{q}(t) + K_c \dot{q}(t) + (g_1 + g_2 q(t))(1+K_p) + C_{sgn} \dot{q}(t) + g_{Mrc}(g_3 + g_4 q(t)) \right\} \quad (3.26)$$

o bien:

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) + \frac{K_c}{J+d} \dot{q}(t) + \frac{g_2(1+K_p) + M_{rc}g_4}{J+d} q(t) \\ = \frac{K_{pr}F_d}{J+d} - \frac{g_1(1+K_p) + M_{rc}g_3}{J+d} - \frac{C_{sgn} \dot{q}(t)}{J+d} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Dividiendo el plano  $[q(t), \dot{q}(t)]$  en zonas de operación, como se menciona en la sección anterior, se puede componer la trayectoria de la respuesta mediante ecuaciones diferenciales que describen al sistema en dichas zonas. Estas ecuaciones, al igual que en la sección anterior, son de la forma:

$$\ddot{q}(t) + A_1 \dot{q}(t) + A_2 q(t) = A_3 F_d - (A_4 + A_5) \quad (3.28)$$

donde los valores de  $A_1$ ,  $A_3$  y  $A_5$  son los mismos de la sección pasada (expresiones (3.14), (3.16) y (3.18)) y  $A_2$  y  $A_4$  se dan por:

$$A_2 = \frac{-g_2(K_p+1) + g_{Mrc}g_4}{J+d} \quad (3.29)$$

$$A_4 = \frac{g_1(K_p+1) + g_{Mrc}g_3}{J+d} \quad (3.30)$$

La solución de (3.28) para una entrada tipo escalón se dió en las expresiones (3.19) y (3.20). A continuación se presenta una tabla de los parámetros del sistema para las distintas zonas de operación, para diferentes valores del parámetro  $K_p$ .

Kp	Zona I		Zona II		Zona III	
	$\sigma$	$\omega$	$\sigma$	$\omega$	$\sigma$	$\omega$
1	.814	9.95	.814	52.24	.814	51.84
2	.814	9.95	.814	72.79	.814	72.50
5	.814	9.95	.814	114.04	.814	113.86
11	.814	9.95	.814	168.58	.814	168.46

Tabla 3.1

Las figuras 3.10 y 3.11 que se presentan a continuación, muestran las trayectorias del dispositivo (3.25) para diferentes valores de la referencia  $F_d$  y del parámetro  $K_p$ .

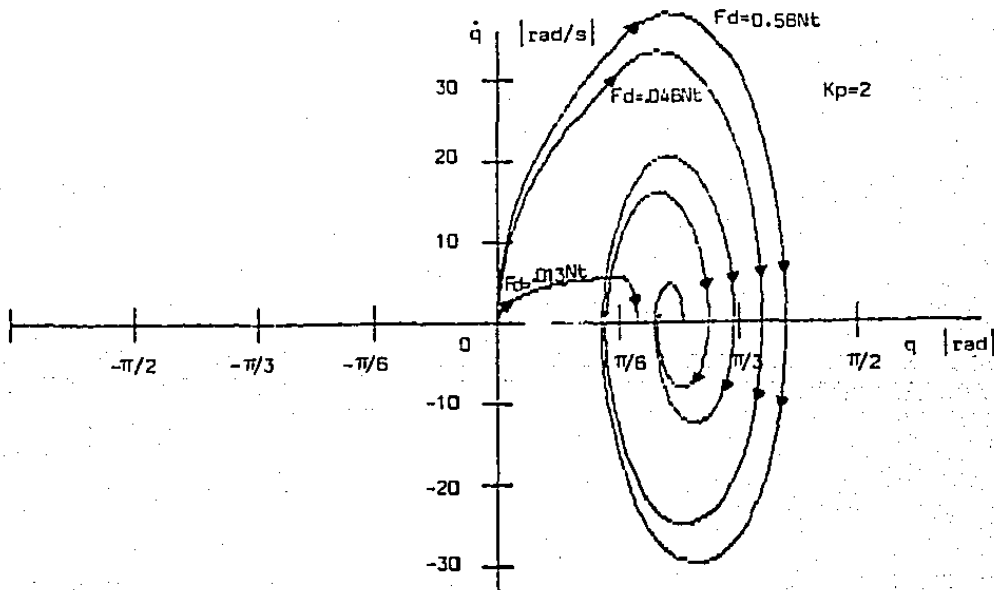


Figura 3.10  
Trayectorias con un controlador proporcional de fuerza, sistema (3.25) (para  $K_p=2$  y entrada tipo escalón)

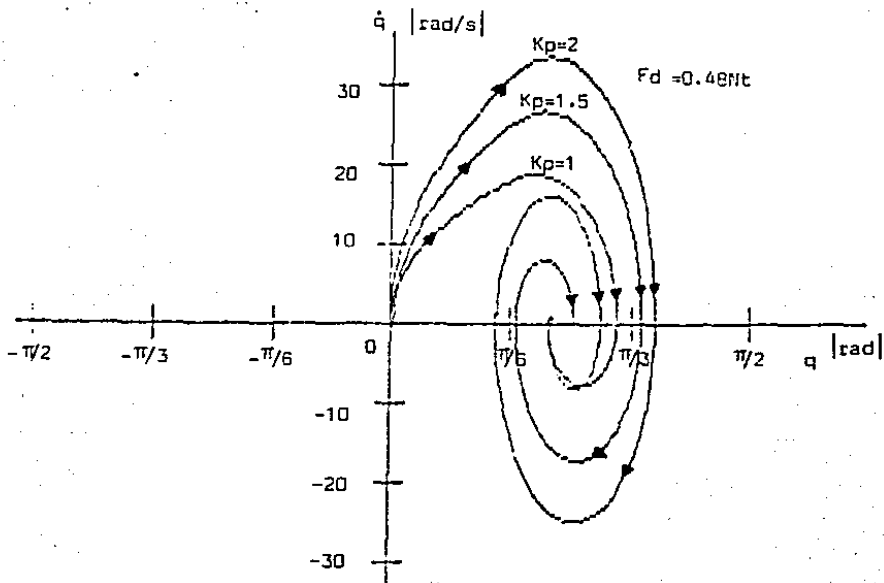


Figura 3.11  
 Trayectorias con un controlador proporcional de fuerza,  
 sistema (3.25) (para  $F_d=0.48$  y entrada tipo escalón).

Nuevamente se escogieron los mismos valores que en las figuras 3.8 y 3.9 para comparar resultados.

### 3.4 Resultados experimentales.

Para ejemplificar el comportamiento del sistema, se le suministró una referencia sinusoidal. Debido a que la interacción con medio externo sólo era lineal en una zona de operación comprendida entre  $\pi/6$  y  $\pi/2$  radianes, se escogieron para la referencia una frecuencia, nivel de polarización y amplitud tales, que para todo el rango de la ganancia  $K_p$ , la respuesta del sistema permaneciera dentro de dicha zona. La amplitud de  $0.05 \text{ Nt}$ , una constante de polarización de  $0.066 \text{ Nt}$  y frecuencias como  $0.3 \text{ Hz}$  y de  $1.25 \text{ Hz}$  cumplen con este último punto, para el sistema con control proporcional. Con objeto de comparar las diferentes estrategias de control que se presentan en el trabajo, se realizan todos los experimentos con señales de estas características. El procedimiento de sintonización para el primer experimento se describe a continuación.

## i Sintonización I.

Se le suministró al sistema una señal 1.25 Hz. de frecuencia y se monitoreó el error de fuerza con un osciloscopio. Como se trataba de un control proporcional, se conocía que se podía disminuir el error de estado permanente mediante el aumento de la ganancia  $K_p$ , por lo que se le dió un valor de 11, (que era el límite superior del rango que permitía el equipo). Posteriormente se graficó la referencia ( $F_d$ ), el error de fuerza ( $F_d - F$ ), la fuerza medida ( $F$ ) y la velocidad ( $\dot{q}(t)$ ). Los resultados se presentan en la figura 3.12.

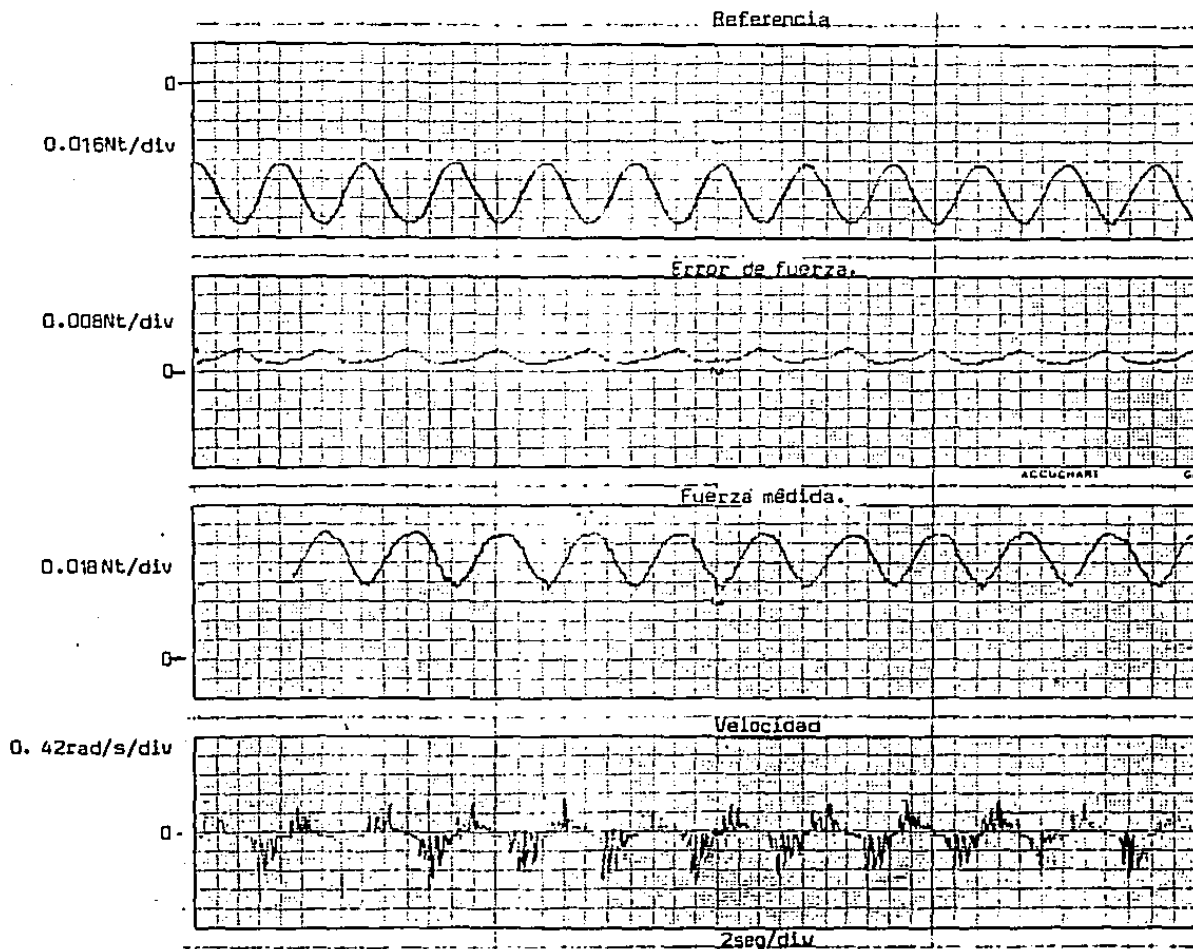


Figura 3.12  
Resultados experimentales ( $K_p=11$ , sintonización I)

En la tabla 3.1 se puede apreciar que el aumento de la ganancia proporcional disminuye el amortiguamiento. Esto resulta muy claro en el diagrama del plano de fase que se muestra en la figura 3.13, donde muestra la trayectoria del sistema para una entrada escalón en condiciones iniciales nulas.

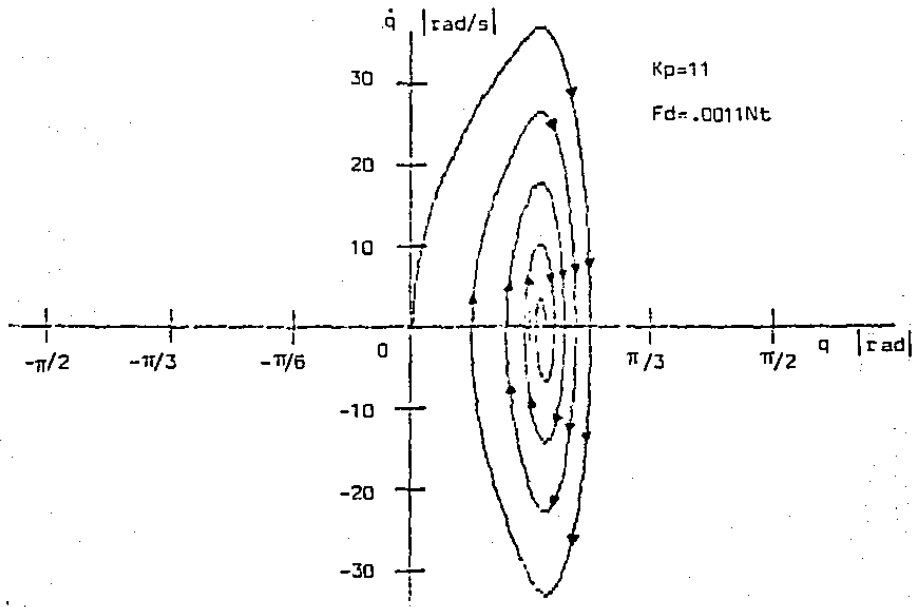


Figura 3.13  
Trayectoria del sistema (3.25) con realimentación proporcional (Sintonización I).

Aquí resulta claro que existe el problema de tener muy poco amortiguamiento. Por ejemplo, los parámetros del sistema en la zona de operación II, que es la más crítica, son: frecuencia natural amortiguada  $\omega_d=168.6$ , constante de amortiguamiento  $\sigma=.814$ , lo que nos da un amortiguamiento  $\zeta$  de .005.

Otro experimento que se realizó, consistió en colocar una varilla metálica movable en el soporte del equipo. La varilla se podía desplazar desde una posición en la que no interfería con el elemento elástico, hasta un punto donde sí lo hacía (en este punto se encontraba un tope que marcaba el límite del desplazamiento). El montaje de la varilla se muestra en la figura 3.14

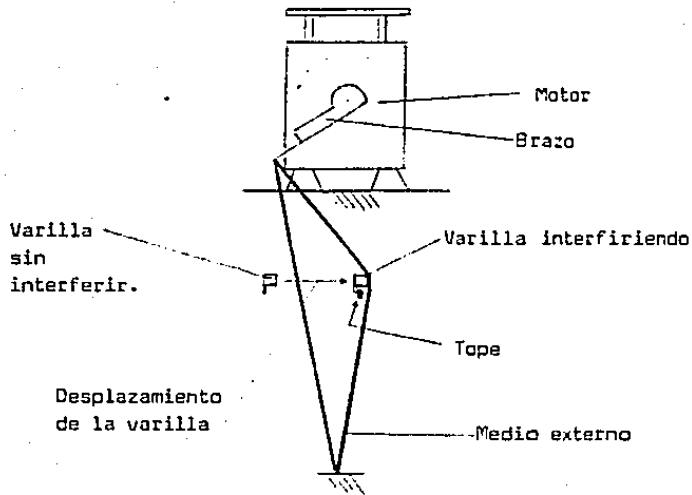


Figura 3.14  
Montaje para perturbar el medio elástico.

La varilla, al interferir con el elemento elástico hacia que se modificara la curva de interacción de éste con el sistema. La figura 3.15 muestra la variación de la respuesta del medio debido a la varilla.

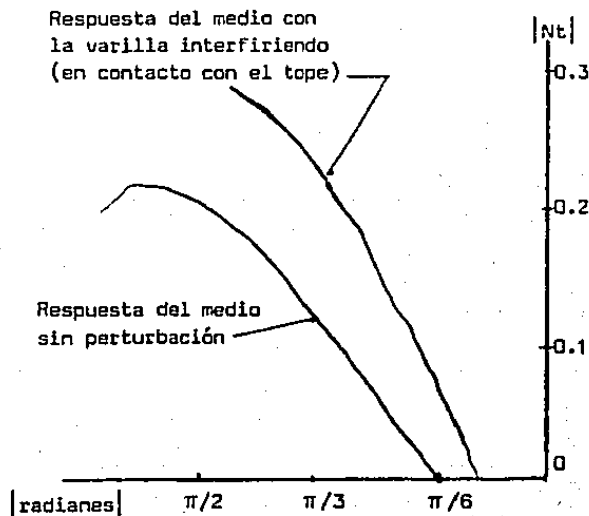


Figura 3.15  
Variación de la respuesta del medio por la perturbación.

La perturbación consistió en lo siguiente: inicialmente la varilla estaba en la posición donde no interfería. Desde ese punto se le desplazaba paulatinamente hasta llegar al punto máximo de interferencia, desde donde repentinamente se regresaba al punto inicial. Esto se efectuaba mientras el dispositivo seguía una referencia sinusoidal. La perturbación más significativa del procedimiento descrito se presentaba al quitar la interferencia en forma repentina, por lo que se referirá de aquí en adelante a esta acción cuando se hable de la perturbación experimental.

### Sintonización II.

La sintonización consistió en suministrar una referencia de 0.3 Hz y perturbar al sistema varias veces, probando diferentes ganancias y monitoreando la señal de error de fuerza en un osciloscopio. Se seleccionó la mayor ganancia que permitía el sistema sin oscilar violentamente en presencia de la perturbación, y fue de  $K_p=3$ . Los resultados se muestran en la figura 3.16.

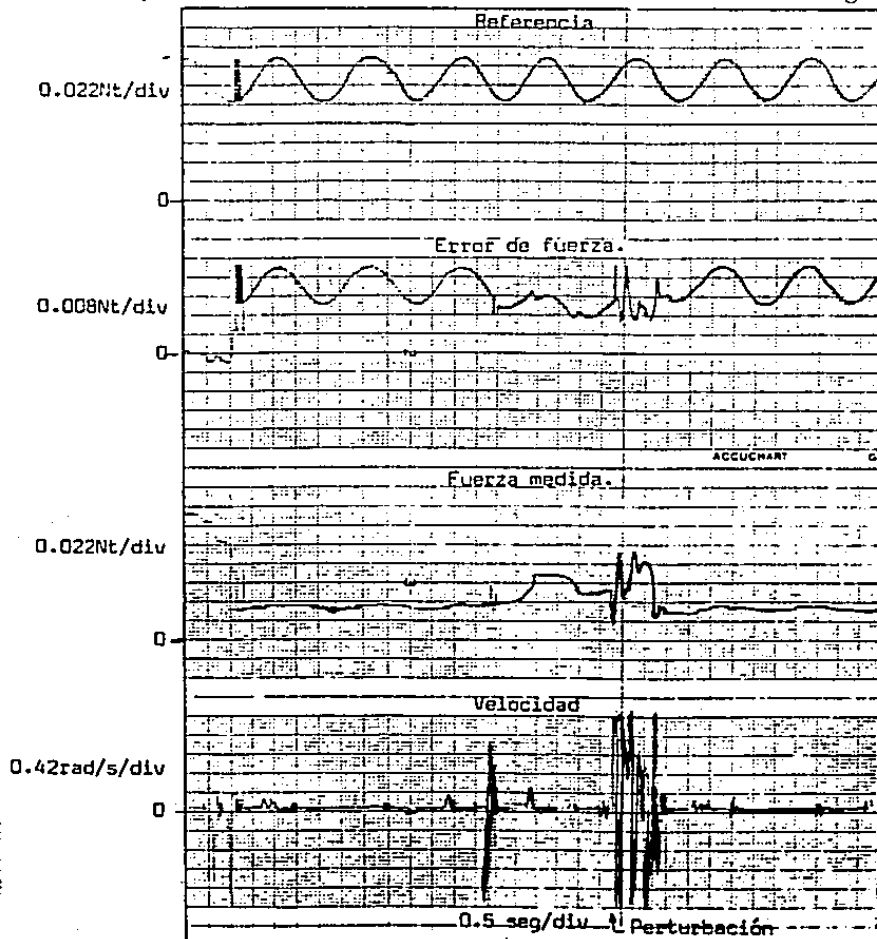


Figura 3.16  
Respuesta experimental con perturbación

La figura 3.16 muestra claramente que la ganancia de  $K_p=3$  resulta demasiado baja, ya que la respuesta del sistema no sigue a la referencia. Desde el punto de vista de los objetivos del control, el control proporcional con esta sintonización no tiene ninguna justificación. Esto motiva el empleo de estrategias de control más elaboradas que se presentarán en los capítulos siguientes.



## CAPITULO 4

### Control P.I.

#### 4.1 Introducción.

En este capítulo se muestra el análisis (sección 4.2) y los resultados experimentales (sección 4.3) del dispositivo electromecánico, con realimentación proporcional e integral de fuerza (control P.I.).

#### 4.2 Análisis.

En la figura 4.1 se muestra el diagrama de bloques del sistema con el controlador P.I.

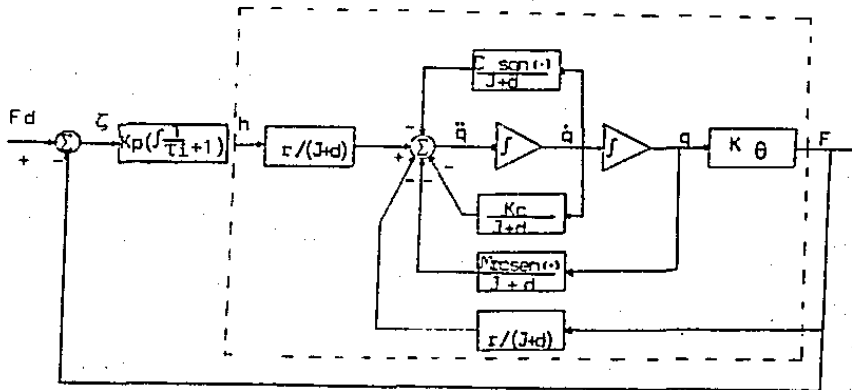


Figura 4.1  
Sistema con controlador P.I.

El comportamiento del sistema puede expresarse con el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$h = \left( (d+J)\ddot{q}(t) + K_c\dot{q}(t) + g_1 + g_2q(t) + gMr\text{csen}q(t) + C\text{sgn}(\dot{q}(t)) \right) / r \quad (4.1)$$

$$h = K_p \left( \zeta + \frac{1}{\tau_I} \int \zeta dt \right) \quad (4.2)$$

$$\zeta = Fd - F \quad (4.3)$$

$$F = (g_1 + g_2 q(t)) / r \quad (4.4)$$

en donde  $\tau_i$  es la constante de integración del controlador y  $K_p$  la ganancia proporcional.

De las expresiones (4.1) y (4.2) se llega a:

$$K_p \dot{\zeta}(t) + \frac{K_p}{\tau_i} \zeta(t) = (J+d)\ddot{q}(t) + Kc\dot{q}(t) + \dot{q}(t)Mrccos(q(t)) + g_2 \dot{q}(t) + Cg_5 \vartheta(t) \quad (4.5)$$

donde  $\vartheta(t)$  es la función impulso unitario,  $g_5 \vartheta(t)$  es el término obtenido al derivar la función signo y  $g_5$  está dado por:

$$g_5 = \begin{cases} \text{sgn}(Fd), & \text{sgn } \dot{q}(t^-) = \text{sgn } \dot{q}(t) = 0 \\ -2 \text{sgn } q(t), & \text{sgn } \dot{q}(t^-) \neq \text{sgn } \dot{q}(t) \\ 0, & \text{sgn } \dot{q}(t^-) = \text{sgn } \dot{q}(t) \neq 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

usando (4.3) y (4.4) se llega a:

$$K_p Fd + \frac{K_p}{\tau_i} Fd = \left( (d+J)\ddot{q}(t) + Kc\dot{q}(t) + (1+K_p)g_2 \dot{q}(t) + \frac{K_p}{\tau_i} (g_1 + g_2 q(t)) + \dot{q}(t)gMrccos(q(t)) + Cg_5 \vartheta(t) \right) / r \quad (4.7)$$

La expresión (4.7) es una ecuación diferencial no lineal, que es difícil de resolver analíticamente. Para ilustrar su comportamiento se presenta una trayectoria típica en el espacio de estado obtenida mediante simulación, para una entrada tipo escalón y condiciones iniciales nulas (figura 4.2).

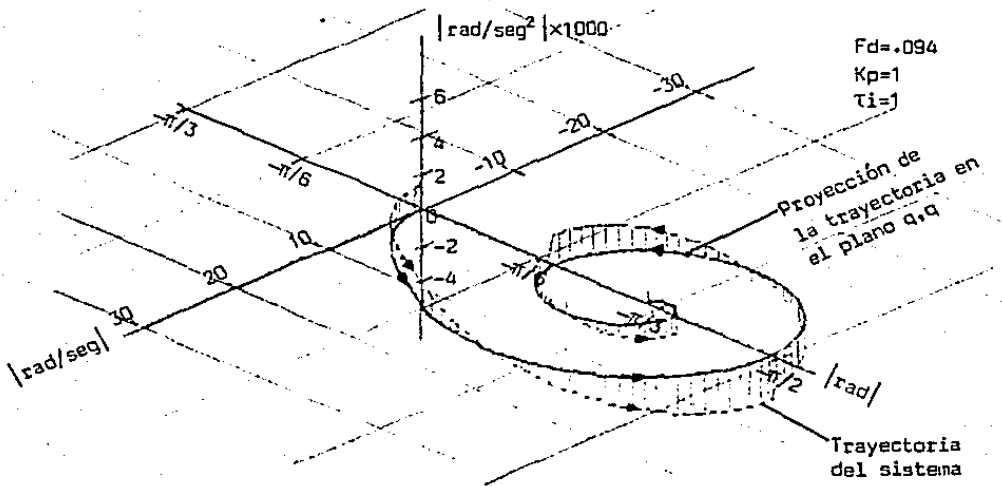


Figura 4.2  
 Trayectorias del sistema (4.5)  
 respondiendo a entrada escalón  
 y obtenidas por simulación.

De la misma forma que se procedió en los capítulos anteriores, se aproxima la función  $\text{sen}(q(t))$  por medio de rectas para efectuar un análisis que nos proporcione más información sobre el comportamiento del sistema.

La expresión (4.1) con la aproximación resulta:

$$h = \left( (d+J)\ddot{q}(t) + Kc\dot{q}(t) + g_1 + g_2 q(t) + gMrc(g_3 + g_4 q(t)) + Csgn(\dot{q}(t)) \right) / r \quad (4.8)$$

Esta expresión junto con la (4.2), (4.3) y (4.4) nos llevan a la (4.9):

$$K_p \dot{F}_d + \frac{K_p}{\tau_i} F_d = \left( (d+J)\ddot{q}(t) + Kc\dot{q}(t) + (1+K_p)g_2 \dot{q}(t) + \frac{K_p}{\tau_i} (g_1 + g_2 q(t)) + gMrcg_4 \dot{q}(t) + Cg_s \vartheta(t) \right) / r \quad (4.9)$$

donde  $g_s$  se define en (4.6).

Siguiendo los procedimientos anteriores, se construye la solución de (4.9) mediante ecuaciones diferenciales lineales, válidas dentro de las zonas de operación en las que se ha dividido el espacio de estado. Rearreglando esta expresión, se obtiene:

$$\ddot{q}(t) + \frac{K_c}{J+d} \dot{q}(t) + \left( \frac{1+K_p}{J+d} g_2 + \frac{gMrcg_4}{J+d} \right) q(t) + \frac{K_p g_2}{(J+d)\tau_i} q(t) = \frac{K_p Fdr}{J+d} + \frac{K_p Fdr}{(J+d)\tau_i} - \frac{K_p g_1}{(J+d)\tau_i} - \frac{C g_s \delta(t)}{(J+d)\tau_i} \quad (4.10)$$

donde  $g_s$  se define en (4.6).

La ecuación (4.10) es una ecuación diferencial lineal del tipo:

$$\ddot{q}(t) + A_1 \dot{q}(t) + A_2 q(t) + A_3 q(t) = A_4 Fd + A_5 Fd + A_6 + A_7 \delta(t) \quad (4.11)$$

Aquí:

$$A_1 = \frac{K_c}{J+d} \quad (4.12)$$

$$A_2 = \frac{1+K_p}{J+d} g_2 + \frac{gMrcg_4}{J+d} \quad (4.13)$$

$$A_3 = \frac{K_p g_2}{(J+d)\tau_i} \quad (4.14)$$

$$A_4 = \frac{K_{pr}}{J+d} \quad (4.15)$$

$$A_5 = \frac{K_{pr}}{(J+d)\tau_i} \quad (4.16)$$

$$A_6 = \frac{-K_p g_1}{(J+d)\tau_i} \quad (4.17)$$

$$A7 = \frac{-C_{gs}}{J+d} \quad (4.18)$$

Se efectúa el análisis de la respuesta a un escalón de magnitud  $F_d$  con condiciones iniciales nulas. Dentro de la zona de operación de los primeros  $\pi/6$  radianes  $A_3$  es nulo. Para obtener la posición angular en esta zona, se toma nuevamente la expresión (4.10) con estas condiciones particulares:

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) + \frac{K_c}{J+d} \dot{q}(t) + \frac{gMr_{cg_4}}{J+d} q(t) \\ = \frac{K_p F_{dr}}{J+d} + \frac{K_p F_{dr}}{(J+d)\tau_i} - \frac{C_{gs}\dot{\theta}(t)}{(J+d)\tau_i} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Integrando de ambos lados de la igualdad de  $t_0$  a  $t$  se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) + \frac{K_c \dot{q}(t)}{(d+J)} + \frac{gMr_{cg_4} q(t)}{(d+J)} = \dot{q}(t_0) + \frac{K_c \dot{q}(t_0)}{(d+J)} + \frac{gMr_{cg_4} q(t_0)}{(d+J)} \\ + \frac{K_{pr}}{(d+J)} \left( \frac{F_d}{\tau_i} (t-t_0) + F_d(t) - F_d(t_0) \right) - \frac{C_{gs} \dot{q}(t)}{(d+J)} \Big|_{t_0}^t \end{aligned} \quad (4.20)$$

Donde se tiene que la fuerza deseada  $F_d$  es constante para  $t > 0$ . La respuesta se puede construir con la solución de las ecuaciones diferenciales en las zonas de operación, que son del tipo:

$$\ddot{q}(t) + B_1 \dot{q}(t) + B_2 q(t) = B_3 t + B_4 \quad (4.21)$$

donde

$$B_1 = \frac{K_c}{(d+J)} \quad (4.22)$$

$$B2 = \frac{gMrcg_4}{(d+J)} \quad (4.23)$$

$$B3 = \frac{KprFd}{(d+J)\tau_i} \quad (4.24)$$

$$B4 = \frac{-KprFd \tau_o}{(d+J)\tau_i} + \frac{Kpr(Fd(t) - Fd(\tau_o))}{(d+J)} - \frac{C(\text{sgn}(\dot{q}(t)) - \text{sgn}(\dot{q}(\tau_o)))}{(d+J)}$$

$$+\ddot{q}(\tau_o) \frac{Kc\dot{q}(\tau_o)}{(d+J)} + \frac{gMrcg_4 q(\tau_o)}{(d+J)} \quad (4.25)$$

con el tiempo  $\tau_o$  representando el momento en el que se establecen las condiciones iniciales de una zona determinada.

La solución forzada de (4.21) es:

$$q(t) = \frac{B3t + B4}{B2} - \frac{B1B3}{B2^2} \quad (4.26)$$

y la solución natural es, para el caso de raíces complejas:

$$q(t) = e^{-\sigma t} (C1 \cos \omega t + C2 \text{sen } \omega t) \quad (4.27)$$

con:

$$\sigma = \frac{B1}{2} \quad (4.28)$$

$$\omega = \sqrt{B2 - \sigma^2} \quad (4.29)$$

Luego la respuesta completa del sistema es:

$$q(t) = \frac{B3t+B4}{B2} - \frac{B1B3}{B2} + e^{-\sigma t} (C1 \cos(\omega t) + C2 \sin(\omega t)) \quad (4.30)$$

Este sistema tiene los polos situados en  $s = -0.81 \pm j9.93$  independientemente de los valores de los parámetros del controlador, ya que como se dijo, no existe realimentación en este intervalo.

Para la zona de  $\pi/6$  a  $\pi/2$  (expresiones de (4.11) a (4.18)) la solución se obtiene como la superposición de la solución forzada, que se compone de una parte debida al término constante y otra que involucra el término  $\partial(t)$ , y la respuesta natural del sistema (recuerdese que  $F_d=0$  en este caso).

a) Solución forzada debida al término constante.

La solución forzada de (4.11) debida a los términos  $A5$  y  $A6F_d$  resulta:

$$q(t) = \frac{A6F_d + A5}{A3} \quad (4.31)$$

b) Solución forzada debida a  $A7\partial(t)$ .

En la solución forzada debida al término

$$A7\partial(t) = \frac{Cg_s \partial(t)}{J+d} \quad (4.32)$$

se tiene una solución para cada valor de  $g_s$  en la zona en que se encuentra el sistema. Sin embargo todas estas zonas involucran la respuesta a un impulso unitario. Esta respuesta es equivalente a la solución natural de (4.11) para las condiciones iniciales [7]:

$$q_i(t_0) = \begin{pmatrix} q(t_0) \\ \dot{q}(t_0) \\ \ddot{q}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{C}{d+J} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

entonces la respuesta en cada zona está dada por la respuesta natural al vector de condiciones iniciales:

$$g_s q_i(t_0) \quad (4.34)$$

c) Solución natural de (4.11).

En este punto sólo se trata la solución natural para el caso en que haya raíces complejas, debido a que es el de principal interés en nuestro sistema en específico. La solución natural de (4.11) es:

$$q(t) = C_1 e^{at} + e^{bt} (C_2 \cos(\omega t) + C_3 \operatorname{sen}(\omega t)) \quad (4.35)$$

en la que  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  se obtienen de las condiciones iniciales y donde  $a$  y  $b \pm j\omega$  son las raíces de la ecuación característica correspondiente.

Luego la respuesta completa del sistema es:

$$q(t) = \frac{A_5 + A_6 F d}{A_3} + C_1 e^{at} + e^{bt} (C_2 \cos(\omega t) + C_3 \operatorname{sen}(\omega t)) \quad (4.36)$$

con las constantes  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  tales que satisfacen el conjunto de condiciones iniciales (4.37) en un tiempo inicial  $t_0$ , que es el tiempo inicial para cada zona.

$$q(t=t_0) = \begin{pmatrix} q(t_0) \\ \dot{q}(t_0) \\ \ddot{q}(t_0) + \frac{g_s C}{(d+J)} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Los diagramas del lugar geométrico de las raíces de los intervalos de  $\pi/6$  a  $\pi/3$  radianes y de  $\pi/3$  a  $\pi/2$  radianes, se muestran en las figuras 4.3.y 4.4.



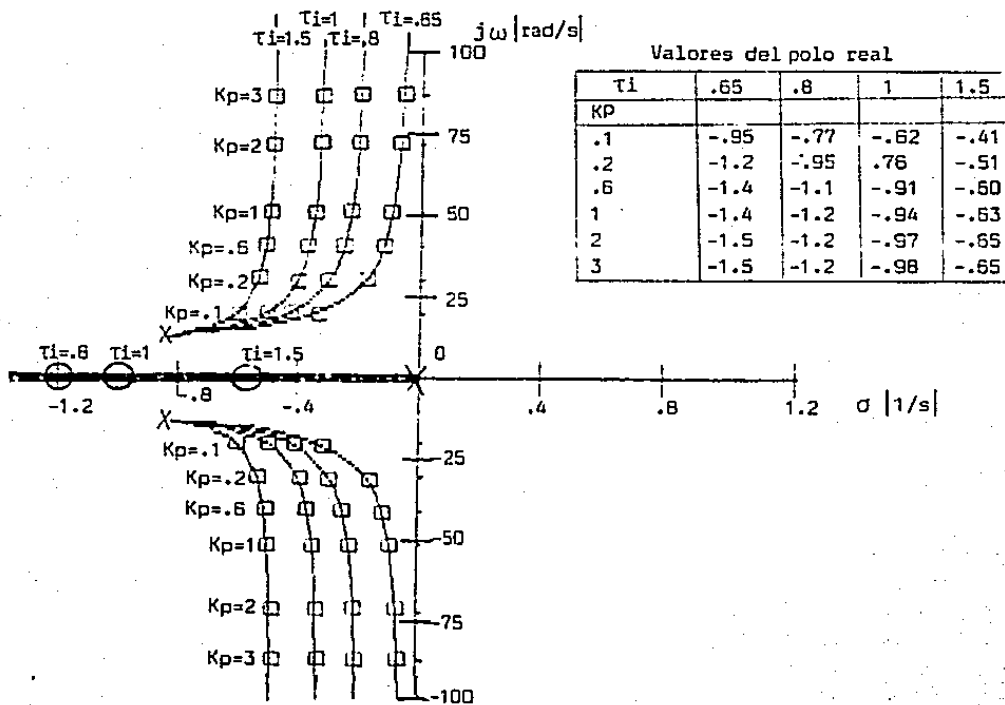


Figura 4.3  
 Lugar geométrico de las raíces del sistema (4.9)  
 en el intervalo de  $\pi/6$  a  $\pi/3$  radianes.

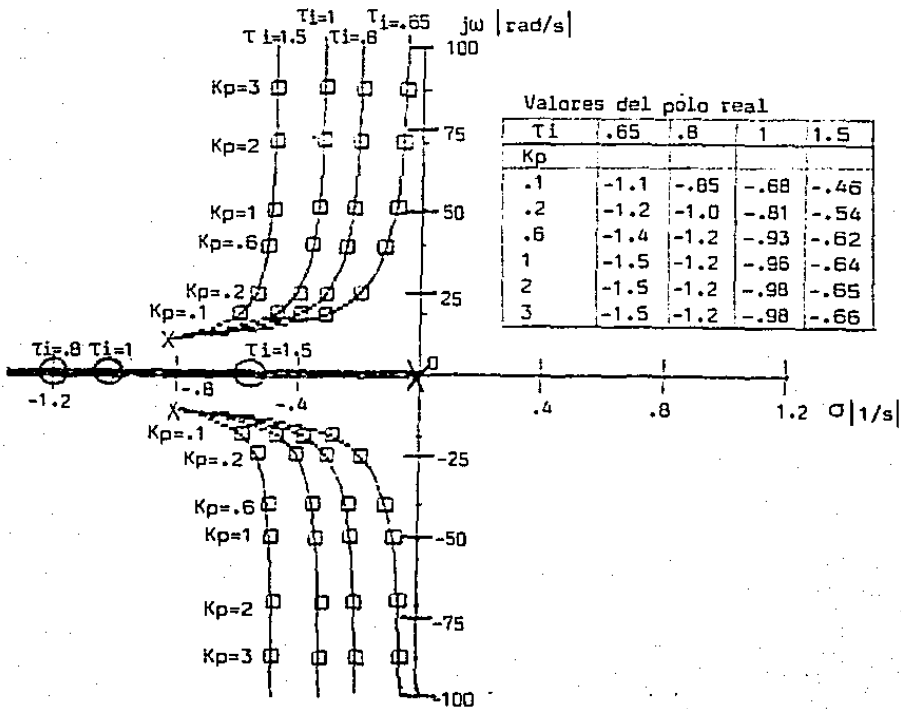


Figura 4.4  
Lugar geométrico de las raíces del sistema (4.9)  
en el intervalo de  $\pi/3$  a  $\pi/2$  radianes.

A continuación se muestra la trayectoria en el espacio de estado del sistema (4.21) para  $K_p=1$  y  $\tau_i=1$   $F_d=.094Nt$ , para una entrada escalón de magnitud  $F_d$  con condiciones iniciales nulas (figura 4.5). Nótese que si las condiciones iniciales se dan dentro de los primeros  $\pi/6$  radianes se refieren a dos variables de estado. A partir de  $\pi/6$  radianes, el estado se define mediante tres variables.

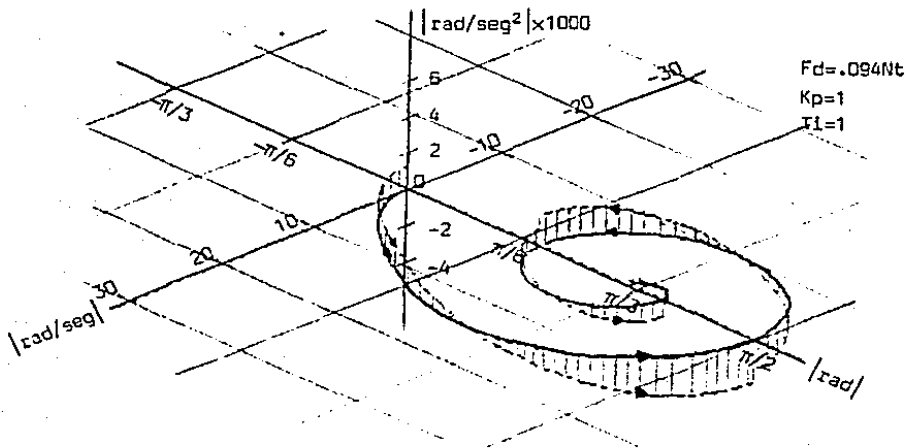


Figura 4.5  
Trayectoria en el espacio de estado del sistema (4.9)

#### 4.3 Resultados Experimentales.

Las frecuencias de las señales usadas en los experimentos del capítulo anterior (0.3 Hz. y de 1.25 Hz) permiten a este controlador, un amplio rango de las ganancias  $K_p$  y  $T_i$ , en el que las respuestas del sistema permanecen dentro de la zona de interacción lineal. Al poder usar las mismas señales de referencia, es factible hacer una comparación entre experimentos con diferentes estrategias. El procedimiento de sintonización se describe a continuación.

##### i Sintonización I.

Se le suministró al sistema una señal sinusoidal, de 1.25 Hz. de frecuencia y se monitoreó el error de fuerza con un osciloscopio, tal y como se hizo en los experimentos del capítulo anterior. Se seleccionaron las mayores ganancias proporcional ( $K_p$ ) e integral ( $1/T_i$ ) que permitía el sistema sin llegar a la inestabilidad. Se graficaron la referencia ( $F_d$ ), el error de fuerza ( $F_d - F$ ), la fuerza medida ( $F$ ) y la velocidad ( $\dot{q}(t)$ ). Los resultados para ganancias de  $K_p=6$  y  $T_i=0.65$  se muestran en la figura 4.6.

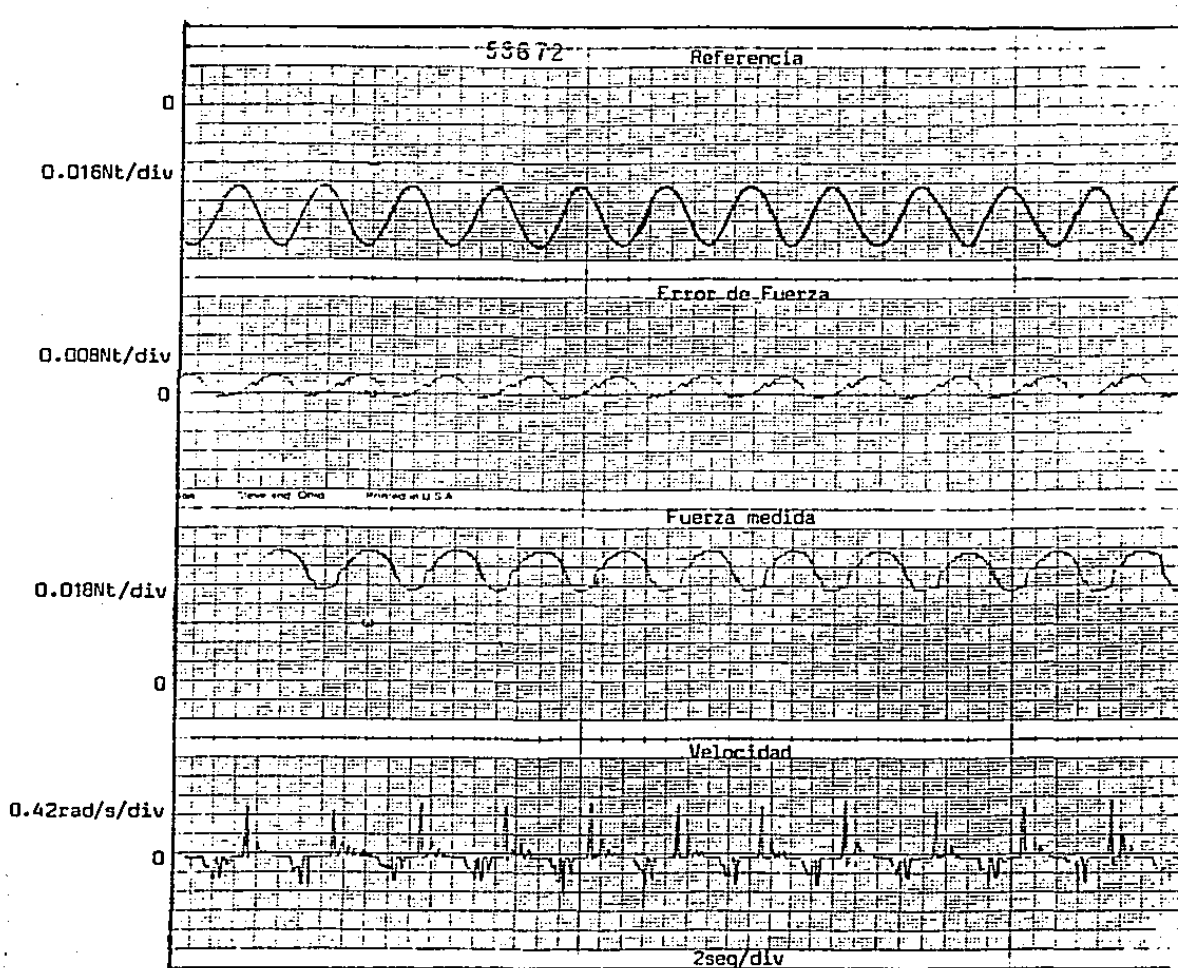


Figura 4.6  
 Respuesta experimental del dispositivo  
 con control P.I.  $K_p=6, \tau_i = .65$

La respuesta en el espacio de estado a una entrada escalón, del sistema con la sintonización descrita se presenta a continuación en la figura 4.7.

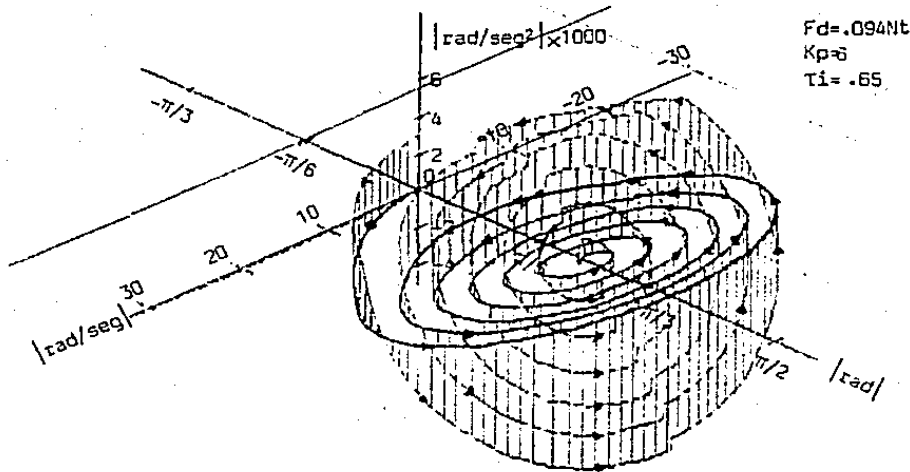


Figura 4.7  
 Trayectoria en el espacio de estado para  
 el sistema.  $K_p=6$ ,  $\tau_i=.65$ .

Como lo muestra el diagrama del lugar geométrico de las raíces, la sintonización que se escogió hace al sistema muy poco amortiguado. Esto resulta muy notorio en la respuesta a una entrada escalón ya que los polos dominantes están en  $s=0.0059 \pm 124.7j$ .

Se realizó también el experimento en presencia de perturbación que se describe en el capítulo anterior.

## Sintonización II.

La sintonización consistió en perturbar al sistema varias veces usando diferentes ganancias y monitoreando la señal de error de fuerza en un osciloscopio. Se seleccionaron las mayores ganancias (proporcional e integral) que permitía el sistema sin oscilar violentamente en presencia de la perturbación. Los resultados del experimento, donde  $K_p=2.5$  y  $\tau_i=0.65$ , se presentan en la figura 4.8.

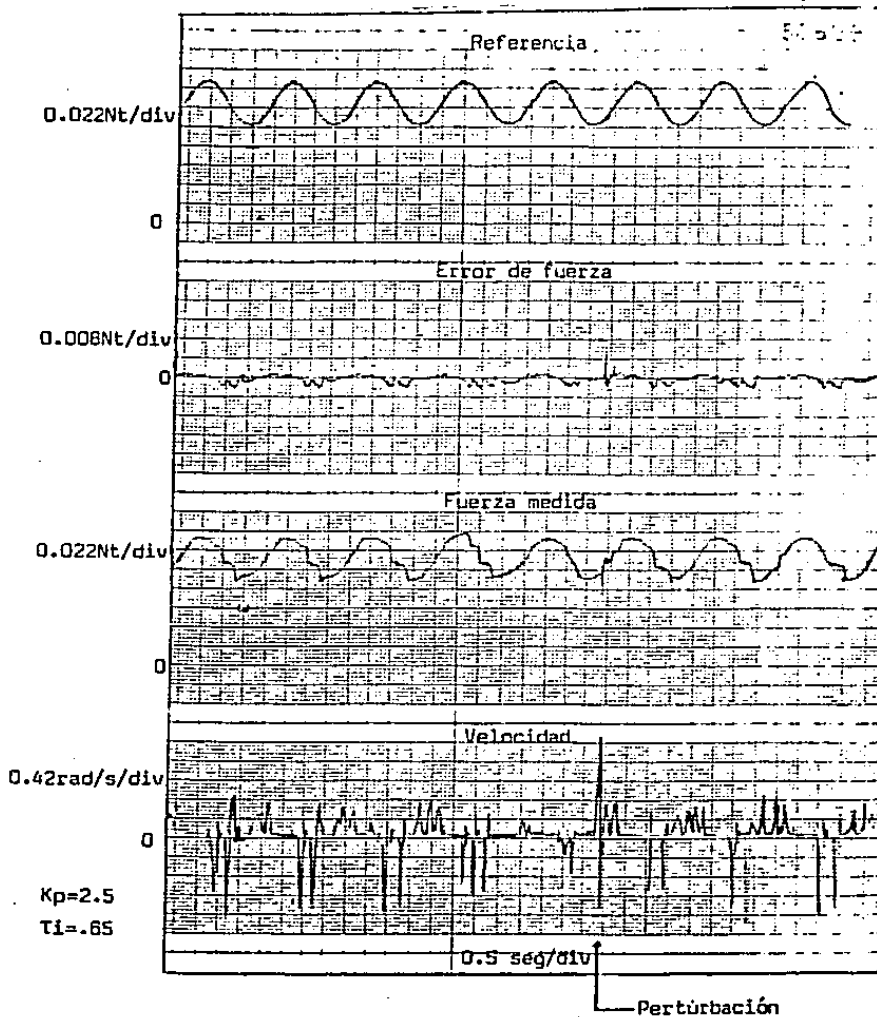


Figura 4.8  
 Respuesta experimental del dispositivo con control P.I. en presencia de una perturbación.

Para estudiar el seguimiento del sistema con esta nueva sintonización, se le suministra una referencia  $F_d$  de 0.3 Hz. de frecuencia, y de forma de onda sinusoidal, triangular y cuadrada. Los resultados se muestran en la figura 4.9.

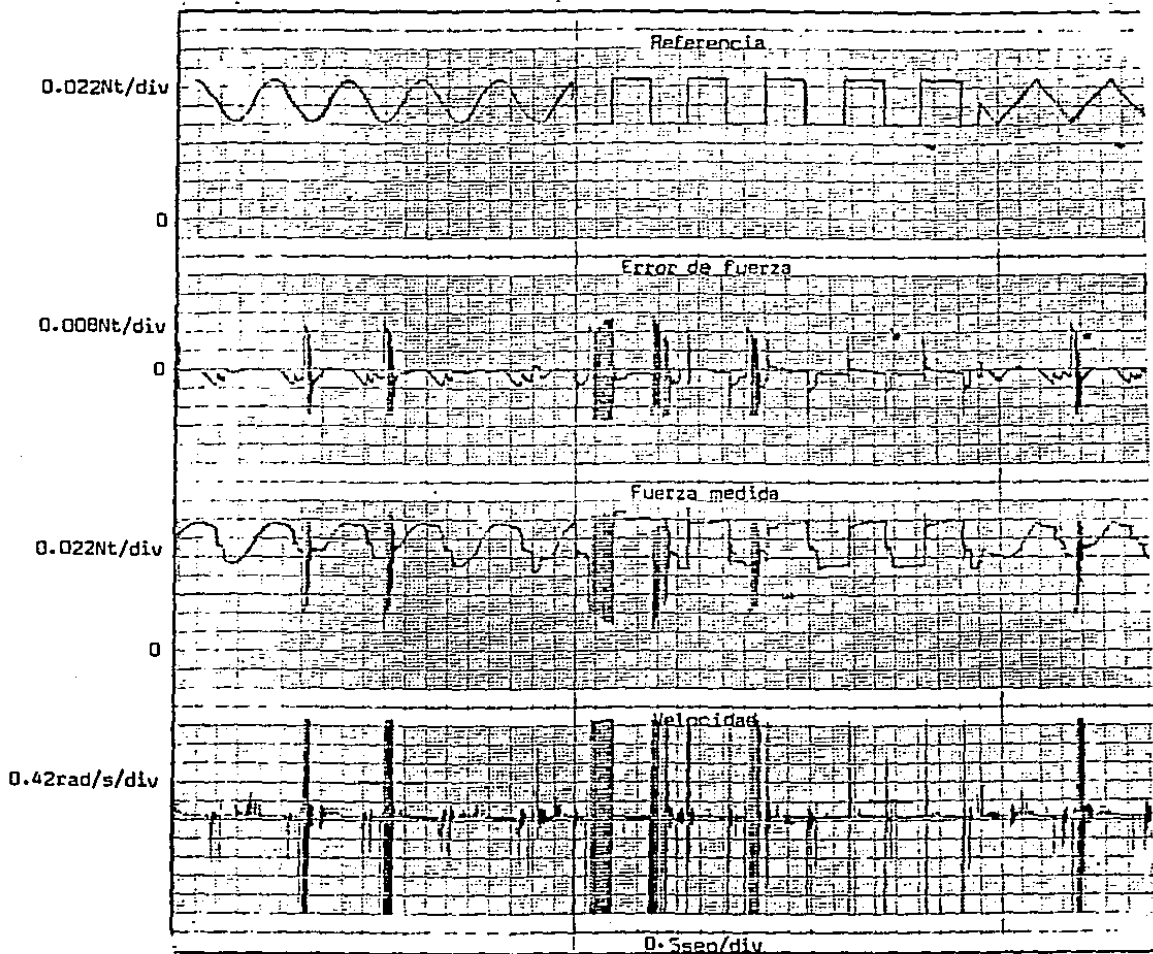


Figura 4.9  
 Respuesta experimental del dispositivo  
 con la sintonización II.

Los resultados de la sección muestran, como era de esperarse, que el controlador P.I. anula el error en la respuesta permanente, sin embargo del diagrama del lugar geométrico de las raíces se concluye que sólo con valores muy pequeños de las ganancias se evita la oscilación de la respuesta transitoria. En el siguiente capítulo analizaremos un controlador más completo, con el que se pueden tener grandes ganancias del controlador P.I con mejores resultados de amortiguamiento.





El análisis del sistema con este controlador es muy similar al que se presenta en el capítulo anterior. La realimentación de velocidad hace que el par  $\tau_v$  aumente. En este caso resulta:

$$\tau_v = (K_c + K_t K_a) \dot{q}(t) \quad (5.1)$$

donde  $K_t$  es la constante del tacogenerador. Esta realimentación modifica la expresión (4.1) resultando:

$$h = \left( (d+J) \ddot{q}(t) + (K_c + K_t K_a) \dot{q}(t) + g M r c \operatorname{sen}(q(t)) + g_1 + g_2 q(t) + C s \operatorname{gn}(\dot{q}(t)) \right) / r \quad (5.2)$$

esta expresión junto con las expresiones del control P.I., la definición de error  $\zeta$  y la descripción de la fuerza del medio, que se dan en las expresiones (4.2), (4.3), y (4.4) respectivamente, se usan para llegar a (5.3). Esta última expresión representa al sistema con controlador P.I. y realimentación de velocidad en lazo cerrado.

$$K_p \dot{F}_d + \frac{K_p F_d}{\tau_i} = \left( (d+J) \ddot{q}(t) + (K_c + K_t K_a) \dot{q}(t) + (1+K_p) g_2 \dot{q}(t) + \frac{K_p g_1 + g_2 q(t)}{\tau_i} + \dot{q}(t) g M r c \cos(q(t)) + C g_5 \vartheta(t) \right) / r \quad (5.3)$$

Al igual que para el sistema de la expresión (4.5), que representaba al sistema con control P.I. en lazo cerrado, se presenta una trayectoria típica de (5.3) para ejemplificar su dinámica. Esta trayectoria representa la respuesta a una entrada de escalón con condiciones iniciales nulas y se obtienen por simulación (figura 5.2).

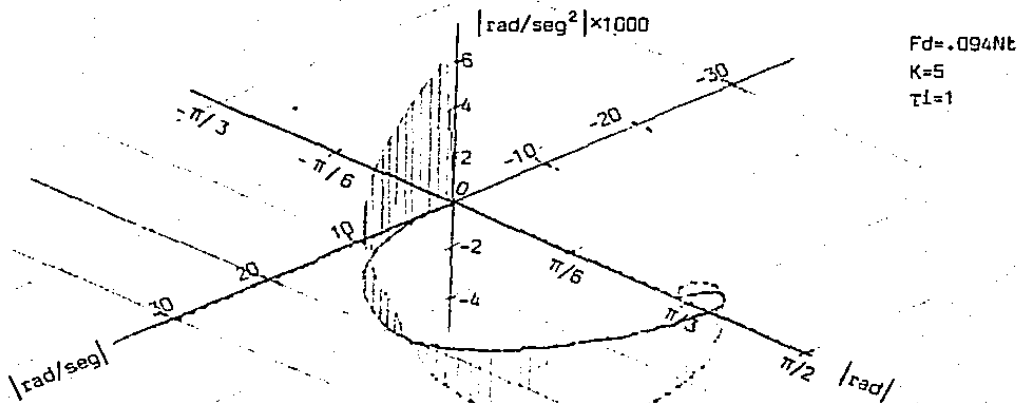


Figura 5.2  
 Trayectoria obtenida de la simulación del sistema (5.3) para una entrada de escalón unitario.

Un análisis que proporciona información más explícita del sistema se tiene siguiendo los procedimientos anteriores: esto es, aproximando la función  $\text{sen}(q(t))$  mediante rectas. Siguiendo los mismos pasos que en el capítulo 4 se obtiene la expresión (5.4). Esta expresión representa al sistema con la aproximación descrita en lazo cerrado.

$$K_p \ddot{F}_d + \frac{K_p F_d}{\tau_i} = \left( (d+J) \ddot{q}(t) + (K_c + K_t K_a) \dot{q}(t) + (1+K_p) g_2 \dot{q}(t) + \frac{K_p (g_1 + g_2 q(t))}{\tau_i} + g M r c g_4 \dot{q}(t) + C g_5 \theta(t) \right) / r \quad (5.4)$$

Esta expresión sólo difiere de (4.9) por el término que multiplica a  $\dot{q}(t)$ . Se analizará la respuesta del sistema a una entrada escalón con condiciones iniciales nulas. De nuevo construimos la solución con un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales que resultan de los casos particulares de (5.4) para cada zona de operación. Se analizará inicialmente la zona de los primeros  $\pi/6$  radianes de desplazamiento angular. En esta zona se tienen ecuaciones diferenciales del tipo:

$$\ddot{q}(t) + B_1 \dot{q}(t) + B_2 q(t) = B_3 t + B_4 \quad (5.5)$$

en los primeros  $\pi/6$  radianes de desplazamiento angular. Los valores de  $B_2$ ,  $B_3$  y  $B_4$  se dan en las expresiones (4.23), (4.24)

y (4.25) respectivamente, el valor de B1 es en este caso:

$$B1 = \frac{Kc + KtKa}{(d+J)} \quad (5.6)$$

y la solución, cuando los polos son complejos es:

$$q(t) = \frac{B3t + B4}{B2} - \frac{B1B3}{B2^2} + e^{-\sigma t} (C1 \cos(\omega t) + C2 \sin(\omega t)) \quad (5.7)$$

con  $\sigma$  y  $\omega$  definidos en (4.28) y (4.29).

En la zona de operación a partir de  $\pi/6$  radianes de velocidad angular, se obtienen ecuaciones diferenciales del tipo que se presenta en la expresión (5.8):

$$\ddot{q}(t) + A1\dot{q}(t) + A2q(t) + A3q(t) = +A5Fd + A6 + A7\theta(t) \quad (5.8)$$

donde los valores de A2, A3, A5, A6 y A7, se dan respectivamente en las expresiones (4.13), (4.14), (4.16), (4.17) y (4.18), mientras que A1 es la que se da en la (5.6) ( $A1=B1$ ).

La solución a ecuaciones del tipo (5.8) es, dependiendo de los polos que tenga, una de las siguientes:

$$q(t) = \frac{A5 + A6Fd}{A3} + C1e^{at} + C2e^{bt} (C2 \cos(\omega t) + C3 \sin(\omega t)) \quad (5.9)$$

$$q(t) = \frac{A5 + A6Fd}{A3} + C1e^{at} + C2e^{bt} + C3e^{ct} \quad (5.10)$$

$$q(t) = \frac{A5 + A6Fd}{A3} + C1e^{at} + C2e^{bt} + C3te^{bt} \quad (5.11)$$

donde los valores de C1, C2 y C3 deben satisfacer :

$$\mathbf{q}(t=t_0) = \begin{pmatrix} q(t_0) \\ \dot{q}(t_0) \\ \ddot{q}(t_0) + \frac{g \sin C}{(J+d)} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Los polos del sistema dentro de los primeros  $\pi/6$  radianes se sitúan en  $s=-.98$  y  $s=-101$ . En la siguiente zona de operación (de  $\pi/6$  a  $\pi/3$  radianes) se tiene el diagrama del lugar geométrico de las raíces que se presenta en la figura 5.3.

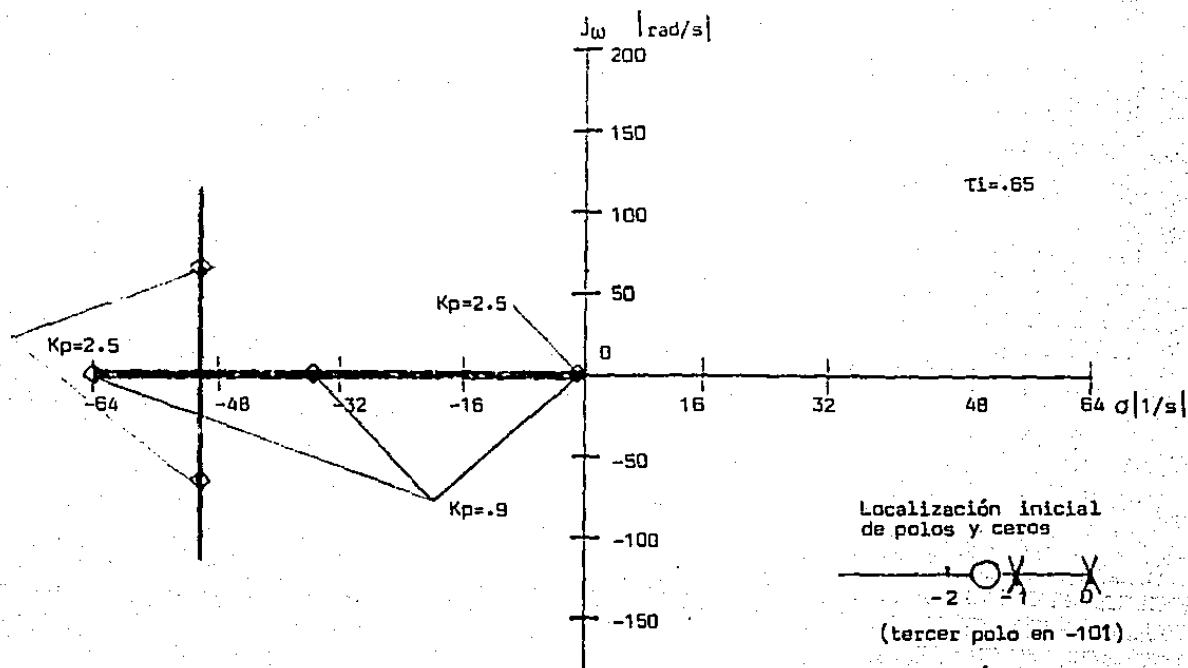


Figura 5.3  
Diagrama del lugar geométrico de las raíces de (5.4) en la zona de operación de  $\pi/6$  a  $\pi/3$  radianes.

En la figura 5.4 se muestra el diagrama del lugar geométrico para la zona de operación de  $\pi/3$  a  $\pi/2$  radianes.

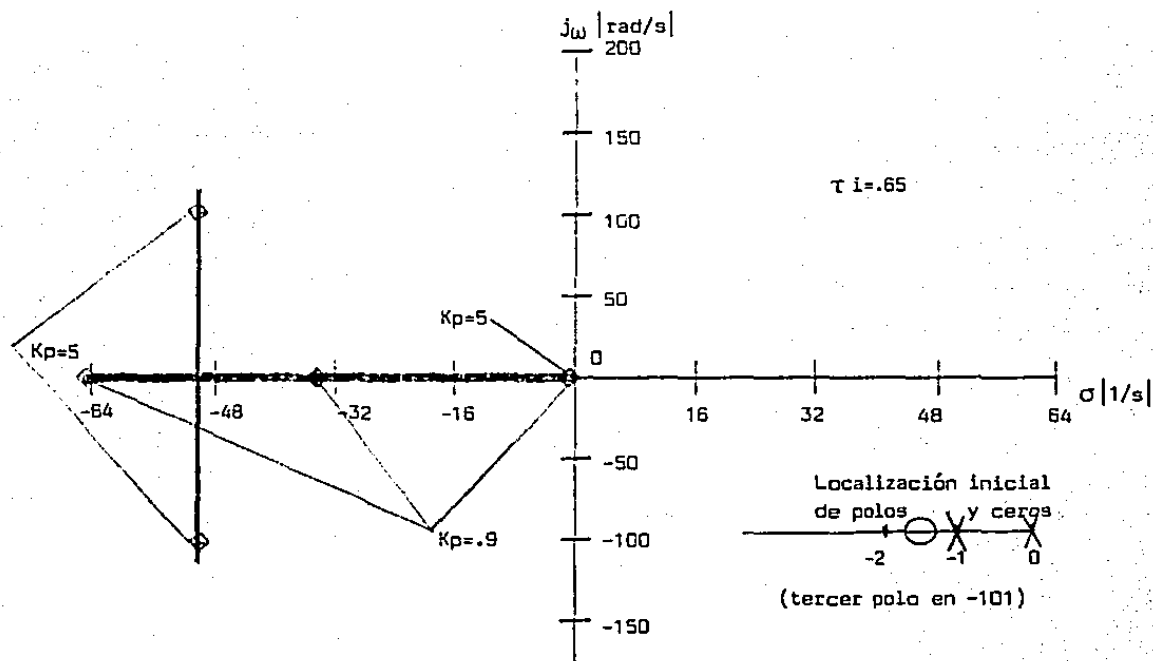


Figura 5.4

Diagrama del lugar de las raíces del sistema (5.4) para la zona de operación de  $\pi/3$  a  $\pi/2$  radianes.

La figura 5.5 muestra la trayectoria del sistema (5.4) en el espacio de estado para una entrada a escalón y condiciones iniciales nulas, siguiendo las soluciones propuestas en (5.7) y (5.9).

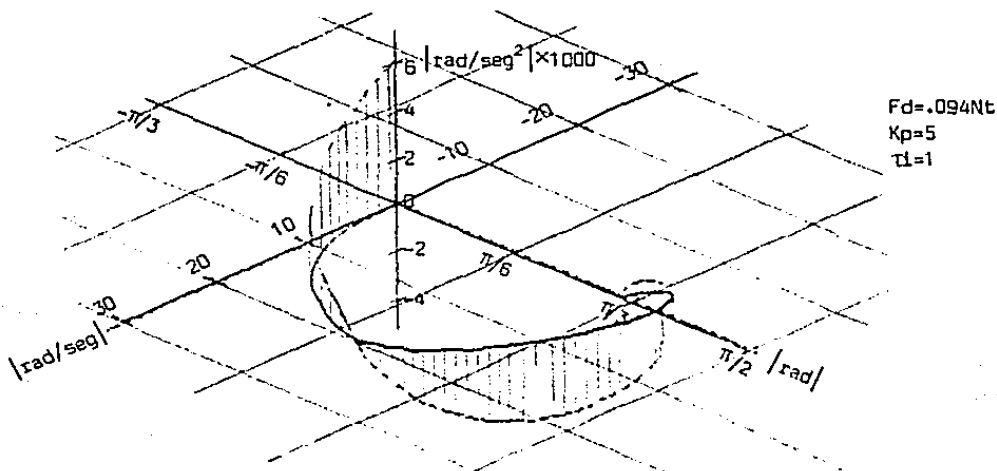


Figura 5.5  
 Trayectoria en el espacio de estado  
 de la respuesta a referencia escalón.

Como se puede apreciar de las gráficas, la introducción de la realimentación de velocidad, logra una disminución del sobrepaso, lo que era la principal desventaja de los controladores que se han propuesto en los capítulos anteriores.

### 5.3 Resultados Experimentales.

Para ejemplificar el comportamiento experimental del sistema, se le suministraron referencias iguales a las que se mencionan en capítulo anterior.

#### Sintonización.

Se le suministró al sistema una señal sinusoidal, de 1.25 Hz. de frecuencia y se monitoreó el error de fuerza con un osciloscopio, como se hizo en los experimentos del capítulo tres. Se seleccionó una ganancia para la realimentación de velocidad que permitiera asignar grandes valores (según los rangos del controlador) a las ganancias proporcional ( $K_p$ ) e integral ( $1/t_i$ ) sin que aparecieran los efectos de falta de amortiguamiento descritos en el capítulo anterior. Se graficaron la referencia ( $F_d$ ), el error de fuerza ( $F_d - F$ ), la fuerza medida ( $F$ ) y la velocidad ( $\dot{q}(t)$ ). Los resultados para los parámetros  $K_p = 11$  y  $t_i = 0.65$  se muestran en la figura 5.6.

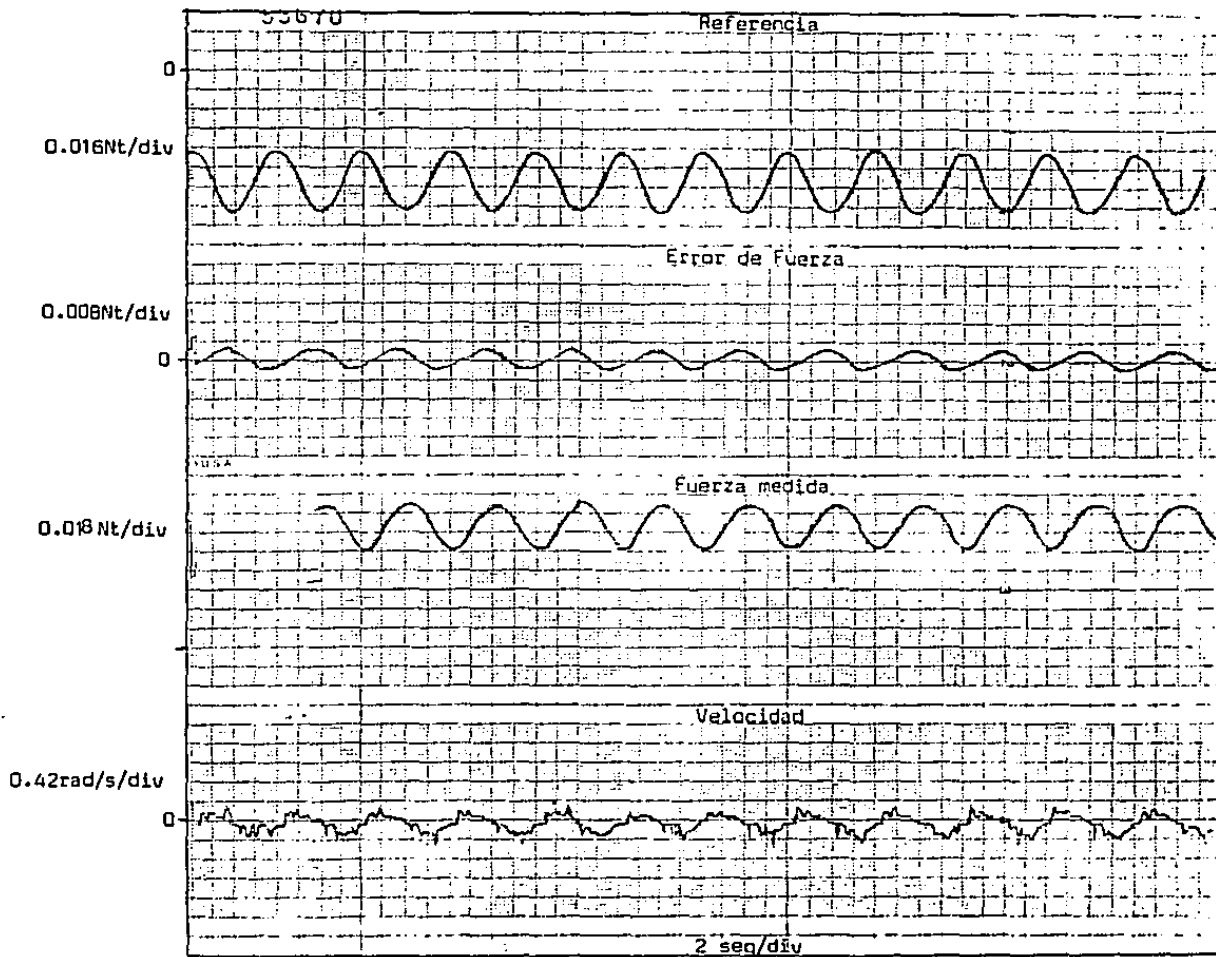
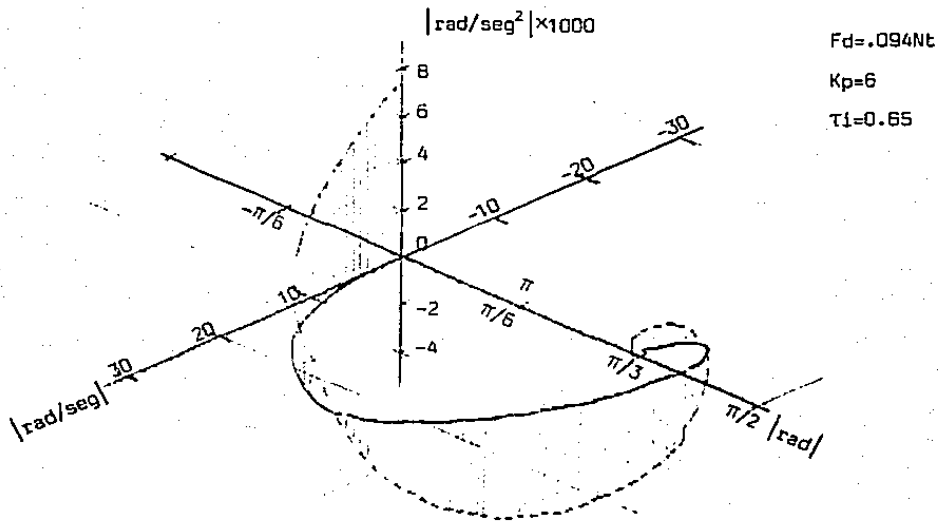


Figura 5.6  
 Resultados experimentales del controlador  
 P.I. con realimentación de velocidad  
 con  $\tau_i = .65$  y  $K_p = 11$ .

Se presenta en la figura 5.7 la trayectoria de la respuesta en el espacio de estado para un escalón con condiciones iniciales nulas.



**Figura 5.7**  
 Trayectorias del sistema (5.4) respondiendo  
 a una entrada escalón con condiciones iniciales nulas

Como lo muestran los resultados experimentales y el diagrama del lugar geométrico de las raíces, la realimentación de velocidad corrige el problema de falta de amortiguamiento. Se realizó también, para este sistema, el experimento en presencia de la perturbación que se describe en el capítulo tres (no hay necesidad de cambiar la sintonización).



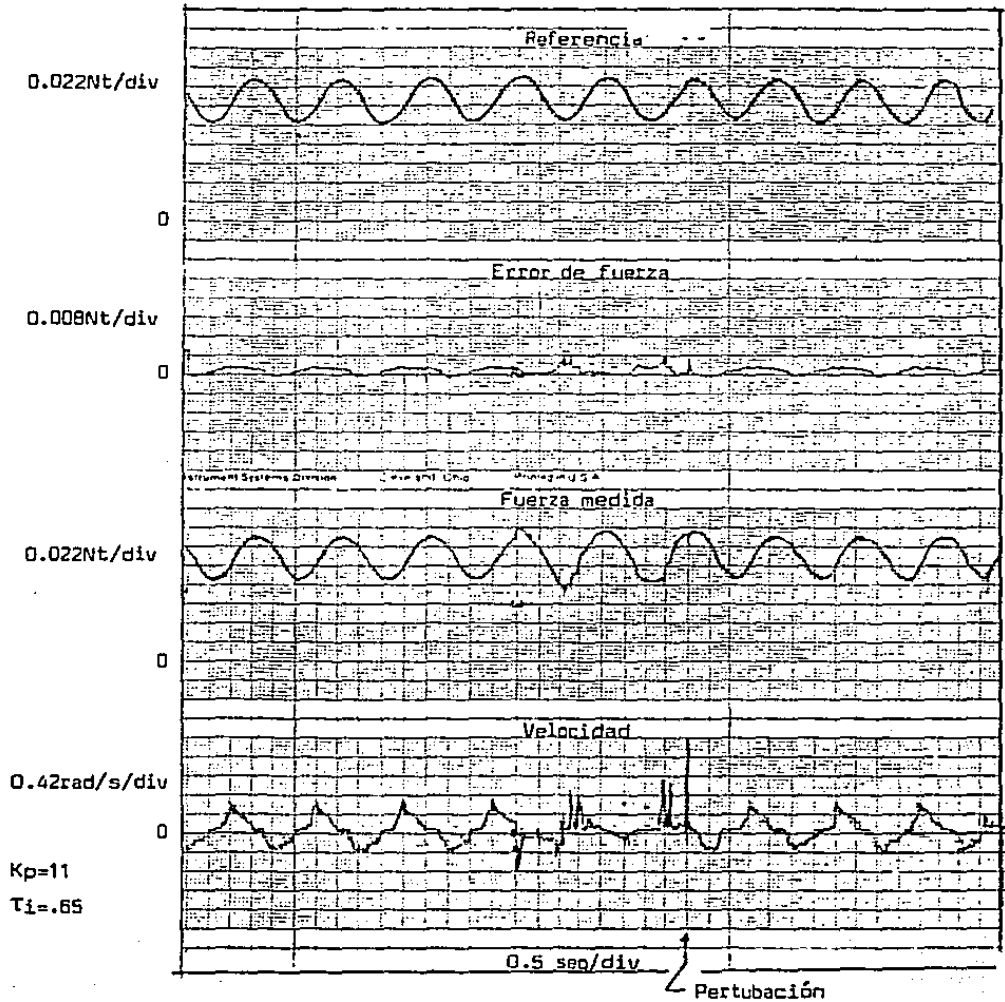


Figura 5.8  
 Respuesta experimental del dispositivo  
 en presencia de la perturbación.

Se presenta también, el comportamiento del sistema ante las mismas señales de referencia (sinusoidal, triangular y cuadrada) que se usaron en el experimento de seguimiento del capítulo anterior (figura 5.9).

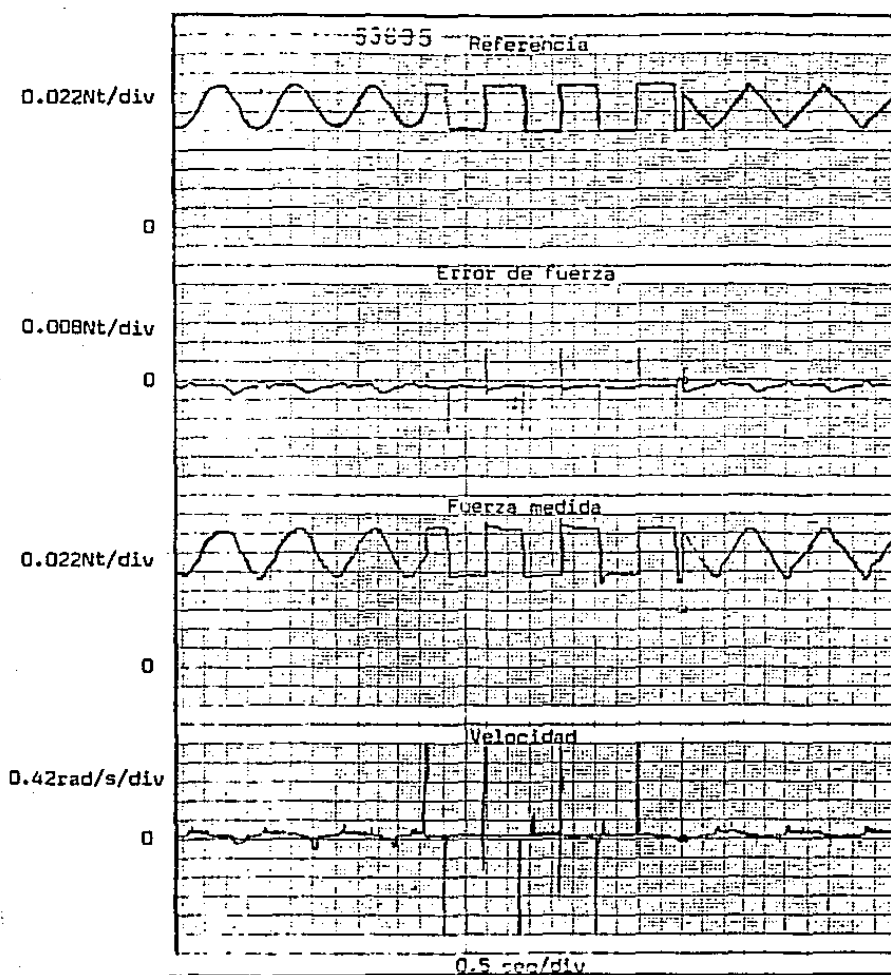


Figura 5.9  
Resultados experimentales del dispositivo  
con la sintonización II

Con los tres resultados experimentales que se presentan se comprueba que el comportamiento del sistema con este controlador es superior a los presentados en los capítulos anteriores.

## CAPITULO 6

### Compensación

#### 6.1 Introducción.

En este capítulo se propone un compensador que anule los pares de gravedad  $\tau_g$ , interacción con el medio externo  $\tau_e$ , el proporcional a la velocidad angular  $\tau_v$  y el generado por la fricción no viscosa  $f_{nv}$ . El propósito de compensar estos pares, es que el dispositivo electromecánico tenga una dinámica más lineal, al seguir una señal de referencia R. En el capítulo 7 se trata un control alrededor de esta nueva dinámica. La sección 6.2 trata de la compensación de los primeros tres pares mencionados. En la sección 6.3 se propone un modelo más completo para la fricción no viscosa y se presenta un compensador para ésta. Se presentan algunos comentarios relativos a la realización de el compensador de la fricción no viscosa en la sección 6.4 y algunos experimentos realizados.

#### 6.2 Compensación de los pares $\tau_g$ , $\tau_e$ y $\tau_v$ .

En el capítulo 2 se dieron las expresiones para los pares  $\tau_g$ ,  $\tau_e$  y  $\tau_v$  del sistema que es objeto de este estudio, y cuyo modelo está dado por :

$$K_{avc}(t) = (d+J)\ddot{q}(t) + \tau_g + \tau_v + \tau_e + f_{nv} \quad (6.1)$$

donde los pares están definidos por las expresiones:

$$\tau_g = g M r c \text{sen}(q(t)) \quad (6.2)$$

$$\tau_e = g_1 + g_2 q(t) \quad (6.3)$$

$$\tau_v = K_c \dot{q}(t) \quad (6.4)$$

Si se disponen de las señales  $q(t)$  y  $\dot{q}(t)$  es factible construir un controlador para compensar estos pares. El par de fricción no viscosa  $f_{nv}$  se puede obtener de igual forma a partir de la señal de velocidad angular:

$$f_{nv} = C \text{sgn}(\dot{q}(t)) \quad (6.5)$$

Sin embargo, la expresión (6.5) no describe adecuadamente la acción de este par cuando la velocidad es nula, por lo que no es conveniente usarla para fines de compensación cuando se tiene esa condición. Estudios de esta fricción se dan en [13] y [14]. Supongase que en la expresión (6.1) no se tuviera el término de fricción no viscosa ( $f_{nv}$ ). En esa situación el par de compensación sería de la forma:

$$\tau_c = g M r c \operatorname{sen}(q(t)) + g_1 + g_2 q(t) + K_c \dot{q}(t) \quad (6.6)$$

Si se hiciera que el par del motor  $K_{avc}(t)$  se compusiera de la suma de el par de referencia  $R$  y de el par de compensación  $\tau_c$ :

$$K_{avc}(t) = R + \tau_c \quad (6.7)$$

entonces, el sistema (6.1) (sin fricción no viscosa) se comportaría como un doble integrador ante el par de referencia [5]. Lo anterior se muestra en la figura 6.1.

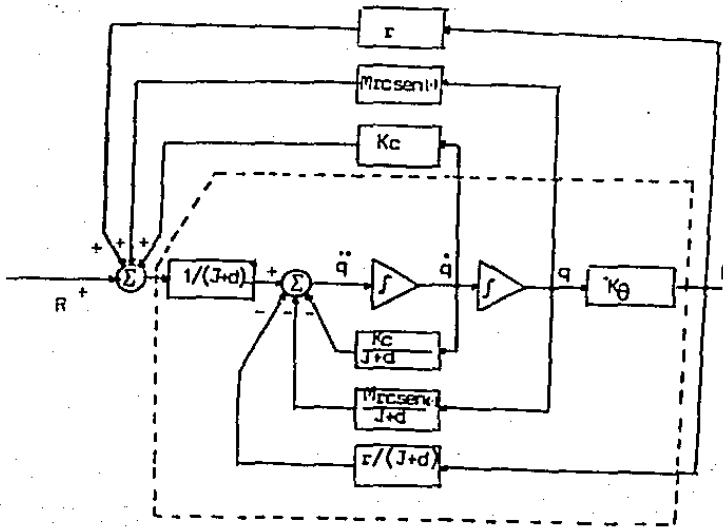


Figura 6.1

Diagrama de bloques del sistema compensado cuando no hay par de fricción no viscosa  $f_{nv}$ .

Este es el resultado al que se quiere llegar, para el sistema que se ha estado estudiando, por lo que se propone un modelo diferente de fricción no viscosa y se procede a hacer la compensación de esta forma.

### 6.3 Modelado de la fricción no viscosa.

Para el sistema de la expresión (6.1), se propone el siguiente modelo de par de fricción no viscosa  $f_{nv}$ , de acuerdo con la curva simplificada que se presenta en la figura 2.5:

$$f_{nv} = \begin{cases} K_{avc}(t) - \tau_g - \tau_e, & \dot{q} = 0, |K_{avc}(t) - \tau_g - \tau_e| \leq C & (6.8a) \\ C \operatorname{sgn}(\ddot{q}), & \dot{q} = 0, |K_{avc}(t) - \tau_g - \tau_e| > C & (6.8b) \\ C \operatorname{sgn}(\dot{q}), & \dot{q} \neq 0 & (6.8c) \end{cases}$$

en donde  $C$  es el valor máximo de la fricción no viscosa. El modelo anterior puede interpretarse de la siguiente forma:

i. Para  $\dot{q} = 0$ .

En este caso la aceleración del sistema se dá por:

$$\ddot{q}(t) = \frac{K_{avc}(t) - \tau_g - \tau_e - f_{nv}}{J + d} \quad (6.9)$$

Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre el eje (a excepción de la fricción no viscosa) tiene un módulo menor o igual a  $C$ , entonces dicho par de fricción es igual a esta resultante, por lo que el lado derecho de la expresión (6.9) resulta cero y la aceleración es nula.

Si esta resultante es mayor a  $C$ , entonces el par de fricción no viscosa actúa con una magnitud  $C$  en contra del par que provoca la aceleración.

ii Para  $\dot{q} \neq 0$ .

En esta situación se tiene que la fricción de Coulomb permite modelar adecuadamente el efecto de fricción no viscosa, que actúa en sentido contrario a la velocidad con magnitud constante  $C$ .

El punto de equilibrio del sistema, si se considera este modelo de fricción, está dado por la solución de:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Kc q_2 - g_1 - g_2 q_1 - g M r c \operatorname{sen}(q_1) - f_{nv} \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

con:

$$\dot{q} = [q(t) \quad q(t)]^T \quad (6.11)$$

para la condición:

$$\dot{q} = 0 \quad (6.12)$$

y donde  $f(q)$  está dado por (6.8).

Como la condición (6.12) implica velocidad y aceleración angular nula, sólo se puede cumplir en la expresión (6.8) la condición:

$$|\tau g + \tau e| \leq C \quad (6.13)$$

la solución de (6.10) entonces es:

$$\dot{q}(t) = 0 \quad (6.14)$$

y

$$g_1 + g_2 q(t) + M r_C \text{sen}(q(t)) = \tau g + \tau e \quad (6.15)$$

En la condición (6.13) se ilustra en la figura 6.2, donde se ve que existen regiones de equilibrio, mientras no se llegue al límite establecido.

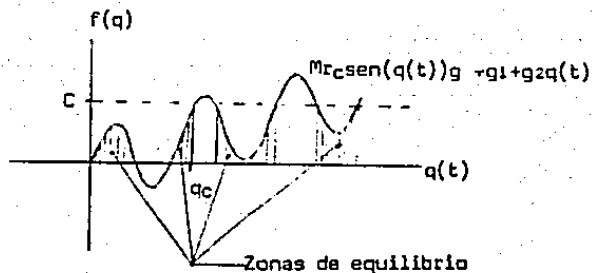


Figura 6.2  
Condición 6.12

La condición (6.15) siempre se cumple, luego existirán puntos de equilibrio por lo menos en todo el intervalo de desplazamiento angular entre 0 y  $q_c$  (recuérdese que  $C > 0$ ).

Los puntos de equilibrio obtenidos con este modelo difieren de los obtenidos en la sección 3.2, en la que se usó el modelo original.

#### 6.4 Compensación completa.

Se propone el siguiente compensador:

$$\tau_c = \tau_g + \tau_e + \tau_v + C \operatorname{sgn}(S) \quad (6.16)$$

con

$$S = \begin{cases} R, & \dot{q} = 0 \\ \dot{q}, & \dot{q} \neq 0 \end{cases} \quad (6.17a)$$

$$(6.17b)$$

y con

$$K_{avc}(t) = R + \tau_c \quad (6.18)$$

donde  $R$  es el par de referencia.

i  $\dot{q} = 0$  Condición (6.8a).

En el caso de velocidad nula, se substituyen las expresiones (6.18), (6.17a) y (6.16) en (6.8). La condición de la desigualdad de la expresión (6.8a) para el compensador propuesto sólo se cumple para  $R=0$ , de otra forma, lo que se cumple es la condición de la expresión (6.8b). En este caso se obtiene:

$$f_{nv} = 0 \quad (6.19)$$

y substituyendo ahora (6.18), (6.17a), (6.16) y (6.19) en (6.1) se llega a:

$$(J+d)\ddot{q}(t) = 0 \quad (6.20)$$

ii  $\dot{q}=0$  Condición ( 6.8b).

Supongamos que se está en un estado inicial de velocidad y aceleración nula, y en el que la referencia R es nula. En este estado, la dinámica del sistema está representada por la ecuación (6.20). Si estando en estas condiciones en el tiempo  $t=t_0$ , la referencia R se varía en un valor  $\epsilon$ , se tiene, por las expresiones (6.18), (6.17a), (6.16), (6.8b) y (6.1):

$$R = \epsilon \quad (6.21)$$

$$f_{nv} = C \operatorname{sgn}(\ddot{q}) \quad (6.22)$$

y además

$$(J+d)(\ddot{q}) = \epsilon + C \operatorname{sgn}(\epsilon) - C \operatorname{sgn}(\ddot{q}) \quad (6.23)$$

Como la parte izquierda de la ecuación (6.23) tiene forzosamente el signo de  $\epsilon$ , se concluye que:

$$\operatorname{sgn}(\ddot{q}) = \operatorname{sgn}(\epsilon) \quad (6.24)$$

y por lo tanto:

$$(J+d)\ddot{q} = \epsilon = R \quad (6.25)$$

iii  $\dot{q} \neq 0$

Analicemos lo que pasa en  $t=t_0^+$  en las mismas condiciones que se han venido planteando. En  $t=t_0$  la dinámica del sistema estaba descrita por (6.25). Si suponemos que la magnitud del par de referencia R se mantiene igual en  $t_0^+$ , se tendrá:

$$\operatorname{sgn}(\dot{q}(t_0^+)) = \operatorname{sgn}(\dot{q}(t_0)) = \operatorname{sgn}(\dot{q}(t_0^+)) \quad (6.26)$$

y donde la velocidad es no nula. Debido a esto último, por las expresiones (6.17), (6.17b), (6.18) y (6.8c) se tiene el par:

$$K_{avc}(t) = \tau_g + \tau_e + \tau_v + R + C \operatorname{sgn}(\dot{q}(t)) \quad (6.27)$$

substituyendo en la expresión (6.1) se llega a:

$$(J+d)(\ddot{q}) = R \quad (6.28)$$

Para todos los casos, las expresiones (6.20), (6.25) y (6.28) el controlador propuesto hace que el sistema se comporte como doble integrador, ante la señal de referencia, que era lo que se pretendía obtener. La figura 6.3 muestra el diagrama de bloques del sistema con el compensador.





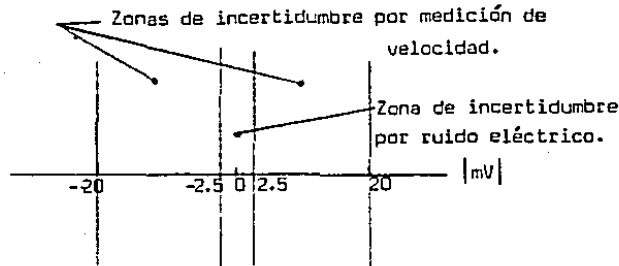


Figura 6.4  
Zonas de detección de tensión para la realización del compensador

Dadas las dificultades que se acaban de mencionar y tomando en cuenta que en los experimentos realizados, las velocidades que se registraron fueron en general muy bajas, se decidió construir sólo la parte del compensador que obtiene el signo de la referencia. Esto presenta una discrepancia con el análisis realizado en la sección anterior, en los momentos en que el signo de la referencia no coincide con el de la velocidad, lo que se estimó poco significativo (dados los experimentos que se realizaron).

A continuación se muestran algunos experimentos que muestran los resultados del compensador de fricción. La consigna del sistema en estos experimentos es de velocidad. El diagrama de conexión se muestra en la figura 6.5:

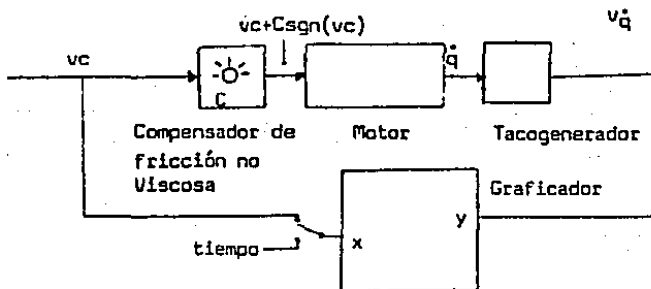


Figura 6.5  
Disposición del sistema para la experimentación con el compensador de fricción no viscosa

Se hace notar que en estos experimentos ni el sensor de posición ni el brazo estaban acoplados al eje del motor, por lo que los valores de los parámetros de el sistema en este experimento, difieren de los presentados en el capítulo 2.

i Experimentación en estado permanente.

Variando la referencia lentamente (en relación a la constante de tiempo), de forma que la respuesta del sistema sea equivalente a la respuesta permanente, se obtuvieron los siguientes resultados (figura 6.6).

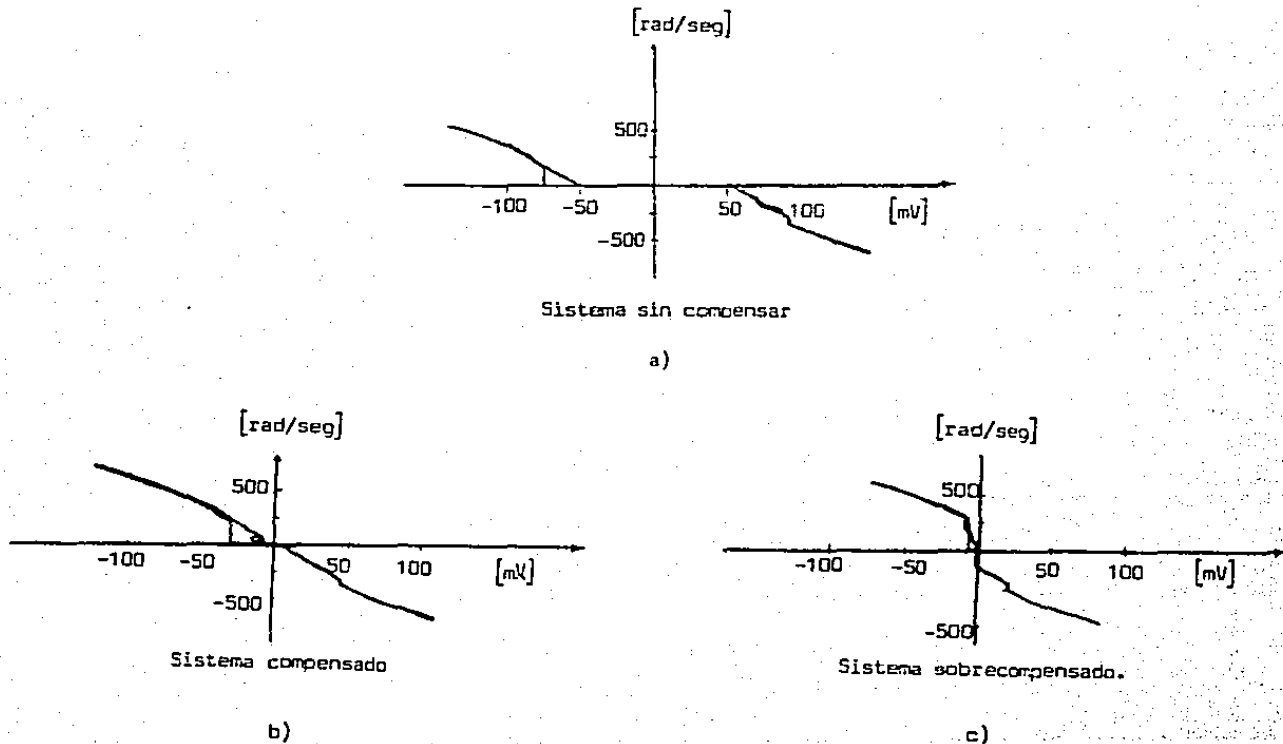


Figura 6.6  
Resultados de la compensación de fricción.

En estos resultados se aprecia que la compensación hace más lineal esta curva. La no linealidad y la falta de simetría que existen cuando se pasa de un estado de velocidad nula a uno de movimiento persisten. Finalmente, una sobrecompensación (excesiva de ganancia en el compensador) introduce no linealidades importantes.

ii Experimentación con referencia sinusoidal.

Se presentan a continuación los resultados del sistema con la compensación de fricción descrita en la sección anterior, siguiendo a una referencia sinusoidal (figura 6.7).

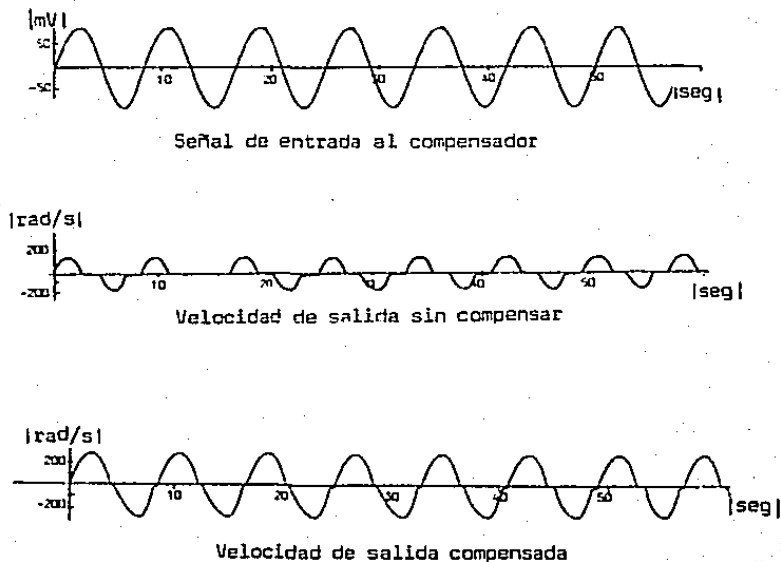


Figura 6.7  
Compensación de fricción para  
una referencia sinusoidal.

En la figura 6.7, se muestra que nuevamente se obtuvieron resultados positivos al hacer uso del compensador. Particularmente en este tipo de referencia, el error introducido, cuando no corresponde el signo de la referencia con el signo de la velocidad, es pequeño.

## CAPITULO 7

### Control no Lineal.

#### 7.1 Introducción.

En el capítulo anterior se simplificó la dinámica del sistema mediante la compensación de los pares  $\tau_v$ ,  $\tau_e$ ,  $\tau_g$  y  $f_{nv}$ , quedando:

$$R=(d+J)\ddot{q}(t) \quad (7.1)$$

En el presente capítulo se propone un controlador que incluye la compensación de estos pares y además un control que actúa sobre el sistema (7.1). Al incluir el controlador al compensador presentado en el capítulo anterior que era no lineal, se le trata en este capítulo como "control no lineal". La sección 7.2 trata de un análisis del controlador. En la sección 7.3 se describe la sintonización del compensador. Finalmente en la sección 7.4 se presentan los resultados experimentales obtenidos.

#### 7.2 Análisis.

El modelo del sistema, tomado de la expresión (2.9) es:

$$(d+J)\ddot{q}(t) + \tau_g + \tau_e + \tau_v + f_{nv} = K_{avc}(t) \quad (7.2)$$

$$\tau_g = Mrcg \operatorname{sen} q(t) \quad (7.3)$$

$$\tau_e = g_1 + g_2 q(t) \quad (7.4)$$

$$\tau_v = Kc q(t) \quad (7.5)$$

$$f_{nv} = \begin{cases} K_{avc}(t) - \tau_g - \tau_e, & \dot{q}(t) = 0, |K_{avc}(t) - \tau_g - \tau_e| \leq C \\ C \operatorname{sgn}(\ddot{q}(t)), & \dot{q}(t) = 0, |K_{avc}(t) - \tau_g - \tau_e| > C \\ C \operatorname{sgn}(\dot{q}(t)), & \dot{q}(t) \neq 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

Se propone el compensador de las expresiones (6.9), (6.10) y (6.11):

$$K_{avc} = R + \tau_g + \tau_e + \tau_v + C \operatorname{sgn}(S) \quad (7.7)$$

con:

$$S = \begin{cases} R, & \dot{q}(t) = 0 \\ \dot{q}(t), & \dot{q}(t) \neq 0 \end{cases} \quad (7.8)$$

y donde R se dá por:

$$R = \frac{(d+J)(K_2 \ddot{\zeta} + K_1 \dot{\zeta})}{K_{\theta}} \quad (7.9)$$

en la que  $\zeta$  es el error de fuerza y  $\dot{\zeta}$  su derivada:

$$\zeta = F_d - F \quad (7.10)$$

$$\dot{\zeta} = \dot{F}_d - \dot{F} \quad (7.11)$$

aquí,  $F_d$  es la fuerza deseada,  $F$  es la fuerza medida, y  $K_1$  y  $K_2$  constantes que se especifican en el diseño.

Substituyendo (7.7) y en (7.9) en (7.2) resulta:

$$\ddot{q}(t) = \frac{K_1 \dot{\zeta} + K_2 \zeta}{K_{\theta}} \quad (7.12)$$

Se tiene para los primeros  $\pi/6$  radianes que:

$$F = \dot{F} = 0 \quad (7.13)$$

utilizando este hecho, y mediante las expresiones (7.10) y (7.11) se llega a:

$$\ddot{q}(t) = \frac{K_1}{K_{\theta}} \dot{F}_d + \frac{K_2}{K_{\theta}} F_d \quad (7.14)$$

La solución de la ecuación diferencial (7.14) se obtiene integrando dos veces esta expresión:

$$q(t) = \frac{K_1}{K_{\theta}} \int \int F_d \cdot dt^2 + \frac{K_2}{K_{\theta}} \int F_d \cdot dt \quad (7.15)$$

Al igual que lo hemos hecho en otros capítulos, daremos la solución para el caso que la referencia  $F_d$  es una función escalón unitario con condiciones iniciales nulas:

$$q(\tau) = \frac{K_1}{2K\theta} Fd\tau^2 \quad (7.16)$$

En el intervalo de operación comprendido entre  $\pi/6$  y  $\pi/2$  radianes la fuerza  $F$  está dada por:

$$F = g_2 q(\tau) + g_1 = K\theta (q(\tau) - q_0) \quad (7.17)$$

Substituyendo este valor en las expresiones (7.10) y (7.11), se llega a:

$$\ddot{F} + K_2 \dot{F} + K_1 F = K_2 \dot{F}_d + K_1 F_d \quad (7.18)$$

$K_1$  y  $K_2$  son, por diseño, constantes que hacen que la respuesta natural de la expresión (7.18) sea estable.

En el caso de la entrada escalón que hemos venido utilizando en los análisis anteriores, se tiene que la solución de (7.18) es, dependiendo de  $K_1$  y  $K_2$  alguna de las siguientes:

$$F = F_d + C_1 e^{-\sigma_1 t} + C_2 e^{-\sigma_2 t} \quad (7.19a)$$

$$F = F_d + C_1 t e^{-\sigma t} + C_2 e^{-\sigma t} \quad (7.19b)$$

$$F = F_d + e^{-\sigma t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) \quad (7.19c)$$

donde  $\sigma \pm j\omega$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  son, según el caso, las raíces de la ecuación característica de la expresión (7.18).

Los términos segundo y tercero del lado derecho de las expresiones (7.19) convergen a cero con la selección conveniente de  $K_1$  y  $K_2$ , por lo que se tiene lo siguiente:

$$F \rightarrow F_d \text{ cuando } t \rightarrow \infty \quad (7.20)$$

y por la definición del error de fuerza  $\zeta$  se tiene que:

$$\zeta \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \quad (7.21)$$

que es lo que se busca.

En la figura 7.1 se presenta un diagrama de bloques del controlador, en donde se distingue la parte que linealiza la dinámica por medio de compensación y el control sobre el sistema resultante.

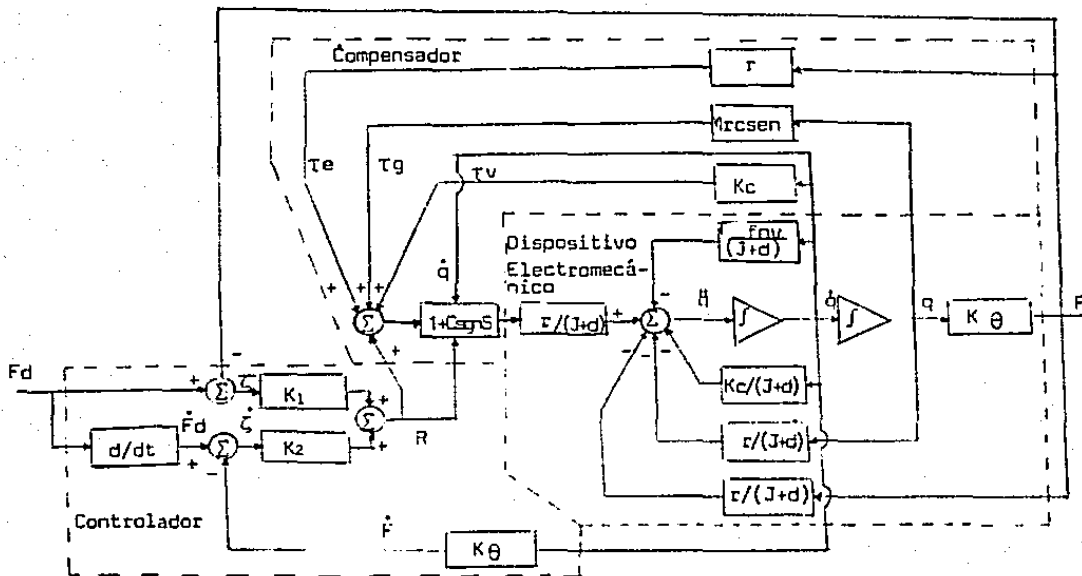


Figura 7.1  
Diagrama de bloques del controlador  
con compensación no lineal.

En el siguiente capítulo se propondrá un controlador no lineal más complejo que utiliza, al igual que el que aquí se presenta, el compensador no lineal propuesto en (6.15).

### 7.3 Sintonización.

Antes de presentar los resultados experimentales del controlador, se describe el proceso de sintonización de éste.

i Par de fricción no viscosa.

El primer módulo que se sintoniza es el de la fricción no viscosa. Como se señala en la sección 6.5 no se realiza un compensador completo de la fricción no viscosa (7.8), sino solamente con el del signo de la referencia.

Para la sintonización inicialmente se le desmonta el brazo al motor y se le suministra una señal que se puede variar manualmente de 100mV a -100mV (figura 7.2)



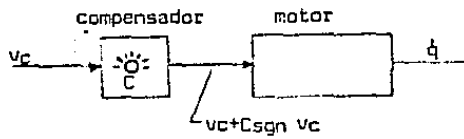


Figura 7.2  
Disposición del sistema para la  
compensación de fnv

El compensador se comporta según la expresión (7.23), donde  $V_s$  es la salida,  $v_c$  es la referencia y  $C$  es el valor del escalón de compensación, cuya magnitud se puede variar alrededor del valor calculado en el modelado, que era de 65mV (ver figura 2.5).

$$V_s = C \operatorname{sgn}(v_c) + v_c \quad (7.22)$$

Inicialmente el valor de  $C$  se sitúa en cero. Variando la referencia se encuentra que existe una zona en donde la fricción no viscosa impide el movimiento. Al aumentar  $C$ , esta zona se hace cada vez más pequeña hasta que desaparece, como se aprecia en la figura 7.3. El compensador se sintoniza de manera que la zona en la que la velocidad es nula, sea lo más pequeña posible, cuidando de que siempre exista dicha zona.

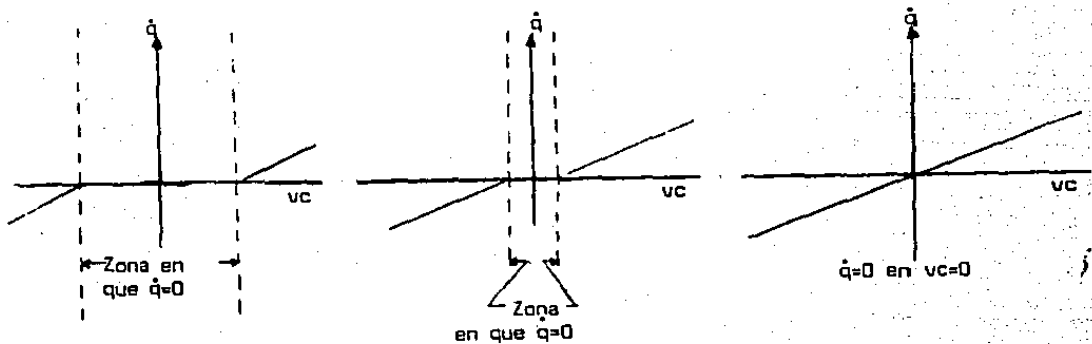


Figura 7.3  
Puntos de sintonización del parámetro  $C$

ii Par proporcional a la velocidad angular.

Al sistema, con el compensador de fricción no viscosa (y aún sin el brazo acoplado), se le realimenta positivamente con la señal del tacogenerador. Se introduce la señal de velocidad al compensador de fricción no viscosa en lugar de la referencia, como se muestra en la figura 7.4.

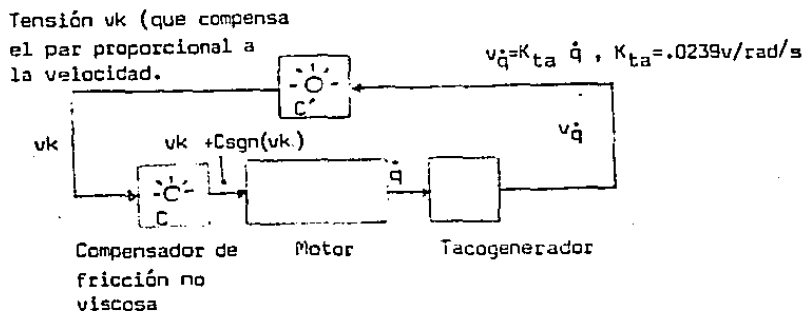


Figura 7.4  
Disposición del sistema para la sintonización del par de velocidad

En los experimentos de modelado se calculó que este par equivale a una tensión de 0.4mV. en la entrada  $v_c$ , lo que da una referencia para la reducción que se debe de emplear al realimentar la señal del tacogenerador. La sintonización se inicia situando el ajuste  $C^*$  en cero (de manera que la realimentación sea cero). Manualmente se le da un giro al motor, que debe detenerse unos momentos después, por efecto del par proporcional de la velocidad. Se aumenta el ajuste  $C^*$  (al aumentar  $C^*$  se compensa este par) de modo que el motor tarde cada vez más en detenerse. Si se aumenta demasiado  $C^*$ , la respuesta de velocidad se hará inestable creciendo hasta valores que quedan determinados por los límites físicos del dispositivo. Luego se debe aumentar  $C^*$  hasta que, con un impulso manual al eje del motor la velocidad se mantenga constante o, lo que es más factible, tarde mucho en detenerse.

iii Compensación del par de gravedad.

En este caso se coloca el brazo que interactúa con el medio, se acopla un sensor de posición y un módulo que obtiene el seno a partir de la señal de posición, y se realimenta positivamente multiplicándolo por un factor  $C^{**}$ . Se conecta el compensador de fricción no viscosa de manera que ejerza un par hacia el mismo sentido que la gravedad, para que el efecto de esta fricción sea mínimo al momento de compensar el par gravitatorio. La disposición del equipo se muestra en la figura 7.5.

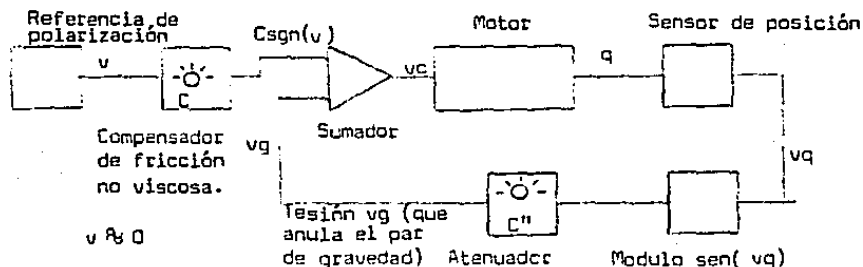


Figura 7.5  
 Disposición del equipo para la compensación del par de gravedad.

El valor equivalente, obtenido de los experimentos de modelado, de este par en unidades de tensión es de 24mV, lo que se usa para dimensionar convenientemente en un rango alrededor de este valor, la señal de realimentación. Inicialmente la ganancia  $C^{**}$  se coloca en posición tal, que la realimentación sea nula. En estas condiciones, si se coloca manualmente el brazo en una posición mayor de cero rads., el par de gravedad lo hará caer hacia el punto de equilibrio (situado en cero radianes). Se aumenta la ganancia  $C^{**}$  de manera que, en el intervalo de trabajo (de 0 a  $\pi/2$  radianes), el brazo se mantenga en su posición. En este caso nuevamente hay peligro de una sobre compensación, por lo que hay que cuidar este punto.

#### iv Compensación del par externo.

Se conecta el equipo del mismo modo que para sintonizar el par de gravedad. El par de interacción con el medio es cero hasta los  $\pi/6$  radianes y lineal a partir de entonces. Dado que el sensor de fuerza está en el extremo del brazo y no sensa interacción hasta  $q = \pi/6$  radianes, la zona muerta queda implícita en la señal de éste. La realimentación del par de fuerza es positiva. Nuevamente se dispone de una ganancia  $C^{***}$ , que inicialmente se sitúa en cero. En esta sintonización, el compensador de gravedad funciona junto al del par externo como se muestra en la figura 7.6.

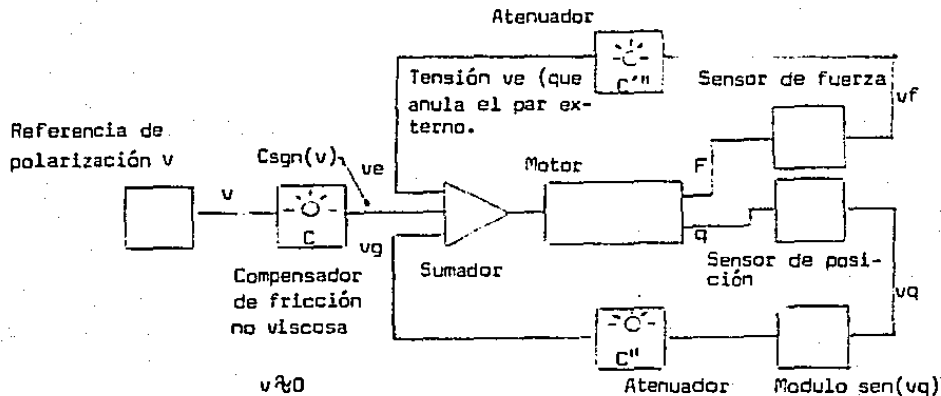


Figura 7.6  
Disposición del sistema en la  
sintonización del par externo.

Para el dimensionamiento de la señal de realimentación se considera el valor equivalente en tensión del par externo, que se obtuvo en la sección de modelado y que es de 21mV.

La sintonización consiste en colocar manualmente el brazo en una posición en la que haya interacción con el medio. Inicialmente el par externo hará que el brazo regrese en el momento de soltarlo al punto de equilibrio. Al aumentar la ganancia  $C^{***}$ , llegará un punto en que el brazo se mantendrá en la posición en que lo colocamos manualmente, siempre que se encuentre en el intervalo de  $\pi/6$  a  $\pi/2$  radianes.

El sistema realimentado con los puntos de ajuste se muestra en la figura 7.7

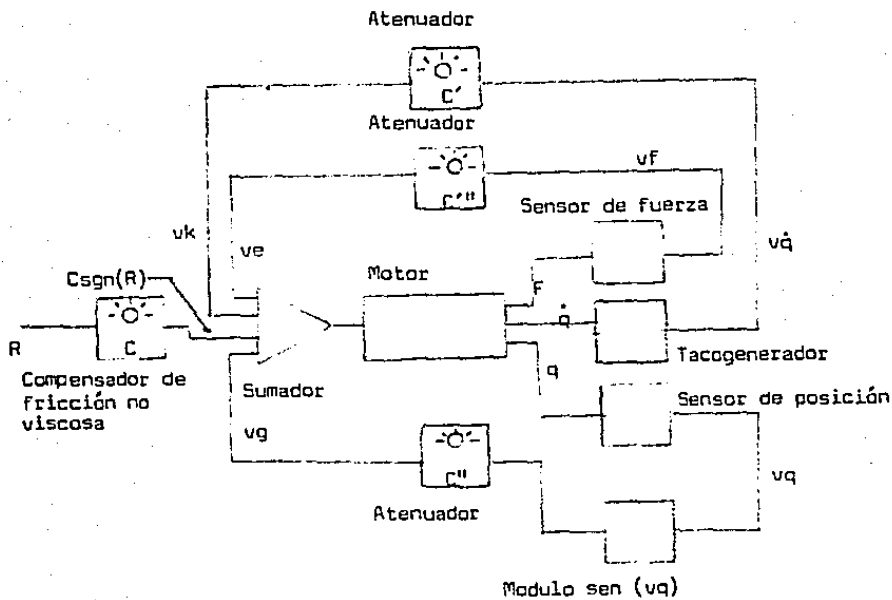


Figura 7.7  
Sistema y puntos de ajuste.

La sintonización del sistema pudo haberse hecho de distintas formas, sin embargo se escogieron los procedimientos anteriores debido a las características del equipo con el que se contaba.

#### 7.4 Resultados experimentales.

Se repiten los experimentos que se realizaron con los controladores anteriores.

##### Sintonización.

Se aplica la misma referencia sinusoidal de los experimentos anteriores, y se sintonizan los parámetros  $K_1$  y  $K_2$  con ayuda de un osciloscopio que monitorea la señal de error. Los resultados se muestran en la figura 7.8, para  $K_1$  y  $K_2$  de .2 y .1 respectivamente.

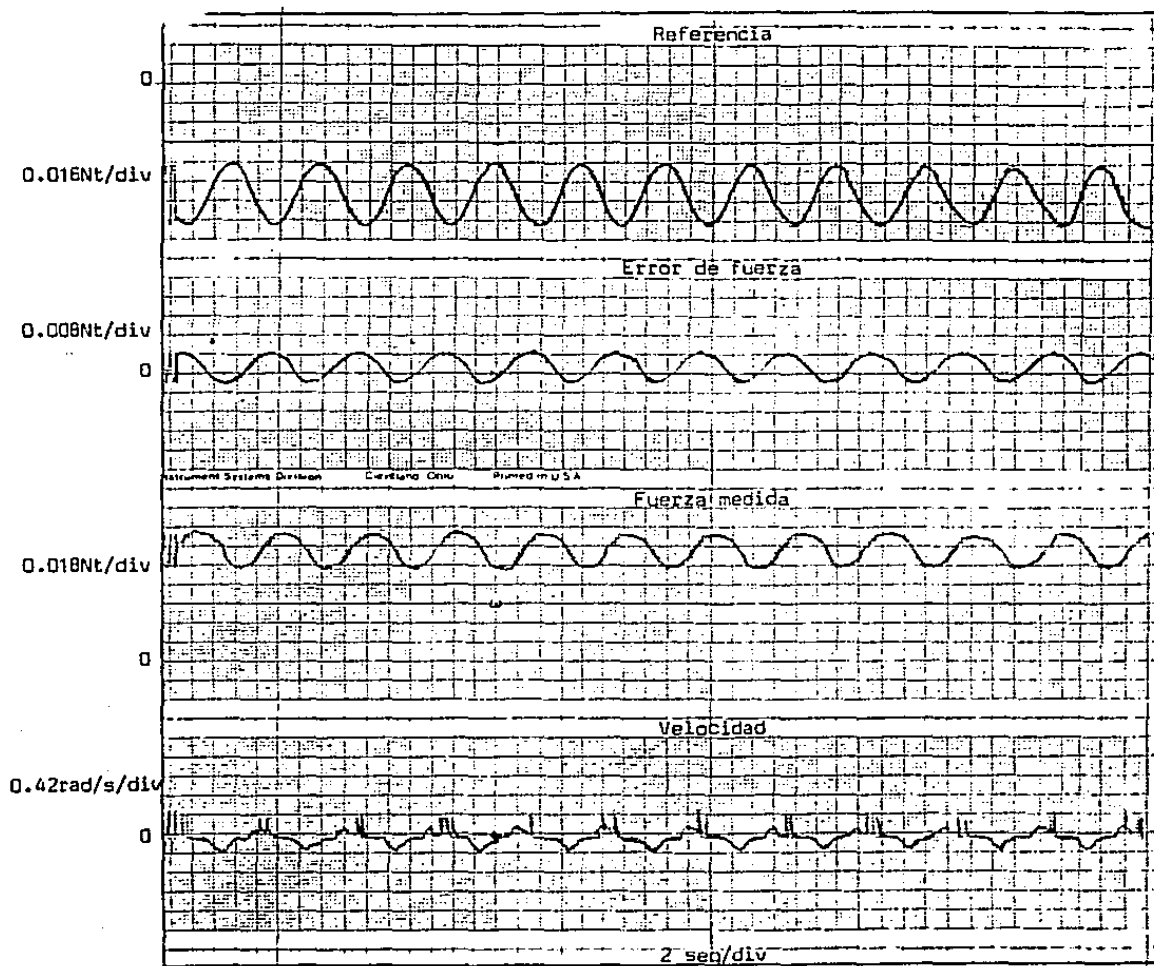


Figura 7.8  
 Respuesta experimental del dispositivo  
 con la sintonización I.

El sistema con la sintonización anterior no presenta oscilaciones violentas en presencia de la perturbación (como en el caso del sistema con realimentación de velocidad), por lo que no se necesita modificarla. En la figura 7.9 se muestra el comportamiento en presencia de la perturbación antes descrita.

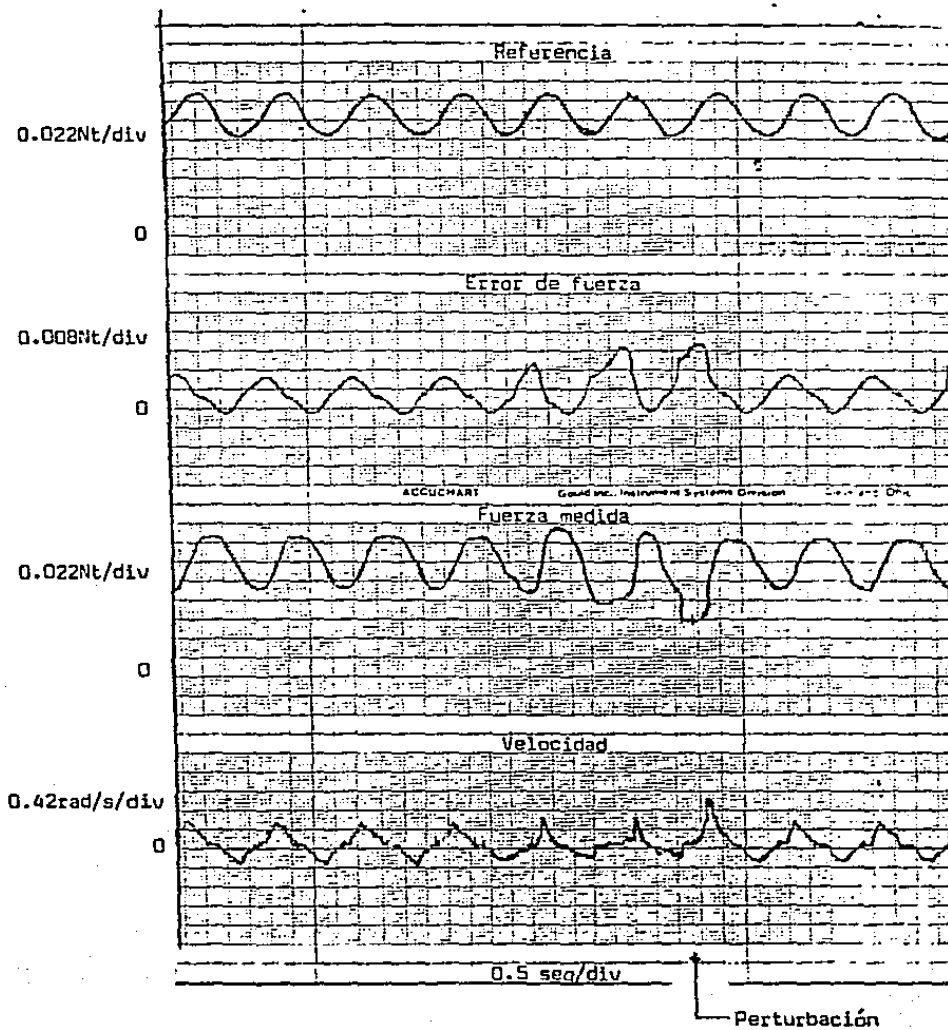


Figura 7.9  
 Respuesta experimental del dispositivo  
 en presencia de perturbaciones.

Posteriormente se le aplican al sistema (como en el caso de los controladores anteriores) diferentes referencias para comprobar el seguimiento con esta sintonización. Los resultados se presentan en la figura 7.10.

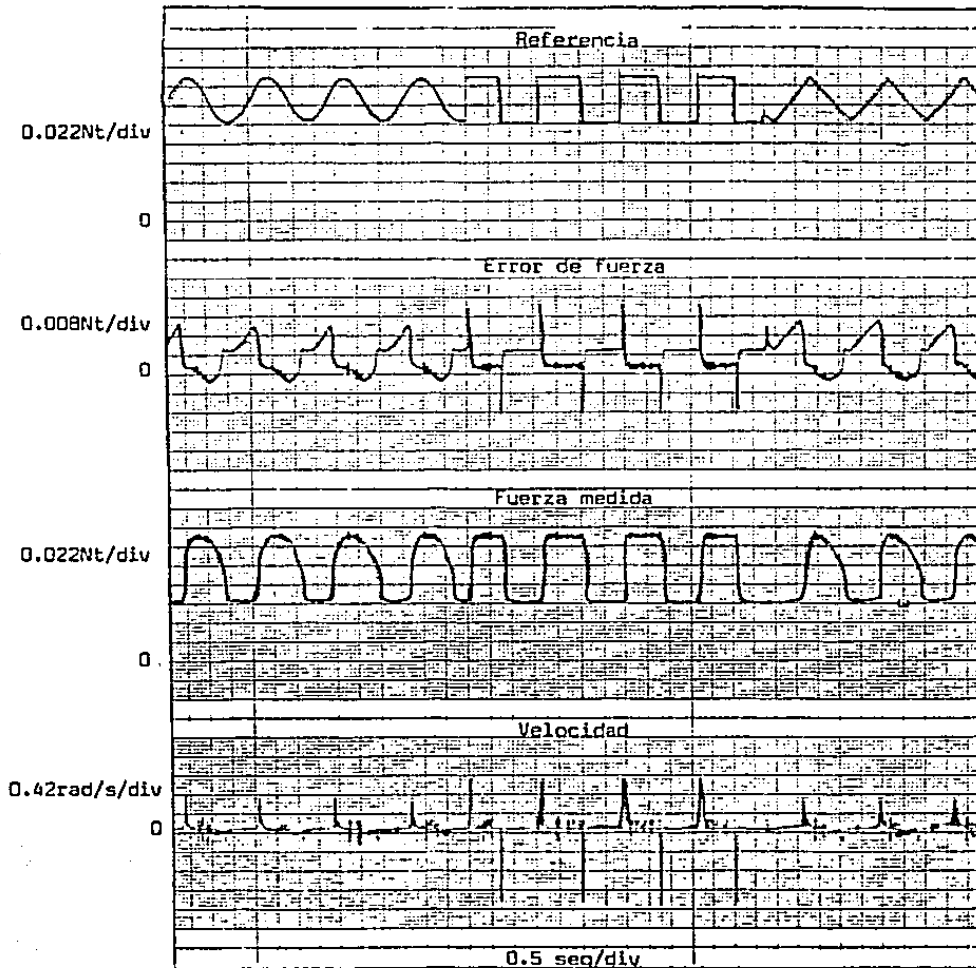


Figura 7.10  
 Respuesta experimental del dispositivo  
 con sintonización II.

En el capítulo siguiente se comentan los resultados generales de las estrategias.



## CAPITULO 8

### Conclusiones.

#### 8.1 Introducción.

En este capítulo se resumen los resultados de los diferentes controladores propuestos. En la sección 8.2 se comentan las ventajas y desventajas de los controladores usados. En la sección 8.3 se tratan algunos puntos importantes relativos a la experimentación. Finalmente, se presentan las líneas futuras de trabajo en la sección 8.4.

#### 8.2 Ventajas y puntos en contra de los controladores presentados.

En la expresión (8.1) se presenta el modelo del sistema, en lazo abierto, con los valores numéricos correspondientes.

$$\begin{aligned} .668vc = &.000160\ddot{q}(t) + .000260\dot{q}(t) + .0434\text{sgn}(\dot{q}(t)) \\ &+ .0159\text{sen}(q(t)) + g_1 + g_2q(t) \end{aligned} \quad (8.1)$$

donde:

$$g_1 = \begin{cases} 0, & q(t) \leq .5236\text{rad} \\ -.00723, & q(t) > .5236\text{rad} \end{cases} \quad (8.2)$$

$$g_2 = \begin{cases} 0, & q(t) \leq .5236\text{rad} \\ .0138, & q(t) > .5236\text{rad} \end{cases} \quad (8.3)$$

Como se ha mencionado anteriormente se distinguen los siguientes pares en el motor: el que es debido al momento de inercia, el proporcional a la velocidad  $\tau_v$ , el de fricción no viscosa  $f_{nv}$ , el de interacción con el medio externo  $\tau_e$  y el de gravedad  $\tau_g$ .

El par de fricción no viscosa aporta una magnitud máxima de par de .0424Nt-m. Este par es equivalente al que es causado por el momento de inercia para:

$$\ddot{q} = 271 \text{ rad/s}^2 \quad (8.4)$$

Asimismo, el par proporcional a la velocidad angular tiene este valor para:

$$\dot{q} = 166 \text{ rad/s} \quad (8.5)$$

En lo que respecta al par de gravedad y el par externo, se tiene que, en conjunto sólo llegan a esta magnitud fuera del intervalo de operación; es decir para más de  $\pi/2$  radianes.

La tensión de control más pequeña con la que se logra .434Nt-m es de 65m V. Dadas las consignas de fuerza, la zona de operación y los valores monitoreados de velocidad: se puede afirmar que el par más significativo en los experimentos fue el de la fricción no viscosa. Este par no lineal incide directamente en el error de estado permanente. Debido a esto es necesaria la inclusión en el controlador de una parte proporcional a la integral de el error. Esto explica el deficiente comportamiento del sistema con control proporcional (para nuestras condiciones de operación). Debido a la "pérdida de estabilidad" que trae consigo la introducción del control P.I. ( que se puede apreciar en el sistema aproximado, por el desplazamiento a la izquierda de los polos del sistema), no se recomienda usar este control solamente. Un mayor margen de operación estable se logra con un controlador P.I.D. o bien, mediante la realimentación negativa de la señal de velocidad. En nuestro caso ambas soluciones resultaban realizables con facilidad, aunque en general, el P.I.D es el que se puede realizar más fácilmente. La ventaja del uso del control P.I. con realimentación de velocidad radica, como ya se comentó, en que la realimentación era de la variable relacionada directamente con el amortiguamiento, y por otro lado, la sintonización del control P.I. se realiza de una forma totalmente independiente de la sintonización de la realimentación de velocidad. Esta estrategia de control obtuvo los mejores resultados entre las que se compararon.

Para valorar los resultados del control no lineal, hay que considerar nuevamente el problema de la fricción no viscosa.

Probablemente no sea el caso más común el que se presenta en este trabajo; es decir, el caso en el que la no linealidad más importante sea la de la fricción no viscosa. En nuestras condiciones de operación lo era, debido al rango de potencia que podía manejar el motor, al rango de desplazamiento en el que se realizaron los experimentos, a las consignas de fuerza impuestas y al hecho de que se usara el eje principal para acoplar el brazo, ya que directamente sobre este eje, actúa el par de fricción del comutador del motor, los efectos de fricción del tacogenerador y del sensor de posición. Volviendo al control no lineal, hay que tener en cuenta que el objetivo de éste es linealizar el sistema mediante la realimentación de pares que cancelan las no linealidades de dicho sistema. Luego, a medida que las no linealidades estén modeladas con precisión, el control tendrá un buen desempeño. No se cree que el principal problema con respecto a este punto, sea la realización incompleta del compensador de fricción no viscosa ( no se realizó el conmutador entre el signo de la referencia R y el signo de la velocidad, según lo discutido en la sección 6.5.), sino más bien, la simplificación que se hizo de la curva que describía este fenómeno. Por motivos de simplicidad en el modelo no se

consideró que esta fricción disminuía una vez iniciado el movimiento, sino que se supuso una curva continua (ver figura 8.1a).

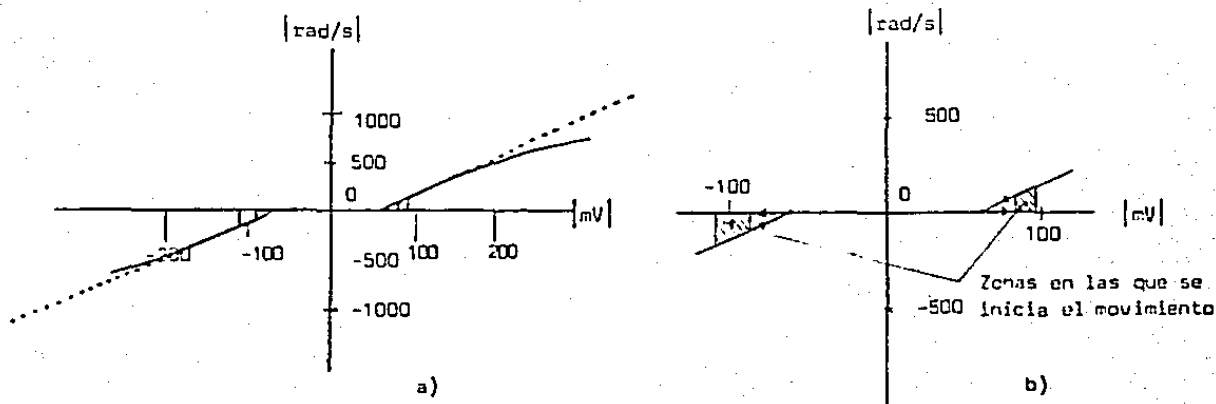


Figura 8.1  
Curvas de fricción no viscosa.

Un modelo más preciso de la característica que se presenta en la curva de la figura 8.1b, resulta muy complicado para manejarlo como lo hemos venido haciendo con el modelo propuesto inicialmente. En particular el hecho de que existan zonas, y no puntos específicos en donde se encuentra que la fricción disminuye repentinamente, complica el modelo. Lo anterior explica el resultado relativamente pobre del control no lineal. Dado que este control es más difícil de realizar que los controles discutidos en los capítulos 3, 4, y 5, se necesitarían mejores resultados para justificar su empleo.

La linealización por este método, resulta de interés si se piensa usar un control más elaborado, como puede ser el control adaptable. Con el presente dispositivo se encontraron, durante los experimentos de sintonización (que se describen en la sección 7.3), buenos resultados cualitativos en la compensación de gravedad, de velocidad y de par externo.

### 8.3 Principales dificultades en la experimentación.

El hecho de escoger el eje principal del motor para colocar el brazo, se debió a que era de interés que se presentaran no linealidades importantes en los experimentos, para poder evaluar así, entre otras cosas la linealización por realimentación. Sin embargo esta elección presentó dos dificultades importantes.

a). El par no lineal más significativo es muy difícil de modelar (punto que se discutió en la sección anterior).

b). El rango de fuerza del dispositivo resultó muy pequeño (de 0 a 0.4Nt-m).

Esto viene siendo un agumento a favor de los trenes de reducción, que por su parte tienen la desventaja de hacer la respuesta del sistema más lenta. En nuestro caso particular, el tren de reducción introduce un factor de 900 en lo que respecta al par, quedando las no linealidades reducidas en esa proporción. Esta reducción se efectúa mediante un conjunto engrane-tornillo sinfín, como se muestra en la figura 8.2.

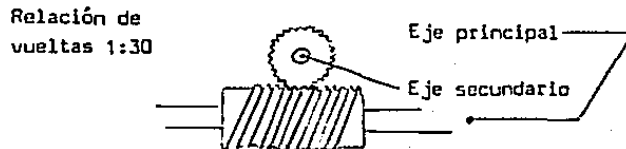


Figura 8.2  
Conjunto tornillo sinfín-engrane.

Este sistema de reducción introduce otra no linealidad: el par se transmite a través del tornillo sinfín sólo cuando el par del motor  $\tau_m$  en magnitud es mayor que el del medio  $\tau_e$ :

$$|\tau_m| \geq |\tau_e| \quad (8.6)$$

es decir, cuando el par es tal, que el tornillo sinfín mueve al engrane; en el otro caso, el engrane no puede mover al tornillo.

#### 8.4 Desarrollos futuros.

El compensador no lineal que se presenta en el capítulo 6 puede ser una versión inicial de controladores más sofisticados. La ley de control (8.7)

$$K_{avc} = (\tau_e + \tau_g + \tau_v + C \operatorname{sgn}(S)) \quad (8.7a)$$

$$S = \begin{cases} R, & \dot{q}(t) = 0 \\ \dot{q}(t), & \dot{q}(t) \neq 0 \end{cases} \quad (8.7b)$$

linealiza el sistema, simplifica su dinámica y da oportunidad de construir otros controles alrededor de ésta, como el que se presentó en el capítulo 7

$$R = \frac{(d+J)(K_1\zeta(t) + K_2\dot{\zeta}(t))}{k\theta} \quad (8.8)$$

Una estrategia de control más completa estaría dada por [8]:

$$R = \frac{(d+J)(K_1\zeta(t) + K_2\dot{\zeta}(t) + \ddot{F}d)}{k\theta} \quad (8.9)$$

Siguiendo el procedimiento del capítulo anterior: al substituir (8.9) en la ley de control y describir la fuerza como función del desplazamiento angular, se obtiene la expresión (8.10) para un intervalo de  $\pi/6$  a  $\pi/2$  radianes.

$$\ddot{\zeta}(t) + K_2\dot{\zeta}(t) + K_1\zeta(t) = 0 \quad (8.10)$$

donde, como se recordará  $\zeta(t)$  es el error en fuerza. La expresión (8.10) indica que independientemente de la señal  $Fd$ , el error en fuerza converge a cero (considerando constantes  $K_1$  y  $K_2$  adecuadas).

Un control adaptable, también se podría basar en la linealización por realimentación: de hecho, se puede proponer uno basado en (8.7) y (8.9). Este control, podría ser conveniente en caso de que cambiaran por alguna razón los parámetros de los pares que se usan en el compensador, ya que ajustaría el valor de dichos parámetros. La desventaja de la realización de ese control, tal

y como lo hemos venido haciendo en este trabajo (realización analógica), radica en que por cada parámetro que se desee adaptar, se requieren dos multiplicadores analógicos, entre otras cosas. La realización de un control así implicaría la construcción de muchos módulos, por lo que sería preferible la realización de estos controles via digital, usando una computadora para este fin: tarea que se destina a trabajos futuros.

## REFERENCIAS

- 1 Spong M., Vidyasagar M., "Robot Dynamics and Control". Willey, 1988.
- 2 Feedback Instruments Limited. "Modular Servo System MS150; Book 3; DC, Syncho, and AC; Advanced Experiments". 1982.
- 3 D'Azzo J., Houpis C. "Linear Control Systems". Mc Graw Hill, 1975.
- 4 Ogata K. "Ingenieria de Control Moderna". Prentice Hall, 1980.
- 5 Craig J. "Introduction to Robotics". Addison Wesley, 1986.
- 6 Vidyasagar M. "Nolinear System Analysis". Prentice Hall, 1978.
- 7 Desoer C., Kuh E. "Basic Circuit Theory". Mc Graw Hill, 1969.
- 8 Carelli R., Kelly R., Ortega R. "Adaptive Force of Single Link Mechanical Devices". Reporte Técnico DEPI-UNAM No 09/88/02, 1988.
- 9 Doebelin E. "Measurement Systems". Mc Graw Hill, 1975.
- 10 Deboo G., Burrous C. "Integrated Circuits and Semiconductor Devices". Mc Graw Hill, 1977.
- 11 Clayton. "Linear Integrated Circuit Applications". Mc Millan, 1977.
- 12 National Semiconductors. "Linear Data Book". 1980.
- 13 Armstrong B. "Friction, Experimental, Determination, Modeling and Automation Proceedings 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation.
- 14 Espinoza G., Améstegui M. "Obtención Experimental de un Modelo de Fricción para un motor D.C.". Documento Interno CIEA-IPN, 1987.

## APENDICE

### Módulos Adicionales y Sensores.

#### a.1 Sensores de fuerza.

El sensor de fuerza más adecuado para este tipo de aplicaciones es aquel que obtiene esta variable mediante la medición de la deformación de un elemento elástico.

Para medir tal deformación existen varios métodos [9]. En este trabajo se estudiaron 2 de ellos. El primero consiste en la medición por medio de un sensor óptico; el segundo es por medio de galgas extensiométricas. El montaje del elemento elástico y el sensor óptico se muestra en la figura a.1.

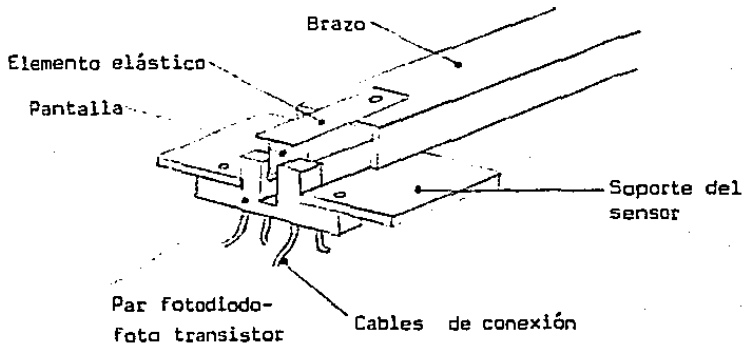


Figura a.1.  
Montaje del sensor óptico.

A este sensor está asociado un circuito de polarización para el dispositivo óptico basado en un diodo zener y un circuito de amplificación que usa un amplificador operacional. Tales circuitos se muestran en la figura a.2.

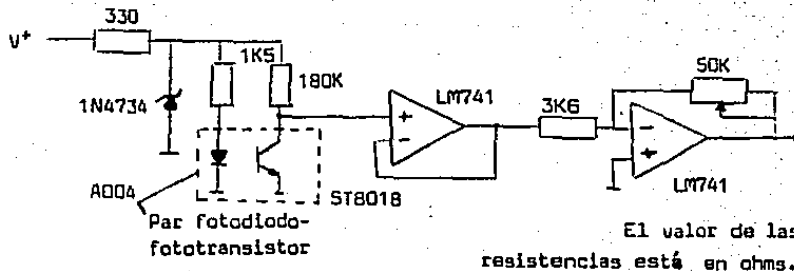


Figura a.2  
Circuito asociado al sensor óptico de deformación.



La característica fuerza-tensión de este sensor se ilustra en la figura a.3.

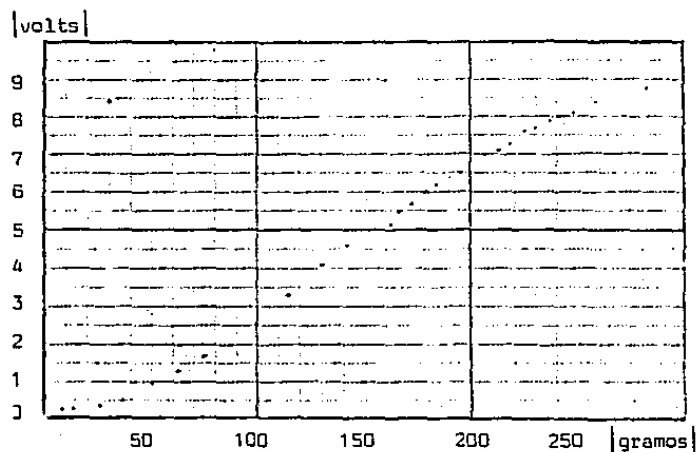


Figura a.3  
Resultados del sensor de fuerza.

El montaje del sensor de fuerza en base de galgas extensiométricas se ilustra en la figura a.4.

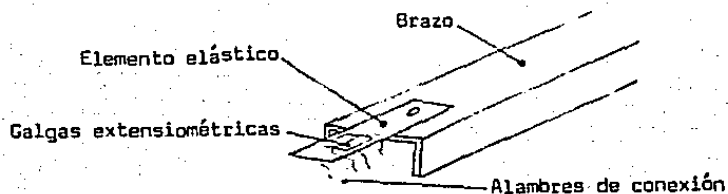


Figura a.4.  
Montaje del sensor de fuerza  
basado en galgas extensiométricas.

El circuito asociado a este medidor, consta de una referencia de tensión, realizada nuevamente por medio de un diodo zener, y un sistema de amplificación basado en un amplificador de instrumentación [10]. Este circuito se muestra en la figura a.5.

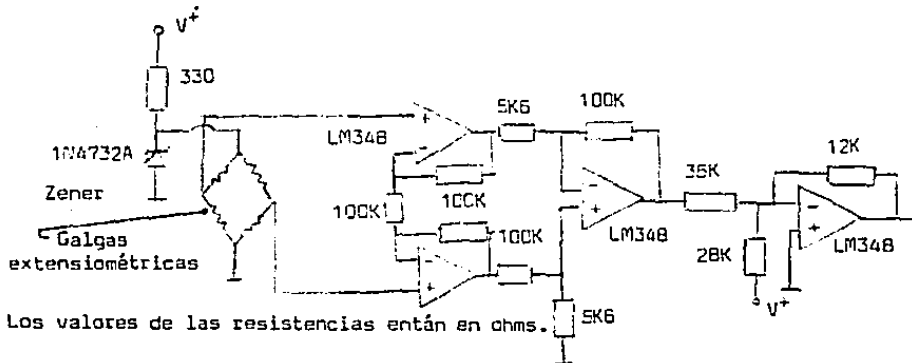


Figura a.5  
Circuito asociado al sensor de fuerza.

La característica fuerza-tensión se describe en la figura a.6.

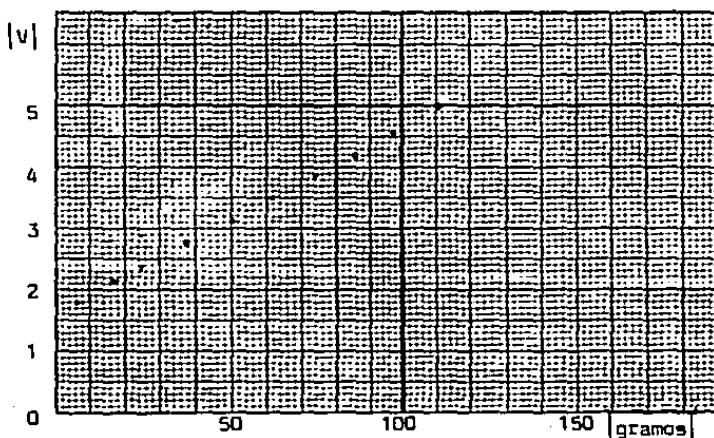


Figura a.6  
Característica fuerza-tensión del sensor basado en galgas extensiométricas.

El sensor utilizado fue este último, por que su montaje era más robusto mecánicamente, y por su respuesta más lineal. La constante de fuerza que se obtuvo de la gráfica es de 3.2V/Nt.

## a.2 Modulo de compensación de gravedad.

El compensador del par de gravedad debe generar la función seno del desplazamiento angular. Este módulo aproxima la función seno de forma similar a la que se presenta en el capítulo 3. Se introduce en un amplificador operacional la señal de la posición, y se cambia la ganancia de este dispositivo mediante una red de resistencias y diodos [1]. En la figura a.7 se muestran los puntos donde se cambian las ganancias y en la figura a.8 se muestra el circuito.

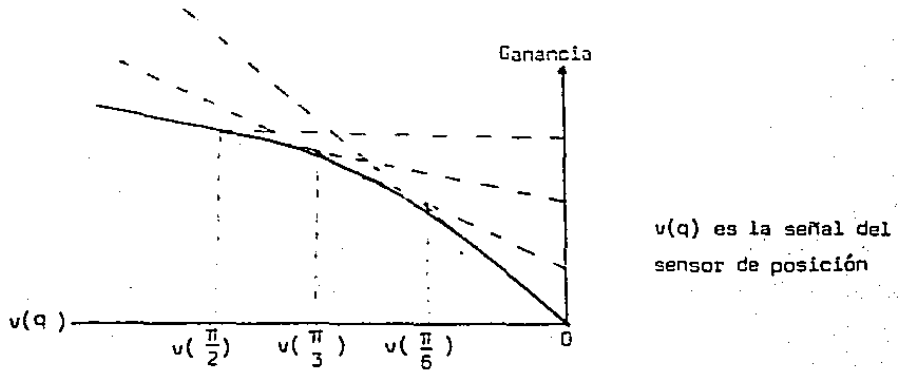


Figura a.7  
Puntos en los que se cambia la ganancia.

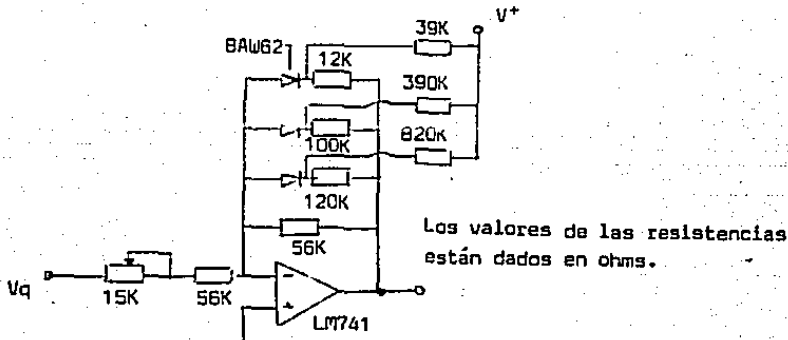


Figura a.8  
Circuito compensador de gravedad.



En la figura a.11 se muestra la respuesta del dispositivo en presencia de una señal sinusoidal. En el mismo experimento del que resultaron estas gráficas, se obtuvieron las que se presentan en la figura 6.7.

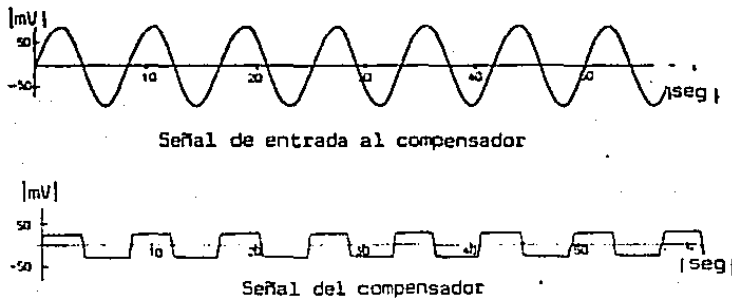


Figura a.11  
Respuesta del módulo de compensación  
de la fricción no viscosa en presencia  
de una señal sinusoidal.

#### a.4 Sensor de posición y tacogenerador.

El sensor de posición del equipo consiste en un potenciómetro que se alimenta con  $\pm 15V$ . Su respuesta es lineal y queda caracterizado por una constante de  $0.209 \text{ rad/V}$ .

En lo que respecta al tacogenerador, se presenta la curva velocidad angular-tensión en la figura a.12. Esta curva acusa una respuesta lineal, con una constante de  $41.88 \text{ rad/s/V}$ .

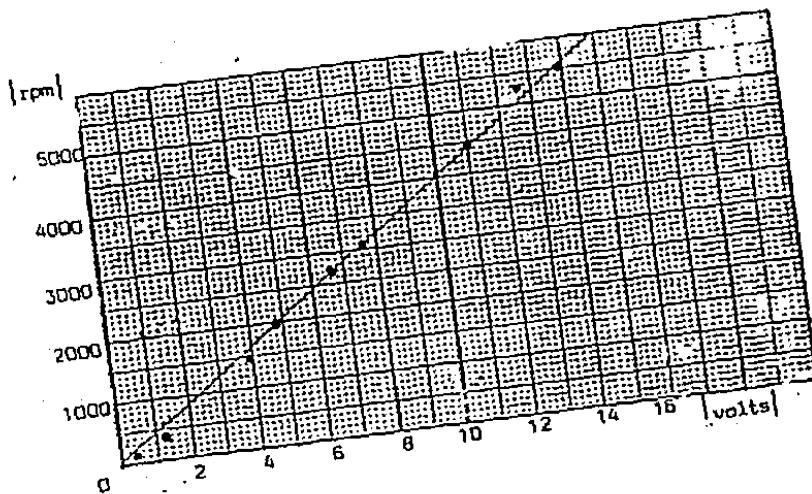


Figura a.12  
Respuesta del tacogenerador.