00362
2ej. 2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIA ESPECTRAL DE LAS ECUACIONES DE ELASTICIDAD

T E S I S

Para obtener el Grado de
MAESTRO EN CIENCIAS
(FISICA)
p r e s e n t a

JOSE ALEJANDRO DOMINGUEZ TORRES

México, D.F. 1989

I N D I C E

INTRODUCCION

Entre los muchos fenómenos de la naturaleza que la física trata de explicar, están aquellos que se refieren a la propagación de ondas: ya sean éstas electromagnéticas, acústicas, etc. Estos estudios han requerido sín duda del uso de diferentes técnicas y teorías matemáticas las cuales permiten dar una descripción de tales fenómenos; por ejemplo, en muchos casos estos fenómenos están gobernados por ecuaciones diferenciales parciales, un caso prticular es la *teoría de propagación de ondas en medios elásticos.*

En este trabajo de tesis se hace un estudio de la *teoría espectral de las ecuaciones de elásticidad* en el caso de medios anisotrópicos; i.e., en medios en los cuales la velocidad de propagación de la onda depende de la dirección elegida. En este estudio se hace uso del análisis funcional como principal herramienta matemática ([RE1]), y mas específicamente de la teoría de operadores lineales no acotados sobre espacios de Hilbert ([RE1], [WEI]) y de la teoría de transformadas integrales ([RE2], [BOC]) con principal enfásis en la teoría espectral ([KAT], [RE1]).

La tesis está compuesta por seis capítulos y un apéndice los cuales están desglozados como sigue:

CAPITULO I. En este capítulo se obtienen las bien conocidas ecuaciones de elásticidad ([FED]) bajo la suposición de que el medio (elástico e infinito) es homógeneo. Además se supone que la densidad de energía elástica (energía por unidad de volumen) es positiva definida.

CAPITULO II. Si para las ecuaciones de elásticidad se supone una solución en forma de onda plena, se obtiene de forma inmediata la ecuación de Christoffel ([FED]), la cual es el medio principal para introducirnos a la teoría de propagación de ondas en medios elásticos. Esta última ecuación, junto con sus consecuencias matemáticas (tal como la de ser autoadjunto en el espacio de las matrices de 3×3) como físicas (tales como las características físicas principales de las velocidades de propagación de las ondas ([MUS]), son la parte fundamental de estudio de este capítulo.

CAPITULO III. Este capítulo está dedicado a formular el problema de propagación de ondas en medios elásticos sobre un espacio de Hilbert adecuado. Para ésto se hace necesario definir el *operador de elásticidad* H_0 ([REK]), el cual describe el comportamiento espacial de las ondas en medios elásticos. Finalmente, por medio de la equivalencia unitaria de H_0 con el operador de Christoffel, dado por la ecuación del mismo nombre, se demuestra que H_0 es un operador autoadjunto en un dominio adecuado contenido en el espacio de Hilbert.

CAPITULO IV. El resultado principal de este capítulo es dar la representación espectral del operador H_0 usando técnicas de Tranformada de Fourier ([RE2], [BOC]), tomando como base principal el Teorema Espectral ([RE1]) para operadores lineales no acotados definidos sobre un espacio de Hilbert. De esta representacion espectral y de la definición de superficies de lentitud ([AUL], [DUF]) se *define* un sistema de coordenadas radiales generalizado, el cual permite definir un operador unitario que transforma el operador H_0 en el operador de multiplicación definido sobre otro espacio de Hilbert diferente. De este último resultado se demuestra que H_0 es absolutamente continuo y que su espectro coincide con los numeros reales positivos incluyendo al cero.

CAPITULO V. En este capítulo se hace un estudio del *Principio de Límite Absorbente* ([AGM], [EID]), el cual nos dice bajo que condiciones el operador resolvente de H_0, $R(z)$, definido como $R(z)=(H_0 - z)^{-1}$, toma en algún sentido valores límite sobre los números reales positivos, obtenidos como límites sobre $R(z)$ cuando z tiende a cero, con z elemento de los números complejos menos la recta real.

CAPITULO VI. En este capítulo se formula el problema de propagación de ondas en medios elásticos anisotrópicos e inhomogéneos como un problema sobre un espacio de Hilbert, el cual coincide en este caso con el utilizado para el caso homogéneo. A diferencia del capítulo III, la construcción del operador (autoadjunto) de elásticidad, análogo al del caso homogéneo se hace a partir de usar técnicas de formas cuadráticas ([RE1]).

APENDICE. Este apéndice está dedicado a mostrar algunas de las versiones del Teorema Espectral para operadores lineales no acotados y autoadjuntos definidos sobre un espacio de Hilbert ([RE1], [KAT]), las cuales juegan un papel fundamental en el capítulo III, donde este teorema se usa como premisa básica.

Los resultados obenidos en esta tesis se inscriben dentro del marco de la teoría estacionaria de dispersión. Como referencias generales de esta teoría se tienen como ejemplo [AGM], [AMR], [KUR], [RE3], [HOR] y [SCH] para el caso de la mecánica cuántica, y [WIL], [WE1], [WE2], [DER] y [SMT] para el caso de propagación de ondas clásicas. En particular hemos utilizado técnicas de [WE1] y [WE2].

En la teoría estacionaria de dispersión, en una primera etapa, se obtiene una representación espectral y se demuestra el principio de límite absorbente para el problema no perturbado (medio homogéneo en nuestro caso).

En una segunda etapa se obtienen dos representaciones espectrales y se demuestra el principio de límite absortente para el operador perturbado (en nuestro caso medio inhomogéneo) mediante métodos de teoría abstracta de perturbación de operadores lineales.

A partir de estos resultados se desarrolla la teoría de dispersión, operadores de onda, y operador de dispersión.

El contacto con las aplicaciones se realiza a partir del operador de dispersión, que permite calcular las cantidades de interés desde el punto de vista de las aplicaciones, como ondas asintóticas, etc.

En esta tesis se completó la primera etapa para el operador de elásticidad en medios anisotrópicos e inhomogéneos, y se inicio la segunda en el capítulo VI.

CAPITULO I
LAS ECUACIONES DE ELASTICIDAD PARA MEDIOS HOMOGENEOS

La teoría de la elásticidad tiene como fin estudiar las deformaciones que surgen de los cuerpos elásticos mediante métodos matemáticos. Las deformaciones y movimientos que surgen bajo la acción de fuerzas exteriores se pueden caracterizar mediante el vector desplazamiento $u=u(x,t)$, el cual es una matriz columna de 3x1 con $x \in R^3$ y $t \in R$. Las componentes de $u(x,t)$ serán en sucesivo denotadas por u_1, u_2, u_3. Estos desplazamientos surgen en un cuerpo elástico bajo la acción de las fuerzas internas (tensiones) las cuales están representadas por la matriz simétrica de tensiones (tensor de tensiones) de 3x3:

$$(1.1) \qquad (\tau_{ij}) = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix};$$

donde τ_{11} , τ_{12} , τ_{13} , son las componentes de la fuerza (tensión) que actúa en la unidad de superficie del elemento de superficie perpendicular al eje x_1 de R^3; análogamente τ_{21} , τ_{22} , τ_{23} y τ_{31} , τ_{32} , τ_{33} son las componentes de las tensiones que actúan sobre la unidad de superficie perpendiculares a los ejes x_2 y x_3 de R^3. Las componentes τ_{ii} se llaman *tensiones normales* y τ_{ij}; con i,j distintos; son llamadas *tensiones de sujeción*.

Si consideramos un elemento de volumen, las ecuaciones de movimiento estarán dadas por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1.2) \qquad \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i; \qquad i=1,2,3.$$

donde ρ es la densidad volumétrica en el punto $(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ y F_1, F_2, F_3 son las componentes de las fuerzas volumétricas exteriores (fuerzas proporcionales a la masa contenida en un elemento de volumen).

En lo sucesivo haremos las siguientes suposiciones:

(i) Las fuerzas volumétricas exteriores (también llamadas fuerzas de cuerpo) son nulas.

(ii) La densidad volumétrica ρ es constante e igual a la unidad.

Por otro lado, supongamos que la deformación del cuerpo sólido en consideración es pequeña, de tal forma que esta la podemos expresar como

$$(1.3) \qquad \gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right); \quad i,j = 1,2,3.$$

La ecuación (1.3) representa un tensor cartesiano, y éste es llamado *tensión de deformación*. Una propiedad importante de esta tensor es su invariancia bajo la permutación de los índices i y j; i.e.,

$$(1.4) \qquad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}; \quad i,j = 1,2,3.$$

De esta forma el tensor de deformación es simétrico, y podemos considerarlo como un tensor simétrico tridimensional de rango dos, el cual tiene seis componentes independientes: γ_{11}, γ_{22}, γ_{33}, $\gamma_{12}=\gamma_{21}$, $\gamma_{23}=\gamma_{32}$, $\gamma_{31}=\gamma_{13}$.

Por un *cuerpo elástico* entenderemos a aquel que produce esfuerzos internos en respuestas a fuerzas externes que causan la deformación. Así los esfuerzos internos son los que producen la deformación, de tal forma que el cuerpo regresa a su estado inicial cuando las fuerzas externas son nulas: el esfuerzo y la deformación se hacen cero simultáneamente. De esta forma, deformaciones pequeñas producen esfuerzos pequeños. Lo anterior indica que existe una relación entre el esfuerzo y la deformación, la cual podemos establecer si suponemos que el esfuerzo en cualquier punto, en un instante dado, queda completamente determinado si especificamos la deformación en ese punto y en ese momento. Esto significa que sólo se considerarán cuerpos absolutamente elásticos: el cual es un caso ideal. Sin embargo muchos cuerpos reales satisfacen esta condición para deformaciones razonablemente pequeñas. De esta forma se obtiene la relación siguiente

(1.5) $$\tau_{ij}=\tau_{ij}(\gamma_{lm}) \; ; \quad i,j,l,m = 1,2,3.$$

En el caso general se tiene, de la relación (1.5), que existen seis cantidades τ_{ij} que dependen de las componentes γ_{lm}. Un caso de particular interés y el único que se tratará en esta tesis, es considerar que existe una relación lineal homogénea entre τ_{ij} y γ_{lm}. Esta relación se conoce en la literatura como *Ley de Hooke:*

(1.6) $$\tau_{ij} = C_{ijlm}\gamma_{lm};$$

en la cual

(1.7) $$C_{ijlm}=\left(\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial\gamma_{lm}}\right)_{\gamma_{lm}=0} \; ;$$

y es llamado *tensor de módulo elástico* o *tensor de contantes elásticas.*

Si Φ denota la energía elástica, entonces

(1.8) $$\tau_{ij}=\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{ij}} \; ;$$

y por lo tanto de las relaciones (1.6) y (1.7) se tiene que

(1.9) $$C_{ijlm}=\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial\gamma_{lm}}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_{lm}\partial\gamma_{ij}}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_{ij}\partial\gamma_{lm}}=C_{lmij}\ ;$$

así las componentes del tensor C_{ijlm} satisfacen las condiciones de simetría

(1.10) $$C_{ijlm}=C_{jilm}=C_{ijml}=C_{mlji}\ ;$$

i.e., las componentes no se alteran si un par de subíndices se permutan internamente o con el otro par.

Las relaciones (1.8) y (1.6) implican que las derivadas de Φ con respecto a γ_{ij} son funciones lineales homogéneas de las componentes γ_{ij}, entonces Φ es una función cuadrática de γ_{ij}; y por otro lado la relación

$$d\Phi=\tau_{ij}d\gamma_{ij}=\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{ij}}\,d\gamma_{ij}\ ;$$

define a Φ excepto por una constante aditiva. Si suponemos que la energía elástica es cero en ausencia de deformaciones ($\gamma_{ij}=0$), entonces la constante aditiva es cero y por lo tanto Φ es una función cuadrática homogénea de γ_{ij}; entonces el teorema de Euler para funciones homogéneas implica que

$$\gamma_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{ij}}=2\Phi\ ;$$

o equivalentemente

(1.11) $$\Phi=\frac{1}{2}\,\tau_{ij}\gamma_{ij}=\frac{1}{2}C_{ijlm}\gamma_{ij}\gamma_{lm}.$$

En lo sucesivo supondremos que la energía elástica Φ es una función positiva definida ([FED],[DUF]).

Regresando al sistema de ecuaciones (1.2), se tiene que este se puede escribir como

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\ ; \tag{1.12}$$

donde hemos usado la convención de índices repetidos. Con el fin de obtener un sistema de ecuaciones que sólo contenga al vector desplazamiento, hagamos uso de las relaciones (1.3) y (1.6), para así obtener

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijlm}\frac{\partial \gamma_{lm}}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\, C_{ijlm}\left\{\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_m}\right\} \tag{1.13}$$

En esta últims igualdad reemplacemos m por l y l por m en los subíndices mudos de la expresión $C_{ijlm}(\partial^2 u_l/\partial x_j \partial x_m)$. La simetría del tensor C_{ijlm} con respecto a los subíndices nos indica que los dos términos de la derecha en (1.13) son iguales, de tal forma que las ecuaciones de movimiento son ([FED]):

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijlm}\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l} \tag{1.14}$$

La solución de estas ecuaciones están explicitamente determinadas si se conocen las condiciones iniciales del problema ([DUF]). En nuestro caso, más que hacer un análisis exhaustivo de la ecuación (1.14), estamos interesados en analizar la parte espacial (miembro derecho) de tal ecuación. Este análisis está enfocado a encontrar la representación espectral de la parte espacial de la ecuación (1.14) usando técnicas de análisis funcional. y más específicamente de la teoría de operadores lineales sobre espacios de Hilbert y transformadas integrales.

CAPITULO II
ONDAS PLANAS Y LA ECUACION DE CHRISTOFFEL

Como se vió en el capítulo anterior, la ecuación de movimiento para medios elásticos homogéneos está dada por

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijlm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l} \; ; \tag{2.1}$$

esta es una ecuación diferencial parcial homogénea de segundo orden en el vector desplazamiento, el cual sin pérdida de generalidad se puede considerar en $\mathbb{C}^3$.

Si consideramos sólo ondas elásticas planas y monocromáticas, se tiene que el vector desplazamiento se puede escribir como

$$u(x,t) = Ae^{i(p\cdot x-\omega t)} \; ; \tag{2.2}$$

donde $A=(A_1,A_2,A_3)\in R^3$ es un vector constante (independiente de las coordenadas y el tiempo), $p=(p_1,p_2,p_3)\in R^3\setminus\{0\}$, $|p|^2=p_1^2+p_2^2+p_3^2=1$, y $p\cdot x= p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2+p_3\cdot x_3\in R$.

El factor exponencial $e^{i\phi}$ con

$$\phi=p\cdot x-\omega t\in R \; ; \tag{2.3}$$

se llama *factor de fase*, siendo ϕ la variable de fase. El parámetro básico de la onda es la frecuencia angular $\omega=2\pi\nu\in R$, en el cual $\nu\in R$ es la frecuencia (número de oscilaciones completas del vector desplazamiento por segundo).

El periódo $\tau \in R$ (longitud de una oscilación) está relacionada con ν por medio la relación $\tau = 1/\nu$.

La onda descrita por la ecuación (2.2) se llama plana débido a la dependencia lineal de ϕ con las coordenadas. En general el frente de onda se determina por las superficies de igual fase. Si suponemos que ϕ es una constante:

$$\phi = p \cdot x - \omega t = \xi \in R \; ; \tag{2.4}$$

obtenemos la ecuación

$$p \cdot x = \xi + \omega t \in R \; ; \tag{2.5}$$

lo cual implica que la ecuación para una superficie de igual fase, en cualquier instante dado, es un plano perpendicular al vector unitario $p \in R \setminus \{0\}$. El plano fase se mueve paralelamente a sí mismo, puesto que p es un vector dado y $p \cdot x$ (que es la distancia de este plano al origen) se incrementa linealmente con el tiempo. La rápidez $|v|$ de este plano está dada por

$$|v| = \frac{d(p \cdot x)}{dt} = \omega \; ; \tag{2.6}$$

i.e., la rápidez del plano coincide numéricamente con la frecuencia angular. A esta rápidez se le conoce como la *velocidad fase de la onda*. A el vector

$$v = |v| p \in R^3 \setminus \{0\} \; ; \tag{2.7}$$

se la llama el *vector velocidad-fase* y al vector $p \in R^3$ se le conoce como *vector de onda o fase normal*.

Claramente la relación (2.2) no satisface la ecuación (2.1) para cualquiera que sean los valores de $A, p \in R^3 \setminus \{0\}$ y $\omega \in R$; sin embargo si susti-

:uimos la ecuación (2.2) en la (2.1) obtenemos

(2.8) $$\omega^2 u_i = C_{ijlm} p_j p_l u_m ;$$

o equivalentemente

(2.9) $$(C_{ijlm} p_j p_l - \omega^2 \delta_{im}) u_m = 0 \ .$$

Definamos la matriz $\Gamma(p)$ de 3x3 cuyos elementos están dados por

(2.10) $$\Gamma(p) = (C_{ijlm} p_j p_l) \ ;$$

lo cual nos permite expresar la ecuación (2.9) en la forma directa

(2.11) $$(\Gamma(p) - \lambda I) u = 0 \ , \ \lambda = \omega^2 = |v|^2 \ ;$$

La ecuación (2.11), conocida como *Ecuación de Christoffel*, es la ecuación básica para introducirnos a la teoría de ondas elásticas en medios anisotrópicos, ya que a partir de esta podemos encontrar las direcciones del vector desplazamiento y las correspondientes velocidades de fase.

Si $u = u(x,t) \in R^3 \setminus \{0\}$, entonces la ecuación (2.11) es equivalente a pedir que

(2.12) $$\Omega(\lambda, p) = |\Gamma(p) - \lambda I| = 0 \ ;$$

i.e., $\lambda = \omega^2$ es una raíz de la ecuación característica $\Omega(\lambda, p) = 0$.

Algunas propiedades importantes de la matriz $\Gamma(p)$ están enunciadas en el siguiente lema.

Lema 2.1. *La matriz* $\Gamma(p)$ *definida por la relación* (2.10) *tiene las siguientes propiedades:*

(i) $\Gamma(p)$ *es una matriz simétrica para cualquier dirección de* $p \in R^3 \setminus \{0\}$.

(ii) $\Gamma(p)$ *es una matriz positiva definida.*

(iii) *Todas las raices de $\Omega(\lambda,p)=0$ son positivas.*

Demostración. De las propiedades de simetría del tensor C_{ijlm}, ec. (1.10), se tiene que

$$\Gamma_{im}(p)=C_{ijlm}p_jp_l=C_{lmij}p_jp_l=C_{mlji}p_lp_l=C_{mjli}p_lp_j=\Gamma_{mi}(p) \ ;$$

o equivalentemente

(2.13) $$\Gamma^{\dagger}(p)=\Gamma(p), \quad p\in R^3\setminus\{0\} \ ;$$

donde el supraíndice † denota transpuesto. Esto demuestra (i).

Para la demostración de (ii) es suficiente mostrar que para cualquier $A\in R^3\setminus\{0\}$ se cumple que

(2.14) $$A\Gamma(p)A>0 \ ;$$

o equivalentemente

(2.15) $$A_ip_jC_{ijlm}p_jA_m>0 \ .$$

Sea $T=(T_{ij})$ la matriz de 3x3 definida por

(2.16) $$T=(T_{ij})=\begin{pmatrix} A_1p_1 & A_1p_2 & A_1p_3 \\ A_2p_1 & A_2p_2 & A_2p_3 \\ A_3p_1 & A_3p_2 & A_3p_3 \end{pmatrix} \ ;$$

entonces la relación (2.15) se puede expresar como

(2.17) $$T_{ij}C_{ijlm}T_{lm}>0 \ ;$$

de donde es claro que este es un caso particular de la condición general de que la energía elástica sea positiva (ec.(1.11)), donde el tensor simétrico arbitrario γ_{ij} es igual a T_{ij}. Entonces la condición (1.11) sobre la energía elástica garantiza que $\Gamma(p)$ sea positiva definida para cualquier dirección de $p \in R^3 \setminus \{0\}$.

Finalmente, la demostración de la propiedad (iii) es una consecuencia inmediata de la propiedad (ii).

Q.E.D.

CAPITULO III

EL OPERADOR DE ELASTICIDAD

Denotemos por $L^{2,3}(R^3)$ al espacio de todas las matrices columna de 3x1 definidas sobre R^3 y que toman valores en C^3, de tal forma que si $u \in L^{2,3}(R^3)$ entonces u es Lebesgue medible y de cuadrado integrable. Para $x=(x_1,x_2,x_3)$ $\in R^3$ y $u \in L^{2,3}(R^3)$ definamos en $L^{2,3}(R^3)$ la norma de u como

$$(3.1) \qquad \|u\|^2 = \int_{R^3} |u(x)|^2 dx = \int_{R^3} \sum_{j=1}^{3} |u_j(x)|^2 dx.$$

Claramente esta *norma* proviene de un producto escalar, el cual para $f,g \in L^{2,3}(R^3)$ está definido por

$$(3.2) \qquad (f,g) = \int_{R^3} f(x) \cdot g^*(x)\, dx = \int_{R^3} \sum_{j=1}^{3} f_j(x) g_j^*(x)\, dx .$$

El espacio $L^{2,3}(R^3)$ provisto del producto escalar (3.2) define un espacio de Hilbert, el cual seguiremos denotando por $L^{2,3}(R^3)$.

Para $u \in L^{2,3}(R^3)$ definamos el operador transformada de Fourier F para u de la siguiente forma ([BOC]):

$$F: L^{2,3}(R^3) \longrightarrow L^{2,3}(R^3)$$

$$(3.3) \qquad (Fu)(p) = \hat{u}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \underset{R\to\infty}{\text{s-lim}} \int_{|x|\leq R} u(x) e^{-ip\cdot x}\, dx \,;$$

con inversa definida por

$$(3.4) \qquad (F^{-1}\hat{u})(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\ \underset{R\to\infty}{\text{s-lim}}\int_{|p|\le R}\hat{u}(p)\,e^{ip\cdot x}\,dp\,.$$

Donde el límite se toma en la topología fuerte de $L^{2,3}(R^3)$.

Las propieadades principales del operador transformada de Fourier son las siguientes:

(i) F es un operador lineal unitario de $L^{2,3}(R^3)$ sobre sí mismo; i.e., para toda $u\in L^{2,3}(R^3)$ se tiene que $\hat{u}\in L^{2,3}(R^3)$ y

$$(3.5) \qquad \int_{R^3}|u(x)|^2\,dx=\int_{R^3}|\hat{u}(p)|^2\,dp.$$

Esta última igualdad se llama *Identidad de Parseval.*

(ii) Si $u\in L^{2,3}(R^3)$ y su derivada en sentido de distribuciones con respecto a cada una de las coordenadas x_j; $j=1,2,3$; es una función en $L^{2,3}(R^3)$, entonces

$$(3.6) \qquad \left(F\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^{\wedge}=ip_jFu=ip_j\hat{u}\ ;\ j=1,2,3;$$

y si $\partial^2u/\partial x_i\partial x_j$ en sentido de distribuciones es una función en $L^{2,3}(R^3)$ entonces

$$(3.7) \qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right)^{\wedge}=-p_ip_j\hat{u}\ ;\ \ i,j=1,2,3.$$

Estas propiedades nos permiten expresar la acción del operador $H_0=-C_{ijlm}\,\partial^2/\partial x_j\partial x_l$ de la siguiente forma

(3.8) $$H_0u=F^{-1}\Gamma(\cdot)Fu\,;$$

donde el dominio del operador H_0 está definido por

(3.9) $$D(H_0)=\{u\in L^{2,3}(R^3):\Gamma(\cdot)\hat{u}\in L^{2,3}(R^3)\}\,.$$

En realidad el dominio del operador H_0, $D(H_0)$, coincide con el espacio de Sobolev $H^2(R^3,C^3)$: el espacio de todas las matrices columna de 3x1 definidas en $L^{2,3}(R^3)$ tales que sus derivadas parciales hasta de segundo orden pertenecen a $L^{2,3}(R^3)$.

Definición 3.1. *El operador lineal H_0 definido en (3.8) con dominio $H^2(R^3,C^3)$, se llama el* *<u>operador de la teoría de la elásticidad</u>*, *o simplemente el* *<u>operador de elásticidad</u>*. ([REK]).

Definamos el operador $\Gamma(\cdot)$ en $L^{2,3}(R^3)$ de la forma siguiente

(3.10a) $$D(\Gamma(\cdot))=\{f\in L^{2,3}(R^3):\Gamma(\cdot)f\in L^{2,3}(R^3)\}\,.$$

(3.10b) $$(\Gamma(\cdot)f)(p)=\Gamma(p)f(p),\ f\in D(\Gamma(\cdot))$$

Lema 3.2. *El operador $\Gamma(p)$ con dominio definido en la ec.(3.10a) y acción dada por la ec. (3.10b) es un operador autoadjunto con respecto al producto escalar usual de* $L^{2,3}(R^3)$.

Demostración. Puesto que el espacio $\mathcal{D}^3(R^3)=C_0^\infty(R^3)\oplus C_0^\infty(R^3)\oplus C_0^\infty(R^3)$ está contenido en $D(\Gamma(\cdot))$, se tiene que $D(\Gamma(\cdot))$ es denso en $L^{2,3}(R^3)$. La demostración quedará completa si se demuestra que $\Gamma(\cdot)\subset\Gamma^*(\cdot)$ ($\Gamma^*(\cdot)$ es una extensión de $\Gamma(\cdot)$) y $\Gamma^*(\cdot)\subset\Gamma(\cdot)$; de donde $\Gamma(\cdot)=\Gamma^*(\cdot)$.

Demostremos primero que $\Gamma(\cdot)\subset\Gamma^*(\cdot)$. Puesto que $\Gamma(\cdot)$ es simétrica y positiva definida (Lema 2.1), se tiene que para toda $u,v\in D(\Gamma(\cdot))$:

$$(\Gamma(\cdot)u,v)=\int_{R^3}[\Gamma(p)u(p)]^\dagger v^*(p)\,dp=\int_{R^3}u^\dagger(p)\,[\Gamma(\cdot)]^\dagger v^*(p)\,dp=\int_{R^3}u^\dagger(p)\,\Gamma(p)\,v^*(p)\,dp$$

$$=\int_{R^3} u^{\dagger}(p)\,[\Gamma^*(p)v(p)]^*dp = \int_{R^3} u^{\dagger}(p)\,[\Gamma(p)v(p)]^*dp = (u,\Gamma(p)v).$$

Esto demuestra que si $v\in D(\Gamma(\cdot))$, entonces $v\in D(\Gamma^*(\cdot))$ y $\Gamma^*(p)v=\Gamma(p)v$; i.e., $\Gamma(\cdot)\subset\Gamma^*(\cdot)$.

Para demostrar que $\Gamma^*(p)\subset\Gamma(p)$, sea $v\in D(\Gamma^*(\cdot))$; i.e., $v\in L^{2,3}(R^3)$ y $(\Gamma(p)u,v)=(u,\theta)$; para algún $\theta\in L^{2,3}(R^3)$ y toda $u\in D(\Gamma(\cdot))$. El vector θ es igual a $\Gamma^*(p)v$ por definición, entonces

$$(\Gamma(p)u,v)=\int_{R^3} u^{\dagger}(p)\,[\Gamma(p)v(p)]^*dp=\int_{R^3} u^{\dagger}(p)\,\theta^*(p)\,dp=(u,\theta)\ ,\ \text{para toda } u\in D(\Gamma(\cdot)).$$

Pero $D(\Gamma(\cdot))$ es denso en $L^{2,3}(R^3)$, de donde $\Gamma(p)v=\theta$; i.e., $v\in D(\Gamma(\cdot))$. Esto prueba que si $v\in D(\Gamma^*(\cdot))$, entonces $v\in D(\Gamma(\cdot))$ y $\Gamma(p)v=\theta=\Gamma^*(p)v$; i.e., $\Gamma^*(p)\subset\Gamma(p)$.

Q.E.D.

Teorema 3.3. *El operador de elásticidad* H_0 *definido en* $L^{2,3}(R^3)$ *con dominio* $H^2(R^3,C^3)$ *es un operador autoadjunto con respecto al producto escalar usual en* $L^{2,3}(R^3)$.

Demostración. Esta afirmación se sigue inmediatamente si notamos que la transformada de Fourier es un mapeo unitario de $L^{2,3}(R^3)$ en sí mismo y además $\Gamma(p)$ es autoadjunto por el Lema 3.2.([SMI]).

Q.E.D.

CAPITULO IV

LA FAMILIA ESPECTRAL DEL OPERADOR DE ELASTICIDAD

La suposición de una solución en forma de onda plana para la ecuación de movimiento para medios elásticos homogéneos nos conduce al siguiente problema para el operador de elásticidad

(4.1) $$(H_0\Psi)(x) = \lambda\Psi(x) \;;$$

donde $\lambda \in R^+ = \{\lambda \in R : \lambda > 0\}$. Para $A \in R^3$, vector constante (independiente de la posición), supongamos que $\Psi(x)$ es de la forma

(4.2) $$\Psi(x) = Ae^{ip\cdot x} \;,\; |p|^2 = 1 \;.$$

Los resultados de los capítulos II y III nos conducen a considerar tres valores para $\lambda \in R^+$, los cuales sin pérdida de generalidad se pueden escoger de tal forma que

(4.3) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$; ó equivalentemente $|v_1|^2 \geq |v_2|^2 \geq |v_3|^2$

Mas aun, es fácil demostrar que la magnitud de los vectores velocidad $v_n(p)$; $n=1,2,3$; son homogéneos de grado uno én el vector p: $|v_n(\alpha p)| = |\alpha||v_n(p)|$. ([DUF]).

Denotemos por $\Psi^n(x)$ a la función dada en (4.2) correspondiente al valor λ_n; $n=1,2,3$; i.e., $\Psi^n(x)$ es de la forma

(4.4) $$\Psi^n(x) = A^n e^{ip\cdot x} \;,\; n=1,2,3 \;.$$

Bajo esta suposición los vectores $A^n \in R^3$; $n=1,2,3$; deben satisfacer la siguiente ecuación (ecs. (2.9) y (2.11))

(4.5) $$(\Gamma(p)-\lambda_n I)A^n=0 \ ,n=1,2,3 \ .$$

Puesto que $\Gamma(p)$ es una matriz simétrica de 3x3, es posible escribir las componentes de ésta como ([DUF], [MUS])

(4.6) $$\Gamma_{lm}(p)=\alpha_l\alpha_m \ ; \ l,m \text{ distintos}; \ l,m=1,2,3.$$

Resolviendo la ecuación (4.6) para las tres cantidades α_i, se tiene que

(4.7) $$\alpha_i^2=\frac{\Gamma_{im}\Gamma_{il}}{\Gamma_{lm}} \ ; \ i=1,2,3;$$

donde los índices i,l,m son distintos. Mas aun, los α_i son homogéneos de grado −1 en el vector p. Si definimos

(4.8) $$a_m=\Gamma_{mm}-\alpha_m^2 \ ;$$

entonces la ecuación (4.5) se puede escribir como

(4.9) $$(\lambda_n-a_i)A_i^n=\alpha_i\sum_{m=1}^{3}\alpha_m A_m^n=\alpha_i S, \ i=1,2,3;$$

la cual nos conduce a que

(4.10) $$A_i^n=\frac{\alpha_i S}{\lambda_n-a_i} \ .$$

Definamos S de tal forma que S=1; entonces las componentes del vector A^n; n=1,2,3; se pueden escribir como

(4.11)
$$A_m^n=\frac{\alpha_m}{\lambda_n-a_i};$$

además la ecuación cúbica que satisfacen los λ_n; $n=1,2,3$; está dada por

(4.12)
$$\sum_{r=1}^{3}\frac{\alpha_r^2}{\lambda-a_r}=1 .$$

Un análisis sencillo de los cocientes

(4.13)
$$A_1^n:A_2^n:A_3^n=\frac{\alpha_1}{\lambda_n-a_1}:\frac{\alpha_2}{\lambda_n-a_2}:\frac{\alpha_3}{\lambda_n-a_3};$$

muestran que, en general, la dirección $(A_1^n:A_2^n:A_3^n)$ es ni coincidente ni ortogonal al vector de propagación $p\in R^3\setminus\{0\}$, de esta forma las ondas elásticas en general son cuasilongitudinales o cuasitransversales (Fig.4.1).

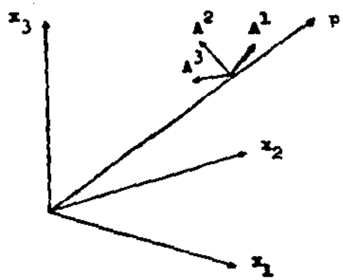

Figura 4.1. *Naturaleza de los vectores desplazamiento con ondas planas de normal p. Los vectores A^1, A^2, A^3 son ondas planas que viajan con diferentes velocidades.*

Por otro lado notemos que

$$A^1\cdot A^2=\sum_{k=1}^{3}\frac{\alpha_k^2}{(\lambda_1-a_k)(\lambda_2-a_k)}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{a_k^2}{\lambda_1-a_k}-\frac{a_k^2}{\lambda_2-a_k}\right).$$

Usando la condición S=1, se obtiene que

(4.14) $$A^1\cdot A^2=0,\text{ a menos que } \lambda_1=\lambda_2\ ;$$

i.e., A^1 y A^2 son ortogonales. Análogamente se puede demostrar que los vectores A^2, A^3 y A^3, A^1 son ortogonales. Entonces asociada a la dirección $p\in R^3\setminus\{0\}$ existe una triada ortogonal de posibles vectores desplazamiento, cada uno de los cuales se propaga con cierta velocidad de fase.

En el caso especial en el que $\lambda_1=\lambda_2$, los vectores asociados A^1 y A^2 están polarizados en el plano de normal A^3, pero no están polarizados en ninguna dirección particular contenida en ese plano. Ondas elásticas con $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ no son posibles en ningún medio elástico conocido ([MUS]).

La discusión anterior no excluye los casos $\lambda=a_k$; $k=1,2,3$; ya que estos se cumplen si y sólo si la correspondiente α_k es igual a cero, por la ecuación (4.9).

Hagamos notar que las relaciones de ortogonalidad entre los vectores A^n se siguen cumpliendo aun si estos están multiplicados por constantes arbitrarias β^n, respectivamente. Escojamos estas constantes de tal forma que

(4.15) $$|A^n|^2=A^n\cdot A^n=\beta^n\sum_{k=1}^{3}\frac{\alpha_k^2}{(\lambda_n-a_k)^2}=1\ ,\ n=1,2,3\ ;$$

i.e.,

(4.16) $$\beta^n=\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\alpha_k^2}{(\lambda_n-a_k)^2}\right)^{-1/2},\ n=1,2,3.$$

Sigamos denotando por A^n; $n=1,2,3$; a los vectores definidos por (4.11) normalizados a la unidad. Entonces de (4.11), (4.15) y (4.16) se tiene que A^n es de la forma

$$(4.17) \qquad A^n=\left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\alpha_k^2}{(\lambda_n-a_k)^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{\alpha_1}{\lambda_n-a_1}, \frac{\alpha_2}{\lambda_n-a_2}, \frac{\alpha_3}{\lambda_n-a_3}\right), n=1,2,3.$$

Notemos además que los vectores A^n definidos en (4.17) son vectores homogéneos de grado cero en el vector $p\in R^3\setminus\{0\}$.

Entonces, sin pérdida de generalidad, las soluciones (4.4) se pueden escribir como

$$(4.18) \qquad \Psi^n(x,p)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} A^n e^{ip\cdot x}, \; p\in R^3\setminus\{0\} \text{ y } n=1,2,3.$$

A las funciones definidas por la relación (4.18) las llamaremos *eigenfunciones impropias del operador de elásticidad*, debido al hecho de que Ψ^n; $n=1,2,3$; no pertenece al espacio $L^{2,3}(R^3)$. Sin embargo, a pesar del hecho anterior, las propiedades espectrales del operador de elásticidad H_0 están relacionadas con tales eigenfunciones impropias. Estas propiedades serán obtenidas por medio de un conjunto de *transformadas* de funciones $f\in L^{2,3}(R^3)$. Estas transformadas son formalmente los productos escalares en $L^{2,3}(R^3)$ de f con las eigenfunciones impropias:

$$(4.19) \qquad \tilde{f}^n(p)=\int_{R^3} f(x)\cdot\Psi^{*n}(x,p)\,dx; \; n=1,2,3.$$

Claramente estas expresiones son formales, puesto que las eigenfunciones no están en $L^{2,3}(R^3)$, y será necesario interpretarlas como límites en el espacio $L^{2,3}(R^3)$.

Lema 4.1. *Para cada* $f \in L^{2,3}(R^3)$ *los siguientes límites fuertes existen en* $L^2(R^3)$:

$$\tilde{f}^n(p) = \underset{M\to\infty}{s\text{-}\lim} \int_{|x|^2 \le M} f(x)\cdot \Psi^{*n}(x,p)\,dx\ ,\ n=1,2,3; \tag{4.20}$$

donde $|x|^2 = \sum_{k=1}^{3} x_k^2$.

Demostración. De la forma de las soluciones, definidas en (4.18), se tiene que

$$\int_{|x|^2\le M} f(x)\cdot\Psi^{*n}(x,p)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{|x|^2\le M} f(x)\cdot A^n e^{-ip\cdot x}\,dx \tag{4.21}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{|x|^2\le M} f_j(x)\ e^{-ip\cdot x}\,dx \right) A_j^n .$$

Puesto que para cada $n=1,2,3$ los factores A_j^n son constantes, $j=1,2,3$; y además de que cada $f_j \in L^2(R^3)$, se sigue de la teoría de Fourier-Plancherel ([BOC]) que las funciones dadas en (4.21) convergen, cuando $M\to\infty$, en la norma de $L^2(R^3)$ a una función, denotada por $\tilde{f}^n$, perteneciente a $L^2(R^3)$.

Q.E.D.

El lema 4.1. asocia a cada $f \in L^{2,3}(R^3)$ una terna dada por $(\tilde{f}^1, \tilde{f}^2, \tilde{f}^3)$, donde cada $\tilde{f}^n \in L^2(R^3)$; $n=1,2,3$; mas aun se cumple el siguiente resultado.

Lema 4.2.(*Igualdad de Parseval*). *Para cada* $f\in L^{2,3}(R^3)$ *se cumple la siguiente igualdad*

$$(4.22)\qquad \|f\|^2=\sum_{n=1}^{3}\|\tilde{f}^n\|^2_{L^2(R^3)}\ ;$$

donde cada una de las $\tilde{f}^n$ *están definidas en* (4.20).

Demostración. Denotemos por $\hat{f}=Ff$ a la transformada de Fourier de $f\in L^{2,3}(R^3)$, y por $\tilde{f}$ a la terna asociada a cada $f\in L^{2,3}(R^3)$ cuyas componentes son las $\tilde{f}^n$:

$$(4.23)\qquad \tilde{f}=(\tilde{f}^1,\tilde{f}^2,\tilde{f}^3)\ .$$

Usando las relaciones (4.20), (4.21) y (4.23) se concluye que

$$(4.24)\qquad \tilde{f}=(\hat{f}\cdot A^1,\hat{f}\cdot A^2,\hat{f}\cdot A^3)\ .$$

Mas aun, de (4.24) es fácil ver que $\tilde{f}$ se puede escribir como

$$(4.25)\qquad \tilde{f}=\hat{f}\cdot A\ ;$$

donde A es una matriz de 3x3 cuyas columnas están formadas por cada uno de los vectores A^n; $n=1,2,3$. Notemos además que A es una matriz ortogonal debido a que sus columnas forman un conjunto ortonormal, entonces $A^{-1}=A^t$ ([NOB]).

Por otro lado se tiene que

$$(4.26)\qquad \sum_{n=1}^{3}\|\tilde{f}^n\|^2_{L^{2,3}(R^3)}=\sum_{n=1}^{3}\int_{R^3}|\tilde{f}^n(p)|^2dp=\int_{R^3}\sum_{n=1}^{3}|\tilde{f}^n(p)|^2dp=\int_{R^3}\tilde{f}(p)\cdot\tilde{f}^*(p)\,dp;$$

entonces usando (4.25) y el hecho de que A es ortogonal, se tiene que la relación (4.26) es equivalente a

(4.27) $$\sum_{n=1}^{3} \|\tilde{f}^n\|^2_{L^2(R^3)} = \int_{R^3} |\hat{f}(p)|^2 dp = \int_{R^3} |f(x)|^2 dx = \|f\|^2 .$$

La penúltima igualdad es consecuancia inmediata del Teorema de Parseval ([BOC]).

Q.E.D.

Definamos el siguiente operador lineal

(4.28) $$\tilde{\Phi}: L^{2,3}(R^3) \longrightarrow L^{2,3}(R^3)$$
$$\tilde{\Phi} f = \tilde{f} = (\tilde{f}^1, \tilde{f}^2, \tilde{f}^3) .$$

Entonces una consecuancia inmediata de la igualdad de Parseval (4.27) es la isometría del operador $\tilde{\Phi}$:

(4.29) $$\|\tilde{\Phi} f\| = \|f\| \text{ , para toda } f \in L^{2,3}(R^3) ;$$

i.e.,

(4.30) $$\tilde{\Phi}^* \tilde{\Phi} = I .$$

En particular $\tilde{\Phi}$ es una isometría parcial, y se sigue que $\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}^* = \tilde{P}$ es la proyección ortogonal de $\tilde{\Phi} L^{2,3}(R^3)$, el rango de $\tilde{\Phi}$.

De las ecuaciones (4.24) y (4.25) se sigue que

(4.31) $$\tilde{\Phi} f = (\hat{f} \cdot A^1, \hat{f} \cdot A^2, \hat{f} \cdot A^3) \text{ ; para toda } f \in L^{2,3}(R^3) ;$$

i.e., $\tilde{\Phi} f$ tiene como componentes las proyecciones de la transformada de Fourier de $f \in L^{2,3}(R^3)$ sobre cada uno de los vectores ortonormales A^n; $n=1,2,3$. entonces en la base formada por A^1, A^2 y A^3 el vector tiene la forma explicita

(4.32) $$\tilde{\Phi}f=\sum_{n=1}^{3}(\hat{f}\cdot A^{n})A^{n} \text{ ; para toda } f\in L^{2,3}(R^{3}) \text{ .}$$

Esta interpretación nos permite dar la definición precisa de $\tilde{\Phi}^{*}$.

Lema 4.3. *Para cada* $f\in L^{2,3}(R^{3})$ *el siguiente límite fuerte existe en* $L^{2,3}(R^{3})$

(4.33) $$\tilde{\Phi}^{*}f=\text{s-}\lim_{M\to\infty}\int_{|p|^{2}\le M^{2}}\sum_{n=1}^{3}f_{n}(p)\Psi^{n}(x,p)dp \text{ ;}$$

donde f_n; $n=1,2,3$; *son las componentes del vector* $f\in L^{2,3}(R^{3})$.

Demostración La existencia del límite (4.33) en $L^{2,3}(R^{3})$ es una consecuencia inmediata de la Teoría de Fourier-Plancherel ([BOC]).

Q.E.D.

Notemos que para cada $f\in L^{2,3}(R^{3})$ se tiene que

(4.34) $$\tilde{\Phi}^{*}f=F^{-1}Af \text{ , i.e., } \tilde{\Phi}^{*}=F^{-1}A \text{ ;}$$

Teorema 4.4. *El operador lineal* $\tilde{\Phi}:L^{2,3}(R^{3})\longrightarrow L^{2,3}(R^{3})$ *es un operador lineal unitario; i.e.,*

(4.35) $$\tilde{\Phi}^{*}\tilde{\Phi}=I \quad y \quad \tilde{\Phi}\tilde{\Phi}^{*}=I \text{ .}$$

Demostración. La primera igualdad en (4.35) es consecuencia inmediata del lema 4.2. Para verificar la segunda igualdad en (4.35), notemos que la matriz A es una matriz ortogonal en el espacio de las matrices de 3x3 y como transformación es biyectiva, entonces si $f\in L^{2,3}(R^{3})$ se tiene que $g=Af\in L^{2,3}(R^{3})$. Mas aun, puesto que la transformada de Fourier es un opera--

dor lineal unitario de $L^{2,3}(R^3)$ en sí mismo, se tiene que $F^{-1}g \in L^{2,3}(R^3)$ con $g=Af$. De esta forma para toda $f \in L^{2,3}(R^3)$

$$\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}^* f = \Phi h = (\hat{h})^{\dagger} A, \text{ donde } h = \tilde{\Phi}^* f . \tag{4.36}$$

Por otro lado de la relación (4.34) se tiene que

$$(\hat{h})^{\dagger} = [(\tilde{\Phi}^* f)^{\wedge}]^{\dagger} = [F F^{-1} A f]^{\dagger} = [Af]^{\dagger} = f A^{\dagger} .$$

Sustituyendo este resultado en (4.36) se tiene que

$$\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}^* f = f A^{\dagger} A = f I = f .$$

Q.E.D.

La ecuación (4.30) es la expansión en eigenfunciones en forma abstracta, i.e., para cada $f \in L^{2,3}(R^3)$ se tiene la siguiente representación

$$f = \tilde{\Phi}^* \tilde{f} . \tag{4.37}$$

Esta expansión en eigenfunciones nos proporciona una representación espectral para el operador de elásticidad H_0.

Teorema 4.5. *El operador unitario* $\tilde{\Phi}: L^{2,3}(R^3) \longrightarrow L^{2,3}(R^3)$ *define una representación espectral del operador de elásticidad* H_0 *en el siguiente sentido*

$$\tilde{\Phi} H_0 f = (\lambda_1 \tilde{f}^1, \lambda_2 \tilde{f}^2, \lambda_3 \tilde{f}^3); \ \textit{para toda } f \in D(H_0). \tag{4.38}$$

Demostración. Para demostrar la relación (4.39) hagamos uso de de la definición 3.1, de que el operador transformada de Fourier es unitario, del lema 3.2 y de que la matriz A es ortogonal.

Como se vió en la demostración del lema 3.2 el conjunto $D^3(R^3)$ es denso en $L^{2,3}(R^3)$. Entonces si $f\in D(H)$ y $g\in D^3(R^3)$ se tiene que

$$(4.39)\qquad (\tilde{\Phi}H_0f,g)=(Hf,\tilde{\Phi}^*g)=(F^{-1}\Gamma(\cdot)Ff,F^{-1}Ag)=(\Gamma(\cdot)Ff,FF^{-1}Ag)$$

$$=(\Gamma(\cdot)Ff,Ag)=(A^\dagger\Gamma(\cdot)Ff,g)=(A^\dagger\Gamma(\cdot)IFf,g)$$

$$=(A^\dagger\Gamma(\cdot)AA^\dagger Ff,g)=(A^\dagger\Gamma(\cdot)A\tilde{f},g).$$

La matriz $A^\dagger\Gamma(\cdot)A$ es una matriz diagonal cuyas componentes en la diagonal son los eigenvalores de $\Gamma(\cdot)$: ya que la matriz A tiene como columnas los eigenvectores de $\Gamma(\cdot)$ ([NOB]), i.e.,

$$(4.40)\qquad D=A^\dagger\Gamma(\cdot)A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}=D(\cdot)\ .$$

Sustituyendo (4.40) en (4.39) obtenemos que

$$(4.41)\qquad (\tilde{\Phi}H_0f,g)=(A^\dagger\Gamma(\cdot)A\tilde{f},g)=(D(\cdot)\tilde{f},g)\ .$$

La relación (4.41) es equivalente a la relación (4.38) puesto que el conjunto $D^3(R^3)$ es denso en $L^{2,3}(R^3)$.

Q.E.D.

Claramente la relación (4.38) es equivalente a

$$(4.42)\qquad \tilde{\Phi}H_0\tilde{\Phi}^*=D(\cdot)\ .$$

i.e., el operador $\tilde{\Phi}$ *diagonaliza* al operador H_0.

Si denotamos por $P_n(\cdot)$ a la proyección ortogonal sobre el eigenespacio correspondiente a $\lambda_n(\cdot)$; n=1,2,3; entonces se tiene que $\tilde{P}_n(\cdot)$ esta dado por ([KAT])

$$\tilde{P}_n(p)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{C_n(p)} (D(p)-z)^{-1}\,dz \quad ; \qquad n=1,2,3. \tag{4.43}$$

donde $C_n(p)$ es una curva simple cerrada que sólo encierra al eigenvalor λ_n. De los lemas 4.1-4.3, de los teoremas 4.4. y 4.5, y de (4.43) se obtiene.

Corolario 4.6. *Para la matriz* $\Gamma(\cdot)$, *el operador de elásticidad* H_0 *y las proyecciones ortogonales* $\tilde{P}_n(\cdot)$ *se cumplen las siguientes relaciones en* $L^{2,3}(R^3)$:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{3} \tilde{P}_n(p)=I \; ; \quad p\in R^3\backslash\{0\} . \tag{4.44}$$

$$\text{(ii)} \quad \Gamma(p)=A\sum_{n=1}^{3} \lambda_n(p)\tilde{P}_n(p)\,A^{t} \; ; \quad p\in R^3\backslash\{0\} . \tag{4.45}$$

$$\text{(iii)} \quad H_0=F^{-1}A\sum_{n=1}^{3} \lambda_n(p)\tilde{P}_n(p)A^{t}F=\tilde{\Phi}^{*}\sum_{n=1}^{3}\lambda_n(p)\tilde{P}_n(p)\,\tilde{\Phi} \; ; \; p\in R^3\backslash\{0\} . \tag{4.46}$$

$$\text{(iv)} \quad \sum_{n=1}^{3} P_n=I \; ; \text{ con } P_n=\tilde{\Phi}^{*}\tilde{P}_n(\cdot)\tilde{\Phi} . \tag{4.47}$$

Por otro lado, de acuerdo a los resultados en los capítulos II y III, las características de propagación de ondas planas en un medio anisotrópico se pueden encontrar a partir de la ecuación de Christoffel (2.11):

$$(\Gamma(p)-\lambda I)u=0 \; ; \; \lambda=\omega^2=|\nu|^2 \; ; \tag{4.48}$$

la cual origina una relación de dispersión dada por la ecuación (2.12):

(4.49) $$\Omega(\lambda,p)=|\Gamma(p)-\lambda I|=0 \ .$$

Para una λ fija , la ecuación (4.49) define una superficie de dimensión dos en el espacio determinado por el vector p; a dicha superficie se le conoce como *superficie del vector de onda* ([AUL]). Puesto que el segundo término en la relación de dispersión es proporcional a λ, entonces la relación de dispersión siempre se puede expresar en términos de la variable $1/\lambda^{1/2}$. Por lo tanto el vector de onda $p \in R^3 \setminus \{0\}$ es siempre proporcional a $\lambda^{1/2}$, entonces es más conveniente considerar la *superficie de lentitud* (*o de velocidad inversa*), la cual da la inversa de la velocidad de fase, $1/\omega=1/|v|$, como una función de la dirección de propagación y es independiente de $\lambda^{1/2}=\omega$, en lugar de la superficie del vector de onda la cual depende de $\lambda^{1/2}=\omega$. De esta discusión se sigue que la ecuación que describe a la superficie de lentitud está dada por

(4.50) $$\Omega(1,p)=|\Gamma(p)-I|=0 \ .$$

Una forma alternativa de describir a esta superficie de lentitud es haciendo notar que la relación de dispersión (4.49) es un polinomio de tercer grado en las variables (λ,p). Dicho polinomio tiene una factorización única

(4.51) $$\Omega(\lambda,p)=Q_1(\lambda,p)Q_2(\lambda,p)Q_3(\lambda,p) \ ;$$

donde los factores $Q_n(\lambda,p)$; $n=1.2,3$; se pueden escribir de forma única de tal forma que el coeficiente de λ en cada $Q_n(\lambda,p)$ sea uno. De esta forma, usando la relación (4.50), la superficie de lentitud se puede describir por la ecuación

(4.52) $$\Omega(1,p)=Q_1(1,p)Q_2(1,p)Q_3(1,p) \ .$$

El lugar geométrico que describe cada factor $Q_n(1,p)$; $n=1,2,3$; está dado por el siguiente conjunto

(4.53) $$S_n=\{\xi\in R^3:\lambda_n(\xi)=1\}\ ;\ n=1,2,3;$$

y por lo tanto el lugar geométrico descrito por la superficie de lentitud está dado por

(4.54) $$S=\bigcup_{n=1}^{3} S_n\,.$$

Esta descripción alternativa de la superficie de lentitud permite definir sobre $\mathbf{R}^3$ un sistema de coordenadas radiales generalizadas definidas por los mapeos

(4.55) $$\Xi_n:R^3\setminus\{0\}\longrightarrow(R^+,S_n)$$
$$\Xi_n(\xi):(\lambda_n^{1/2}(\xi),\frac{\xi}{\lambda_n^{1/2}(\xi)})\ ;\ n=1,2,3;$$

y

(4.56) $$\Xi_n^{-1}(\rho,\theta_n)=\rho\theta_n\ ;\ n=1,2,3.$$

Si designamos por dS a la superficie medible de dimensión dos de la esfera de radio uno en R^3, entonces

(4.57) $$d\xi=\rho^2d\rho d\theta_n\ ;$$

donde

(4.58) $$d\theta_n=|\theta_n|^3dS(\theta_n/|\theta_n|)\ ;$$

donde dS denota la medida de la superficie de la esfera unitaria de dimensión dos en R^3. Claramente la ec.(4.58) define una medida finita $d\theta_n$.

Denotemos por $L^{2,3}(S_n)$ al espacio de Hilbert de funciones medibles con valores en C^3 definidas sobre S_n y tal que son de cuadrado integrable con respecto a la medida $d\theta_n$; y denotemos por $L^{2,0}(S_n)=L^2(S_n)$. Con ayuda de los espacios $L^{2,3}(S_n)$; $n=1,2,3$; definamos los siguientes espacios de Hilbert

(4.59) $$H_n=\{\phi\in L^{2,3}(S_n):P_n(\theta_n)\phi(\theta_n)=\phi(\theta_n)\} \; ; n=1,2,3;$$

(4.60) $$H_{\oplus}=H_1\oplus H_2\oplus H_3 \; ;$$

y

(4.61) $$H=L^2(R^+,d\rho,H_{\oplus}) \; .$$

Una vez definidos estos espacios definamos el siguiente operador lineal

$$U:L^{2,3}(R^3)\longrightarrow H$$

(4.62)

$$(U\phi)(\rho,\bar{\theta})=\rho\sum_{n=1}^{3}\tilde{P}_n(\theta_n)\tilde{\phi}(\rho\theta_n) \; ;$$

donde $\bar{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$.

Una consecuencia inmediata del teorema 4.5, de las ecuaciones (4.42) y (4.43), del corolario 4.6 y de las relaciones (4.55)-(4.62) está enunciada en el siguiente corolario.

Corolario 4.7. (i) *El operador* U *de* $L^{2,3}(R^3)$ *sobre* H *es un operador unitario.* (ii) *El operador* $UH_0U^{-1}:H\longrightarrow H$ *es el operador de multiplicación por* ρ; *i.e.,*

(4.63) $$UH_0U^{-1}=\rho.$$

Para cada conjunto de Borel $I\subset R^+$ denotemos por $\chi_I(\rho)$ a la función característica de I para cada $\rho\in I$, y denotemos por E a la familia espectral del operador H_0, entonces el corolario 4.7. implica que ([WEI]):

(4.64) $$(E(I)f)(\rho)=U^{-1}\chi_I(\rho)Uf(\rho) ;$$

y

(4.65) $$(UHE(I)f)(\rho)=\rho\chi_I(\rho)Uf .$$

La familia espectral $\{E(\rho)\}$ determina una medida espectral $E(I)$. Si I es el intervalo $(a,b]$, entonces $E((a,b])=E(b)-E(a)$. Para otros tipos de intervalos definimos

$$E([a,b])=E(b)-E(a-0) \quad ;$$
$$E((a,b))=E(b-0)-E(a) \quad ;$$
$$E([a,b))=E(b-0)-E(a-0) \quad .$$

Entonces es claro que las definiciones anteriores determinan una función $E(I)$ cuyos valores son proyecciones, definida para todos los conjuntos de Borel I de la recta real (en nuestro caso de R^+) y que cumple además con las siguientes propiedades:

(4.66) $$E(I\cap I')=E(I)E(I') ;$$

(4.67) $$E(I\cup I')=E(I)+E(I'), \text{ si } I\cap I'=\emptyset \quad ;$$

(4.68) $$E(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n)=\sum_{n=1}^{\infty} E(I_n) \; ; \; I_n\cap I_m=\emptyset \; ; \; n \text{ diferente de } m.$$

Mas generalmente, para un vector arbitrario, elemento de un espacio de Hilbert, se tiene que

(4.69) $$m_f(I)=((E(I)f,f)=\|E(I)f\|^2 ;$$

define una medida no negativa y contablemente aditiva ([ROY]) para conjuntos de Borel I. Por otro lado el Teorema de Descomposición de Lebesgue ([ROY]) establece que cualquier medida m sobre R tiene una única descomposición $m=m_{ac}+m_s$, donde m_{ac} es absolutamente contínua y m_s es singular con respecto a la medida de Lebesgue $|\cdot|$ sobre R.

Definicion.4.8. *Sea K un espacio de Hilbert y B un operador lineal definido sobre K.*

(i) *Un vector $f \in K$ se dice que es absolutamente contínuo con respescto a B si m_f es absolutamente contínua con respecto a la medida de Lebesgue sobre R; i.e., si y sólo si*

(4.70) $$|I|=0 \Rightarrow m_f(I)=\|E(I)f\|^2=0 .$$

(ii) *Si m_f es singular con respecto a la medida de Lebesgue sobre R i.e., si existe un conjunto de Borel I_0 con $|I_0|=0$ tal que $m_f(I)=m_f(I \cap I_0)$ para todos los conjuntos de Borel $I \subset R$, entonces $f \in K$ es singular con respecto a B.*

Al conjunto de vectores en K que son absolutamente contínuos (singulares) con respecto a B, se denota usualmente como $K_{ac}(B)$ $(K_s(B))$ o simplemente por K_{ac} (K_s) y se llama *subespacio de continuidad absoluta* (*singularidad*) con respecto a B. Una propiedad importante que tienen estos subespacios es que ([KAT]): K_{ac} y K_s son subespacios (cerrados) de K, son complementos ortogonales uno de otro y reducen al operador B. Más aún . K tiene la siguiente descomposición

(4.71) $$K=K_{ac} \oplus K_s .$$

Si $K_{ac}=K$ (o equivalentemente si $K_s=\{0\}$), B se dice que es (espectralmente) absolutamente contínuo. Similarmente, si $K=K_s$, B es (espectralmente) singular. En general, la parte B_{ac} (B_s) se le llama la parte (espectralmente) contínua (singular) de B. Entonces $\sigma_{ac}(B)$ $(\sigma_s(B))$, el espectro absolutamente contínuo (singular) de B, está dado por $\sigma(B_{ac})$ $(\sigma(B_s))$. De esta forma se tiene la siguiente descomposición para el espectro de B ([AMR]):

(4.72) $$\sigma(B)=\sigma_{ac}(B)\cup\sigma_s(B)\ ;$$

Regresando a nuestro problema original, se tienen entonces los siguientes resultados para el operador de elásticidad H_0.

Teorema 4.9.(*i*) *El operador de elásticidad* H_0 *es absolutamente contínuo.* (*ii*) *El espectro de* H_0 *coincide con* $R^+\cup\{0\}$; *i.e.*, $\sigma(H_0)=R^+\cup\{0\}$.

Demostración. Sea $I\subset R^+$ un conjunto de Borel. Entonces la igualdad (4.64), referente a la familia espectral de $E(\lambda)$ del operador H_0, implica que para toda $f\in L^{2,3}(R^3)$

$$(E(I)f,f)=(U^{-1}\chi_I Uf,f)=(\chi_I Uf,Uf)=\int_I (Uf,Uf)_{H_\oplus}\,dp\ .$$

Entonces si $|I|=0$ (la medida de Lebesgue de I), la última expresión implica que $(E(I)f,f)=0$, lo cual demuestra que H_0 es absolutamente contínuo (def.4.8). Esto demuestra (i).

La demostración de (ii) es como sigue. Puesto que H_0 es absolutamente contínuo, entonces el espectro singular de H_0, $\sigma_S(H_0)$, es igual a cero. De esta forma, de acuerdo con la descomposición (4.72), se tiene que

(4.73) $$\sigma(H_0)=R^+\cup\{0\}\ .$$

Q.E.D.

Una consecuencia inmediata del teorema 4.9. y de la ecuación (4.42) es que el intervalo $(-\infty,0)$ pertenece a la resolvente del operador H_0.

CAPITULO V

EL PRINCIPIO DE LIMITE ABSORBENTE PARA EL OPERADOR DE ELASTICIDAD

Sea $R(z)=(H_0-z)^{-1}$ el operador resolvente del operador de elásticidad H_0 definido para $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma(H_0)$. Es de gran interés conocer cuando el operador $R(z)$ toma, en algún sentido, valores límite sobre el eje positivo $\mathbf{R}^+$, obtenidos como límites sobre $R(z)$ cuando $z\longrightarrow\lambda\in R^+$ para $z\in C_{\pm}=\{z\in C:\pm\operatorname{Im}z>0\}$. Puesto que $R^+\subset\sigma(H_0)$ (teorema 4.9.) es claro que tales límites no existen en la topología uniforme de $L(L^{2,3}(R^3),L^{2,3}(R^3))$ (el espacio de todos los operadores acotados de $L^{2,3}(R^3)$ en $L^{2,3}(R^3)$. Sin embargo, como se verá más adelante, tales límites existen si se considera a $R(z)$ como una función que toma valores en una topología óptima de operadores lineales acotados. A este resultado, el cual siguiendo una terminología aceptada, lo llamaremos *Principio de Límite Absorbente*, y es el resultado principal de este capítulo. Antes de enunciar y demostrar dicho principio haremos una discusión de la herramienta matemática a utilizar para ello.

Denotemos por $Q\subset R^n$ a un conjunto abierto y conexo (no vacío) de puntos pertenecientes a R^n, y sea S una superficie suave de dimensión $(n-1)$ perteneciente a la clausura de Q, la cual la denotaremos por $\overline{Q}$. Cuando en Q está dada una función $f(x)$ definida en cada punto (i.e., si la igualdad de las funciones se entiende como la igualdad de sus valores en cada punto), podemos considerar el valor de esta función en S como la función $f|_{x\in S}$, definida en cada punto de S, cuyos valores coinciden con los de $f(x)$ para todo $x \in S$. Si examinamos en Q una función dada a.e., el valor de f en la superficie fijada S se determina de manera no unívoca: ya que la medida exterior de S es cero, la función puede tener en S un valor arbitrario. Sin embargo, en determinado sentido, se puede hablar de los valores que una función, definida a.e., toma en las superficies de dimensión n-1.

Por simplicidad, supongamos que la superficie $S=S(x_n)$ es la intersección de Q con el plano x_n=constante. Sea $f \in L^2(Q)$, entonces por el Teorema de Fubini ([MIJ]), para casi todo x_n existe un valor $f|_{n \in S(x_n)} \in L^2(S)$ de la función f en $S(x_n)$, definido casi siempre en S (la igualdad de las funciones de (n-1)esima variable se entiende como la igualdad de sus valores a.e. en el sentido de la medida (n-1)-dimensional). Entonces el valor que toma en $S(x_n)$ una función contínua en Q, para casi toda x_n, es una función contínua en $S(x_n)$, y el valor que toma en $S(x_n)$ una función de $L^2(Q)$, para casi toda x_n, pertenece a $L^2(S(x_n))$.

Definición 5.1. *Se llama* *__traza__* $f|_S$ *de la función* f *de* C(Q) *(funciones contínuas definidas en* $\overline{Q}$*) en una superficie* (n-1)*-dimensional* S *al valor que toma en esta superficie una función contínua en* $\overline{Q}$*, la cual casi siempre coincide con* f*; i.e., por* *__traza__* *de una función contínua en* S *se entiende al valor extendido unívocamente de la función según la continuidad en* S.

El concepto de traza de una función en S se puede introducir también para las funciones pertenecientes a algunos espacios provistos de normas integrales, en particular, para las funciones de los espacios de Sobolev $H^k(Q)$, cuando $k \geq 1$; donde

$H^k(Q)$=Espacio de todas las funciones pertenecientes a $L^2(Q)$ tales que todas las derivadas generalizadas de estas funciones, hasta el orden k inclusive, pertenecen a $L^2(Q)$.

Como se sabe $H^k(Q)$ es un espacio de Hilbert si lo proveemos con la norma siguiente

$$(5.1)\qquad \|f\|^2_{H^k(Q)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_Q |D^\alpha f|^2 dx;\quad f\in H^k(Q).$$

Mas aun puesto que todos los $H^k(Q)$, $k\ge 1$, están contenidos en $H^1(Q)$, será suficiente introducir el concepto de traza para las funciones en $H^1(Q)$.

Sea S una superficie de clase C^1 definida en $\overline{Q}$, y sea S_1 un trozo simple de S que se proyecta unívocamente en un conjunto abierto y conexo de D del plano $\{x_n=0\}$ y descrito por la ecuación

$$(5.2)\qquad x_n=\phi(x'),\ x'=(x_1,\dots,x_{n-1}),\ \phi(x')\in C^1(\overline{D}).$$

Si suponemos que Q es acotado, entonces existe $a\in R^+$ tal que $Q\subset\{0<x_i<a,\ i=1,2,\dots,n\}$, y sea $f\in C_0^\infty(\overline{Q})$ tal que $f\equiv 0$ en el complemento de $\overline{Q}$. Entonces por el Teorema Fundamental de Cálculo se tiene que

$$f(x)\Big|_{S_1} = f(x',\phi(x')) = \int_0^{\phi(x')} \frac{\partial f(x',\xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n\ ;$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\left|f\big|_{S_1}\right|^2 \le \phi(x') \int_0^{\phi(x')} \left|\frac{\partial f(x',\xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n \le a \int_0^{a} \left|\frac{\partial f(x',\xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n\ .$$

Multiplicando esta desigualdad por $\left[1+\sum_{n=1}^{n-1} \left(\frac{\partial^k\phi}{\partial\phi^k}\right)^2\right]^{1/2}$ e integrando en D, obtenemos la desigualdad

(5.3) $$\|f\|^2_{L^2(S_1)} = \int_{S_1} |f|_{S_1}|^2 dS_1 \leq C^2 \|f\|^2_{H^1(Q)}.$$

donde C>0 es una constante que no depende de la función f.

Ya que la superficie S puede ser cubierta por un número finito de trozos simples, i.e., trozos del tipo S_1 (que se proyectan quizas en otros planos coordenados), sumando las desigualdades correspondientes (5.3), obtendremos la desiguaidad

(5.4) $$\|f\|_{L^2(S)} \leq C \|f\|_{H^1(Q)} ;$$

donde la constante C no depende de la función f.

Hay que hacer notar que la desigualdad (5.4) se cumple también para toda función $f \in C^1(\overline{Q})$ y tal que $\partial Q \in C^1$ (teo.1, p.2, §4, cap. III [MIJ]).

Sea $f \in C^1(Q)$, entonces existe una sucesión de funciones $f_p(x)$; p=1,2,...; de $C^1(\overline{Q})$ que converge en la norma de $H^1(Q)$ hacia f. Para las funciones $f_p - f_q$ la desigualdad (5.4) toma la forma

(5.5) $$\|f_p - f_q\|_{L^2(Q)} \leq C \|f_p - f_q\|_{H^1(Q)}.$$

Como $\|f_p - f_q\|_{H^1(Q)} \longrightarrow 0$ cuando $p,q \longrightarrow \infty$. también se tiene que $\|f_p - f_q\|_{L^2(S)} \longrightarrow 0$ cuando $p,q \longrightarrow \infty$. Esto implica que la sucesión de las trazas $f_p|_S$ de las funciones f_p en S es de Cauchy en $L^2(S)$, y puesto que $L^2(S)$ es completo, existe $f_S \in L^2(S)$ tal que $f_p|_S \longrightarrow f_S$ cuando $p \longrightarrow \infty$. Tomando el límite cuando $p \longrightarrow \infty$ en la desigualdad (5.5), obtenemos

(5.6) $$\|f_q - f_S\|_{L^2(S)} \leq C \|f_q - f\|_{H^1(Q)} .$$

Demostremos la unicidad de f_S. Sea $g_k(x)$; k=1,2,...; otra sucesión de funciones de clase $C^1(\overline{Q})$ para la cual $\|f - g_k\|_{H^1(Q)} \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$, y sea

$g_S(x)$ el límite en la norma de $L^2(S)$ para la sucesión $g_k|_S$; $k=1,2,\dots$; entonces por las desigualdades (5.5) y (5.6) se tiene que

$$\|f_S-g_S\|_{L^2(S)} \le \|f_S-f_q\|_{L^2(S)} + \|f_q-g_q\|_{L^2(S)} + \|g_q-g_S\|_{L^2(S)}$$
$$\le C\left(\|f-f_q\|_{H^1(Q)} + \|f_q-g_q\|_{H^1(Q)} + \|g_q-g_S\|_{H^1(Q)}\right).$$

Puesto que el segundo miembro de la desigualdad tiende a cero cuando $q \longrightarrow \infty$, resulta que $f_S=g_S$.

Definición 5.2. *A la función* $f_S(x)$ *(como elemento de* $L^2(S)$*) la llamaremos la* *__traza__* *de la función* $f(x)\in H^1(Q)$ *en la superficie S y la designaremos por* $f|_S$ *(a* $\|f|_S\|_{L^2(S)}$ *la designaremos por* $\|f\|_{L^2(S)}$*).*

De esta forma el concepto de traza de una función se ha determinado para cualquier elemento $f\in H^1(Q)$.

Observemos que este concepto es realmente una generalización del concepto del valor de una función en una superficie de dimensión $n-1$. En efecto, por simplicidad, sea $S=S(x_n)$ la intersección del dominio Q con el plano x_n=constante. y sea $f\in H^1(Q)$. Tomemos una sucesión f_m; $m=1,2,\dots$; de funciones en $C^1(\overline{Q})$ que en la norma del espacio $H^1(Q)$ converge hacia f. Según la definición 5.2, el papel de traza $f|_{S(x_n)}$, para todo x_n, lo desempeña en $L^2(S(x_n))$ la sucesión de funciones $f_m|_{S(x_n)}$. Puesto que la sucesión f_m converge en $L^2(Q)$ hacia f, entonces se puede escoger una subsucesión f_{m_k}; $k=1,2,\dots$; que converge a f a.e. en Q; i.e., para casí todo x_n la subsucesión $f_{m_k}|_{S(x_n)}$; $k=1,2,\dots$; converge hacia el valor de la función f en $S(x_n)$ a.e. en el sentido de la medida $(n-1)$-dimensional. Por lo tanto, la traza y el valor de la función f en $S(x_n)$ coinciden para casí todo x_n.

Por otro lado la traza $f|_S$ de la función $f \in H^1(Q)$ satisface la desigualdad (5.4). Para demostrar esta afirmación, es suficiente que en la desigualdad (5.4) escrita para las funciones $f_p \in C^1(\bar{Q})$ tomar el límite cuando $p \longrightarrow \infty$.

En resumen, se ha demostrado el siguiente teorema.

Teorema 5.3. *Sea S una superficie de dimensión $n-1$ compacta y clase C^1. Entonces toda función $f \in H^1(Q)$ tiene en esta superficie una traza $f|_S$, perteneciente a $L^2(S)$ y además se cumple la desigualdad (5.4).*

Sea $f \in H^k(Q)$, $k>1$. Como toda derivada generalizada $D^\alpha f$, $|\alpha|<k$, pertenece a $H^1(Q)$, entonces, de acuerdo al teorema 5.3., en cualquier superficie de dimension $n-1$ compacta y de clase C^1 existe una traza de esta derivada: $D^\alpha f|_S \in L^2(S)$. Además se cumplen las siguientes desigualdades

(5.7)
$$\|D^\alpha f\|_{L^2(S)} \leq C\|f\|_{H^{|\alpha|+1}(Q)} \leq C\|f\|_{H^k(Q)};$$

donde la constante $C>0$ no depende de la función f.

Para nuestro estudio es conveniente usar algunos espacios adicionales. Si $\alpha \in R$, denotamos por $L^2_\alpha(R^3)$ al espacio definido por

(5.8)
$$L^2_\alpha(R^3)=\{f \in L^2(R^3)/(1+|x|^2)^{\alpha/2} f \in L^2(R^3)\}.$$

Si definimos sobre $L^2_\alpha(R^3)$ el producto escalar

(5.9)
$$(f,g)_{L^2_\alpha(R^3)}=\int_{R^3}(1+|x|^2)^\alpha f(x)g^*(x)dx \ ;$$

con $f,g \in L^2_\alpha(R^3)$, entonces $L^2_\alpha(R^3)$ es un espacio de Hilbert. Definimos también los espacios de Hilbert $H_\alpha(R^3)$, $\alpha \in R$, como la cerradura de $C^0_\infty(R^3)$ en la norma

(5.10)
$$\|f\|_{H_\alpha(R^3)}=\|F^{-1}(1+p^2)^{\alpha/2}Ff\|_{L^2(R^3)};$$

donde $f\in C^0_\infty(R^3)$ y F es la transformada de Fourier en $L^2(R^3)$.

Antes de enunciar el correspondiente teorema de traza para las ecuaciones de elásticidad en medios homogéneos, recordemos cuando se dice que una función es Hölder contínua.

Definición 5.4. *Sean* X *y* Y *dos espacios normados y definamos una función* $f:X\longrightarrow Y$. *Entonces* f *se dice que es* <u>*Hölder continua con exponente β*</u> *si*

$$\|f(x)-f(y)\|_Y \leq K\ \|x-y\|^{\beta}_X;$$

para toda x,y *en el dominio de definición de* f.

Teorema 5.5.(*Teorema de Traza*) *Para cada* $\alpha>1/2$, $\rho\in R^+\cup\{0\}$, *y cada* $n=1,2,3$, *existe un operador de traza* $T_n(\rho)$, *acotado de* $H_\alpha(R^3)$ *en* $L^2(S_n)$ *tal que*

$$(T_n(\rho)\phi)(\theta_n)=\phi(\rho\theta_n); \tag{5.11}$$

para cada $\phi\in C^0_\infty(R^3)\cap H_\alpha(R^3)$, *donde* ρ *y* θ_n *están dados por la ec.*(4.56) *y* S_n *está definida en la ec.*(4.53). *Mas aun* $T_n(\cdot)$ *es un mapeo Hölder contínuo de* $R^+\cup\{0\}$ *en* $L(H_\alpha(R^3),L^2(S_n))$ *con exponente*

$$\gamma=\begin{cases}\alpha-1/2, & \text{si } \alpha<3/2;\\ 1-\delta,\ \delta>0 \text{ y arbitrariamente pequeño, si } \alpha=3/2; & \\ 1, & \text{si } \alpha>3/2.\end{cases} \tag{5.12}$$

El teorema de traza enunciado de esta forma es un caso particular del teorema de traza enunciado por R. Weder ([WE1]), la diferencia radica en la regularidad de las supeficies de lentitud consideradas. En efecto, podemos distinguir dos tipos de superficies de lentitud.Si la igualdad nunca se cumple en la ecuación (4.3), i.e., si los mantos de la superficie de lentitud sólo se juntan en el origen, entonces la superficie de lentitud se llama *regular*. Por otro lado, si los mantos de la superficie de lentitud se encuentran en uno o más generadores de esta superficie, a esta la llamaremos *singular*. El caso singular es el que genera la diferencia entre los teoremas ya señalados, ya que como es bien conocido ([DUF]) el caso regular consiste de tres mantos (acotados) concéntricos que no se intersectan, mientras que en el caso singular se tienen puntos en común, los cuales son llamados *puntos múltiples* de la superficie de lentitud, y en dichos puntos las superficies de lentitud son singulares.

Continuando con nuestro análisis, definamos el operador $B_{n,\alpha}(\rho)$, $\rho\in\mathbf{R}\cup\{0\}$, $\alpha>1/2$, de $L^{2,3}(R^3)$ en H_n (ec.(4.59)) como

(5.13) $$B_{n,\alpha}(\rho)f=\rho P_n(\theta_n)T_n(\rho)(\tilde{\Phi}\xi_\alpha f)(\theta_n);$$

donde $n=1,2,3$, y $\xi_\alpha=(1+|x|^2)^{-\alpha/2}$. Entonces del teorema de traza 5.5., se sigue que

(5.14) $$B_{n,\alpha}(\cdot):R^+\cup\{0\}\longrightarrow L(L^{2,3}(R^3),H_n)$$

es una funcion Hölder contínua con exponente γ dado en (5.12). De esta forma para $\rho\in R^+\cup\{0\}$ definamos el operador

(5.15) $$B_\alpha(\rho)f=B_{1,\alpha}(\rho)f+B_{2,\alpha}(\rho)f+B_{3,\alpha}(\rho)f.$$

Notemos que $B_\alpha(\cdot):R^+\cup\{0\}\longrightarrow L(L^{2,3}(R^3),H_\oplus)$ es una función que también es Hölder contínua con exponente γ. Entonces de las ecuaciones (4.63) y (5.15) de sigue que

(5.16) $$(U\xi_\alpha f)(\rho,\bar{\theta})=(B_\alpha(\rho)f)(\bar{\theta});$$

y

$$(UH\xi_\alpha f)(\rho,\theta)=\rho(B_\alpha(\rho)f)(\theta); \tag{5.17}$$

para $f\in D(H)$. Mas aun, para $z\in C_\pm$ y cada intervalo compacto $I_\lambda \subset R^+ \cup \{0\}$, tal que λ es un punto interior de I_λ, se sigue que

$$\xi_\alpha R(z)\xi_\alpha=\int_{I_\lambda} \frac{1}{\rho-z} B_\alpha^*(\rho)B_\alpha(\rho)d\rho + \xi_\alpha R(z)P(I_\lambda^\sim)\xi_\alpha; \tag{5.18}$$

donde $I_\lambda^\sim$ denota el complemento de I_λ relativo a $R^+\cup\{0\}$.

Finalmente, denotamos por $L_\alpha^{2,3}(R^3)=\bigoplus_{i=1}^{3} L_\alpha^2(R^3)$ y por

$$H^2_\alpha(R^3)=\{f\in H^2(R^3)/(1+|x|^2)^{\alpha/2}f\in H^2(R^3)\}; \tag{5.19}$$

con norma definida por

$$\|f\|_{H^2_\alpha(R^3)}=\|(1+|x|^2)^{\alpha/2}f\|_{H^2(R^3)}; \tag{5.20}$$

donde $\alpha\in R$. Asi mismo definimos $H^{2,3}_\alpha(R^3)=H^2_\alpha(R^3)\oplus H^2_\alpha(R^3)\oplus H^2_\alpha(R^3)$.

Todo lo anterior nos permite enunciar el siguiente principio.

Teorema 5.6. (*Principio de Límite Absorbente*). *Para cada* $\lambda\in R^+\cup\{0\}$, *los siguientes límites*

$$R^\pm(\lambda\pm i0)=\lim_{\epsilon\downarrow 0} R(\lambda\pm i\epsilon) \tag{5.21}$$

existen en la topologiá en $L(L^{2,3}_\alpha(R^3),H^{2,3}_{-\alpha}(R^3))$ *para cada* $\alpha>1/2$, *y las funciones*

$$R^\pm(z)=\begin{cases} R(z), & z\in C_\pm \cup R^+ \\ R(z\pm i0), & z\in R^+ \end{cases} \tag{5.22}$$

son localmente contínuas en $L(L^{2,3}{}_{\alpha}(R^3),H^{2,3}{}_{\alpha}(R^3))$ *con exponente* γ *dado en la ecuación* (5.12).

La parte más importante en la demostración del teorema anterior es investigar el comportamiento de una integral del tipo

(5.23) $$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Upsilon}\frac{\phi(t)}{t-z}\,dt;$$

cerca de una curva de integración Υ, donde Υ es una curva suave la cual consiste de un número finito de contornos o arcos los cuales no se intersectan uno a otro y que son de longitud finita.

Como se sabe ([MUK],[PRO]), el valor principal de la integral de Cauchy $\Psi(z)$ existe para cualquier función Hölder contínua $\phi(t)$ y para $z\in\Upsilon$ (para z en el complemento de Υ, la integral existe en sentido común); i.e., el límite

(5.24) $$\int_{\Upsilon}\frac{\phi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Upsilon-\Upsilon_{\epsilon}}\frac{\phi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau;$$

existe, con $t\in\Upsilon$ y donde $\Upsilon_{\epsilon}=\{z\in C/|z-t|<\epsilon\}\cap\Upsilon$. Mas aun se tiene que

(5.25) $$\int_{\Upsilon}\frac{\phi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\int_{\Upsilon}\frac{\phi(\tau)-\phi(t)}{\tau-t}\,d\tau+i\pi\phi(t);$$

donde, obviamente, la integral del miembro derecho de la ec.(5.25) es absolutamente convergente. En particular, para $\phi(t)\equiv 1$ obtenemos

(5.26) $$\int_{\Upsilon}\frac{d\tau}{\tau-t}=\pi i.$$

La integral

$$(5.27) \qquad (\Lambda\phi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{T}\frac{\phi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau;$$

con $t\in T$, se llama *integral singular de Cauchy*. Al operador Λ definido por la ecuación (5.27) se llama *operador singular*. Las propiedades más importantes del operador Λ son las siguientes ([MUK],[PRO]).

Lema 5.7.(i) *Sea $\phi(t)$ una función Hölder contínua sobre T, entonces el operador Λ es contínuo sobre T por la izquierda y por la derecha.*
(ii) *Sea $\phi(t)$ una función Hölder contínua sobre T, entonces el operador Λ tambien es Hölder contínuo en toda la curva T.*

El anterior lema se conoce en la literatura ([MUK],[PRO]) como *Teorema de Privalov-Plemelj*. La extensión del teorema de Privalov-Plemelj a espacios L^p, $1<p<\infty$, está dada como sigue ([PRO]).

Lema 5.8.(i). *La integral singular de Cauchy (5.27) existe para cada función integrable ϕ definida sobre T y casí todos los puntos $t\in T$, y el operador Λ definido por esta integral es un operador acotado en el espacio $L^p(T)$, $1<p<\infty$.*
(ii) *Sea $\phi(t)$ una función Hölder contínua sobre T, entonces el operador Λ es también Hölder contínuo sobre $L^p(T)$, $1<p<\infty$.*

Demostración del Teorema 5.6. La demostración de este teorema se sigue inmediatamente de los lemas 5.7. y 5.8. En efecto, la existencia de los límites (5.21) en la topología uniforme de $L(L^{2,3}_{\alpha},H^{2,3}_{-\alpha})$ se sigue del hecho de que $B_{\alpha}(\cdot)$ es una función localmente Hölder contínua y además se cumple que

$$(5.28)\qquad \xi_\alpha R^{\pm}(\lambda \pm i0)\xi_\alpha = \mathrm{p.v.}\int_{I_\lambda} \frac{1}{\rho-\lambda} B^*_\alpha(\rho) B_\alpha(\rho)\, d\rho$$

$$= i\pi B^*_\alpha(\lambda) B_\alpha(\lambda) + \xi_\alpha R(\lambda) P(I_\lambda^{\sim})\xi_\alpha;$$

donde p.v. denota el valor principal de la integral. La continuidad de Hölder para la expresión dada en (5.22) es consecuencia inmediata del teorema de Privalov-Plemelj.

Q.E.D.

CAPITULO VI
LAS ECUACIONES DE ELASTICIDAD EN EL CASO INHOMOGENEO

Como se vió en el capítulo I, las ecuaciones de elásticidad en el caso homogéneo tienen una expresión de la forma

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijlm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l}; \tag{6.1}$$

en donde los elementos del tensor C_{ijlm}; $i,j,l,m=1,2,3.$, son constantes. Si éste no es el caso; i.e., en el caso en que los elementos C_{ijlm} dependen de la posición $x \in R^3$, entonces las ecuaciones (6.1) no son válidas. Para ver cuales son las nuevas ecuaciones, retomemos las ecuaciones (1.3), (1.6) y (1.12), donde ahora se considerará que $C_{ijlm}=C_{ijlm}(x)$; $x \in R^3$:

$$\gamma_{lm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right); \tag{6.2}$$

$$\tau_{ij} = C_{ijlm}(x)\gamma_{lm}; \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \tag{6.4}$$

Sustituyendo las ecuaciones (6.2) y (6.3) en las ecuaciones (6.4), se obtienen las ecuaciones de elásticidad en el caso en el que $C_{ijlm}=C_{ijlm}(x)$, las cuales están dadas por

(6.5) $$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijlm}(x)\,\frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right).$$

A los sistemas físicos gobernados por las ecuaciones (6.5) los llamaremos *medios elásticos anisotrópicos e inhomogéneos.*

Debido a que las propiedades físicas de los medios elásticos anisotrópicos e inhomogéneos están enteramente contenidas en los elementos del tensor $C_{ijlm}(x)$, y que tales propiedades representan cantidades finitas, se hará la siguiente suposición

(6.6) para toda $x \in R^3$, existen $\mu, \nu \in R^+$ tal que $\mu C_{ijlm} \leq C_{ijlm}(x) \leq \nu C_{ijlm}$.

Con el fin de estudiar las ecuaciones (6.5) hagamos uso de la siguiente notación abreviada, la cual se basa en las propiedades de simetría (1.10):

(6.7)
$$\begin{array}{c} 1,1 \longrightarrow 1 \\ 2,2 \longrightarrow 2 \\ 3,3 \longrightarrow 3 \\ 2,3 \text{ y } 3,2 \longrightarrow 4 \\ 1,3 \text{ y } 3,1 \longrightarrow 5 \\ 1,2 \text{ y } 2,1 \longrightarrow 6 \end{array}$$

Con esta nueva notación la energía elástica definida por (1.11) toma la forma

(6.8) $$\Phi(x) = \frac{1}{2}\, C_{\alpha\beta}(x)\,\gamma_\alpha \gamma_\beta;$$

y haciendo uso de la suposición (6.6) se tiene que

(6.9) $$\Phi(x) > 0;$$

o equivalentemente

(6.10) $$C_{\alpha\beta}(x)\gamma_\alpha\gamma_\beta>0,\ \gamma_\alpha\in R;\ \alpha=1,2,\ldots,6.$$

Además puesto que $C_{\alpha\beta}(x)$ tiene propiedades de simetría con respecto a los subíndices α y β (ec.(1.10)), y sus componentes son elementos de R, se tiene que la ec.(6.10) es equivalente a

(6.11) $$C_{\alpha\beta}(x)\gamma_\alpha\gamma_\beta>0,\ \text{para toda}\ \gamma_\alpha\in C;\ \alpha=1,2,\ldots,6;$$

i.e., la matriz $C(x)$ de 6×6, cuyas componentes están dadas por $C_{\alpha\beta}(x)$, define un operador positivo en C^6.

Por otro lado, definamos las matrices $E^{l,m}(x)$; $l,m=1,2,3$; cuyas componentes están dadas por

(6.12) $$(E^{l,m}(x))_{i,j}=C_{ijlm}(x);\ i,j,l,m=1,2,3.$$

Lema 6.1. *Las matrices* $E^{l,m}(x)$, *con componentes definidas en* (6.12), *son matrices hermitianas, i.e.,* $E^{l,k}(x)$ *son iguales a su transpuesta conjugada.*

Demostración. La demostración se sigue inmediatamente de la ec.(1.10) y del hecho de que las componentes del tensor $C_{ijlm}(x)$ tiene componentes reales.

Q.E.D.

De esta forma, las ecuaciones de elásticidad para medios anisotrópicos e inhomogéneos son equivalentes a

(6.13) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{l,m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_l}\left\{E^{l,m}(x)\frac{\partial u}{\partial x_m}\right\};$$

donde $u=u(x,t)\in C^3$, $x\in R^3$, $t\in R$.

Para hacer un estudio profundo de la ecuación (6.13) es necesario introducir el concepto de forma cuadrática. Este concepto y los resultados más generales del mismo serán descritos en lo que sigue ([RE1]).

Definicion 6.2. *Una* *<u>forma cuadrática</u>* *es un mapeo* $q:Q(q)\times Q(q)\longrightarrow \mathbb{C}$, *donde* $Q(q)$ *es un subespacio lineal denso de un espacio de Hilbert* Π. *A* $Q(q)$ *se le llama* *<u>dominio de la forma cuadrática</u>*. *La forma* q *es tal que* $q(\cdot,\psi)$ *es conjugado lineal y* $q(\phi,\cdot)$ *es lineal para* $\phi,\psi\in Q(q)$. *Si* $q(\phi,\psi)=q^*(\phi,\psi)$, *entonces* q *se llama* *<u>simétrica</u>*. *Si* $q(\phi,\phi)\geq 0$ *para toda* $\phi\in Q(q)$, *entonces* q *se llama* *<u>positiva</u>*; *y si* $q(\phi,\phi)\geq -M\|\phi\|^2$, *para alguna* M, *entonces* q *se dice que es* *<u>semiacotada</u>*.

Claramente si q es semiacotada, entonces q es automáticamente simétrica si Π es un espacio de Hilbert complejo.

Para investigar la conexión entre operadores autoadjuntos y formas cuadráticas semiacotadas es necesario también introducir la noción de cerradura. Un operador A es *cerrado* si su dominio $D(A)$ es completo bajo la norma $\|\phi\|_A=\|A\phi\|+\|\phi\|$. Análogamente, se tiene la siguiente definición.

Definición 6.3. *Sea* q *una forma cuadrática semiacotada. La forma cuadrática* q *se llama* *<u>cerrada</u>* *si* $Q(q)$ *es completa bajo la norma*

$$\|\phi\|^2_{+1}=q(\phi,\phi)+(M+1)\|\phi\|^2. \tag{6.14}$$

Si q *es cerrada y* $D\subset Q(q)$ *es denso en* $Q(q)$ *en la norma* $\|\cdot\|_{+1}$, *entonces* D *se llama* *<u>el núcleo de la forma para</u>* q.

Notemos que $\|\cdot\|_{+1}$ proviene del producto escalar

$$(\phi,\psi)_{+1}=q(\phi,\psi)+(M+1)(\phi,\psi). \tag{6.15}$$

Además, si q es cerrada, entonces ésto es equivalente a decir que para cualquier sucesión $\phi_n \in Q(q)$, $\phi_n \longrightarrow \phi$ y $q(\phi_n-\phi_m,\phi_n-\phi_m)\longrightarrow 0$, cuando $n,m\longrightarrow\infty$; entonces $\phi \in Q(q)$ y $q(\phi_n-\phi,\phi_n-\phi)\longrightarrow 0$, cuando $n\longrightarrow\infty$.

Un resultado importante entre formas cuadráticas y operadores autoadjuntos es el siguiente([RE1], Teo.VIII.15).

Teorema 6.4. *Si q es una forma cuadrática semiacotada y cerrada, entonces q es la forma cuadrática de un único operador autoadjunto.*

De esta forma, a partir de la parte espacial de la ecuación (6.13) se sugiere definir (formalmente) la siguiente forma cuadrática

$$(6.16) \qquad e(u,v)=\sum_{l,m=1}^{3}\left(E^{l,m}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_m},\frac{\partial v}{\partial x_l}\right);$$

donde

$$(6.17) \qquad (u,v)=\int_{R^3} u(x)\,v^*(x)\,dx\ ;\ u,v\in C^3.$$

Como consecuencia inmediata del lema 6.1. y de la relación (6.17), se tiene que

(6.18) $\qquad e(u,v)$ es una forma simétrica; i.e.,$e(u,v)=e^*(v,u)$;

(6.19) $\qquad$ para toda $\alpha,\beta\in C$, $e(\alpha u+\beta v,w)=\alpha e(u,w)+\beta e(u,w)$;

(6.20) $\qquad$ para toda $\alpha,\beta\in C$, $e(u,\alpha v+\beta w)=\alpha^* e^*(u,v)+\beta^* e^*(v,u)$.

Mas aun

$$(6.21) \quad e(u,u)=\sum_{l,m=1}^{3}\left(E^{l,m}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_m},\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)=\int_{R^3} C_{ijlm}(x)\,\frac{\partial u_i}{\partial u_m}\left(\frac{\partial u_j}{\partial u_l}\right)^* dx =$$

$$=\frac{1}{4}\int_{R^3} C_{ijlm}(x)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_m}+\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right)^{*} dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_{R^3} C_{\alpha\beta}(x)v_{\alpha}v^{*}_{\beta}\, dx \geq \frac{1}{4}\int_{R^3}(C(x)v,v)\, dx.$$

Si denotamos por C a la matriz cuyas componentes son $C_{\alpha\beta}$. Entonces de la suposición (6.6) y de (6.21) se sigue que

$$e(u,u)=\frac{1}{4}\int_{R^3}(C(x)v,v)\, dx \geq \frac{1}{4}\int_{R^3}(Cv,v)\, dx \geq \frac{\lambda_{min}}{4}\int_{R^3}(v,v)\, dx \geq 0; \tag{6.22}$$

donde λ_{min} es el mínimo eigenvalor de la matriz C y el cual se puede obtener a partir de la ecuación de Christoffel (2.11). Si $e(u,u)=0$, entonces de la ec.(6.22) se obtiene que $v_{\alpha}(x)\equiv 0$; i.e.,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\equiv 0; \tag{6.23}$$

y en particular

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\equiv 0. \tag{6.24}$$

De esta forma, si $u\in L^{2,3}(R^3)$, entonces de (6.24) se tiene que $u\equiv 0$.

En realidad lo que se ha hecho al deducir las ecuaciones (6.16)-(6.24) es demostrar el siguiente lema.

Lema 6.5. *La forma cuadrática $e(u,v)$ es una forma simétrica y positiva con dominio el espacio de Sobolev $H^1(R^3,C^3)=H^1(R^3)\oplus H^1(R^3)\oplus H^1(R^3)$.*

Una consecuencia inmédiata del teorema 6.4. y del lema 6.5. es que $e(\cdot,\cdot)$ es la forma cuadrática asociada a un único operador autoadjunto, el cual designaremos por H. Además, como $e(\cdot,\cdot)$ es positiva, H es necesariamente un operador positivo. De todo lo anterior se sigue que

$$e(u,v)=(Hu,v); \tag{6.25}$$

para toda $u \in D(H) \subset H^1(R^3,C^3)$ y todo $v \in H^1(R^3,C^3)$. Mas aun el perador H es una extensión autoadjunta del operador diferencial

$$\sum_{l,m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_l}\left\{ E^{l,m}(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_m} \right\}; \tag{6.26}$$

con dominio el espacio de Sobolev $H^2(R^3,C^3)$. El operador H es el *cperador elástico en el caso inhomogéneo.*

APENDICE

EL TEOREMA ESPECTRAL

En esta apéndice discutiremos el Teorema Espectral en sus diferentes formas, ya que existen varias formulaciones aparentemente diferentes de este teorema, pero en algún sentido todas son equivalentes. Este teorema juega un papel fundamental en todo este trabajo de tesis ya que es una descripción concreta para todos los operadores autoadjuntos.

Una de las formulaciones mas utilizadas en toda la tesis es aquella que nos dice que cada operador autoadjunto A es un operador de multiplicación. Esto significa que dado un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, siempre podemos encontrar una medida μ sobre un espacio M y un operador unitario $U:\mathcal{H}\longrightarrow L^2(M,d\mu)$ tal que

$$(UAU^{-1}f)(x)=F(x)f(x); \tag{a.1}$$

para alguna función medible F definida sobre M.

La formulación anterior claramente es una generalización del teorema de diagonalización de matrices en dimensión finita, el cual nos dice que cada matriz autoadjunta de $n\times n$ puede ser diagonalizada; i.e., dado un operador autoadjunto A sobre un espacio vectorial complejo V de dimension finita, existe un operador unitario $U:V\longrightarrow \mathbb{C}^n$ y numeros reales $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ tal que

$$(UAU^{-1}f)_i=\lambda_i f_i; \tag{a.2}$$

para cada $f=(f_1,\cdots,f_n)\in\mathbb{C}^n$.

La anterior formulación se puede enunciar de la siguiente forma.

Teorema a.1. (*Teorema Espectral Formulado como Operador de Multiplicación*) *Sea* A *un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert separable* Π *con dominio* D(A). *Entonces existe un espacio medible* $\langle M,\mu\rangle$, *con* μ *una medida finita, un operador unitario* $U:\Pi\longrightarrow L^2(M,d\mu)$ *y una función* f *a valores reales, definida sobre* M, *la cual es finita a.e. y tal que*

(i) $\psi\in D(A) \iff f(\cdot)(U\psi)(\cdot)\in L^2(M,d\mu)$.

(ii) *Si* $\psi\in U[D(A)]$, *entonces* $(UAU^{-1}\psi)(m)=f(m)\psi(m)$.

Omitiremos la demostración de este teorema ya que sólo nos interesa mostrar las equivalencias entre esta formulación y otras, sin embargo la demostración de éste se puede consultar en [RE1].

Existe una forma natural para definir funciones de un operador autoadjunto usando el teorema anterior. Dada una función de Borel acotada sobre **R** definamos

$$h(A)=U^{-1}T_{h(f)}U; \tag{a.2}$$

donde $T_{h(f)}$ es un operador sobre $L^2(M,d\mu)$ el cual actúa como multiplicación por la función h(f(m)). Usando esta definición el siguiente teorema se sigue facilmente del teorema a.1.

Teorema a.2. (*Teorema Espectral Forma de Cálculo Funcional*) *Sea* A *un operador autoadjunto sobre* Π. *Entonces existe un único mapeo* $\phi^{\wedge}$ *de las funciones acotadas de Borel sobre* **R** *en* $L(\Pi)$ *tal que*

(i) $\phi^{\wedge}$ *es un x-homomorfismo algebráico; i.e.,*

$$\phi^{\wedge}(fg)=\phi^{\wedge}(f)\phi^{\wedge}(g),\ \phi^{\wedge}(\lambda f)=\lambda\phi^{\wedge}(f);$$
$$\phi^{\wedge}(1)=I,\ \phi^{\wedge}(f^{*})=(\phi^{\wedge}(f))^{*}.$$

(ii) $\phi^{\wedge}$ *es contínuo en norma; i.e.,* $\|\phi^{\wedge}(h)\|_{L(\Pi)}\leq\|h\|_{\infty}=\sup|h(x)|$.

(iii) *Sea* $h_n(x)$ *una sucesión de funciones de Borel acotadas con* $h_n(x) \longrightarrow x$, *cuando* $n \longrightarrow \infty$, *para cada* x *y* $|h_n(x)| \leq |x|$ *para toda* x *y* n. *Entonces, para cualquier* $\psi \in D(A)$, $\phi^{\wedge}(h_n)\psi \longrightarrow A\psi$, *cuando* $n \longrightarrow \infty$.

(iv) *Si* $h_n(x) \longrightarrow h(x)$ *puntualmente y si la sucesión* $\|h_n\|_\infty$ *es acotada, entonces* $\phi^{\wedge}(h_n) \longrightarrow \phi^{\wedge}(h)$ *fuertemente.*

(v) *Si* $A\psi = \lambda\psi$, $\phi^{\wedge}(h)\psi = h(\lambda)\psi$.

(vi) *Si* $h \geq 0$, *entonces* $\phi^{\wedge}(h) \geq 0$.

El cálculo funcional es muy útil, por ejemplo nos permite definir la exponencial $\exp(itA)$ y demostrar facilmente muchas de sus propiedades como una función de t (para ejemplos más particulares relacionados con propagación de ondas ver por ejemplo [DOM]). En el caso de que A sea acotado no necesitamos el cálculo funcional para definir la exponencial, puesto que podemos definir $\exp(itA)$ por la serie de potencias la cual converge en norma.

El cálculo funcional también nos proporciona una forma de construir medidas espectrales. En efecto, si ψ es un vector cicilíco; i.e., si $\{g(A)\psi / g \in C_\infty(R)\}$ es denso en $\prod$, entonces es posible representar a $\prod$ como $L^2(R, d\mu_\psi)$, donde μ_ψ es la medida que satisface

$$\text{(a.4)} \qquad \int_R g(x)\, d\mu_\psi(x) = (\psi, g(A\psi);$$

de tal forma que A se transforma en el operador de multiplicación por x. En general, $\prod$ se descompone en una suma directa de subespacios cicilícos tal que el espacio medible, M, en el teorema a.1. puede ser realizado como una unión de copias de R.

Finalmente, el Teorema Espectral en su forma de medida a valores en un espacio de proyectores se sigue facilmente del cálculo funcional. Sea $P(\Omega)$ el operador $\chi_\Omega(A)$ donde χ_Ω es la función característica del conjunto medible $\Omega \subset R$. La familia de operadores $\{P(\Omega)\}$ tiene las siguientes propiedades.

(i) Cada $P(\Omega)$ es una proyección ortogonal.

(ii) $P(\emptyset)=0$, $P((-\infty,\infty))=I$.

(iii) Si $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ con $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$ si n y m son distintos, entonces

$$P(\Omega)=\text{s-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} P(\Omega_n).$$

(iv) $P(\Omega_1)P(\Omega_2)=P(\Omega_1 \cap \Omega_2)$.

Esta familia se llama *medida a valores en proyectores* (p.v.m). Para $\phi \in \mathcal{H}$, $(\phi, P(\Omega)\phi)$ es una bien definida medida de Borel sobre R la cual denotaremos por $d(\phi, P(\Omega)\phi)$. La medida compleja $d(\varphi, P(\lambda)\psi)$ se define por polarización. Entonces dada una función g de Borel acotada podemos definir $g(A)$ por

$$(\phi, g(A)\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, d(\phi, P(\lambda)\phi). \tag{a.5}$$

No es dificil demostrar que el mapeo que manda g a $g(A)$ tiene las propiedades (i)-(iv) del teorema a.2. Por otro lado, supongamos que una función de Borel no acotada a valores complejos y sea

$$D_g = \{\varphi / \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2\, d(\phi, P(\lambda)\phi) < \infty\}. \tag{a.6}$$

Entonces, D_g es denso en $\prod$ y $g(A)$ está definido sobre D_g por

$$(a.7) \qquad (\phi, g(A)\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) d(g, P(\lambda)\phi).$$

Para simplificár la notación escribamos simbólicamente

$$(a.8) \qquad g(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) dP(\lambda).$$

En particular, para $\phi, \psi \in D(A)$

$$(a.9) \qquad (\phi, A\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(\phi, P(\lambda)\psi).$$

Si g es a valores reales, entonces $g(A)$ es autoadjunto sobre D_g.

Resumiendo,

Teorema a.3.(*Teorema Espectral Forma P.V.M.*) *Existe una correspondencia uno a uno entre operadores autoadjuntos* A *y medidas* p.v.m. $\{P(\Omega)\}$ *sobre* $\prod$, *la correspondencia está dada por*

$$(a.10) \qquad A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dP(\lambda).$$

Si $g(\cdot)$ *es una función de Borel a valores reales sobre* **R**, *entonces*

$$(a.11) \qquad g(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) dP(\lambda);$$

definida sobre D_g, *es autoadjunto. Si* g *es acotada,* $g(A)$ *coincide con* $\phi^{\wedge}(g)$ *en el teorema a.2.*

BIBLIOGRAFIA

[AGM] Agmon, Sh. Spectral Properties of Schrödinger Operators in Scattering Theory. Ann. de la Scuola Norm. Sup. di Pissa. Ser. IV 2 (1975), 151-218.

[AMR] Amrein, W.O., Jauch, J.M. and Sinha, K.B. Scattering Theory in Quantum Mechanics. Benjamin, 1977.

[AUL] Auld, B. A. Acoustic Fields and Waves in Solids. J Wiley, 1973.

[BOC] Bochner, S. and Chandrasekharan, K. Fourier Transforms. Ann. of Math. Studies, No.19 Princeton Univ. Press, 1949.

[DER] Dermejian, Y. et Guillot, J. C. Théeorie Spectrale de Propagation des Ondes Acoustiques dans un Milieu Stratifié Perturbé. Journal of Differential Equations 62 (1986), 357-409.

[DOM] Domínguez, J. A. Fenómenos de Propagación de Ondas en Física Clásica. Tesis de Licenciatura en Física. Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1984.

[DUF] Duff, G. F. D. The Cauchy Problem for Elastic Waves in an Anisotropic Medium. Phil. Trans. Roy. Soc., Series A 252 (1960), 249-273.

[EID] Eidus, D.M. The Principle of Limiting Absortion. Amr. Math, Soc. Transl., (2) 47 (1965), 157-191.

[FED] Fedorov, F. I. Theory of Elastic Waves in Crystals. Plenum, New York, 1968.

[HOR] Hormander, L. Analysis of Partial Differential Operators II. Springer Verlag, Berlin, New York, 1987.

[KAT] Kato, T. Perturbation Theory for Linear Operators. Springer Verlag, Berlin, New York, 1976.

[KUR] Kuroda, S. T. Scattering Theory for Differential Operators I. J. Math. Soc. Japan, 25 No. 1 (1973), 75-103.

[MIJ] Mijáilov, V.P. Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales. Editorial MIR, Moscú, 1975.

[MUK] Muskhelishvili, N. I. Singular Integral Equations. Groningen, P. Noordhoff, Netherlands, 1953.

[MUS] Musgrave, M. J. P. On The Propagation of Elastic Waves in Aelotropic Media: I. General Principles, II. Media of Exagonal Symmetry. Proc. Roy. Soc. A. 226 (1954), 339-368

[NOB] Noble, B. and Daniel, J. W. Applied Linear Algebra. Prentice-Hall, Inc., 1977.

[PRO] Prössdorf, S. Some Classes of Singular Equations. North-Holland, New York, 1977.

[RE1] Reed, M. and Simon, B. Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. I: Functional Analysis. Academic Press, 1972.

[RE2] Reed, M. and Simon, B. Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. II: Fourier Analysis, Self-Adjoitness. Academic Press, 1972.

[RE3] Reed, M. and Simon, B. Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. III: Scattering Theory. Academic Press, 1972

[REK] Rektorys, K. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Reidel Publishing, 1977.

[ROY] Royden, H. L. Real Analysis. Collier Mac Millan International Editions, 1968.

[SCH] Schechter, M. Operator Methods in Quantum Mechanics. North-Holland, New York, 1981.

[SMI] Smirnov, V.I. A Course of Higher Mathematics. Vol. IV. Addison and Wesley.

[SMT] Smith, W. V. Strongly Propagative Systems: Generalized Non-Selfadjoint Wave Equations and Their Steady State Solutions. Pretiraje, 1987.

[WE1] Weder, R. Analyticity of The Scattering Matrix for Elastic Waves in Crystals. J. Math. Pures et Appl. 64 (1985) p. 121 á 148.

[WE2] Weder, R. Spectral and Scattering Theory in Perturbed Stratified Fluids. J. Math. Pures et Appl. 64 (1985), p. 149 á 173.

[WEI] Weidmann, J. Linear Operators in Hilbert Space. Springer-Verlag, 1984.

[WIL] Wilcox, C. Scattering Theory for The D'Alambert Equations in Exterior Domains. Springer Lecture Note in Mathematics, Vol. 443. Springer-Verlag, 1976.