UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

SIMETRÍAS Y LAGRANGIANOS EQUIVALENTES

Antonio García Zenteno

Tesis para obtener el título de Licenciado en Física

México, D.F
1989

ÍNDICE

INTRODUCCION

El formalismo lagrangiano de la Mecánica Clásica se ha convertido en parte fundamental del lenguaje de la física moderna. Por una parte, como es bien conocido, la física de las partículas elementales tiene sus modelos más famosos expresados en términos de las llamadas Teorías de Norma y por la otra, la Mecánica Cuántica requiere del formalismo hamiltoniano, que a su vez esta basado en el formalismo lagrangiano †.

La importancia de expresar las ecuaciones de movimiento de un sistema físico dado en términos de un principio variacional. debe su enorme exito principalmente a que permite asociar cantidades conservadas con simetrías infinitesimales del sistema. El teorema de Noether (1918) permite, de una manera directa, probar si una transformación infinitesimal dada es una simetría para un sistema lagrangiano y asociar a ésta una cantidad conservada a lo largo del movimiento. Este tipo de simetrías se llaman simetrías de Noether.

Por otro lado, se ha demostrado que las simetrías de las ecuaciones de movimiento constituyen un conjunto mucho más grande, que incluye a las simetrías de Noether como caso particular. Estas simetrías pueden también definirse como simetrías de la función lagrangiana, extendiendo el formalismo lagrangiano mucho más allá de la prescripción $L = T - V$ usual. De hecho, es necesario construir la función lagrangiana de tal manera que resulta ser proporcional a combinaciones lineales de sus propias ecuaciones de movimiento (Hojman S. 1984a). Así, nuevos tipos de simetrías (no Noetherianas) asociadas a la función lagrangiana pueden definirse, de tal manera que este nuevo conjunto (que incluye a las simetrías de Noether), sea equivalente al de las simetrías de las ecuaciones de movimiento. Además, y este es un paso importante, se ha definido un modo sistemático para asociar varias constantes de movimiento con cada simetría no Noetheriana dada (Hojman S. y Harleston H. 1981).

---

† De hecho el formalismo hamiltoniano puede verse como un caso particular del formalismo lagrangiano de primer orden, para detalles ver nota a pie de página pp. 15.

Las transformaciones de simetría de Noether transforman a la función lagrangiana de tal manera que la variación funcional de ésta es la derivada total respecto al tiempo de una función arbitraria. Las ecuaciones de movimiento quedan consecuentemente invariantes. En el caso de las transformaciones de simetría no Noetherianas, la función lagrangiana se transforma por una función lagrangiana equivalente que lleva a ecuaciones de movimiento distintas a las originales, pero con exactamente el mismo espacio solución que las ecuaciones de movimiento originales. Así, mientras las simetrías Noetherianas dejan invariantes a las ecuaciones de movimiento, las simetrías no Noetherianas transforman las ecuaciones de movimiento covariantemente, dejando invariantes las soluciones de las ecuaciones de movimiento. En general, diremos que una transformación dada es una simetría del sistema, si las soluciones de las ecuaciones de movimiento del sistema permanecen invariantes bajo la transformación.

El propósito de este trabajo, es establecer un método para construir simetrías no Noetherianas asociadas a un par de lagrangianos equivalentes dado (Lagrangianos que llevan a ecuaciones de movimiento distintas, pero con exactamente el mismo espacio solución). La construcción de estas simetrías es relativamente simple, requiriendo de una solución particular de una sola ecuación diferencial parcial lineal. El método también es útil para construir funciones lagrangianas asociadas a una simetría no Noetheriana dada. Esto permite, en principio, construir también otras posibles simetrías del sistema y entender mejor la estructura de esta nueva visión de la relación entre simetrías y cantidades conservadas.

La estructura de esta tesis, que pongo a consideración del jurado, es la siguiente: En la primera sección, se define el concepto de simetría para un sistema dinámico Newtoniano, que constituye el fundamento de toda la estructura lógica del texto. Estas simetrías son las más generales que pueden asociarse a un sistema de ecuaciones diferenciales determinado.

En la segunda sección, se discute el principio variacional que es la base de la construcción lagrangiana.

Sin duda uno de los problemas más interesantes y más antiguos que se han planteado en el área es el llamado problema inverso del cálculo de variaciones. Es a partir de la propuesta de solución a este problema que surge la idea de relacionar simetrías con lagrangianos equivalentes.

En la sección IV se definen las simetrías de la función lagrangiana, que es muy usual entenderlas como un subconjunto de las simetrías de las ecuaciones de movimiento. La más famosa simetría lagrangiana es aquella formulada por Noether. Se expone también la definición de una simetría lagrangiana llamada simetría de s-equivalencia, que contiene en su definición a la simetría Noetheriana. Se muestra, además, la necesidad de construir un nuevo concepto de simetría lagrangiana, que tiene la peculiaridad de que las simetrías lagrangianas así definidas coinciden con aquellas de las ecuaciones de movimiento, expuestas en la primera sección.

Por último, se presenta una línea de pensamiento particular basada en las secciones anteriores, que conduce a la relación entre simetrías y lagrangianos equivalentes, que es propiamente el contenido fundamental de este trabajo. Un ejemplo que muestra como opera en la práctica esta idea es el contenido de la última sección.

Los apéndices pretenden cubrir un objetivo doble: por una parte, se desarrollan algunos cálculos de este trabajo que son cruciales en el desarrollo de las ideas expuestas y por otra, intentan introducir al lector, verdaderamente interesado, al lenguaje en el que se escriben estas ideas en las publicaciones en curso, mostrando algunos materiales que no han visto la luz a lo largo de estos últimos años.

Una peculiaridad del trabajo es formular desde el principio el teorema de Noether para funciones lagrangianas que dependen linealmente de las aceleraciones. Evidentemente, el teorema de Noether usual, se obtiene como caso particular de esta propuesta.

I. SIMETRIAS DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden,

$$\ddot{q}^i - F^i(q^j, \dot{q}^j, t) = 0 \qquad i, j = 1, 2 \dots n \tag{1.1}$$

En Mecánica Clásica un sistema de este tipo representa la segunda ley de Newton para un sistema de n grados de libertad, donde $q^i \quad i = 1 \dots n$ denotan las coordenadas generalizadas y $\dot{q}^i$ denota la derivada respecto al tiempo de la coordenada. Se ha supuesto que en general las fuerzas generalizadas F^i dependen de las coordenadas, las velocidades y el tiempo.

Cualquier función $C(q^i, \dot{q}^i, t)$ que permanece constante a lo largo de todo movimiento posible del sistema (1.1), es una *constante de movimiento* asociada al sistema. Consecuentemente, su derivada respecto al tiempo sobre las trayectorias solución del sistema (1.1), se anula:

$$\frac{\overline{d}}{dt}C = F^i \frac{\partial C}{\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^i \frac{\partial C}{\partial q^i} + \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

Supongamos que el sistema (1.1) puede ser integrado. En este caso siempre es posible escribir su solución general como el conjunto de trayectorias, dadas por las funciones,

$$q^i(t) \equiv q^i(C^\alpha, t) \qquad \alpha = 1, 2 \dots 2n \tag{1.2}$$

donde las $2n$ cantidades C^α, son las llamadas cantidades conservadas o primeras integrales del sistema (1.1). El conjunto de las cantidades C^α debe ser un conjunto completo, funcionalmente independiente de funciones $C^\alpha(q^i, \dot{q}^i, t)$, a despejar desde las ecuaciones (1.2), por lo que el jacobiano de la transformación,

$$q^i = q^i(C^\alpha, t)$$
$$\dot{q}^i = \dot{q}^i(C^\alpha, t)$$

debe ser distinto de cero,

$$\det\left|\frac{\partial(q^i,\dot{q}^i)}{\partial C^\alpha}\right| \neq 0 \tag{1.3}$$

El conjunto de *todas* las soluciones posibles del sistema (1.1) para los distintos valores de las cantidades C^α, permitidos por el sistema, lo llamaremos el *espacio solución* del sistema (1.1).

Es también cierto que dado un conjunto completo, funcionalmente independiente $C^\alpha(q^i,\dot{q}^i,t)$, el espacio solución del sistema queda únicamente determinado puesto que*,

$$\det\left|\frac{\partial C^\alpha}{\partial(q^i,\dot{q}^i)}\right| \neq 0$$

y será entonces posible reconstruir las trayectorias del sistema a partir de las $2n$ funciones $C^\alpha(q^i,\dot{q}^i,t)$†.

*****

La transformación infinitesimal *total*,

$$\bar{q}^i(\bar{t}) = q^i(t) + \delta q^i(q^j,\dot{q}^j,t) \tag{1.4a}$$

$$\bar{t} = t + \delta t(q^i,\dot{q}^i,t) \tag{1.4b}$$

se dice que es una transformación de simetría para el sistema (1.1), si mapea curvas solución del sistema (1.1), en curvas solución del mismo sistema‡. Estas transformaciones tienen la propiedad de dejar invariante el espacio solución del sistema dado. Es posible asociar a cada clase de equivalencia de transformaciones infinitesimales totales dadas, una transformación representativa llamada la transformación infinitesimal *local*,

---

* Al menos una de las constantes de movimiento C^α debe depender explícitamente del tiempo. Para detalles ver Landau L. y Lifshitz (1978).

† Una demostración posible de este hecho puede verse en Saletan y Cromer (1971).

‡ El significado matemático de las funciones δq^i y δt como funciones infinitesimales arbitrarias, puede hacerse evidente escribiéndolas en la forma $\delta q^i \equiv \epsilon\xi^i(q^j,\dot{q}^j,t)$ y $\delta t \equiv \epsilon\tau(q^i,\dot{q}^i,t)$, donde ξ^i y τ son funciones analíticas dadas y ϵ es un parámetro de primer orden ($\epsilon^2 \sim 0$). Consecuentemente al desarrollar en serie de potencias en ϵ sólo nos interesarán los términos de primer orden en ϵ.

dada por,

$$\delta^* q^i \equiv \xi^i(q^j, \dot{q}^j, t) = \delta q^i - \dot{q}^i \delta t$$
$$\delta^* t = 0 \tag{1.5}$$

Esto es así por el siguiente argumento: Supongamos que tenemos una trayectoria cualquiera en el espacio configuración definido por las coordenadas q^i. Las transformaciones (1.4) mapean esta trayectoria en otra infinitesimalmente cercana. Pueden definirse dos tipos de variaciones entre estas dos trayectorias cercanas:

a) Variaciones infinitesimales totales, que son la medida de la variación entre un punto de la trayectoria original al tiempo t y el punto correspondiente de la trayectoria variada al tiempo $\bar{t}$,

$$\delta q^i = \bar{q}^i(\bar{t}) - q^i(t)$$

b)Variaciones infinitesimales locales, que son la medida de la variación entre un punto de la trayectoria original y el correspondiente de la trayectoria variada, en el instante de tiempo t,

$$\delta^* q^i = \bar{q}^i(t) - q^i(t)$$

Es fácil mostrar que estas dos variaciones estan relacionadas por la ecuación,

$$\delta q^i = \delta^* q^i + \dot{q}^i \delta t$$
$$\delta^* \dot{q}^i = (\delta^* q^i)^{\cdot}$$
$$(\delta q^i)^{\cdot} \neq \delta \dot{q}^i$$

A lo largo del texto usaremos las variaciones infinitesimales locales.

Las condiciones que deben satisfacer las transformaciones (1.4), para ser una simetría del sistema (1.1), se deducen utilizando las técnicas del cálculo de variaciones, como sigue. Defínase la función,

$$M^i(q^j, \dot{q}^j, \ddot{q}^j, t) = \ddot{q}^i - F^i(q^j, \dot{q}^j, t) \tag{1.6}$$

que se anula sobre las trayectorias solución del sistema (1.1). Para que la transformación (1.4) sea de simetría para este sistema, es necesario exigir que la trayectoria transformada $\bar{q}^i(t)$, obtenida al aplicar las transformaciones (1.4) a una trayectoria solución dada, sea también una solución del sistema (1.1) escrito en las coordenadas transformadas. El cálculo de variaciones permite definir la variación total de coordenadas, producida por las transformaciones (1.4) sobre una función dada:

$$\delta M^i = M^i(\bar{q}^j, \dot{\bar{q}}^j, \ddot{\bar{q}}^j, t) - M^i(q^j, \dot{q}^j, \ddot{q}^j, t) \tag{1.7}$$

Desarrollando la variación (1.7) hasta términos de primer orden en ϵ obtenemos,

$$\delta M^i = \epsilon(\frac{\partial M^i}{\partial q^j}\xi^j + \frac{\partial M^i}{\partial \dot{q}^j}\dot{\xi}^j + \frac{\partial M^i}{\partial \ddot{q}^j}\ddot{\xi}^j) \tag{1.8}$$

Sustituyendo ahora M^i por su definición, dada en (1.6),

$$\delta M^i = \epsilon(-\frac{\partial F^i}{\partial q^j}\xi^j - \frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}\dot{\xi}^j + \ddot{\xi}^j) \tag{1.9}$$

La condición necesaria y suficiente para que las transformaciones (1.5) sean de simetría para el sistema (1.1), es que la variación (1.11), se anule a lo largo de las trayectorias solución del sistema (1.1), *i.e.*,

$$\frac{\overline{d}}{dt}\frac{\overline{d}}{dt}\xi^i - \frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}\frac{\overline{d}}{dt}\xi^j - \frac{\partial F^i}{\partial q^j}\xi^j = 0 \tag{1.10}$$

donde

$$\frac{\overline{d}}{dt} = F^i\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^i\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{1.11}$$

es la derivada respecto al tiempo sobre las curvas solución del sistema (1.1). La ecuación (1.12) se llama la ecuación de variación asociada al sistema (1.1) (Hojman S. (1984)). Cualquier solución particular de esta ecuación, es una simetría de las ecuaciones de movimiento (1.1)†.

† Es interesante deducir la ecuación de variación en el caso en que un lagrangiano de la forma $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ existe para un sistema del tipo (1.1). En este caso la relación (1.12) se llama ecuación de Jacobi. Para detalles, ver el apéndice A.

II.EL PRINCIPIO VARIACIONAL

El estudio de las simetrías de las ecuaciones de movimiento, permite obtener simetrías de un sistema dinámico dado, resolviendo la ecuación de variación (1.12) asociada al sistema. Cualquier solución particular de la ecuación de variación, es una simetría particular del sistema. La enorme importancia de éstas simetrías se debe, en gran medida, al hecho de que permiten la integración del sistema en cuestión, vía la relación entre las simetrías del sistema y sus cantidades conservadas. Ahora bien, ésta relación se lleva a cabo a través del llamado principio variacional, que permite la construcción de cantidades conservadas asociadas a transformaciones de simetría dadas. En esta línea de pensamiento se ha inspirado el famoso teorema de Noether (1918).

Aunque en Mecánica Clásica, las ecuaciones de Newton de un sistema integrable, determinan completamente su evolución dinámica, la idea de formular la teoría en términos de un principio variacional es muy útil, desde un punto de vista global, sugiriendo analogías estructurales en otras áreas de la física, como en la Mecánica Cuántica y la Teoría de Campos.

Es importante mencionar que no todas las ecuaciones de movimiento Newtonianas, como el sistema (1.1), son derivables a partir de un principio variacional. Las condiciones necesarias y suficientes para que un sistema de ecuaciones diferenciales del tipo (1.1), sea derivable desde un principio variacional, fueron investigadas por Helmholtz a fines del siglo pasado (problema inverso del cálculo de variaciones) y su trabajo ha encontrado continuidad recientemente. En la sección III revisaremos algunos conceptos fundamentales de este interesante problema, que serán útiles para extender el formalismo lagrangiano a sistemas lo más generales posibles y así tener una sólida base para relacionar simetrías con lagrangianos equivalentes.

A lo largo de este trabajo supondremos que los sistemas de ecuaciones diferenciales tratados, son derivables de un principio variacional.

*****

Aunque usualmente se supone que la función lagrangiana depende de la posición, la velocidad y posiblemente del tiempo, supondremos aquí, que además, depende linealmente de las aceleraciones, puesto que más adelante nos interesará extender el formalismo lagrangiano, para relizar un paralelo entre las simetrías de las ecuaciones de movimiento, que ya hemos estudiado, y las simetrías de la función lagrangiana.

Supongamos, entonces, que el sistema (1.1) puede obtenerse a través de la variación de la *funcional de acción*,

$$S[q^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, t)\, dt \tag{2.1}$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen proponiendo una variación *arbitraria* de una trayectoria cualquiera, entre dos puntos dados y calculando la correspondiente variación en la funcional de acción (2.1), exigiendo el siguiente principio fundamental:

La variación de la acción (2.1) ante transformaciones infinitesimales arbitrarias, debe ser sólo función de los puntos extremos de la trayectoria variada.*

Para calcular la variación de la funcional de acción (2.1) producida por las transformaciones infinitesimales arbitrarias,

$$\bar{q}^i(\bar{t}) = q^i(t) + \delta q^i(q^j, \dot{q}^j, t)$$
$$\bar{t} = t + \delta t(q^i, \dot{q}^i, t)$$

es necesario calcular, primero, la variación producida en la función lagrangiana por estas transformaciones.

Podemos definir ahora, dos tipos de variaciones en la función lagrangiana:

a) La variación funcional,

$$\delta L = \bar{L}(q^j, \dot{q}^j, \ddot{q}^j, t) - L(q^j, \dot{q}^j, \ddot{q}^j, t) \tag{2.2}$$

*Este es el llamado principio variacional de Weiss, para detalles consultar Sudarshan y Mukunda (1974).

b) La variación de coordenadas,

$$\delta L = L(\bar{q}^j, \dot{\bar{q}}^j, \ddot{\bar{q}}^j, \bar{t})\frac{d\bar{t}}{dt} - L(q^j, \dot{q}^j, \ddot{q}^j, t) \tag{2.3}$$

Aquí hemos introducido el factor $d\bar{t}/dt$, puesto que el elemento de línea en la integral de trayectoria (2.1), varía de $dt \to d\bar{t}$.

Para definir la función lagrangiana "nueva" en términos de la función original, notamos que las variaciones definidas en (2.2) y (2.3), deben coincidir, puesto que son variaciones producidas por la misma causa: la variación de coordenadas propuesta. Esto conduce a la siguiente relación entre las funciones lagrangianas (cf. Hill 1951),

$$\bar{L}(\bar{q}^j, \dot{\bar{q}}^j, \ddot{\bar{q}}^j, \bar{t})\frac{d\bar{t}}{dt} = L(q^j, \dot{q}^j, \ddot{q}^j, t) \tag{2.4}$$

El desarrollo hasta términos de primer orden de la variación de coordenadas (2.3) nos conduce al siguiente resultado,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^j}\delta q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\delta \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^j}\delta \ddot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t + L(\delta t)^{\cdot} \tag{2.5}$$

que puede escribirse, utilizando la relación entre variaciones locales y variaciones totales (1.5) como,

$$\delta L = \frac{d}{dt}\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi^i + L\delta t + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i}\xi^i) - 2(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i})\xi^i\} - G_i L\xi^i \tag{2.6}$$

donde el operador G_i es,

$$G_i = -\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}^i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial}{\partial q^i} \tag{2.7}$$

Podemos ahora, calcular la variación en la funcional de acción y aplicar el principio variacional mencionado, obteniendo,

$$\delta S[q^i(t)] = \{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi^i + L\delta t + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i}\xi^i) - 2(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i})\xi^i\}\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{2.8}$$

lo que implica que,

$$G_i L = 0 \tag{2.9}$$

Estas son las llamadas ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L), que comúnmente se escriben sin el término dependiente de las aceleraciones.

Es importante notar que las ecuaciones (2.9) son, en gereral, ecuaciones diferenciales de cuarto orden, pero como hemos supuesto que nuestra función lagrangiana es lineal en las aceleraciones, estas ecuaciones serán ecuaciones diferenciales de tercer orden. Para que las ecuaciones de E-L (2.9), sean equivalentes al sistema Newtoniano (1.1), hay que proponer ciertas condiciones sobre la función lagrangiana. Estas condiciones son precisamente el objeto de estudio del problema inverso del cálculo de variaciones, que ahora revisaremos.

Todos los resultados obtenidos en esta sección, se reducen al caso comúnmente tratado, cuando la función lagrangiana no depende de las aceleraciones.

III. EL PROBLEMA INVERSO DEL CALCULO DE VARIACIONES

La construcción usual de la función lagrangiana como $L = T - V$ es útil solamente para sistemas conservativos, o para algunas fuerzas dependientes de la velocidad muy particulares, como la fuerza de Lorentz en electromagnetismo (Golstein 1980). Existe aún una enorme variedad de sistemas dinámicos que no corresponden al caso anterior y aquí, salvo raras ecepciones, no se usa una formulación variacional.

Una caracterización más profunda, que aquella dada por las ecuaciones de Newton para un sistema dinámico, puede hacerse a partir del conjunto completo de trayectorias en el espacio configuración del sistema. A este conjunto completo de trayectorias le llamaremos el espacio solución del sistema. Consideraremos que cualquier conjunto de ecuaciones diferenciales, que reproduzca el espacio solución de un sistema dinámico dado, es igualmente admisible.

Es importante notar, que este punto de vista define una clase de funciones lagrangianas equivalentes, mucho más amplia que la usual donde las funciones lagrangianas difieren a lo más por la derivada total respecto al tiempo de una función arbitraria. Mientras que estos lagrangianos, que difieren entre sí por una derivada total, llevan a ecuaciones de movimiento idénticas, los lagrangianos equivalentes dan origen a familias de ecuaciones de movimiento, que en general no son las mismas, pero su espacio solución coincide exactamente, como mostraremos en la sección IV.

El problema inverso del cálculo de variaciones para la Mecánica Clásica, consiste esencialmente, en encontrar todos los lagrangianos, que bajo la variación de la funcional de acción, dan origen a un sistema de ecuaciones diferenciales dado, o planteado de manera más general, que dan origen a un espacio solución dado.

En este trabajo consideraremos sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden en los que siempre sea posible resolver para las aceleraciones. En otras palabras, nos restringiremos al caso de sistemas regulares, sin constricciones.

Aunque mucha agua ha corrido bajo los puentes desde que el problema inverso fue planteado por Helmholtz en 1886† y muchos intentos por resolver el problema se han llevado a cabo, la solución general para funciones lagrangianas que reproducen un espacio solución dado, ha sido establecida recientemente, a través de los trabajos de Havas (1973), Sarlet (1982), Hojman y Urrutia (1981) y Hojman R. Hojman S. y Sheinbaum J. (1983), usando el formalismo lagrangiano de primer orden.

*****

Como es bien conocido, cuaquier sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden puede simpre escribirse introduciendo un adecuado número de nuevas variables, como un sistema del doble de ecuaciones diferenciales de primer orden. Un ejemplo familiar es el procedimiento que lleva a la construcción de la función hamiltoniana, en la Mecánica Clásica, a partir del formalismo lagrangiano.

Para nuestros propósitos, consideremos un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden,

$$M^i(q^j,\dot{q}^j,\ddot{q}^j,t) \equiv \ddot{q}^i - F^i(q^j,\dot{q}^j,t) = 0 \tag{3.1}$$

Definiendo,

$$x^i = q^i, \quad x^{i+n} = \dot{q}^i, \quad f^i = x^{i+n}, \quad f^{i+n} = F^i(x^j,x^{j+n},t)$$

obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente en primer orden,

$$\dot{x}^a = f^a(x^b,t) \quad a,b = 1\ldots 2n \tag{3.2}$$

Sea $L(x^a,\dot{x}^a,t)$ un lagrangiano cuyas ecuaciones de E-L sean un sistema equivalente a (3.2),

$$E_aL \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^a\partial\dot{x}^b}\ddot{x}^b + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^a\partial x^b}\dot{x}^b + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^a\partial t} - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0 \tag{3.3}$$

---

† Para una revisión del trabajo original de Helmholtz, puede consultarse Whittaker 1944 pp. 45. Una revisión profunda sobre el problema inverso puede verse en Santilli 1978. En el apéndice B planteamos las llamadas condiciones de Helmholtz y las conectamos con los trabajos recientes sobre el problema inverso.

Para que estas ecuaciones den origen a ecuaciones equivalentes a (3.2) necesitamos exigir†,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^a \partial \dot{x}^b} = 0 \qquad \text{para todo} \quad a, b$$

Integrando esta relación para L obtenemos,

$$L = l_a(x^b, t)\dot{x}^b + l_o(x^b, t) \tag{3.4}$$

cuyas ecuaciones de E-L son‡,

$$E_a L = \left(\frac{\partial l_a}{\partial x^b} - \frac{\partial l_b}{\partial x^a}\right)\dot{x}^b + \frac{\partial l_a}{\partial t} - \frac{\partial l_o}{\partial x^a} = 0 \tag{3.5}$$

Ahora bien, para que estas ecuaciones sean equivalentes al sistema (3.2), las siguentes ecuaciones deben cumplirse,

$$\det\left(\frac{\partial l_a}{\partial x^b} - \frac{\partial l_b}{\partial x^a}\right) \neq 0 \tag{3.6}$$

$$\left(\frac{\partial l_a}{\partial x^b} - \frac{\partial l_b}{\partial x^a}\right) f^b = \frac{\partial l_o}{\partial x^a} - \frac{\partial l_a}{\partial t} \tag{3.7}$$

Havas (1973) mostró que dado un l_o, el sistema (3.7) siempre tiene solución para l_a. Esto significa que el problema inverso del cálculo de variaciones siempre tiene solución, cuando se plantea en el caso del formalismo lagrangiano de primer orden.

---

† Este es un caso particular de lagrangianos singulares. Aunque aparecen interesantes problemas en el tratamiento de este tipo de lagrangianos (en especial, la construcción de la teoría hamiltoniana correspondiente) su uso esta muy extendido en la física actual. Para detalles sobre estos lagrangianos puede consultarse Hojman y Urrutia (1981) y Sudarshan y Mukunda (1974)

‡ El formalismo hamiltoniano, puede obtenerse, como un caso particular de formalismo lagrangiano de primer orden: Si definimos,

$$x^i = q^i \qquad x^{i+n} = p_i$$

$$l_i = p_i \quad l_{i+n} = 0 \quad l_o = -H(q^j, p_i, t)$$

En este caso la matriz que multiplica a las velocidades en la ecuación (3.5) es,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la forma simpléctica del formalismo hamiltoniano. El lagrangiano (3.4), tiene la siguiente estructura,

$$L(q^i, \dot{q}^i, p_i, t) = p_i \dot{q}^i - H$$

y sus ecuaciones de E-L asociadas, son equivalentes a las ecuaciones de Hamilton.

Hojman y Urrutia (1981), utilizando como coordenadas un conjunto completo de constantes de movimiento funcionalmente independientes del sistema (3.2), demostraron que el lagrangiano más general para este sistema puede escribirse como,

$$L = l_m(C^p)\{\frac{\partial C^m}{\partial x^a}\dot{x}^a + \frac{\partial C^m}{\partial t}\} \tag{3.8}$$

donde las funciones $C^b(x^a, t)$ denotan un conjunto *arbitrario* de $2n$ constantes de movimiento funcionalmente independientes del sistema (3.2), i.e.,

$$\det\left|\frac{\partial C^a}{\partial x^b}\right| \neq 0$$

y las funciones l_m son funciones arbitrarias de las C^b con la restricción,

$$\det\left(\frac{\partial l_m}{\partial C^n} - \frac{\partial l_n}{\partial C^m}\right) \neq 0$$

Existen infinitas maneras distintas de satisfacer esta condición. Mientras que en el caso de las ecuaciones de Newton (1.1), el lagrangiano puede no existir o ser único, en el caso de primer orden siempre existen infinitos lagrangianos posibles para un sistema del tipo (3.2) (Hojman S. Urrutia L (1981)).

Nuestro objetivo ahora es reescribir el lagrangiano de primer orden (3.8) en el formalismo de segundo orden. En otras palabras, encontrar la solución del problema inverso del cálculo de variaciones para sistemas Newtonianos.

Esencialmente la mitad de las ecuaciones de primer orden (3.2), establecen la definición de n variables x^{i+n}, como las derivadas respecto al tiempo de las coordenadas x^i. La otra mitad de las ecuaciones son dinámicas.

Con las definiciones,

$$x^a = q^i, \quad \dot{x}^a = \dot{q}^i \qquad a = 1, 2 \ldots n$$

$$x^a = \dot{q}^i, \quad \dot{x}^a = \ddot{q}^i \qquad a = n+1 \ldots 2n$$

el lagrangiano de primer orden (3.8) se escribe ahora,

$$L = l_m(C^p(q^i,\dot{q}^i,t))[\frac{\partial C^m}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i + \frac{\partial C^m}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial C^m}{\partial t}] \tag{3.9}$$

Por otra parte, si $C = C(q^i,\dot{q}^i,t)$ es una constante de movimiento asociada al sistema (3.1), entonces†,

$$\frac{d}{dt}C = \frac{\partial C}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i + \frac{\partial C}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial \dot{q}^i}(\ddot{q}^i - F^i(q^j,\dot{q}^j,t))$$

Sustituyendo esta relación en el lagrangiano (3.9), podemos reescribirlo como,

$$L(q^j,\dot{q}^j,\ddot{q}^j,t) = \mu_i(\ddot{q}^i - F^i(q^j,\dot{q}^j,t)) \tag{3.10}$$

donde,

$$\mu_i = l_m(C^p)\frac{\partial C^m}{\partial \dot{q}^i}$$

Ahora bien, el lagrangiano (3.10) dará origen a ecuaciones de movimiento equivalentes a las ecuaciones Newtonianas (3.1), si

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial \mu_j}{\partial \dot{q}^i} \tag{3.11}$$

$$\frac{\overline{d}}{dt}(\frac{\overline{d}}{dt}\mu_i + \mu_j\frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i}) - \mu_j\frac{\partial F^j}{\partial q^i} = 0 \tag{3.12}$$

$$\det\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}(\frac{\overline{d}}{dt}\mu_i + \mu_k\frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^i}) + \frac{\partial \mu_j}{\partial \dot{q}^i}\} \neq 0 \tag{3.13}$$

† Es extraño que esta relación fundamental no aparezca en la literatura sobre el tema, por lo que valdría la pena demostrarla: Para esto, basta considerar la derivada respecto al tiempo de una constante de movimiento cualquiera,

$$\frac{d}{dt}C = \frac{\partial C}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i + \frac{\partial C}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial C}{\partial t}$$

y la derivada respecto al tiempo sobre las trayectorias solución,

$$\frac{\overline{d}}{dt}C = F^i\frac{\partial C}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial C}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

Restando estas dos ecuaciones se llega, directamente, al resultado requerido.

Sarlet (1982) investigó las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una función lagrangiana en el formalismo de segundo orden. Pues bien, las condiciones (3.11-12-13) no son condiciones adicionales sobre la función lagrangiana, pues resulta que las condiciones de Sarlet, son las condiciones de integrabilidad de las relaciones (3.11-12)‡.

Las condiciones (3.11-12-13) son las condiciones necesarias y suficientes para que las ecuaciones de E-L obtenidas a partir de un lagrangiano como (3.10), sean equivalentes a las ecuaciones de Newton (3.1). Estas condiciones se obtienen aplicando el operador G_i al lagrangiano (3.10).

La condición (3.11) se obtiene exigiendo que las derivadas de tercer orden, no aparezcan en las ecuaciones de movimiento.

La condición (3.12), llamada también ecuación de movimiento de μ_i, se obtiene cuando se garantiza que si se cumplen las ecuaciones de movimiento originales, se anulen las ecuaciones de E-L correspondientes.

De manera análoga, si se exige que cuando se anulen las ecuaciones de E-L, se anulen como consecuencia, las ecuaciones de movimiento, se obtiene la condición (3.13).

De esta manera el problema inverso del cálculo de variaciones para la Mecánica Clásica, queda, en principio, resuelto.

En resumen, dado un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, éstas admitirán una formulación variacional, si y sólo si, las condiciones (3.11-12-13) tienen solución simultanea. En tal caso, la función lagrangiana puede siempre escribirse como una combinación lineal de el lado izquierdo de sus propias ecuaciones de E-L.

Aunque en principio, la solución del problema inverso, se plantea a partir de la solución general de las ecuaciones de movimiento ‡, en la práctica cualquier solución

‡ Ver Hojman S. Hojman R. Sheinbaum J. (1983). Para detalles referimos al lector al apéndice B.

‡ Puesto que se requiere tener un conjunto completo, funcionalmente independiente de constantes de movimiento C^P.

particular de las condiciones (3.11-12-13) es útil para construir una función lagrangiana asociada al sistema dado.

En la siguente sección utilizaremos estos resultados para asociar simetrías de la función lagrangiana a constantes de movimiento.

IV. SIMETRIAS DE LA FUNCION LAGRANGIANA

La relación entre simetrías y constantes de movimiento, se ha convertido en un paradigma de construcción teórica para la física moderna. Si un sistema de ecuaciones diferenciales, puede ser descrito en términos de un lagrangiano, es entonces posible estudiar las simetrías de las ecuaciones de movimiento, a través de las simetrías de la función lagrangiana y construir constantes de movimiento asociadas a estas simetrías.

Una de las herramientas más poderosas para explorar las simetrías de la función lagrangiana y construir constantes de movimiento asociadas, es el llamado teorema de Noether (1918)*, que propone una manera simple de construir una constante de movimiento asociada a una transformación de simetría de la función lagrangiana.

La puesta en escena de una función lagrangiana que respete una simetría previamente establecida, es el punto de partida para construir las llamadas Teorías de Norma, que con tanto éxito describen las interacciones fundamentales. Aunque muchas discusiones se han dado en torno a la definición de simetría lagrangiana, existen aún, algunos puntos que permanecen en la obscuridad.

Discutiremos aquí, la relación entre las simetrías de los lagrangianos y las de sus ecuaciones de movimiento (Hojman S. 1984) y la correspondiente construcción de cantidades conservadas asociadas, con vistas a utilizar estas ideas para relacionar simetrías con lagrangianos equivalentes, que es el objeto de este trabajo.

Sin una definición previa, bien establecida, del concepto de transformación de simetría, la discusión sobre las simetrías de los lagrangianos pierde, evidentemente, todo su sentido. Pero, con seguridad puede afirmarse, antes de entrar en detalles, que la creencia general, parece ser, que los lagrangianos poseen, en general, menos simetrías que sus ecuaciones de E-L asociadas. Esto se debe al hecho de que usualmente se definen las simetrías de la función lagrangiana como aquellas que transforman a esta función

* Una traducción al inglés del artículo original de E. Noether puede encontrarse en *Transport Theory and Statistical Physics* 1 (1971) *186-207*. Sobre el teorema de Noether recomendamos especialmente la lectura de Hill E.L. (1951) y, Sudarshan y Mukunda (1974).

por otra función lagrangiana que difiere de la primera por la derivada total respecto al tiempo de una función de la forma $f(q^i, \dot{q}^i, t)$.

En adición a éste concepto de simetría , un nuevo concepto de simetría lagrangiana, llamado s(olución)-equivalencia, ha sido definido, generalizando el anterior debido a Noether, de tal manera que ahora, a cada simetría de s-equivalencia pueden asociarse varias cantidades conservadas posibles.

De acuerdo al espíritu de este trabajo, revisaremos el caso de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Como veremos, las simetrías de s-equivalencia (incluídas las de Noether) no es suficiente para cubrir todas las simetrías de las ecuaciones de movimiento, siendo necesario definir un nuevo tipo de simetría lagrangiana, para hacer coincidir al conjunto de simetrías de la función lagrangiana, con aquellas de sus ecuaciones de movimiento.

*****

Comenzaremos esta revisión de las simetrías de la función lagrangiana enunciando el teorema de Noether, para lagrangianos que dependen de las aceleraciones: Dada una función lagrangiana $L(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, t)$ y una transformación infinitesimal de coordenadas tipo (1.4a-b), si la variación funcional producida en la función lagrangiana, por esta transformación, puede escribirse como la derivada total respecto al tiempo de una función de la forma $f(q^i, \dot{q}^i, t)$, entonces la transformación dada es una transformación de simetría asociada a la función lagrangiana dada, *i.e.*, si,

$$\delta L = \frac{d}{dt}\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi^i + L\delta t + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i}\xi^i) - 2(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i})\xi^i\} - G_i L \xi^i = \frac{d}{dt} f(q^i, \dot{q}^i, t) \qquad (4.1)$$

entonces, la transformación ξ^i, δt es una simetría de Noether asociada a L. Como consecuencia de la ecuación (4.1), puede obtenerse una cantidad conservada asociada a la transformación infinitesimal propuesta:

$$\frac{\overline{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi^i + L\delta t + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i}\xi^i) - 2(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i})\xi^i\} - f(q^i, \dot{q}^i, t)\right) = 0 \qquad (4.2)$$

que se obtiene directamente al evaluar la ecuación (4.1) a lo largo de las trayectorias solución de las ecuaciones de E-L asociadas a L. En nuestro caso particular, donde L esta dado por la ecuación (3.10), la cantidad conservada (4.2) adquire una interesante estructura, que parte de la siguiente observación: El término entre corchetes en la ecuación (4.1), puede escribirse,

$$\overline{K} = -(\frac{\overline{d}}{dt}\mu_i + \mu_j \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i})\xi^i + \mu_i \frac{\overline{d}}{dt}\xi^i \tag{4.3}$$

sobre las trayectorias solución del sistema. Si usamos la ecuación de variación (1.12) y la ecuación de movimiento de μ_i (3.12), es fácil mostrar que $\overline{K}$ es una cantidad conservada (Hojman S., Nuñez L., Patiño A., Rago H. (1986)).

El teorema de Noether puede ser reexpresado de la siguente manera: Dado un lagrangiano del tipo (3.10) y una transformación infinitesimal, ξ^i , si las ecuaciones de E-L de la variación producida por esta transformación en la función lagrangiana propuesta, se anulan idénticamente, entonces la transformación es una simetría de Noether, asociada al lagrangiano L,

$$G_i \delta L \equiv 0 \tag{4.5}$$

El hecho de que el teorema de Noether se pueda reescribir en la forma (4.5) se debe al siguiente teorema:

Las ecuaciones de E-L se anulan idénticamente, si y sólo si, el operador de E-L, G_i, actúa sobre la derivada total respecto al tiempo de una función de la forma $f(q^i, \dot{q}^i, t)$.

Supongámos que las ecuaciones de E-L asociadas a L son,

$$G_i L = A_{ij}(\ddot{q}^j - F^j(q^k, \dot{q}^k, t)) \tag{4.6}$$

donde,

$$A_{ij} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}(\frac{\overline{d}}{dt}\mu_i + \mu_k \frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^i}) + \frac{\partial \mu_j}{\partial \dot{q}^i} \tag{4.7}$$

La relación (4.5) podrá ahora escibirse como,

$$G_i \delta L = G_i(-\xi^i A_{ij}(\ddot{q}^j - F^j(q^k, \dot{q}^k, t)) \equiv 0 \tag{4.8}$$

donde se ha usado el teorema mencionado, anulándose así, el término de la derivada total en la expresión (4.1). Las implicaciones de este teorema sobre la relación (4.8), nos conducen al siguiente resultado:

$$-\xi^i A_{ij}(\ddot{q}^j - F^j(q^k, \dot{q}^k, t) = \frac{d}{dt} C(q^k, \dot{q}^k, t) \tag{4.9}$$

para alguna función $C(q^k, \dot{q}^k, t)$. Esta ecuación implica que C es una constante de movimiento (puesto que su derivada respecto al tiempo se anula sobre las trayectorias solución). Usando la relación,

$$\frac{d}{dt} C = \frac{\partial C}{\partial \dot{q}^i}(\ddot{q}^i - F^i(q^j, \dot{q}^j, t)) \tag{4.10}$$

que cumple cualquier cantidad conservada $C(q^i, \dot{q}^i, t)$, podemos realizar la siguiente identificación en la ecuación (4.9),

$$-\xi^i A_{ij} = \frac{\partial C}{\partial \dot{q}^j} \tag{4.11}$$

que es el resultado del llamado teorema inverso de Noether. En palabras, podríamos decir, que dada cualquier constante de movimiento C asociada a las ecuaciones de movimiento de L, siempre es posible construir una simetría de Noether ξ^i (a despejar de (4.11)) del lagrangiano dado, cuya constante de movimiento asociada es precisamente C.

Además, es interesante notar, que dado un lagrangiano $L = \mu_i(\ddot{q}^i - F^i)$ y una transformación de simetría de las ecuaciones de movimiento ξ^i, no necesariamente Noetheriana, la función $\overline{K}$ construida en (4.3) es una cantidad conservada.

Evidentemente, el teorema de Noether, inicialmente propuesto, se reduce al caso usualmente tratado, cuando la función lagrangiana no depende de las aceleraciones.

Pasemos ahora a considerar transformaciones de simetría de la función lagrangiana más generales: las llamadas transformaciones de s-equivalencia.

Inicialmente notamos que las simetrías Noetherianas satisfacen la ecuación de variación (1.12), pero dada una solución de la ecuación de variación ésta no necesariamente es una simetría Noetheriana *.

El teorema de Noether es muy restrictivo en cuanto a la forma funcional que exige para la variación de la función lagrangiana y bien cabe la posibilidad de que esta variación de la función lagrangiana pueda escribirse, ya no como una derivada respecto al tiempo, sino como una función $l(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, t)$, que dé origen a ecuaciones de movimiento equivalentes a las ecuaciones de movimiento originales. Es, posiblemente, en esta idea, donde se ha encontrado la inspiración para extender la relación entre simetrías de la función lagrangiana y cantidades conservadas asociadas†.

En este caso, las ecuaciones de movimiento asociadas al "lagrangiano" δL pueden escribirse, en general, como,

$$G_i \delta L = \epsilon \Lambda_i^j G_j L \tag{4.12}$$

es decir, son *equivalentes* a las ecuaciones de movimiento asociadas a L. La matriz Λ_i^j, esta dada por,

$$\Lambda_i^j = A^*_{ik} (A^{-1})^{kj} \tag{4.13}$$

donde la matriz A_{ij} se calcula desde (4.7) y

$$A^*_{ik} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} (\overline{\frac{d}{dt}} \mu^*_i + \mu^*_j \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i}) + \frac{\partial \mu^*_k}{\partial q^i} \tag{4.14}$$

donde

$$\mu^*_i = A_{ij} \xi^j \tag{4.15}$$

* Una transformación de simetría es aquella que transforma las trayectorias solución, de un sistema de ecuaciones diferenciales, en trayectorias solución del mismo sistema. Las simetrías Noetherianas dejan invariantes a las ecuaciones de movimiento. En este sentido son un tanto restrictivas, pues existe la posibilidad de que una transformación dada cambie las ecuaciones de movimiento *covariantemente* dejando, por tanto, su espacio solución invariante.

† Ver el artículo de Hojman y Harleston (1981).

Es muy importante notar, que μ_i^* es solución de la ecuación de movimiento de μ_i, si A_{ij} es solución de la ecuación de Sarlet (ver apéndice B) y ξ^i es solución de la ecuación de variación†. En otras palabras, si existe solución para el problema inverso del cálculo de variaciones, para un sistema inicialmente propuesto de ecuaciones diferenciales Newtoniano, tipo (1.1) y si ξ^i es una simetría de las ecuaciones de movimiento, entonces μ_i^* definido en (4.15), será solución de la ecuación de movimiento de μ_i.

Como consecuencia, puede ahora mostrarse que,

$$\frac{\overline{d}}{dt} tr(\Lambda_i^j)^k = 0 \qquad k = 1, 2 \ldots \tag{4.16}$$

de donde podemos obtener hasta n constantes de movimiento independientes asociadas a las ecuaciones de movimiento de L^*.

La ecuación (4.16), es el llamado teorema de las trazas. Para una demostración posible de este teorema referimos al lector al apéndice C.

Exploraremos ahora las restricciones impuestas por la condición (3.11), sobre la función μ_i. Un vistazo sobre esta relación nos permite obtener la siguiente conclusión: si μ_i satisface la ecuación (3.11) entonces,

$$\mu_i = -\frac{\partial G}{\partial \dot{q}^i} \tag{4.17}$$

para alguna función $G(q^i, \dot{q}^i, t)$. Esto implica que al lagrangiano $\mathrm{L}(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, t)$ podemos asociarle, en este caso, un lagrangiano de la forma $L(q^i, \dot{q}^i, t)$,

$$L(q^i, \dot{q}^i, t) = \mathrm{L}(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, t) + \frac{dG}{dt} \tag{4.18}$$

Por tanto, un lagrangiano independiente de las aceleraciones para el sistema (1.1) existe, si y sólo si, la condición (3.10) se cumple, en este caso A en (4.7), es simétrica. Para

---

† Es importante mencionar que, generalmente, la matriz A_{ij} proviene de una función lagrangiana particular y en este caso será solución de la ecuación de Sarlet *de facto*.

* Este hecho se debe al teorema de Cayley-Hamilton, cf. Birkoff y McLane (1947), que asegura que toda matriz de nxn satisface su propia ecuación característica.

este lagrangiano podemos definir,

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} = W_{ji} \tag{4.19}$$

y tendremos,

$$A_{ij} = -W_{ij} \tag{4.20}$$

Supongamos que existe una función $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ y que le aplicamos una transformación infinitesimal dada por ξ^i. La expresión (4.1) será entonces,

$$\delta L = \frac{d}{dt}\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi^i + L\delta t\} - \xi^i W_{ij}(\ddot{q}^j - F^j) \tag{4.21}$$

donde hemos utilizado la expresión (4.19). Como en el caso de los lagrangianos de la forma (3.10), este "lagrangiano" dado por (4.21), tendrá la misma estructura que el lagrangiano dependiente de las aceleraciones, si definimos,

$$\mu_i = -\xi^i W_{ij} \tag{4.22}$$

que será también una solución de la ecuación de movimiento de μ_i, si ξ^i es solución de la ecuación de variación y W_{ij} es solución de la ecuación de Sarlet. Análogamente, podemos construir aquí, un teorema de las trazas pero ahora con δL dado por (4.21).

Por otra parte, la relación (3.10), impone ciertas condiciones sobre las simetrías de las ecuaciones de movimiento. Si ξ^i es una solución de la ecuación de variación y la condición (3.10) se cumple, obtenemos la siguiente relación,

$$W_{ik}\frac{\partial \xi^k}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial \xi^k}{\partial \dot{q}^i}W_{jk} = 0 \tag{4.23}$$

Esta condición implica que la simetría ξ^i, es una simetría de s-equivalencia asociada a la función lagrangiana $L(q^i, \dot{q}^i, t)$.

Considérese ahora el caso en que ξ^i, como solución de la ecuación de variación no satisface (4.23). Aquí, la simetría ξ^i, transformará a la función lagrangiana $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ en un "lagrangiano" δL dependiente de las aceleraciones, cuyas ecuaciones de movimiento nos llevan al resultado,

$$G_i\delta L = C_{ij}(\ddot{q}^j - F^j)^{\cdot} + (-A_{ij} + \dot{C}_{ij})(\ddot{q}^j - F^j) \tag{4.24}$$

donde,

$$A_{ij} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}(\overline{\frac{d}{dt}}(W_{ik}\xi^k) + W_{jk}\xi^k\frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^i}) + \frac{\partial(W_{jk}\xi^k)}{\partial \dot{q}^i} \tag{4.25}$$

$$C_{ij} = \frac{\partial(W_{jk}\xi^k)}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial(W_{ik}\xi^k)}{\partial \dot{q}^j} \tag{4.26}$$

es decir, las ecuaciones de E-L asociadas a δL, son combinaciones lineales de las ecuaciones de movimiento y de sus derivadas respecto al tiempo. En otras palabras, las ecuaciones de E-L de δL, se anulan, cuando se anulan las ecuaciones de movimiento del lagrangiano original L,

$$G_i\delta L\Big|_{G_iL=0} = 0 \tag{4.27}$$

Esta relación se puede usar para definir una nueva transformación de simetría, asociada a la función lagrangiana $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ dada, que incluye a las simetrías de Noether y a las de s-equivalencia. Tomando en cuenta esta definición de transformación de simetría de la función lagrangiana, pueden ahora hacerse coincidir las simetrías de las ecuaciones de movimiento, con aquellas de la función lagrangiana, puesto que las simetrías lagrangianas no imponen ya ninguna condición adicional sobre las soluciones de la ecuación de variación.

Aunque en este trabajo no estamos interesados particularmente en las posibles aplicaciones de este nuevo tipo de simetría lagrangiana, enunciaremos, por completez, el correspondiente teorema de las trazas para el caso en que la relación (4.23) no se cumple.

En este caso es posible definir la matriz†,

$$\sigma = \begin{pmatrix} -B & -A \\ A^T & -C \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

† Una manera de justificar la construcción de la matriz σ se muestra en el apéndice C.

donde A esta definida por (4.7) y,

$$C_{ij} = \frac{\partial\mu_i}{\partial\dot{q}^j} - \frac{\partial\mu_j}{\partial\dot{q}^i} \tag{4.31}$$

$$B_{ij} = \frac{\partial}{\partial q^i}(\overline{\frac{d}{dt}}\mu_j + \mu_k\frac{\partial F^k}{\partial\dot{q}^j}) - (i \leftrightarrow j) \tag{4.32}$$

asociada al lagrangiano $L = \mu_i(\ddot{q}^i - F^i)$ y la correspondiente matriz σ^* asociada al lagrangiano equivalente $L = \mu_i^*(\ddot{q}^i - F^i)$, con las definiciones correspondientes para A^*, B^* y C^*.

En este caso el teorema de las trazas es,

$$\overline{\frac{d}{dt}}tr(\sigma^*\sigma^{-1})^k = 0 \qquad k = 1, 2\ldots \tag{4.31}$$

encontrando así, varias constantes de movimiento asociadas a este nuevo tipo de simetría lagrangiana, relacionadas con las trazas de las potencias enteras del producto de matrices de $2n$ x $2n$ componentes, dado por (4.31).

Para finalizar diremos lo siguiente: dado un conjunto de ecuaciones de movimiento tipo (1.1), un lagrangiano L independiente de las aceleraciones puede no existir, pero si las condiciones (3.11-12) se cumplen, será entonces posible construir un lagrangiano dependiente de las aceleraciones para este sistema. Es importante notar, que mientras para el caso de ecuaciones difereciales de primer orden, el problema inverso del cálculo de variaciones siempre tiene solución, en el caso de ecuaciones diferenciales de segundo orden, la función lagrangiana prodría no existir.

V. RELACION ENTRE SIMETRIAS Y LAGRANGIANOS EQUIVALENTES

Recientemente se ha mostrado mucho interés sobre algunos aspectos del estudio de las simetrías y cantidades conservadas para sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Para sistemas dinámicos que pueden expresarse en términos de una función lagrangiana, el tipo de simetrías mejor conocido es el de las simetrías Noetherianas, que de manera directa relaciona con la simetría dada, una constante de movimiento, tal como lo hemos descrito en la sección anterior.

Ciertamente, un grupo más extenso de simetrías lagrangianas ha sido estudiado obteniendo interesantes resultados a cerca de la relación entre simetrías y cantidades conservadas, desde las simetrías de s-equivalencia, hasta la propuesta de una nueva simetria lagrangiana, que tiene la ventaja de que con ella las simetrías de la función lagrangiana y aquellas de las ecuaciones de movimiento coinciden.

Una propiedad específica que ha sido observada por algunos autores, es la siguiente: Cuando una simetría puntual†, asociada a un lagrangiano $L(q^i, \dot{q}^i, t)$, es de s-equivalencia, ésta lleva, indudablemente, sobre un lagrangiano equivalente de la forma $\overline{L}(q^i, \dot{q}^i, t)$.

Sin embargo para simetrías no puntuales, dependientes de las velocidades, otro tipo de problemas surgen. En primer lugar, una simple observación de la variación producida en la función lagrangiana por una simetria ξ^i, dada (cf. ecuación (4.1)), nos conduce a la conclusión de que, en general, transformará a la función lagrangiana $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ por otra dependiente (linealmente) de las aceleraciones. En segundo lugar, no todas las transformaciones de simetría propuestas permiten que la función lagrangiana transformada, dé origen a ecuaciones de movimiento de segundo orden, sino como hemos visto, a ecuaciones de movimiento de segundo orden y sus derivadas respecto al tiempo. Estas son el tipo de simetrías que no cumplen con la relación (4.23). Sin embargo, aún

† Para las simetrías puntuales las funciones ξ^i, δt no dependen de las velocidades.

en este caso extremo, es posible definir una transformación de simetría de la función lagrangiana.

Aunque en este caso no es posible asociar a la transformación de simetría propuesta un lagrangiano usual, independiente de las aceleraciones, siempre es posible (cuando el lagrangiano existe, por supuesto) asociarle una función lagrangiana cuya estructura funcional esta dada por (3.10).

En el caso de las simetrías de s-equivalencia las cosas son muy distintas: como veremos aquí, siempre es posible asociar a cada simetría de s-equivalencia, una función lagrangiana de la forma $L(q^i, \dot{q}^i, t)$.

Más aún, podemos invertir este razonamiento: dado un par de lagrangianos equivalentes $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ y $\overline{L}(q^i, \dot{q}^i, t)$, es posible construir a partir de ellos, varias simetrías de s-equivalencia asociadas al par de lagrangianos dado.

Como veremos, dos de ellas son transformaciones de s-equivalencia genuinas y las otras son transformaciones conformes.

En esta sección demostraremos que la construcción de estas simetrías, requiere de una solución particular a una sola ecuación diferencial parcial, que guarda interesantes analogías con la teoría de Hamilton-Jacobi, en el correspondiente formalismo Hamiltoniano.

*****

Consideremos una función lagrangiana $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ y una simetría de s-equivalencia ξ^i, asociada a este lagrangiano. Según los resultados de la sección anterior, podemos concluir, que siempre es posible asociar a esta simetría de s-equivalencia, un lagrangiano de la forma (3.10), con la función μ_i construida por,

$$\mu_i = W_{ij}\xi^j \tag{5.1}$$

donde W_{ij} esta definida en (4.19). El lagrangiano (3.10) tendrá, en nuestro caso, la estructura,

$$L(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, t) = W_{ij}\xi^j(\ddot{q}^i - F^i) \tag{5.2}$$

Como la simetría dada es de s-equivalencia, la función μ_i en (5.1) satisface la condición (3.11) y por tanto podemos usar la relación (4.18) para reconstruir el lagrangiano dado,

$$L(q^i, \dot{q}^i, t) = \mathrm{L}(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, t) + \frac{d}{dt}G \tag{5.3}$$

donde

$$W_{ij}\xi^j = -\frac{\partial G}{\partial \dot{q}^i} \tag{5.4}$$

Cuando esta expresión se evalúa sobre las trayectorias solución del sistema (1.1), se obtiene el interesante resultado,

$$L(q^i, \dot{q}^i, t) = \overline{\frac{d}{dt}}G \tag{5.5}$$

Ahora bien, no es dificil mostrar que siempre que se tiene un lagrangiano usual, independiente de las aceleraciones, y una simetría de s-equivalencia asociada a este lagrangiano, es posible, en general, construir el correspondiente lagrangiano equivalente $\overline{L}$ como una función de las posiciones, las velocidades y el tiempo.

La variación producida en la función lagrangiana original por la simetría de s-equivalencia es, en general, una función lineal en las aceleraciones*,

$$\delta L = -W_{ij}\xi^j(\ddot{q}^i - F^i) + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi^i)$$

evaluando esta expresión sobre las trayectorias solución del sistema, obtenemos

$$\delta L = \overline{\frac{d}{dt}}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi^i) \tag{5.6}$$

---

*Para simplificar los siguientes cálculos tomaremos $\delta t = 0$.

Si ahora usamos la definición de variación funcional (2.2), podemos construir el lagrangiano equivalente asociado, de la siguiente manera

$$\overline{L} = \frac{\overline{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi^i + G\right) \tag{5.7}$$

que es, claro está, un lagrangiano independiente de las aceleraciones.

Resumiendo, podemos decir que dado un lagrangiano y una simetría de s-equivalencia asociada, siempre es posible construir el lagrangiano equivalente correspondiente, de tal suerte, que resulte independiente de las aceleraciones. El conocimiento de este lagrangiano equivalente, nos posibilita la construcción de cantidades conservadas asociadas vía el teorema de la trazas (4.16).

Veamos ahora que hay a cerca del razonamiento inverso: Dado un par de lagrangianos equivalentes $(L, \overline{L})$, ¿ es posible asociar una transformación de s-equivalencia a este par de lagrangianos?.

Supongamos primero que solamente tenemos el lagrangiano L. La principal observación es ahora, la siguiente: encontrar una solución particular de la ecuación diferencial parcial de primer orden (5.5)†, es suficiente para construir una simetría de s-equivalencia η^j asociada al lagrangiano L, a despejar de la relación,

$$W_{ij}\eta^j = \frac{\partial G}{\partial \dot{q}^i} \tag{5.8}$$

donde G es una solución particular de la ecuación (5.5)‡.

---

† La solución general de esta ecuación puede escribirse como: $G = G_p + F(C^\alpha)$ donde $F(C^\alpha)$ es una función arbitraria de las constantes de movimiento funcionalmente independientes y G_p es la solución particular que necesitamos.

‡ La analogía que la ecuación (5.5) guarda con la ecuación de Hamilton-Jacobi, puede argumentarse como sigue: Consideremos el espacio fase definido por las $2n$ coordenadas independientes q^i, p_i, donde,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

Definiendo, como es usual, la función hamiltoniana a partir de la función lagrangiana por,

$$L(q^i, p_i, \dot{q}^i, \dot{p}_i, t) = \dot{q}^i p_i - H(q^i, p_i, t)$$

podemos construir las ecuaciones de movimiento canónicas.

Ahora bien, en la teoría de Hamilton-Jacobi se demuestra que la función generadora de la transformación canónica que lleva al sistema dinámico desde las coordenadas iniciales Q^i, P_i, a las coordenadas q^i, p_i que describen la trayectoria evolución del sistema, es precisamente la funcional de acción (2.1), escrita en las coordenadas q^i, Q^i, t. Aquí denotaremos a esta función generadora por $G(q^i, Q^i, t)$.

Respecto al grado de libertad que tenemos al determinar la simetría η^j, notamos que si G_1 es una solución particular de (5.5), cualquier otra solución G_2, difiere de G_1 por una constante de movimiento F. Si η_1^j y η_2^j denotan las correspondientes simetrías determinadas vía (5.8), la diferencia entre estas simetrías será,

$$W_{ij}\eta^j = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}$$
$$\overline{\frac{d}{dt}}F = 0$$

que es suficiente para concluir que estamos tratando con una simetría de Noether asociada al lagrangiano L (cf. ecuación (4.11)). Por tanto, la simetría de s-equivalencia asociada al lagrangiano L, determinada por este proceso, es única hasta una simetría de Noether arbitraria, asociada a L.

Si conocemos un lagrangiano equivalente $\overline{L}$, es evidente que todo el proceso anterior puede aplicarse para obtener otra simetría de s-equivalencia $\overline{\eta}^j$, asociada al lagrangiano $\overline{L}$.

Esta no es la única instancia en este orden de cosas. Cuando se tiene un par de lagrangianos equivalentes es posible construir otras dos transformaciones de s-equivalencia, asociadas al par de lagrangianos equivalentes dado. El procedimiento

---

Además las coordenadas iniciales Q^i, P_i escritas como funciones de las coordenadas del espacio fase q^i, p_i resultan ser las constantes de movimiento necesarias para integrar el sistema.

Las ecuaciones de la transformación canónica de Hamilton-Jacobi son,

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q^i}$$
$$P_i = \frac{\partial G}{\partial Q^i}$$

Reescribiendo la ecuación (5.5) en el espíritu de la teoría de Hamilton-Jacobi, obtenemos

$$\dot{Q}^i\frac{\partial G}{\partial Q^i} + \dot{q}^i\frac{\partial G}{\partial q^i} + \frac{\partial G}{\partial t} = \dot{q}^i p_i - H(q^i, p_i, t)$$

Evaluando esta ecuación a lo largo de las trayectorias solución del sistema y usando las ecuaciones de la transformación canónica obtenemos precisamente la ecuación de Hamilton-Jacobi,

$$\frac{\partial}{\partial t}G(q^i, Q^i, t) = -H(q^i, \frac{\partial G}{\partial q^i}, t)$$

Esta ecuación diferencial parcial es, en general, no lineal y se requiere obtener a partir de ella una solución *completa*, es decir, una solución que dependa de la mitad de las constantes de movimiento necesarias para la integración del sistema. La otra mitad se obtiene directamente utilizando la ecuación de transformación para P_i. Para detalles el lector puede consultar, Goldstein (1980).

es análogo al de la construcción de las simetrías η^j y $\bar{\eta}^j$. La idea fundamental es que ahora disponemos de dos matrices W_{ij} y $\overline{W}_{ij}$ que satisfacen la ecuación de Sarlet y, por tanto, podemos construir combinaciones híbridas de la ecuación (5.5). Por ejemplo,

$$\frac{\overline{d}}{dt}G = \overline{L} \tag{5.9}$$

Una solución particular G de esta ecuación nos permite construir una simetría de s-equivalencia,

$$W_{ij}\xi^j = -\frac{\partial G}{\partial \dot{q}^i} \tag{5.10}$$

Obviamente podemos intercambiar ahora el papel de L y $\overline{L}$ en toda esta escena. Es decir, podemos buscar una solución particular de la ecuación,

$$\frac{\overline{d}}{dt}\overline{G} = L \tag{5.11}$$

que nos permitirá construir otra simetría de s-equivalencia $\bar{\xi}^j$,

$$\overline{W}_{ij}\bar{\xi}^j = -\frac{\partial \overline{G}}{\partial \dot{q}^i} \tag{5.12}$$

asociada al par de lagrangianos equivalentes dado.

En todos los casos el conocimiento de un par de lagrangianos, equivalentes nos conduce directamente a leyes de conservación vía el teorema de las trazas (4.16) y claro está, el conocimiento de cualquier simetría y una cantidad conservada, nos permite la construcción de otra cantidad conservada (no necesariamente independiente) usando la relación,

$$(\frac{\overline{d}}{dt}\xi^j)\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^j} + \xi^j\frac{\partial K}{\partial q^j} = K' \tag{5.13}$$

que puede verificarse fácilmente utilizando el hecho de que ξ^j satisface la ecuación de variación y que K es una constante de movimiento (Hojman S. (1984)). Más aún, el conocimiento de cualquier función μ_i y alguna simetría ξ^i, nos permite la construcción de una cantidad conservada $\overline{K}$, usando la relación (4.3).

Algunos comentarios finales vienen al caso: Aunque, en general, encontrar una simetría dinámica de las ecuaciones de movimiento, requiere resolver la ecuación de variación (1.12) que son n ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, aquí, cuando dos lagrangianos equivalentes se conocen, dos simetrías de s-equivalencia ξ^j y $\overline{\xi}^j$ genuinas y varias simetrías conformes pueden construirse resolviendo una sola ecuación diferencial parcial de primer orden. El hecho de que dos de estas simetrías sean simetrías conformes y las otras dos sean simetrías de s-equivalencia genuinas, se debe a la relación que existe entre ellas,

$$\overline{\xi}^j = \Lambda_i^j \eta^i \tag{5.14a}$$

$$\xi^j = \left(\Lambda_i^j\right)^{-1} \overline{\eta}^i \tag{5.14b}$$

donde,

$$\Lambda_i^j = W_{ik}(\overline{W}^{-1})^{kj}$$

$$\left(\Lambda_i^j\right)^{-1} = \overline{W_{ik}}(W^{-1})^{kj}$$

que se obtiene como conclusión al comparar las ecuaciones (5.8) con (5.12). Basta entonces, tener el par de simetrías η^j, $\overline{\eta}^j$ (o ξ^j, $\overline{\xi}^j$), para obtener las otras dos simetrías, sin más que aplicar estas relaciones. En ese sentido es que llamamos a dos de estas simetrías, conformes (pues no hacen más, que multiplicar a las ecuaciones de movimiento transformadas, por la matriz Λ) y a las otras dos, simetrías de s-equivalencia genuinas.

Es interesante notar que el procedimiento de construcción de las simetrías mostrado en las ecuaciones (5.14a-b) puede generalizarse de tal manera que cualquier potencia entera de la matriz Λ_i^j produce otra simetría,

$$\overline{\xi}^{j\prime} = \left(\Lambda_i^j\right)^k \eta^i$$

Esta relación es similar a la obtenida para generar una jerarquía infinita de transformaciones de simetría en la teoría de soluciones de la ecuación de Korteweg-de Vries (Olver P.J. (1977)).

V. EJEMPLO

En esta última sección mostraremos, en un puro espíritu pictórico, un ejemplo donde aplicaremos las ideas expuestas en la sección V de este trabajo, con el objeto de precisar cuál es la mecánica de aplicación de estas ideas teóricas.

Consideremos el par de lagrangianos equivalentes (Hojman S. Harleston (1981)),

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - q_1^2 - q_2^2) \tag{6.1}$$

y

$$\begin{aligned} \overline{L} = {} & \dot{q}_1 q_1 \dot{q}_2 q_2 + \frac{1}{4}q_2^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{4}\dot{q}_1^2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{24}(\dot{q}_1^4 + \dot{q}_2^4) \\ & - \frac{1}{8}(q_1^4 + q_2^4) + q_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{4}q_1^2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{4}q_2^2\dot{q}_2^2 - \frac{3}{4}q_1^2 q_2^2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

que representan al oscilador armónico isotrópico, bidimensional, con masa y frecuencia igual a la unidad.

Las ecuaciones de movimiento asociadas a estos lagrangianos son, respectivamente,

$$\ddot{q}_i + q_i = 0$$

$$\begin{pmatrix} E & C \\ C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 + q_1 \\ \ddot{q}_2 + q_2 \end{pmatrix} = 0$$

donde

$$E = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2)$$

y

$$C = \dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1 q_2$$

El atento lector puede verificar fácilmente, que tanto E como C, son cantidades conservadas asociadas a este sistema dinámico.

Es importante notar, que las ecuaciones de movimiento asociadas a estos lagrangianos, comparten exactamente el mismo espacio solución, aunque estas ecuaciones diferenciales resulten distintas.

Las matrices W y $\overline{W}$ definidas en (4.19), son respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

$$\begin{pmatrix} E & C \\ C & E \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

Planteando ahora la ecuación (cf. ecuación (5.9)),

$$\frac{\overline{d}}{dt} G = \overline{L}$$

obtenemos como solución particular para la función G,

$$G = \frac{3}{8} q_1^2 q_2 \dot{q}_2 + \frac{3}{8} q_2^2 q_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{8} q_2 \dot{q}_1^2 \dot{q}_2 + \frac{1}{8} q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{24} \dot{q}_1^3 q_1 + \frac{1}{24} \dot{q}_2^3 q_2 + \frac{1}{8} q_1^3 \dot{q}_1 + \frac{1}{8} q_2^3 \dot{q}_2 \tag{6.5}$$

y aplicando la relación (5.10) obtenemos la simetría de s-equivalencia,

$$\overline{\xi}_1 = \frac{1}{4}(q_1 E + q_2 C) \tag{6.6}$$

$$\overline{\xi}_2 = \frac{1}{4}(q_2 E + q_1 C) \tag{6.7}$$

Resolviendo ahora, la ecuación (cf. ecuación (5.11)),

$$\frac{\overline{d}}{dt} \overline{G} = L$$

obtenemos,

$$\overline{G} = \frac{1}{2}(q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2) \tag{6.8}$$

que nos permite construir otra simetría de s-equivalencia vía (5.12),

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \frac{q_1 E - q_2 C}{E^2 - C^2} \tag{6.9}$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \frac{q_2 E - q_1 C}{E^2 - C^2} \tag{6.10}$$

Las correspondientes simetrías conformes construidas a partir de (5.14) son,

$$\eta_i = \frac{1}{2} q_i \tag{6.11}$$

$$\overline{\eta}_i = \frac{1}{4} q_i \tag{6.12}$$

Es interesante notar que para éste sistema dinámico particular la ecuación de variación aparece completamente desacoplada, y por tanto, pueden intercambiarse los índices 1,2 en las expresiones dadas para las simetrías asociadas al par de lagrangianos equivalentes, de tal manera que pueden obtenerse otras simetrías de s-equivalencia asociadas a éste sistema dinámico.

APENDICE A

LA ECUACION DE JACOBI

Aunque las ecuaciones de movimiento (1.1) son, en general, ecuaciones diferenciales no lineales, la ecuación de variación (1.12), obtenida en el texto, resulta ser un conjunto de n ecuaciones diferenciales parciales lineales. Sin embargo, en la práctica no es fácil encontrar soluciones para esta ecuación y el problema podría resultar tan complicado, como la integración de las ecuaciones de movimiento.

Es necesario remarcar, que rara vez se utiliza la ecuación de variación para obtener simetrías de las ecuaciones de movimiento. En contraposición, es muy usual estudiar las simetrías de un sistema dinámico dado, a partir de las simetrías de la función lagrangiana asociada al sistema. La razón de este hecho, se debe fundamentalmente, a que la relación entre simetrías y cantidades conservadas, se realiza a través del formalismo lagrangiano.

Es interesante entonces, reescribir la ecuación de variación en términos de una función lagrangiana $L(q^i, \dot{q}^i, t)$, cuando ésta existe, por supuesto.

Supongamos que tenemos una función $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ tal que,

$$E_i L = W_{ij}(\ddot{q}^j - F^j) \tag{A.1}$$

donde†,

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \tag{A.2}$$

y

$$E_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial}{\partial q^i} \tag{A.3}$$

El sistema (A.1), será equivalente al sistema (1.1), si el determinante de la matriz W es distinto de cero. En este caso los dos sistemas compartirán exactamente el mismo espacio solución.

Podemos ahora, realizar el mismo procedimiento de construcción de la ecuación de variación, mostrado en la sección II, con la definición,

$$M^i(q^j, \dot{q}^j, \ddot{q}^j, t) = E_i L \tag{A.4}$$

La variación de coordenadas, producida en esta función por una trasformación infinitesimal arbitraria del tipo (1.5) será,

$$E_i(\bar{q}^j, \dot{\bar{q}}^j, \ddot{\bar{q}}^j, t) = E_i L(q^j, \dot{q}^j, \ddot{q}^j, t) + \epsilon(\xi^j \frac{\partial}{\partial q^j} E_i L + \dot{\xi}^j \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} E_i L + \ddot{\xi}^j \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^j} E_i L) \tag{A.5}$$

(cf. ecuaciones (1.7) y (1.10)).

† Para sistemas regulares, sin constricciones el determinante de la matriz (A.2) es distinto de cero. Supondremos que éste es el caso.

Si utilizamos las relaciones,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}^j} E_i L &= W_{ij} \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \frac{d}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial}{\partial q^j} \\ \frac{\partial}{\partial q^j} \frac{d}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q^j}\end{aligned}$$

la ecuación (A.5) puede escribirse de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}E_i L(\bar{q}^j, \dot{\bar{q}}^j, \ddot{\bar{q}}^j, t) = E_i L(q^j, \dot{q}^j, \ddot{q}^j, t) + \epsilon[W_{ij}\ddot{\xi}^j + (\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \\ - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial q^i} + \frac{d}{dt} W_{ij})\dot{\xi}^j + (\frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial q^j})\xi^j] \qquad (A.6)\end{aligned}$$

Supongamos ahora, que la trayectoria inicial $q^i(t)$, es una curva solución del sistema (A.1) y que la transformación infinitesimal ξ^j, es una simetría de las ecuaciones de Euler-Lagrange (A.1), de tal manera, que la trayectoria variada $\bar{q}^i(t)$, será también, una solución de las ecuaciones de movimiento. Como las ecuaciones (A.1) se anulan idénticamente sobre sus trayectorias solución, obtenemos*,

$$\begin{aligned}W_{ij}\overline{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}}\xi^j + (\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial q^i} + \overline{\frac{d}{dt}} W_{ij})\overline{\frac{d}{dt}}\xi^j \\ + (\overline{\frac{d}{dt}}\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial q^j})\xi^j = 0 \qquad (A.7)\end{aligned}$$

que es la llamada ecuación de Jacobi†. Sus soluciones ξ^i son transformaciones de simetría de las ecuaciones (A.1). Además, es fácil verificar, que esta ecuación se reduce a la ecuación de variación (1.12) si se utilizan las relaciones de Sarlet (ver apéndice

* Ver Santilli (1978).

† Ver por ejemplo Santilli (1978).

B), que son precisamente las condiciones de existencia de una función lagrangiana que cumpla la ecuación (A.1).

Algunos comentarios finales: Dada una ecuación de movimiento Newtoniana, podría suceder que no existiera función lagrangiana asociada a estas ecuaciones. En este caso, no es posible plantear la ecuación de Jacobi, siendo siempre posible plantear la ecuación de variación correspondiente.

En muchos casos la función lagrangiana no esta únicamente determinada, más allá de la indeterminación usual relacionada con la suma de la derivada total respecto al tiempo de alguna función arbitraria.

Dos funciones lagrangianas que dan origen a ecuaciones de movimiento equivalentes, se llaman lagrangianos equivalentes. Sin embargo, la ecuación de Jacobi permanece invariante, ya sea escrita en términos de una función lagrangiana dada, o de cualquier función lagrangiana equivalente.

APENDICE B

LAS CONDICIONES DE HELMHOLTZ

Se ha encontrado que en algunas areas de la física, la solución de los problemas dinámicos puede ser fuertemente simplificada, si las ecuaciones fundamentales se expresan en la forma de un principio variacional. El principio de Fermat (Mandelstam S. Yourgrau (1979)) en óptica y el principio de Weiss en Mecánica Analítica, son dos ejemplos bien conocidos.

Aunque en Mecánica Clásica, las ecuaciones de Newton pueden plantearse, en general, sin restricción alguna a cerca de la naturaleza de las fuerzas, no sucede lo mismo con la formulación alternativa de estas ecuaciones, construída a través del formalismo de Euler-Lagrange.

La restricción mejor conocida, es aquella de que a todo sistema de ecuaciones Newtonianas conservativo, siempre puede asociarse una función lagrangiana de la forma $L = T - V$, donde T es la energía cinética y V la energía potencial.

Por otra parte, el conocimiento de una función lagrangiana y de sus propiedades de invariancia, nos permiten obtener leyes de conservación de los sistemas dinámicos. Es entonces muy importante investigar cúales sistemas Newtonianos pueden plantearse a través de un principio variacional. La primera investigación sobre esta cuestión fue hecha por Helmholtz, estudiando el siguiente problema:

Dado el conjunto de ecuaciones diferenciales,

$$M^i(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, t) = 0 \tag{B.1}$$

bajo qué condiciones existe una función $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ tal que,

$$E_i L \equiv M^i(q^j, \dot{q}^j, \ddot{q}^j, t) \tag{B.2}$$

donde,

$$E_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial}{\partial q^i}$$

Las condiciones encontradas por Helmholtz para la existencia de tal función, son las siguientes,

$$\frac{\partial M^i}{\partial \ddot{q}^j} = \frac{\partial M^j}{\partial \ddot{q}^i} \tag{B.3}$$

$$\frac{\partial M^i}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial M^j}{\partial \dot{q}^i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M^i}{\partial \ddot{q}^j} + \frac{\partial M^j}{\partial \ddot{q}^i}\right) \tag{B.4}$$

$$\frac{\partial M^i}{\partial q^j} - \frac{\partial M^j}{\partial q^i} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M^i}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial M^j}{\partial \dot{q}^i}\right) \tag{B.5}$$

Dado el sistema (B.1), estas relaciones deben cumplirse como identidades.

En este apéndice construiremos una demostración posible* de estas condiciones, utilizando el cálculo funcional.

---

* Otro interesante enfoque sobre las condiciones de Helmholtz construidas a partir de los conceptos de forma variacional y sistema adjunto puede verse en Santilli (1978).

Consideremos una cierta funcional $I(u)$. Al aplicarle la transformación infinitesimal $u \to u + \delta u$, la variación inducida en la funcional $I(u)$ se podrá escribir, en general, como,

$$\delta I(u) = \int_G A(x, u)\delta u dx$$

donde el integrando es una funcional de la variable u, que depende de la posición del punto x en la región G de integración.

La derivada funcional de $I(u)$ respecto a u en el punto x se define por,

$$\frac{\delta I(u)}{\delta u(x)} = A(x, u)$$

Aplicaremos esta definición a la variación de la funcional de acción (2.1). Sin considerar explícitamente los terminos dependientes de los puntos extremos, podemos escribir,

$$\delta S(q(t)) = -\int E_i L(q(t))\xi^i(q(t))dt \tag{B.6}$$

y por tanto

$$\frac{\delta S(t)}{\delta q^i(t)} = E_i L(t) \tag{B.7}$$

Así, utilizando la relación,

$$\frac{\delta q^i(t)}{\delta q^j(t')} = \delta^i_j \delta(t - t') \tag{B.8}$$

donde δ^i_j es la delta de Kronecker y $\delta(t-t')$ es la delta de Dirac, es fácil mostrar que la derivada funcional del lagrangiano respecto de las coordenadas es,

$$\frac{\delta}{\delta q^j(t')}L(q^i(t),\dot{q}^i(t),t) = \delta(t-t')\frac{\partial L}{\partial q^i}(t) + (\frac{d}{dt}\delta(t-t'))\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(t) \qquad (B.9)$$

Mostraremos, a continuación, que las condiciones de integrabilidad para que una función lagrangiana cumpla con la relación (B.2) pueden escribirse de la siguiente manera,

$$\frac{\delta M^i(t)}{\delta q^j(t')} = \frac{\delta M^j(t')}{\delta q^i(t)} \qquad (B.10)$$

Afirmamos que estas condiciones, aseguran la existencia de una funcional de acción tipo (2.1) tal que,

$$\delta S(q(t)) = \int dt M^j(t)\xi^j(t) \qquad (B.11)$$

La demostración consiste en desarrollar la condición (B.10), en todos sus términos, lo que nos conduce al siguiente resultado,

$$\begin{aligned}(\frac{\partial M^i}{\partial q^j}(t) - \frac{\partial M^j}{\partial q^i}(t'))\delta(t-t') + (\frac{\partial M^i}{\partial \dot{q}^j}(t) + \frac{\partial M^j}{\partial q^i}(t'))\frac{d}{dt}\delta(t-t') \\ + (\frac{\partial M^i}{\partial \ddot{q}^j}(t) - \frac{\partial M^j}{\partial \ddot{q}^i}(t'))\frac{d^2}{dt^2}\delta(t-t') = 0 \qquad (B.12)\end{aligned}$$

Multiplicando esta ecuación por una función arbitraria $\psi(t')$ e integrando sobre t' obtenemos,

$$\begin{aligned}&(\frac{\partial M^i}{\partial q^j}(t)-\frac{\partial M^j}{\partial q^i}(t)+\frac{d}{dt}\frac{\partial M^j}{\partial \dot{q}^i}(t)-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial M^j}{\partial \ddot{q}^i}(t))\psi(t)\\&+(\frac{\partial M^i}{\partial \dot{q}^j}(t)+\frac{\partial M^j}{\partial \dot{q}^i}(t)-2\frac{d}{dt}(\frac{\partial M^j}{\partial \ddot{q}^i}(t)))\dot{\psi}(t)\\&+(\frac{\partial M^i}{\partial \ddot{q}^j}(t)-\frac{\partial M^j}{\partial \ddot{q}^i}(t))\ddot{\psi}(t)=0\end{aligned} \qquad (B.13)$$

y tomando en cuenta que la función $\psi(t')$ es arbitraria obtenemos, consecuentemente, las condiciones de Helmoholtz (B.3-4-5).

ECUACIONES DE SARLET

Supongamos que el sistema de ecuaciones diferenciales (B.1) puede realizarse en forma Newtoniana,

$$M^i=\ddot{q}^i-F^i(q^j,\dot{q}^j,t)=0 \qquad (B.14)$$

Si sustituímos directamente (B.14) en (B.3-4-5) obtenemos las condiciones de Helmholtz para este sistema, expresadas en términos de las fuerzas generalizadas F^i. Ahora bien, más que encontrar una función lagrangiana, que a través del principio variacional tenga asociadas ecuaciones del movimiento idénticas a (B.14), nos interesa encontrar una función lagrangiana, que tenga asociadas ecuaciones de movimiento *equivalentes* a las ecuaciones (B.14). En otras palabras, lo que realmente interesa es reproducir, a través del formalismo lagrangiano, un espacio solución determinado, mas que la estructura de las ecuaciones de movimiento inicialmente propuestas.

Con este objetivo, se propone estudiar el problema inverso, desde un conjunto de ecuaciones equivalente a (B.14), lo más general posible, dado por,

$$W_{ij}(\ddot{q}^j - F^j) = 0 \tag{B.15}$$

con

$$\det W_{ij} \neq 0$$

y preguntarse ahora, sobre la existencia de una función lagrangiana, que tenga asociadas ecuaciones de movimiento del tipo (B.15).

Esta manera de replantear el problema inverso permite, escribir las condiciones de Helmholtz en términos de la matriz W_{ij} y las fuerzas generalizadas.

Así planteado, la pregunta por la existencia de una función lagrangiana, puede intercambiarse por la pregunta por la existencia de una matriz W_{ij}, tal que, el sistema (B.15) permita una formulación variacional†.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange, para una función lagrangiana de la forma $L(q^i, \dot{q}^i, t)$, pueden rescribirse de la siguiente manera,

$$E_i L = W_{ij}\ddot{q}^j + V_i \tag{B.16}$$

---

† Aunque aquí no entraremos en detalle a este interesante problema, el lector interesado puede consultar Sarlet (1982).

donde

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \tag{B.17}$$

y

$$V_i = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{B.18}$$

Despejando las aceleraciones del sistema (B.16) obtenemos,

$$\ddot{q}^j = -(W_{ij})^{jk} V_k \tag{B.19}$$

Por otro lado, al conminar a las ecuaciones (B.15), para que puedan escribirse como ecuaciones de Euler-Lagrange para algún lagrangiano L, las fuerzas F^i deberán poderse escribir como,

$$F^i = -(W^{-1})^{ik} V_k \quad . \tag{B.20}$$

o

$$V_j = -W_{ij} F^j \tag{B.21}$$

que se obtiene directamente, al igualar las aceleraciones del sistema (B.15), con aquellas del sistema (B.19).

Sustituyendo en (B.16) la expresión (B.20), obtenemos la relación,

$$E_i L = W_{ij}(\ddot{q}^j - F^j) \tag{B.22}$$

El problema inverso podrá entonces plantearse de la siguiente manera: ¿ Existe una matriz W_{ij}, tal que la ecuación (B.22) se cumpla, para alguna función lagrangiana $L(q^i, \dot{q}^i, t)$?.

Las condiciones que debe cumplir la matriz W_{ij} pueden plantearse así:

Dado el sistema lagrangiano,

$$W_{ij}\ddot{q}^j - V_j = 0 \tag{B.23}$$

las condiciones de Helmholtz asociadas a este sistema son,

$$\begin{aligned}
W_{ij} &= W_{ji}\\
\frac{\partial W_{ij}}{\partial \dot{q}^k} &= \frac{\partial W_{ik}}{\partial \dot{q}^j}\\
\frac{\partial V_i}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial V_j}{\partial \dot{q}^i} &= 2(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k})W_{ij}\\
\frac{\partial V_i}{\partial q^j} - \frac{\partial V_j}{\partial q^i} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k})(\frac{\partial V_i}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial V_j}{\partial \dot{q}^i})
\end{aligned}$$

y usando las definiciones,

$$A_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}$$

$$B_{ij} = -\frac{\partial F^i}{\partial q^j}$$

$$V_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial V_i}{\partial \dot{q}^j}\right)$$

las condiciones de Helmholtz pueden reescribirse como*,

$$\overline{\frac{d}{dt}} W = WA - A^t W \qquad (B.24)$$

$$V = A^t W - WA \qquad (B.25)$$

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial W_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial W_{ik}}{\partial q^j} \qquad (B.26)$$

$$\overline{\frac{d}{dt}} V = B^t W - WB \qquad (B.27)$$

que son las llamadas ecuaciones de Sarlet. En particular, a la ecuación (B.24) la hemos llamado en el texto ecuación de Sarlet. Si esta ecuación tiene solución para una matriz W, el problema inverso del cálculo de variaciones tendrá solución y una función lagrangiana podrá ser asociada al sistema (B.1). En otro caso, el sistema propuesto no tendrá formulación variacional posible.

Un comentario final. Las ecuaciones (B.24-25-27), son las condiciones de integrabilidad de las ecuaciones (3.11-12), obtenidas en el texto. Esta afirmación puede argumentarse con la siguiente construcción:

---

*Sarlet (1982).

La ecuación de movimiento de μ_i (3.11), escrita en términos de una función lagrangiana, tiene la siguiente estructura,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad (B.28)$$

Ahora bien, si hacemos las parciales respecto de $\dot{q}^j$ de la ecuación (B.28) y simetrizamos $(i \rightarrow j)$, obtenemos la ecuación (B.24) de Sarlet.

Repitiendo el procedimiento pero ahora antisimetrizando $(i \rightarrow j)$ obtenemos la ecuación (B.25), notando que la matriz V_{ij} puede escribirse como,

$$V_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}$$

Finalmente, para encontrar la ecuación (B.27), derivamos la expresión (B.28) respecto de q^j y antisimetrizamos $(i \rightarrow j)$. Como la ecuación de movimiento de μ_i puede escribirse en la forma (B.28) y como las condiciones de integrabilidad de (B.28) son precisamente las ecuaciones de Sarlet, el hecho de que exista solución para el problema inverso, garantiza automáticamente, que las condiciones (3.11-12) tienen solución.

Notése que aquí esta planteado el problema inverso, para funciones lagrangianas independientes de las aceleraciones. La condición (3.11) podría no cumplirse, y en este caso puede ser posible aún (si la ecuación (3.12) tiene solución), escribir un lagrangiano lineal en las aceleraciones asociado al sistema (B.1).

APENDICE C

DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE LAS TRAZAS

El teorema de las trazas, tal y como aparece en la ecuación (4.16), puede demostrarse fácilmente usando para las derivadas totales respecto al tiempo sobre las trayectorias solución, de las matrices A y $\overline{A}$ las respectivas ecuaciones de Sarlet.

Sin embargo, lo que nos interesa en este apéndice, no es realizar esta demostración directa del teorema de las trazas, sino introducir al lector en el lenguaje del formalismo de Cartan y mostrar que con esta herramienta, puede plantearse el teorema de las trazas desde una perspectiva diferente: La aplicación sucesiva de una transformación de simetría de s-equivalencia asociada a una función lagrangiana, produce que las potencias enteras de la matriz Λ (ver ecuación (4.13)), sean constantes de movimiento del sistema.

La idea básica de la introducción del formalismo de Cartan, consiste en expresar las ecuaiones de E-L, en términos de un sistema del doble de ecuaciones diferenciales de primer orden en el formalismo lagrangiano†.

---

† Aunque los lagrangianos para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden (cf. ecuación(3.4)) son lineales en las velocidades y por tanto, singulares, presentando consecuentemente, problemas para la construcción del formalismo hamiltoniano correspondiente, tienen por otra parte, interesantes propiedades: Dado un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden (3.2) siempre es posible construir un lagrangiano asociado al sistema, además las simetrias de s-equivalencia para este tipo de lagrangianos, coinciden con las simetrias de las ecuaciones de movimiento (ver Hojman S. Zertuche (1984)). Por otra parte éste tipo de lagrangianos se usan frecuentemente en la física, como por ejemplo el lagrangiano de Dirac.

El integrando de la funcional de acción (2.1), puede definirse como una 1-forma diferencial, llamada la forma de Cartan‡,

$$\theta(L) = (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i)dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}dq^i \tag{C.1}$$

pensando al conjunto de coordenadas $(q^i, \dot{q}^i, t)$ como independientes. A partir de esta 1-forma, es posible construir una forma simpléctica asociada, dada por,

$$\omega = d\theta \tag{C.2}$$

donde "*d*" representa la operación de diferenciación exterior.

En coordenadas, la 2-forma (C.2), tiene la siguiente estructura*,

$$\begin{pmatrix} \beta_{ij} & W_{ij} & \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \\ -W_{ij} & 0 & -\frac{\partial H}{\partial \dot{q}^j} \\ \frac{\partial H}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} & \frac{\partial H}{\partial \dot{q}^i} & 0 \end{pmatrix} \tag{C.3}$$

donde W_{ij} esta definida por (4.19) y,

$$\beta_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j}$$

$$H(q^i, \dot{q}^i, t) = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\dot{q}^j$$

‡ Camprin M. (1983).

* Nótese que esta matriz es de $2n+1$ x $2n+1$ componentes.

Por otra parte, dada una ecuación diferencial de segundo orden del tipo (1.1), siempre es posible construir el campo vectorial característico, dado por,

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + F^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \qquad (C.4)$$

que no es otra cosa, mas que la derivada total respecto al tiempo sobre las curvas solución del sistema, que hemos definido en (1.13).

En esta notación las ecuaciones de E-L son,

$$i_\Gamma d\theta = 0 \qquad (C.5)$$

donde "i"es el producto interno entre formas diferenciales y campos vectoriales.

Supongamos ahora, que tenemos una cierta transformación infinitesimal de simetría asociada a las ecuaciones de movimiento, representada por la función $\xi^i(q^j, \dot{q}^j, t)$. Un campo vectorial puede asociarse con esta transformación, dado por,

$$Y = \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \eta^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \qquad (C.6)$$

donde $\eta^i = \Gamma(\xi^i)$. Esta transformación será una simetría de las ecuaciones de movimiento, si y sólo si,

$$\mathcal{L}_\Gamma Y = [\Gamma, Y] = 0 \qquad (C.7)$$

donde $\mathcal{L}_\Gamma$, representa la derivada de Lie a lo largo de las curvas características del sistema (1.1) y el corchete, es el corchete de Lie usual entre campos vectoriales.

En componentes la relación (C.7) es,

$$Y(F^i) = \Gamma(\eta^i) \qquad \eta^i = \Gamma(\xi^i) \tag{C.8}$$

que es una manera equivalente de escribir la ecuación de variación (1.12).

Ahora bien, la condición para que ésta transformación de simetría sea una simetría de Noether asociada al lagrangiano L, será,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y d\theta &= 0 \\ &= i_Y d(d\theta) + d(i_Y d\theta) \end{aligned} \tag{C.9}$$

y como el primer término se anula, obtenemnos,

$$i_Y d\theta = dF$$

lo que implica que F es una cantidad conservada, asociada al campo de simetría Y.

La ecuación (C.9), implica que la forma simpléctica $d\theta$, es invariante ante la transformación de simetría dada, es decir,

$$d\theta(L) = d\theta(\overline{L})$$

donde $\overline{L}$ es la variación funcional producida en L por la variación Y. Las ecuaciones de movimiento son, por tanto, invariantes ante la simetría de Noether Y.

Supongamos que tenemos ahora, dos lagrangianos equivalentes L, $\overline{L}$ y que la simetría Y, es una simetría de s-equivalencia asociada a L, que produce el cambio funcional de

$L \rightarrow \overline{L}$. Como las ecuaciones de movimiento, se transforman ahora covariantemnente,

$$\mathcal{L}_Y d\theta(L) = d\theta(\overline{L}) \tag{C.10}$$

La condición para que la simetría Y sea de s-equivalencia puede escribirse como†,

$$\mathcal{L}_\Gamma \omega(L) = 0 \tag{C.11}$$

si y sólo si

$$\mathcal{L}_\Gamma \overline{\omega}(\overline{L}) = 0 \tag{C.12}$$

Demostraremos a continuación, que esta definición de simetría de s-equivalencia nos conduce directamente al teorema de las trazas.

Sean ω y $\overline{\omega}$, las matrices asociadas a los lagrangianos L y $\overline{L}$, respectivamente. Definimos,

$$\Lambda = \overline{\omega}(\omega^{-1}) \tag{C.13}$$

Introduciendo la unidad, en la forma $\omega^{-1}\omega$, en la ecuación (C.12) obtenemos,

$$\mathcal{L}_\Gamma \Lambda = 0 \tag{C.14}$$

---

† Las siguientes relaciones pueden mostrarse facilmente utilizando la identidad,

$$\mathcal{L}_\Gamma d\alpha = d(i_\Gamma d\alpha)$$

ver por ejemplo, Abraham R. y Marsden J.E. (1978) pp. 121.

por tanto, la traza de Λ es una constante de movimiento.

Con la misma simetría de s-equivalencia Y, podemos construir otra forma simpléctica,

$$\mathcal{L}_Y \overline{\omega} = \overline{\overline{\omega}} \tag{C.15}$$

con la propiedad,

$$\mathcal{L}_\Gamma \overline{\overline{\omega}} = 0 \tag{C.16}$$

Tomando la derivada de Lie a lo largo de Γ, en la ecuación (C.15), obtenemos,

$$\mathcal{L}_\Gamma \mathcal{L}_Y \overline{\omega} = 0 \tag{C.17}$$

e introduciendo la unidad, en la forma $\omega\omega^{-1}$, en esta ecuación, tenemos,

$$\mathcal{L}_\Gamma \mathcal{L}_Y \Lambda + \mathcal{L}_\Gamma \Lambda^2 = 0 \tag{C.18}$$

Utilizando la identidad,

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X$$

obtenemos,

$$\mathcal{L}_\Gamma \Lambda^2 = 0$$

que implica que la traza de Λ^2 es una constante de movimiento.

Este procedimiento puede repetirse inductivamente para mostrar que la traza de las potencias enteras de Λ son constantes de movimiento.

El teorema de las trazas, aparece aquí, como la aplicación sucesiva de la transformación de simetría Y sobre la forma simpléctica ω. Nótese que si,

$$tr\Lambda = F$$

donde F es una constante de movimiento, entonces

$$\mathcal{L}_Y F = \overline{F}$$

es otra constante de movimiento, que no necesariamente es independiente de F.

Discutiremos ahora, sobre la posibilidad de construir un formalismo de primer orden asociado a los lagrangianos del tipo (3.10). En este caso, como el lagrangiano depende de las aceleraciones, es posible definir los momentos canónicos,

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i} \qquad (C.19)$$

y

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i} \qquad (C.20)$$

asociados a las coordenadas q^i y $\dot{q}^i$ respectivamente.

Sustituyendo la forma funcional (3.10) para L, en estas definiciones, obtenemos,

$$\pi_i = -\overline{\frac{d}{dt}}\mu_i - \mu_j \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i} \tag{C.21}$$

$$p_i = \mu_i \tag{C.22}$$

Definiendo consecuentemente la función "hamiltoniana" como,

$$\begin{aligned} H &= \dot{q}^i \pi_i + \ddot{q}^i p_i - L \\ &= -\dot{q}^i (\overline{\frac{d}{dt}}\mu_i + \mu_j \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i}) + F^i \mu_i \end{aligned} \tag{C.22}$$

podemos escribir la correspondiente forma de Cartan, siguendo la misma lógica de construcción que la original (C.1), de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \theta(L) = &(\dot{q}^i (\overline{\frac{d}{dt}}\mu_i + \mu_j \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i}) + F^i \mu_i) dt \\ &- (\overline{\frac{d}{dt}}\mu_i + \mu_j \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i}) dq^i + \mu_i d\dot{q}^i \end{aligned} \tag{C.23}$$

Para el formalismo de primer orden, explícitamente independiente del tiempo ($dt = 0$ en (C.23)), obtenemos la forma simpléctica asociada,

$$\sigma = d\theta = \begin{pmatrix} B_{ij} & A_{ij} \\ -A_{ij} & C_{ij} \end{pmatrix} \tag{C.24}$$

con las definiciones para B_{ij} , A_{ij} y C_{ij} dadas por (4.32-7-31), respectivamente. Esta es la matriz σ usada en el texto (cf. ecuación (4.30)).

Un lagrangiano de la forma $L(q^i \dot{q}^i, t)$ existe, si y sólo si $C_{ij} = 0$. En este caso, la forma simpléctica (C.24), se reduce a (C.3), con $dt = 0$. Las matrices A_{ij} y B_{ij} se reducen consecuentemente a las matrices W_{ij} y β_{ij} de este apéndice.

La demostración del teorema de las trazas para σ, sigue exactamente el mismo procedimiento mostrado en el caso de ω.

Un comentario final sobre la representación de Lax de los sistemas dinámicos, viene al caso: La ecuación (C-14) puede escribirse en coordenadas como,

$$\overline{\frac{d}{dt}} \Lambda_a^b = \Lambda_a^c \frac{\partial f^b}{\partial x^c} - \Lambda_c^b \frac{\partial f^c}{\partial x^a} \qquad (C.25)$$

donde

$$\Lambda_a^b = \overline{\sigma}_{ac} (\sigma^{bc})^{-1}$$

y el vector f^a esta definido en términos de las fuerzas F^i por las ecuaciones,

$$x^i = q^i \quad x^{i+n} = \dot{q}^i \quad f^i = x^{i+n} \quad f^{i+n} = F^i(q^j, \dot{q}^j, t)$$

Evidentemente si se toma la traza en la ecuación (C.25) recuperamos el teorema de las trazas, que aquí aparece como concecuencia del teorema de Lax (Marmo G. Rubano C. (1983)).

CONCLUSIONES, COMENTARIOS Y PERSPECTIVAS

Este trabajo fue inspirado inicialmente por la siguiente pregunta: Dadas dos funciones lagrangianas que describen a un mismo sistema dinámico, ¿ cómo es posible que una función lagrangiana tenga una simetría, que no posee la otra función lagrangiana, siendo que ambas describen al mismo sistema dinámico?.

La respuesta encontró firme asidero en la propuesta de Hojman y Urrutia (1980) para resolver el problema inverso del cálculo de variaciones y en los trabajos posteriores de Hojman *et al* sobre las extensiones del formalismo lagrangiano. La pregunta inicial quedo hasta tal punto revasada que fue posible comenzar a investigar sobre una cuestión más interesante: las posibles analogías que podrían construirse, a partir de estos trabajos, con la teoría de Hamilton-Jacobi.

Después de realizar algunas maniobras, se llegó a la conclusión de que dentro del formalismo lagrangiano se podía plantear una ecuación diferencial parcial lineal cuya solución particular es relevante para asociar simetrías con lagrangianos equivalentes. Hablando en términos muy generales, la propuesta de este trabajo contiene un método de integración de la ecuación de variación (1.12) cuando el sistema dinámico correspondiente puede deducirse a través de un principio variacional. Así, el conocimiento de dos funciones lagrangianas equivalentes permite la obtención de varias simetrías s-equivalentes por medio de una solución a una sola ecuación diferencial parcial lineal. De otra manera el conocimiento de una simetria para un sistema dinámico determinado requeriria de resolver las n ecuaciones diferenciales parciales, en general acopladas, que representan a la ecuación de variación, para alguna solución particular. Es posible que este método tenga alguna relación con los métodos de integración de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, puesto que el conocimiento de dos funciones lagrangianas equivalentes, o en su caso, de una función lagrangiana y una simetría de s-equivalencia, permite escribir la representación de Lax del sistema dinámico. Esto es importante para la integración de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

Ciertamente, la obtención de dos funciones lagrangianas equivalentes no es un asunto nada sencillo y su conocimiento implica de suyo, una integración parcial del sistema dinámico dado. Este punto puede verse claramente si se considera que dos lagrangianas equivalentes permiten la construcción de cantidades conservadas directamente, sin necesidad de realizar integral alguna.

En el caso en que se conoce solamente una función lagrangiana podría intentarse un *tour de force*; la integración del sistema dinámico vía la obtención de la solución general a la ecuación diferencial parcial lineal,

$$\overline{\frac{d}{dt}}G = L$$

que implica la aplicación del teorema de Liouville expresado por la relación,

$$\overline{\frac{d}{dt}}F = 0$$

donde F es una cantidad conservada.

Un planteamiento que surge de este nuevo enfoque del formalismo lagrangiano aplicado ahora a ecuaciones diferenciales de primer orden, permite una mejor comprensión de la relación entre el formalismo lagrangiano y el formalismo hamiltoniano que tan importante es para el planteamiento de los problemas en la teoría cuántica. En especial podría alumbrarse el camino hacia la comprensión de la relación entre transformaciones unitarias y transformaciones canónicas.

Es también interesante plantearse la posibilidad de que los resultados de este trabajo puedan generalizarse a la teoría de campo clásica.

Pero sin lugar a dudas uno de los problemas más interesantes aparece cuando se hacen notar las ambiguedades que plantea el formalismo lagrangiano para la cuantización de problemas clásicos: Dadas dos funciones lagrangianas equivalentes sus correspondientes funciones hamiltonianas conducen, vía el procedimiento de cuantización canónico, sobre problemas cuánticos distintos. Esto puede comprenderse fácilmente ya que los hamiltonianos correspondientes no resultan estar relacionados por una transformación unitaria, pues en general las transformaciones de s-equivalencia transforman la forma simpléctica del espacio fase.

Queda por averiguar sobre la posibilidad de extender el concepto de transformación de simetría expuesto en el trabajo y sus posibles relaciones con las transformaciones isoespectrales en teoría cuántica, con supersimetría y con Teoría de Campo.

References

1. Abraham R. Marsden J.E. (1978) *Foundations of Mechanics* 2^{da} Ed., (Reading, Mass. W.A. Benjamin).

2. Arnold V.I.(1978), *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer Verlag, New York).

3. Birkhoff G. Mac Lane S. (1950) *A Survey of Modern Algebra*, 9^{a} Ed., (Macmillan Co. New York).

4. Camprin M. (1983) *A note on non-Noether Constants of Motion* Phys. Lett. A **95** p.209.

5. Goldstein H.(1973) *Classical Mechanics*, 2^{da} Ed., (Addison Wesley, Reading Mass).

6. Havas P.(1973) *"The Conection between Conservation Laws and Invariance Groups: Folklore, Fiction and Fact"*, Acta Phys. Austriaca **38** p. 145-167.

7. Hill E.L.(1951) *"Hamilton's Principle and the Conservation Theorems of Mathematical Physics"* Rev. Mod. Phys. **23** p. 253.

8. Hojman S. Urrutia L.F. (1981) *"On the Inverse Problem of the Calculus of Variations"*, J. Math. Phys. **22**, p.1896.

9. Hojman S. Harleston H.(1981) *" Equivalent Lagrangians: Multidimensional Case"*, J. Math. Phys. **22** p.1414.

10. Hojman S.(1984) *"Symetries of Lagrangians and their Equations of Motion"* J. Phys.A **17** p.2399.

11. Hojman R. Hojman S. Sheinbaum J.(1983) "*A shortcut to construct the Lagrangian from its Equations of Motion*" Phys. Rev. **D 28**, p.1333.

12. Hojman S. Nuñez L. Patiño A. Rago H. (1985) *Symmetries and Conserved quatities in geodesic motion* J. Math. Phys. **27**(1) p.281.

13. Mandelstam S. Yourgrau W. (1979) *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory* Dover, New York.

14. Marmo G. Rubamo C. (1983) *Equivalent Lagrangians and Lax representations* Il Nouvo Cimento **28B** p.70.

15. Landau L.D. Lisfshitz (1970) *Mecánica*, (Vol. 1 Curso de Física Teórica) Reverté, Barcelona.

16. Olver P.J. (1977) *Evolution Equations possessing infinitely many Symetries* J. Math. Phys. **18** p.1212.

17. Sudarshan E.C.G. Mukunda N. (1974) *Classical Dynamics: A Modern Perspective* (Jhon Willey and Sons, New York).

18. Saletan E.J. Cromer A.H. (1971) *Theoretical Mechanics* (Wiley, New York).

19. Santilli R.M. (1978) *Foudations of Theoretical Mechanics I (The inverse problem in Newtonian Mecanics)*, (Springer Verlag, New York.)

20. Sarlet W. (1982) *"The Helmholtz Conditions Revisited: A New Aproach to the Inverse Problem of Lagrangian Dynamics*, J. Phys. **A 15** p.1503.

21. Whittaker E.T.A.(1944) *Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge.

22. Zertuche F. (1983) *Relación entre simetrías y constantes de movimiento en sistemas de ecuaciones diferenecciales y en sistemas lagrangianos.* Tesis de licenciatura en Física, U.N.A.M.