

20/7



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOLITONES TIPO SINE-GORDON

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C O
P R E S E N T A I
ENRIQUE ANDRADE SOLIS

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

MEXICO, D.F.

1989



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INTRODUCCION

La dualidad onda-partícula fue establecida por primera vez en la mecánica cuántica como parte del proceso de estructuración de dicha teoría en los años 20's. En la década de los 60's se conoce de otra nueva conexión entre onda y partícula en la física clásica. La dualidad en la mecánica cuántica se refiere al hecho de que los micro-objetos (electrones, protones, etc.) se comportan en algunas circunstancias como partículas (efecto fotoeléctrico, dispersión Copton, etc.) y en otras como ondas (difracción de electrones). En cambio la dualidad en la física clásica procede de ciertas ecuaciones de onda no-lineales, las cuales exhiben soluciones de ondas solitarias que no se dispersan ni se disipan, y que además conservan su forma y tamaño indefinidamente. A estas ondas solitarias se les llamó solitones.

Las observaciones que de solitones hizo por primera vez John Scott Russell se reportaron en la British Association for the Advancement of Science hace 150 años. En la actualidad el concepto de solitón ha invadido casi todas las ramas de la física y de las ciencias aplicadas.

En el primer capítulo se presenta una breve historia del surgimiento del concepto de solitón. Ahí se definen conceptos tales como onda viajera y onda solitaria, y en términos de estos entes se da la definición de solitón. Finalmente se menciona que el concepto de solitón aparece en las ciencias como un nuevo paradigma.

En el capítulo II se estudia la ecuación de Sine-Gordon. Para este caso se obtienen las soluciones de "solitones ordinarios" y se describen las soluciones de "solitones respiradores" (breather solitons). La última parte del capítulo II está dedicada a las aplicaciones de la ecuación de Sine-Gordon.

Es en el capítulo III donde se repasa brevemente la teoría de la relatividad especial, esto con el fin de establecer la teoría relativista a la Sine-Gordon. Se presenta la dinámica relativista tanto de solitones ordinarios como de solitones respiradores, utilizando los principios variacionales. Finalmente se estudia la dinámica de solitones ordinarios en el caso en que están influenciados por fuerzas externas.

Le corresponde al cuarto capítulo el estudio de la paradoja de los gemelos y el fenómeno de simultaneidad en la teoría de Sine-Gordon. Este capítulo comienza con la revisión de la paradoja de los gemelos en la teoría de la relatividad especial, revisión que se hace con el fin de preparar el camino para abordar el problema de la paradoja de los gemelos en la teoría de Sine-Gordon. Este capítulo se termina con el estudio del problema de simultaneidad en la teoría de Sine-Gordon.

El último capítulo está dedicado a una aplicación más de la ecuación de sine-Gordon: "El dispositivo mecánico Sine-Gordon". En este capítulo se reporta la construcción de un dispositivo mecánico (de la barra de goma) y se propone la construcción de un dispositivo mecánico más elaborado.

III

Con el primer dispositivo se estudian algunas características de los solitones tales como colisiones solitón-solitón y solitón-anti-solitón. Finalmente se dan los resultados obtenidos y las conclusiones.

INDICE

CAPITULO 1.

SOBRE EL CONCEPTO DE SOLITON	1
1.1.- ALGO DE HISTORIA "PEOR ES NADA"	1
1.1.1.- GENESIS DEL CONCEPTO DE SOLITON	
1.1.2.- LA ERA DE LA SIMULACION DIGITAL	
1.1.3.- UN FUTURO PROMETEDOR	
1.2.- SOBRE SOLITONES	6
1.2.1.- ONDAS VIAJERAS Y ONDAS SOLITARIAS	
1.2.2.- QUE ES UN SOLITON?	
1.3.- EL SOLITON COMO UN PARADIGMA	13

CAPITULO 2.

LA ECUACION DE SINE-GORDON	15
2.1.- A MODO DE INTRODUCCION	15
2.2.- LA ECUACION DE SINE-GORDON EXHIBE SOLITONES	15
2.2.1.- LA ECUACION DE SINE-GORDON SURGE EN GEOMETRIA	
2.2.2.- ECUACION DE ONDA LINEAL	
2.2.3.- BAJO QUE CONDICIONES LA ECUACION DE ONDA LINEAL Y NO-LINEAL EXHIBEN SOLITONES	
2.3.- SOLUCIONES DE LA ECUACION DE SINE-GORDON	19
2.3.1.- SOLUCIONES DE AMPLITUDES PEQUEÑAS	
2.3.2.- SOLUCIONES DE AMPLITUDES GRANDES	
2.4.- APLICACIONES DE LA ECUACION DE SINE-GORDON	33
2.4.1.- PROPAGACION DE UNA DISLOCACION EN UN CRISTAL	

- 2.4.2.- PAREDES DE BLOCH EN CRISTALES MAGNETIZADOS
- 2.4.3.- TEORIA NO-LINEAL DE PARTICULAS ELEMENTALES
- 2.4.4.- LA JUNTA DE JOSEPHSON
- 2.4.5.- PROPAGACION DE PULSOS OPTICOS ULTRA-CORTOS

CAPITULO 3.

SINE-GORDON Y RELATIVIDAD ESPECIAL

	52
3.1.- BREVE REPASO DE RELATIVIDAD ESPECIAL	52
3.1.1.- LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ	
3.1.2.- CONSECUENCIAS DE LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ	
3.1.3.- DINAMICA RELATIVISTA	
3.2.- BREVE REPASO DE DENSIDAD LAGRANGIANA	64
3.3.- TEORIA DE SINE-GORDON	65
3.3.1.- LA ECUACION DE SINE-GORDON ES INVARIANTE RELATIVISTA (LA CONTRACCION DE LORENTZ)	
3.3.2.- DINAMICA RELATIVISTA A LA SINE-GORDON	
3.4.- DINAMICA DE SOLITONES EN PRESENCIA DE "FUERZAS" EXTERNAS	76
3.4.1.- LOS SOLITONES SE COMPORTAN COMO PARTICULAS RELATIVISTAS	
3.4.2.- DINAMICA DE SOLITONES EN PRESENCIA DE UNA FUERZA EXTERNA CONSTANTE	
3.4.3.- DINAMICA DE SOLITONES EN PRESENCIA DE UNA FUERZA EXTERNA CONSTANTE MAS UN PEQUEÑO AMORTIGUAMIENTO	

CAPITULO 4.

LA PARADOJA DE LOS GEMELOS Y EL FENOMENO DE SIMULTANEIDAD

EN LA TEORIA DE SINE-GORDON 81

4.1.- LA PARADOJA DE LOS GEMELOS EN RELATIVIDAD ESPECIAL 81

4.1.1.- EN QUE CONSISTE EL PROBLEMA

4.1.2.- LA RUTA DEL TIEMPO RESULTA SER DEPENDIENTE

4.1.3.- ANALISIS DE LA PARADOJA DE LOS GEMELOS

EN RELATIVIDAD ESPECIAL

4.2.- LA PARADOJA DE LOS GEMELOS EN

LA TEORIA DE SINE-GORDON

89

4.2.1.- LA ECUACION DE SINE-GORDON PERTURBADA

COMO UN MODELO MAS REALISTA

4.2.2.- LA PARADOJA DE LOS GEMELOS

4.3.- EL FENOMENO DE SIMULTANEIDAD EN

LA TEORIA DE SINE-GORDON

93

CAPITULO 5.

EL DISPOSITIVO MECANICO SINE-GORDON

97

5.1.- EL DISPOSITIVO MECANICO DE LA BARRA DE GOMA

97

5.1.1.- EL DISPOSITIVO MECANICO COMO UN PROYECTO

EXPERIMENTAL PARA EL LABORATORIO DE FISICA

MODERNA (UN PROYECTO PEDAGOGICO)

5.1.2.- ECUACION DE MOVIMIENTO DEL DISPOSITIVO

MECANICO

5.1.3.- DINAMICA DE UN SOLITON EN EL DISPOSITIVO

MECANICO DE LA BARRA DE GOMA

5.1.4.- ECUACION DE MOVIMIENTO DEL DISPOSITIVO MECANICO CUANDO ESTA AFECTADO POR UNA TORCA EXTERNA Y UN AMORTIGUAMIENTO VISCOSO PEQUEÑO	
5.2.- CONSTRUCCION DEL DISPOSITIVO MECANICO	107
5.2.1.- DESCRIPCION DEL DISPOSITIVO EXPERIMENTAL DE LA BARRA DE GOMA	
5.2.2.- ANTEPROYECTO DE CONSTRUCCION DE UN DISPOSITIVO (DISPOSITIVO DE DISCOS)	
5.3.- PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL Y RESULTADOS	114
5.3.1.- EXPERIMENTO No. 1	
5.3.2.- EXPERIMENTO No. 2	
5.3.3.- EXPERIMENTO No. 3	
5.4.- CONCLUSIONES	122
REFERENCIAS	125

CAPITULO 1

SOBRE EL CONCEPTO DE SOLITON

1.1.- ALGO DE HISTORIA "PEOR ES NADA".

1.1.1.- GENESIS DEL CONCEPTO DE SOLITON

Al parecer el primero en observar ondas solitarias fue el ingeniero y arquitecto naval escocés John Scott Russell hacia 1834. Russell introdujo el concepto de onda solitaria a la ciencia de la hidrodinámica a mediados del siglo pasado. El incidente que lo llevaría a observar las ondas solitarias se debió en gran parte a la necesidad de hacer posible la navegación con naves de vapor en los canales de Edinburgo y Glasgow. Consultado sobre esta posibilidad sugirió hacer antes unas pruebas.

Una vez instalado en los canales de Edinburgo y Glasgow, Russell llevó a cabo una serie de observaciones, para las que utilizaba una barca que era arrastrada por un par de caballos.

El observaba el movimiento de la barca que era rápidamente jalada por el estrecho canal. Esto propiciaba el acumulamiento de una masa de agua en el canal, que en un principio se acumulaba en la proa de la barca en un estado de violenta agitación. En seguida esta acumulación de agua se desplazaba alejándose de la barca a gran velocidad, adquiriendo la forma de una gran elevación solitaria de agua, la cual tenía una forma suavemente redondeada y bien definida. Dicha elevación continuaba su curso a lo largo del canal, aparentemente sin cambiar su forma y sin disminuir su rapidez. El mismo Russell calculó la velocidad de la onda solitaria

que resultó de entre 13 y 14 kilómetros por hora y observó que por espacio de algunos 9 metros preservaba su forma original con una elevación de aproximadamente medio metro. Su velocidad disminuía gradualmente después de un recorrido de tres kilómetros ^(*).

Hacia 1844 Russell publica su reporte sobre ondas de agua. En este trabajo demostró en forma clara los aspectos esenciales de los diferentes tipos de ondas de agua. En su trabajo clasifica a las ondas de agua en cuatro categorías.

- i).- Ondas oscilatorias
- ii).- Ondas capilares
- iii).- Ondas corpusculares
- iv).- Ondas de translación

Fueron estas últimas para las que Russell insistió en elaborar una teoría matemática, estando convencido de que tal teoría sería realizada por futuras generaciones de físicos y matemáticos.

En 1872 Boussinesq derivó una ecuación para ondas en la superficie de un líquido cuyas soluciones resultaron las de ondas solitarias. Esta es la ecuación de Boussinesq. ^(**)

En 1895 los físicos holandeses D.J. Korteweg y H. de Vries derivaron una ecuación que lleva sus nombres ^(***) al estudiar las ondas de agua en un canal rectangular ^(d. 44). Ellos aportaron una

(*) Para más detalles sobre la vida y obra de J.S. Russell ver ref 5.

(**) $\phi_{xx} - \phi_{tt} + 6(\phi^2)_{xx} + \phi_{xxxx} = 0$

(***) $\phi_t + \alpha \phi \phi_x + \phi_{xxx} = 0$ con α una constante

fundamentación analítica sencilla para el estudio de ondas solitarias, donde incluyeron efectos no-lineales y dispersivos a la vez que despreciaron los efectos disipativos.

1.1.2. LA ERA DE LA SIMULACION DIGITAL

En el periodo de tiempo que va de finales del siglo pasado a mediados del actual, la actividad relacionada con la teoría de ondas no-lineales fue casi nula, ya que las soluciones de ondas solitarias fueron consideradas más bien como una curiosidad matemática de la teoría no-lineal de ondas.

En 1939 Frenkel y Kontorova⁽²⁶⁾ derivaron la ecuación que actualmente lleva el nombre de Sine-Gordon^(*) al estudiar la propagación de una dislocación en una cadena infinita de átomos, saltando elásticamente sobre una cadena inferior de átomos similares.

En 1953 Seeger, Donth y Kochendörfer⁽⁵⁴⁾, utilizando la ecuación de Sine-Gordon, describieron el movimiento de una dislocación en un cristal.

No fue sino hasta 1955 que el interés por la teoría de ondas no-lineales empezó a tomar cierta importancia con los trabajos publicados por Fermi, Pasta y Ulam⁽⁴⁹⁾ sobre la conducta de un sistema de osciladores no-lineales, es decir de un conjunto acoplado de resortes no-lineales de masas discretas.

(*) $\phi_{xx} - \phi_{tt} = \text{Sen } \phi$. Originalmente esta ecuación se conocía como la ecuación de Klein-Gordon, el nombre de Sine-Gordon se debe a Martin Kruskal.

Lo importante en estos trabajos es que, por primera vez, se utiliza la simulación digital para resolver el problema numéricamente. También se podría decir que el interés por las ondas solitarias se debió en parte al interés que presentaba para los estudios efectuados en física de plasmas. Así en 1958, en la Unión Soviética Sagdeev postuló que las soluciones podrían propagarse en un plasma en forma similar a como se propagaban en una superficie líquida.

En 1962 Perring y Skyrme⁽⁴⁵⁾ estaban interesados en las soluciones de ondas solitarias de la ecuación de Sine-Gordon como un modelo sencillo para partículas elementales.

Las soluciones obtenidas por simulación digital indicaban que las ondas solitarias emergían de la colisión con la misma forma y velocidad con las que entraban⁽⁴⁵⁾. Perring y Skyrme fueron capaces de dar una expresión analítica de la colisión.

En 1965 Norman Zabusky y Martin Kruskal⁽⁶⁰⁾ usando simulación digital concluyeron que las ondas solitarias (en el formalismo de la ecuación Korteweg y deVries) sufren colisiones elásticas. Mientras investigaban las condiciones bajo las cuales las ondas solitarias podían ser observadas, Zabusky y Kruskal, mostraron lo siguiente: ondas unidireccionales de resortes de masas discretas con una ley de fuerza cuadrática entre las masas podían ser modeladas por la ecuación de Korteweg y deVries; las soluciones obtenidas por simulación digital, arrojaban la información de que en tales soluciones existían entidades que eran persistentes en el tiempo y a las que Zabusky y Kruskal bautizaron con el nombre de

solitones⁽⁶⁰⁾.

Desde entonces y hasta la fecha se han venido derivando nuevas ecuaciones que exhiben soluciones de solitón. Entre ellas están las siguientes⁽⁵⁴⁾: ecuación no-lineal de Schrödinger, ecuación de Hirota, ecuaciones de Manley-Rowe etc. Además se desarrollaron métodos poderosos y sofisticados para resolverlas tales como la transformación de Bäcklund, el método inverso, que puede ser considerado como una generalización no-lineal de la transformada de Fourier etc.

1.1.3.- UN FUTURO PROMETEDOR

Desde que el término de solitón fue acuñado en 1965 por Norman Zabusky y Martin Kruskal se ha venido dando una intensa actividad científica relacionada con el concepto de solitón y sus aplicaciones.

Para apreciar la importancia que ha suscitado el concepto de solitón, se verá a grandes rasgos lo que ha acontecido a partir de los años 60's en lo que se refiere al número de trabajos publicados que incorporan la palabra de solitón en su título.

En 1968 se publicaron 10 trabajos.

Entre 1968-1970 el número de trabajos disminuyó a la mitad, es decir, solo fueron publicados 5 trabajos.

Entre 1970-1972 se observa un incremento; el número de trabajos publicados es de 30.

Entre 1972-1974 hay una drástica disminución; el número de trabajos publicados fue de 8.

Entre 1974-1976, el interés sobre el concepto de solitón

vuelve a tomar auge, ya que el número de trabajos publicados es de 100 aproximadamente.

Entre 1976-1978, a 13 años de que se bautizara el solitón, se da una verdadera explosión en el incremento de trabajos alcanzando casi las 1000 publicaciones.

De 1978 en adelante resulta prácticamente "imposible" seguirle la pista al número de trabajos publicados, ya que, el concepto de solitón ha penetrado en muchas ramas de la física, la matemática y la ingeniería.

Actualmente el uso del concepto de solitón está todavía en la fase inicial de lo que muchos piensan tendrá un uso que crecerá exponencialmente.

1.2. SOBRE SOLITONES

1.2.1.- ONDAS VIAJERAS Y ONDAS SOLITARIAS

Antes de definir el concepto de solitón se tratará de precisar conceptos tales como: onda viajera y onda solitaria.

Sea $y = f(x)$ una función que está representada gráficamente por una curva continua. Si se reemplaza la variable x por la variable $x-a$, donde a es una constante positiva, se obtiene la función $y = f(x-a)$ cuya gráfica tiene la misma forma que la gráfica de la función $f(x)$, pero ha sido desplazada sin deformación hacia la derecha una cantidad a .

Similarmente, para $x+a$, se tiene que $y = f(x+a)$ representa un desplazamiento rígido de la curva hacia la izquierda en la cantidad a . Todo lo anterior está esquematizado en la figura 1.2.

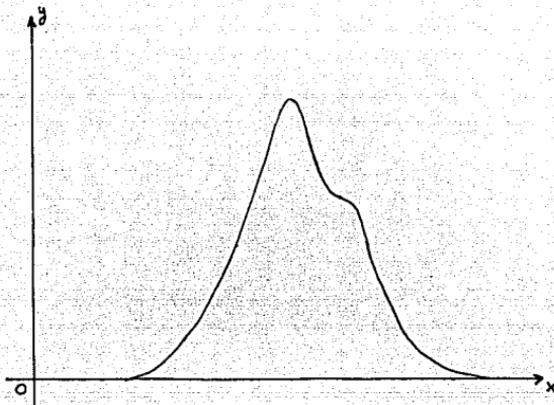


Figura 1.1. gráfica de la función $f(x)$

Si consideramos a la constante a como $a = vt$ donde t es el tiempo y v es una nueva constante, y si $\xi_{\pm} = x \pm vt$, entonces, se dice que:

$$\phi(x, t) = \phi_0(\xi_{-})$$

o

$$\phi(x, t) = \phi(x - vt)$$

representa una onda que se mueve hacia la derecha con una velocidad constante v (ver figura 1.3). Y que

$$\phi_0(\xi_{+}) = \phi(x + vt)$$

representa una onda que se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante v (ver figura 1.4).

Así,

$$\xi_{\pm} = x \pm vt$$

representa la posición en un sistema coordenado que se está moviendo con una velocidad constante v para el que la onda está estacionaria.

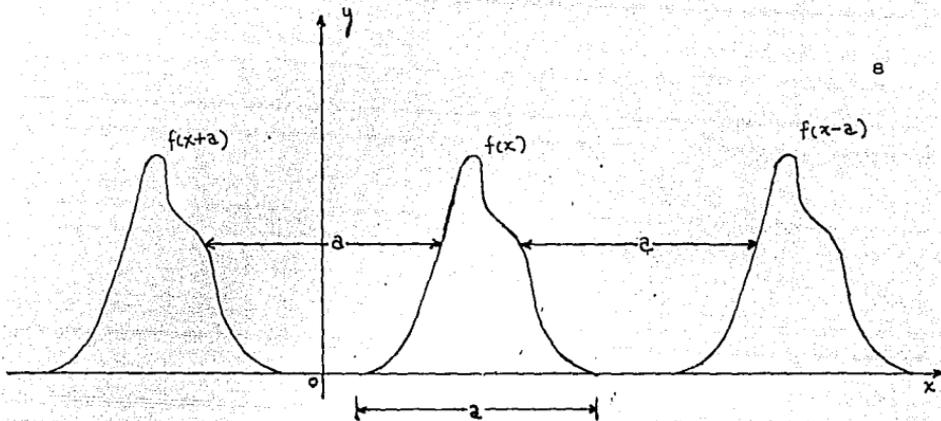


Figura 1.2 desplazamientos rígidos de $f(x)$ en la cantidad a hacia la izquierda y hacia la derecha

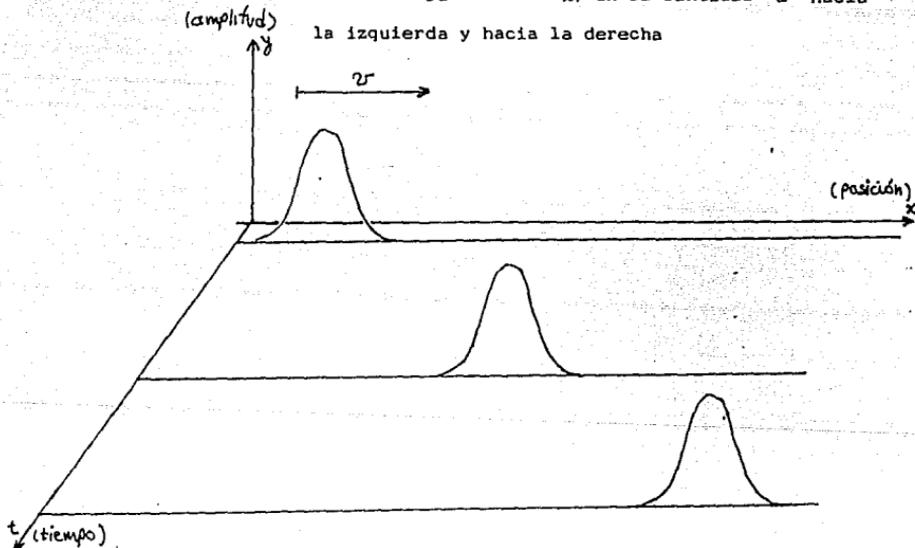


Figura 1.3. Onda moviéndose hacia la derecha con una velocidad constante v

A las ondas de la forma

$$\phi = \phi(\xi_{\pm}) \quad \text{donde } \xi_{\pm} = x \pm vt$$

se le suele llamar *ondas viajeras* u *ondas de perfil permanente*. De lo anterior se desprende que:

Una *onda viajera* $\phi_v(\xi_{\pm})$ es una solución que depende de x y t solamente a través de $\xi_{\pm} = x \pm vt$, donde v es la velocidad constante.

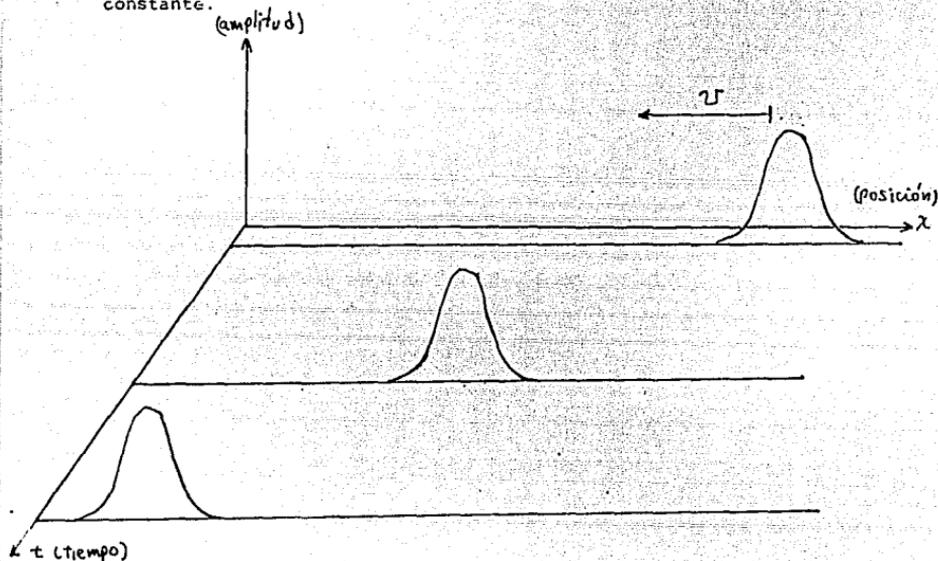


Figura 1.4 Onda moviéndose hacia la izquierda con una velocidad constante v

De la gran variedad de ondas viajeras, se pueden seleccionar soluciones localizadas llamadas ondas solitarias.

Así, una onda solitaria $\phi_{us}(\xi, t)$ es una onda viajera localizada que tiende a un valor constante cuando $\xi \rightarrow \pm \infty$.

En la siguiente sub-sección se precisará lo que para nosotros es un solitón.

1.2.2.- QUE ES UN SOLITON?

Anteriormente se mencionó que tanto en los resultados obtenidos por Perring y Skyrme⁽⁴⁵⁾ como en los obtenidos por Zabusky y Kruskal⁽⁴⁶⁾, las ondas solitarias emergían de la colisión con la misma forma y velocidad con las cuales entraban.

Para introducir el concepto de solitón se partirá del siguiente problema:

Con la evidencia anterior (resultados de Perring-Skyrme y Zabusky-Kruskal), supongamos que se tienen dos ondas solitarias $\phi(\xi)$ y $\phi(\eta)$ (con $\xi = x - v_1 t$ y $\eta = x - v_2 t$) que tienen amplitudes diferentes. Supongamos también que $\phi(\xi)$ y $\phi(\eta)$ se propagan a lo largo de una línea recta en el mismo sentido ($\phi(\xi)$ a la izquierda de $\phi(\eta)$), es decir, en una dimensión, donde la velocidad de $\phi(\xi)$ es mayor que la velocidad de $\phi(\eta)$ ($v_1 > v_2$) (ver figura 1.5).

Si la onda de mayor amplitud $\phi(\xi)$ se encuentra a la izquierda de la onda de menor amplitud $\phi(\eta)$, sucederá que, en un cierto tiempo, la onda solitaria $\phi(\xi)$ alcanzará a la onda solitaria $\phi(\eta)$ sufriendo ambas una colisión, es decir, una interacción no-lineal.

Sorpresivamente se observa que las ondas solitarias siguen su curso sin haber cambiado su forma, amplitud y rapidez después de la interacción (ver figura 1.6).

De lo anterior se puede concluir que las ondas solitarias asociadas a ecuaciones no-lineales, tales como la ecuación de Sine-Gordon y otras ecuaciones que describen la evolución no-lineal, gozan de las siguientes propiedades:

- La solución de pulso se propaga sin distorsión.
- Se preserva su forma y rapidez después de la interacción.

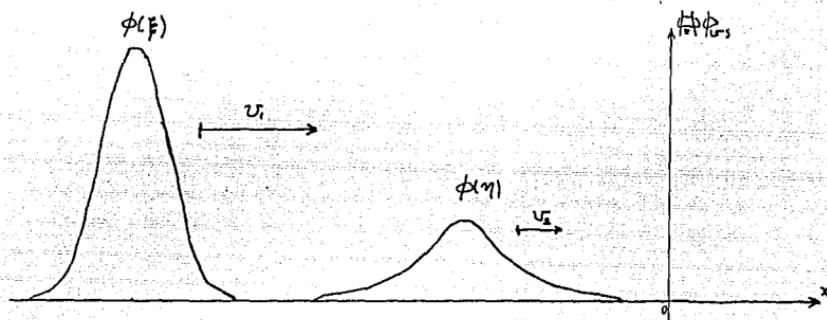


Figura 1.5. movimiento hacia la derecha de dos ondas solitarias con diferentes amplitudes y velocidades

A continuación se pasará a formalizar lo que en este trabajo se entenderá por un solitón.

DEFINICION 1: En términos generales se dirá que un solitón es una solución de onda solitaria de una ecuación de onda si cumple con lo establecido en a) y b). Esto es: una entidad localizada o solitaria que se propaga a una rapidez uniforme y preserva su forma y rapidez en interacciones con otra (u otras) de tales entidades.

Obviamente se tiene que todo solitón es una onda solitaria,

pero existen ondas solitarias que no son solitones. El ejemplo de una onda solitaria que no es un solitón, es el de la flama de una vela (para este ejemplo ver la referencia 51 p . 1445).

Como un corolario de la definición 1 se sigue que el ejemplo quizá más sencillo de un solitón sea la solución de pulso de onda

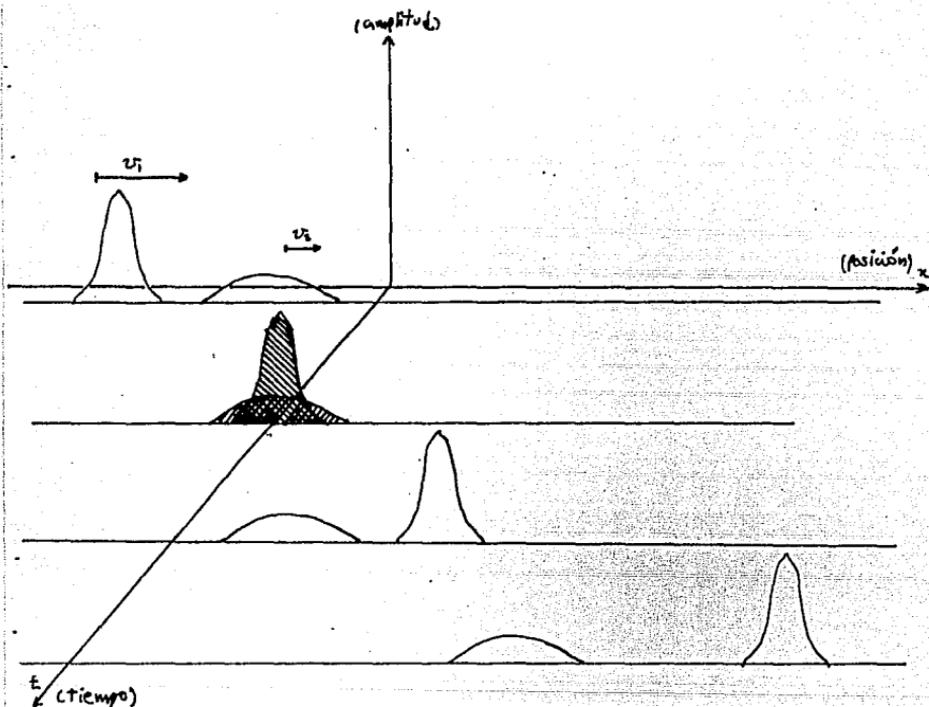


Figura 1.6 Dos ondas moviéndose en una línea recta. a) antes de la colisión; b) en la interacción; c) y d) después de la colisión

de la ecuación de onda lineal sin dispersión.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

DEFINICION 2 : Un solitón tipo Sine-Gordon es una solución de onda solitaria de la ecuación de Sine-Gordon.

La forma analítica de la solución de onda de la ecuación de Sine-Gordon será obtenida en el capítulo II.

1.3.-EL SOLITON COMO UN PARADIGMA

Con frecuencia los físicos se han propuesto, en primer lugar, aplicar los recursos metodológicos que vienen siendo desarrollados por los matemáticos; con el fin de resolver problemas que en general no pueden representarse por "esquemas" lineales.

En realidad existen muy pocos problemas no-lineales que pueden resolverse en forma exacta. La gran dificultad que presentan los problemas no-lineales es que, aparentemente, no existe un procedimiento gracias al cual éstos puedan ser unificados. Así la ecuación no-lineal supuesta como un modelo, casi siempre tiene un alcance limitado en cuanto a su aplicación y validez. Para entender los problemas no-lineales se han desarrollado ciertos métodos para resolver de manera exacta ecuaciones como la de Sine-Gordon, la de Korteweg y deVries etc. Así, los desarrollos relacionados con el concepto de solitón están proporcionando una nueva visualización que podría calificar al concepto de solitón como un paradigma, es decir, los conceptos incorporados en el análisis matemático de

solitones están dando sistemáticamente nuevos puntos de vista, es decir un paradigma.

Es así, en el sentido paradigmático que el concepto de solitón esta apareciendo en muchas ramas de la física.

CAPITULO 2

LA ECUACION DE SINE-GORDON

2.1.- A MODO DE INTRODUCCION

Comunmente los fenómenos relacionados con las ondas no-lineales aparecen en diversas ramas de la física. Ejemplo de tales fenómenos son: el rompimiento de las olas de mar en las playas; la propagación del potencial de acción a lo largo de los nervios, detonación de ondas en explosivos, y choque de ondas en gases y plasmas. Es por eso que cierto tipo de ecuaciones diferenciales no-lineales son de gran importancia en las diversas ramas de la física y de las ciencias aplicadas.

Este capítulo tiene como objetivo el estudio de una de estas ecuaciones diferenciales no-lineales, a saber la ecuación de Sine-Gordon.

2.2. LA ECUACION DE SINE-GORDON EXHIBE SOLITONES

2.2.1. LA ECUACION DE SINE-GORDON SURGE EN GEOMETRIA

La ecuación diferencial parcial no-lineal de segundo orden

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\omega_0^2}{C_0^2} \sin \phi \quad (2.1)$$

(donde los parámetros C_0 y ω_0 son respectivamente la velocidad y la frecuencia características) es llamada la ecuación de Sine-Gordon, que es una ecuación de onda conservativa y dispersiva^(*).

(*) Una ecuación de onda es: a) conservativa si la energía total se conserva (En el caso de la ecuación de Sine-Gordon ver la subsección 3.3.2). b) dispersiva si la velocidad de propagación depende de la frecuencia y de la longitud de onda.

Por conveniencia supondremos que $C_0 = \infty = 1$. Así la ecuación (2.1) se describe como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \text{sen } \phi \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2), es la forma normalizada de la ecuación (2.1).

La ecuación de Sine-Gordon apareció por primera vez en el siglo XIX en conexión con ciertos problemas de geometría diferencial ⁽¹⁸⁾.

Si las variables en la ecuación (2.2) son transformadas como

$$x \longrightarrow \eta = \frac{1}{2} (x + t)$$

$$t \longrightarrow \tau = \frac{1}{2} (x - t)$$

$$\phi(x; t) \longrightarrow \psi(\eta, \tau)$$

entonces se llega a la ecuación equivalente:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \tau} = \text{sen } \psi \quad (2.3)$$

que se estudió por varios años en conexión con la teoría de superficies pseudo-esféricas de curvatura negativa constante ⁽¹⁸⁾.

La ecuación de Sine-Gordon es de interés actual ya que no solo es completamente integrable y sus soluciones tienen notables propiedades de solitón, sino también porque es considerada como un modelo para fenómenos no-lineales ^(1, 48). La ecuación de Sine-Gordon además es importante, hablando en términos generales pues mezcla los ingredientes más comunmente utilizados.

- a) Un término cinético (que puede ser translacional, rotacional, etc).
- b) Un término de esfuerzo lineal.
- c) Un término de potencial periódico.

Finalmente, es importante mencionar que la ecuación de Sine-Gordon se puede considerar como la generalización al caso no lineal del oscilador armónico.

2.2.2.- ECUACION LINEAL DE ONDA

Se sabe que los procesos de ondas que ocurren en los diversos medios homogéneos son usualmente descritos por la ecuación diferencial lineal de onda

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.4)$$

La ecuación (2.4) describe la propagación de ondas viajeras que viajan a una velocidad constante C_0 .

Tres son las hipótesis que son formuladas para plantear la ecuación (2.4). Estas hipótesis son ⁽³⁰⁾:

NO.1 LINEALIDAD: Las amplitudes de las oscilaciones son suficientemente pequeñas. Esto significa que los términos no-lineales en ϕ son pequeños y por lo tanto pueden despreciarse.

NO.2 NO HAY DISPERSION: El intervalo de longitudes de onda bajo consideración es aquel para el que no hay dispersión; esto significa que la velocidad de propagación es independiente de la frecuencia y de la longitud de onda en ese intervalo.

NO.3 NO HAY DISIPACION: La ecuación (2.4) es invariante con

respecto a la inversión en el tiempo, esto es, invariante ante la transformación $t \rightarrow -t$.

Si se rechazan estas tres hipótesis, la ecuación (2.4) deja de ser universal y cada medio tiene que ser descrito por su propio sistema de ecuaciones^(3d).

Sorpresivamente, si estas tres hipótesis no son rechazadas completamente, es decir, si se considera que los efectos de no-linealidad, dispersión y disipación son pequeños se obtiene una ecuación cuya forma es la misma para una gran variedad de fenómenos.

La ecuación de Sine-Gordon surge cuando son rechazadas las dos primeras hipótesis, es decir, la linealidad y la no-dispersión. La ecuación de Sine-Gordon es no-lineal y dispersiva pero ignora los efectos de disipación.

2.2.3.- BAJO QUE CONDICIONES LAS ECUACIONES DE ONDA LINEAL Y NO-LINEAL EXHIBEN SOLITONES

Como la solución de pulso de la ecuación de onda lineal (2.4) resulta ser un ejemplo de solitón, se sigue que la ecuación lineal de onda (2.4) sin dispersión, exhibe solitones.

El introducir el término de dispersión y eliminar la no-linealidad en la ecuación (2.4) desecha la posibilidad de tener solitones. Esto se debe a que las diversas componentes de Fourier con condiciones iniciales se propagan con diferentes velocidades. Introducir la no-linealidad sin dispersión en la ecuación (2.4), también rompe con la posibilidad de que existan solitones

debiéndose esto a que la energía del pulso está siendo continuamente inyectada en los modos de frecuencias altas.

Resultaría extraño que una ecuación de onda no-lineal con dispersión (que es el caso de la ecuación de Sine-Gordon) pudiera exhibir soluciones de ondas solitarias, y más extraño resultaría si exhibiera solitones. Aunque lo anterior parezca paradójico, se sabe que las ondas solitarias ocurren también en sistemas los cuales están caracterizados por la no-linealidad y la dispersión.

Las ondas solitarias pueden comprenderse cualitativamente como representando un balance entre los efectos de la no-linealidad y dispersión.

Resumiendo lo anterior, se tiene que:

- 1.- La ecuación (2.4) sin dispersión exhibe solitones.
- 2.- La ecuación (2.4) con dispersión no exhibe solitones.
- 3.- La ecuación (2.4) con no-linealidad y sin dispersión no exhibe solitones.
- 4.- La ecuación (2.4) con no-linealidad y dispersión exhibe solitones.

La ecuación de Sine-Gordon exhibe pues soluciones de ondas solitarias que son solitones.

La forma analítica de las soluciones de solitón de la ecuación de Sine-Gordon se obtendrá en la sub-sección 2.3.2.

2.3.- SOLUCIONES DE LA ECUACION DE SINE-GORDON.

2.3.1 SOLUCIONES DE AMPLITUDES PEQUEÑAS.

En lo que resta del capítulo se trabajará con la ecuación

normalizada de Sine-Gordon (2.2), a menos que explícitamente se diga otra cosa.

Si suponemos que ϕ está restringido a tener pequeñas variaciones angulares en torno de $\phi = 0$, es decir, si $\phi \ll 1$, entonces se tiene que $\sin \phi \approx \phi$. Con la suposición anterior la ecuación (2.2) se reduce a la ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \phi \quad (2.5)$$

Las soluciones de la ecuación (2.5) son de la forma

$$\phi(x, t) = A \exp i [kx - \omega t] \quad (2.6)$$

donde A es una constante e $\epsilon = \sqrt{-1}$.

Sean

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -k^2 A \exp i [kx - \omega t] \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \exp i [kx - \omega t] \quad (2.8)$$

las segundas derivadas parciales de (2.6) con respecto a x y t .

Sustituyendo (2.7) y (2.8) en (2.5) se obtiene

$$[-k^2 A \exp i [kx - \omega t]] - [-\omega^2 A \exp i [kx - \omega t]] = A \exp i [kx - \omega t]$$

Simplificando la expresión anterior resulta

$$-k^2 + \omega^2 = 1$$

es decir,

$$\omega^2 = k^2 + 1 \quad (2.9)$$

La expresión (2.9) se conoce como la relación de dispersión entre ω y k :

De (2.9) sigue que:

$$\omega = \sqrt{k^2 + 1}$$

Esto significa que existe propagación para todos los valores reales de k excepto para aquellos en los que $|\omega| < 1$; en este caso k se vuelve imaginaria y las soluciones resultan ser soluciones estacionarias ⁽⁵⁵⁾.

La gráfica de la relación de dispersión (2.9) se ilustra en la fig. 2.1.

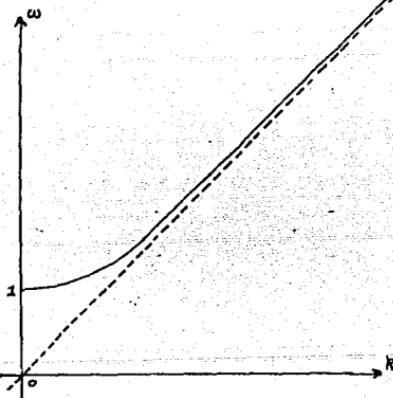


Figura 2.1. Gráfica de la relación de dispersión $\omega^2 = k^2 + 1$

Supongamos a continuación que ϕ está restringida a hacer pequeñas variaciones angulares en torno de $\phi = \Pi$; se sigue que la

ecuación (2.2) se reduce a la ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\phi \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) admite también como solución a la expresión (2.6).

En forma completamente análoga, si se sustituyen (2.7) y (2.8) en (2.10), se obtiene.

$$-k^2 + \omega^2 = -1$$

donde

$$k^2 = \omega^2 + 1 \quad (2.11)$$

La expresión (2.11) es una vez más la relación de dispersión entre ω y k .

Como $k = \sqrt{\omega^2 + 1}$ se sigue que existe propagación para todos los valores reales de ω , pero para $|k| < 1$, ω se vuelve imaginaria, y las soluciones resultan ser soluciones inestables (10.50.55).

La gráfica de la relación de dispersión (2.11) se ilustra en la fig. 2.2.

2.3.2.- SOLUCIONES DE AMPLITUDES GRANDES

A continuación se investigarán las soluciones de la ecuación de Sine-Gordon (2.2) que no están restringidas por la hipótesis de amplitudes pequeñas.

Consideremos ondas viajeras, es decir, soluciones de la forma

$$\phi = \phi(\xi)$$

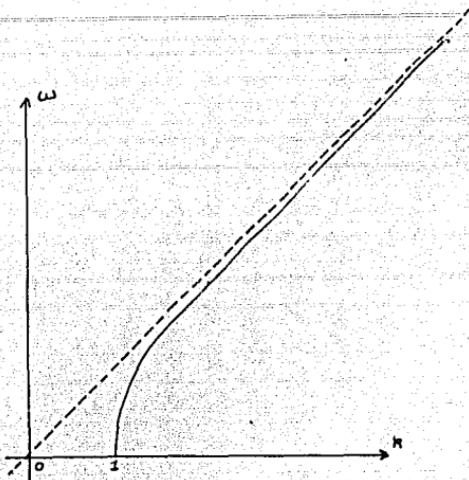


Figura 2.2. Gráfica de la relación de dispersión

$$k^2 = \omega^2 + 1.$$

donde

$$\xi = x - vt \quad (2.12)$$

con v una constante que representa la velocidad de propagación. Matemáticamente esto corresponde a suponer que ϕ depende de las variables x y t en la forma

$$\phi = \phi(x - vt)$$

Así tales soluciones son traslacionalmente invariantes. Para tales soluciones las derivadas parciales con respecto a las variables x y t se convierten en derivadas totales con respecto a ξ .

En efecto, haciendo uso de la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

De (2.12) se sigue que

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}$$

Utilizando de nuevo la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d}{d\xi} \right)$$

resultando

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{d^2}{d\xi^2} \quad (2.13)$$

En forma completamente análoga

$$\frac{\partial}{\partial t} = -v \frac{d}{d\xi}$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \quad (2.14)$$

Sustituyendo (2.13) y (2.14) en (2.2) se obtiene

$$\frac{d^2 \phi}{d\xi^2} - v^2 \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = \text{sen } \phi$$

o

$$(1 - v^2) \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = \text{sen } \phi$$

y finalmente

$$\frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = \frac{\text{sen } \phi}{1 - v^2} \quad (2.15)$$

Haciendo

$$a = \frac{1}{1 - v^2}$$

entonces (2.15) se puede escribir como:

$$\frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = a \operatorname{sen} \phi \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que es semejante a la ecuación diferencial que describe el movimiento de un péndulo simple.

Multiplicando a ambos lados de (2.16) por $(d\phi/d\xi)$ se obtiene

$$\left(\frac{d\phi}{d\xi} \right) \cdot \left(\frac{d^2 \phi}{d\xi^2} \right) = a \operatorname{sen} \phi \cdot \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)$$

o

$$\frac{d\phi}{d\xi} \cdot \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right) = a \operatorname{sen} \phi \cdot \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right) \quad (2.17)$$

como

$$a \operatorname{sen} \phi \cdot \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left[a (E - \cos \phi) \right]$$

(donde E es una constante de integración) se sigue que (2.17) toma la forma

$$\frac{d\phi}{d\xi} \cdot \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left[a (E - \cos \phi) \right] \quad (2.18)$$

Integrando a (2.18)

$$\int \frac{d\phi}{d\xi} \cdot \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right) = \int \frac{d}{d\xi} \left[a (E - \cos \phi) \right]$$

se obtiene

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 = a (E - \cos \phi)$$

$$\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 = 2a (E - \cos \phi)$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \pm \sqrt{2a (E - \cos \phi)} \quad (2.19)$$

$$\frac{d\xi}{d\phi} = \pm \frac{1}{\sqrt{2a (E - \cos \phi)}}$$

$$d\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{2 (E - \cos \phi)}} \quad (2.20)$$

Integrando (2.20) se obtiene

$$\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{2(E - \cos \phi)}} \quad (2.21)$$

Como $a = (1 - v^2)^{-1}$, se obtiene que, (2.21) toma la forma

$$\xi = \pm \sqrt{1 - v^2} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{2 (E - \cos \phi)}} \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22) es una integral elíptica de Jacobi de primer género^[28]

En el caso de la ecuación de Sine -Gordon no normalizada (2.1), la ecuación (2.22) toma la forma

$$\xi = \pm \sqrt{1 - v^2/c_0^2} \frac{C_0}{\omega_0} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{2 (E - \cos \phi)}} \quad (2.23)$$

Dos casos de suma importancia son:

PRIMER CASO.

$$E = 1 \quad \text{y} \quad v < 1.$$

En esta situación se tiene que (2.21) se reduce a

$$\zeta = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\phi_U} \frac{d\phi}{\sqrt{2(1 - \cos \phi)}} \quad (2.24)$$

Para calcular la integral

$$\int_0^{\phi_U} \frac{d\phi}{\sqrt{2(1 - \cos \phi)}} \quad (2.25)$$

se utilizará la siguiente identidad trigonométrica

$$4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) = 2(1 - \cos \phi) \quad (2.26)$$

Sustituyendo (2.26) en (2.24) se obtiene

$$\zeta = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\phi_U} \frac{d\phi}{\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)}}$$

$$\zeta = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\phi_U} \frac{d\phi}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{\phi}{2} \right)}$$

$$\zeta = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\phi_U} \operatorname{csc} \left(\frac{\phi}{2} \right) \left[\frac{1}{2} d\phi \right] \quad (2.27)$$

La integral (2.27) es sencilla y viene dada como

$$\zeta = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\phi_U} \operatorname{csc} \left(\frac{\phi}{2} \right) \left[\frac{1}{2} d\phi \right] = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left[\tan \left(\frac{\phi_U}{4} \right) \right]$$

Así, se obtiene que

$$\zeta = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left[\tan \left(\frac{\phi_U}{4} \right) \right]$$

$$\pm \sqrt{a^{-1}} \zeta = \ln \left[\tan \left(\frac{\phi_U}{4} \right) \right] \quad (2.28)$$

Exponenciando primero y luego usando la función inversa de la tangente en ambos lados de (2.28)

$$\begin{aligned} \exp \left[\pm \sqrt{a^{-1}} \zeta \right] &= \exp \left\{ \ln \left[\tan \left(\frac{\phi_U}{4} \right) \right] \right\} \\ \text{arc tan} \left\{ \exp \left[\pm \sqrt{a^{-1}} \zeta \right] \right\} &= \text{arc tan} \left[\tan \left(\frac{\phi_U}{4} \right) \right] \end{aligned}$$

finalmente se obtiene

$$\phi_U = 4 \text{arc tan} \left[\exp \left[\pm \sqrt{a^{-1}} \zeta \right] \right] \quad (2.29)$$

Como $a = (1 - v^2)^{-1}$ y $\zeta = x - vt$, la solución (2.29) se puede escribir como

$$\phi_U^\pm = 4 \text{arc tan} \left\{ \exp \left[\pm \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \right\} \quad (2.30)$$

o en la forma más general.

$$\phi_U^\pm = 4 \text{arc tan} \left\{ \exp \left[\pm \frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \right\} \quad (2.31)$$

En el caso de la ecuación de Sine-Gordon no normalizada (2.1), la ecuación (2.31) toma la forma

$$\phi_U^\pm = 4 \text{arc tan} \left\{ \exp \left[\pm \frac{\omega_0 (x - vt - x_0)}{c_0 \sqrt{1 - v^2 / c_0^2}} \right] \right\} \quad (2.32)$$

Las expresiones (2.30), (2.31) o (2.32) representan la solución de una onda solitaria o solitón. El parámetro v representa la velocidad constante del solitón (la cual está restringida a tomar valores entre -1 y 1 en el caso de las relaciones (2.30) y

(2.31); y el parametro x_0 indica el centro del solitón.

La expresión

$$\phi_v^+ = 4 \arctan \left\{ \exp \left[- \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \right\} \quad (2.33)$$

es una función que crece monótonamente de cero a 2π cuando x va de $-\infty$ a $+\infty$ (ver fig. 2.3).

La solución (2.33) representa un solitón que se mueve de izquierda a derecha con una velocidad constante v .

La expresión

$$\phi_v^- = 4 \arctan \left\{ \exp \left[- \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \right\} \quad (2.34)$$

decrece monótonamente de 2π a cero cuando x va de $-\infty$ a $+\infty$

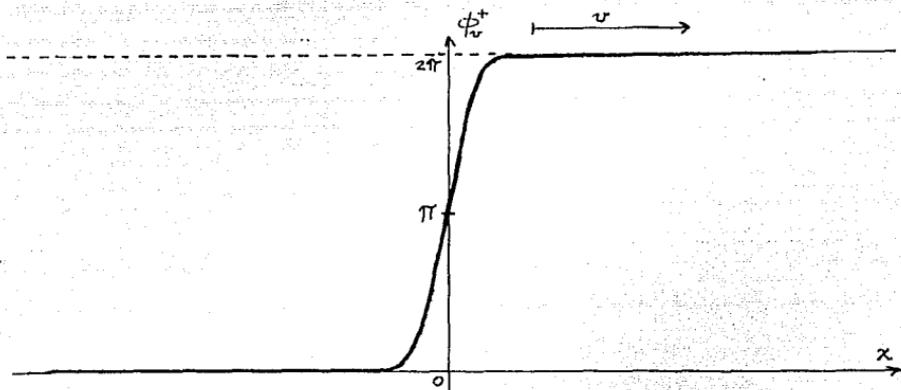


Figura 2.3. Un solitón propágandose con velocidad v

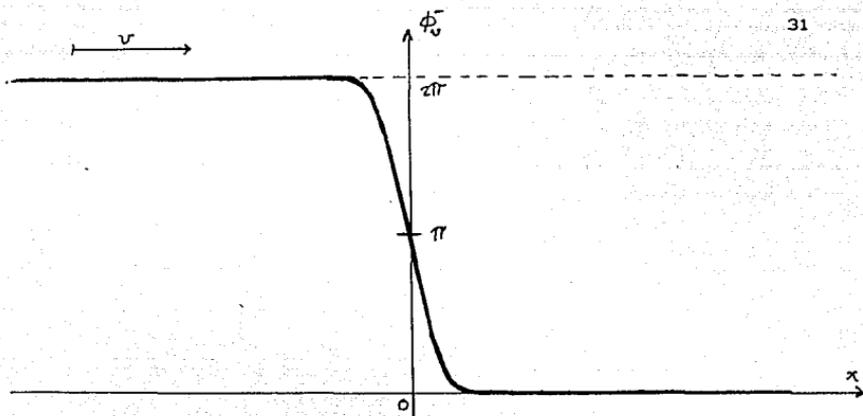


Figura 2.4. Un anti-soliton propágandose con velocidad v .

(ver fig 2.4).

La solución (2.34) representa un anti-soliton que se mueve de izquierda a derecha con velocidad constante v .

SEGUNDO CASO

$$E = -1 \quad \text{y} \quad v > 1$$

La ecuación (2.21) toma la forma

$$\zeta = \pm \frac{1}{\sqrt{a-1}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{2(-1 - \cos \phi)}}$$

y la solución viene dada como

$$\phi_0^\pm = 4 \arctan \left\{ \exp \left[\pm \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \right\} + \pi \quad (2.35)$$

La expresión (2.35) es una solución inestable^(10,50) de la ecuación de Sine-Gordon normalizada.

Volviendo a la ecuación (2.22) encontramos que dicha ecuación

admite dos soluciones interesantes que tienen cierta importancia. La primera clase de soluciones es aquella para la que

$$E > 1 \quad \text{y} \quad \nu < 1$$

en este caso ϕ resulta ser una función monótonamente creciente de ζ que puede escribirse como⁽²⁸⁾

$$\phi_\nu = \arccos \left\{ 2 \operatorname{cd}^2 \left[\frac{x - \nu t}{k \sqrt{1 - \nu^2}} \right] - 1 \right\} \quad (2.36)$$

donde cd es una función elíptica de módulo⁽²⁸⁾

$$k = \frac{2}{E + 1}$$

Para $E \gg 1$, la ecuación (2.36) se reduce a

$$\phi_\nu \simeq \sqrt{\frac{2E}{1 - \nu^2}} (x - \nu t)$$

El segundo caso es aquel para el que

$$-1 < E < 1 \quad \text{y} \quad \nu > 1$$

Aquí ϕ resulta ser una función periódica de ζ que se puede escribir como⁽²⁸⁾.

$$\phi_\nu = 2 \arcsin \left\{ k \operatorname{sn} \left[\frac{x - \nu t}{\nu^2 - 1} \right] \right\}$$

donde sn es una función elíptica de módulo⁽²⁸⁾

$$k = \sqrt{\frac{1 - E}{2}}$$

Como la magnitud de sn es siempre menor o igual a 1, se sigue que la magnitud de ϕ estará restringida por⁽²⁸⁾

$$\phi \geq 2 \arcsin(k)$$

y es aproximadamente igual a cero para $E \geq 1$

Las otras dos posibilidades son

$$-1 < E < 1 \quad \text{y} \quad \nu < 1$$

y

$$E < -1 \quad \text{y} \quad \nu > 1$$

Resumiendo: las soluciones de la ecuación de Sine-Gordon (2.2) pueden ser divididas en cuatro categorías que son:

- 1.- $E \geq 1$, $\nu < 1$ y $\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \geq 0$ ϕ es monótona creciente.
- 2.- $-1 < E < 1$, $\nu < 1$. ϕ es periódica alrededor de Π .
- 3.- $-1 < E < 1$, $\nu > 1$. ϕ es periódica alrededor de cero.
- 4.- $E \leq -1$, $\nu > 1$ y $\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \geq 0$ ϕ es monótona creciente.

2.4.- APLICACIONES DE LA ECUACION DE SINE-GORDON.

2.4.1.- PROPAGACION DE UNA DISLOCACION EN UN CRISTAL.

Como ya se mencionó en la subsección 1.1.2. (capítulo 1), la propagación de una dislocación en un cristal sólido fue estudiada inicialmente por Frenkel y Kontorova⁽²⁰⁾. El modelo que éstos propusieron consideraba una cadena de átomos, que suponían fijos con respecto a una cadena superior de átomos en movimiento (ver fig. 2.5).

La cadena de átomos fijos da origen a un potencial periódico para el i -ésimo átomo en la cadena superior de la forma¹⁹⁾

$$A \left[1 - \cos \frac{2\pi \phi_i}{a} \right]$$

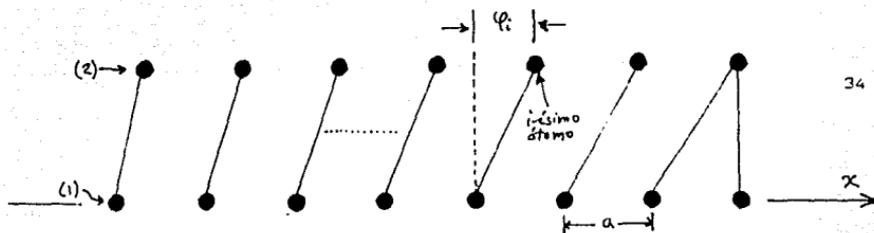


Figura 2.5. (1) y (2); cadenas inferior y superior de átomos.

donde ϕ_i es el desplazamiento del i -ésimo átomo de su posición de equilibrio con respecto a la cadena de átomos fijos (ver fig. 2.5) y "a" es el espaciamiento de la red.

La ecuación de movimiento para el i -ésimo átomo en la cadena superior viene dada por⁽³⁾

$$\frac{m d^2 \phi_i}{dt^2} = \frac{2\pi A}{a} \sin \left[\frac{2\pi \phi_i}{a} \right] + \lambda \left[\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1} \right] \quad (2.37)$$

donde m es la masa de un átomo, λ es la constante de la fuerza elástica entre átomos vecinos y "a" el espaciamiento de la red.

La ecuación (2.37) para $i = 1, 2, \dots, N$ representa un conjunto de ecuaciones en diferencias acopladas que puede ser transformado en una ecuación diferencial parcial mediante un proceso de límite.

En efecto, haciendo⁽³⁾

$$\phi = \frac{2\pi p}{a}$$

en el límite la ecuación (2.37) se transforma en la ecuación diferencial parcial no-lineal

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{C_s^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \omega^2 \sin \phi \quad (2.38)$$

que no es otra que la ecuación de Sine-Gordon donde

$$C_s = \sqrt{\frac{\lambda}{m}} \quad d$$

es la velocidad límite característica que coincide con la velocidad del sonido en el cristal y

$$\omega = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{A}}$$

es la longitud característica.

2.4.2.- PAREDES DE BLOCH EN CRISTALES MAGNETIZADOS

Se sabe que un material ferromagnético se divide en dominios y cada dominio está totalmente magnetizado y además que los diversos dominios pueden orientarse al azar⁽²⁾ (ver fig.2.6).

Fue Pierre Weiss quien en 1907 introdujo la noción de dominio. A medida que se pasa de un dominio a otro, el momento magnético m_0 gira gradualmente de su posición original a otra nueva posición.

Esta región entre los dos dominios se llama pared de dominio y su anchura es de aproximadamente unos cientos de átomos. Así una pared de Bloch es la región que separa un dominio con cierta orientación de magnetización de un dominio con otra orientación de magnetización (ver fig. 2.7).

Se sabe que cuando un campo magnético externo es colocado paralelamente al eje de un cristal, los dominios con sus magnetizaciones paralelas al campo se incrementan en tamaño a

expensas de los dominios con magnetizaciones anti-paralelas al campo ⁽¹⁹⁾. Esto da lugar a un movimiento de paredes de dominio.

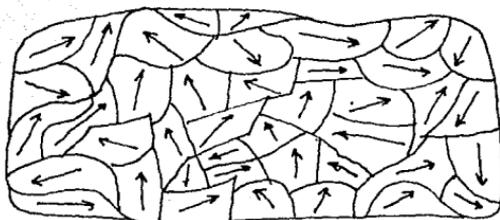


Figura 2.6. Estructura de dominios

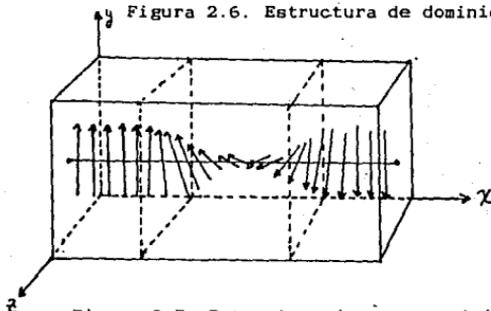


Figura 2.7. Estructura de una pared de Bloch

Si se supone que la magnetización M hace un ángulo pequeño con el plano YZ ; en este caso M tendrá una componente normal al plano de la pared, y aunado al campo magnético se requiere un campo de desmagnetización que sea normal al plano de la pared. Este campo de desmagnetización produce un torca que actúa sobre M y que se suma a la torca causada por el cambio en la energía libre de la pared debida a la diferente orientación de la magnetización M .

Las torcas que actúan en M en la dirección del eje X , son

debidas a la interacción entre espines de átomos vecinos y a la anisotropía del cristal.

La ecuación de movimiento en la dirección del eje X viene dada por⁽¹⁹⁾

$$\frac{M}{\gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 2A \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] - k \sin 2\phi \quad (2.39)$$

donde γ es la razón giromagnética dada por

$$\gamma = \frac{e}{2m \cdot C}$$

con C la velocidad de la luz, e y m_e la carga y masa del electrón respectivamente.

En la dirección ϕ del plano YZ existen torcas que actúan debido a los efectos de anisotropía y a los producidos por el campo de desmagnetización. Si se supone que la principal torca que actúa en el plano YZ es la torca de desmagnetización, la combinación de las ecuaciones componentes que describen el movimiento de M conducen a⁽¹⁹⁾

$$\frac{M}{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 4\pi M^2 \alpha \quad (2.40)$$

Diferenciando la ecuación (2.40) con respecto al tiempo, y sustituyendo el resultado obtenido en la ecuación (2.39) se obtiene

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{C\omega^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{k}{A} \sin \phi \quad (2.41)$$

donde $\phi = 2\phi$ y $C\omega = 2\gamma \sqrt{2\pi A}$ es la velocidad límite de la pared.

La ecuación (2.41) es una vez más la ecuación de Sine-Gordon y describe el comportamiento de la rotación de la magnetización M en la pared.

2.4.3.- TEORIA NO-LINEAL DE PARTICULAS ELEMENTALES

Los problemas que han enfrentado las teorías lineales de partículas elementales se debe por un lado a que consideran a las partículas como entes puntuales, es decir, sin extensión, y por otro, que éstas partículas puntuales representan singularidades en el campo.

Desde hace tiempo se han venido proponiendo teorías no-lineales donde no aparecen singularidades^[45, 56, 57].

Una teoría no-lineal para interacciones fuertes está siendo desarrollada donde la ecuación de Sine-Gordon aparece como un modelo clásico simplificado^[48, 58].

En el contexto de las teorías no-lineales el modelo de Sine-Gordon presenta facetas interesantes como el hecho de que debido a la no-linealidad, las soluciones son soluciones localizadas que pueden ser consideradas como partículas con extensión.

En este modelo se trabaja en una variedad no-lineal como por ejemplo la circunferencia unitaria o, equivalentemente en el conjunto de los números reales módulo 2π ^[48].

La densidad Lagrangiana^(*) en una dimensión para la ecuación de Klein-Gordon viene dada por^[48]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[\dot{\phi}_x^2 - \phi_y^2 + m^2 \phi^2 \right] \quad (2.42)$$

(*) Una breve introducción a la teoría de densidades Lagrangianas se da en la sección 3.2 (capítulo 3).

La densidad Lagrangiana (2.41) no es admisible ya que no es periódica, es decir

$$\mathcal{L}(\phi) \neq \mathcal{L}(\phi + 2\pi)$$

Para remediar la no-periodicidad, se propone la siguiente densidad Lagrangiana⁽⁴⁸⁾

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[\phi_x^2 - \phi_t^2 + 4m^2 \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (2.43)$$

es decir, se ha reemplazado el término de la masa en la ecuación (2.42) por una función periódica de ϕ con período 2π . Esta función se ha elegido así de tal suerte que cuando ϕ es pequeña la densidad Lagrangiana (2.43) se reduce a la densidad Lagrangiana (2.42). Esta última densidad nos conduce a la ecuación de Klein-Gordon en el límite de bajas amplitudes.

La densidad Hamiltoniana corresponde a la densidad Lagrangiana (2.43) viene dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\phi_t^2 + \phi_x^2 + 4m^2 \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (2.44)$$

La ecuación correspondiente a las densidades (2.43) y (2.44) es

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = m^2 \sin \phi \quad (2.45)$$

La ecuación (2.45) no es otra que la ecuación de Sine-Gordon. La ecuación de Sine-Gordon constituye un modelo unidimensional adecuado para una teoría no-lineal de partículas elementales.

Los solitones en teoría de partículas elementales muy probablemente aparecerán como nuevas partículas. Serán miles de

veces más pesadas que el protón^[92]. El solitón tendrá su anti-partícula el anti-solitón.

Actualmente se está elaborando una teoría ('t Hooft-Polyakov) que predice que cada solitón es un monopolo magnético y cada anti-solitón un anti-monopolo^[4, 92]. Estos monopolos llamados monopolos de 't Hooft-Polyakov son una solución de las ecuaciones de Yang-Mills. Según esta teoría, si existen los monopolos magnéticos es posible construir fermiones a partir de bosones y recíprocamente bosones a partir de fermiones, en contraposición al resultado de la mecánica cuántica que nos afirma que un agregado de partículas con un número par de fermiones constituye un bosón pero que no hay manera de construir un fermión como un agregado de bosones.

Lo anterior, en principio sería una alternativa para las teorías de unificación las cuales hacen uso de una poderosa simetría que hoy en día se conoce con el nombre de supersimetría. La supersimetría es una clase de reflexión abstracta que cambia a un fermión en un bosón^[93].

Es muy probable que en unos cuantos años más, se empiece a hablar del concepto de solitón^[94] en teorías de unificación, es decir, de super-solitones.

(*) Hay quienes afirman que en teoría de supercuerdas, una supercuerda es un solitón.

2.4.- LA JUNTA DE JOSEPHSON

La junta de Josephson que se ilustra esquemáticamente en la figura 2.8, consiste de dos tiras de metal superconductor que están separadas por una delgadísima (aproximadamente 25 Å) tira de material óxido⁽²⁾.

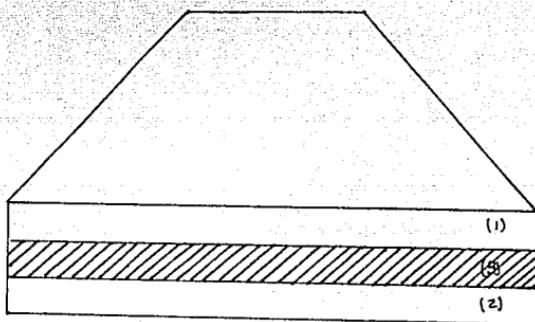


Figura 2.8. Junta de Josephson . (1) y (2) tiras de metal superconductor. (3) material óxido.

La junta de Josephson es un dispositivo que ha despertado un gran interés por sus múltiples aplicaciones. La junta se utiliza entre otras cosas para transmitir, almacenar y procesar información⁽⁵²⁾.

La junta exhibe dos tipos de inductancias por unidad de longitud. Una de ellas (L) es debida al almacenamiento de la energía del campo magnético y viene dada como⁽⁵²⁾

$$L = \left[\frac{2\lambda + d}{a} \right] \mu_0 \text{ H/m} \quad (2.46)$$

donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m es la permeabilidad, d es la anchura de la tira de material óxido, a es la anchura de la junta y λ es la profundidad en la que se difunde el material óxido en el metal superconductor (ver fig. 2.9).

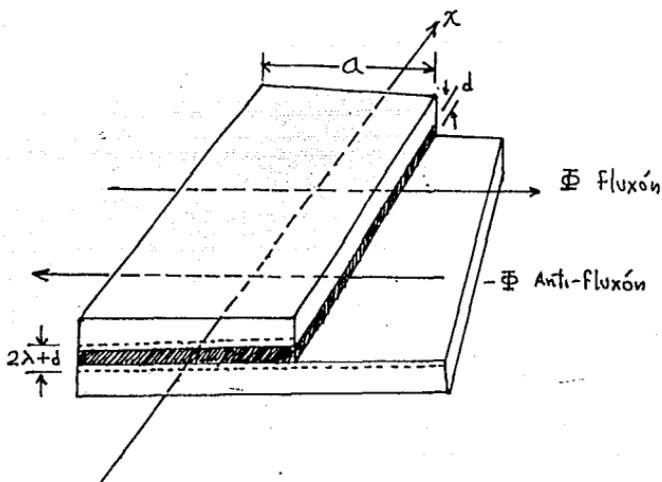


Figura 2.9. Junta de Josephson. Un fluxón o cuanto de flujo magnético Φ en una cierta dirección; y un anti-fluxón, o un cuanto de flujo magnético $-\Phi$ en la dirección contraria.

En la figura 2.9 se observa que un flujo magnético puede penetrar a lo largo de la tira de material óxido y se propaga en

una dirección longitudinal a la dirección del eje X.

La otra inductancia por unidad de longitud, es debida al almacenamiento de la energía del campo eléctrico en el material óxido y está dada por^[52]

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{d} \text{ f/m} \quad (2.47)$$

donde $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ f/m es la permeabilidad al vacío.

Las tiras de material superconductor vienen siendo descritas por las funciones de onda^[34, 35]

$$\psi_1 = \rho_1^{1/2} e^{i\phi_1} ; \quad \psi_2 = \rho_2^{1/2} e^{i\phi_2}$$

donde ρ_1 y ρ_2 son las densidades de carga electrónica.

Sea

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 \quad (2.48)$$

la diferencia entre las fases de las funciones de onda; Josephson muestra^[34] que la corriente a través de la junta puede ser determinada por el cambio en la fase de las funciones de onda a través de la junta. Así, usando la invarianza de norma para relacionar la fase de las funciones de onda, él muestra^[34] que la corriente en la junta viene dada por

$$I = I_0 \sin \phi \quad (2.49)$$

que es la corriente de Josephson por unidad de área donde ϕ está relacionada con el voltaje aplicado a v por

$$\frac{d\phi}{dt} = \left[\frac{2e}{\hbar} \right] v \quad (2.50)$$

Definiendo

$$\Phi = \int v dt$$

como el flujo magnético, entonces (2.49) se puede escribir como

$$I = I_0 \sin \left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \right)$$

donde

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e}$$

es el flujo cuántico individual que es igual a $2 \times 10^{-7} \text{ G} \cdot \text{cm}^2$.

De las relaciones (2.47), (2.48), (2.49) y (2.50) se obtienen las siguientes expresiones

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L \left(\frac{\partial I}{\partial t} \right) \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) - J_0 \sin \phi \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(\frac{2e}{h} \right) v \quad (2.53)$$

donde J_0 ⁽⁹⁴⁾ es la máxima densidad de corriente de Josephson.

Combinando las ecuaciones (2.51), (2.52) y (2.53) se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{2eJ_0L}{h} \sin \phi \quad (2.54)$$

Midiendo la distancia en unidades de la longitud de Josephson^(94, 95)

$$z = \sqrt{\frac{h}{2eJ_0L}}$$

y el tiempo en unidades del tiempo de Josephson

$$\tau = \frac{h}{2eJ_0}$$

la ecuación (2.54) toma la forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \sin \phi$$

que es la forma normalizada de la ecuación de Sine-Gordon la cual resulta ser conveniente para una descripción de la propagación del flujo magnético en la junta.

Finalmente se hará ver que la ecuación de Sine-Gordon también constituye un modelo para la propagación de pulsos ópticos ultra-cortos.

2.4.5.- PROPAGACION DE PULSOS OPTICOS ULTRA-CORTOS

En la década de los 50's los pulsos de luz más cortos que se obtenían en el laboratorio se formaban de una radiación continua con ayuda de obturadores electro-ópticos basados en el efecto Kerr, es decir, en el surgimiento de la anisotropía óptica de algunos cristales bajo la influencia de un campo eléctrico. La duración más corta de tiempo de estos pulsos venía siendo de 10^{-9} seg⁽³⁰⁾.

Después de 1960 los pulsos ópticos ultra-cortos empezaron a obtenerse utilizando láseres. Lo que se encontró es que existían regímenes de funcionamiento de láseres en los cuales la radiación que se emite de éstos tiene la forma de una secuencia de pulsos luminosos equidistantes y relativamente cortos. Los pulsos ópticos obtenidos utilizando láseres tenían una duración de 4×10^{-10} seg⁽¹⁴⁾.

De 1986 en adelante se han producido^(*) pulsos ópticos ultra-cortos (sería mejor llamarlos ultra-hiper-cortos) cuya duración de tiempo es de 6×10^{-15} seg (6 femtosegundos).

En los años 60's los tratamientos teóricos de la propagación de pulsos ópticos ultra-cortos a través de sistemas de dos niveles empleaban un modelo semi-clásico en el que un campo electromagnético clásico interactúa con una colección de osciladores mecánico cuánticos^(20, 31). El medio descrito por este modelo se puede visualizar como una colección de átomos en un sistema de dos niveles los cuales están acoplados únicamente por su interacción con el campo de radiación.

Para el caso de un campo electromagnético cuasimonocromático polarizado en la dirección del vector \hat{e} se puede escribir como

$$E(x, t) = \hat{e} \zeta(x, t) \cos(\omega t - k_0 x)$$

con $\zeta(x, t)$ variando lentamente con el tiempo, ω y k_0 son la frecuencia angular y el número de onda respectivamente. Si el medio está caracterizado por una función de distribución $g(\Delta\omega)$ llamada la función espectral, entonces el momento dipolar por unidad de longitud viene dado por⁽²⁰⁾

$$P(x, t) = n_0 p \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{F}(x, t, \Delta\omega) \cos(\omega t - k_0 x) - \mathcal{P}(x, t, \Delta\omega) \sin(\omega t - k_0 x)] g(\Delta\omega) d(\Delta\omega)$$

donde $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ y $\mathcal{F}(x, t, \Delta\omega)$, $\mathcal{P}(x, t, \Delta\omega)$ se refieren a un átomo con

(*) Los métodos de generación de pulsos ópticos ultra-cortos utilizando láseres viene descritos en todo detalle en las referencias 14, 24, 25 y 37.

frecuencia de transición dada por $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$. Si ξ , \mathcal{P} y \mathcal{F} están variando lentamente, se obtiene que

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{2\pi n_0 \omega_0 \rho}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(x, t, \Delta\omega) \rho(\Delta\omega) d(\Delta\omega) \quad (2.55)$$

y

$$\xi = \frac{2\pi n_0 \omega_0 \rho}{c(k - \omega/c)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, t, \Delta\omega) \rho(\Delta\omega) d(\Delta\omega) \quad (2.56)$$

donde ρ es la matriz dipolar de los elementos asociados con los dos niveles y ω_0 es el centro de una línea simétricamente ensanchada.

La respuesta al sistema de dos niveles es entonces generada por ^(a. 21)

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \frac{1}{\tau_2} \mathcal{P} = \frac{\rho}{\hbar} \xi \mathcal{N} + \Delta\omega \mathcal{F} \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \frac{1}{\tau_2} \mathcal{F} = -\Delta\omega \mathcal{P} \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + \frac{1}{\tau_1} \mathcal{N} = -\frac{\rho}{\hbar} \xi \mathcal{P} \quad (2.59)$$

donde $\mathcal{N} = \frac{n}{n_0}$ es la densidad normalizada con n_0 la diferencia de densidades entre los estados superior e inferior y τ_1 , τ_2 son los tiempos longitudinales y transversales de relajación.

Cuando tanto τ_1 como τ_2 tienden a infinito y $\rho(\Delta\omega) = \delta(\Delta\omega)$, la duración de los pulsos se hace menor que los tiempos característicos de relajación del sistema. Las expresiones (2.55), (2.57), (2.58) y (2.59) toman la forma

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{2\pi n_0 \omega_0 \rho}{c} \rho \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \xi} = \frac{p}{\hbar} \xi \eta + \Delta \omega \mathcal{F} \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} = -\Delta \omega \mathcal{P} \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \xi} = -\frac{p}{\hbar} \xi \mathcal{P} \quad (2.63)$$

Haciendo

$$\nu = \frac{p}{\hbar} \left[1 - \frac{x}{c} \right]$$

$$\eta = \frac{m\omega_0 x}{c} x$$

las relaciones (2.60), (2.61), (2.62) y (2.63) toman la forma siguiente

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \mathcal{P} \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \nu} = \xi \mathcal{W} \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \nu} = -\xi \mathcal{P} \quad (2.66)$$

Combinando las ecuaciones (2.65) y (2.66) se obtiene

$$\frac{1}{\mathcal{W}} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \nu} = -\frac{1}{\mathcal{P}} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \nu}$$

integrando la expresión anterior resulta

$$\mathcal{P}^2 + \mathcal{W}^2 = 1 \quad (2.67)$$

La expresión (2.67) representa una ley de conservación.

Eligiendo la siguiente representación paramétrica

$$\zeta = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \quad (2.68)$$

$$\mathcal{P} = \pm \operatorname{sen} \phi \quad (2.69)$$

$$\mathcal{N} = \pm \operatorname{cos} \phi \quad (2.70)$$

Combinando (2.64), (2.69) y (2.70) se obtiene la ecuación que describe la propagación de pulsos ópticos ultra-cortos⁽³⁸⁾

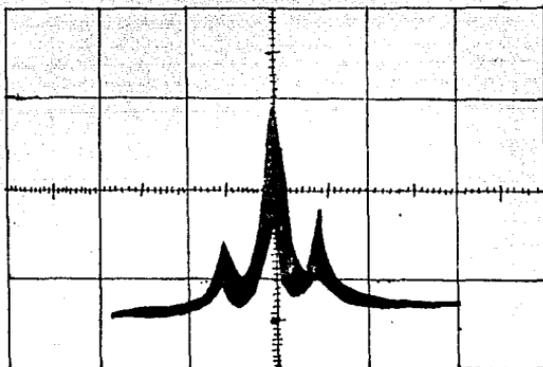
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta \partial \nu} = \pm \operatorname{sen} \phi$$

donde se reconoce que es la ecuación de Sine-Gordon (2.3).

Teorías recientes^(15, 40) las cuales introducen los efectos de dispersión de la velocidad de grupo y la modulación de fase en las ecuaciones, describen la propagación de pulsos ópticos cuya solución de solitón tiene la forma de una sech^2 . También se viene estudiando la propagación de pulsos ópticos en fibras ópticas⁽³⁷⁾, utilizando la ecuación no lineal de Schrödinger como un modelo.

Salin, Grangier, Roger y Brun⁽⁴³⁾ reportan el primer experimento de generación de pulsos ópticos ultra-cortos cuyo tiempo de duración fue de 70 fmseg^(25, 40). Ellos vienen observando ciertas anomalías en las que la forma del pulso deja de ser una sech^2 y pasa a tomar la forma de un pulso con tres picos (ver fig. 2.10). Esta anomalía no es predicha por la teorías existentes pero se ha interpretando utilizando el concepto de un 3-solitón (tri-solitón).

Salin y colaboradores han observado experimentalmente un 3-solitón (en el dominio visible) que ha sido producido utilizando un láser.



50

Figura 2.10^(*). Traza del pulso óptico que es interpretado como un tri-soliton

Finalmente se dirá que los pulsos ópticos ultra-cortos son de gran interés por las aplicaciones tales como: el radar óptico, fotografía y holografía de alta velocidad, y en un futuro no muy lejano para medir distancias enormes con un error de décimas de milímetro o incluso de milésimas de milímetro, con lo cual muchos aparatos tales como el teodolito pasaran a formar parte del acervo de los museos tecnológicos.

Aunque no se comenta en este capítulo, la solución más general de la ecuación de Sine-Gordon consiste de L solitones, M anti-solitones, N respiradores y la solución de la radiación⁽³⁸⁾. Por otro lado, como el número de aplicaciones a la ecuación de Sine-Gordon es significativamente grande no se hace mención de aplicaciones en casos como el de la bioquímica, la teoría de la gravitación⁽³⁹⁾ (instantones gravitacionales), la biología

(*) Figura tomada de la referencia 40, pag. 1132 (fig 1)

(propagación de ondas a lo largo de membranas, potencial de acción, etc.) y la astrofísica^(*), etc.

(*) De las aplicaciones a la astrofísica quisiera brevemente comentar algo que me ha causado una gran impresión. Recientemente, los astrofísicos han sugerido que un gran punto rojo que viene siendo observado en la atmósfera de Júpiter se comporta como un solitón. (Este comentario fue hecho por Monastyrsky. Ver referencia 42, pag. 132)

CAPITULO 3

SINE-GORDON Y RELATIVIDAD ESPECIAL

3.1.- BREVE REPASO DE RELATIVIDAD ESPECIAL

3.1.1.- LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

Se hace una introducción de los elementos necesarios para desarrollar la dinámica relativista a la Sine-Gordon.

Einstein formuló su teoría de la relatividad especial partiendo de: a) cuatro hipótesis referentes a la homogeneidad e isotropía del espacio; b) de la homogeneidad del tiempo con algunas reglas para sincronizar relojes, y c) de dos postulados: el principio de la relatividad y la constancia de la velocidad de la luz⁽⁹⁰⁾.

El postulado del principio de la relatividad nos afirma que no existe sistema inercial preferente, siendo las leyes de la física iguales en todos los sistemas inerciales. El segundo postulado, se refiere a la constancia de la velocidad de la luz, nos afirma que la velocidad de la luz en el vacío tiene el mismo valor c en todos los sistemas inerciales.

Se entiende por un *sistema inercial* un sistema de referencia, (es decir, un sistema de coordenadas y relojes en el que se pueden medir las posiciones de los cuerpos y sus tiempos) en el que los cuerpos que se mueven libremente tienen velocidades constantes, es decir, su movimiento es uniforme y rectilíneo.

Antes de pasar a derivar las transformaciones de Lorentz se presentarán algunos conceptos y resultados de álgebra lineal.

Sea V un espacio vectorial lineal sobre los reales \mathbb{R} . En V se define un *producto escalar* como una función

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

la cual satisface lo siguiente:

$$(i) \quad (x, y) = (y, x)$$

$$(ii) \quad (ax, y) = a \cdot (x, y)$$

$$(iii) \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

para todo $x, y, z \in V$ y todo $a \in \mathbb{R}$.

Eligiendo una base $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ en el espacio V el producto escalar se puede representar como una forma bilineal simétrica

$$\begin{aligned} (x, y) &= \sum_{i,j} \langle \eta_i, \eta_j \rangle x_i y_j \\ &= \sum_{i,j} \theta_{ij} x_i y_j \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde $\theta_{ij} = \theta_{ji} = \langle \eta_i, \eta_j \rangle$ son ciertos coeficientes y x_i, y_j son las coordenadas de los vectores x e y en la base (η_1, \dots, η_n) .

La forma cuadrática $\mathfrak{B} = \sum \theta_{ij} x_i x_j$ correspondiente a la forma bilineal (3.1) siempre puede ser reducida a la suma de cuadrados⁽³¹⁾

$$\mathfrak{B} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2 \quad (3.2)$$

donde r representa el número de cuadrados positivos y s el número de cuadrados negativos. A la forma (3.2) se le denomina *métrica* o *forma fundamental*.

Para simplificar la exposición consideremos que V es un espacio lineal bidimensional (un plano). En este caso r y s estarán restringidos a tomar los siguientes valores:

$$1) \cdot r = 2, s = 0$$

$$2) \cdot r = 0, s = 2$$

$$3) \cdot r = 1, s = 0$$

$$4) \cdot r = 0, s = 1$$

$$5) \cdot r = 1, s = 1$$

Tanto en 1) como en 2) (3.2) toma la forma

$$\bar{\psi} = x_1^2 + x_2^2 \quad (3.3)$$

En 3) y 4) (3.2) se reduce a

$$\bar{\psi} = x_2^2 \quad \text{o} \quad \bar{\psi} = -x_2^2 \quad (3.4)$$

y finalmente en 5)

$$\bar{\psi} = x_1^2 - x_2^2 \quad (3.5)$$

Cuando la métrica está dada por (3.3) se dice que el espacio V es *euclidiano*; cuando está dada por (3.4) V es *semi-euclidiano* y cuando está dada por (3.5) es *pseudo-euclidiano*.

Sea V un espacio vectorial bidimensional sobre \mathbb{R} que tiene asociada una métrica pseudo-euclidiana $\bar{\psi} = x_1^2 - x_2^2$. Se dice que (e_1, e_2) es una base *pseudo-ortonormal* de V si

$$\begin{aligned} a) \langle e_1, e_1 \rangle &= 1 \\ b) \langle e_2, e_2 \rangle &= -1 \\ c) \langle e_1, e_2 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Una transformación lineal T de un espacio pseudo-euclidiano V es llamada *pseudo-ortogonal* si

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$$

para $x, y \in V$.

Sea V un espacio lineal bidimensional sobre \mathbb{R} y T una transformación pseudo-ortogonal.

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

la matriz asociada a T en una base (e_1, e_2) pseudo-ortonormal, entonces

$$\begin{aligned} Te_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 \\ Te_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

De la definición de una base pseudo-ortonormal se sigue que

$$\begin{aligned} \langle Te_1, Te_1 \rangle &= \langle e_1, e_1 \rangle = 1 \\ \langle Te_2, Te_2 \rangle &= \langle e_2, e_2 \rangle = -1 \\ \langle Te_1, Te_2 \rangle &= \langle e_1, e_2 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

De las relaciones (3.7) y (3.8) se obtiene que

$$a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1 \quad (3.9)$$

$$a_{12}^2 - a_{22}^2 = -1 \quad (3.10)$$

$$a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0 \quad (3.11)$$

De (3.9) y (3.10) se concluye que $a_{11} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$. Y de (3.11) se obtiene

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

Si $(a_{12}/a_{11}) = \alpha$ se sigue que

$$a_{21} = \alpha a_{11} \quad \text{y} \quad a_{12} = \alpha a_{22} \quad (3.12)$$

Sustituyendo (3.12) en (3.9) y (3.10) resulta que

$$a_{11}^2 - \alpha^2 a_{11}^2 = 1 \quad \text{y} \quad \alpha^2 a_{22}^2 - a_{22}^2 = 1$$

obteniendose

$$a_{11} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

(3.13)

$$a_{22} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

y

$$a_{21} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}, \quad a_{12} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

los cuales se obtienen sustituyendo (3.13) en (3.12).

Así

$$A = \begin{bmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} & \pm \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \\ \pm \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Toda matriz de la forma (3.14) será llamada una matriz *pseudo-ortogonal*.

(3.14) es la matriz de cambio de base, es decir, transforma bases pseudo-ortonormales en bases pseudo-ortonormales.

Consideremos los signos "mas" en la matriz (3.14) y designemos a esta matriz con la letra A_0 , es decir,

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} & \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Se puede decir inmediatamente que el determinante de la matriz

A_0 es igual a la unidad.

Finalmente, como

$$\cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \theta}} \quad (*)$$
(3.16)

$$\sinh \theta = \frac{\tanh \theta}{\sqrt{1 - \tanh^2 \theta}}$$

Comparando (3.13) con (3.16) se puede concluir que existe una ϕ tal que

$$\cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad \text{y} \quad \sinh \phi = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (3.17)$$

De esta forma, se llega a que la matriz (3.15) toma la forma

$$A_0 = \begin{bmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Hasta aquí lo de álgebra lineal.

Sea Σ un sistema inercial. Se define un suceso como un punto en el espacio pseudo-euclidiano de cuatro dimensiones (el espacio de Minkowski cuya métrica pseudo-euclidiana es $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$). Este es un espacio cuyas tres primeras coordenadas son espaciales y la restante es temporal. Así un suceso vendrá especificado por el lugar (por sus tres coordenadas espaciales) y por el instante en el que ocurre (por su coordenada temporal). La evolución de un cuerpo en este espacio está descrito por una curva que es llamada *línea de Universo*.

(*) Estas dos expresiones se pueden deducir fácilmente utilizando el hecho de que $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$.

A continuación se obtendrán las relaciones de transformación que permiten pasar de un sistema inercial a otro. Consideremos dos sistemas inerciales Σ y Σ' donde Σ' se desplaza a una velocidad constante v con respecto a Σ . Supongamos que los ejes coordenados de Σ son paralelos a los ejes coordenados de Σ' y que el movimiento relativo es a lo largo de los ejes $\underline{\bar{x}}$ $\underline{\bar{x}'}$, tal como se ilustra en la fig. 3.1.

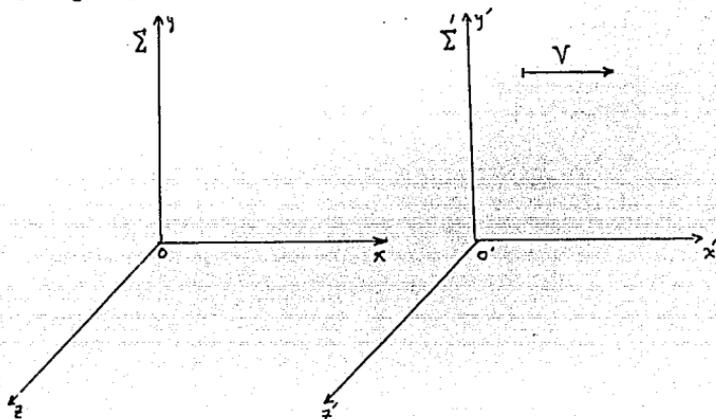


Figura 3.1. El sistema inercial Σ' se desplaza con una velocidad constante v en la dirección de $+\underline{\bar{x}}$ con respecto al sistema inercial Σ .

Si se efectúa una transformación en el plano $\underline{\bar{t}\bar{x}}$ del espacio de Minkowski (rotación hiperbólica), la matriz de transformación (3.18) en cuatro dimensiones toma la forma siguiente

$$A_0 = \begin{bmatrix} \cosh \phi & 0 & 0 & \sinh \phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \phi & 0 & 0 & \cosh \phi \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Las coordenadas (x, y, z, ct) en Σ estarán ligadas a las coordenadas (x', y', z', ct') en Σ' (utilizando (3.19)) como

$$\begin{cases} x = x' \cosh \phi + ct' \sinh \phi \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = x' \sinh \phi + ct' \cosh \phi \end{cases} \quad (3.20)$$

Sustituyendo las relaciones (3.17)

$$\cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}; \quad \sinh \phi = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (3.17)$$

en las relaciones (3.20) se obtiene

$$\begin{cases} x = \frac{x' + \alpha ct'}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \frac{\alpha x' + ct'}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \end{cases} \quad (3.21)$$

En (3.21) falta determinar el parámetro α . Consideremos en Σ' el origen de coordenadas, es decir, consideremos a $x' = 0$ entonces de

$$x = \frac{x' + \alpha ct'}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad \text{con } x' = 0$$

se obtiene que

$$x = \frac{0' + \alpha c t'}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad \text{donde } \alpha = \frac{v}{c}$$

Como $\frac{x}{t}$ es la velocidad relativa v del sistema Z' resulta que

$$v = \alpha c \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{v}{c}$$

Sustituyendo este valor de α en las relaciones (3.21) se

obtiene finalmente

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Las relaciones (3.22) son las transformaciones de Lorentz. Las fórmulas inversas de Lorentz son obtenidas cambiando v por $-v$ en las fórmulas (3.22), es decir, el sistema Σ es ahora considerado como si se estuviera moviendo con una velocidad $-v$ con respecto al sistema Σ' .

Las transformaciones inversas son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Si v es pequeño comparado con c , $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1$ y en este caso (3.22) se reduce a

$$\begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (3.24)$$

que son las transformaciones de Galileo.

3.1.2.- CONSECUENCIAS DE LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

La primera consecuencia de las transformaciones de Lorentz se refiere a lo siguiente: Si se tiene una varilla en reposo en un sistema inercial Σ , y ella es colocada paralelamente al eje \bar{x} de Σ , entonces la longitud medida en el sistema $\bar{\Sigma}$ viene dada por Δx . Si $\Delta x'$ es la longitud de la varilla medida desde otro sistema inercial Σ' , entonces la relación que hay entre Δx y $\Delta x'$ es

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.25)$$

Se define la *longitud propia* l_0 de la varilla como la longitud que es medida en un sistema de referencia en el que la varilla se encuentra en reposo. De la relación (3.25) se tiene que

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.26)$$

Es decir, la longitud de la varilla medida desde un sistema de referencia que se mueve con velocidad v , se ve reducida por el factor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. A esta consecuencia se le llama la *contracción de Lorentz*.

La segunda consecuencia de las transformaciones de Lorentz es la dilatación del tiempo.

Si dos sucesos ocurren en un mismo punto de coordenadas espaciales (x', y', z') en un sistema Σ' y si $\Delta t'$ es el tiempo transcurrido entre estos dos sucesos en Σ' , entonces el tiempo Δt que transcurre entre dos sucesos en un sistema Σ viene dado por

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Se define el tiempo propio τ_0 como el tiempo que indica un reloj que se mueve junto con un objeto dado, entonces se tendrá que

$$\tau_0 = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

es decir, el tiempo propio τ_0 de un objeto en movimiento será siempre menor que el correspondiente tiempo en el sistema en reposo. Esto significa que un reloj en movimiento se atrasa respecto a un reloj en reposo.

3.1.3.- DINAMICA RELATIVISTA

Una forma muy conveniente y elegante de abordar ciertos problemas en las diferentes ramas de la física consiste en utilizar el formalismo variacional, es decir se parte del principio de Hamilton de la mínima acción. Este principio afirma que existe una cierta integral S , llamada acción tal que cuando su variación δS es igual a cero, esta integral toma un valor mínimo.

La acción se puede escribir como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

donde \mathcal{L} representa la función de Lagrange del sistema.

En este formalismo el momento P y la energía E de una partícula vienen dados como

$$\vec{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} \quad (3.27)$$

$$E = \vec{P} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} \quad (3.28)$$

En el caso de la relatividad especial la función de Lagrange viene dada por

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.29)$$

Sustituyendo el Lagrangiano relativista (3.29) en las expresiones (3.27) y (3.28) se obtienen el momento y la energía para la partícula relativista.

$$\vec{P} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.30)$$

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.31)$$

Si v es muy pequeña comparada con c , la expresión para la energía relativista (3.31) se reduce a

$$E = mc^2 \quad (3.32)$$

La ecuación (3.32) es la famosa ecuación de la *energía en reposo* de la partícula.

La *masa en reposo* m_0 se define mediante la siguiente relación

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.33)$$

donde m es la masa relativista.

Finalmente, el Hamiltoniano relativista o función Hamiltoniana viene dada como

$$\mathcal{H} = c \sqrt{P^2 + m^2 c^2} \quad (3.34)$$

3.2.- BREVE REPASO DE DENSIDAD LAGRANGIANA^(*)

Sea ϕ una función que depende de las variables x y t , es decir,

$$\phi = \phi(x, t)$$

Supongamos que la función ϕ es bien comportada, esto es, que tiene sentido hablar de sus derivadas parciales con respecto a x y t ($\phi_x, \phi_t, \phi_{xx}, \phi_{xt}, \phi_{tt}$, etc.).

Se define una *densidad Lagrangiana* \mathcal{L} como una función que depende de ϕ, ϕ_x, ϕ_t , esto es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \phi_x, \phi_t) \quad (3.35)$$

La correspondiente ecuación de Euler-Lagrange resulta ser

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_x} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (3.36)$$

En términos de la densidad Lagrangiana (3.35) se define la densidad de momento y la densidad de energía o densidad Hamiltoniana como

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} \quad (3.37)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} - \Pi \phi_t \quad (3.38)$$

(*) Para más información ver la referencia 27, capítulo 11

3.3.- TEORIA DE SINE-GORDON

3.3.1.- LA ECUACION DE SINE-GORDON ES INVARIANTE RELATIVISTA

(LA CONTRACCION DE LORENTZ)

Un aspecto interesante de la ecuación de Sine-Gordon es que resulta invariante ante transformaciones de Lorentz

Para exhibir esta invarianza ante transformaciones de Lorentz se podría utilizar la forma normalizada de la ecuación de Sine-Gordon (2.2) la cual simplificaría los cálculos. Pero con el fin de mantener la notación que se estará utilizando a partir de la sub-sección 3.3.2, se utilizara la forma de la ecuación de Sine-Gordon (2.1), es decir, la ecuación

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\omega_0^2}{c_0^2} \sin \phi \quad (2.1)$$

De la forma de la ecuación (2.1) resulta sencillo concluir la invarianza ante las transformaciones de Lorentz. En efecto, sean

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - \frac{v}{c}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c_0}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \end{array} \right. \quad (3.39)$$

las transformaciones de Lorentz

De la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

se sigue que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/C_0^2}} \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v/C_0^2}{\sqrt{1 - v^2/C_0^2}} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{-v}{\sqrt{1 - v^2/C_0^2}} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/C_0^2}} \frac{\partial}{\partial t'} \end{array} \right.$$

o en forma más concisa

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/C_0^2}} \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{C_0^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/C_0^2}} \left(-v \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right) \end{array} \right. \quad (3.40)$$

donde

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/C_0^2}} \quad ; \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{-v/C_0^2}{\sqrt{1 - v^2/C_0^2}}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/C_0^2}} \quad ; \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/C_0^2}}$$

Utilizando nuevamente la regla de la cadena, y tomando en cuenta las expresiones (3.40), se tiene que

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{\left[1 - \frac{v^2}{C_0^2}\right]} \left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{v^2}{C_0^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{2v}{C_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{\left[1 - \frac{v^2}{C_0^2}\right]} \left[v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \right] \end{aligned} \right. \quad (3.41)$$

Sustituyendo (3.41) en la ecuación (2.1)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\left[1 - \frac{v^2}{C_0^2}\right]} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{v^2}{C_0^4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} - \frac{2v}{C_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} \right] - \\ & - \frac{1/C_0^2}{\left[1 - \frac{v^2}{C_0^2}\right]} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} v^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} \right] = \frac{\omega_0^2}{C_0^2} \sin \phi \\ & \frac{1}{\left[1 - \frac{v^2}{C_0^2}\right]} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{v^2}{C_0^4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} - \frac{2v}{C_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} \right] - \\ & - \frac{v^2}{C_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} + \frac{2v}{C_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} = \frac{\omega_0^2}{C_0^2} \sin \phi \\ & \frac{1}{\left[1 - \frac{v^2}{C_0^2}\right]} \left[\left[1 - \frac{v^2}{C_0^2}\right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{1}{C_0^2} \left[\frac{v^2}{C_0^2} - 1 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} \right] = \frac{\omega_0^2}{C_0^2} \sin \phi \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{C_0^2}\right)} \left[\left(1 - \frac{v^2}{C_0^2}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} - \left(1 - \frac{v^2}{C_0^2}\right) \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} \right] = \frac{\omega_0^2}{C_0^2} \sin \phi$$

obteniéndose finalmente que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} = \frac{\omega_0^2}{C_0^2} \sin \phi$$

Así resulta que la ecuación de Sine-Gordon es invariante ante transformaciones de Lorentz

Esta invarianza ante las transformaciones de Lorentz conduce a la contracción de Lorentz de la dimensión espacial por el factor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{C_0^2}}$, tal como sucede en la teoría especial de la relatividad.

Resulta verdaderamente sorprendente que si un solitón tipo Sine-Gordon se está desplazando con una velocidad v , entonces dependiendo del sistema, existirá una velocidad límite " C_0 " para la que la velocidad del solitón nunca podrá ser igual o mayor a esta velocidad límite C_0 que impone el sistema^(*). En el caso de la relatividad especial, la velocidad límite es la velocidad de la luz. En la relatividad especial no se puede ver directamente la contracción que sufre un objeto que se mueva a una velocidad próxima a la velocidad de la luz. Pero en el caso de la teoría de Sine-Gordon, (por lo menos en el dispositivo mecánico de la barra de goma) se puede observar como el ancho del solitón se contrae de acuerdo a la relación de contracción de Lorentz

(*) En el capítulo 5, se reporta la construcción de un dispositivo mecánico que consiste en una serie de péndulos acoplados en una forma muy particular. En este sistema, la velocidad límite es igual a 95 cm/seg.

3.3.2.- DINAMICA RELATIVISTA A LA SINE-GORDON

La invarianza de la ecuación de Sine-Gordon (2.2) con respecto a las transformaciones de Lorentz asegura la conservación tanto de la energía como del momento, y por tanto es posible definir en principio la dinámica relativista a la Sine-Gordon en el plano \overline{IX} .

Para obtener la energía, el momento, la masa, del solitón, se utilizará el formalismo variacional.

La densidad Lagrangiana asociada a la ecuación de Sine-Gordon (2.2) viene dada como⁽⁷⁾.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \phi_x^2 - \frac{1}{2C_0^2} \phi_t^2 - \frac{\omega_0^2}{C_0^2} (1 - \cos \phi) \quad (3.42)$$

En efecto, si se sustituye la densidad Lagrangiana (3.42) en la ecuación de Euler-Lagrange (3.36)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_x} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (3.36)$$

se obtiene la ecuación de Sine-Gordon (2.1)

$$\phi_{xx} - \frac{1}{C_0^2} \phi_{tt} = \frac{\omega_0^2}{C_0^2} \sin \phi \quad (2.1)$$

En forma similar a como se procedió en la subsección 2.3.2. se tiene que

$$\frac{d\phi}{d\zeta} = \pm \sqrt{\frac{2\omega_0^2 (1 - \cos \phi)}{C_0^2 (1 - v^2/C_0^2)}} \quad (3.43)$$

$$\zeta = \pm \left[1 - \frac{v^2}{C_0^2} \right]^{1/2} \frac{C_0}{\omega_0} \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{2(1 - \cos \phi)}} \quad (3.44)$$

Las expresiones (3.43) y (3.44) son semejantes a las expresiones (2.19) y (2.21) obtenidas en el capítulo II.

Se sigue que $|v| < C_0$ y el solitón tiene una anchura (solitón en reposo):

$$d = \frac{C_0}{\omega_0}$$

La energía del solitón viene dada por

$$E = \int \mathcal{H}(\phi) dx \quad (3.45)$$

$$\text{donde } \mathcal{H} = \mathcal{L} - \Pi \phi_t \quad (3.38)$$

Para la ecuación (2.1), se obtiene que

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} = -\frac{1}{C_0^2} \phi_t$$

y

$$\mathcal{H}(\phi) = \frac{1}{2} \phi_x^2 + \frac{1}{2C_0^2} \phi_t^2 - \frac{\omega_0^2}{C_0^2} (1 - \cos \phi)$$

$$\mathcal{H}(\phi) = \frac{1}{2} \left[\phi_x^2 + \frac{1}{C_0^2} \phi_t^2 - \frac{2\omega_0^2}{C_0^2} (1 - \cos \phi) \right] \quad (3.46)$$

Sustituyendo (3.46) en (3.45) se obtiene

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\phi_x^2 + \frac{1}{C_0^2} \phi_t^2 - \frac{2\omega_0^2}{C_0^2} (1 - \cos \phi) \right] dx \quad (3.47)$$

La solución de la ecuación de Sine-Gordon no-normalizada (2.1) viene dada como

$$\phi_v^+(x, t) = 4 \operatorname{arc} \tan \left\{ e^{\pm \frac{\omega_0 (x - vt)}{C_0 \sqrt{1 - v^2/C_0^2}}} \right\} \quad (2.32)$$

Derivando parcialmente a (2.32) con respecto a x y t se obtiene

$$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\frac{4 \omega_0}{c_0 \sqrt{1 - v^2/c_0^2}} e^{\frac{\omega_0 (x - vt)}{c_0 \sqrt{1 - v^2/c_0^2}}}}{\left[1 + e^{\frac{2 \omega_0 (x - vt)}{c_0 \sqrt{1 - v^2/c_0^2}}} \right]}$$

(3.48)

$$\phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{-\frac{4 v \omega_0}{c_0 \sqrt{1 - v^2/c_0^2}} e^{\frac{\omega_0 (x - vt)}{c_0 \sqrt{1 - v^2/c_0^2}}}}{\left[1 + e^{\frac{2 \omega_0 (x - vt)}{c_0 \sqrt{1 - v^2/c_0^2}}} \right]}$$

(3.49)

Sustituyendo (3.48) y (3.49) en (3.47) se obtiene

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\frac{16 \omega_0^2}{c_0^2 (1 - v^2/c_0^2)} e^{\frac{2 \omega_0 (x - vt)}{c_0 \sqrt{1 - v^2/c_0^2}}}}{\left[1 + e^{\frac{2 \omega_0 (x - vt)}{c_0 \sqrt{1 - v^2/c_0^2}}} \right]^2} \right] dx +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{C_0^2} \left[\frac{16 \omega_0^2 v^2}{C_0^2 \left(1 - \frac{v^2}{C_0^2} \right)} e^{\frac{2\omega_0(x-ut)}{C_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{C_0^2}}}} \right. \\
 & \left. + \frac{2\omega_0(x-ut)}{C_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{C_0^2}}} \right]^2 \\
 & - \frac{2\omega_0^2}{C_0^2} (1 - \cos \phi) dx \\
 E = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{16 \omega_0^2 \left[e^{\frac{2\omega_0(x-ut)}{C_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{C_0^2}}}} \left(1 + \frac{v^2}{C_0^2} \right) \right]}{C_0^2 \left(1 - \frac{v^2}{C_0^2} \right) \left[1 + e^{\frac{2\omega_0(x-ut)}{C_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{C_0^2}}}} \right]^2} \right. \\
 & \left. - \frac{2\omega_0^2}{C_0^2} (1 - \cos \phi) \right] dx
 \end{aligned}$$

$$E = \frac{8 \omega_0 C_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C_0^2}}} \quad (3.50)$$

La energía en reposo o energía propia resulta ser

$$E_0 = 8 \omega_0 C_0 \quad (3.51)$$

El momento relativista queda expresado por

$$P = \frac{M_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C_0^2}}} \quad (3.52)$$

donde M_0 es la masa en reposo y se obtiene de la siguiente expresión

$$M_0 = \frac{\omega_0}{C_0} \int_0^{\psi} \sqrt{2(1 - \cos \phi)} dx \quad (3.53)$$

Integrando (3.53) se encuentra que

$$M_0 = \frac{8\omega_0}{C_0} \quad (3.54)$$

Sustituyendo (3.54) en (3.52) se obtiene

$$P = \frac{8 \omega_0 v / C_0}{\sqrt{1 - v^2 / C_0^2}} \quad (3.55)$$

Los resultados obtenidos en (3.50), (3.51), (3.52), (3.54) y (3.55) son válidos para solitones tipo Sine-Gordon cuya expresión analítica viene dada por (3.32).

Existe otro tipo de soluciones de solitón de la ecuación de Sine-Gordon. estas soluciones son llamadas *solitones respiradores*.

La solución de solitón respirador consiste en un par confinado solitón-anti-solitón en un estado oscilatorio (ver fig. 3.2).

Este estado oscilatorio del par confinado solitón-anti-solitón viene dado analíticamente por la expresión^(1, 41)

$$\phi_R^0 = 4 \arctan \{ \tan \theta \operatorname{sen} [(\cos \theta) t] \operatorname{sech} [(\sin \theta) x] \} \quad (3.56)$$

o más generalmente

$$\phi_R^0 = 4 \arctan \{ \tan \theta \operatorname{sen} [(\cos \theta)(t - t_0)] \operatorname{sech} [(\sin \theta)(x - x_0)] \} \quad (3.57)$$

Las soluciones (3.56) o (3.57) representan a un solitón respirador estacionario que oscila con una frecuencia dada por $\cos \theta$. A Su vez la expresión

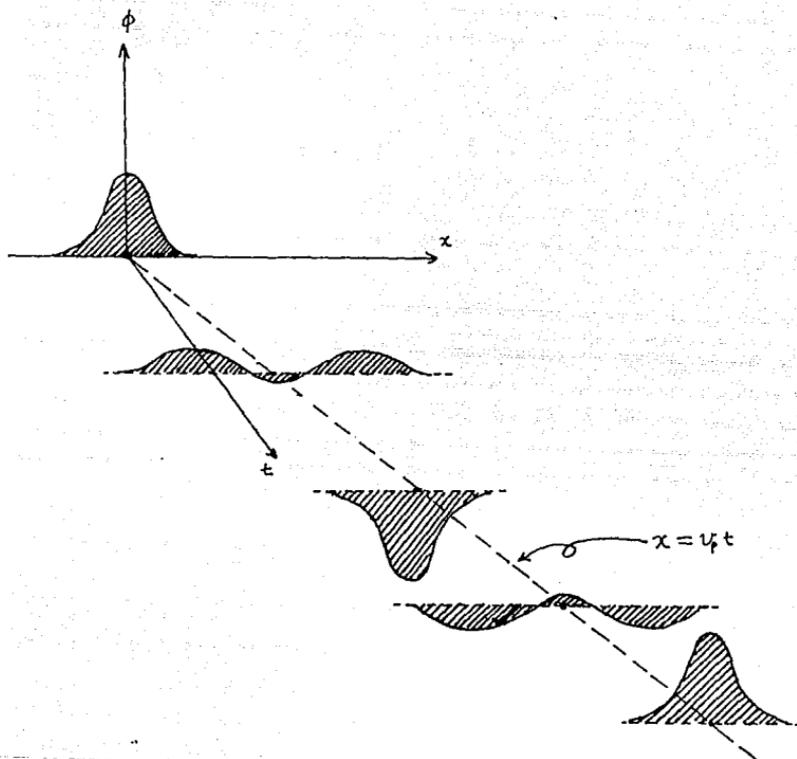


Figura 3.2. Un solitón respirador evolucionando conforme transcurre el tiempo. v_p es la velocidad de propagación. La línea punteada es la trayectoria del centro del respirador.

$$\phi_R^v = 4 \operatorname{arc} \tan \left\{ \tan \theta \operatorname{sen} \left[(\cos \theta) \frac{t - vt - t_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \cdot \operatorname{sech} \left[(\operatorname{sen} \theta) \frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \right\} \quad (3.58)$$

representa a un respirador que está moviéndose con una velocidad v y oscila con una frecuencia igual a $(\cos \theta) / \sqrt{1 - v^2}$.

Las expresiones (3.56), (3.57) y (3.58) cuando los parámetros θ , v , x_0 , t_0 son constantes representa una solución exacta de la ecuación de Sine-Gordon (2.2)^[19, 41].

Para obtener el comportamiento dinámico de los solitones respiradores, es decir, para obtener las expresiones de la energía, el momento, la masa, del solitón respirador el procedimiento es análogo (pero más complicado) al efectuado en el caso de la dinámica del solitón ordinario. Siguiendo a Takhtadzhyan y Feddeev^[50], vemos que utilizando métodos perturbativos se obtiene que para un solitón respirador, la energía y el momento definidos por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \phi_x^2 + \frac{1}{2} \phi_t^2 + (1 - \cos \phi) \right] dx$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\phi_x \phi_t \right] dx$$

vienen dados por

$$E = \frac{16 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$P = \frac{16 v \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1 - v^2}}$$

La energía y la masa en reposo del solitón respirador son

$$E_0 = 16 \operatorname{sen} \theta$$

$$M_0 = 16 \operatorname{sen} \theta$$

respectivamente, donde

$$v = \frac{P}{E}$$

es la velocidad del solitón respirador.

3.4.- DINAMICA DE SOLITONES EN PRESENCIA DE "FUERZAS" EXTERNAS

3.4.1.- LOS SOLITONES SE COMPORTAN COMO PARTICULAS RELATIVISTAS

En las subsecciones 1.2.1, 2.2.3 y 2.3.2 se vio que las soluciones de la ecuación de Sine-Gordon (2.2) describen ondas que no se disipan ni se dispersan como lo hacen las ondas comunes^(*). Estas ondas solitarias que fueron llamadas solitones, conservan su forma y tamaño indefinidamente. Cuando dos de estas ondas colisionan, cada una de ellas emerge de la interacción con su identidad intacta; y si un solitón encuentra a un anti-solitón, ambos pueden aniquilarse. Dada una descripción de un ente con estas propiedades, se podría decir que se trata de una partícula.

En la subsección 3.2.2 se probó que la ecuación de Sine-Gordon es invariante ante transformaciones de Lorentz de las variables independientes, y que esta invarianza conduce a la famosa contracción de Lorentz de las dimensiones espaciales por el factor $\sqrt{1 - v^2/c_0^2}$, tal y como sucede en la teoría especial de la relatividad. Más adelante en la sub-sección 3.2.3 se estableció el

(*) Un ejemplo de onda común, es el de aquellas que se originan al dejar caer una piedra a un estanque.

comportamiento dinámico tanto de solitones ordinarios^(*) como de solitones respiradores. de lo anterior se puede concluir que el comportamiento dinámico de solitones (ordinarios y respiradores) es semejante al comportamiento dinámico de partículas relativistas clásicas, es decir, los solitones se comportan como partículas relativistas.

En esta sección se estudiará el comportamiento dinámico de solitones ordinarios en presencia de fuerzas externas, y la conclusión a la que se llegará es que en presencia de dichas fuerzas, estos solitones también se comportan como partículas relativistas clásicas.

3.4.2.- DINAMICA DE SOLITONES EN PRESENCIA DE UNA FUERZA EXTERNA CONSTANTE

Consideremos la ecuación de Sine-Gordon normalizada (2.2)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \sin \phi \quad (2.2)$$

Si a (2.2) se le incluye un término adicional, es decir, se le añade una fuerza externa constante $r^{(**)}$, la ecuación (2.2) toma la forma^(22, 23, 47)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sin \phi = r \quad (3.59)$$

(*) Los solitones ordinarios son aquellos cuya expresión viene dada

por: $\phi_0^{\pm} = 4 \arctan \left\{ \exp \left[\pm \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}} \right] \right\}$ (2.30)

(**) En el caso del dispositivo mecánico (ver capítulo 5) esta fuerza representa una torca externa constante.

Si $x \rightarrow \pm \infty$ la ecuación (3.59) se reduce a la ecuación^[21. 9d. 4d]

$$\frac{d^2 \phi_{\infty}}{dt^2} + \text{sen } \phi_{\infty} = \tau \quad (3.60)$$

donde $\phi_{\infty}(t) = \phi(\pm \infty, t)$.

Supongamos que la solución de (3.60) es de la forma^[21. 4d]

$$\phi(x, t) = \psi(y) + \phi_{\infty}(t) \quad (3.61)$$

donde^[21]

$$y = \frac{x - \int_0^t \gamma(t') dt'}{\sqrt{1 - v^2(t')}} \quad (3.62)$$

con

$$\gamma(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{y} \quad \psi(y) = 4 \text{ arc tan } e^{-y} \quad (*)$$

Considerando a (3.60), (3.61) y (3.62) se obtiene que

$$\gamma(t) \simeq \frac{\pi}{4 \sqrt{1 - v^2(t)}} \left[\tau t' - \frac{d\phi_{\infty}}{dt} \right] \quad (3.63)$$

Si se supone que $\text{sen } \phi_{\infty} \simeq \phi_{\infty}$, la ecuación (3.60) toma la forma

$$\frac{d^2 \phi_{\infty}}{dt^2} + \phi_{\infty} \simeq \tau \quad (3.64)$$

Resolviendo la ecuación (3.63) se obtiene

$$\phi_{\infty} \simeq \tau (1 - \cos t) \quad (3.65)$$

Sustituyendo (3.65) en (3.63) se llega^[47] a

$$\gamma(t) \simeq \frac{\pi \tau t^3}{24 \sqrt{1 - v^2(t)}} \quad (3.66)$$

(*) El signo menos en $\psi(y)$ indica que se está considerando un anti-solución (en un sistema coordenado en el que se encuentra estacionado).

La expresión (3.66) da la velocidad del solitón y es válida para valores pequeños del tiempo. De (3.66) se ve que la aceleración del solitón es proporcional a t^2 [(d.v(t)/dt) $\propto t^2$].

A continuación se obtendrá la expresión de la velocidad del solitón para valores grandes del tiempo. Sea Σ el sistema coordenado del solitón y sea Σ' un sistema coordenado Galileano que se está moviendo con una velocidad $V(t)$ con respecto a Σ . Como (3.66) es válida para $t \gg 0$, se supondrá que la trayectoria del solitón no se aparta mucho de la trayectoria del sistema Σ' , y que la variación del tiempo de la función $\gamma(t) = \sqrt{1 - v^2(t)}$ permanece pequeña, es decir que $\gamma(t)$ no difiere del factor de Lorentz $\sqrt{1 - V^2}$.

Sea

$$V(t + dt) = \frac{V(t) + \mathcal{V}(t' + dt')}{1 + \frac{V(t)\mathcal{V}(t' + dt')}{c^2}}$$

donde \mathcal{V} es la velocidad relativa del solitón con respecto al sistema coordenado Σ' y t' es el tiempo propio, es decir $t' = \sqrt{1 - V^2}t$.

Como $\mathcal{V}(t') = 0$, desarrollando a primer orden en \mathcal{V}/V se obtiene

$$\frac{dV}{dt} \approx \sqrt{1 - V^2} \frac{d \left(\frac{\mathcal{V}}{\sqrt{1 - v^2(t)}} \right)}{dt'} \quad (3.67)$$

Integrando a (3.67) y expresando a $\mathcal{V}(t')$ en forma similar a la ecuación (3.66) vemos que⁽⁴⁷⁾

$$V(t) \approx \tanh \left[\frac{\pi r t^3}{24 (\sqrt{1 - v^2(t)})^3} \right] \quad (3.68)$$

Así (3.68) es la generalización relativista de (3.66) para tiempos grandes.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

3.4.3.- DINAMICA DE SOLITONES EN PRESENCIA DE UNA FUERZA EXTERNA CONSTANTE MAS UN PEQUEÑO AMORTIGUAMIENTO

Si se le agrega a (3.59) un término lineal que represente un pequeño amortiguamiento viscoso $\Gamma \frac{d\phi}{dt}$ (con $0 < \Gamma \ll 1$), la ecuación (3.59) toma la forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin \phi = \tau \quad (3.69)$$

Procediendo en forma análoga a lo realizado en la subsección anterior, se obtiene que⁽⁴⁷⁾

$$\gamma(t) \simeq \tanh \left\{ \left[\frac{\pi \tau t^2}{24 \left(\sqrt{1 - v^2(t)} \right)^5} \right] \left[1 - \frac{1}{2} \Gamma \right] \right\} \quad (3.70)$$

La expresión (3.70) representa la velocidad del solitón que está afectado tanto por una fuerza externa constante como por un pequeño amortiguamiento viscoso.

CAPITULO 4
 LA PARADOJA DE LOS GEMELOS Y EL FENOMENO DE SIMULTANEIDAD
 EN LA TEORIA DE SINE-GORDON

4.1.- LA PARADOJA DE LOS GEMELOS EN RELATIVIDAD ESPECIAL

4.1.1.-EN QUE CONSISTE EL PROBLEMA

La teoría de la relatividad especial a dado origen a un buen número de paradojas⁽⁵⁹⁾. De ellas quizá la que más fama ha alcanzado, por las controversias suscitadas, sea la paradoja de los relojes^(60, 29, 59).

En 1911 Einstein⁽¹⁷⁾ escribía: "Si un organismo vivo permanece en reposo en un sistema, y otro describe una trayectoria arbitraria y vuelve al punto de partida al final de dicha trayectoria, el organismo viajero regresará en condiciones casi inalteradas, mientras que el organismo que permaneció en su posición inicial a dado lugar a nuevas generaciones...."

Si los organismos son hombres, entonces se tendrá que el gemelo viajero volverá al punto de partida y se encontrará con la situación de que es más joven que su gemelo. El supuesto problema que se presenta, es que cualesquiera de los dos gemelos puede considerarse como el viajero, si esto sucede, cada uno de ellos encontrará al otro más joven; pero esto es una contradicción lógica. Pensar en estos terminos es suponer que la situación de ambos gemelos es simétrica, y es en esta supuesta simetría donde reside el problema de la inconsistencia lógica, ya que entra en contradicción con los postulados de la relatividad especial.

4.1.2.- LA RUTA DEL TIEMPO RESULTA SER DEPENDIENTE

Supongamos que en el espacio plano \overline{XX} de Minkowski se se tienen dos sucesos p y q que está identificados en este plano o como dos puntos con coordenadas (x', t') y (x'', t'') . Los sucesos p, q en principio estarán relacionados mediante una infinidad de líneas de universo (ver fig. 4.1).

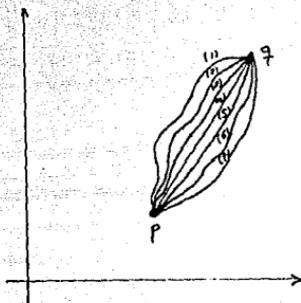


Figura 4.1. Diversas líneas de Universo

Se encuentra que la distancia recorrida entre los sucesos p y q dependerá de la línea de universo que se elija.

En efecto, si un objeto cuenta con alguna forma de medir el tiempo, entonces el tiempo registrado por el objeto será el τ : tiempo medido desde el sistema inercial Σ .

La relación que existe entre τ y t viene dada por

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$$

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^2}$$

El tiempo propio τ que transcurre entre los sucesos p y q está expresado mediante

$$\Delta\tau = \int_p^q \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^2} \quad (4.1)$$

La integración de (4.1) se efectuará a lo largo de la línea de universo de p a q que se haya elegido.

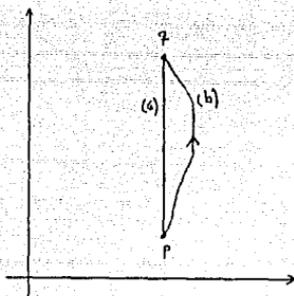


Figura 4.2. Líneas de Universo para: (a) Un objeto que se encuentra en reposo. (b) un objeto en movimiento de p a q.

Consideremos ahora un objeto que se encuentra en reposo (sobre el eje X (ver fig. 4.2)). Su línea de universo será una línea recta vertical. Si un segundo objeto viaja de p a q por una línea de universo diferente, de tal suerte que en p ambos objetos se alejen y en q ambos se junten, se tendrá que, el tiempo propio τ que

transcurre a lo largo de la línea de universo del primer objeto. (objeto en reposo) estará dada por

$$\Delta r = \int_p^q \sqrt{dt^2 - 1/c^2 dx^2} = \int_p^q \sqrt{dt^2} = \int_p^q dt$$

$$\Delta r = t_q - t_p \quad (4.2)$$

donde dx es cero a lo largo de esa línea de universo.

Por otro lado, el tiempo r' transcurre a lo largo de la línea de universo del segundo objeto, estará dada por

$$\Delta r' = \int_p^q \sqrt{dt^2 - 1/c^2 dx^2} \quad (4.3)$$

Comparando las expresiones (4.2) y (4.3) se encuentra que

$$\Delta r' < \Delta r$$

Esto significa que los relojes asociados a los objetos darán lecturas diferentes de tiempo cuando se encuentran en P. De hecho, el reloj del segundo objeto (objeto en movimiento) se retrasa en comparación con el reloj del primer objeto.

De la teoría especial de la relatividad se sabe que los relojes en movimiento a velocidad constante v se atrasan con respecto a los relojes sincronizados en un sistema inercial de referencia por el factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. En el caso de la paradoja de los gemelos, la situación es completamente diferente. En este caso lo que se compara es el reloj único del gemelo viajero con el reloj único (en reposo) del gemelo estacionario. Para comparar ambos relojes se necesita que ellos coincidan dos veces, es decir, al comienzo del viaje y al término de éste, esto es, cuando ambos gemelos se vuelvan a encontrar.

Lo esencial es que el reloj del gemelo viajero cambia su velocidad al invertir la dirección y regresar. Este hecho es el que hace que la situación no sea simétrica, es decir, uno de ellos experimenta en algún momento aceleraciones y el otro no.

4.1.3.- ANALISIS DE LA PARADOJA DE LOS GEMELOS EN RELATIVIDAD ESPECIAL

Para tener una idea más clara acerca de la paradoja de los gemelos, se hará un análisis cuantitativo. El problema empieza con la existencia de los gemelos A y B.

Supongamos que en un cierto instante de tiempo el gemelo B decide emprender un viaje hacia el espacio cósmico, dejando a su hermano gemelo A en la Tierra. La velocidad v a la que viajará B será "casi" del orden de la velocidad de la luz. Se despreciará el tiempo en el que B estará acelerado (es decir, al partir, al dar la vuelta, y al encontrarse de nuevo con A).

Segun lo anterior se puede observar que, mientras que el gemelo A está siempre en un sistema inercial, el gemelo B se encuentra de hecho en dos sistemas inerciales durante todo su viaje. Uno de ellos es cuando se marcha y el otro cuando da la vuelta y retorna.

Supongamos que los gemelos A y B se pueden comunicar enviándose señales luminosas que son emitidas a intervalos de una cierta unidad de tiempo (por ejemplo cada vez que cumplan años) y que el viaje de ida y vuelta le tome a B un tiempo de T unidades de tiempo.

A medida que el gemelo B se aleja del gemelo A, cada gemelo

recibirá las señales del otro a un ritmo menor que viene dado por

$$\eta' = \eta \frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}} \quad (4.4)$$

donde η' y η son el número de señales por unidad de tiempo que emiten tanto el gemelo viajero como el gemelo estacionario, cuando el gemelo viajero va del punto de partida hasta el punto en el cual da la vuelta para retornar.

Cuando el gemelo B da la vuelta y retorna acercándose a su hermano gemelo A, cada gemelo recibirá las señales del otro a un ritmo mayor el cual viene dado como

$$\eta'' = \eta \frac{\sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 - v/c}} \quad (4.5)$$

donde η'' , η corresponden al número de señales por unidad de tiempo que emiten tanto el gemelo viajero como el gemelo estacionario, cuando el gemelo viajero va del punto en el que da la vuelta y retorna hasta el punto en el que se encuentra con su gemelo.

VIAJE DE IDA. El gemelo viajero parte alejándose. Las señales que reciben ambos, por unidad de tiempo vienen dadas por la expresión (4.4). Si suponemos que el suceso de que B da la vuelta tiene lugar a una distancia $L = (vT)/2$ (donde T es el tiempo total del viaje) medida con respecto a A, entonces la última señal que emite B antes de dar la vuelta alcanzará al gemelo A en un tiempo L/c posterior. Así, durante mucho más de la mitad del tiempo total T , el gemelo A estará registrando las señales de B a un ritmo menor η' dado por (4.4). En el tiempo restante, el gemelo A recibirá señales a un ritmo mayor η'' dado por (4.5).

En el instante en que B da la vuelta, A detecta este suceso en un tiempo t_a dado por

$$t_a = \frac{L}{v} + \frac{L}{c}$$

$$= \frac{L}{v} \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

Sin embargo, el tiempo que mide B será

$$t_a' = \frac{L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

El número de señales recibidas durante el viaje de ida, medido por A, estará dado por

$$\eta' t_a = \frac{\eta L}{v} \left(1 + \frac{v}{c} \right) \left(\frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}} \right) = \frac{\eta L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

En cambio, el gemelo viajero mide un número dado por

$$\eta' t_a' = \frac{\eta L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(\frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}} \right) = \frac{\eta L}{v} \left(1 - \frac{v}{c} \right)$$

VIAJE DE REGRESO. Ahora, el tiempo que tarda en hacerse el resto del viaje, es decir, el tiempo en el que B, va del punto de retorno hasta el punto en el que se encuentra con A, medido por este último es

$$t_b = \frac{L}{v} - \frac{L}{c} = \frac{L}{v} \left(1 - \frac{v}{c} \right)$$

El gemelo B mide un tiempo dado por

$$t_b' = \frac{L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

El número de señales recibidas durante el viaje de vuelta (el resto del viaje) medido por A es

$$\eta' t_b = \frac{\eta L}{v} \left(1 - \frac{v}{c} \right) \left[\frac{\sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 - v/c}} \right] = \frac{\eta L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

El gemelo B mide un número dado por

$$\eta'' t_b' = \frac{\eta L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\frac{\sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 - v/c}} \right] = \frac{\eta L}{v} \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

De lo anterior se tiene que:

a) El tiempo total del viaje medido por A es

$$T_A = t_a + t_b = \left(\frac{L}{v} + \frac{L}{c} \right) + \left(\frac{L}{v} - \frac{L}{c} \right)$$

$$T_A = \frac{2L}{v}$$

y el medido por B es

$$T_B = t_a' + t_b' = \frac{L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$T_B = \frac{2L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

b) El número total de señales que recibió A enviadas por B es

$$N_A = \eta' t_a + \eta'' t_b = \frac{\eta L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{\eta L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$N_A = \frac{2\eta L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

y que recibió B enviados por A es

$$N_B = \eta' a' + \eta'' b' = \frac{\eta L}{v} \left[1 - \frac{v}{c} \right] + \frac{\eta L}{v} \left[1 - \frac{v}{c} \right] \\ = \frac{2\eta L}{v}$$

Así, se tiene que cada gemelo recibe tantas señales como emite el otro en todo el viaje. Ambos gemelos estarán de acuerdo en que sus medidas del tiempo total no concuerdan; y sus relojes, cada uno de los cuales ha estado señalando su tiempo propio, presentan desacuerdos al juntarlos de nuevo en un mismo lugar.

4.2.- LA PARADOJA DE LOS GEMELOS EN LA TEORIA DE SINE-GORDON

4.2.1.- LA ECUACION DE SINE-GORDON PERTURBADA

COMO UN MODELO MAS REALISTA

Desde el punto de vista de la teoría de perturbaciones, la ecuación de Sine-Gordon normalizada (2.2)

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} - \sin \phi = 0 \quad (2.2)$$

puede considerarse como la descripción dinámica de orden cero. La ecuación (2.2) como ya se mencionó admite como soluciones (ver sub-sección 3.3.2) de un solitón respirador estacionario

$$\phi_R^0 = 4 \arctan \left\{ \tan \theta \operatorname{sech} \left[(\cos \theta) x \right] \right\} \quad (3.56)$$

y un solitón respirador en movimiento (con velocidad constante v)

$$\phi_R^v = 4 \arctan \left\{ \tan \theta \operatorname{sech} \left[(\cos \theta) \frac{t - vx - t_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \right. \\ \left. \cdot \operatorname{sech} \left[(\sin \theta) \frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \right\} \quad (3.58)$$

Sea

$$\phi_{,xx} - \phi_{,tt} - \sin \phi = \epsilon f \quad (4.6)$$

la ecuación de Sine-Gordon perturbada, donde el término ϵf se supone pequeño. Escogiendo a ϵf como $\alpha \phi_{,t}$, con $\alpha > 0$, y con $\alpha \phi_{,t}$ representando una perturbación disipativa.

Poniendo a (4.6) en la forma matricial, es decir, como el sistema de primer orden^(39, 41)

$$\begin{bmatrix} \partial_t & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & \partial_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \phi_{,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\epsilon f \end{bmatrix}$$

y desarrollando $\begin{bmatrix} \phi \\ \phi_{,t} \end{bmatrix}$, se obtiene

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \phi_{,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \phi_{0,t} \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} \phi \\ \phi_{1,t} \end{bmatrix} + \dots$$

Al orden cero vemos que

$$\phi_{0,xx} - \phi_{0,tt} - \sin \phi_0 = 0 \quad (4.7)$$

Si en la solución del solitón respirador (3.58) se supone que los parámetros θ , ϕ_0 , x_0 y t_0 varían lentamente con el tiempo en lugar de ser constantes, es decir, si (3.58) toma la forma

$$\phi_{0,R} = 4 \arctan \left\{ \tan \theta(t) \operatorname{sen} \left[(\cos \theta(t)) \frac{t - T(x,t) - t_0(t)}{\sqrt{1 - v^2(t)}} \right] \right\}$$

$$\cdot \operatorname{sech} \left[\left(\operatorname{sen} \theta(t) \frac{x - \bar{X}(t) - x_0(t)}{\sqrt{1 - v^2(t)}} \right) \right] \quad (4.8)$$

donde $\bar{X} = \xi$ y $T_x = v(t)$.

De esta manera, la ecuación de Sine-Gordon perturbada (4.6) es satisfecha en el orden cero por la solución de solitón respirador (4.8).

El respirador (4.8) toma la forma particular

$$\phi \approx 4 \theta \operatorname{sen} \left[\frac{t - T - \epsilon_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \operatorname{sech} \left[\frac{\theta (x - \bar{X} - x_0)}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \quad (4.9)$$

cuando $\theta \rightarrow 0$.

Si $\theta \ll 1$, el solitón respirador estacionario (3.56) toma la forma

$$\phi = 4 \theta \operatorname{sen} (t) \operatorname{sech} (\theta x) \quad (4.10)$$

y el solitón respirador en movimiento (3.58) está dado por

$$\phi = 4 \theta \operatorname{sen} \left[\frac{t - T}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \operatorname{sech} \left[\theta \left(\frac{x - \bar{X}}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right] \quad (4.11)$$

donde como antes $T_x = \bar{X} = v$, $\left[T_x = \frac{\partial T}{\partial x} \text{ y } \dot{\bar{X}} = \frac{d\bar{X}}{dt} \right]$.

4.2.2.- LA PARADOJA DE LOS GEMELOS

Como ya se mencionó al comienzo de este capítulo, la ecuación de Sine-Gordon perturbada

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} - \operatorname{sen} \phi = \alpha \phi_t \quad \alpha \ll 1 \quad (4.12)$$

será considerada como una descripción dinámica más "realista" de la dada por la ecuación de Sine-Gordon (2.2)

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} - \operatorname{sen} \phi = 0 \quad (2.2)$$

Haciendo abstracción, pensemos, como sería el panorama en un mundo descrito por el modelo (4.12). En este mundo sus pobladores son los solitones respiradores Sine-Gordon.

Supongamos que A y B son solitones respiradores. Si A y B son gemelos (A el gemelo estacionario y B el gemelo viajero) entonces A puede ser representado mediante (4.10), es decir, como

$$\phi_A = 4 \theta_A \operatorname{sen}(t) \operatorname{sech}(\theta_A x) \quad (4.13)$$

y B mediante (4.11), a saber,

$$\phi_B = 4 \theta_B \operatorname{sen} \left[\frac{t - \tau}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \operatorname{sech} \left[\theta_B \left(\frac{x - X}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right] \quad (4.14)$$

La condición para que A y B sean realmente gemelos es que

$$\theta_A(t=0) = \theta_B(t=0)$$

De las relaciones (4.13) y (4.14) se observa que el reloj del gemelo B se mueve más despacio por el factor $\sqrt{1 - v^2}$ que el reloj del gemelo A. Por tanto, desde este punto de vista, el gemelo estacionario "envejece" más aprisa que su gemelo B.

Un análisis similar al efectuado en la sub-sección 4.1.3 podría ser efectuado y la conclusión de éste sería similar a la obtenida en 4.1.3.

Por lo tanto queda establecido que existe un efecto de envejecimiento para el gemelo estacionario similar al que resulta de la teoría de la relatividad especial.

4.3.- EL FENOMENO DE SIMULTANEIDAD EN LA TEORIA DE SINE-GORDON

En esta sección se estudiará el fenómeno de simultaneidad en un universo descrito por el modelo (4.12) (Ver las sub-secciones 4.2.1 y 4.2.2).

Consideremos en este universo dos sistemas inerciales Σ y Σ' , los cuales se están moviendo con una velocidad relativa v . Supongamos que hay dos solitones respiradores ϕ_A y ϕ_B en reposo en el sistema Σ' , separados una distancia Sine-Gordon l_0' . ϕ_A y ϕ_B están en Σ' en calidad de "observadores" y vienen dados como

$$\phi_A = 4 \theta_A \operatorname{sen}(t') \operatorname{sech}(\theta_A x')$$

y

$$\phi_B = 4 \theta_B \operatorname{sen}(t') \operatorname{sech}[\theta_B (x' - l_0')]$$

Cada uno de estos observadores cuenta con un reloj asociado a él. La sincronización de los relojes de ϕ_A y ϕ_B es análoga a la efectuada en la teoría de la relatividad especial, es decir, en este universo descrito por el modelo (4.12), existe una velocidad máxima $C_0 \equiv 1^{(*)}$ impuesta por el modelo (4.12) (Por ejemplo, en el caso de una dislocación en un cristal, la velocidad límite es la velocidad del sonido en el cristal; y en el caso del dispositivo mecánico, la velocidad límite es la que fija el propio dispositivo^(**)). Entonces la forma de que disponen ϕ_A y ϕ_B para sincronizar sus relojes es la siguiente: en el punto medio entre ϕ_A

(*) Dado que la ecuación (4.12) está en su forma normalizada, la velocidad máxima de la interacción toma el valor de uno.

(**) La velocidad límite del dispositivo mecánico es de 95 cm/seg (ver cap. 5)

y ϕ_B se genera una interacción, y cada respirador pondrá su reloj en $t' = 0$ cuando la interacción llegue a ellos.

Supongamos que un tercer respirador ϕ_C , el cual se encuentra en reposo en el sistema Σ , observa que los respiradores ϕ_A y ϕ_B se mueven con una velocidad v , digamos hacia la derecha. El respirador ϕ_C observa que ϕ_A y ϕ_B vienen dados como

$$\phi_A = 4 \theta_A \operatorname{sen} \left[\frac{t - T}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \operatorname{sech} \left[\theta_A \left(\frac{x - X}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

y

$$\phi_B = 4 \theta_B \operatorname{sen} \left[\frac{t - T}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \operatorname{sech} \left[\theta_B \left(\frac{x - X}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

El mismo observa que la separación entre los respiradores ϕ_A y ϕ_B viene dada por $\epsilon_0 = \sqrt{1 - v^2} \epsilon_0^{(*)}$ y ϕ_C nota que al surgir la interacción en el punto medio entre ϕ_A y ϕ_B en Σ' , ésta viaja hacia ϕ_A y hacia ϕ_B , alcanzando primero a ϕ_A y posteriormente a ϕ_B . Cuando la interacción alcanza a ϕ_A , en ese preciso instante, ϕ_A pone su reloj en $t' = 0$. Posteriormente, ϕ_C "ve" que ϕ_B pone su reloj en $t' = 0$ y por lo tanto ϕ_C concluye que los sucesos no fueron simultáneos.

Si $t = 0$ es el instante en el que ϕ_C observa que se emite la interacción, entonces en $t = t_A$, la interacción llega a ϕ_A y se tiene que

$$\operatorname{Co} t_A = \frac{\epsilon_0 t_A}{2} \sqrt{1 - v^2} - v t_A^{(**)}$$

(*) Esto sucede ya que la ecuación de Sine-Gordon es invariante relativista.

(**) v es la máxima velocidad.

donde

$$t_A = \frac{t_0' \sqrt{1 - v^2}}{2(1 + v)} = \frac{t_0'}{2} \frac{\sqrt{1 - v}}{\sqrt{1 + v}}$$

con $C_0 = 1$, y en $t = t_B$ la interacción llega a ϕ_B y

$$C_0 t_B = \frac{t_0'}{2} \sqrt{1 - v^2} + v t_B$$

con

$$t_B = \frac{t_0' \sqrt{1 - v^2}}{2(1 - v)} = \frac{t_0'}{2} \frac{\sqrt{1 + v}}{\sqrt{1 - v}}$$

Así, haciendo ϕ_C la medición del tiempo con su reloj en Σ , el intervalo de tiempo entre las puestas de los relojes de ϕ_A y ϕ_B en Σ' estará dado por

$$\Delta t = t_B - t_A$$

$$\Delta t = \frac{t_0'}{2} \frac{\sqrt{1 + v}}{\sqrt{1 - v}} - \frac{t_0'}{2} \frac{\sqrt{1 - v}}{\sqrt{1 + v}}$$

$$\Delta t = \frac{t_0'}{2} \left[\frac{\sqrt{1 + v}}{\sqrt{1 - v}} - \frac{\sqrt{1 - v}}{\sqrt{1 + v}} \right]$$

$$\Delta t = \frac{t_0' v}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Sin embargo ϕ_C observa que el reloj de ϕ_A se retrasa por el factor $\sqrt{1 - v^2}$, de modo que, para ϕ_C , su reloj marcará

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - v^2} = \frac{t_0' v}{\sqrt{1 - v^2}} \cdot \sqrt{1 - v^2} = t_0' v$$

cuando el reloj de ϕ_B se pone a cero para marcar $t' = 0$. El resultado es que el respirador ϕ_A en Σ encuentra que los relojes de ϕ_A y ϕ_B en Σ' no están sincronizados. Es decir.

$$\phi_A = 4 \theta_A \operatorname{sen} \left[\frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \operatorname{sech} \left[\theta_A \left(\frac{x - \bar{X}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \right]$$

y

$$\phi_B = 4 \theta_B \operatorname{sen} \left[\frac{-t' - \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \operatorname{sech} \left[\theta_B \left(\frac{x - \bar{X} - \ell_0'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \right]$$

De esta forma se concluye que la simultaneidad en la teoría de Sine-Gordon es en verdad un concepto relativo semejante al concepto de simultaneidad en la teoría especial de la relatividad.

CAPITULO 5

EL DISPOSITIVO MECANICO DE SINE-GORDON

5.1.- EL DISPOSITIVO MECANICO DE LA BARRA DE GOMA

5.1.1.- EL DISPOSITIVO MECANICO COMO UN PROYECTO EXPERIMENTAL PARA EL LABORATORIO DE FISICA MODERNA (UN PROYECTO PEDAGOGICO)

Si se examinan la cantidad y la clase de prácticas experimentales que se llevan a cabo en el laboratorio de física moderna, se puede observar que este número (de experimentos realizados) es significativamente considerable (alrededor de 30) y su tipo va desde experimentos realizados en el siglo XIX (efecto Faraday) hasta experimentos realizados a principios y mediados del siglo XX (dispersión Compton (1923), experimento Milikan, etc.). Cabe mencionar que también se realizan experimentos cuyos fundamentos teóricos son de actualidad, como por ejemplo la formación de fractales y el estudio de sistemas que entran en regímenes caóticos, etc.

Se puede asegurar que actualmente no existen a este nivel experimentos que contemplen la teoría de ondas no-lineales. Uno de los problemas a que se enfrentan los centros educativos a nivel superior y universidades de países dependientes es el relacionado con la realización de experimentos cuyos fundamentos teóricos tengan que ver con temas actuales de la física. Un gran porcentaje de este tipo de experimentos requiere para su realización de técnicas complejas, es decir, emplean componentes y aparatos tanto mecánicos como electrónicos muy especializados. Los experimentos de esta clase son, por ejemplo: trabajos relacionados con el estudio

de algunas características de la radioactividad que utilizan un tubo Geiger-Muller^(*), dispersión de Compton y difracción de Bragg, experimentos de microondas, etc.

Dado que hay muy pocos experimentos (sobre temas actuales de física) que se pueden realizar con materiales y equipo de fácil adquisición y a precios razonables; se propone presentar en este capítulo un proyecto de construcción de un dispositivo mecánico que exhiba solitones tipo Sine-Gordon, el cual desde el punto de vista pedagógico tendría cierta importancia y utilidad como una práctica experimental de teoría de ondas no-lineales a nivel del laboratorio de física moderna.

5.1.2.- ECUACION DE MOVIMIENTO DEL DISPOSITIVO MECANICO

Rubinstein⁽⁴⁸⁾ considera como un sistema clásico descrito por la ecuación de Sine-Gordon a una banda elástica de longitud infinita que tiene uno de sus bordes más pesado, y que se encuentra en un campo gravitacional perpendicular a su eje. El único movimiento permitido es el movimiento de torsión en torno a su eje. Este modelo clásico de la ecuación de Sine-Gordon viene esquematizado en la figura 5.1.

En analogía con el modelo clásico de la banda elástica infinita⁽⁵³⁾ se sugiere proponer como dispositivo una banda cilíndrica de material elástico (barra de goma) a la que se le han

(*) en 1985 el costo de un tubo de centellos, era de aproximadamente 2.5 millones.

fijado a distancias iguales un cierto número de péndulos. La figura 5.2 muestra esquemáticamente una porción de este sistema de péndulos.

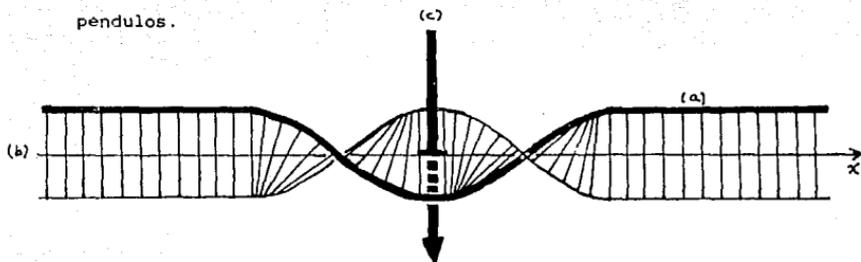


Figura 5.1.- Banda elástica infinita en un campo gravitacional.

a) borde cargado; b) eje de la banda;

c) dirección del campo gravitacional

Para obtener la ecuación de movimiento que describe a este sistema de péndulos consideremos tres péndulos vecinos; los péndulos $(A-1)$ -ésimo, A -ésimo y $(A+1)$ -ésimo (ver figura 5.3).

Cuando el péndulo A -ésimo es girado un ángulo ϕ_A con respecto a la vertical, los péndulos $(A-1)$ -ésimo y $(A+1)$ -ésimo giran un ángulo ϕ_{A-1} y ϕ_{A+1} con respecto a la vertical respectivamente. El péndulo A -ésimo gira un ángulo $\phi_A - \phi_{A-1}$ (respectivamente $\phi_A - \phi_{A+1}$) con respecto al péndulo $(A-1)$ -ésimo (respectivamente $(A+1)$ -ésimo (ver figura 5.3 (b)).

La barra cilíndrica se tuerce ejerciendo sobre los péndulos $(A-1)$ -ésimo y A -ésimo (respectivamente $(A+1)$ -ésimo y A -ésimo) una torca τ_1 (respectivamente τ_2) en torno al eje de giro de los péndulos que se opone al desplazamiento angular $\phi_1 = \phi_A - \phi_{A-1}$

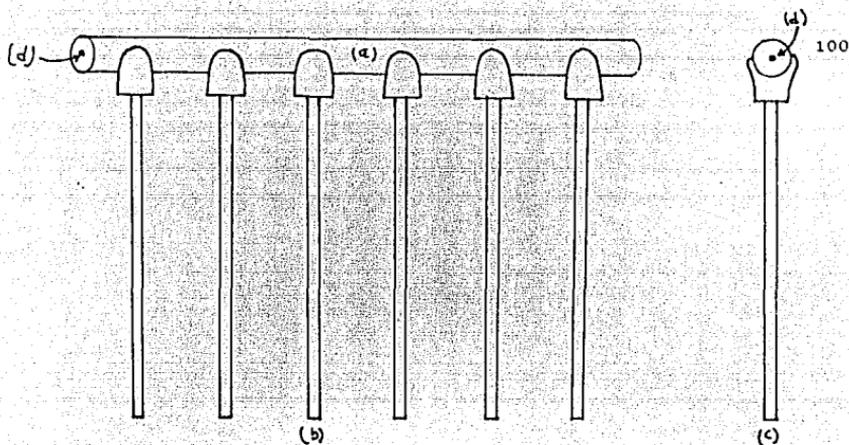


Figura 5.2. (a) barra cilíndrica de material elástico (barra de goma). (b) serie de péndulos. (c) vista frontal. (d) eje de giro del sistema

(respectivamente $\phi_2 = \phi_R - \phi_{R+1}$) y de magnitud proporcional al ángulo ϕ_1 (respectivamente ϕ_2).

La torca τ_1 (respectivamente τ_2) viene dada por

$$\tau_1 = -k (\phi_R - \phi_{R-1}) \quad (5.1)$$

$$\text{(respectivamente } \tau_2 = -k (\phi_R - \phi_{R+1}) \text{)} \quad (5.2)$$

donde k es el coeficiente de torsión de la barra cilíndrica o también llamado constante de torsión.

La torca resultante $\tau_{1,2}$ debida a las torcas τ_1 y τ_2 viene dada por

$$\tau_{1,2} = \tau_1 + \tau_2 \quad (5.3)$$

$$\tau_{1,2} = -k (\phi_R - \phi_{R-1}) - k (\phi_R - \phi_{R+1})$$

$$\tau_{1,2} = +k (\phi_{A-1} - 2\phi_A + \phi_{A+1}) \quad (5.4)$$

donde (5.4), se ha obtenido sustituyendo (5.1) y (5.2) en (5.3).

Existe otra torca que actúa sobre el sistema de péndulos, la torca gravitacional restauradora τ_g que viene dada por

$$\tau_g = -mg l \sin \phi_A \quad (5.5)$$

donde l es la longitud del péndulo y m es su masa.

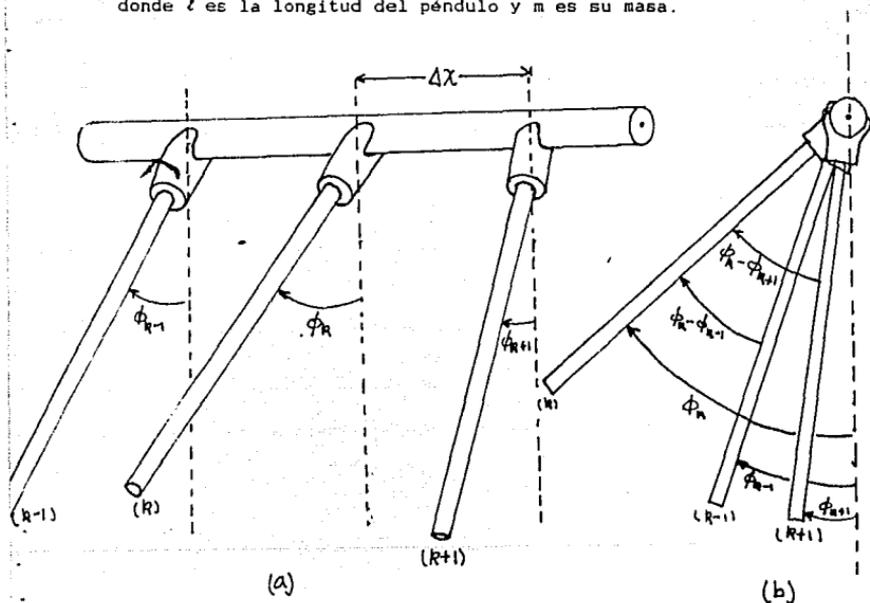


Figura 5.3. Sistema de péndulos. a) vista de frente. b) vista frontal. Δx separación entre dos péndulos vecinos.

De la segunda ley de Newton se sigue que

$$I \frac{d^2 \phi_A}{dt^2} = \tau \quad (5.6)$$

donde I es el momento de inercia de un péndulo con respecto a su eje de giro, y τ es la torca total que actúa sobre el sistema de péndulos y que está dada por

$$\tau = \tau_{1,2} + \tau_g$$

$$\tau = k (\phi_{A+1} - 2\phi_A + \phi_{A-1}) - mg l \sin \phi_A$$

La ecuación 5.6 toma la forma

$$I \frac{d^2 \phi_A}{dt^2} = k (\phi_{A+1} - 2\phi_A + \phi_{A-1}) - mg l \sin \phi_A \dots (5.7)$$

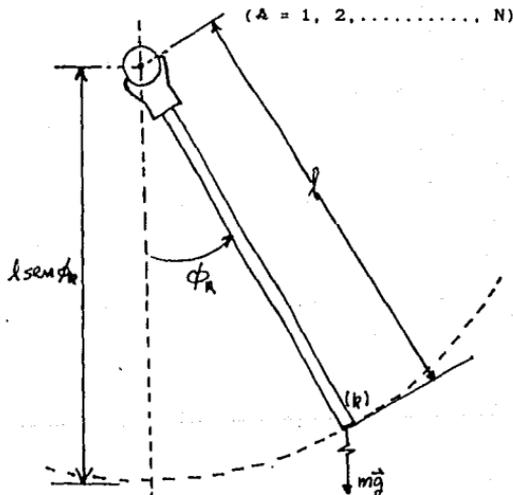


Figura 5.4. Vista frontal del A -ésimo péndulo cuando es rotado un ángulo ϕ_A .

La expresión (5.7) con $k = 1, 2, \dots, N$ representa un conjunto de ecuaciones diferenciales en diferencias acopladas.

El conjunto (5.7) puede ser transformado en una ecuación diferencial parcial mediante un proceso de límite.

En efecto, poniendo a (5.7) en la siguiente forma

$$k(\phi_{k+1} - 2\phi_k + \phi_{k-1}) - I \frac{d^2 \phi_k}{dt^2} = mg \ell \sin \phi_k; \quad (k = 1, \dots, N) \quad (5.8)$$

Multiplicando la expresión (5.8) por $(\Delta x^{-1})/k\Delta x$ se obtiene

$$\frac{\left(\frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\Delta x}\right)}{\Delta x} - \frac{\left(\frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x} - \frac{I/\Delta x}{k\Delta x} \frac{d^2 \phi_k}{dt^2} = \frac{mg\ell/\Delta x}{k\Delta x} \sin \phi_k \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (5.9)$$

Tomando el límite de (5.9) cuando $N \rightarrow \infty$, es decir, cuando se pasa de un sistema discreto de péndulos a un sistema continuo, (o equivalentemente cuando $\Delta x \rightarrow 0$), se obtiene

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\omega_0^2}{C_0^2} \sin \phi \quad (5.10)$$

donde

$$C_0^2 \equiv \frac{k(\Delta x)^2}{I} \quad (5.11)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{mg\ell}{I} \quad (5.12)$$

La ecuación (5.10) es, como ya lo vimos anteriormente la ecuación de Sine-Gordon (2.1)

(*) Δx es la distancia entre dos péndulos vecinos (ver fig. 5.9).

De las relaciones (5.11) y (5.12) se sigue que: la distancia "Sine-Gordon" ℓ_0 y el tiempo "Sine-Gordon" τ_0 vienen dados por:

$$\ell_0 = \sqrt{\frac{k}{mg\ell}} \Delta x \quad (5.13)$$

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{I}{mg\ell}} \quad (5.14)$$

En términos de la distancia ℓ_0 y el tiempo τ_0 , la velocidad límite C_0 del sistema de péndulos queda expresado por

$$C_0 = \frac{\ell_0}{\tau_0} \quad (5.15)$$

5.1.3.- DINAMICA DE UN SOLITON EN EL DISPOSITIVO MECANICO

DE LA BARRA DE GOMA

Las expresiones para la energía relativista E , la energía en reposo E_0 , el momento P y la masa en reposo de un solitón en el dispositivo mecánico de la barra de goma vienen dados (en general) por las relaciones (3.50), (3.51), (3.54) y (3.55).

Si a la densidad hamiltoniana (3.46) se le agrega un término dimensional A , es decir (3.46) se puede escribir como

$$\mathcal{H}[\phi] = \frac{1}{2} A \left[\phi_x^2 + \frac{1}{C_0^2} \phi_t^2 - \frac{2\omega_0^2}{C_0^2} (1 - \cos\phi) \right]$$

Procediendo enteramente similar a lo realizado en la sub-sección 3.3.2, se obtiene que

$$E = \frac{8 A \omega_0 C_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C_0^2}}}$$

$$E_0 = 8 A \omega_0 C_0$$

$$P = \frac{M_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$$

con

$$M_0 = \sqrt{2} A \frac{\omega_0}{C_0} \int_0^\phi \sqrt{1 - \cos \phi} d\phi$$

Como $\omega_0^2 \equiv \frac{mg\ell}{I}$ y $C_0^2 \equiv \frac{k(\Delta x)^2}{I}$ tenemos que

$$A = \frac{I}{(\Delta x)}$$

Con esta expresión para A vemos que la energía de un solitón

viene dada por

$$E = \frac{8 \sqrt{mg\ell k}}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \quad (5.16)$$

La energía en reposo E_0 como

$$E_0 = 8 \sqrt{mg\ell k} \quad (5.17)$$

A su vez, el momento P se expresa mediante

$$P = \frac{8 \frac{I}{(\Delta x)^2} \sqrt{\frac{mg\ell}{k}} v}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \quad (5.18)$$

y la masa en reposo como

$$8 \frac{I}{(\Delta x)^2} \sqrt{\frac{mg\ell}{k}} \quad (5.19)$$

5.1.4.- ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DEL DISPOSITIVO MECANICO
 CUANDO ESTA AFECTADO POR UNA TORCA EXTERNA CONSTANTE Y UN
 AMORTIGUAMIENTO VISCOSO PEQUEÑO

En el caso en el que el sistema de péndulos se ve afectado por una torca constante externa τ' y un amortiguamiento viscoso pequeño Γ' ($\frac{d\phi_A}{dt}$) (donde Γ' es el coeficiente de amortiguamiento $0 < \Gamma' \ll 1$), el conjunto de ecuaciones en diferencias (5.7) toma la forma

$$I \frac{d^2 \phi_A}{dt^2} + \Gamma' \left(\frac{d\phi_A}{dt} \right) = k (\phi_{A+1} - 2\phi_A + \phi_{A-1}) - mg \ell \sin \phi_A + \tau'$$

$$A = 1, \dots, N$$

(5.20)

Efectuando un proceso de límite semejante al llevado a cabo con la ecuación (5.8) resulta

$$\frac{\left(\frac{\phi_{A+1} - \phi_A}{\Delta x} \right)}{\Delta x} - \frac{\left(\frac{\phi_A - \phi_{A-1}}{\Delta x} \right)}{\Delta x} - \frac{I / \Delta x}{k \Delta x} \frac{d^2 \phi_A}{dt^2} - \frac{\Gamma' / \Delta x}{k \Delta x} \frac{d \phi_A}{dt} =$$

$$= \frac{mg \ell / \Delta x}{k \Delta x} \sin \phi_A - \frac{\tau' / \Delta x}{\Delta x}$$

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$, la ecuación anterior se transforma en la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{Co^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\omega_0^2}{Co^2} \sin \phi - \tau \quad (5.21)$$

La ecuación diferencial (5.21) ya fue tratada en la subsección 3.4.3.

Para la ecuación (5.21) se tiene que

$$C_0^2 \equiv \frac{k (\Delta x)^2}{I} \quad (5.22)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{mg\ell}{I} \quad (5.23)$$

$$\Gamma \equiv \sqrt{\frac{\Gamma'}{I mg \ell}} \quad (5.24)$$

$$\tau \equiv \frac{\tau'}{mg \ell} \quad (5.25)$$

La distancia y el tiempo "Sine-Gordon" vienen dados por las relaciones (5.13) y (5.14).

5.2.- CONSTRUCCION DEL DISPOSITIVO MECANICO

5.2.1.- DESCRIPCION DEL DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

DE LA BARRA DE GOMA

El dispositivo experimental, consiste de una serie de 81 péndulos fijados a una barra cilíndrica de material elástico (barra de goma) cuya separación entre péndulos vecinos es de dos centímetros. La barra de goma que fue colocada en posición horizontal ha sido fijada por sus extremos a una armazón de madera (ver figura 5.5). La barra se ha estirado lo suficiente como para que su deflexión sea mínima frente al peso de los péndulos. Cada uno de sus extremos va fijo a un balero que puede girar libremente y que se encuentra empotrado en cada extremo del armazón. La función de los baleros es la de permitir exitar al dispositivo por

ambos extremos, aplicando torcas desde el lado exterior de éste.

Una vez instalada la barra de goma en el armazón, los péndulos fueron fijados a ella utilizando pequeños segmentos del mismo material de la barra (estos segmentos tienen una longitud de 1 cm.) a los cuales se les redondeaba uno de los extremos y en el otro extremo se le practicaba una perforación en la cual se fijaban los péndulos. El extremo redondeado fue pegado a la banda de goma. Lo anterior está ilustrado esquemáticamente en las figuras 4.2 y 4.3.

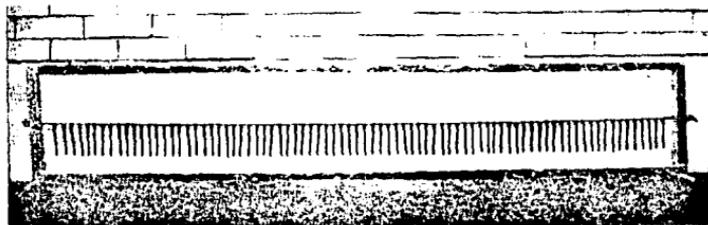


Figura 5.5. Fotografía del dispositivo mecánico experimental de la barra de goma

Las dimensiones del dispositivo experimental de la barra de goma son: El armazón de madera tiene una forma rectangular (ver fig. 5.5) mide 170 cm de largo por 30 cm de altura. La barra de goma está fija a los extremos del armazón a una altura de 15 cm de la base de éste. El diámetro de la sección transversal de la barra (sin estirar) es de 0.8 cm, y los péndulos tiene una longitud de 8 cm.

5.2.2.- ANTE PROYECTO DE CONSTRUCCIÓN DE UN DISPOSITIVO (DISPOSITIVO DE DISCOS)

En la subsección anterior se dio una descripción del dispositivo experimental de la barra de goma. Con este dispositivo se pueden estudiar características del comportamiento de los solitones tales como colisiones solitón-solitón y solitón-anti-solitón. Sin embargo (en la forma como fue construido) no permite estudiar algunas otras características tales como el comportamiento dinámico de un solitón influenciado por "fuerzas" externas^(*).

A continuación se describe la construcción de un dispositivo más sofisticado mediante el cual se pueden llevar a cabo mediciones más completas. El dispositivo mecánico consiste en una serie de péndulos que en este caso son discos de Lucita que tienen un diámetro de 30 cm; llevan empotrado en su centro un balero, y a lo largo de una línea que va del centro a su borde se le han practicado diversas perforaciones (ver fig. 5.6). Los discos están sostenidos horizontalmente mediante una barra cilíndrica sólida de latón e interconectados por un resorte de acero.

Una porción de este dispositivo mecánico de discos se ilustra en la figura 5.7. Las perforaciones practicadas en el disco de Lucita, permiten colocar un cuerpo pequeño de peso considerable cuya función es la de servir de péndulo. Dependiendo de la

(*) Aquí se refiere a una torca constante externa y un amortiguamiento viscoso pequeño, únicamente.

perforación en la cual se coloque este pequeño cuerpo, se podrá elegir el momento de inercia del disco.

El dispositivo mecánico de discos, que tendrá una longitud de 230 cm, constará de 50 discos de Lucita cuya separación entre discos vecinos será de 5 cm.

Para introducir una torca constante externa en el dispositivo se hace pasar aire por una serie de tubos delgados que están orientados sobre el borde superior de los discos (ver fig. 5.7). Haciendo variar la presión del aire a través de los delgados tubos, se puede variar la constante de torsión (de la torca externa), y por consiguiente se puede elegir un valor conveniente.

En el caso de un amortiguamiento viscoso pequeño lo que se hace es introducir los bordes de los discos en un líquido viscoso, como por ejemplo el agua (ver figura 5.8).

En analogía con el caso de la torca constante, el coeficiente de amortiguamiento Γ puede hacerse variar dependiendo de la profundidad a la que se intriduscan los discos en el líquido.

La figura 5.9 muestra al dispositivo mecánico de discos con todos los aditamentos.

El dispositivo mecánico de discos fue utilizado por Nakajima, Yamashita y Onoderá⁽⁴⁹⁾ para estudiar algunas características de la Junta de Josephson ya que éstas tienen su análogo mecánico del dispositivo mecánico de discos.

El objetivo que se perseguirá con la construcción de este dispositivo de discos sería estudiar el comportamiento dinámico de un solitón que está afectado por una torca externa constante y un

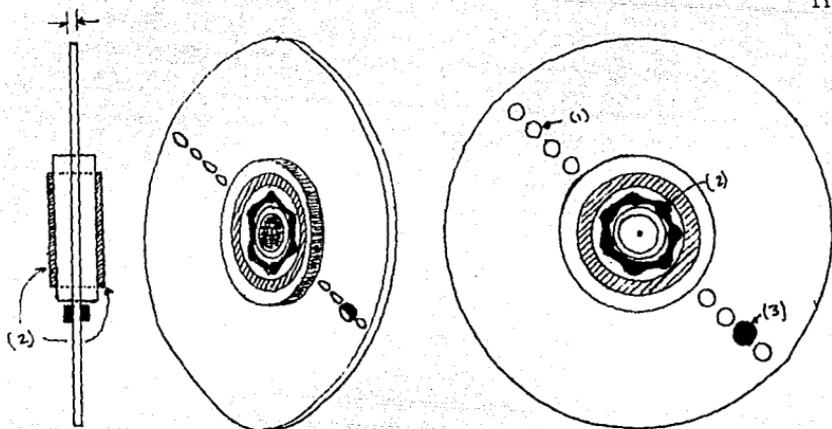


Figura 5.6. Disco de Lucita (1) perforaciones. (2) balero.

(3) cuerpo pequeño masivo.

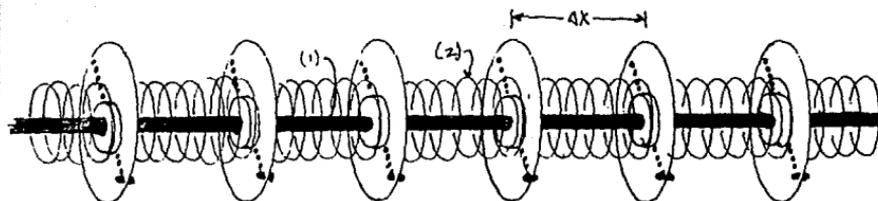


Figura 5.7. Una sección del dispositivo mecánico de discos.

(1) barra cilíndrica sólida de latón. (2) resorte de acero. La separación entre péndulos vecinos es $\Delta x = 5$ cm.

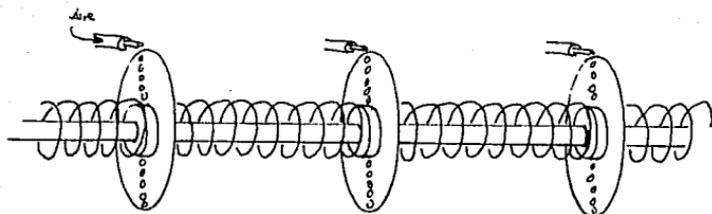


Figura 5.8. Se aplica una torca externa constante utilizando una corriente de aire que sale por unos delgados tubos.

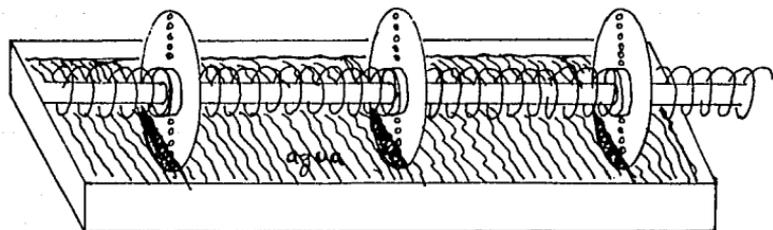


Figura 5.9. Se logra un amortiguamiento viscoso pequeño sumergiendo una porción de los discos en un recipiente con agua

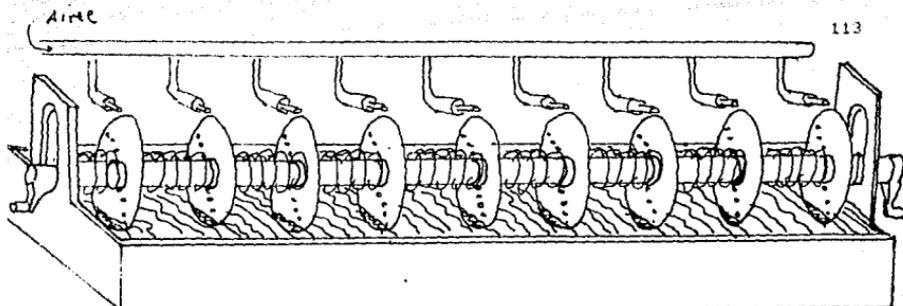


Figura 5.10. Dispositivo mecánico de péndulos con sus aditamentos
 amortiguamiento viscoso pequeño, es decir, se trataría de verificar
 experimentalmente las relaciones^(*) (3.66), (3.68) y (3.70)

$$\gamma(\ell) \approx \frac{\pi r \ell^3}{24 \sqrt{1 - v^2(\ell)}} \quad (3.66)$$

$$\gamma(\ell) \approx \tanh \left\{ \frac{\pi r \ell^3}{24 (\sqrt{1 - v^2(\ell)})^3} \right\} \quad (3.68)$$

$$\gamma(\ell) \approx \tanh \left[\frac{\pi r \ell^3}{24 (\sqrt{1 - v^2(\ell)})^3} \right] \left[1 - \frac{1}{2} \Gamma(\ell) \right] \quad (3.70)$$

(*) Actualmente la construcción de este dispositivo de discos se haya en la fase inicial. Se ha empezado a construir únicamente su posición de éste (40 cm).

5.3.- PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL Y RESULTADOS

5.3.1.- EXPERIMENTO No. 1

En este primer experimento se determina la constante de torsión k de una sección de la barra de goma entre dos péndulos vecinos. El resultado experimental de la constante de torsión k , junto con el valor del momento de inercia $I^{(*)}$ de uno de los péndulos con respecto a su eje de giro, se utilizará para obtener la "longitud Sine-Gordon" ℓ_0 y el "tiempo Sine-Gordon" τ_0 . De los valores de ℓ_0 y τ_0 obtenidos se obtendrá la velocidad límite C_0 del sistema.

Para calcular experimentalmente la constante de torsión k se fijó uno de los péndulos en su posición vertical y se procedió a girar su péndulo vecino. Un Dinamómetro se colocó en la parte terminal del péndulo girado en posición perpendicular (ver fig. 5.10).

El ángulo que gira el péndulo vecino con respecto a la vertical fue medido utilizando un transportador.

5.3.2.- EXPERIMENTO No. 2.

En este experimento se trata de verificar que el dispositivo mecánico de la barra de goma exhibe solitones. Para tal efecto se ha dividido en dos partes.

a) En esta primera parte se trata de obtener una fotografía

(*) El momento de inercia I es calculado utilizando la expresión $I = \frac{ml^2}{3}$ donde m es la masa del péndulo y l su longitud.

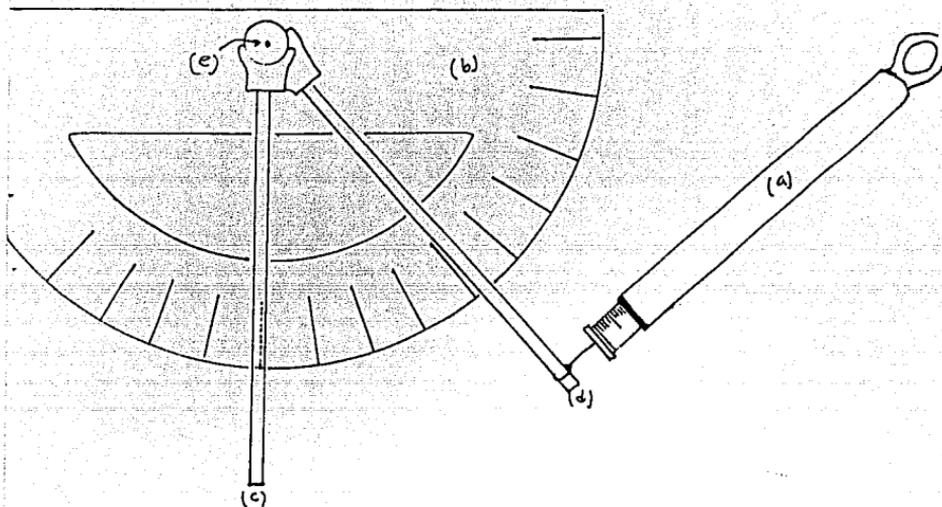


Figura 5.11. Dispositivo experimental para determinar la constante de torsión K de la barra de goma entre dos péndulos vecinos. (a) Dinamómetro. (b) transportador. (c) péndulo fijo en la posición vertical. (d) péndulo vecino girando y (e) barra de goma. Las escalas más finas del dinamómetro y el transportador son 0.01 N y 0.5° , respectivamente.

instantánea de un pulso que viaja a una velocidad "pequeña" comparada con la velocidad límite C_0 del sistema. Para lo anterior se aplica una pequeña torca al dispositivo por uno de sus extremos.

b) En esta parte se trata de captar el movimiento de un pulso que viaja a gran velocidad a través del dispositivo, mediante una serie de tomas fotográficas.

5.3.3.- EXPERIMENTO No.3

En este experimento se estudiarán las colisiones solitón-solitón y solitón-antisolitón.

Antes de pasar a describir el procedimiento experimental se hará la siguiente:

CONVENCION. Cuando la barra de goma sea girada en el sentido contrario a las manecillas del reloj, el pulso así generado será llamado un *solitón*. Cuando se gire en el sentido de las manecillas del reloj, será llamado un *anti-solitón* (ver figura 5.11).

i) *COLISION SOLITON-SOLITON.* En esta parte se trata de generar una colisión solitón-solitón. Para llevar a cabo esto se deberá aplicar en ambos extremos del dispositivo un giro (los giros deberán hacerse "simultáneamente") en el sentido contrario a las manecillas del reloj, según la convención.

ii) *COLISION SOLITON-ANTI-SOLITON.* En este caso, en un extremo del dispositivo se deberá aplicar un giro en el sentido de las manecillas (anti-solitón) y en el otro extremo un giro en el sentido contrario (solitón).

Se calculó experimentalmente la constante de torsión de una sección de la barra de goma entre dos péndulos vecinos, y el resultado obtenido es

$$k = 46\ 000 \text{ Dinás-cm}$$

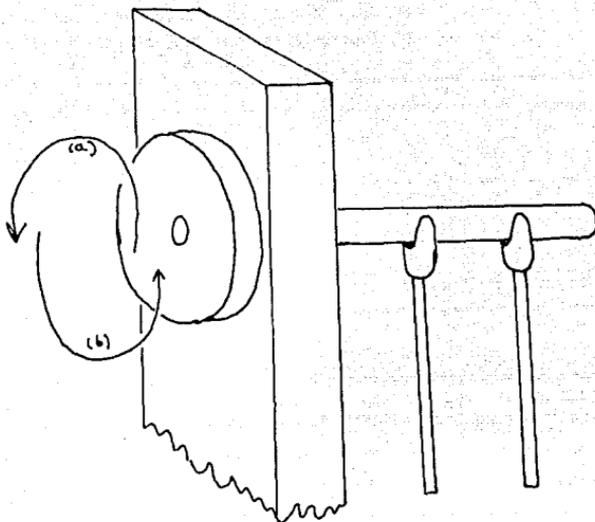


Figura 5.12. (a) Un solitón se forma al girar la barra en el sentido contrario a las manecillas del reloj. (b) Un anti-solitón al girar en el sentido de las manecillas.

El momento de inercia de un péndulo con respecto a su eje de giro se calculó utilizando la expresión $I = \frac{-m l^2}{3}$ y el valor numérico es

$$I = 20.3 \text{ gr} - \text{cm}^2$$

Utilizando las expresiones teóricas (5.13) y (5.14) se obtiene que la "distancia Sine-Gordon" ℓ_0 y el "tiempo Sine-Gordon" τ_0 para el dispositivo experimental de la barra de goma tiene un valor de

$$\ell_0 \approx 5.4 \text{ cm}$$

$$t_0 \approx 0.057 \text{ seg}$$

La velocidad límite C_0 o velocidad característica del dispositivo mecánico, la cual viene dada por la expresión (5.14) es numéricamente igual a

$$C_0 \approx 95.0 \text{ cm/seg}$$

De las relaciones (5.16), (5.17), (5.18) y (5.19) se ha obtenido la energía relativista E , la energía en reposo E_0 , el momento relativista P y la masa en reposo M_0 para un solitón que inicialmente se estaba moviendo a una velocidad de aproximadamente 80 cm/seg en el dispositivo mecánico de la barra de goma (ver figura 5.14). Los valores obtenidos son los siguientes:

$$E = 274217.4 \text{ ergios}$$

$$E_0 = 148077.4 \text{ ergios}$$

$$P = 2420.3 \text{ gr cm seg}^{-1}$$

$$M_0 = 16.3 \text{ gr}$$

La figura siguiente (fig. 5.13) muestra la fotografía instantánea de un solitón que viaja de izquierda a derecha en el dispositivo de la barra de goma.

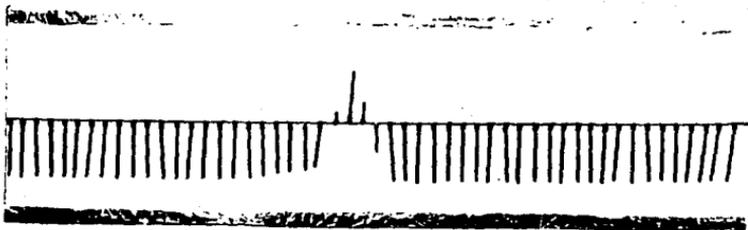


Figura 5.13. Solitón viajando de izquierda a derecha

La anchura de este solitón es de aproximadamente 4 cm.

En la fotografía instantánea de la figura 5.13 el solitón puede ser considerado como un solitón estacionario dado por la expresión (2.32) con $v = 0$ y $x_0 = 0$, es decir como

$$\phi_0 = 4 \operatorname{arc} \tan \left\{ \exp \left[\frac{\omega_0 x}{C_0 \sqrt{1 - v^2/C_0^2}} \right] \right\}$$

con $C_0 = 95$ cm/seg y $\omega_0 = 19.2$ seg⁻¹, es decir, la ecuación anterior toma la forma

$$\phi_0 = 4 \operatorname{arc} \tan \left[e^{\frac{0.20 x}{\sqrt{1 - v^2/(96.0)^2}}} \right]$$

La figura 5.14 muestra seis fotografías instantáneas de un solitón que viaja de izquierda a derecha.

Inicialmente se está moviendo a una gran velocidad v (≈ 80 cm/seg) comparada con C_0 y gradualmente se va deteniendo debido a los efectos disipativos. El tiempo entre cada toma fotográfica fue de 0.5 seg.

Se calculó la velocidad del solitón cada 0.5 seg midiendo directamente sobre las fotografías las distancias recorridas. Al principio, el solitón (fotografía 5.14a) se estaba moviendo a una velocidad de $v = 80$ cm/seg y por lo tanto $\sqrt{1 - v^2/C_0^2} \approx 0.54$. Como $t_0 = 5.40$ cm resulta que $l = 2.98$ cm y $l' = 3.10$ cm.

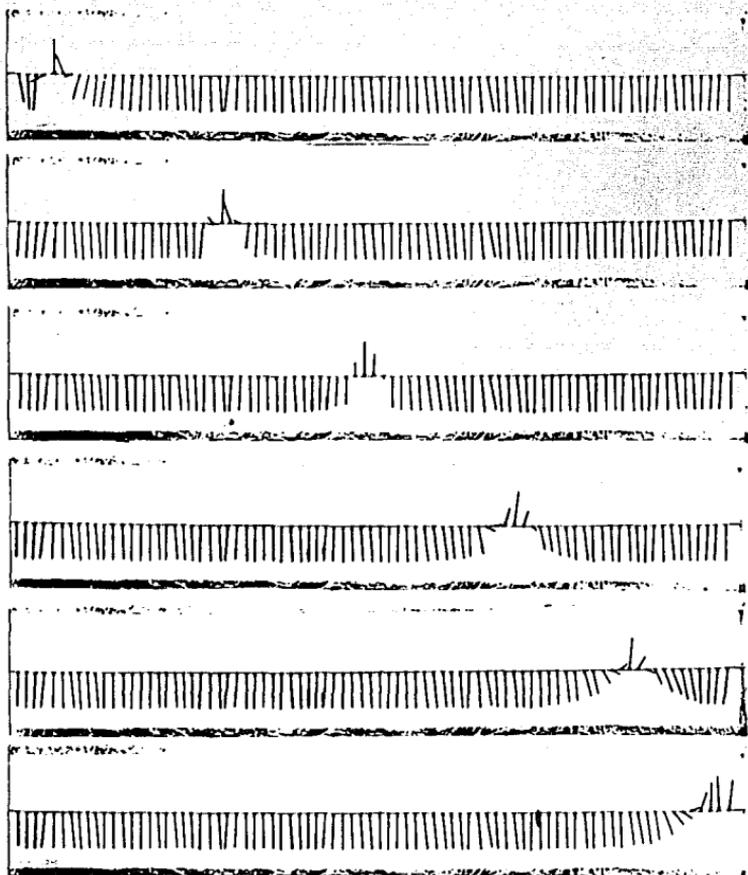


Figura 5.14. Fotografías instantáneas de un solitón relativista que se mueve de izquierda a derecha.

El tiempo entre cada toma fue de 0.5 seg

Los datos obtenidos son

Δx (cm)	Δv (cm/seg)	$\sqrt{1 - \frac{v^2}{C_0^2}}$	t' (cm) ^(*)	t (cm) ^(**)
39	78	0.58	3.80	3.10
34	68	0.71	4.10	3.80
32	64	0.75	4.80	4.10
28	56	0.81	4.90	4.40

Tabla 5.1

La figura 5.15 muestra una serie de cuatro fotografías instantáneas de una colisión de dos solitones que están viajando en sentidos opuestos. La tercer fotografía muestra el momento antes de la colisión.

La siguiente figura (fig. 5.16) muestra una serie tres fotografías instantáneas de una colisión de un solitón que viaja de izquierda a derecha con un anti-solitón que viaja en sentido contrario.

En la tercer fotografía se observa que el solitón y el anti-solitón se han aniquilado disipándose la energía en oscilaciones pequeñas de los péndulos.

(*) En la cuarta columna se dan los valores medidos directamente sobre las fotografías.

(**) Valores obtenidos empleando la relación teórica

$$t = t_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{C_0^2}}$$

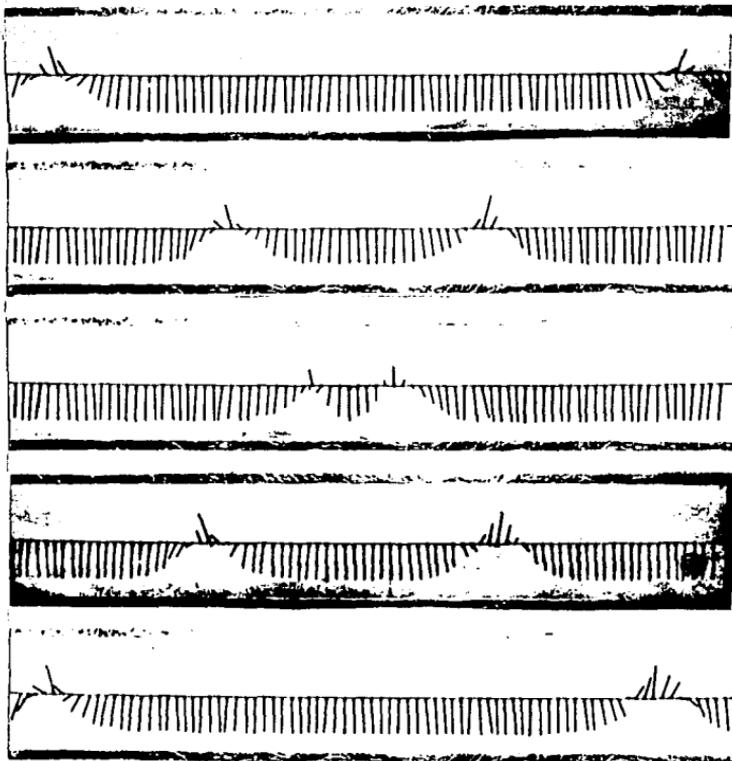


Figura 5.15. Colisión solitón-solitón. $\Delta t = 0.5$ seg.

5.4.- CONCLUSIONES

Las conclusiones obtenidas a partir de los resultados experimentales son las siguientes

- (1) El dispositivo mecánico de la barra de goma efectivamente exhibe solitones tipo "Sine-Gordon".

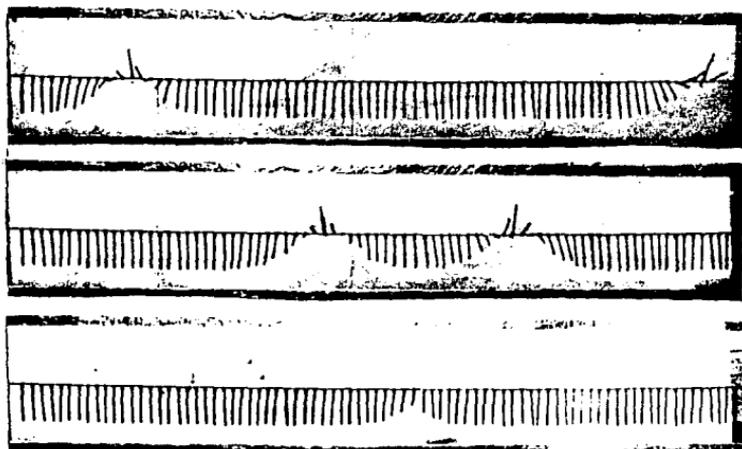


Figura 5.16. Colisión solitón-anti-solitón. $\Delta t = 0.5$ seg.

(i) Un solitón que viaja a una velocidad grande a través del dispositivo mecánico se contrae de acuerdo a la relación de contracción de Lorentz.

(ii) Tanto en una colisión solitón-solitón como en una colisión solitón-anti-solitón, éstos se comportan como partículas relativistas.

Las dificultades encontradas en la realización experimental fueron las siguientes:

(i) No se puede incrementar apreciablemente el momento de inercia I incrementando la longitud de los péndulos, ya que el peso de éstos hace que la barra se cuelgue adoptando la forma de una catenaria. Esto en principio introduciría efectos no deseables.

(i) No es posible estudiar la dinámica de pulsos influenciados por torcas externas y amortiguamientos ya que no hay manera de aplicar estas fuerzas externas al dispositivo mecánico de la barra de goma. En cambio en el dispositivo mecánico de discos (que ya se está construyendo) lo anterior no representará muchos problemas.

Finalmente se puede decir que el dispositivo de la barra de goma es conveniente para estudiar el comportamiento dinámico de los pulsos en el dispositivo desde el punto de vista cualitativo ya que no es posible obtener datos numéricos precisos. En cambio en el dispositivo mecánico de discos, en principio, se podrán llevar a cabo mediciones más exactas.

Así, se propone el dispositivo mecánico de la barra de goma como un dispositivo experimental para ilustrar la teoría de ondas no lineales para el laboratorio de física clásica I (mecánica) y el dispositivo mecánico de discos para el laboratorio de física moderna.

REFERENCIAS

- 1.- M.J. Ablowitz, D.J. Koup, A.C. Newell, and H.Segur: Method for solving the Sine-Gordon equation, *Phys. Rev. Lett.*, 30,1262 (1973).
- 2.- N.W. Ashcroft and N.D. Mermin: Solid State Physics, Sounders College (1976).
- 3.- A. Barone, F. Esposito, C.J. Magee, and A.C. Scott: Theory and applications of the Sine-Gordon equation, *Riv. Nuovo Cimento.*, 1,227 (1971).
- 4.- A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz, And Y.S. Tytkin: Pseudoparticles solutions of the Yang-Mills equations, *Phys. Lett.*, 59B, 85 (1975).
- 5.- H.H. Benton (editor): Enciclopedia Británica en 30 volúmenes (1973-1974).
- 6.- A. Bettini, T.A. Minelli, and D. Pascoli: Solitons in undergraduate laboratory, *Am. J. Phys.*, 51, 977 (1983).
- 7.- A.R. Bishop, J.A. Krumhansl, and S.E. Trullinger: Solitons in condensed matter, *Physica*. 1D, (1980) 1-44.
- 8.- C.P. Boyer: Gravitational instantons, *IIMAS comunicaciones técnicas* 1980.
- 9.- J. Bronowski: The clock paradox, *Scientific American* (1963).
- 10.- A.J. Callagari and E.L. Reiss: Nonlinear Stability problems for Sine-Gordon equation, *J. Math. Phys.*, 14, 267 (1973).
- 11.- E. Cartan: The theory of spinors, M.I.T. Press (1966).

- 12.- M.D. Crisp: Distortionless propagation of light through an optical medium, *Phys. Rev. Lett.*, 22, 820 (1969).
- 13.- J.F. Currie: Aspects of exact dynamics for general solutions of the Sine-Gordon equations with applications to domain walls, *Phys. Rev. A.*, 16, 1692 (1977).
- 14.- A.J. De Maria, D.A. Stetsor, W.H. Clenn, Jr.: Ultra-short light pulses, *Science* 3782, 1557 (1967).
- 15.- J.C. Diels, W. Dietel, J.J. Fontaine, W. Rudolph, and B. Wilhelm: Analysis of a Mode-Locked ring laser: chirped-solitary-pulse solutions, *J. Opt. Soc. Am. B.*, 2, 680 (1985).
- 16.- J.H. Eberly: Optical pulse and pulse-train propagation in a resonant medium, *Phys. Rev. Lett.*, 22, 760 (1969).
- 17.- A. Einstein: Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich, 56 (1911) Traducido por C.J. Whitrow en: *The Natural Philosophy of Time*, Harper Torchbook, N.Y. (1961).
- 18.- L.P. Eisenhart: *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, N.Y. (1960).
- 19.- E. Fermi, J.R. Pasta, S.M. Ulam. Los Alamos Report. LA-1940, Mayo 1955; reimpresso en E. Fermi Collected Works, Univ. Chicago Press. Chicago (1965) Vol. II.
- 20.- R. Feynman, F.L. Vernon, and R.W. Hellwarth: Geometrical Representation of the Schrödinger equation of solving maser problems, *J. Appl. Phys.*, 28, 49 (1957).

- 21.- J.C. Fernandez, C. Froeschle, and G. Reinisch: Adiabatic perturbations of solitons and Shock waves, *Physica Scripta*, 20, 545 (1979).
- 22.- M.B. Fogel, S.E. Trullinger, A.R. Bishop, and J.A. Krumhansl: Classical Particlelike Behavior of Sine-Gordon solitons in scattering potentials and applied fields, *Phys. Rev. Lett.*, 36 1411 (1976).
- 23.- ———: Dynamics of Sine-Gordon solitons in presence of perturbations, *Phys. Rev. B*, 15, 1578 (1977).
- 24.- R.L. Fork *Opt. Lett.* 12, 483 (1987).
- 25.- P.M.W. French and J.R. Taylor: CW-pumped dyes yield ultra-short laser pulser, *Laser Focus World*, 59, (1989).
- 26.- J. Frenkel, T. Kontorova: On the theory of plastic deformation and twinning, *Jour. Phys. USSR*, 1, 137, (1939).
- 27.- H. Golstein: Classical Mechanics, Adisson-Wesley 1a. edición (1950).
- 28.- H. Hancock: Elliptic Integrals, Dover (1958).
- 29.- H. Holton (Editor): Special Relativity theory-selected reprints, Institute of Physics N.Y. (1963).
- 30.- ———: On the origins of the special theory of Relativity, *Am. J. Phys.*, 28, 627 (1966).
- 31.- A. Icsevgy and W.E. Lamb, Jr.: Propagation of light pulses in a laser amplifier, *Phys. Rev.*, 185, 517 (1969).
- 32.- R. Jackiw and C. Rebbi: Solitons whit Fermion $1/2$, *Phys. Rev. D*, 13, 3398 (1976).

- 23.- D.W. Jordan and P. Smith: Nonlinear Ordinary Differential equations, Oxford Clarendon (1977) cap. 5.
- 34.- B.D. Josephson: Supercurrents through barriers, *Adv. Phys.*, 14, 419 (1965).
- 35.- ———: Possible New effects in superconductive tunnelling, *Phys. Lett.*, 1, 251 (1962).
- 36.- V.I. Karpman: Non-linear waves of dispersive media, International series of monographs in Natural Philosophy, Vol. 71, Pergamon Press. (1975).
- 37.- D. Krökel, N.J. Halas, G. Giuliani, and D. Grischkowsky: Dark-pulse Propagation in optical Fibers.
- 38.- G.L. Lamb, Jr.: Π pulse propagation in lossless amplifier, *Phys., Lett.*, 29A, 507 (1969).
- 39.- G.S. Lansberg: *Óptica*, Mir Moscú (1984).
- 40.- O.E. Martinez, R.L Fork, and J.P. Gordon: Theory of passively mode-locked laser for the case of a nonlinear complex-propagation coefficient, *J. Opt. Soc. Am. B.*, 2, 753 (1985).
- 41.- D.W. McLaughlin and A.C. Scott: Perturbations analysis of fluxon dynamics, *Phys. Rev. A.*, 18, 1652 (1978).
- 42.- M. Monastyrsky: Riemann topology and Physics, Birkhäuser Boston (1987). pag 132.
- 43.- K. Nakajima, T. Yamashita, and Y. Onodera: Mechanical analogue of active Josephson transmission line, *J. Appl. Phys.* 45, 3141 (1974).

- 44.- M. Olsen, H. Smith, and A.C. Scott: Solitons in wave tank, *Am. J. Phys.*, 52, 826 (1984).
- 45.- J.K. Perring and T.H.R. Skyrme: A model unified equation, *Nucl. Phys.*, 31, 550 (1962).
- 46.- G. Reinisch and J.C. Fernandez: A mechanical model for weakly damped solitons, *Phys. Lett.*, 67A, 259 (1978).
- 47.- ———: Specific Sine-Gordon dynamics in the presence of external driving forces, *Phys. Rev. B.*, 24, 835 (1981).
- 48.- J. Rubinstein: Sine-Gordon equation. *J. Math. Phys.*, 11, 258 (1970).
- 49.- F. Salin, P. Grangier, G. Roger, and A. Brun: Observation of High-Order solitons directly produced by a femtosecond ring laser, *Phys. Rev. Lett.*, 56, 1132 (1986).
- 50.- A.C. Scott: Waveform stability on a nonlinear Klein-Gordon equation, *Proc. I.E.E.E.*, 57, 1338 (1969).
- 51.- ———, F.Y. Chu, and D.W. McLaughlin: The solitons: A New concept in applied Science, *Proc. I.E.E.E.*, 61, 1443 (1973).
- 52.- ——— and W.J. Johnson: Internal flux motion in large Josephson junctions, *Appl. Phys. Lett.*, 44, 316 (1969).
- 53.- ———: Nonlinear Klein-Gordon equation, *Am. J. Phys.*, 3, 52 (1969).
- 54.- A. Seeger, H. Donth, and A. Kochendörfer: Theorie der Versetzungen in eindimensionalen Atomreihen. III. Versetzungen, Eigenbewegungen und ihre Wechselwirkung, *Z.*

- Phys.*, Vol 134, 173. (1953).
- 55.- P.A. Sturrock: Kinematics of growing waves, *Phys. Rev.*, 112, 1488 (1958).
- 56.- T.H.R. Skyrme: A non linear theory of strong interactions, *Proc. Roy. Soc. A.*, 247, 260 (1958).
- 57.- ———: Particle states of a quantized field, *Proc. Roy. Soc. A.*, 269, 237 (1961).
- 58.- L.A. Takhtadzhyan, and L.D. Faddeev: Essentially nonlinear one-dimensional model of classical field theory, *theoret. and Math. Phys.*, 21, 1046 (1974).
- 59.- Y.P. Terlestsii: Paradoxes in the theory of Relativity, Plenum Press, N.Y. (1968) pag. 38.
- 60.- N.J. Zabusky and M.D. Kruskal: Interactions of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.*, 15, 240 (1965).
- 61.- P. Wess: Introduction to supersymetry and supergravity, World Scientific (1986).