

29, 82



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

ANÁLISIS DE UNA PRESA DE ENROCAMIENTO CON LOSA DE CONCRETO CON JUNTAS ELÁSTICAS VERTICALES

TESIS PROFESIONAL
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A :
CARMELINO ZEA CONSTANTINO

MEXICO, D.F.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

1989



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

CAPITULO I. INTRODUCCION 1

- I.1 RESUMEN 1
- I.2 LA METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN 1
- I.3 ASPECTOS FUNDAMENTALES 3
 - I.3.a Aspectos Filosóficos 3
 - I.3.b Aspectos Científicos y Tecnológicos 4
 - I.3.c Aspectos Económicos 5
 - I.3.c1 El Territorio Nacional 5
 - I.3.c2 Agricultura 6
 - I.3.c3 Importancia en la Energía Eléctrica en la Industria 6
 - I.3.c4 La Industria de la Construcción 7
 - I.3.c5 Las Obras Públicas 7
 - I.3.d Aspectos Sociales 8
 - I.3.d1 La Realidad Socio-Cultural del Hombre 8
 - I.3.d2 Condiciones Socio-Culturales de México 8
- I.4 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA 9
- I.5 CONCLUSIÓN DEL CAPÍTULO 10

CAPITULO II. ESTADO DEL ARTE EN LA CONSTRUCCION Y DISEÑO DE PRESAS DE ENROCAMIENTO CON PANTALLA DE CONCRETO 16

- II.1 EVOLUCIÓN DE LA PRESA DE ENROCAMIENTO 16
- II.2 CARACTERÍSTICAS DEL ENROCAMIENTO 17
 - II.2.a Calidad y Graduación 17
 - II.2.b Excavación y Tratamiento de la Cimentación 18
 - II.2.c Zonificación 19
 - II.2.d Uso del Agua en la Compactación del Enrocamiento 20
 - II.2.e Estabilidad del Enrocamiento 21
- II.3 CARACTERÍSTICAS DEL PIE DE LOSA 21
 - II.3.a Tratamiento de la Cimentación del Pie de Losa 21
 - II.3.b Dimensiones 22
 - II.3.c Acero de Refuerzo 22
- II.4 CARACTERÍSTICAS DE LA LOSA DE CONCRETO 22
 - II.4.a Espesor 23
 - II.4.b Acero de Refuerzo 23
 - II.4.c Concreto 23
 - II.4.d Juntas Verticales y Perimetral 24
 - II.4.e Construcción 24
- II.5 FUTURO DE LAS GRANDES PRESAS DE ENROCAMIENTO CON PANTALLA DE CONCRETO 25

CAPITULO III INTERACCION ENRE LOSAS DE CONCRETO Y SUELO 30

- III.1 FACTORES QUE INFLUYEN EN EL COMPORTAMIENTO DE LAS LOSAS 30
 - III.1.1 PAVIMENTOS 30
 - III.1.1.1 Características de los Materiales de Apoyo 30
 - III.1.1.2 Características de la Losa de Concreto 33
 - III.1.1.3 Características de las cargas 34
 - III.1.1.4 Factores Ambientales 35

III.1.2	CIMENTACIONES	38
III.1.1.1	Características de los Materiales de Apoyo	38
III.1.1.2	Características de la Losa de Concreto	40
III.1.1.3	Características de las cargas	41
III.1.1.4	Factores Ambientales	42
III.1.3	PRESAS	
III.1.1.1	Características de los Materiales de Apoyo	42
III.1.1.2	Características de la Losa de Concreto	45
III.1.1.3	Características de las cargas	46
III.1.1.4	Factores Ambientales	48
III.2	EL PROBLEMA DE INTERACCIÓN	49
CAPITULO IV FORMULACION MATEMATICA		63
IV.1	MODELOS ELÁSTICOS	63
IV.1.1	El Modelo de Winkler	63
IV.1.2	Modelos Elásticos con Dos Parámetros	65
IV.1.2.1	Modelo Filonen Ko-Borodich	65
IV.1.2.2	Modelo de Hetényi	67
IV.1.2.3	Modelo de Pasrernak	68
IV.1.3	Modelos Continuos Elásticos	69
IV.1.3.1	El Medio Continuo Elástico Isotrópico	69
IV.1.3.2	Modelo de Reissner	74
IV.1.3.3	El Medio Continuo Elástico Anisotrópico	75
IV.1.3.4	El Medio Continuo Elástico Homogeneo	76
IV.2	MODELOS NO ELÁSTICOS Y EN FUNCIÓN DEL TIEMPO	77
IV.2.1	Comportamiento Elasto-Plástico	77
IV.2.2	Comportamiento en Función del Tiempo	78
IV.2.2.1	Consolidación Tridimensional	80
ANEXO 4A CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DEL MEDIO CONTINUO		83
4a.1	Estado de Esfuerzo en un Punto	83
4a.2	Esfuerzos Principales	85
4a.3	Estado de Esfuerzo Plano	86
4a.4	Esfuerzos Principales en el Plano	87
4a.5	Estado de Deformación	87
4a.6	Deformación Lineal y Angular	88
4a.7	Estado de Deformación Plana	89
4a.8	Principios Generales de la Mecánica	89
4a.9	Método Directo	90
CAPITULO V PROCEDIMIENTOS DE SOLUCION		93
V.1	MÉTODOS DIRECTOS EN LOS PROBLEMAS VARIACIONALES	93
V.1.1	Método de Diferencias Finitas de Euler	94
V.1.2	Método de Ritz	95
V.1.3	Método de Kantorovich	96
V.1.4	Método de Galerkin	96
V.2	MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO	97
V.2.1	Evolución del Método del Elemento Finito	97
V.2.2	Descripción del Método	99

CAPITULO VI ANALISIS REALIZADOS	119
VI.1 GENERALIDADES	119
VI.2 ANALISIS ELASTICOS LINEALES	120
VI.2.1 Análisis Elástico Lineal sin Juntas Verticales	120
VI.2.2 Análisis Elástico Lineal con Juntas Flexibles verticales	121
VI.3 ANALISIS NO ELASTICOS NO LINEALES	122
VI.3.1 Relación Hiperbólica para Representar el Comportamiento No Lineal de un Suelo	122
VI.3.2 Endurecimiento de un material por esforzamiento	124
VI.3.3 Comportamiento del Material de Apoyo de la Losa	124
VI.3.4 Análisis No Elástico-No Lineal sin Juntas Verticales	125
VI.3.5 Análisis No Elástico-No Lineal con Juntas Flexibles en Planos Verticales	126
VI.3.6 Análisis No Elástico-No Lineal sin Juntas Flexibles Verticales en la Franja Central	126
ANEXO VIA DESCRIPCION DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA UTILIZADO EN LOS ANALISIS	155
CAPITULO VII INTERPRETACION Y COMPARACION DE RESULTADOS	157
VII.1 OBSERVACIONES SOBRE LOS DESPLAZAMIENTOS EN LA LOSA	159
VII.2 OBSERVACIONES SOBRE LOS ESFUERZOS EN LA LOSA	160
VII.3 SÍNTESIS	161
CAPITULO VIII CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	167
APENDICE A. METODOS NUMERICOS	171
A.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	171
A.1.1 Método de Eliminación Completa	172
A.1.2 Método de Gauss-Jordan	172
A.1.3 Sistema de Ecuaciones en Banda	172
A.1.4 Métodos por Aproximaciones sucesivas	174
A.1.4.1 Método de Jacobi	174
A.1.4.2 Método de Gauss-Seidel	176
A.1.4.3 Método de Relajaciones	176
A.1.4.4 Método del Camino de Mayor Inclinación	178
A.1.4.5 Método del Gradiente Conjugado	179
A.2 INVERSION DE MATRICES	180
A.2.1 Método de Intercambio	180
A.2.2 Partición de Matrices	180
A.2.3 Método Iterativo para Mejorar la Aproximación a la Inversa de una Matriz	183
A.3 VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICAS	183
A.3.1 Método Directo	184
A.3.2 Método de Krylov	185
A.3.3 Método de Leverrier-Faddeev	185
A.3.4 Método de Aproximaciones Sucesivas	187
A.4 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS	187
A.4.1 Solución de una Ecuación Diferencial	187
A.4.1.1 Solución Numérica de Problemas de Valores	

A.4.1.1	Solución Numérica de Problemas de Valores Iniciales	188
A.4.2	Ecuaciones Diferenciales Parciales	195
A.4.2.1	Ecuación Diferencial Parcial Elíptica	195
A.4.2.2	Ecuación Diferencial Parcial Parabólica	197
A.4.2.3	Ecuación Diferencial Parcial Hiperbólica	197
APENDICE B.	CÁLCULO FUNCIONAL	200
B.1	ELEMENTOS DE CÁLCULO DE VARIACIONES	200
B.1.1	Concepto de Funcional	200
B.1.2	Máximos y Mínimos de Funcionales	200
B.1.3	Concepto de Variación	201
B.1.4	Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones	201
B.1.5	Variación de una Funcional	202
B.1.6	Extremos de Funcionales de Varios Argumentos	203
B.1.7	Extremos con Condiciones Auxiliares	203
B.1.8	Variación de una Integral Doble	204
B.2	FUNCIONALES LINEALES	204
B.2.1	Espacios de Hilbert	205
B.2.2	Ecuaciones de Fredholm y de Volterra	207
B.2.3	Transformaciones Funcionales Lineales	209
B.2.4	Transformadas de Fourier y de Laplace	209
APENDICE C.	DESARROLLOS EN SERIE	212
C.1	DESARROLLOS EN SERIE DE POTENCIA	214
C.1.1	Desarrollos en Serie de Taylor	214
C.2	DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER	215
C.2.1	Funciones Periódicas	215
C.2.1.1	Desarrollo de Funciones Simplemente Periódicas en Serie de Fourier	215
C.2.2	Desarrollo en Serie de Fourier en el Campo Real	216
REFERENCIAS		217

I. INTRODUCCION

I.1. Resumen

En esta tesis se presentan los análisis de la pantalla de concreto de la presa de Aguamilpa (segunda etapa), estudios hechos por el Instituto de Ingeniería para la Comisión Federal de Electricidad.

En los siguientes incisos de este capítulo se establecen los aspectos más relevantes que justifican la construcción de esta obra. Aspectos tales como los filosóficos, científicos, económicos y sociales están involucrados en la necesidad de su construcción.

En el capítulo 2 se presenta el estado del arte en el diseño y construcción de presas de enrocamiento con pantalla de concreto. Se da un panorama general de las diferentes partes que constituyen la cortina, así como algunas observaciones acerca de su método constructivo. Se hace notar que el diseño actual de este tipo de presas es poco analítico.

El capítulo 3 se refiere a las variables de entrada que intervienen en el análisis de losas de concreto. Se da una descripción de lo que actualmente se ha observado en el comportamiento de losas en pavimentos, cimentaciones y presas. Se establece que el problema de la interacción entre la losa y el suelo que la soporta se da principalmente como uno de deformación esencialmente tridimensional, y se establece que su modelación sólo puede realizarse mediante un sistema de ecuaciones diferenciales o cálculo funcional.

En el capítulo 4 se describen los modelos matemáticos que distintos investigadores han desarrollado para estudiar el problema de la interacción losa-suelo. Se desarrollan algunos modelos elásticos, no elásticos, y en función del tiempo.

En el capítulo 5 se describen los distintos métodos que existen para la solución de los modelos matemáticos (ecuaciones diferenciales). Se hace principal referencia al método del elemento finito, ya que éste fué el que se eligió por ser el que mejor se

ajusta a las necesidades de cálculo que se presentan en el análisis.

En el capítulo 6 se presentan los resultados de los análisis realizados para la presa de Aguamilpa. Estos análisis fueron tanto elásticos como no-elásticos, estableciéndose las siguientes familias:

- 1) Análisis elásticos lineales
- 2) Análisis no-elásticos no-lineales

Se observó la necesidad de colocar juntas verticales en la pantalla de concreto para aminorar los esfuerzos de tensión presentados por la losa, por lo que finalmente los análisis fueron:

- a) Análisis elástico lineal sin juntas verticales de tensión
- b) Análisis elástico lineal con juntas verticales de tensión
- c) Análisis no elástico-no lineal sin juntas verticales de tensión
- d) Análisis no elástico-no lineal con juntas verticales de tensión
- e) Análisis no elástico-no lineal sin juntas verticales de tensión en la franja central de la losa

En el capítulo 7 se realizaron las comparaciones de los resultados obtenidos con los observados en otras losas de concreto, estableciéndose que los primeros concuerdan cualitativamente con los segundos. Además se interpretaron los resultados obtenidos, llegando a establecer que, la interacción entre la losa de la presa y los materiales de apoyo, toma gran importancia en el problema.

Finalmente, en el capítulo 8 se dan las conclusiones de la investigación, estableciéndose la necesidad de compactar energicamente los materiales de apoyo de la losa, así como la colocación de juntas verticales en algunas zonas de la losa y un procedimiento (un riego de asfalto, por ejemplo) que aminore los efectos de la interacción entre el suelo y la losa, para asegurar un buen comportamiento de la pantalla de concreto. Por último se dan las recomendaciones para la construcción de la losa y para mejorar la investigación que aquí se presenta.

Todo el trabajo se realizó siguiendo una metodología de investigación, la cual se describe a continuación.

1.2. La metodología de la investigación

Los éxitos alcanzados por la ciencia ayudan al hombre cada vez más en sus esfuerzos por controlar al medio ambiente. Por eso, para que la investigación científica cumpla con sus objetivos es importante fijar ciertos criterios: es necesario el establecimiento de una estrategia en la cual se combinen diferentes elementos básicos para el mejor desarrollo de esta actividad. Esa estrategia o proceso sistemático que utiliza la investigación para la mejor consecución de sus fines es el método científico.

Utilizar una metodología de investigación para la solución de un problema ingenieril que permita optimizar el tiempo empleado en una investigación científica, es el objetivo de esta tesis. La metodología que nos proponemos seguir (ref. 1) es la que se plantea a continuación:

- A) ELECCIÓN DEL TEMA.
- B) INVESTIGACIÓN BIBLIOGRÁFICA.
- C) FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO O EXPERIMENTAL.
- D) PLANEACIÓN DEL TRABAJO.
- E) RECOLECCIÓN DE DATOS.
- F) EJECUCIÓN DE LOS TRABAJOS.
- G) INTERPRETACIÓN Y COMPARACIÓN DE RESULTADOS.
- H) GENERALIZACIÓN.
- I) CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.
- J) COMUNICACIÓN MEDIANTE REDACCIÓN DE INFORME.

La idea es seguir los pasos de la metodología con el fin de mostrar su utilidad. Para ello se ha estructurado el trabajo de la siguiente manera:

Los primeros dos capítulos se han reservado para abarcar los incisos A y B de la metodología propuesta. Los tres siguientes se relacionan con la parte correspondiente a la formulación de modelos, que para nuestro caso son del tipo matemático; aquí se hace un breve estudio de los modelos matemáticos que se han desarrollado para el estudio de la interacción entre placas y suelo desde un punto de vista teórico. El capítulo VI se encuentra relacionado con los incisos D, E y F y se refiere a distintas alternativas que se estudiaron para el análisis de la losa de concreto de nuestro problema. El siguiente se relaciona con el inciso G de la metodología; en esta parte se da la interpretación correspondiente a los resultados obtenidos en cada una de las cinco alternativas analizadas y se comparan estos resultados con los que se han obtenido en la experiencia y en la práctica. Finalmente, en el capítulo VIII se emiten las conclusiones y recomendaciones relacionadas con las características más relevantes encontradas en la solución del problema planteado.

I.3. Aspectos fundamentales

El estudio de las presas tiene que ver con aspectos como los científicos, económicos, técnicos, etc. De todos estos aspectos, los más importantes son los que se describen a continuación.

I.3.a. Aspectos filosóficos

Filosofía quiere decir amor por el saber; la búsqueda de la verdad es la esencia de la filosofía. Pero, ¿Qué impulsos o motivaciones hacen a los seres humanos investigar y querer saber?. La respuesta a esta pregunta podemos formularla de la siguiente manera: Primero.- *Del asombro nace la pregunta*, lo que se presenta cuando tenemos vivencias novedosas que no comprendemos en un principio y deseamos entender. Segundo.- *De las respuestas obtenidas surge el conocimiento*. Tercero.- *De la duda acerca de lo conocido el examen*

crítica y la clara certeza; necesitamos entonces verificar los conocimientos recientemente adquiridos. Cuarto.-Por otro lado, estamos siempre en situaciones. Algunas de ellas cambian pero otras no. Estas últimas, las cuales son fundamentales a nuestra existencia, se denominan situaciones límite. (por ejemplo, desgracias, dolor, muerte). Vivencias que enseñan al hombre lo que es fracasar. Por eso él ha establecido una lucha contra sus efectos.

Quinto.-Ahora bien, en la actualidad se torna resueltamente decisiva una situación general, que de hecho había existido siempre; esto es, el problema de la comunicación existencial. Nuestras creencias, por ejemplo, chocan con la fe de otras personas. En algún punto límite sólo parece quedar la lucha sin esperanza por la unidad. Surge así la necesidad de comunicarnos existencialmente con nuestros semejantes.

De lo anterior podemos señalar, entonces, que una investigación científica se ve motivada por los aspectos filosóficos que acabamos de describir y que, por ende, estos son de interés al tema que venimos desarrollando.

I.3.b. Aspectos científicos y tecnológicos

Desde el punto de vista del desarrollo, existen dos tipos de conocimiento: La ciencia pura, que consiste en el afán del conocimiento por el conocimiento mismo; y la ciencia aplicada, que es la dirección adecuada del uso del conocimiento con fines sociales y la integración de sistemas o procesos de aplicación del conocimiento.

La ciencia adquiere un valor positivo cuando se dirige al beneficio de la sociedad.

Un país típicamente desarrollado es capaz de preparar a su propio personal en el campo de la ciencia, de la técnica, de la educación, de la gerencia y de la administración al nivel empresarial y nacional. Este personal de alto nivel es el que lleva a cabo la industrialización del país, la conexión entre las oportunidades de empleo, el esfuerzo productivo y el esfuerzo educativo a todos los niveles sentando las bases del desarrollo económico.

La educación influye en el desarrollo de un país en virtud de que de ella emanan cuadros dirigentes y mano de obra especializada. Entonces, el gobierno y los intereses económicos que lo apoyan, deben mostrarse propicios al perfeccionamiento de las instituciones educativas porque en estas se forman los hombres con las cualidades y aptitudes que ellos están necesitando, ya que tal esfuerzo formativo habrá de reeditarles buenas ganancias.

Por encima de situaciones ideológicas y políticas, los países socialistas desarrollados y los capitalistas desarrollados, por igual, han hecho de la educación, inspirada en las necesidades concretas de la comunidad y guiada por el conocimiento científico auténtico, el instrumento básico de su desarrollo económico. Sin embargo, uno de los rasgos muy particulares de la enseñanza superior latinoamericana,

crítica y la clara certeza; necesitamos entonces verificar los conocimientos recientemente adquiridos. Cuarto.-Por otro lado, estamos siempre en situaciones. Algunas de ellas cambian pero otras no. Estas últimas, las cuales son fundamentales a nuestra existencia, se denominan situaciones límite. (por ejemplo, desgracias, dolor, muerte). Vivencias que enseñan al hombre lo que es fracasar. Por eso él ha establecido una lucha contra sus efectos.

Quinto.-Ahora bien, en la actualidad se torna resueltamente decisiva una situación general, que de hecho había existido siempre; esto es, el problema de la comunicación existencial. Nuestras creencias, por ejemplo, chocan con la fe de otras personas. En algun punto límite sólo parece quedar la lucha sin esperanza por la unidad. Surge así la necesidad de comunicarnos existencialmente con nuestros semejantes.

De lo anterior podemos señalar, entonces, que una investigación científica se ve motivada por los aspectos filosóficos que acabamos de describir y que, por ende, estos son de interés al tema que venimos desarrollando.

I.3.b. Aspectos científicos y tecnológicos

Desde el punto de vista del desarrollo, existen dos tipos de conocimiento: La ciencia pura, que consiste en el afán del conocimiento por el conocimiento mismo; y la ciencia aplicada, que es la dirección adecuada del uso del conocimiento con fines sociales y la integración de sistemas o procesos de aplicación del conocimiento.

La ciencia adquiere un valor positivo cuando se dirige al beneficio de la sociedad.

Un país típicamente desarrollado es capaz de preparar a su propio personal en el campo de la ciencia, de la técnica, de la educación, de la gerencia y de la administración al nivel empresarial y nacional. Este personal de alto nivel es el que lleva a cabo la industrialización del país, la conexión entre las oportunidades de empleo, el esfuerzo productivo y el esfuerzo educativo a todos los niveles sentando las bases del desarrollo económico.

La educación influye en el desarrollo de un país en virtud de que de ella emanan cuadros dirigentes y mano de obra especializada. Entonces, el gobierno y los intereses económicos que lo apoyan, deben mostrarse propicios al perfeccionamiento de las instituciones educativas porque en estas se forman los hombres con las cualidades y aptitudes que ellos están necesitando, ya que tal esfuerzo formativo habrá de redituárles buenas ganancias.

Por encima de situaciones ideológicas y políticas, los países socialistas desarrollados y los capitalistas desarrollados, por igual, han hecho de la educación, inspirada en las necesidades concretas de la comunidad y guiada por el conocimiento científico auténtico, el instrumento básico de su desarrollo económico. Sin embargo, uno de los rasgos muy particulares de la enseñanza superior latinoamericana,

es el escaso interés que se pone en la investigación al servicio del desarrollo, aunque este haya aumentado en los últimos años. La pobreza de la investigación científica y tecnológica lleva al atraso o a la aplicación ciega de las técnicas de los países más avanzados.

Entre los obstáculos más graves a los que se enfrenta la industria mexicana está la falta de tecnología adecuada. Esto se ha resuelto parcialmente a través de las inversiones extranjeras directas, que se han reunido con el capital nacional. Por otra parte diversas empresas nacionales tienen concertados convenios de asistencia técnica con empresas extranjeras, sin embargo, en la generalidad de los casos se pagan cuotas muy elevadas por el uso de las patentes y por la asistencia técnica. Por eso, el proceso de industrialización requiere de labores de investigación tecnológica para el desarrollo de procesos industriales o para adaptar los de otros países a las necesidades y condiciones del nuestro, para independizarnos, así, de las costosas regalías que se pagan por el uso de procedimientos industriales.

Por lo anterior, nuestro tema adquiere una justificación de tipo científico y tecnológico.

I.3.c. Aspectos económicos

Se describirán los más importantes.

I.3.c1.-El territorio nacional

La superficie de nuestro país es de 1 967 183 km², a los que hay que sumar 6 496 km² de islas, más 450 000 km² de plataforma continental, zócalos submarinos de las islas y arrecifes. El suelo de la nación está cruzado por dos sistemas montañosos que siguen paralelamente las costas del Golfo de México y del Pacífico, uniéndose en el nudo Mixteco, situado en el estado de Oaxaca. La localización de nuestros ríos obedece a las zonas geográficas derivadas de estos dos sistemas orográficos. El escurrimento medio anual de esos ríos se calcula en 357 257 millones de metros cúbicos. A excepción de unos cuantos, la mayoría de los ríos mexicanos no son propicios para la navegación ya que en su recorrido presentan caídas de agua que no favorecen esta actividad, pero en cambio, representan una riqueza potencial para la generación de energía eléctrica.

Los climas de México son muy variados a tal grado que se dice que posee todos los climas que hay en el mundo. El trópico de cancer atraviesa el territorio nacional hacia su parte media (entre los 23 y 24 grados latitud norte) estableciendo dos grandes zonas climáticas casi iguales en extensión: una templada al norte y otra tropical al sur; sin embargo, esta situación se ve considerablemente alterada por las diferencias de altitud en el territorio de México, que dan lugar a que se presente un variado mosaico de climas que van desde el ecuatorial, en las selvas de tabasco, hasta el frío, en las altas montañas.

I.3.c2.-Agricultura

El total de tierras laborables del país, según la Secretaría de Agricultura y Ganadería (hoy Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos), asciende a 29.3 millones de hectáreas, comprendidas las tierras de temporal , las de jugo o humedad, y las de riego. El 64% de la superficie total del país se considera de tierras áridas, en estas la lluvia no basta para permitir el crecimiento de cultivos que solo se logra si existe riego. En el 31.2% de las tierras consideradas semi-áridas, las lluvias permiten el cultivo sin necesidad de riego; el resto de estas tierras requiere de riegos de auxilio para asegurar el desarrollo de los cultivos. Es clara la importancia que tienen las obras relacionadas con las actividades del riego, entre las que destacan las presas de almacenamiento.

I.3.c3.-Importancia de la energía eléctrica en la Industria.

La industria de México requiere cada vez mayores volúmenes de combustible y a bajo precio, como lo demuestra el hecho de que el carbón de piedra haya sido fundamental para la industria moderna. Hoy se puede hechar mano de otras fuentes de energía como el petróleo, el gas natural y la electricidad.

La producción de energía eléctrica, indispensable para un amplio sector industrial, ha venido creciendo rápidamente en los últimos años gracias a la intervención que sobre ella ejerce el gobierno, preocupado esencialmente por un rápido desarrollo. En diciembre de 1960 se reformó el artículo 27 de la constitución , quedando asentado que corresponde exclusivamente a la nación generar, conducir, transformar, distribuir y abastecer energía eléctrica que tenga por objeto la prestación de servicio público.

La energía eléctrica posee características que la colocan en un plano de primera importancia para la industrialización de cualquier país; la facilidad con que se transmite a grandes distancias y transforma con eficiencia en otras clase de energía, como la luz y el calor; la comodidad en su uso; el menor volumen de equipo y el mejor control y eficiencia de su producción, la convierten en la fuerza motriz más económica.

Existen dos sistemas para producir energía eléctrica a gran escala: Primero, aprovechando una caída de agua para mover un generador eléctrico; la caída puede ser natural o artificial; las plantas de este tipo se denominan Hidroeléctricas. Segundo, utilizando máquinas de vapor o de gas, movidas mediante procedimientos térmicos o de combustión interna, en cuyo caso se denominan Termoelectricas y en ellas puede usarse como combustible el petróleo, el bagazo de caña, el gas natural, la gasolina y otros productos.

Las plantas hidroeléctricas son las más importantes, porque pueden aprovechar la fuerza, hasta cierto punto, gratuita de la naturaleza y ofrecen mayores perspectivas para una producción en gran escala. México es un país rico en recursos aprovechables para la

generación de energía eléctrica; la potencialidad hidroléctrica del país se estima en trece millones de caballos de potencia.

I.3.c4.-La Industria de la construcción.

La industria de la construcción tiene una importancia especial en el desarrollo de un país, por el valor total de los recursos que maneja y porque sus realizaciones son bienes de capital que aumentan constantemente el potencial productivo del mismo. Tan solo en México, se calcula que la construcción de obras materiales -presas, puertos carreteras-, y obras de beneficio social -hospitales, escuelas y casas habitación- a cargo del sector público, representan aproximadamente el 50% del valor total generado en la actividad de la construcción. Se estima que en 1967 laboraron directa o indirectamente en la rama de la construcción alrededor de 700 000 personas.

I.3.c5.-Las Obras Públicas.

El estado es una entidad soberana integrada por cuatro elementos: Población, Territorio, Orden Jurídico y Gobierno. El más importante de estos es la población que habita el territorio; la sociedad que crea y se rige por el orden jurídico y que debe elegir la forma de gobierno más adecuada a sus intereses. El gobierno, desde este punto de vista, es una institución social a la cual se asignan diversas funciones y objetivos y se le otorgan las funciones necesarias para realizarlos. El estado contribuye a la capitalización nacional, al construir obras básicas de infraestructura y al extender su acción a la esfera de la producción de bienes y servicios. Esto se realiza mediante una red de organismos descentralizados, empresas estatales y de participación estatal.

Las obras públicas representan uno de los capítulos más importantes de los gastos gubernamentales, además de que significan uno de los instrumentos de mayor eficacia para proporcionar ocupación a los trabajadores que quedan sin empleo, en épocas de crisis. Con ello las obras públicas son un importante y poderoso instrumento de política económica para lograr el desarrollo. Cuando el gobierno emprende obras de regadío, construcción de carreteras, ferrocarriles y plantas de energía eléctrica, fomenta la actividad económica proporcionando medios para establecer negociaciones que, sin esos recursos, no podrían aparecer.

Para cubrir el costo de las obras públicas se pueden seguir varios caminos: En condiciones normales se utiliza una proporción de los ingresos ordinarios, destinándola a las obras públicas de carácter productivo. Cuando el gobierno no puede costear el valor total de las obras públicas, recurre a empréstitos de carácter interior, emitiendo bonos que pagan un interés al ser comprados por el público. Por último puede recurrirse a préstamos del extranjero. Por ejemplo, para poner en práctica sus programas de fomento, la Comisión Federal de Electricidad depende en materia de fondos, de las asignaciones gubernamentales, de los préstamos exteriores otorgados por los bancos internacionales y de los ingresos derivados de la venta de energía eléctrica al público.

I.3.d. Aspectos sociales

I.3.d1.-La realidad socio-cultural del hombre

El hombre en cualquier lugar se encuentra rodeado de innumerables objetos y elementos naturales, así como de otros hombres. Él, sus semejantes y todo lo que se encuentra a su alrededor, dentro de un área geográfica, con límites más o menos conocidos, es su medio ambiente.

Todo este conjunto no es un agregado en el que las partes que lo constituyen nada tienen que ver entre sí, sino que forman un todo, con un sin número de interacciones e interrelaciones del hombre con sus semejantes, del hombre y el medio natural y el creado por él. Este mundo de hombres, cosas, normas, funciones, estructuras etc., en cuanto se enfoca desde el punto de vista del hombre mismo y de lo inherente a su vida, constituye lo que se denomina la realidad sociocultural del hombre. Esta realidad se representa por cinco categorías: El medio, la sociedad, el tiempo, la cultura y el hombre mismo. Es tan importante esta realidad sociocultural del hombre, que existe un conjunto de disciplinas científicas dedicadas a su estudio, son las llamadas ciencias sociales.

Mediante un esquema conceptual (Fig. I.1) se puede ilustrar gráficamente el planteamiento de esta realidad. El esquema se compone de cuatro planos superpuestos, el plano de la base representa la realidad sociocultural del hombre. Todo el contenido de la realidad sociocultural es el objeto formal de estudio de nueve ciencias (Sociología, Antropología, Psicología, Historia, Demografía, Economía, Geografía, Educación y Política). Este conjunto de ciencias ocupa el plano superpuesto al de la realidad del hombre y, encima de este, se encuentra el plano de la proyección del conocimiento, dividido en tres grandes intereses: Uno, la integración científica, que consiste en el afán del conocimiento por el conocimiento mismo o ciencia pura; el otro, el del desarrollo del pensamiento social, o sea la dirección adecuada del uso del conocimiento con fines sociales y materializada en la tercera gran proyección, lo que representa la verdadera integración de sistemas o procesos de aplicación del conocimiento que son realizados a través de la planificación económica, la antropología aplicada, los programas de desarrollo y el desarrollo de la comunidad. El cuarto y último plano corresponde a los objetivos generales; también divide su campo en tres grandes fines: El desarrollo del conocimiento, la solución al problema existencial, y la preservación de la humanidad a través de una acción planificada.

I.3.d2.-Condiciones socio-culturales de México.

Las características socioculturales de México son muy variadas. Existen diversas áreas en el país con diferentes niveles económicos, tecnológicos, culturales, históricos, etc. De esas características podemos citar las siguientes:

1) Medio.-Vivimos en un medio muy variado, influido por factores geográficos, climatológicos, de recursos naturales, etc.

2) Historia.-México es un país con historia, la que se ha visto afectada por el hecho de haber sido explotado durante tres siglos por España y dos por los E. U. A.

3) Sociedad.- La sociedad mexicana se encuentra dividida en dos grandes grupos: a).-La urbana.- compuesta por los industriales y políticos, los profesionistas, los obreros, empleados y los trabajadores libres. b).-La rural.-Integrada por los terratenientes, los campesinos y los indígenas.

4) Cultura.-científicamente hablando, es todo lo creado por el hombre para satisfacer sus necesidades y lograr que la especie humana sobreviva. La nuestra es de origen indígena-europea, con caracteres propios; civilizada en las clases pudientes y analfabeta con pérdida de valores propios en las más bajas.

5).-Por lo que toca al individuo podemos decir que el mexicano, de manera global, tiene una mentalidad fatalista; ello le hace pensar que no puede hacer nada para superar su estado actual de vida. Lo anterior lo ha hecho más tendiente a adoptar manifestaciones de tipo sentimental (artes, etc.) que de tipo racional (ciencia y tecnología). Por otro lado es poco afecto a formar grupos cooperativos para a través de ellos realizar metas.

El cambio sociocultural se refiere a las variaciones o innovaciones efectuadas en la cultura; variaciones que pueden realizarse en campos como los de la tecnología, las normas de conducta, las costumbres, la organización social, la cultura material, las instituciones, etc.

Nuestro tema infiere un cambio. No solo los aspectos económicos y científicos son de tomarse en cuenta sino también los sociales. La construcción de una presa hidroeléctrica, por ejemplo, no solo da oportunidades de trabajo y de desarrollo en las comunidades donde se realiza, provoca además que sea más accesible el servicio de energía eléctrica y con ello, la comunicación a través del radio y la televisión los cuales a su vez son portadores de más cambios culturales, en un sentido positivo.

I.4. Descripción del problema

En la sección anterior señalamos los aspectos fundamentales relacionados con el tema que venimos tratando. Vamos ahora a describir que parte de ese tema estudiaremos.

Cuando se necesita dotar de agua a una población, o se tienen necesidades de energía eléctrica, o bien se requiere el riego de terrenos de labor que lo necesitan, puede ser considerada la construcción de una presa como solución a estos problemas.

Una presa es el resultado de un estudio general en el que intervienen los siguientes aspectos:

- Características de río.
- Geología de la región.

-Sitios apropiados para crear el embalse y cimentar la obra.

Aparte de estos aspectos tienen que ser considerados, también, los estudios de factibilidad económica.

Además se requiere que se establezca la necesidad de construir la presa, esto es, la existencia de tierras de labor que requieran el riego, o necesidades de energía eléctrica, etc.

Una vez establecido lo anterior el siguiente paso es elegir la disposición de las partes que integran la presa (cortina, obra de toma, vertedor, obra de desvío, casa de máquinas, etc.), seleccionando al mismo tiempo el tipo de estructuras y haciendo una estimación global de su costo.

De acuerdo con el procedimiento de construcción podemos clasificar a las presas en: *de relleno hidrúlico* y *de materiales compactados*. En base a los materiales de que está constituida su cortina se pueden clasificar en homogéneas, homogéneas con filtros, de materiales graduados, con delantal o con pantalla, o bien de enrocamiento (ver fig. I.2).

Un caso específico del último tipo es la presa de enrocamiento con pantalla impermeable; la pantalla, localizada en el paramento de aguas arriba, puede ser de asfalto o de concreto. Este tipo de presa normalmente es de dimensiones más pequeñas que una presa tradicional de tierra y enrocamiento lo que permite un ahorro en el volumen y acarreo de materiales.

Nuestro interés estará fijado en una presa de enrocamiento que piensa construir la C.F.E. en el sitio denominado Aguamilpa, Nayarit, sobre el cauce del río Santiago.

Para esta presa se ha considerado una estructura de enrocamiento con losa de concreto en su paramento de aguas arriba, selección que se hizo de acuerdo a un criterio económico.

Nuestro problema será la optimización del diseño de la losa de concreto, para lo cual se hará un análisis matemático a fin de determinar las propiedades mecánicas de las zonas de apoyo de dicha losa, considerando diferentes alternativas de solución.

I.5. Conclusión del capítulo.

En los párrafos anteriores describimos los aspectos fundamentales relacionados con el tema y la parte que estudiaremos de este. Vamos ahora a señalar como influyen en dicho tema estos aspectos para lo cual haremos una serie de comentarios que nos ayudarán a fijar esta idea.

Una fuerte motivación de tipo filosófico nos condujo en primer lugar a abordar el tema de las presas, este es el asombro. Una estructura de esta naturaleza está considerada por muchos ingenieros como la obra de Ingeniería Civil por excelencia. Si nos preguntamos

por qué?, encontraremos que las razones aducidas son múltiples. Estas involucran, como ya vimos, aspectos tales como científicos, técnicos, económicos, sociales y de tipo filosófico, incluso.

En apariencia el problema está perfectamente bien estudiado, sin embargo, surge la duda y el examen crítico: ¿esto no es así!. Por ejemplo, desde el punto de vista científico existen aun muchos abismos que salvar; problemas como la determinación de los esfuerzos y desplazamientos en la masa de suelo no han sido del todo resueltos.

Por otro lado nos encontramos siempre con las situaciones límite; como profesionales que somos debemos actuar de manera ética, por lo que tenemos la gran responsabilidad de que al diseñar la presa, ésta no nada mas sea económica y funcional, sino también, segura. Debemos evitar, hasta donde esté nuestro alcance, una falla que pueda provocar desgracias tanto materiales como humanas.

Ahora bien, la parte que estudiaremos del tema que hemos elegido es una presa de enrocamiento con pantalla de concreto. El interés científico es claro cuando notamos que el diseño de la losa y detalles menores se apoyan aún sobre bases totalmente empíricas, como lo veremos más adelante.

También el aspecto técnico es importante: Cuando se hace una investigación al servicio del desarrollo se crea tecnología, y este es precisamente nuestro caso, ya que no es necesario que compañías extranjeras realicen el análisis y diseño de esta obra, puesto que especialistas nacionales ya lo han realizado y han dado una serie de recomendaciones para su realización exitosa, librando al país, de esta manera, de las cuantiosas regalías que se hubiesen tenido que pagar en caso contrario.

La elección de la presa de enrocamiento con pantalla de concreto tiene una justificación de tipo económico, debido al menor volumen de materiales manejados durante su construcción.

Por otro lado C.F.E. ha pensado hacer de esta obra una planta hidroeléctrica. La generación de este energético, como ya vimos, es necesaria para la industrialización del país, por lo que los beneficios serian mayúsculos al fomentar este renglón de la actividad económica.

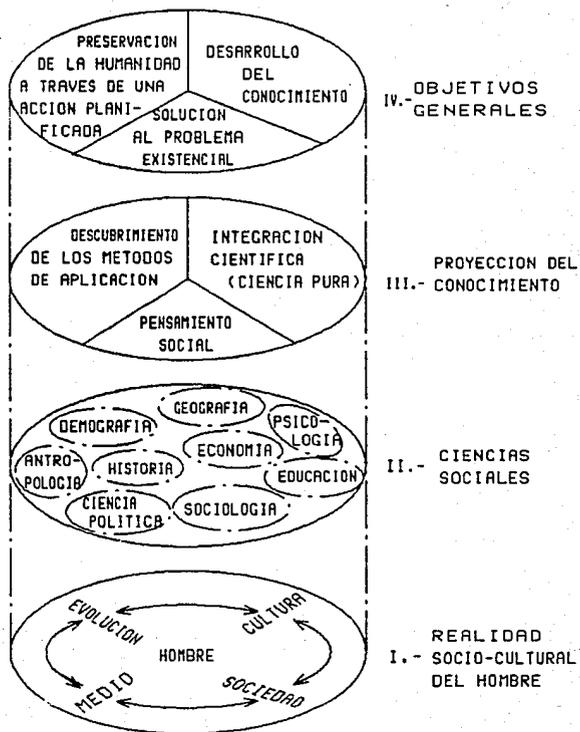
Uno de los objetivos de los planes de desarrollo es lograr mejores condiciones de vida en las comunidades del país. Los beneficios que proporciona la energía eléctrica a los habitantes de una región hace que aumente su calidad de vida: se puede hacer uso de aparatos eléctricos, se puede contar con alumbrado público para la seguridad, son posibles las escuelas nocturnas, etc. En fin, se podría dar una serie de beneficios económicos y sociales que traería la construcción de esta obra en las comunidades beneficiadas por ella.

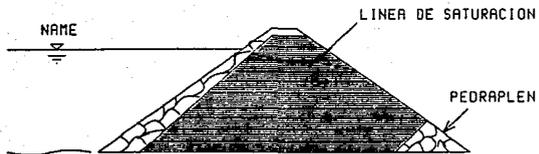
Por lo anterior se concluye que la construcción de esta obra debe realizarse ya que es necesaria su integración al desarrollo del país. Sin embargo, se debe recalcar el hecho siguiente: Los problemas para el desarrollo de la ciencia en México se han acentuado en los últimos años porque se le ha colocado en un segundo término; se ha encasillado a esta actividad como asunto secundario.

El consejo nacional de ciencia y tecnología, CONACYT, disminuye año con año su presupuesto dedicado a la investigación. Los investigadores de la UNAM tienen mucho entusiasmo por la ciencia, pero el apoyo gubernamental cuesta mucho trabajo conseguirlo.

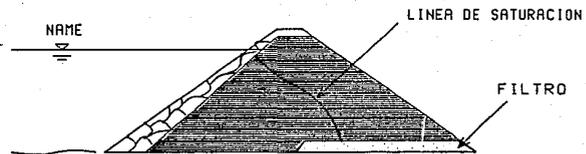
Los mexicanos, y en particular los ingenieros, si nos decidimos por un país abierto y moderno, tenemos ante nosotros el reto de ponernos a la altura de la mejor industria internacional; sólo así se cumplirá con el reto de producir empleos remuneradores y conocimientos nuevos y riqueza patrimonial y social; es por eso que debemos lograr el apoyo del gobierno para llevar a cabo estos objetivos.

FIG. I.1 ESQUEMA DE LA REALIDAD SOCIO-CULTURAL DEL HOMBRE





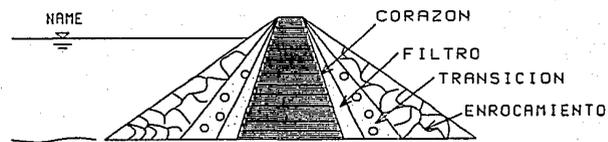
PRESA HOMOGENA



PRESA HOMOGENA CON FILTRO HORIZONTAL

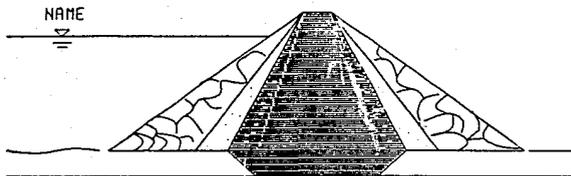


PRESA HOMOGENA CON FILTROS
AGUAS ARRIBA Y AGUAS ABAJO

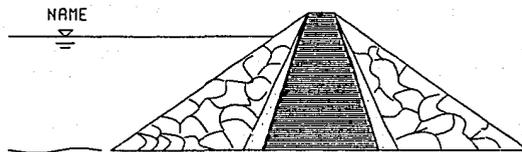


PRESA DE MATERIALES GRADUADOS

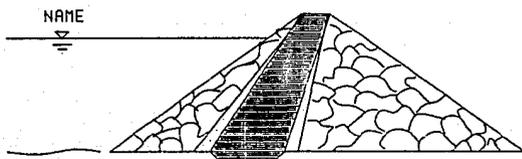
Fig. I.2 Secciones de presas



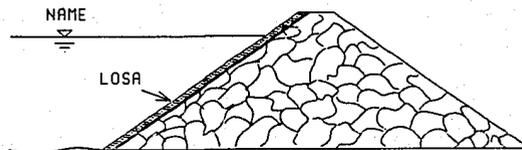
PRESA DE TIERRA Y ENROCAMIENTO
CON TRINCHERA



PRESA DE ENROCAMIENTO
-CORAZON VERTICAL-



PRESA DE ENROCAMIENTO
-CORAZON INCLINADO-



PRESA DE ENROCAMIENTO CON LOSA
DE CONCRETO -CIMENTACION RIGIDA-

Fig. I.2 (continuación)

II. ESTADO DEL ARTE EN LA CONSTRUCCION Y DISEÑO DE PRESAS DE ENROCAMIENTO CON PANTALLA DE CONCRETO

II.1. Evolución de la presa de enrocamiento

Las prácticas de construcción en presas de enrocamiento han evolucionado considerablemente desde el siglo pasado. Esta evolución puede clasificarse en los siguientes tres periodos: Primero.- El siglo diecinueve y los principios del siglo veinte pueden ser considerados como el periodo del enrocamiento colocado a volteo. En este tiempo se construyeron enrocamientos que excedieron los 30 m de altura. Alrededor de 1940 comenzaron a desarrollarse las primeras presas con membrana impermeable.

Segundo.- A partir de los 40's surge el siguiente periodo, de vigorosa experimentación, con nuevos diseños y nuevas técnicas de construcción. La compañía norteamericana "Pacific Gas and Electric" hizo extensiva la construcción de presas con losas de concreto, antes y durante este periodo, lo que proporcionó a la profesión la oportunidad única de estudiar el comportamiento a largo plazo del enrocamiento a volteo. Se hizo común la tendencia de colocar el enrocamiento en delgadas capas (alrededor de 3 m) y subsecuentemente compactarlas con el tráfico de tractores y camiones de construcción. Al rededor de 1940 las losas son reemplazadas por corazones impermeables de tierra en presas de enrocamiento a volteo, debido al problema de filtraciones que presentaron algunas presas con losa de concreto y a la creciente necesidad de estructuras más altas. Entre 1955 y 1965 se establece la transición al enrocamiento compactado, algunos factores que contribuyeron a este hecho fueron: la necesidad de presas más altas, la falta de roca de alta calidad, la diversidad de sitios para desplantar presas y el desarrollo de maquinaria, en especial el rodillo vibratorio. Terzagui recomendó que las presas altas de enrocamiento a volteo estuvieran compuestas de tres zonas: Una superior de roca pequeña, una central con roca de tamaño medio y una inferior de roca grande. Él notó la alta compresibilidad del enrocamiento a volteo y la pérdida de resistencia bajo saturación para varios tipos de roca, como un remedio sugirió el compactamiento del enrocamiento.

Tercero.- Los últimos veinte años constituyen el periodo contemporáneo; en éste, el diseño estandarizado de presas con losa de concreto ha sido aplicado con refinamientos y ha sentado confianza para el diseño y construcción de presas cada vez más altas.

En las últimas dos décadas, las grandes presas de enrocamiento, principalmente con losa de concreto han estado en una etapa de diseño experimental por parte de muchas de las constructoras del mundo.

En el simposio del ASCE (American Society Civil Engineering) para presas de enrocamiento realizado en 1960, la presa de enrocamiento se definió como "Una presa constituida por roca, colocada a volteo o compactada en capas, como principal elemento estructural"; esta definición incluía tanto presas con núcleo central como presas con losa de concreto. Si bien el volteo es usado efectivamente en algunas zonas de la presa (como en la línea de la base aguas abajo o en las ataguías), la compactación ha llegado a ser universal en todas las presas de enrocamiento. Una definición más adecuada es: "Una presa donde el enrocamiento compactado en capas es el principal elemento estructural".

El diseño actual de presas de enrocamiento con pantalla de concreto es esencialmente poco analítico, basado principalmente en el criterio y en la práctica.

La tabla II.1 es una lista en orden cronológico, conteniendo algunos datos físicos y de diseño, de las presas arriba de los 50 m de altura. La figura II.1 muestra la sección conceptual típica de una presa de enrocamiento con pantalla de concreto. Como podrá observarse, las partes fundamentales que la constituyen son: 1.-El cuerpo de enrocamiento, dividido en ciertas secciones, incluyendo la zona de apoyo de la losa, 2.-El pie de losa, y 3.-La losa de concreto, incluyendo sus juntas.

II.2. Características del enrocamiento

II.2.a. Calidad y graduación

En la explotación de las formaciones rocosas duras, el enrocamiento resultante tiene, generalmente, alrededor de 30% de partículas menores de 2.5 cm. Debido a esto se ha especificado comúnmente que el enrocamiento no debe tener más del 30 ó 40% de partículas menores de 2.5 cm, pero una roca basáltica con más del 50% de partículas menores de 2.5 cm ha producido excelente enrocamiento. También en años recientes se ha encontrado que algunas rocas tienen excelentes propiedades cuando se las rompe en tamaños relativamente pequeños con pocas piezas grandes, con la mayor parte de las partículas entre 10 y 15 cm. El aluvión (grava-arena) del río, el cual forma excelentes terraplenes compactados, con baja permeabilidad y alta resistencia al esfuerzo cortante, en ocasiones es similar a este tamaño.

Las propiedades más importantes del enrocamiento compactado deben

ser baja compresibilidad y alta resistencia al esfuerzo cortante. Usualmente el enrocamiento es muy permeable, esta permeabilidad del enrocamiento puede usarse para proveer un drenaje especial en zonas interiores. Generalmente las rocas duras extraídas en las canteras con una distribución de partículas tal que un 20% o menos de partículas finas pase la malla No 4 y un 10% o menos de finos pase la malla No.200, tienen las propiedades necesarias para formar un enrocamiento con alta resistencia y baja compresibilidad.

La resistencia a la compresión simple de especímenes intactos de roca usados para presas de enrocamiento generalmente está en un rango de 100 (ó 200) kg/cm^2 (las muy bajas) a más de 2500 kg/cm^2 (las muy altas), la mayoría se encuentra en el rango de 500 a 1500 kg/cm^2 . Como regla general una roca con 300 kg/cm^2 o más es una roca dura adecuada.

Sin embargo, para presas de enrocamiento no es técnicamente conveniente usar rocas con altas resistencias; rocas con 300 a 400 kg/cm^2 de resistencia, no son más compresibles en todo el volumen del enrocamiento que las más duras. Al romper una roca con alta a muy alta resistencia (1000 kg/cm^2 ó más) con frecuencia aparecen en ella muchas puntas; las orillas y puntas resistentes dañan los neumáticos del equipo de transporte más rápidamente que las de baja resistencia. Por eso, en la explotación de bancos, el enrocamiento de baja a moderada resistencia tiene algunas ventajas económicas en cuanto a su costo de perforación y ruptura con explosivos, además es considerablemente menor el daño del equipo de ataque y transporte.

Las rocas con alta absorción o baja resistencia dan, todavía, resistencias considerablemente menores cuando se saturan, comunmente 20 a 40% menos. Cuando estas rocas son compactadas con un equipo pesado, ocurre el rompimiento de las más grandes. A pesar de ello estos materiales pueden usarse en una zona de la presa y con un método de construcción apropiado.

II.2.b. Excavación y tratamiento de la cimentación

El ancho de la base en la sección máxima de una presa de enrocamiento con pantalla de concreto, es mayor, en la mayoría de los casos, que 2.6 veces la altura. Toda la carga de agua es tomada por la zona de la cimentación que queda aguas arriba del eje de la presa.

La mayor parte del área excavada para la cimentación se realiza solamente con equipo terrestre, el cual remueve los depósitos de suelo y expone los puntos de la roca dura in-situ. En la zona que queda abajo del paramento de aguas arriba el trabajo se realiza con una retroexcavadora o un equipo similar, el cual puede remover, también, roca húmeda blanda. No se requiere limpieza final de tipo manual. El suelo y el material entre la superficie y la roca dura bajo el paramento de aguas abajo de la cimentación, y en toda la cimentación de la mayoría de las presas de baja a moderada altura, se dejan en su lugar.

Los depósitos aluviales de grava en el fondo del río se quedan en su lugar, excepto los de una cierta zona bajo el pie de losa (ver fig. II.1). Tales depósitos usualmente tienen baja compresibilidad, relativamente tan buena como la del enrocamiento compactado.

II.2.c. Zonificación

Muchas mediciones en presas han confirmado que el vaso lleno provoca muy poco movimiento en la presa hacia aguas abajo. El factor de desplazamiento total (peso total dividido entre el empuje horizontal del agua) es alrededor de 7.5. Es útil por tanto la zonificación de materiales en el enrocamiento. Los procedimientos de colocación de la roca son bien conocidos. La zonificación es importante ya que en algunas áreas, bajo el paramento de aguas arriba, se requieren bajas compresibilidades; y en otras, bajo el paramento de aguas abajo, se necesita que sean drenables, no requiriéndose en ellas bajas compresibilidades. Lo anterior con el objeto de evitar subpresiones y previniendo el caso de erosión por desbordamiento.

El cuerpo del enrocamiento puede colocarse en cuatro zonas, incrementando los espesores de las capas compactadas hasta dar una conveniente transición de compresibilidad y permeabilidad a las zonas bajo los paramentos de aguas arriba y aguas abajo. La menor compresibilidad debe estar bajo el paramento de aguas arriba, donde se transmite la carga del agua a la cimentación. En cuanto a la permeabilidad, ésta debe aumentarse progresivamente de la zona 2 (ver fig. II.1.) a las zonas 3A hasta la 3E, previniendo el caso en que suceda el evento de una avenida antes de ser colocada la losa de concreto.

Zona 1.-El propósito principal de esta zona de fina roca fue, inicialmente, proveer un soporte uniforme y firme para la losa de concreto. Recientemente existe la tendencia de combinar este material con una cantidad suficiente de partículas de arena y finos para asegurar una baja permeabilidad en ella. Tal graduación provee una barrera semipermeable, previniendo una posible filtración provocada por una grieta en la losa de concreto o un defecto en los detenedores de las juntas. Las partículas deben tener una graduación con tamaños máximos de 3" a 6" y un porcentaje de finos (malla No 100) menor que el 5 ó 15%. Es conveniente que el coeficiente de permeabilidad se encuentre en un rango de entre 10^{-3} a 10^{-4} cm/s.

En esta zona el material, con un 40% de partículas de arena y finos, es colocado y compactado en capas de 0.4 ó 0.5 m de espesor con un rodillo liso vibratorio. Generalmente es colocado con un porcentaje de agua en el rango de 4 a 10%, pero no se señala comunmente, la cantidad que ha de emplearse. Una especificación sería que el contenido de agua no fuese tan alto que el equipo de compactación opere en un material no firme; este tipo semipermeable de material es especialmente sensitivo al exceso de agua.

En sitios con altas precipitaciones también es necesario proyectar esta zona como una superficie vertedora. En las presas Alto Anchicaya y Salvajina la erosión, provocada por una fuerte precipitación, produjo, en las zonas adyacentes al pie de losa, hondonadas que alcanzaron de 5 a 8 m de profundidad en pocas horas, y

se tuvieran que realizar importantes reparaciones. El daño por erosión es causado principalmente por corrientes superficiales que bajan de las laderas o de la superficie horizontal de la construcción del terraplen principal.

Esta zona está expuesta a erosión por precipitación y a disturbios por los trabajos durante su construcción. Para prevenir esto se han empleado algunos métodos de protección tales como una impregnación de asfalto y arena o una capa de 50 a 75 mm de concreto lanzado. En sitios lluviosos se recomienda que se coloque esta protección tan pronto como sea posible después de colocado el terraplen. Esta protección es generalmente satisfactoria contra la erosión pero no puede soportar las grandes concentraciones de las corrientes superficiales provenientes de los terrapienes. Por eso, la mayor protección contra la erosión se obtiene capturando y desviando esas corrientes.

Zona 2.-Esta zona es una transición entre la zona 1 y el enrocamiento. Su propósito principal es limitar el tamaño de vacíos e impedir con ello que los materiales de la zona 1 se desplacen y penetren hacia los vacíos del cuerpo de la cortina. El material de esta zona es colocado y compactado al mismo tiempo y con los mismos espesores (0.4 a 0.5 m) que los de la zona 1.

Zonas 3A y 3B.-Debido a que la carga de agua pasa a la cimentación a través de la zona que queda aguas arriba de la cortina, es necesario que la compresibilidad de estas zonas sea lo más baja posible que minimice los asentamientos de la losa. La experiencia ha demostrado que la colocación de los materiales en estas zonas, compactadas con un rodillo liso vibratorio en capas de 0.60 a 1.00 m de espesor, respectivamente, ofrece un comportamiento satisfactorio.

Zonas 3C y 3D.-La compresibilidad de estas zonas tiene poca influencia en los asentamientos de la losa debido a que toman una carga despreciable de agua. De ahí que la zona 3C se coloque comunmente en capas de 1.5 a 2 m de espesor. Estas capas se compactan dando a cada una 4 pasadas con el rodillo liso vibratorio. Conviene especificar el espesor de las capas de la zona 3C porque así se obtiene un ahorro económico sustancial debido al menor desgaste del equipo. La 3D es una zona de enrocamiento colocado a volteo. Estas zonas admiten la colocación de rocas de gran tamaño.

II.2.d. Uso del agua en la compactación del enrocamiento

La adición de agua al enrocamiento compactado mejora sus propiedades al hacerlo menos compresible. Sin embargo, para rocas duras con baja absorción (menor de 2%) el mejoramiento es poco significativo y probablemente no justifique su costo, especialmente para presas de moderada altura y para las zonas 3C y 3D.

La necesidad de adición de agua es debatible. Los siguientes aspectos son una guía:

a) Para la mayoría de las rocas duras en presas de baja a moderada altura la adición de agua tiene una influencia despreciable

en el comportamiento de la presa.

b) Para grandes presas y para rocas con baja resistencia a la compresión simple en condiciones saturadas, el agua probablemente debe añadirse rutinariamente en la zona bajo el paramento de aguas arriba.

c) Para rocas con alto contenido de partículas de arena y finos, el agua debe usarse siempre. En estos materiales el agua ablanda los finos y las rocas grandes pueden ser forzadas a hacer contacto con las demás con el rodillo vibratorio. No es la finalidad del agua el lavar o canalizar los finos hacia los vacíos del enrocamiento.

La cantidad de agua añadida comunmente ha sido de 10 a 20%, y en ocasiones hasta de 30%. Para la mayoría de las rocas usadas 100 lts/m³ (alrededor de 10%) es más que suficiente. Una buena práctica es adicionar el agua en los camiones justamente antes de ser colocada la roca, lo cual es económico y asegura la completa humedad de la roca.

II.2.e. Estabilidad del enrocamiento

Es difícil encontrar un método realista de verificación de análisis de estabilidad para el enrocamiento; si bien el método de análisis límite ha sido usado, en la actualidad muchas presas han fallado debido a una estabilidad inadecuada.

Para el enrocamiento de aguas abajo la relación peso vertical a fuerza horizontal (con toda la carga de agua) es mayor de 6 para una pendiente 1.3:1. Por eso, el diseño de la pendiente ha estado basado en la tradicional relación 1.3:1, precedente que se desarrolla para enrocamientos y cimentaciones en roca firme, con variaciones ocasionales. Para la presa Areia (de 160 m) la relación fué de 1.4:1 debido a que la resistencia al esfuerzo cortante del enrocamiento, sometido a altas presiones, fué bajo. Algunas pendientes más suaves, basadas en análisis de estabilidad, se han manejado en enrocamientos con material débil o sobre cimentaciones menos competentes.

II.3. Características del pie de losa

El pie de losa es una franja de concreto que sigue la periferia de la losa en el contacto con la boquilla.

II.3.a. Tratamiento de la cimentación del pie de losa

El pie de losa se construye generalmente sobre una roca dura no intemperizada. Sin embargo, todas las rocas contienen zonas susceptibles con algunas fallas y fracturas que pueden estar rellenas de arcilla. Una roca con menor calidad puede usarse como cimentación aceptable empleando algunos métodos para su tratamiento: excavación de la roca erosionable y uso de lechadas de concreto; ampliación del pie de losa y uso de pantallas o trincheras, o filtros aguas abajo de la

presa. La colocación de material impermeable (ver zona 4 de la fig.II.1) en las zonas bajas de la losa de concreto se ha usado en algunas ocasiones para sellar grietas en la losa o las aberturas de las juntas.

La práctica de diseño y construcción del pie de losa consiste en la excavación de una trinchera, a una profundidad nominal (obtenida a partir de una exploración), que proveerá una cimentación razonablemente competente. El criterio es eliminar la posibilidad de erosión o tubificación en la cimentación. Debe realizarse una excavación cuidadosa para minimizar la fracturación de la superficie de la roca sobre la cual se colocará el pie de losa. Para tener un buen contacto del concreto en la cimentación, se requiere la limpieza de la roca mediante chorros de agua o aire.

II.3.b. Dimensiones

El ancho del pie de losa (ver fig.II.2a), en una roca dura no erosionable, es entre 1/20 a 1/25 veces el tirante de agua. El ancho mínimo ha sido generalmente de 3 m, si bien 2 m pueden ser usados en presas con alturas menores de 40 m, sobre muy buena roca. Cuando se tienen condiciones locales pobres o un sitio con roca pobre, se usan anchos mayores.

El espesor frecuentemente ha sido diseñado aproximadamente igual al de la pantalla de concreto. Un espesor de 0.3 m generalmente es razonable para la mayoría de los pies de losa. Sin embargo una excavación sobre roca muy quebrada o sobre una topografía muy irregular usualmente requiere mayores espesores. Un espesor de diseño de 0.4 a 0.5 m puede ser considerado como el mínimo requerido para los pies de losa de grandes presas.

II.3.c. Acero de refuerzo

El propósito principal del refuerzo es el mismo que en la pantalla, como acero por temperatura. El acero es colocado, en ambas direcciones, a cada 10 o 15 cm en la parte superior y se fija al enrocamiento mediante anclas. No se usa acero en la parte baja en el sentido perpendicular a la corriente del río, porque tiene teóricamente una desventaja, ya que al trabajar de manera incorrecta en esta dirección hace a la losa más rígida y, por ende, menos capas de ajustarse a los posibles asentamientos diferenciales de la roca de cimentación.

Las anclas en el pie de losa (ver fig.II.2a), no están diseñadas para soportar cargas producidas por subpresión, su propósito es simplemente el de ligar el concreto con la roca. Su longitud espaciado y diámetros se elige de acuerdo a las características de la roca de cimentación. Las anclas comúnmente utilizadas se encuentran en un rango de 25 a 35 mm de diámetro, espaciadas aproximadamente de 1.0 a 1.5 m en cada dirección con longitudes de 3.0 a 5.0 m.

II.4. Características de la losa de concreto

La losa de concreto ha demostrado ser durable aún bajo altos

gradientes hidráulicos y condiciones climatológicas extremas, lo mismo en presas con enrocamiento a volteo que en presas con enrocamiento compactado, y en aquellas construidas antes del uso de puzolanas.

II.4.a. Espesor

El espesor de la losa de las primeras presas de enrocamiento a volteo fué tradicionalmente $0.3 + 0.0067H$ [H = altura de la presa en m]. La experiencia muestra que las viejas losas han sido remarcadamente satisfactorias. Para la presa con enrocamiento compactado, el espesor de la losa ha ido decreciendo a $0.003H$ y $0.002H$ ó menos. Estas losas han tenido un comportamiento satisfactorio y existe la tendencia general hacia losas más delgadas. Generalmente se considera un espesor entre 0.25 y 0.30 m como el mínimo necesario para cubrir el acero y para hacer la superficie de grietas por contracción, poco importante. En presas con altura moderada (entre 75 y 100 m), se piensa, en base a la experiencia disponible, que es razonable un espesor constante entre 0.25 a 0.30 m.

II.4.b. Acero de refuerzo

El uso de 0.4% de refuerzo en cada dirección para la losa de concreto de presas con enrocamiento compactado, ha sido un cambio útil en relación con el 0.5% anteriormente usado en presas con enrocamiento a volteo. En algunas presas recientes se planea el uso de 0.3% de acero en la gran zona central con compresiones conocidas, conservándose el 0.4% en el perímetro de la losa, en donde se desarrollan tensiones en algunas zonas.

El acero de refuerzo siempre se coloca en una capa al centro del espesor de la losa. El propósito es hacer la losa lo más flexible posible, permitiendo seguir pequeños asentamientos, sin que se desarrollen altos esfuerzos por flexión, y dando igual resistencia flexionante en ambas direcciones.

Una tendencia, la cual parece razonable y económica, es hacer que el acero de refuerzo pase a través de las juntas verticales. Cuando el refuerzo pasa a través de las juntas verticales existe menor riesgo de que se desarrollen grietas por contracción en las juntas de construcción en el sentido vertical. La ventaja económica de correr el acero a través de las juntas verticales es la eliminación de detenedores de agua, cuya tecnología es cara; así, el aumento en la cantidad de refuerzo utilizado resulta ser un ahorro y no un aumento en el costo total de la presa.

II.4.c. Concreto

La densidad e impermeabilidad del concreto funcionan satisfactoriamente bajo altos gradientes hidráulicos teniendo este una

resistencia típica a los 28 días entre 20 y 24 MPa. Una alta resistencia en el concreto no es recomendable, generalmente debido a que va a estar sujeto a grandes contracciones y a que la seguridad y la impermeabilidad son más importantes. Con la moderna tecnología del concreto, las bases de calidad y durabilidad son más firmes y dignas de confianza que en el pasado.

II.4.d. Juntas verticales y perimetral

En la mayoría de las presas, la pantalla no cuenta con juntas horizontales y las verticales son juntas frías con detenedores de agua. Cuando se requiere interrumpir la colocación del concreto, se usa una junta de construcción simple con el acero de refuerzo atravesándola.

Cuando se aplica la carga de agua, el movimiento del terraplen hacia aguas abajo impulsa la losa de concreto fuera de la junta perimetral. La junta perimetral siempre se abre y se desalinea moderadamente cuando se llena el vaso, y es una fuente potencial de filtraciones si no está diseñada inspeccionada y construida, correctamente. En presas de baja a moderada altura (menos de 75 m) el movimiento de la junta comunmente ha sido de unos cuantos milímetros. En algunas presas altas el movimiento de la junta ha sido de algunos centímetros. La presa Areia, con 160 m de altura, tubo una abertura en cierta zona de la junta, de 2.5 cm; la filtración en la junta no ocurrió pero es probable que se haya roto el detenedor de agua.

Debido a la historia de filtraciones en las juntas perimetrales la tendencia ha sido colocar de dos a tres detenedores de agua separados (ver fig.II.2a). Se piensa que no es conveniente incluir el detenedor central debido a que su presencia hace difícil colocar un concreto confiable y continuo en las juntas; los detenedores inferior y superior han dado un servicio satisfactorio. El material del detenedor superior puede ser mastic cubierto con goma elástica o una membrana de plástico. Es necesario que el mastic selle contra el concreto para evitar filtraciones; esto se logra utilizando una vigueta de acero rígida unida a una laminilla que empuja el mastic hacia el concreto cuando se aplica la carga (ver fig.II.2c). Este sistema, inicialmente ideado para la presa Yacambu, fué primero utilizado en la presa Areia.

El hypalon es considerablemente más durable que otras membranas disponibles y debe ser considerada el material preferente.

II.4.e. Construcción

A partir de 1967, con la realización de la presa "De Piedras", en España, las losas de concreto se construyen en franjas verticales a partir de la zona más baja. Estas franjas tienen un ancho entre 12 y 18 m (15 m es una medida usual).

Se piensa que la construcción de la losa debe empezarse cuando todo el enrocamiento ha sido colocado, pero en grandes presas la construcción de la losa en etapas puede ser económicamente justificable y conveniente. En la presa Areia se construyó primero la

zona baja en el paramento de aguas arriba con el objeto de proteger el enrocamiento contra una posible avenida; la pantalla fué colocada en etapas y ha tenido un buen comportamiento. Lo anterior muestra que la losa puede colocarse en la secuencia que convenga a su constructor; como resultado se tiene un programa más corto y económico.

II.5. Futuro de las grandes presas de enrocamiento con pantalla de concreto

El futuro diseño de grandes presas de enrocamiento compactado con losa de concreto, dirige su atención al movimiento de la losa bajo la carga de llenado.

Debido a que los movimientos en grandes presas son directamente proporcionales al cuadrado de la altura e inversamente proporcionales al módulo de compresibilidad, de aquí puede predecirse el movimiento que tendrá la losa. En presas con alturas mayores que 160 m, el sitio requerido para su construcción debe tener una roca de cimentación no erosionable que admita tratamientos especiales, si se requiere, y contar con un alto módulo de compresibilidad.

La experiencia ganada en grandes presas de enrocamiento con corazón impermeable, combinada con los conocimientos y experiencia adquirida sobre los movimientos de la losa, sientan la bases para el futuro diseño de presas de enrocamiento con pantalla de concreto.

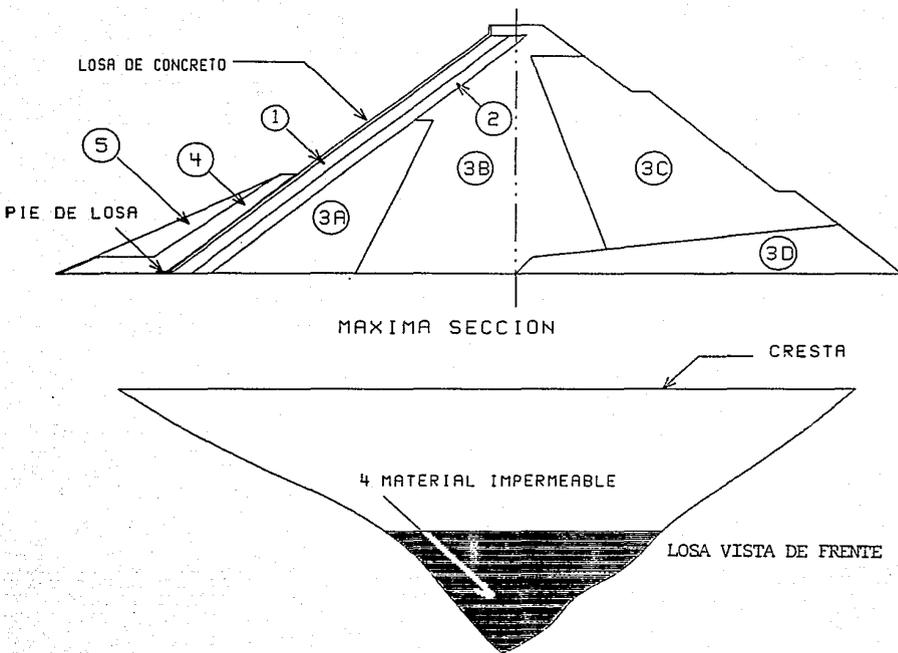
TABLA II.1. LISTA PARCIAL DE PRESAS DE ENROCAMIENTO CON PANTALLA DE CONCRETO

NOMBRE	ALTURA (m)	LOCALIZACION	AÑO DE TERMINACION	TALUD AGUAS ARRIBA	TALUD AGUAS ABAJO	AREA DE LA LOSA (m ²)
Morena	54	California	1895	0.6	1.3	
Strawberry	50	California	1916	1.2	1.3	
Dix River	84	Kentocky	1925	1.2	1.4	
Salt Springs	100	California	1931	1.1	1.4	10900
Cogwell	85	California	1934	1.35	1.6	
Malpaso	78	Perú	1936	0.5	1.33	
Cogoti	75	Chile	1939	1.6	1.8	
lower Bear 1	71	California	1952	1.3	1.4	5800
Lower Bear 2	50	California	1952	1.0	1.4	2800
Paradela	112	Portugal	1955	1.3	1.3	55000
La Joie	87	Canada	1955	1.1	1.5	
Pinzanes	67	México	1956	1.2	1.3	
Courtright	98	California	1958	1.0	1.3	6700
Wishon	82	California	1958	1.0	1.4	20000
San Idelfonso	62	México	1959	1.4	1.4	
New Exchequer	150	California	1966	1.4	1.4	
Cabin Creek	76	Colorado	1967	1.3	1.3	
Fades	70	Francia	1967	1.3	1.3	16500
Rama	110	Yugoslavia	1967	1.3	1.3	
Kangaroo Creek	59	Australia	1968	1.3	1.4	8000
Pindari	45	Australia	1969	1.3	1.3	16400
Cethana	110	Australia	1971	1.3	1.3	23700
Alto Anchincaya	140	Colombia	1974	1.4	1.4	22300
Le Rouchain	60	Francia	1976	1.4	1.4	16000
Little Para	54	Australia	1977	1.3	1.4	10200
Golillas	130	Colombia	1978	1.6	1.6	14300
Outardes 2	55	Canada	1978	1.6	1.6	14300
Winneke	85	Australia	1979	1.5	2.2	82500
Bailey, R.D.	95	USA	1979	2.0	2.0	65000
Areia	160	Brasil	1980	1.4	1.4	139000
Neveri	115	Venezuela	1981	1.4	1.5	53000

NOMBRE	ALTURA (m)	LOCALIZACION	AÑO DE TERMINACION	TALUD AGUAS ARRIBA	TALUD AGUAS ABAJO	AREA DE LA LOSA (m ²)
Mackintosh	75	Australia	1981	1.3	1.3	27100
Mangrove Creek	80	Australia	1981	1.5	1.6	29100
Shiroro	130	Nigeria	1982	1.3	1.3	150000
Yacambu	150	Venezuela	1982	1.5	1.5	13000
Murchison	89	Australia	1982	1.3	1.3	16200
Awonga	47	Australia	1982	1.3	1.3	
Fortuna	65	Panama	1982	1.3	1.4	
Glennies Creek	67	Australia	1983	1.3	1.3	50000
Salvajina	145	Colombia	1983	1.5	1.5	
Bejar	71	España	1984	1.3	1.3	19140
Terror Lake	58	Alaska	1985	1.5	1.4	
Alsasua	50	España	1985	1.3	1.4	13850
Kotmale	97	Sri Lanka	1985	1.4	1.45	60000
Lower Pieman	122	Australia	1986	1.3	1.5	35000
Iruru	50	Perú	1986			
Ita	123	Brasil	BD	1.3	1.3	110000
Cirlita	85	Indonesia	BD	1.3	1.4	
Segredo	145	Brasil	BD	1.3	1.3	21000
Acena	65	España	BD	1.3	1.3	
Kaliwa	100	Filipinas	BD			
Machandinho	124	Brasil	BD	1.3	1.3	
La miel	180	Colombia	BD	1.5	1.5	
Musa	150	Nueva Guinea	P	1.5	1.5	
Cuesta Blanca	80	Argentina	P	1.4	1.5	
Aguamilpa	180	México	BD	1.5	1.5	

P=Propuesta

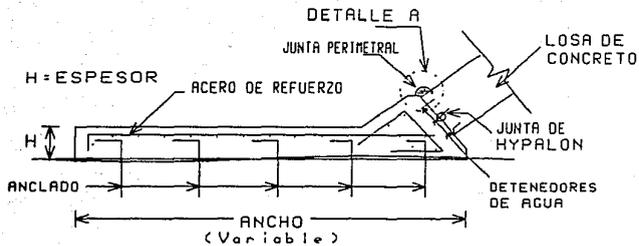
BD=Bajo Diseño



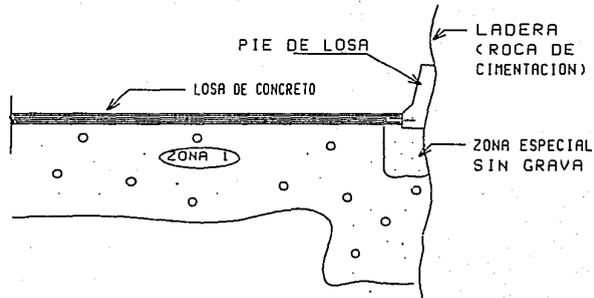
MATERIALES :

- 1 MATERIAL TRITURADO (MENOR DE 3")
- 2 MATERIAL TRITURADO (ENTRE 3 Y 6")
- 3 ENROCAMIENTO (A, B Y C, COMPACTADOS CON DIFERENTE ESPECIFICACION D, ENR. A VOLTEO)
- 4 MAT. IMPERMEABLE
- 5 VARIABLE

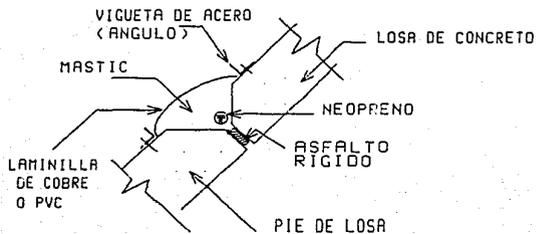
FIG. II.1 SECCION CONCEPTUAL DE UNA PRESA DE ENROCAMIENTO CON PANTALLA DE CONCRETO



a) PIE DE LOSA
SOBRE UNA CIMENTACION RIGIDA



b) SECCION HORIZONTAL MOSTRANDO
LA DISPOSICION DEL PIE DE LOSA



c) DETALLE "A"

FIG. II.2 DETALLES DEL PIE DE LOSA

III. INTERACCION ENTRE LOSAS DE CONCRETO Y SUELO

En una investigación científica es importante la etapa de observación, ya que esta nos ayuda a definir cuales son los parámetros que intervienen en nuestro problema. Definir estos parámetros será de utilidad en los análisis posteriores que llevaremos a cabo.

La interacción entre losas de concreto puede ser estudiada a partir de las observaciones realizadas en pavimentos rígidos, en losas y cajones de cimentación y en la propia losa de concreto de las presas de enrocamiento con pantalla.

III.1. FACTORES QUE INFLUYEN EN EL COMPORTAMIENTO DE LAS LOSAS

La tabla III.1 muestra algunos de los factores que afectan el comportamiento de las losas de concreto en diferentes estructuras. Estos factores se ubican en cuatro grupos: 1.-Materiales de apoyo; 2.-Losa de concreto; 3.-Cargas, y ; 4.-Factores ambientales.

III.1.1. PAVIMENTOS

Se describen a continuación algunos de los factores que influyen en el comportamiento de las losas de concreto de pavimentos rígidos.

III.1.1.1. Características de los materiales de apoyo

Las características de los materiales de apoyo como son :tipo , módulo de elasticidad, relación de Poisson, relación de amortiguamiento, etcetera, influyen significativamente en el comportamiento de un pavimento y en el de cualquier otra estructura.

III.1.1.1.1. tipo de materiales

Usualmente los materiales de apoyo de la losa de un pavimento son: La base, la sub-base (generalmente material bien graduado producto de la trituración de roca, lo mismo que la base), la capa subrasante , las terracerías y el subsuelo.

Los materiales de la terracería y la capa subrasante juegan un papel fundamental en el comportamiento de un pavimento rígido. Se ha observado que los suelos orgánicos y aquellos cuyo rebote elástico es importante proporcionan un mal comportamiento a las terracerías del pavimento.

Los materiales del subsuelo son los que existen en la región en donde se construye la obra. De acuerdo a su comportamiento ante cierto tipo de cargas estos pueden ser friccionantes o cohesivos.

Las características no lineales carga-deformación de los materiales del pavimento, capa subrasante y subsuelo están relacionadas con la distribución física no uniforme de los mismos. Los materiales del pavimento usualmente se deforman mucho menos que los de la capa subrasante y el subsuelo. La deformación de la capa subrasante y el subsuelo llega a ser un factor significativo en la disposición de la deformación de la superficie del pavimento.

Los movimientos del terreno de cimentación o de espesores importantes de material de terracería compresible conducen al agrietamiento de las losas cuando los asentamientos diferenciales son importantes en trechos cortos y ocurren con rapidez

III.1.1.1.2. Módulo de elasticidad

En teoría de la elasticidad se define el módulo de elasticidad como la pendiente de la tangente en un punto a la curva esfuerzos-deformaciones. Éste depende de muchos factores como son el tipo de material, temperatura, velocidad de aplicación de las cargas, etc.

El módulo de elasticidad se encuentra directamente relacionado con las características esfuerzo-deformación de un determinado material. Un bajo módulo de elasticidad en suelos quiere decir alta compresibilidad con bajos niveles de esfuerzo, lo que significa que el material es muy deformable.

III.1.1.1.3. Relación de Poisson

Al someter un cuerpo sólido a un estado de esfuerzos uniaxial, éste experimentará una deformación en la dirección del esfuerzo normal aplicado. Sin embargo se observa también que el cuerpo se contrae o expande (deformación en el sentido transversal) dependiendo de si el esfuerzo normal aplicado fué de tensión o de compresión. La relación entre la deformación unitaria transversal y la deformación unitaria longitudinal, se conoce como relación de Poisson.

La relación de Poisson también se relaciona con las características esfuerzo-deformación de los materiales. Bajos valores de esta relación significan un material poco rígido.

III.1.1.1.4. Relación de amortiguamiento

El impacto que provocan los vehículos al circular por un pavimento genera sobrecargas en estas estructuras. Estas cargas provocan vibraciones en la losa que pueden llegar a ser de consideración e influir en el comportamiento del pavimento.

Si se aplica a un cuerpo soportado elásticamente un impulso de corta duración, vibrará con su frecuencia natural, la cual depende de su masa y de sus propiedades elásticas. Cuando se pierde energía en el proceso se dice que la vibración se ha amortiguado y la frecuencia natural será algo menor.

La amortiguación se expresa en términos de la razón de amortiguamiento C , la cual es una indicación de la cantidad de energía vibratoria perdida en cada ciclo: $C = 0$ indica que no hay pérdida, $C=1$ indica que toda la energía del impulso se ha disipado en un ciclo de vibración.

Algunos ensayos realizados en masas de suelo de 1 a 3 toneladas métricas y con losas cuadradas de 0.6 a 0.9 m de lado, indican frecuencias naturales de 700 vibraciones por minuto para la turba, a 1800 vibraciones por minuto para la arena muy compacta.

III.1.1.1.5. Permeabilidad

Los materiales de la base deben drenar el agua que se introduce a través de la carpeta o por los acotamientos del pavimento, e impedir la ascensión capilar con el objeto de disminuir los posibles efectos (disminución de resistencia, generación de presiones de poro, etc.) de la presencia de excesos de humedad en los materiales de apoyo.

III.1.1.1.6. Geología

En pavimentos es importante tomar en cuenta la geología de la región en donde se construirá la obra ya que así podrán tratarse los problemas relacionados con posibles fallas geológicas.

Las fallas geológicas pueden dar como resultado un mal comportamiento al pavimento en su funcionalidad e incluso pueden provocar fuertes daños en él.

III.1.1.1.7. Estratificación

Si los materiales del suelo natural están estratificados debe tomarse en cuenta la naturaleza de los materiales que constituyen las capas y sus espesores. Como ejemplo se tiene el caso de una aeropista que se localizó sin tomar en cuenta las características del subsuelo, sobre un terreno irregular tanto en estratigrafía como en propiedades mecánicas, el cual contenía espesores muy importantes de arcilla de alta compresibilidad, al poco tiempo la pista tubo que ser inutilizada pues presentó deformaciones muy importantes.

III.1.1.2. Características de la losa de concreto

En los párrafos siguientes se describen las características de la losa que influyen en el comportamiento de un pavimento.

III.1.1.2.1. Dimensiones

La geometría de la losa es un importante factor que influye en el comportamiento de todo el sistema.

III.1.1.2.1a. espesor

El espesor de un pavimento se relaciona directamente con la rigidez del mismo, lo cual se ve reflejado en la forma en que se asienta la losa de concreto.

III.1.1.2.1b. ancho

El tamaño de las losas de un pavimento generalmente suelen ser cuadradas con 3 a 5 m de lado. El concreto preesforzado permite la utilización de superficies continuas de área muy superior.

III.1.1.2.1c. largo

Las losas en pavimentos normalmente han sido cuadradas por lo que no se dispone de muchos datos sobre la influencia de este factor, sin embargo es de esperarse que una losa alargada presente un comportamiento menos adecuado que las de tipo común.

III.1.1.2.2. Calidad del concreto

Los concretos que se utilizan en la losa suelen ser de resistencia relativamente alta, generalmente comprendida entre 200 y 400 kg/cm².

El mal comportamiento de una losa puede deberse a una mala calidad del concreto. Las fallas pueden deberse a: utilización de materiales y agregados no adecuados, desintegración por reacción de los agregados con los alcalis del cemento, problemas derivados del uso de sales para proteger el concreto de los fríos extremos en zonas de clima severo, etc.

Uno de los factores que causan la desintegración del concreto es el fabricarlo con una mezcla húmeda y el uso de agregados con excesivo contenido de finos.

III.1.1.2.3. Módulo de elasticidad

En el concreto el módulo de elasticidad varía de 10 000 y 14 000 Kg/cm² por lo que puede decirse que su compresibilidad es baja en

relación a los niveles de esfuerzo a que va estar sometida la losa, y en comparación con la compresibilidad de los materiales de apoyo.

III.1.1.2.4. Armado

El armado en los pavimentos rígidos se especifica para prevenir esfuerzos por cambios de temperatura.

III.1.1.2.5. Contacto suelo-losa

Una de las causas de falla en los pavimentos rígidos lo constituye un mal comportamiento estructural provocado por falta de apoyo adecuado. La mala colocación de la losa y el fenómeno de bombeo conducen a la ruptura de esquinas y bordes.

III.1.3. Características de las cargas

III.1.1.3.1. Distribución

Las cargas aplicadas a un pavimento se deben a los vehículos que circulan en él.

Se ha observado que la distribución no uniforme del tráfico tiene como resultado un daño acumulativo y disperejo en la superficie del pavimento que conduce a asentamientos diferenciales.

III.1.1.3.2. Ordenes de magnitud

La magnitud de las cargas que se aplican a un pavimento es bastante importante: llega a 8 toneladas por eje, en camiones, hasta 150 toneladas que pesa un avión DC-8. Las presiones de inflado de las llantas son del orden de 6 kg/cm^2 en los camiones y 13 a 14 kg/cm^2 en los aviones más pesados.

A lo largo del eje longitudinal, en el movimiento de una rueda, es imposible establecer el contorno de deformación del pavimento, sin embargo en la dirección transversal al tráfico, la deflexión del pavimento está gobernada por el equilibrio básico de las cargas externas y el equilibrio interno esfuerzos-deformaciones del pavimento.

III.1.1.3.3. Velocidad de aplicación

La velocidad de aplicación de las cargas ejerce influencia sobre el pavimento. En general las cargas estáticas o lentas ejercen peores efectos que las más rápidas. En las rampas de las carreteras suelen verse más destruidos los tramos de subida que los de bajada.

La repetición de una carga provoca un pequeño aumento en la deformación permanente del pavimento. El incremento progresivo de las deformaciones permanentes, al repetirse las cargas, induce fatiga de los materiales.

III.1.1.4. Factores ambientales

Los pavimentos estan expuestos siempre a las condiciones ambientales, y se ha observado que estas pueden destruirlos aun sin la aplicaci3n de cargas.

Los mecanismos generales por los cuales el ambiente influye en el comportamiento del pavimento son (1) Efectos en las propiedades ingenieriles de los materiales, tales como resistencia y deformaci3n, (2) Efectos en la integridad de los materiales, tales como durabilidad y acci3n fisico-quimica, y (3) Efecto en el cambio volumetrico y los resultados del equilibrio de esfuerzos en el sistema del pavimento.

III.1.1.4.1. Temperatura

Todos los materiales del pavimento se expanden o contraen con las fluctuaciones de temperatura. Por eso, las losas de los pavimentos desarrollan grietas en el invierno y se expanden durante los meses de verano.

La conductividad t3rmica de un material se define como la cantidad de calor que fluye normal a una superficie de area unitaria en un tiempo dado bajo un gradiente t3rmico unitario.

Para prop3sitos pr3cticos los factores que afectan a un pavimento pueden dividirse en factores extrinsecos e intrinsecos. Los factores extrinsecos son usualmente las condiciones ambientales, tales como temperatura del aire, radiaci3n solar, viento, precipitaciones, evaporaci3n y condensaci3n. Evidentemente, la localizaci3n geogr3fica tiene una fuerte influencia sobre el clima de la regi3n.

Los factores intrinsecos generalmente se refieren a la emisi3n de radiaci3n (a traves de longitudes de onda) del suelo y a propiedades t3rmicas de los materiales, los cuales son la conductividad t3rmica, capacidad calorifica, y calor latente de fusi3n de los materiales del pavimento y del subsuelo. Aun en un ambiente muy dinámico los factores intrinsecos son relativamente constantes comparados con la fluctuaci3n de los factores extrinsecos o externos.

La temperatura ambiente es el factor m3s importante en el equilibrio t3rmico del pavimento. La figura III.1a. muestra los cambios de temperatura sufridos por la losa de un pavimento. Puede verse que la radiaci3n solar y la temperatura ambiente tienen un efecto significativo en la temperatura del pavimento. El pico de la temperatura del pavimento se presenta una hora despues que el de la radiaci3n solar. Si bien la temperatura del pavimento asume un fluctuaci3n ciclica, la amplitud de la fluctuaci3n decrece con la profundidad. La fig. III.1b. muestra un perfil de temperatura. La radiaci3n del subsuelo mantiene la temperatura del pavimento durante la noche.

Como todos los materiales son sensibles a los cambios volumetricos debido a las fluctuaciones de temperatura, los efectos de

la variación térmica se reflejan en contracciones y expansiones en el pavimento. Debido a que la variación de temperatura no es uniforme el pavimento experimenta un movimiento no lineal. La conductividad térmica y la capacidad calorífica de los materiales del pavimento afectan su porcentaje de flujo de calor, resultando gradientes térmicos a través del eje vertical del pavimento. Por lo tanto, la magnitud de la expansión térmica no es constante; la orilla del pavimento tiende a curvarse hacia arriba durante las noches frías, y hacia abajo cuando la temperatura del aire es mayor que la del suelo.

Por tanto, los esfuerzos inducidos por temperatura son tanto esfuerzos flexionantes como esfuerzos axiales.

Cuando los esfuerzos flexionantes exceden la resistencia de la carpeta, se desarrollan grietas, aun sin estar el pavimento sujeto a cargas. Algunos pavimentos de concreto de aeropuertos experimentan finas grietas fuera del área de operación normal del avión.

Para una carpeta de concreto dada, los esfuerzos inducidos por cambios de temperatura se incrementan cuando se incrementa el espesor del pavimento. La experiencia indica que un pavimento de concreto con un espesor de 16 pulgadas puede presentar una superficie de grietas mayor que un pavimento con un espesor menor, por ejemplo de 12 pulgadas.

La fig. III.2a. muestra los resultados de pruebas realizadas para medir los efectos de la temperatura en la resistencia de un concreto hecho con cemento portlan. En el rango de 40 a 100°F, la resistencia relativa (con respecto a la de 70°F) decrece de 1.25 a 0.80. En altas temperaturas la resistencia del concreto decrece aun más. En la fig. III.2b. se muestra el efecto de la temperatura en la resistencia de un suelo arcilloso. Los cambios en la resistencia siguen la misma tendencia que en el concreto.

III.1.1.4.2. Humedad

La humedad es una variable fundamental en todos los problemas de estabilidad de suelos.

Las condiciones ambientales en las cuales puede ocurrir un cambio de humedad en el pavimento (ver fig. III.3.) son:

- 1.-Filtración de agua hacia el pavimento de terrenos vecinos más elevados.
- 2.-Ascenso y descenso del nivel de aguas freáticas.
- 3.-Filtración de agua a través de la superficie del pavimento.
- 4.-Transferencia de humedad con terrenos adyacentes.
- 5.-Transferencia de humedad con el subsuelo.
- 6.-Transferencia de humedad por vaporización de agua del subsuelo.

En general la presencia de humedad tiene un efecto negativo en el comportamiento del pavimento. Para un pavimento, los efectos de temperatura y humedad se consideran aun más serios que la carga de los

vehículos.

En climas con temperaturas abajo del punto de congelamiento, la humedad en el pavimento tiene una influencia decisiva en su comportamiento.

En muchas carreteras y aeropuertos los contenidos de humedad en las orillas del pavimento se encuentran inestables y son generalmente mayores que en las zonas interiores.

III.1.1.4.2a. Acción de las heladas

Uno de los aspectos relacionados con la temperatura y la humedad lo constituyen las heladas.

Los fenómenos de deshielo producen un descenso drástico en la resistencia de las capas de los pavimentos afectados por congelación.

La fig. III.4 muestra la variación típica anual de las deflexiones en un pavimento. El comportamiento del pavimento puede dividirse en cuatro grupos.

1.-Durante los meses de diciembre, enero y febrero, el suelo se encuentra en el periodo de máximas profundidades de congelamiento por las heladas. La humedad actúa como un cementante del suelo, proporcionando una alta rigidez al pavimento y provocando que los asentamientos en él sean pequeños. La capacidad de carga y el comportamiento del pavimento resultan mejores.

2.-A finales de febrero y principios de abril el clima cambia rápidamente de frío a caliente y a frío otra vez. La superficie del suelo sufre periodos de deshielo y congelamiento, manteniéndose la profundidad de la capa congelada. El vapor atrapado en el suelo asciende y desciende. La excesiva presencia de humedad en el suelo durante el deshielo reduce grandemente la capacidad de carga del pavimento, lo anterior conduce, consecuentemente, a un incremento significativo en las deflexiones. Si el vapor queda atrapado en el fondo del subsuelo, en un periodo breve de deshielo y congelamiento, esto puede provocar la elevación del pavimento. En este periodo se presenta la máxima destrucción del pavimento, provocado por grietas, desintegración, etc.

3.-Durante el mes de abril, la temperatura de la noche es predominantemente mayor que la del punto de congelamiento. El suelo se descongela completamente. La migración de vapor cesa. La alta humedad del pavimento tiende a descender y el pavimento recupera su estado inicial de resistencia.

4.-De los meses de mayo a noviembre el pavimento funciona de manera normal y los efectos temperatura-humedad no son significativos.

III.1.1.4.3. Acción de agentes químicos.

Los pavimentos están expuestos a la corrosión química producto del medio ambiente. Así también sufren las consecuencias del petróleo

y aceites que caen de los vehículos de transporte.

III.1.2. CIMENTACIONES

III.1.2.1. Características de los materiales de apoyo

Se describirán a continuación las características de los materiales de apoyo que influyen en el comportamiento de losas de cimentación.

III.1.2.1.1. Tipo de materiales

El terreno de apoyo influye de manera importante en el comportamiento de las cimentaciones. Un suelo puede estar constituido por materiales tales como arenas, arcillas, limos, loes, los cuales tienen un comportamiento diferente con respecto a los demás tipos de suelo. En una arena, por ejemplo, los asentamientos más importantes son los debidos al asentamiento elástico; no así en una arcilla en donde el fenómeno de la consolidación es el aspecto más relevante en cuanto a asentamientos se refiere. Otro aspecto en donde influye el tipo de suelo de apoyo es en la forma de deformarse la estructura ante las cargas impuestas.

El comportamiento de una cimentación superficial depende mucho del tipo de terreno sobre el que descansa. La tabla III.2. enumera las diferencias más importantes entre el comportamiento de la arena y el de la arcilla como materiales de cimentación. El limo tiene un comportamiento intermedio entre la arena y la arcilla.

La figura III.5a muestra la distribución de asentamientos bajo una carga uniforme en un material con comportamiento friccionante, como la arena o la grava. La figura III.5b muestra los asentamientos producidos al inicio por una carga uniforme en un material con comportamiento cohesivo como la arcilla saturada.

III.1.2.1.2. Módulo de elasticidad

En arena el módulo de elasticidad cambia con la profundidad con la presión de confinamiento y con la deformación. Además crece en algunas zonas centrales de las áreas cargadas.

III.1.2.1.3. Relación de Poisson

En suelos este factor anda entre 0.25 en arena compacta y 0.35 a 0.43 en arcillas muy compresibles.

En las arenas la relación de Poisson varía con la compacidad del suelo y con la magnitud y tipo de esfuerzos aplicados.

III.1.2.1.4. Relación de amortiguamiento

Las cimentaciones pueden estar sometidas a vibraciones por diferentes causas naturales y artificiales: terremotos, viento, corrientes de agua de gran velocidad en estructuras marinas, etc.,

producen vibraciones transitorias como casi-continuas , de frecuencias variables; las máquinas de movimiento alternativo, compresores bombas, etc, son fuentes importantes de vibraciones continuas y ocasionan en general los problemas más serios.

Las vibraciones del suelo tienen varios efectos importantes: Si algun sistema suelo-cimentación pudiera entrar en resonancia, se podrían producir grandes daños; La vibración puede producir una reducción de la relación de vacíos en suelos no cohesivos, lo cual tendrá como consecuencia un serio asentamiento; La vibración en suelos no cohesivos sueltos y saturados puede ser causa de que se produzca en el suelo el efecto de licuación, la pérdida de resistencia y la falla.

El sismo de la ciudad de México ocurrido el 19 de septiembre de 1985 mostró los efectos en la zona III la cual experimentó una fuerte amplificación dinámica (ref. 2).

La fig. III.6. muestra la representación simplificada de las componentes de la vibración de un sistema suelo-estructura. La frecuencia natural no es una propiedad que dependa unicamente del suelo, sino que depende tambien del peso y tamaño de la cimentación y de la carga que soporta.

III.1.2.1.5. Permeabilidad

Debido a la baja permeabilidad de algunos suelos (arcillas, limos, etc.), su comportamiento ante cargas queda definido en el tiempo.

Para ilustrar la influencia que tiene la permeabilidad de los materiales de apoyo en el comportamiento de las estructuras, se considera el caso de un suelo blando apoyado en una capa resistente y sometido a una sobrecarga (ver fig. III.7). Los desplazamientos en el sistema se presentan en dos fases: Primero el desplazamiento durante la aplicación de la carga, y despues, el desplazamiento al consolidarse el estrato bajo la carga superficial constante. Durante la aplicación de las cargas los puntos bajo la carga se mueven hacia abajo, pero la parte de la superficie que no está cargada se desplaza hacia arriba; los puntos del interior del terreno se mueven hacia afuera. Durante la consolidación todos los puntos de la superficie se desplazan hacia abajo. De esta forma el asentamiento en la superficie de la zona cargada aumenta, y la superficie exterior a la zona cargada finaliza con un desplazamiento neto hacia abajo.

III.1.2.1.6. Geología

En cimentaciones este aspecto puede interesar para determinar aproximadamente los tipos de suelo que se encuentran en un determinado lugar.

III.1.2.1.7. Estratificación

La estratificación de las capas de apoyo influye en la magnitud de los asentamientos sufridos por las estructuras dependiendo de espesores y tipos de material. Por ejemplo, en las arcillas finamente estratificadas con finos estratos de arena o limo alternados, la presencia de estos últimos en el suelo compresible actúa como refuerzo del conjunto que restringe la deformación horizontal de la arcilla.

Quando existe estratificación en el subsuelo los materiales de que están constituidos las capas adquieren una gran importancia en el comportamiento de la losa de cimentación.

Si las capas de los estratos están constituidos por combinaciones de materiales con comportamiento cohesivo y con comportamiento friccionante, el comportamiento de la losa se ve influenciada por los espesores de cada estrato. La ubicación de los estratos dentro de la masa de suelo es importante; cabe esperar un mayor asentamiento cuando los estratos de suelo compresible son superficiales y tienen un gran espesor, que si esos estratos se localizan a grandes profundidades o tienen espesores poco importantes.

III.1.2.2. Características de la losa de concreto

A continuación se detallan las características de las losas de cimentación que tienen influencia en su comportamiento.

III.1.2.2.1. Dimensiones

En este caso también las características geométricas de la losa influye en el comportamiento de las cimentaciones.

III.1.2.2.1a. Espesor

La rigidez de la cimentación influye en las presiones de contacto suelo-losa y, por ende, en la forma de los desplazamientos de la estructura.

La fig. III.8 muestra la distribución de presiones en cimentaciones, sobre una placa, la cual se ve alterada por la rigidez de la losa.

Si la cimentación es flexible la losa se deformará según la figura III.8d, pero si es rígida esta tendrá asentamientos diferenciales menores (ver fig. III.8a) dependiendo del tipo de suelo de apoyo.

III.1.2.2.1b. Ancho

En el caso de las cimentaciones el ancho de las losas puede llegar a ser mayor que las losas normales en pavimentos rígidos, debido a que las primeras estarán sometidas a esfuerzos mayores.

III.1.2.2.1c. Largo

Se ha observado que las losas muy alargadas presentan mayores asentamientos diferenciales que las de sección más regular.

III.1.2.2.2. Calidad del concreto

En las cimentaciones la calidad del concreto debe cuidarse ya que de ella dependen las características de resistencia y deformabilidad que alcance la cimentación.

III.1.2.2.3. Módulo de elasticidad

En el concreto de las losas de cimentación el orden de magnitud del módulo de elasticidad es mucho mayor que el del terreno de cimentación. Sin embargo el comportamiento de la losa en cuanto a deformaciones dependerá también de este factor.

III.1.2.2.4. Armado

La experiencia demuestra que el armado influye en las características del comportamiento del sistema losa-suelo, al proporcionar a la losa de concreto mayor rigidez y resistencia a la flexión. En el caso de las cimentaciones, el acero se diseña para dar a la losa las características de resistencia requeridas para soportar las cargas impuestas por la estructura.

Son raros los casos de ruptura en las losas de cimentaciones, debido a que generalmente la resistencia que proporciona el acero de refuerzo a la losa es suficientemente grande como para que se presenten este tipo de problemas, aun cuando el suelo de apoyo haya fallado por distintas causas.

III.1.2.2.5. Contacto suelo-losa

Cuando se tiene un problema de capacidad de carga en suelos, la solución puede ser dar mayor área de contacto entre la cimentación y el suelo con el fin de distribuir mejor las cargas, es aquí donde adquiere importancia el aspecto del contacto entre la losa y el suelo.

III.1.2.3. Características de las cargas

III.1.2.3.1. Distribución

Las cargas se distribuyen a las losas de cimentación por medio de columnas y trabes, lo cual tiene gran influencia en el comportamiento de la estructura.

III.1.2.3.2. Ordenes de magnitud

La magnitud de las cargas a que están sometidas las cimentaciones depende del peso de la estructura que soportan, y que llega a la losa

a través de las columnas. Dependiendo de su magnitud será el comportamiento de la cimentación.

III.1.2.3.3. Velocidad de aplicación

El comportamiento en general de una estructura y del suelo que la soporta depende mucho de la velocidad de aplicación de las cargas. Un suelo, por ejemplo, puede comportarse en forma distinta con cargas estáticas que con cargas dinámicas si se permite que en el último caso se generen presiones de poro.

III.1.2.4. Factores ambientales.

En el caso de cimentaciones los factores ambientales como la humedad y la acción química también tienen influencia en el comportamiento de la losa.

III.1.2.4.1. Temperatura

En este caso la temperatura adquiere menos importancia que en el de pavimentos, debido a que generalmente las losas se localizan a una profundidad tal que las fluctuaciones de temperatura son menores, ya que se excava para el caso de cimentaciones compensadas o parcialmente compensadas.

III.1.2.4.2. Humedad

El ascenso en el nivel freático en un terreno reduce los esfuerzos efectivos a una profundidad dada, lo cual da lugar a una menor capacidad de carga y a un mayor asentamiento.

Si el material en donde se apoya la cimentación está constituido por materiales finos expansivos la contracción de las arcillas por secado también constituye otro aspecto en donde la humedad en los materiales influye en su comportamiento.

III.1.2.4.3. Acción de agentes químicos

La acción química y la degradación de materia orgánica son causas, en algunas ocasiones, de fallas en las cimentaciones. Por eso este aspecto puede llegar a ser también importante en el comportamiento de la losa.

III.1.3. P R E S A S

III.1.3.1. Características de los materiales de apoyo

Se detallarán ahora las características de los materiales de apoyo que influyen en el comportamiento de las losas de presas de enrocamiento con pantalla de concreto.

III.1.3.1.1. Tipo de materiales

Las capas de los materiales de apoyo de la losa en una presa de enrocamiento con pantalla de concreto son comunmente zonas compactadas de fragmentos pequeños de roca. La compactación de estos materiales ha permitido reducir los espesores de la losa que se tenían para enrocamiento ha volteo. La zona de respaldo de la losa de una presa de enrocamiento con pantalla de concreto, comunmente ha sido considerada compuesta de materiales de roca cribada y triturada, con una graduación con tamaños máximos de 3 a 6". Esta zona es relativamente permeable ya que no hay suficiente cantidad de partículas finas menores que la malla número 4 para llenar los vacíos entre las grandes partículas.

La mayoría de las presas con losa de concreto realizadas antes de 1950 fueron construidas mediante enrocamiento colocado a volteo y con una zona delgada de grandes rocas colocadas con grúa en el paramento de aguas arriba, justamente bajo la losa de concreto. Esta práctica cambió en el periodo de 1955-1960 cuando el respaldo empezó a ser colocado en estratos compactados y el uso de rocas de gran tamaño fué abandonado a favor del uso de rocas pequeñas. El propósito es proveer un buen soporte de tal manera que la carga de agua actuando sobre la losa sea uniformemente distribuida, eliminando la posibilidad de que una roca de gran tamaño bajo la losa provoque una carga altamente concentrada.

III.1.3.1.2. Módulo de elasticidad

En el caso de presas de enrocamiento con pantalla de concreto es de esperarse que se requieran altos módulos de elasticidad en los materiales de la zona de respaldo para evitar deformaciones excesivas en la losa que puedan provocar su ruptura con las consecuentes filtraciones.

III.1.3.1.3. Relación de Poisson

La relación de Poisson en los materiales de apoyo fluctúa alrededor del valor 0.3, dependiendo del tipo de material y el grado de compactación que se aplique.

También en este caso son deseables valores altos de esta relación con el objeto de obtener un material poco compresible.

III.1.3.1.4. Relación de amortiguamiento

Las olas generadas por el agua en el vaso de la presa provocan pequeñas vibraciones en la masa del enrocamiento. Tomando en cuenta este hecho puede llegar a ser importante el estudio del amortiguamiento en los materiales de la presa.

III.1.3.1.5. Permeabilidad

Cuando el respaldo de la losa de concreto es muy permeable, la cantidad de filtración a través de la ruptura de una junta o de una grieta en la losa, está limitada por las dimensiones de la grieta y por la fricción hidráulica que actúa al paso de la filtración; el control se logra mediante la trayectoria que recorre la filtración dentro de la losa de concreto. Cuando el respaldo es semipermeable, la cantidad de infiltración que puede pasar a través de las grietas en el concreto, está limitada por la permeabilidad del respaldo bajo la losa, ya que la resistencia al flujo a través de este es considerablemente mayor que la carga de presión perdida en el paso a través de la grieta.

En las presas construidas durante los años 60's comúnmente el material de respaldo era horneado para eliminar todas las partículas menores de 2" la razón principal para eliminar estos tamaños de partículas finas y rocas pequeñas era eliminar la posibilidad de que las fugas a través de las juntas en la losa de concreto pudieran transportarlas fuera de la zona del respaldo y depositarlas en los vacíos del enrocamiento principal, creando una indeseable pérdida de soporte bajo la losa de concreto causando la ruptura.

En la presa Cethana en Australia, se decidió usar el mismo principio para el respaldo pero usando rocas sin procesamiento para eliminar partículas de suelo y rocas pequeñas. Aquí los ingenieros no consideraron que existiera una real posibilidad de que las partículas finas fueran lavadas por las fugas en la losa de concreto y permitieran el subsecuente asentamiento de la losa. Además consideraron que era técnicamente ventajoso dejar las rocas pequeñas y finos en el material de respaldo ya que sería conveniente que el material fuera menos permeable, tal que menos agua pudiera atravesar la presa en un evento de fuga a través de la losa de concreto. La presa Cethana fué provista de más instrumentación que la usual, lo cual comprobó que su comportamiento fué excelente. Sin embargo, al construirse la siguiente gran presa de este tipo, Alto Anchicaya, a la que se dio la misma especificación en la zona de respaldo, se desarrollaron grandes filtraciones en el perímetro de las juntas, con un máximo de 1800 lts/s en el primer llenado. Esta experiencia mostró que la zona de respaldo no fué muy efectiva en esta presa como una barrera secundaria para controlar las fugas a través de la losa de concreto.

III.1.3.1.6. Geología

La geología de la región es importante ya de de ella dependerá mucho el comportamiento de la masa del terraplen de la presa, y por ende el de la losa.

III.1.3.1.7. Estratificación

Las distintas capas del enrocamiento constituyen una verdadera estratificación de los materiales, sin embargo las más importantes son

las que quedan bajo el paramento de aguas arriba debido a que, como se indicó en el capítulo anterior, de su comportamiento dependen los movimientos que tendrá la losa al ser aplicada la carga de agua.

Los materiales bajo la losa de concreto son los que constituyen la zona de respaldo y el propio enrocamiento, cuyo comportamiento varía según la zona, por lo cual debe tenerse en cuenta este hecho.

Debido a que el comportamiento de los materiales en la masa del enrocamiento varía según la zona es de esperarse que el comportamiento general de la estructura dependa de los espesores de cada zona.

III.1.3.2. Características de la losa de concreto

A continuación se detallarán las características de la pantalla de concreto que influyen en su comportamiento.

III.1.3.2.1. Dimensiones

También en el caso de las presas las características dimensionales de la losa son un factor importante en su comportamiento. Estas son generalmente irregulares, teniendo dimensiones menores en el sentido del eje del río sobre el talud de apoyo de la pantalla de concreto.

III.1.3.2.1a. Espesor

El hecho de que en el pasado el espesor de la losa fuera tradicionalmente $0.3+0.0067H$ para las primeras presas de enrocamiento a volteo y que ese espesor se halla reducido a $0.003H$ y $0.002H$ o menos en presas con enrocamiento compactado indica que hay una relación entre el espesor de la losa y las características de los materiales de apoyo, puede deducirse entonces que el comportamiento de la losa está también en función de su espesor.

III.1.3.2.1b. Ancho

Conceptualmente el ancho máximo de las losas de presas de enrocamiento debería ser el de la boquilla, sin embargo este hecho se ve afectado porque las losas se construyen en franjas verticales con un ancho entre 12 y 18 metros. Es de esperarse que el comportamiento de la pantalla de concreto también dependa de los máximos anchos que se tengan en la losa.

III.1.3.2.1c. Largo

Puede tomarse el largo de la pantalla como la dimensión que se tiene en el sentido del talud de apoyo de la losa, siendo máxima esta dimensión en el eje de la cortina.

III.1.3.2.2. Calidad del concreto

Debido a que la seguridad y la impermeabilidad son aspectos muy importantes en presas de enrocamiento con pantalla, el concreto debe guardar una alta calidad para lograr un buen comportamiento en la losa.

III.1.3.2.3. Módulo de elasticidad

El módulo de elasticidad en las losas de concreto varía entre 10 000 y 14 000 Kg/cm².

III.1.3.2.4. Armado

Con el propósito de hacer la pantalla lo más flexible posible el acero se coloca al centro del espesor de la losa, lo que indica que tanto la posición del acero como su cantidad son factores muy importantes en el comportamiento de la presa.

III.1.3.2.5. Contacto suelo-losa

Un buen contacto de la losa y el suelo evita el efecto de concentraciones de esfuerzo provocados por un mal apoyo. Sin embargo ese contacto puede ser liso o rugoso, hecho del que también depende el comportamiento de la pantalla y que habrá que tomar en cuenta.

III.1.3.3. Características de las cargas.

Las cargas a las que va estar sujeto el sistema de la losa de concreto y el suelo son las debidas a peso propio, carga hidrostática, y las debidas a los efectos de sismos.

III.1.3.3.1 Distribución

Las cargas debidas al agua aplicadas sobre la losa son de tipo hidrostático en condiciones normales de operación. La forma de como influyen estas cargas sobre el comportamiento de la losa se refleja en la distribución de esfuerzos y desplazamientos en el sistema losa-suelo.

III.1.3.3.2. Ordenes de magnitud

La magnitud de las cargas estáticas que sopotará la presa estará en función de la altura de ésta. Dichas cargas pueden ser las debidas al peso propio y las de la del agua.

Para ilustrar la forma en que actúan estas cargas, en las figuras III.9 y III.10 se presentan los desplazamientos producidos en distintas presas de enrocamiento con pantalla de concreto.

Las figuras III.9 muestran el perfil de los asentamientos en la losa de concreto en dichas presas. Las figuras III.10 ilustran la historia de los asentamientos en cada una de las crestas de éstas

obras.

A continuación damos una breve explicación sobre la historia de los asentamientos en éstas presas.

III.1.3.3.2a. Presa Foz do Areia

La gran presa Foz do Areia con 160 m de altura, sobre el río Iguacu, Paraná, Brasil, tiene una losa de concreto con espesores entre 0.3 m (en la corona) y 0.8 m (en la base) la longitud de su cresta es de 828 m.

La respuesta de esta presa cuando se aplicó la carga de agua fué rápida. La historia de las deformaciones con el tiempo se muestra en la figura III.10a.

Los máximos asentamientos de la losa, hasta febrero de 1985 se muestran en la figura III.9a. El máximo valor (77.5 cm) es considerablemente mayor que para otras grandes presas en boquillas angostas. Sin embargo, el enrocamiento reaccionó como si el módulo de compresibilidad (medido normal a la carga) fuese de cerca de 2.5 veces más grande que el valor representativo vertical observado durante la construcción, lo que está en concordancia con lo observado para otras presas.

La evolución de los asentamientos de la cresta, con el tiempo, se muestran en la figura III.10a. Los movimientos en el paramento de aguas abajo debidos a la carga de agua se indican en la figura III.11. La deformación total de la presa corresponde principalmente a reducción de volumen. Los esfuerzos reportados en la pantalla de concreto siguieron el modelo general reportado para otras presas, compresión en la mayor parte de la cara con algunas zonas de tensión a lo largo de la junta perimetral y cerca de la cresta de la presa.

Por otro lado, durante el llenado del vaso doce juntas verticales, de un total de 51, se abrieron. La máxima abertura en las juntas fué de 3 cm, y la suma total de las aberturas fué de 14 cm de ancho. El movimiento máximo de la junta perimetral a lo largo de la base de apoyo fue de 1.0, 2.5 y 2.4 cm en tres direcciones: a) asentamiento normal a la losa, b) movimiento tangencial (al paramento de aguas arriba), y c) abertura de la junta; respectivamente. La filtración máxima medida alcanzó 236 lts/s durante el llenado completo, en agosto de 1980. Esta filtración se ha hido reduciendo gradualmente.

III.1.3.3.2b. Presa New Exchequer

Esta presa tiene una altura de 150 m, la longitud de su cresta es de 427 m y el volumen de enrocamiento utilizado en la construcción de su cortina fué de 4 090 000 m³. El espesor de su losa varía entre 46 cm, en la cresta, hasta 86 cm en la base.

Se midieron los asentamientos de la losa durante la construcción

y el llenado de la presa, colocando un arreglo de 40 bancos de nivel en toda la pantalla de concreto. Los grandes asentamientos que ha experimentado el enrocamiento y la losa de concreto se presentan en la figura III.9b. La historia cronológica de los asentamientos se presenta en la figura III.10b, la cual también indica los asentamientos esperados para 1996. En el caso de esta presa debe ser considerada la existencia de una presa de gravedad más pequeña construida en el mismo lugar con una altura de 56 m.

III.1.3.3.2c. Presa Shiroro

La presa Shiroro construida sobre el río Kaduna, en Nigeria, tiene una altura de 125 m y una longitud de cresta de 560 m. El espesor de su losa de concreto varía según la relación $t = 0.3 + 0.003H$ en metros.

Los máximos asentamientos medidos en el enrocamiento antes del llenado, se registraron cerca de la mitad de la altura de total del enrocamiento en puntos cercanos al eje de la cortina. El asentamiento más grande al término de la construcción fue de 0.84 m registrado en un punto localizado en esta zona. La figura III.12 muestra el perfil de algunos asentamientos sufridos por el enrocamiento al final de la construcción en la sección máxima.

Durante y después del llenado se midieron las deformaciones en el plano de la losa en dos direcciones: a) En la dirección horizontal, perpendicular al sentido del río, y, b) en el sentido de la pendiente del paramento de aguas arriba. La figura III.13 muestra las isoclinas de igual deformación y los esfuerzos calculados a partir de las mediciones realizadas. Se estimó que la losa estuvo en compresión, casi totalmente, en la dirección horizontal, excepto para una pequeña zona de tensiones en la margen izquierda, cerca de la cresta. En la otra dirección se estimaron tensiones en la cresta y en una zona en la margen derecha. La figura III.14 muestra los desplazamientos horizontales de la cresta.

III.1.3.3.3. Velocidad de aplicación

Normalmente el llenado, que constituye las cargas aplicadas sobre la pantalla, se realiza en etapas ya que se ha observado que llenados y vaciados bruscos originan un mal comportamiento de los materiales en la presa.

III.1.3.4. Factores ambientales

Las losas de concreto han demostrado ser durables bajo altos gradientes hidráulicos y condiciones climáticas extremas.

III.1.3.4.1. Temperatura

Debido a que las losas en las presas se encuentran expuestas a la intemperie es de esperarse que sufran efectos similares a los que sufren las losas en los pavimentos.

III.1.3.4.2. Humedad

Una buena parte de la losa siempre está expuesta a cambios de humedad de manera que habría que observar como influye este factor en el comportamiento de la pantalla.

III.1.3.4.3. Acción de agentes químicos

Debido a que la losa siempre está en contacto con el agua podría pensarse que esto provocase corrosión en los materiales de la pantalla, por lo que se tendrían que hacer observaciones sobre su influencia en el comportamiento de la presa, sin embargo, no se tienen suficientes datos sobre este hecho, quizás debido a que no se cuenta con casos reportados de daño por la acción de estos agentes.

III.2. EL PROBLEMA DE INTERACCIÓN

Es importante hacer notar que el problema en sí de interacción se da principalmente como uno de deformación, en el que intervienen los principios de conservación de masa y de cantidad de movimiento a través de las ecuaciones de equilibrio dinámico, considerando la hiperelasticidad existente, en donde van involucradas las ecuaciones constitutivas de los materiales (tanto del concreto de la losa como del suelo). Así que en este caso las cargas provocarán el movimiento del sistema losa-suelo el cual se ve afectado por los factores arriba mencionados. Se destaca que en esto son muy importantes tanto la magnitud de los movimientos como las posibles fallas de los materiales. Debe verse que es un fenómeno en esencia tridimensional ya que involucra tanto el volumen de la losa, así como una región espacial dentro de la masa de suelo. En esta situación también aparece involucrado el principio de conservación de energía, ya que la energía comunicada por las cargas externas se transforma en energía de deformación en los volúmenes mencionados, e incluso aparece el principio de aumento de entropía por la energía disipada como calor o deterioro estructural.

De todo lo anterior se ve que entre las incógnitas básicas de este problema están las distribuciones espaciales de los movimientos así como de las regiones falladas (en caso de que se presenten).

Un aspecto interesante que debe mencionarse es que en los tres tipos de interacción losa-suelo (pavimentos, cimentaciones y presas) los factores mencionados existen en los tres casos; sin embargo, la diferencia básica entre ellos la constituyen las características de las cargas, así como la geometría global del problema y las condiciones de frontera. Así que aquellas características de esta interacción en donde no influyan significativamente las diferencias en las condiciones de carga y de frontera, podrán generalizarse, es decir; extrapolar este tipo de experiencias de uno de los casos a los

otros dos.

Por todo lo anterior se ve que una modelación matemática adecuada de este problema sólo puede hacerse mediante ecuaciones diferenciales parciales o cálculo funcional; no obstante, en el siguiente capítulo se revisarán algunos de los modelos matemáticos que diferentes investigadores han seguido en el curso de los años para estudiar este problema.

TABLA III.1. FACTORES QUE INFLUYEN EN EL
COMPORTAMIENTO DE LOSAS DE CONCRETO

FACTORES	TIPO DE ESTRUCTURA	A PAVIMENTOS	B CIMENTACIONES	C PRESAS
1.-CARACTERÍSTICAS DE LOS MATERIALES DE APOYO.				
1)Tipo de materiales.		mucho	mucho	mucho
2)Modulo de elasticidad		mucho	mucho	mucho
3)Relación de Poisson.			mucho	
4)Relación de amortiguamiento		mucho		
5)Permeabilidad.		mucho	poco	mucho
6)Geología de la región		mucho	poco	reg.-mucho
7)Estratificación.				
a)tipo de materiales.		reg.-mucho	mucho	
b)espesores.		regular	mucho	
8)Peso volumétrico		mucho	mucho	mucho
2.-CARACTERÍSTICAS DE LA LOSA DE CONCRETO				
1)Dimensiones.				
a)espesor.		reg.-mucho	mucho	mucho
b)ancho.		reg.-mucho	poco	mucho
c)largo.		reg.-mucho	poco	mucho
2)Calidad del concreto.		mucho	regular	mucho
3)Modulo de elasticidad del concreto(28 días)		regular	mucho	regular
4)armado		poco-reg.	mucho	poco
5)contacto suelo-losa		mucho	mucho	mucho
6)separción de juntas		regular	poco	mucho
3.-CARACTERÍSTICAS DE LAS CARGAS.				
1)Distribución		mucho	mucho	mucho
2)Ordenes de magnitud		mucho	mucho	mucho
3)velocidad de aplicación		mucho	mucho	mucho
4.-FACTORES AMBIENTALES				
1)Temperatura		mucho	poco	regular
2)Humedad		mucho	poco	poco
3)Acción de agentes químicos		mucho	regular	poco-reg.

CONCEPTO	ARENA	ARCILLA (N.C. O LIGERAMENTE SOBRECONSOLIDADA)
MAGNITUD DEL ASENTAMIENTO	PEQUEÑO	GRANDE
VELOCIDAD DE ASENTAMIENTO	RAPIDO	LENTO
TRAYECTORIA DE ASENTAMIENTO.	IRREGULAR, MAYOR DE LOS BORDES DE LA CIMENTACION	FORMA DE PLATO
FACTOR QUE RIGE EL DISEÑO DE LA CIMENTACION	ASENTAMIENTO DIFERENCIAL	ASENTAMIENTO MAXIMO Y DIFERENCIAL

TABLA III.2

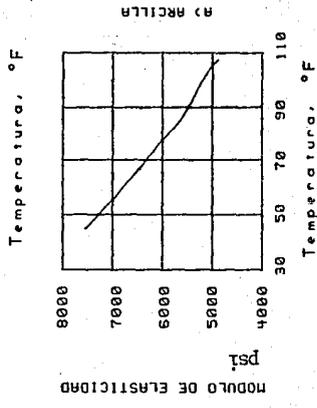
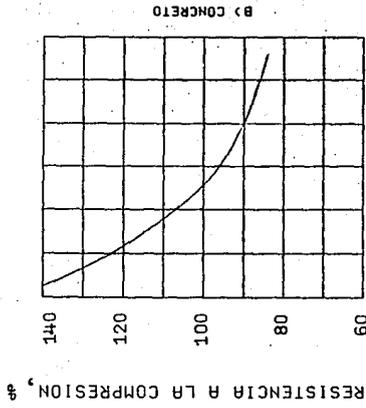


FIG. III.2 EFECTO DE LA TEMPERATURA EN LAS PROPIEDADES MECANICAS DE MATS.

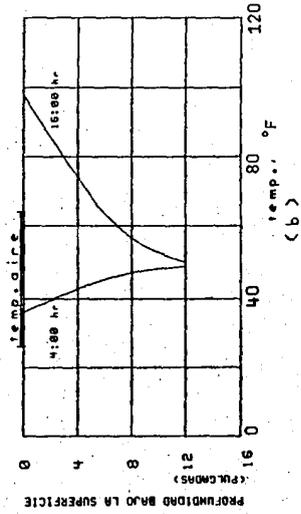
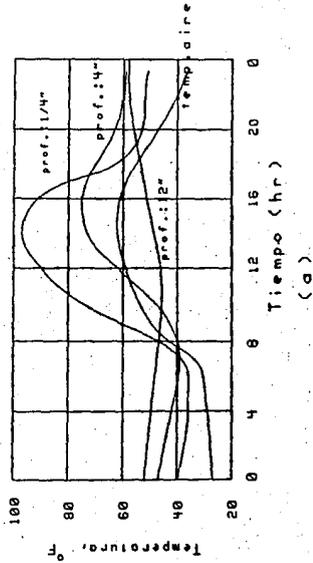


FIG. III.1 CAMBIOS DE TEMPERATURA EN UN PAVIMENTO ASFALTICO

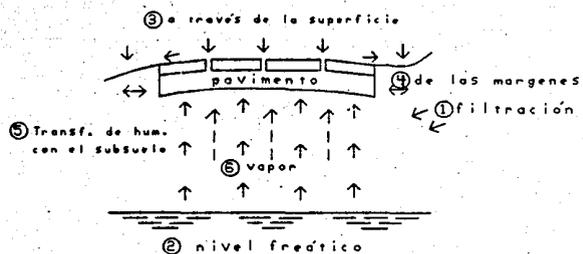


Fig.III.3 Condiciones que afectan el cambio de humedad en un pavimento

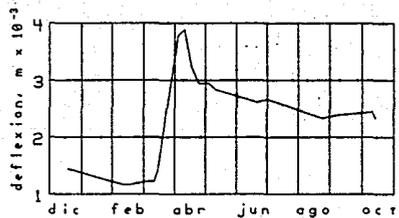
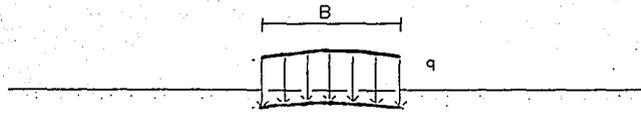
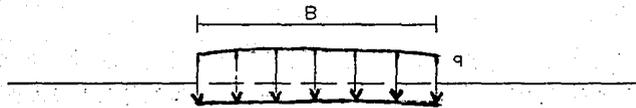


Fig.III.4 Variación típica estacional en la deflexión de un pavimento

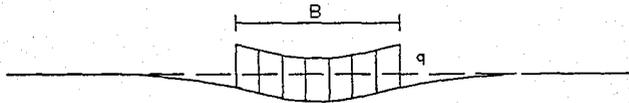


area cargada estrecha



area cargada ancha

- a) Cimentación flexible cargada uniformemente en un suelo no cohesivo.



- b) Cimentación flexible cargada uniformemente en un sólido elástico como una arcilla saturada

Fig. III.5 Distribución de asentamientos bajo un área uniforme.

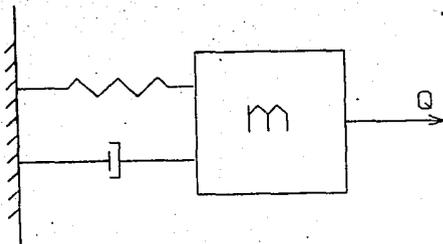


FIGURA III.6

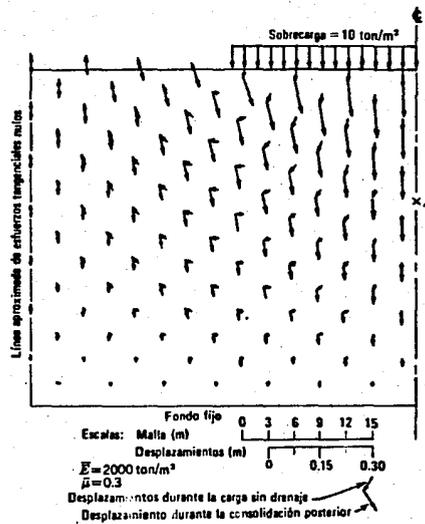
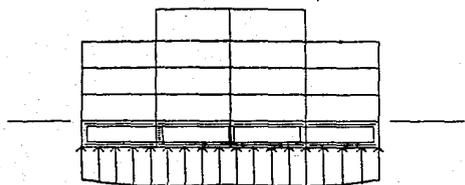
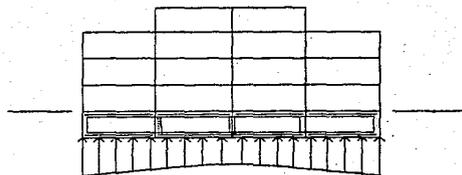


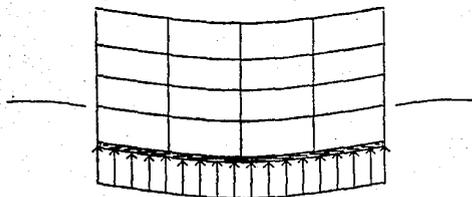
FIGURA III.7



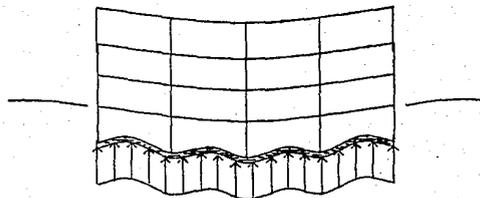
a) Cimentación sobre placa rígida en un suelo no cohesivo.



b) Cimentación sobre placa rígida en un suelo elástico o compresible profundo.

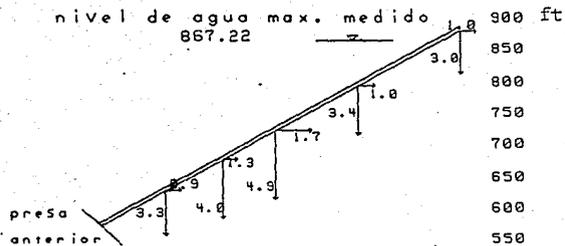


c) Cimentación sobre placa flexible con carga uniforme, en un suelo elástico compresible profundo.



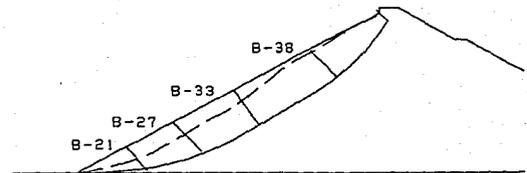
d) Cimentación muy flexible uniformemente cargada, en un suelo elástico compresible profundo.

Fig.III.8 Influencia de la rigidez de una placa de cimentación en la distribución de presiones.



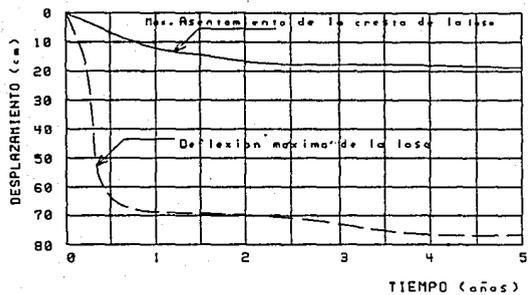
b) Presa New Exchequer (1983)

BANCO	DEFLEXION (cm)	
	JUNIO/80	FEB-DIC/84
B-21	27.7	52.5
B-27	30.9	70.0
B-33	20.7	77.5
B-38	8.7	68.9

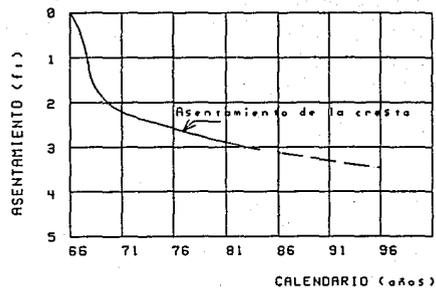


a) Presa Foz de Areia

Fig.III.9 Asentamientos de las losas de concreto de dos presas



a) Presa Foz de Aneia



b) Presa New Exchequer

Fig. III.10 Historia de los asentamientos de las crestas de las losas de concreto de dos presas.

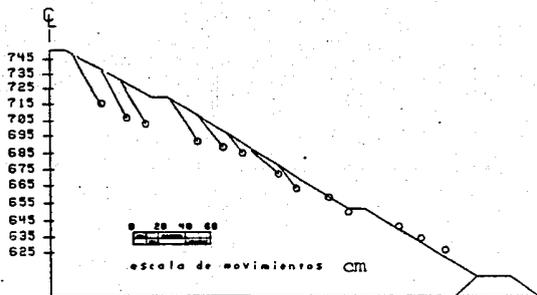


FIG. III.11 ASENTAMIENTOS MEDIDOS EN LA PRESA FOZ DO AREIA AL FINAL DEL LLENADO (1984).

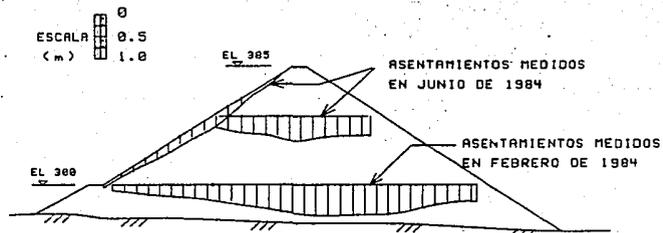
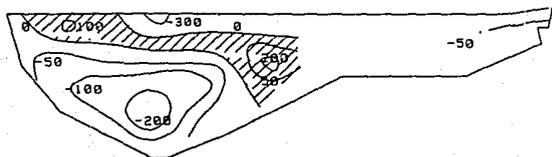
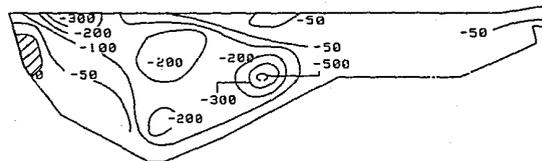


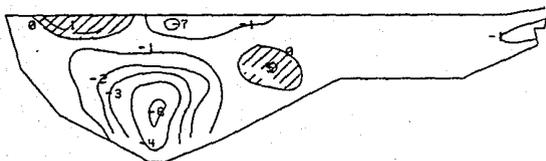
FIG. III.12 ASENTAMIENTOS MEDIDOS EN LA PRESA SHIRORO AL FINAL DEL LLENADO.



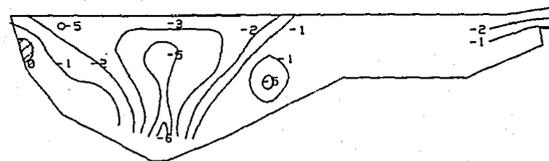
a) Deformaciones, m ($\times 10^{-6}$)
 en la direcc. horizontal
 + Extension - Compresion



b) Deformaciones, m ($\times 10^{-6}$)
 en la direcc. de la linea de max. pend.
 + Extension - Compresion



c) Esfuerzos (MPa)
 en la direcc. horizontal
 + Tension - Compresion



d) Esfuerzos (MPa)
 en la direcc. de la linea de max. pend.
 + Tension - Compresion

Fig. III.13 Estado de esfuerzos y deformaciones en la presa Shiroro en noviembre de 1984.

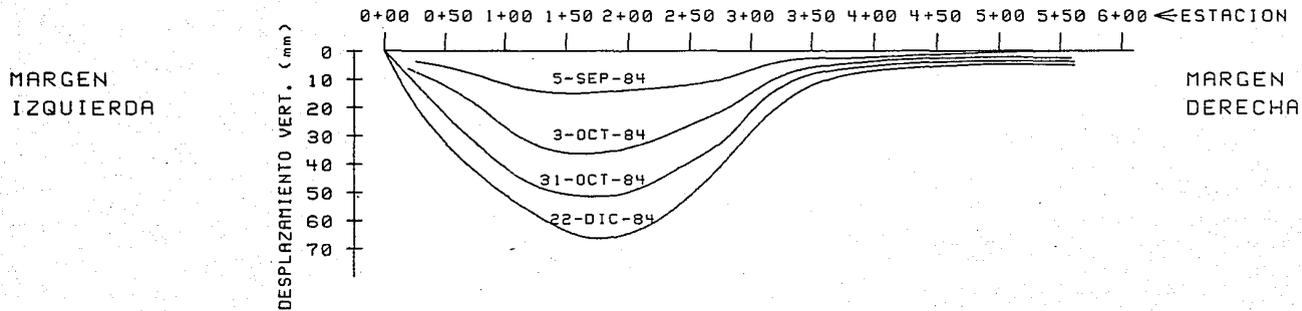


Fig. III.14 Desplazamientos verticales en la cresta de la de la presa Shiroro.

IV. FORMULACION MATEMATICA

Pasando ahora al tercer punto de la metodología de investigación que es, en nuestro caso, la formulación del modelo matemático, a continuación se describen los modelos matemáticos que han sido desarrollados para la resolución de este problema, a fin elegir una alternativa de análisis para el problema de interacción suelo-estructura.

IV.1. MODELOS ELÁSTICOS

Desde un punto de vista físico, un material elástico o un medio elástico, cuando es sometido a un sistema de fuerzas externo, se deforma, pero regresa a su configuración original cuando se retira dicho sistema de fuerzas. La curva cargas-deformaciones coincide con la de descargas. En los modelos que se presentan a continuación, las relaciones esfuerzo-deformación son de tipo lineal.

IV.1.1. El modelo de Winkler

Este modelo, propuesto por Winkler (referencia 3) se basa en la hipótesis de que la deflexión, w , de un punto del medio, en la superficie, es directamente proporcional al esfuerzo, q , aplicado en ese punto e independiente de los esfuerzos aplicados en otros, esto es:

$$q(x, y) = kw(x, y) \quad 4.1.$$

donde k es el módulo de reacción con unidades de esfuerzo por unidad de longitud.

Fisicamente este modelo consiste en un sistema de resortes elásticos mutuamente independientes cuya constante elástica es k . Una característica importante de este modelo es que los desplazamientos ocurren bajo el área cargada; fuera de esta región los desplazamientos valen cero (ver figura IV.1). En relación con el análisis de estructuras flotantes, la relación $q = kw$ es únicamente consecuencia

del principio de Arquímedes.

Como puede verse este modelo parte de un enfoque conceptual, relacionando las características del material con el módulo de reacción k del medio. Esta característica junto con las cargas $q(x, y)$ constituyen los datos de entrada para la resolución del problema, obteniéndose como resultado la deflexión w en la dirección perpendicular al plano α y ψ .

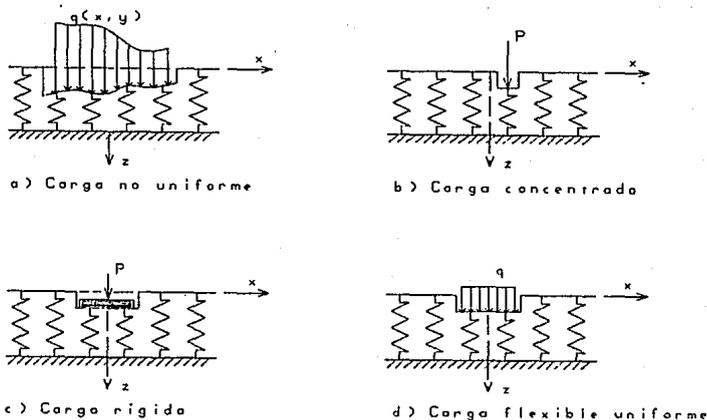


Fig. IV.1 Desplazamientos en un medio de Winkler

Para el modelo se requiere como datos de entrada las características de las cargas, el módulo de reacción k , y las características de la losa que vaya a soportar el medio. Al resolver el modelo se tendrán como resultado sólo los desplazamientos en la dirección vertical y sólo en el plano de contacto de la losa y el suelo, pero no en la masa del medio.

Una ventaja de este modelo es la simplicidad del análisis.

Sin embargo tiene la desventaja de que al considerar como hipótesis que la deflexión es directamente proporcional al esfuerzo q aplicado, el problema se limita a problemas bidimensionales, ya que no se toma en cuenta la resistencia al esfuerzo cortante del suelo en la dirección paralela al plano $\alpha\psi$ (no interactúan los resortes vecinos). De hecho se está negando una posible interacción en el plano de contacto de la losa y el suelo.

IV.1.2. Modelos elásticos con dos parámetros

En los modelos de este tipo el comportamiento del suelo queda definido por dos constantes elásticas independientes.

IV.1.2.1. Modelo Filonenko-Borodich

Este modelo es un sistema de resortes (como en el de Winkler), que se conectan entre sí mediante una membrana la cual se encuentra sometida a un esfuerzo de tensión constante (ver fig.IV.2), de esta manera el modelo adquiere continuidad.

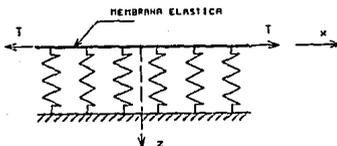


Fig. IV.2 Modelo de Filonenko-Borodich

Considerando el equilibrio del sistema membrana-resortes, en el caso del problema tridimensional, la deflexión en la superficie del suelo debido a la presión q (ver fig. VI.3) está dada por:

$$q(x, y) = k\omega(x, y) - TV^2\omega(x, y) \quad 4.2.$$

donde:

$$V^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

V^2 es el operador diferencial laplaciano.

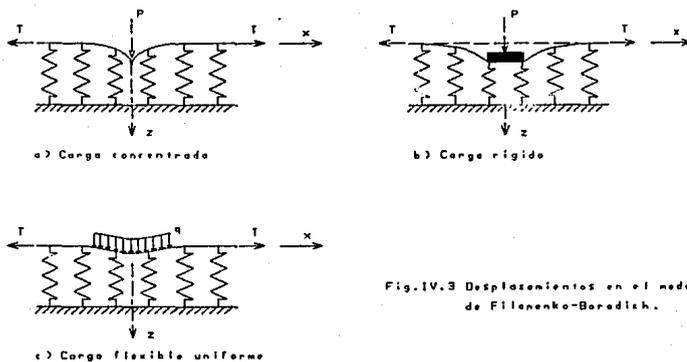


Fig. IV.3 Desplazamientos en el modelo de Filonenko-Borodich.

En el caso de problemas bidimensionales la expresión 4.2. se reduce a:

$$q(x) = k\omega(x) - T \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} \quad 4.3.$$

las dos constantes elásticas que caracterizan el comportamiento del modelo son k y T .

Este modelo requiere como datos de entrada las dos constantes k y T , las características de las cargas (distribución, magnitud, etc), y las características de la losa. Como datos de salida se tendrán de nueva cuenta los desplazamientos en el sentido vertical al nivel del plano de contacto entre la losa y el suelo.

Con la inclusión de la membrana en este modelo, se considera que en el suelo se pueden llegar a desarrollar deformaciones en el suelo fuera del área cargada y por ende se toma en cuenta la contribución a la deformación, de áreas vecinas cargadas, lo cual se ha observado que corresponde más a la realidad. Sin embargo vuelve a aparecer el problema de que el modelo no proporsiona los esfuerzos y desplazamientos en la masa del suelo, limitando el problema a una dimensión.

Este modelo puede resolverse matemáticamente con alguno de los métodos descritos en el siguiente capítulo.

IV.1.2.2. Modelo de Hetényi

En este modelo los resortes del modelo de Winkler interactúan entre sí por medio de: una placa elástica (ver figura IV.4), en problemas tridimensionales, o una viga elástica, en problemas bidimensionales. Este modelo se apoya en un enfoque conceptual.

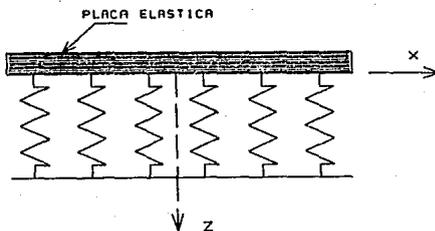


Fig. IV.4 Modelo de Hetényi

La expresión matemática para este modelo está dada por:

$$q(x, y) = kw(x, y) - DV^4 w(x, y) \quad 4.4.$$

donde

$$D = \frac{Ep h^3}{12(1 - \nu p^2)}$$

D es la rigidéz a la flexión de la placa.

Para problemas bidimensionales:

$$q(x) = kw(x) - D \frac{d^4 w(x)}{dx^4} \quad 4.5.$$

Este modelo requiere como datos de entrada las características del material de apoyo, relacionadas con las constantes k y D (rigidéz a la flexión de la placa). También requiere conocer la distribución de las cargas $q(x, y)$, y las características de la losa (geometría, rigidéz, etc.), que soportará el medio.

Con la inclusión de la placa se consideran ahora esfuerzos de tensión que pueden llegar a desarrollarse en el medio. Sin embargo las expresiones 4.4. y 4.5. sólo proporcionan los desplazamientos en el sentido vertical para $q = 0$.

En este modelo los resortes del modelo de Winkler interactúan entre sí por medio de una capa de material el cual soporta esfuerzos cortantes (ver figura IV.5).

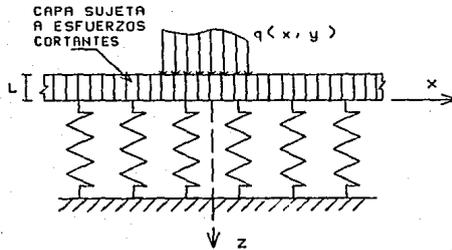


Fig. IV.5 Modelo de Pasternak

Las fuerzas y deformaciones que mantienen el equilibrio en cada elemento del sistema se muestran en la figura IV.6. Asumiendo que el material de la capa es isotrópico con respecto al plano x, y , con módulo de rigidez al cortante $G_x = G_y = G_p$, tenemos que:

$$\tau_{xz} = G_p \gamma_{xz} = G_p \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\tau_{yz} = G_p \gamma_{yz} = G_p \frac{\partial w}{\partial y}$$

Las fuerzas por unidad de longitud, que actúan en el elemento de la capa, son:

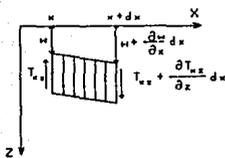
$$N_x = \int_0^1 \tau_{xz} dz = G_p \frac{\partial w}{\partial x} ; N_y = \int_0^1 \tau_{yz} dz = G_p \frac{\partial w}{\partial y}$$

Considerando el equilibrio en la dirección z tenemos

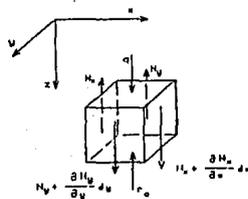
$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial \psi} + q - r_0 = 0$$

Utilizando la condición de que $r_0 = k\omega$, tenemos que

$$q(x, \psi) = k\omega(x, \psi) - G_p \nabla^2 \omega(x, \psi) \quad 4.6.$$



a) Esfuerzos en la capa de mat.



b) Fuerzas actuando en la capa de material.

Fig. IV.6 Fuerzas y deformaciones en la capa de material del modelo de Pasternak.

Este modelo, partiendo de un enfoque conceptual, relaciona las características del suelo con las constantes k y G_p (módulo de rigidez al cortante de la capa de material), y requiere como datos de entrada la magnitud y distribución de las cargas, $q(x, \psi)$, el módulo de reacción k y el módulo de rigidez al cortante de la capa de material. También son necesarias las características de la losa como datos de entrada. Como resultados se tendrán los desplazamientos en la dirección vertical, a la altura del plano de contacto losa-suelo.

En el capítulo cinco se describen algunos métodos que se pueden emplear para la solución de este modelo.

IV.1.3. Modelos continuos elásticos

A continuación se presentan los modelos más comunes de este tipo. En el anexo 4A se dan los conceptos fundamentales de la teoría del medio continuo.

IV.1.3.1. El medio continuo elástico isotrópico

En un sistema de referencia principal el tensor de deformaciones

$[\epsilon_{jk}]$ adopta la forma

$$[\epsilon_{jk}] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

Por otro lado las relaciones constitutivas de una material elástico lineal, en un marco de referencia cartesiano, son

$$\sigma_x = \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2G\epsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2G\epsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2G\epsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

donde G es el módulo de rigidez del medio y λ es la constante de Lamé definida por

$$\lambda = \frac{\nu}{(1+\nu)} \frac{E}{(1-2\nu)}$$

donde

E = módulo de elasticidad del medio

ν = relación de Poisson

El esfuerzo $[T_{jk}]$, en un sistema de referencia principal, queda como

$$[T_{jk}] = \begin{bmatrix} \lambda J_1 + 2G\epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda J_1 + 2G\epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda J_1 + 2G\epsilon_3 \end{bmatrix}$$

donde

$$J_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

En materiales homogéneos, isotrópicos y sin esfuerzos residuales, las componentes volumétrica y distorsional de los tensores de esfuerzo $[T_{jk}]$ y deformación $[\epsilon_{jk}]$, están relacionados de manera directamente proporcional si el material es elástico lineal.

El tensor de deformaciones puede ser expresado en sus componentes volumétrica y distorsional como

$$[\epsilon_{jk}] = [\epsilon_v] + [\epsilon_o]$$

donde

$[\epsilon_v]$ = componente volumétrica del tensor de deformaciones $[\epsilon_{jk}]$

$[\epsilon_o]$ = componente distorsional del tensor de deformaciones $[\epsilon_{jk}]$

Matricialmente el tensor $[\epsilon]$ se expresa por

$$[\epsilon_v] = \frac{J_1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 4.7$$

en tanto que el tensor $[\epsilon_o]$ por

$$[\epsilon_o] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 - J_1/3 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 - J_1/3 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 - J_1/3 \end{bmatrix} \quad 4.8$$

De igual forma para el tensor de esfuerzos $[T_{jk}]$ se obtiene

$$[T_{jk}] = [T_v] + [T_o]$$

donde

$[T_v]$ = componente volumétrica del tensor de esfuerzos $[T_{jk}]$

$[T_o]$ = componente distorsional del tensor de esfuerzos $[T_{jk}]$

En forma matricial, $[T_v]$ y $[T_o]$ toman la forma

$$[T_v] = \begin{bmatrix} \frac{3\lambda+2G}{3} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\lambda+2G}{3} J_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\lambda+2G}{3} J_1 \end{bmatrix} \quad 4.9$$

$$[T_0] = \begin{bmatrix} 2G(\epsilon_1 - J_1/3) & 0 & 0 \\ 0 & 2G(\epsilon_2 - J_1/3) & 0 \\ 0 & 0 & 2G(\epsilon_3 - J_1/3) \end{bmatrix} \quad 4.10$$

Comparando las ecuaciones 4.7 con la 4.9 se deduce que

$$[T_v] = (3\lambda + 2G) [c_v]$$

y al comparar la ecuación 4.8 con la 4.10 se llega a que

$$[T_0] = 2G [c_0]$$

desarrollando esta última relación, ahora para el caso más general, para cada una de sus componentes se llega a que

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \frac{\partial S}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} S ; & \tau_{xy} &= G \left[\frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} \right] \\ \sigma_y &= 2G \frac{\partial S}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} S ; & \tau_{yz} &= G \left[\frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial y} \right] \\ \sigma_z &= 2G \frac{\partial S}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} S ; & \tau_{xz} &= G \left[\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad 4.11$$

donde

$$\begin{aligned} \operatorname{div} S &= 3c_m \\ c_m &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z}{3} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_x}{\partial \alpha} = c_x ; \quad \frac{\partial S_x}{\partial \psi} + \frac{\partial S_y}{\partial \alpha} = \gamma_{xy} \\ \frac{\partial S_y}{\partial \psi} = c_y ; \quad \frac{\partial S_y}{\partial \gamma} + \frac{\partial S_z}{\partial \psi} = \gamma_{yz} \\ \frac{\partial S_z}{\partial \gamma} = c_z ; \quad \frac{\partial S_x}{\partial \gamma} + \frac{\partial S_z}{\partial \alpha} = \gamma_{xz} \end{aligned}$$

de las ecuaciones 4.11 se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial \psi} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial \gamma} = G \nabla^2 S_x + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial \alpha} \operatorname{div} S \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial \psi} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial \gamma} = G \nabla^2 S_y + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial \psi} \operatorname{div} S \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \psi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial \gamma} = G \nabla^2 S_z + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial \gamma} \operatorname{div} S \end{aligned} \quad 4.12$$

Recordando que las ecuaciones de equilibrio están dadas por

$$\begin{aligned} \rho a_x = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial \psi} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial \gamma} \\ \rho a_y = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial \psi} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial \gamma} \\ \rho a_z = \rho f_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \psi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial \gamma} \end{aligned} \quad 4.13$$

sustituyendo la ecuación 4.12 en la 4.13 se tiene que

$$\begin{aligned} \rho a_x &= \rho f_x + G \nabla^2 S_x + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} S \\ \rho a_y &= \rho f_y + G \nabla^2 S_y + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} S \\ \rho a_z &= \rho f_z + G \nabla^2 S_z + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} S \end{aligned} \quad 4.14$$

Sumando las expresiones 4.14 para obtener una en forma vectorial se obtiene

$$\vec{\rho a} = \vec{\rho f} + G \nabla^2 \vec{S} + (G + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} S \quad 4.15$$

que es la ecuación fundamental de la elasticidad.

Si en un problema las aceleraciones son despreciables la ecuación 4.15 se reduce a

$$G \nabla^2 \vec{S} + (G + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} S + \vec{\rho f} = 0 \quad 4.16$$

La ecuación 4.16 es la que debe resolverse en los problemas elásticos, junto con las condiciones de frontera y carga del caso particular de que se trate.

Con este modelo se puede dar un tratamiento formal al problema de interacción.

En este caso, como datos de entrada se requerirán el módulo de elasticidad y la relación de Poisson del medio, la magnitud y distribución de las cargas, y las características de la losa (geometría, rigidez, etc.). Como resultados se tendrán los esfuerzos y deformaciones en la masa del suelo y en la losa.

Entre las ventajas de este modelo se encuentra la mayor cantidad de información que se obtiene de los resultados del análisis con respecto a los otros modelos. Una de sus posibles desventajas es que se requerirá un mayor tiempo de cómputo. Sin embargo con las modernas computadoras esta desventaja ha ido desapareciendo.

Para resolver este modelo pueden emplearse los métodos analíticos, métodos aproximados, y en problemas más complejos los métodos numéricos (elemento finito, etc.).

IV.1.3.2. Modelo de Reissner

Este modelo también introduce en su análisis restricciones a los esfuerzos y desplazamientos, que simplifica las ecuaciones básicas para

el medio continuo elástico isotrópico. Asumiendo que los esfuerzos en el plano $\alpha\psi$, a través del estrato de espesor H son despreciables ($\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\tau_{xy}=0$) y que las componentes de desplazamiento u , v y w satisfacen las condiciones siguientes:

$$u = v = w = 0 \quad \text{para} \quad \psi = H$$

y

$$u = v = 0 \quad \text{para} \quad \psi = 0$$

La respuesta del suelo está dada por

$$C_1 w - C_2 \nabla^2 w = q - \frac{C_2}{4 C_1} \nabla^2 q \quad 4.17$$

w es el desplazamiento vertical en la superficie del estrato, o sea para $\psi = 0$, y q es la carga externa; ∇^2 es el operador diferencial Laplaciano aplicado a las variables α y ψ . Las constantes C_1 y C_2 que caracterizan la respuesta del suelo están relacionadas con E_s y ν_s de la siguiente manera: $C_1 = E_s/H$ y $C_2 = HG_s/3$. E_s y G_s son, respectivamente, los módulos elástico y de rigidez al cortante para el estrato.

Este modelo requiere como datos de entrada la magnitud y distribución de las cargas, el módulo de elasticidad E_s del medio, la relación de Poisson ν_s , y las características de la losa (dimensiones, etc.). Como resultados se tendrán los desplazamientos en la dirección vertical a lo largo del eje α (y sólo para $\alpha = 0$ si se aplica la ecuación 4.17.)

Una de las principales desventajas de este modelo, para nuestro caso, es que no se puede considerar la interacción losa-suelo ya que entre sus hipótesis está la que en los planos perpendiculares a ψ el cortante vale cero.

IV.1.3.3. El medio continuo elástico anisótropo

En el mayor número de casos los suelos exhiben propiedades anisotrópicas debido a la estratificación de sus capas que ocurre durante su formación. Si bien a una escala micro estos suelos exhiben propiedades heterogéneas, ellos pueden ser representados adecuadamente como suelos homogéneos con propiedades macroscópicas predominantemente anisotrópicas. Son necesarias 12 constantes elásticas independientes para caracterizar el comportamiento de un material anisótropo. Las relaciones esfuerzo deformación referidas a un sistema coordenado $\alpha\psi\zeta$ tienen la forma:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_{yy}}{E_y} - \frac{\nu_{zx}\sigma_{zz}}{E_z} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}$$

$$\epsilon_{yy} = - \frac{\nu_{xy}\sigma_{xx}}{E_x} + \frac{\sigma_{yy}}{E_y} - \frac{\nu_{zy}\sigma_{zz}}{E_z} ; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}}$$

$$\epsilon_{zz} = - \frac{\nu_{xz}\sigma_{xx}}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\sigma_{yy}}{E_y} + \frac{\sigma_{zz}}{E_z} ; \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G_{zx}}$$

Se puede demostrar que:

$$E_x \nu_{xz} = E_y \nu_{xz} ; E_y \nu_{zy} = E_z \nu_{yz} ; E_z \nu_{xz} = E_x \nu_{zx}$$

Un suelo homogéneo anisótropo, con propiedades elásticas simétricas en relación con un plano, referido a tres planos mutuamente perpendiculares, se dice que es un material ortotrópico. Un material elástico transversalmente isotrópico es un caso especial del caso general de materiales ortotrópicos. En el caso particular donde el suelo exhibe isotropía en el plano $\alpha\psi$, las ecuaciones de arriba se reducen a

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) - \frac{\nu'}{E'} \sigma_{zz} ; \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) - \frac{\nu'}{E'} \sigma_{zz} ; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G'}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu'}{E'} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) ; \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G'}$$

E es el módulo de Young para el plano de isotropía y E' es el módulo de Young para la dirección perpendicular a dicho plano. ν es la relación de Poisson que caracteriza la contracción (o expansión) en el plano de isotropía (plano $\alpha\psi$) cuando se aplica tensión (o compresión) en el mismo, y ν' es la relación de Poisson que caracteriza la contracción (o expansión) en el plano de isotropía cuando se aplica tensión (o compresión) en dirección perpendicular a dicho plano. $G = E/2(1+\nu)$ es el módulo de resistencia al esfuerzo cortante para el plano de isotropía y G' es el módulo de resistencia al esfuerzo cortante que caracteriza la distorsión de los ángulos entre el plano isotrópico y su normal.

IV.1.3.4. El medio continuo elástico no homogéneo

Un medio cuyas propiedades mecánicas no son las mismas en todos los puntos de su masa es denominado "medio no homogéneo". Éste, puede

exhibir propiedades anisotrópicas en cada punto, dentro del mismo. En el caso de un medio isotrópico no homogéneo los parámetros elásticos ($G_s \nu_s$) ya no son constantes, esto es:

$$G_s = G_s(x, y, z), \quad \nu_s = \nu_s(x, y, z)$$

La rigidez del suelo generalmente sólo se incrementa con la profundidad, debido a los efectos prolongados de sobrecargas. Para tal medio se tiene:

$$G_s = G_s(z), \quad \nu_s = \nu_s(z)$$

Gibson (ref.4) analizó los esfuerzos y desplazamientos de un medio elástico plano no homogéneo e incompresible cuyo módulo de rigidez al cortante varía linealmente con la profundidad de acuerdo con la siguiente expresión:

$$G_s(z) = G_s(0) + mz$$

donde $G_s(0)$ es el módulo de rigidez en la superficie del medio y mz describe la variación lineal del módulo de rigidez al cortante del medio.

IV.2. MODELOS NO ELÁSTICOS Y EN FUNCION DEL TIEMPO

IV.2.1. Comportamiento elasto-plástico

Los modelos descritos con anterioridad no toman en cuenta un comportamiento irreversible del suelo.

La distinción básica entre el comportamiento puramente elástico y el comportamiento elasto-plástico, es que, en este último, los esfuerzos que pueden ser inducidos en el medio son limitados ya que se introducen en el análisis criterios de falla o cedencia. Un modelo de particular interés es el propuesto por Rhines (ref.5) el cual asume la existencia de una capa de material, entre los resortes (o elementos) del modelo de Pasternak, capaz de soportar esfuerzos cortantes finitos, ver figura IV.7.

Las ecuaciones que gobiernan la respuesta del modelo en el rango elástico son

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \left(\frac{k+c}{g} \right) u = - \frac{c}{g} u$$

$$\frac{d^2 w_2}{dx^2} - \frac{k}{g} w_2 = -\frac{1}{g} p$$

en las cuales c y k son las constantes de las capas de resortes superior e inferior, respectivamente; g es la constante de la capa de material; $w(x)$ y $w_2(x)$ son los desplazamientos verticales en la parte superior de todo el medio y de la capa de material, respectivamente (ver figura IV.7); $p(x)$ es la presión aplicada en la superficie.

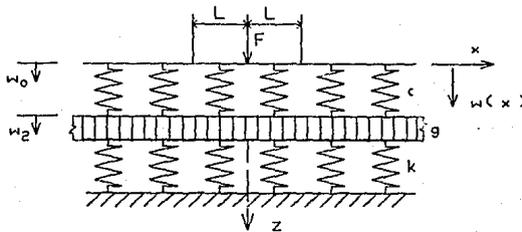


Fig. IV.7 Modelo de Rhines

Cuando las fuerzas aplicadas en el medio se incrementan el esfuerzo cortante en la capa de material se incrementa en forma proporcional. Se asumirá que el suelo exhibe un comportamiento elasto-plástico perfecto, esquematizado en la figura IV.8.

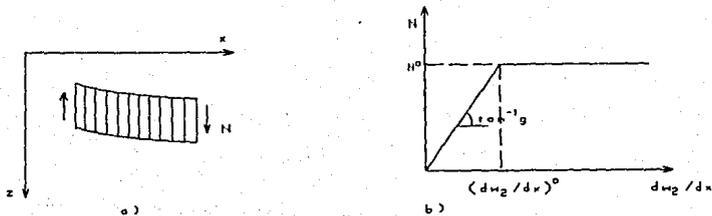


Fig. IV.8 Comportamiento elasto-plástico de la capa de material del modelo de Rhines.

Si la fuerza cortante en cualquier punto de la capa de material es menor que el valor N^0 , entonces el medio se comporta elásticamente de acuerdo con la ecuación constitutiva

$$N = g \frac{dw_2}{dx}$$

Cuando la fuerza cortante en algún punto del material alcanza el valor de N^0 , las partículas del material pueden deslizarse con respecto a las demás, produciendo así una discontinuidad en la deflexión w_2 . La deformación angular en la cual el material comienza a ceder es

$$\left(\frac{dw_2}{dx} \right)^0 = \frac{N^0}{g}$$

La deformación plástica del modelo simula el corte en un suelo provocado por una falla de punzonamiento. Las capas de resortes superior e inferior permanecen elásticas en todo el proceso.

Las investigaciones realizadas por Rhines demuestran que la inclusión de las características de cedencia de la capa de material pueden alterar notablemente la magnitud y distribución de los esfuerzos en la superficie de contacto entre el suelo y la cimentación. Los efectos llegan a ser más significativos cuando el nivel de esfuerzos en la cimentación rebasa el esfuerzo crítico.

IV.2.2. Comportamiento en función del tiempo

Cuando el suelo exhibe efectos de consolidación o de fluencia (deslizamiento de masas de suelo), llega a ser necesario considerar el comportamiento del suelo en función del tiempo en el problema de interacción suelo-estructura. Los esfuerzos y desplazamientos en un suelo granular no cambian sustancialmente con el tiempo excepto cuando ocurre un flujo plástico o un aumento significativo del flujo visco-plástico. Sin embargo, en suelos con comportamiento predominantemente cohesivo, los esfuerzos y deformaciones varían significativamente con el tiempo. La representación de las deformaciones de un medio saturado bajo carga, en términos de consolidación debido a la disipación de presiones de poro, fué primeramente formulada por Terzaghi (ref.6). Esta teoría fué posteriormente generalizada por Biot (ref.7), tomando en cuenta efectos tridimensionales. La teoría de la consolidación primaria establece que, bajo la acción de cargas externas las cuales permanecen constantes con el tiempo, los esfuerzos y deformaciones en el suelo tienden a un valor estable. La consolidación secundaria se considera debido a efectos de rompimiento de partículas en la estructura del suelo. También, el análisis de la interacción suelo-estructura puede ser hecho empleando modelos reológicos elementales aproximados o un modelo viscoelástico continuo aproximado (donde las relaciones entre

esfuerzos y deformaciones a través del tiempo, para el comportamiento dilatacional y distorsional, están representadas en términos de ecuaciones diferenciales o integrales). Los modelos-viscoelásticos han sido usados en el tratamiento del análisis de la interacción suelo-cimentación. A su vez, los modelos reológicos elementales aproximados han sido empleados para el análisis de vigas y placas apoyadas en tales medios.

IV.2.2.1. Consolidación tridimensional

Imaginando un elemento cúbico sujeto al fenómeno de consolidación, las componentes de esfuerzo en dicho elemento deben satisfacer las condiciones de equilibrio

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad 4.18$$

Fisicamente puede pensarse que esos esfuerzos están compuestos de dos partes; la primera formada por la presión del agua que llena los poros del material, y la otra formada por los esfuerzos en los granos del material. Los esfuerzos causados por una sobrecarga serán tomados parte por el agua y parte por las partículas sólidas del suelo.

Las componentes de deformación son

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \gamma_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \gamma_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ e_z &= \frac{\partial w}{\partial z} ; \quad \gamma_y = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad 4.19$$

Para describir completamente las condiciones macroscópicas del suelo debe considerarse una variable adicional dada por la variación del agua en los poros. Se denotará con e la variación del volumen de agua por unidad de volumen de suelo y se llamará a esta cantidad "variación del contenido de agua". El incremento de la presión en el agua se denotará con σ .

Introduciendo el efecto de la presión σ del agua en las ecuaciones constitutivas del material se tiene

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) + \frac{\sigma}{3H} \\ e_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) + \frac{\sigma}{3H} \\ e_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\sigma}{3H} \\ \gamma_x &= \frac{\tau_x}{G} \\ \gamma_y &= \frac{\tau_y}{G} \\ \gamma_z &= \frac{\tau_z}{G} \end{aligned} \quad 4.20$$

donde H es una constante física adicional del medio.

Las ecuaciones 4.20 pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left[e_x + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right] - \alpha \sigma \\ \sigma_y &= 2G \left[e_y + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right] - \alpha \sigma \\ \sigma_z &= 2G \left[e_z + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right] - \alpha \sigma \\ \tau_x &= G \gamma_x \\ \tau_y &= G \gamma_y \\ \tau_z &= G \gamma_z \end{aligned} \quad 4.21$$

siendo

$$e = e_x + e_y + e_z$$

y

$$\alpha = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \frac{G}{H}$$

Por otra parte la variación en el contenido de agua puede expresarse como

$$\theta = \alpha e + \frac{\sigma}{Q} \quad 4.22$$

donde Q es una constante.

Sustituyendo las ecuaciones 4.21 en las condiciones de equilibrio 4.18 se tiene

$$\begin{aligned} G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} - \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0 \\ G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} - \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= 0 \\ G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} - \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad 4.23$$

siendo

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Se indicará ahora con V_x el volumen de agua que fluye por unidad de tiempo a través de la cara del cubo perpendicular al eje x del sistema de referencia, y se definirá de manera similar a V_y y V_z . De acuerdo con la ley de Darcy esas tres componentes de la variación del volumen de agua, se relacionan con la presión en el agua mediante las ecuaciones

$$V_x = -k \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad ; \quad V_y = -k \frac{\partial \sigma}{\partial y} \quad ; \quad V_z = -k \frac{\partial \sigma}{\partial z} \quad 4.24$$

donde k es una constante denominada "coeficiente de permeabilidad del suelo"

Asumiendo que el agua sea incompresible, la variación del contenido de agua en un elemento de suelo debe ser igual al volumen de agua que fluye, en la unidad de tiempo, a través de la superficie del elemento, esto es

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad 4.25$$

De las ecuaciones 4.22, 4.24 y 4.25 se obtiene

$$k\nabla^2 \sigma = \alpha \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad 4.26$$

Las ecuaciones 4.23 junto con la 4.26 constituyen el sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno de la consolidación.

ANEXO 4A. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DEL MEDIO CONTINUO

4a.1. ESTADO DE ESFUERZO EN UN PUNTO

De mecánica del medio continuo vemos que para expresar el estado de esfuerzos en un punto (fig.4a.1) es necesario considerar nueve términos que definen al tensor de esfuerzos $[T]$, el cual se escribe como:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_y & z \sigma_z \end{bmatrix} \quad 4a.1$$

donde:

σ_x , es el esfuerzo actuando normal al plano y - z (plano x) en la dirección del eje x (ver figura 4a.1.)

σ_y , es el esfuerzo actuando normal al plano x - z (plano y) en la dirección del eje y .

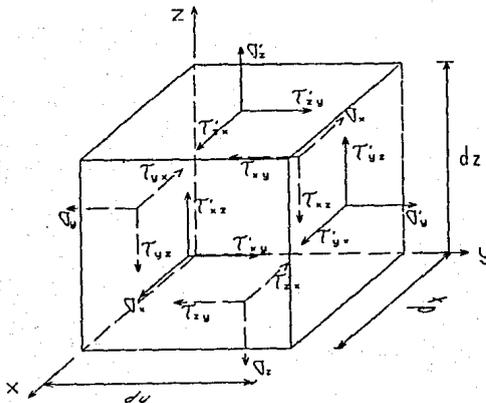
σ_z , es el esfuerzo actuando normal al plano x - y (plano z) en la dirección del eje z .

τ_{xy} , es el esfuerzo actuando tangente al plano x en la dirección del eje y .

τ_{xz} , es el esfuerzo actuando tangente al plano x en la dirección del eje z .

τ_{yz} , es el esfuerzo actuando tangente al plano y en la dirección del eje z .

De manera similar pueden definirse los otros términos del tensor de esfuerzos.



Se puede demostrar que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{xz} = \tau_{zx} ; \text{ y } \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Para determinar los esfuerzos, \bar{S} , del mismo punto en un plano cualquiera, π , basta con multiplicar al tensor de esfuerzos, [T], por el vector, \bar{n} , normal a dicho plano. lo cual nos da:

$$\bar{S} = [T] \left\{ \bar{n} \right\} \quad 4a.2.$$

donde:

$$\left\{ \bar{n} \right\} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix}$$

\bar{n} es el vector normal al plano π .

La expresión 4a.2 puede escribirse, de manera desarrollada, como:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix}$$

Para determinar el vector esfuerzo, $\bar{\sigma}$, actuando normal al plano π es necesario operar mediante el producto punto los vectores \bar{S} y \bar{n} , lo cual nos da la magnitud del vector $\bar{\sigma}$. El vector $\bar{\sigma}$ tiene la misma dirección que el vector \bar{n} , por lo tanto:

$$\bar{\sigma} = \bar{S} \cdot \bar{n} \quad 4a.3.$$

y

$$\bar{\sigma} = \sigma \bar{n}$$

en 4a.3 σ es el módulo o magnitud del vector $\bar{\sigma}$.

Para obtener el vector esfuerzo cortante, τ (tangente al plano

π), basta con restar los vectores \bar{S} y $\bar{\sigma}$ ya que:

$$\bar{S} = \bar{\sigma} + \bar{\tau}$$

por lo tanto:

$$\bar{\tau} = \bar{S} - \bar{\sigma}$$

4a.2. ESFUERZOS PRINCIPALES.

Los esfuerzos principales son aquellos que actúan en planos donde los esfuerzos cortantes son nulos. A los planos donde actúan estos esfuerzos se les denomina planos principales.

Si conocemos el tensor de esfuerzos en un punto para obtener los esfuerzos principales basta con resolver la ecuación:

$$-\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0 \quad 4a.5.$$

donde:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \text{determinante del tensor de esfuerzo}$$

Los valores de I_1 , I_2 e I_3 son los invariantes del tensor de esfuerzo.

La relación 4a.5 es una ecuación de tercer grado en σ , la cual conduce a tres valores reales, los cuales son los esfuerzos principales en el entorno de un punto, a los que se denomina:

σ_1 = esfuerzo principal mayor.

σ_2 = esfuerzo principal intermedio.

σ_3 = esfuerzo principal menor.

siendo: $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$

Para obtener el plano donde actúan los esfuerzos principales basta con resolver, para cada uno de ellos, el siguiente sistema de ecuaciones, en donde se sustituye a σ por el correspondiente esfuerzo principal (del cual estemos determinando el plano donde actúa).

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma)\cos \alpha + \tau_{xy}\cos \beta + \tau_{xz}\cos \gamma &= 0 \\ \tau_{xy}\cos \alpha + (\sigma_y - \sigma)\cos \beta + \tau_{yz}\cos \gamma &= 0 \\ \tau_{xz}\cos \alpha + \tau_{yz}\cos \beta + (\sigma_z - \sigma)\cos \gamma &= 0 \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1\end{aligned}$$

Por ejemplo para σ_1 se tiene:

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma_1)\cos \alpha + \tau_{xy}\cos \beta + \tau_{xz}\cos \gamma &= 0 \\ \tau_{xy}\cos \alpha + (\sigma_y - \sigma_1)\cos \beta + \tau_{yz}\cos \gamma &= 0 \\ \tau_{xz}\cos \alpha + \tau_{yz}\cos \beta + (\sigma_z - \sigma_1)\cos \gamma &= 0 \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1\end{aligned}$$

de donde se obtienen los cosenos directores $(\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1)$ para σ_1 .

De manera análoga se procede para σ_2 y σ_3 , encontrándose $(\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2)$ y $(\cos \alpha_3, \cos \beta_3, \cos \gamma_3)$, respectivamente.

El tensor de esfuerzos expresado en términos de los esfuerzos principales queda:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

4a.3. ESTADO DE ESFUERZO PLANO

Se presenta un estado de esfuerzo plano cuando las fuerzas que actúan en un cuerpo son coplanares:

Como se trata de un problema en el plano el tensor de esfuerzo queda:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

siendo por lo tanto:

$$\sigma_z = 0 ; \tau_{zx} = 0 ; \text{ y } \tau_{zy} = 0$$

4a.4. ESFUERZOS PRINCIPALES EN EL PLANO

Los esfuerzos principales mayor y menor en el plano quedan definidos, respectivamente, por:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2}$$

4a.5. ESTADO DE DEFORMACIÓN

Para expresar las deformaciones en un punto se deben considerar nueve términos que definen al tensor deformación [E] el cual se escribe como:

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{yx} & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

En el tensor, la diagonal principal mide las deformaciones unitarias longitudinales y los otros elementos del tensor miden las deformaciones unitarias angulares.

En el estudio de un elemento como cuerpo deformable se demuestra que:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} ; \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} ; \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

por lo que el tensor deformación puede escribirse como:

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

6

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

El vector deformación unitaria está dado por:

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix}$$

donde:

$\bar{\epsilon}$ = vector deformación unitaria; y

$$\bar{e} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix} = \text{vector unitario}$$

4a.6. DEFORMACIÓN LINEAL Y ANGULAR

El vector deformación unitaria se puede descomponer en un vector en dirección lineal (ver figura) más otro vector en la dirección perpendicular a dicho vector lineal. Esto es:

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_\theta$$

Para obtener el vector deformación lineal se proyecta el vector deformación sobre el vector unitario, con lo que se obtiene el módulo del vector de deformación lineal. Lo anterior puede realizarse mediante el producto punto de los vectores $\bar{\epsilon}$ y \bar{e} , o sea:

$$\epsilon_1 = \bar{\epsilon} \cdot \bar{e}$$

El vector deformación lineal tiene la misma dirección que el vector unitario. Por lo tanto:

$$\bar{\epsilon}_1 = \epsilon_1 \bar{e}$$

Para la determinación del vector deformación angular basta realizar una resta de vectores, debido a que:

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_\theta$$

por lo tanto:

$$\bar{\epsilon}_\theta = \bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_1$$

4a.7. ESTADO DE DEFORMACIÓN PLANA

Se presenta un estado de deformación plana cuando todas las deformaciones ocurren en direcciones perpendiculares a uno de los ejes ortogonales; por lo tanto, el tensor deformación no tendrá deformación lineal ni angular en la dirección de dicho eje. En otras palabras, se presenta un estado de deformación plana cuando las deformaciones solo ocurren en un plano.

El tensor deformación [E] queda de la siguiente manera:

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y \end{bmatrix}$$

4a.8. PRINCIPIOS GENERALES DE LA MECÁNICA

a) Principio de conservación de la masa Este principio establece que en el interior de un "volumen de control" no hay ni creación ni destrucción de masa. Entendiéndose por volumen de control un elemento diferencial referido a un sistema coordenado fijo en el espacio. La ecuación que representa al principio de conservación de masa, también llamada ecuación de continuidad, se escribe como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

b) Principio de conservación de cantidad de movimiento.- Este principio expresa que "La rapidez de variación con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento de un sistema mecánico es igual a la resultante de las fuerzas exteriores actuantes". Se ve que este principio equivale a la segunda ley de Newton. La ecuación de la cantidad de movimiento es:

$$\text{div}(\bar{T}) = \rho(\bar{a} - \bar{f})$$

c) Ecuaciones de equilibrio.- Estas son las que debe cumplir cualquier elemento diferencial de un cuerpo que se encuentra en equilibrio dinámico, y que son deducidas a partir de la ecuación de cantidad de movimiento. Estas se escriben como:

$$\rho a_x = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho a_y = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho a_z = \rho f_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

d) Principio de conservación de energía.- Según este principio la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma (aquí no se consideran los efectos relativistas de intercambio entre materia y energía). La ecuación diferencial que representa este principio se puede escribir como:

$$\rho C_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = K \nabla^2 \theta + (\sigma_x + \rho p) \dot{\epsilon}_x + (\sigma_y + \rho p) \dot{\epsilon}_y + (\sigma_z + \rho p) \dot{\epsilon}_z$$

$$+ 2(\tau_{xy} \dot{\epsilon}_{xy} + \tau_{xz} \dot{\epsilon}_{xz} + \tau_{yz} \dot{\epsilon}_{yz})$$

e) Principio de aumento de entropía.- Este principio expresa que "La variación con el tiempo de la entropía total (S_T) de un sistema, nunca es menor que la suma del flujo de entropía S_f , a través de sus fronteras, así como del flujo de entropía proporcionada por la masa que fluye a través de ellas". Este principio se simboliza de la siguiente manera:

$$\frac{dS_T}{dt} - B - \int_{S_c} S_f ds \geq 0$$

donde:

B representa el flujo de entropía debido a la masa que fluye.

4a.9. MÉTODO DIRECTO

Este es un procedimiento en el cual se plantea el problema de resolución del conjunto formado por las ecuaciones de equilibrio, las relaciones cinemáticas y las ecuaciones constitutivas.

Las ecuaciones de equilibrio son

$$\rho a_x = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho a_y = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho a_z = \rho f_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

y las relaciones cinemáticas están dadas por

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

$$e_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad ; \quad e_{zx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right]$$

Por otro lado, se observa que las ecuaciones constitutivas que caracterizan el comportamiento del medio tienen la forma general

$$\varphi_1 \sigma = \varphi_2 e$$

donde φ_1 y φ_2 son operadores del siguiente tipo

$$\varphi_1 = \sum_{i=0}^n P_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \quad \text{y} \quad \varphi_2 = \sum_{i=0}^m q_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}$$

Se observa entonces que se tienen relaciones entre componentes isotrópicas (dilatacionales) y distorsionantes del tipo

$$\varphi_1 S = \varphi_2 e$$

$$\varphi_2 S_d = \varphi_3 e_d$$

siendo

$$S_d = S_x, S_y, S_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \text{ ó } \tau_{yz}$$

$$e_d = e_x, e_y, e_z, e_{xy}, e_{xz}, \text{ ó } e_{yz}$$

donde

$$\begin{aligned}
 S_x &= \sigma_x - S & ; & \quad e_x = \epsilon_x - e \\
 S_z &= \sigma_z - S & ; & \quad e_z = \epsilon_z - e \\
 S_y &= \sigma_y - S = -(S_x + S_z) & ; & \quad e_y = \epsilon_y - e = -(e_x + e_z)
 \end{aligned}$$

siendo

$$S = \frac{S_x + S_y + S_z}{3} \quad ; \quad y \quad e = \frac{e_x + e_y + e_z}{3}$$

En un material dado se tiene la siguiente pareja de ecuaciones, una para la relación isotrópica y otra para la distorsionante

$$P''S = Q''e$$

4a.5

$$P'S_d = Q'e_d$$

donde

$$P'' = \varphi_1 \quad ; \quad Q'' = \varphi_2 \quad ; \quad P' = \varphi_3 \quad ; \quad Q' = \varphi_4$$

Las relaciones 4a.5 son las ecuaciones constitutivas.

El procedimiento de solución es como sigue:

- a) En las ecuaciones constitutivas se reemplazan las cantidades de deformación por las de desplazamiento, de acuerdo con las relaciones cinemáticas correspondientes.
- b) Las expresiones de esfuerzos, resultantes del paso anterior, se reemplazan en las ecuaciones de equilibrio.
- c) Se encuentra una expresión vectorial que sintetiza las tres ecuaciones de equilibrio anterior. Esta variará según el modelo escogido para las componentes isotrópicas y para las distorsionantes.
- d) Se resuelve por algún método matemático conocido de ecuaciones diferenciales parciales u otro equivalente (métodos numéricos, etc.) la expresión resultante mencionada.

V. PROCEDIMIENTOS DE SOLUCION

Siguiendo con la idea de la metodología de investigación, se puede señalar que los procedimientos de solución se relacionan con la etapa de cálculo.

Los modelos matemáticos indicados en el capítulo anterior para el estudio de la interacción suelo-estructura se formulan siguiendo procedimientos conceptuales o formales, respetando principios físicos y presentandose en forma de ecuaciones diferenciales. Como método de solución se dá el proceso que transforma, por ejemplo, una ecuación diferencial en un sistema lineal de ecuaciones. Algunos de estos métodos pueden ser: 1) los métodos cerrados (series de funciones armónicas, transformada de Laplace, etc.), y 2) los métodos variacionales. Los primeros se describen en el apéndice C de esta tesis. El apéndice B trata el tema del cálculo funcional del que se derivan los métodos variacionales.

V.1. Métodos directos en los problemas variacionales

Sólo en casos excepcionales las ecuaciones diferenciales de los problemas variacionales se integran en forma finita (ver apéndice B). De aquí la necesidad de obtener otros métodos para la solución de estos problemas. Los llamados *métodos directos* consisten fundamentalmente en que el problema variacional (apéndice B), se considera como límite para cierto problema sobre el extremo de una función de un número finito de variables, suponiendo en la funcional $\psi[\psi(x)]$ que las funciones admisibles pueden desarrollarse en series de potencias

$$\psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

o en series de Fourier

$$\psi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\alpha + b_n \operatorname{senn}\alpha)$$

o en general, en algunas series del tipo

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

donde $\varphi_n(x)$ son funciones dadas.

Así la funcional es función de un conjunto infinito de variables

$$\mathfrak{A}[\psi(x)] = \varphi(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$$

V.1.1. Método de diferencias finitas de Euler

La idea del método de diferencias finitas consiste en que se consideran los valores de la funcional $\mathfrak{A}[\psi(x)]$ en las líneas quebradas formadas por un número n dado de segmentos rectilíneos cuyas abscisas de los vértices están dadas por: $\alpha_0, \alpha_0 + \Delta\alpha, \alpha_0 + 2\Delta\alpha, \dots, \alpha_0 + (n-1)\Delta\alpha$, donde

$$\Delta\alpha = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{n} \quad (\text{ver figura V.1})$$

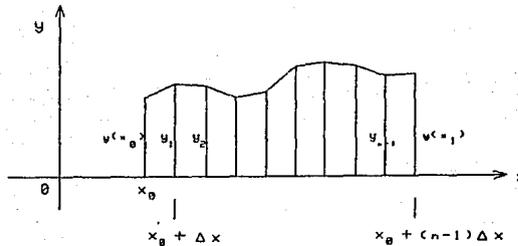


Figura V.1

De esta manera la funcional $\mathfrak{A}[\psi(x)]$ se transforma en una función $\varphi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$, de las ordenadas $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$, de los vértices de la quebrada.

El método consiste en escoger las ordenadas $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$, de

modo que la función $\varphi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$ tenga un extremo, es decir se determinan las $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$, del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_{n-1}} = 0$$

y luego se pasa al límite cuando $n \rightarrow \infty$, de donde se obtiene, imponiendo ciertas restricciones, la solución del problema variacional.

Sin embargo, es más fácil calcular el valor de la funcional $\varphi[\psi(x)]$, en las quebradas, en forma aproximada. Si no se efectúa el paso al límite, puesto que n es finito, del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

se pueden determinar las ordenadas $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$, buscadas, obteniendo así una quebrada que es la solución aproximada del problema variacional.

V.1.2. Método de Ritz

La idea del método de Ritz consiste en que los valores de la funcional $\varphi[\psi(x)]$ se consideran solo en las curvas de todas las combinaciones lineales admisibles

$$\psi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$$

con coeficientes constantes. Las combinaciones se forman con las n primeras funciones de cierta sucesión elegida de funciones $W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x)$.

Así la función $\varphi[\psi(x)]$ se transforma en una función $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, se escogen de modo que la función $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ tenga un extremo, por lo que dichos coeficientes deben ser determinados del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Si se pasa al límite para $n \rightarrow \infty$ se obtiene

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i W_i(x)$$

que es, para ciertas restricciones, la solución exacta del problema

variacional.

Si solo se consideran los n primeros términos

$$\psi = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$$

se obtiene una solución aproximada del problema variacional.

V.1.3. Método de Kantorovich

En el método de Kantorovich la solución aproximada se busca en la forma

$$\psi_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_1) W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

en donde los coeficientes $\alpha_k(x_1)$ son funciones incógnitas de una de las variables independientes x_1 .

La funcional $J[\psi]$ se transforma entonces, en una funcional $\bar{J}[\alpha_1(x_1), \alpha_2(x_1), \dots, \alpha_m(x_1)]$ que depende de m funciones, de una variable independiente, $\alpha_1(x_1), \alpha_2(x_1), \dots, \alpha_m(x_1)$.

Las funciones $\alpha_1(x_1), \alpha_2(x_1), \dots, \alpha_m(x_1)$, se escogen de modo que la funcional \bar{J} tenga un extremo.

Si se pasa al límite para $m \rightarrow \infty$, se puede obtener, bajo ciertas condiciones, la solución exacta. Si no se pasa al límite se puede obtener una solución aproximada.

Si se escoge el mismo número m de términos en este método y en el de Ritz y se comparan los resultados, se observa que la aproximación con el método de Kantorovich es más exacta que al aplicar el de Ritz, puesto que aquí es posible manejar una mayor clase de funciones, pudiéndose escoger de entre ellas las que mejor se aproximen a la solución del problema variacional.

V.1.4. Método de Galerkin

Este es un método no variacional, el cual puede ser aplicado a algunos problemas no lineales.

Considerando la ecuación

$$L(\psi) = f(x) \quad 5.1$$

se toma un sistema de ecuaciones continuas

$$w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x) \quad 5.2$$

linealmente independientes que satisfacen ciertas condiciones.

Escogiendo la solución aproximada del problema en forma de la

combinación lineal de las primeras n funciones del sistema lineal 5.2, se tiene

$$\psi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x)$$

Se sustituyen las ψ_n en la ecuación 5.1 y se eligen los coeficientes α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de tal manera que la función

$$L \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x) \right] - f(x)$$

sea ortogonal a cada función $w_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots, n$), esto es

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[L \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x) \right] - f(x) \right] w_i(x) dx = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, ψ_n tiende a la solución exacta

$$\bar{\psi} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i w_i(x)$$

En la mayoría de las veces se escoge solo un número n finito de constantes α_i , y además no muy grande ($n = 2, 3, 4, 5$, y a veces incluso $n = 1$). En este caso hay que tomar, claro está, solo n funciones $w_i(x)$ y elegir dichas funciones de modo que sean linealmente independientes (condición de ortogonalidad) y que satisfagan las restricciones establecidas.

V.2. Método del elemento finito

El elemento finito es un método numérico perteneciente a la familia de métodos variacionales, que sirven para resolver problemas de maximización o minimización de funcionales, los cuales a su vez sirven para resolver ecuaciones diferenciales, ya que estas pueden transformarse en funcionales.

La maximización de la funcional puede llevarse a cabo por ejemplo, con los métodos variacionales el *metodo de Ritz* o el *método del elemento finito*, o no variacionales por ejemplo el *metodo de Galerkin*.

El método del elemento finito utiliza el espacio de funciones de Hilbert.

V.2.1. Evolución del método del elemento finito

La evolución del método del elemento finito puede dividirse en tres periodos históricos: a) El periodo medieval, b) El renacimiento, y c) El periodo barroco.

PERIODO MEDIEVAL

Este periodo está caracterizado por la aplicación, por decirlo así a siegas, de las matemáticas a los problemas de Ingeniería.

Por ejemplo, en el tratamiento de los problemas de Ingeniería, los cuales presentan algunas veces dificultades en su análisis, no tanto por su complejidad matemática sino por el número de elementos que se puede involucrar, un elemento estructural se representaba por un gran número de elementos esencialmente simples, observándose la naturaleza individual de cada elemento. Luego se especificaban las variables de entrada y salida para cada elemento y los puntos que lo formaban y las relaciones entre ellos.

En forma matricial se tiene

$$F^o = K^o u^o + F_{0}^o \quad 5.3$$

o

$$F_1^o = K_{1j}^o u_j^o + F_{0_1}^o$$

Aquí F podía representar, por ejemplo, el sistema de fuerzas actuando en el elemento estructural, y u los desplazamientos de los nodos del mismo elemento.

Las ecuaciones 5.3 implican un comportamiento lineal, pero no era evidente que la teoría se pudiese extenderse a situaciones no lineales.

Lo que seguía era establecer las conexiones del sistema. Primero identificando un campo de variables tales como u , para representar la continuidad del sistema ensamblado

$$u_j = u_j^o$$

Después, por el equilibrio del segundo campo de variables en cada nodo, la suma establece que

$$\sum_{o=1}^n F_1^o = 0$$

El sistema de ecuaciones se obtiene como

$$Ku + F_0 = 0 \quad 5.4$$

donde

$$K = K_{1j} = \sum_{o=1}^n K_{1j}^o$$

y

$$F_0 = F_{0_1} = \sum_{o=1}^n F_{0_1}^o$$

Aun siendo muy grande, el sistema de ecuaciones 5.4 puede resolverse.

EL RENACIMIENTO

Este periodo se caracteriza por la justificación de los modelos matemáticos del elemento finito empleados en el análisis de los problemas de ingeniería.

El principio del trabajo virtual representa una propiedad más general de un sistema estructural y es una herramienta más poderosa en el análisis estructural. El procedimiento en su forma presente asume el teorema clásico que dice: si un campo de fuerzas está en equilibrio para todos los puntos de un medio, entonces la suma del trabajo externo e interno (generado a partir de desplazamientos virtuales), debe ser igual a cero.

El trabajo virtual puede ser representado como la minimización de un funcional. Si $\mathcal{X}(u)$ es tal funcional, representada generalmente por una integral tomada sobre el dominio, la aproximación de u conduce a la minimización de un campo aproximado de ecuaciones

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial a} = 0 \quad 5.5$$

a queda definida por la expresión

$$u = Na$$

donde

u = vector de desplazamientos

y

N = número de parámetros necesarios para definir los desplazamientos a

Si la funcional 5.5 es cuadrática, y si

$$\mathcal{X} = \sum \mathcal{X}_i$$

entonces la ecuación 5.5 conduce a

$$Ka + F_0 = 0$$

EL PERIODO BARROCO

La era barroca ha sido caracterizada por la aparición de nuevas formas del método mediante una tremenda elaboración de detalle, yuxtaposición de formas para tratar mayor número de problemas, y abandono de los modelos clásicos con un importante registro de nuevas bases científicas y nuevas aplicaciones

V.2.2. Descripción del método

En muchas ocasiones los problemas físicos pueden representarse

matemáticamente por una o varias ecuaciones diferenciales, así mismo, pueden plantearse como un problema de funcionales. Luego entonces, cuando están dados en forma de ecuaciones diferenciales se puede transformar a un problema de funcionales equivalente.

De esta manera los problemas de mecánica de medios continuos en los cuales deben satisfacerse las ecuaciones de equilibrio, las relaciones cinemáticas y las ecuaciones constitutivas (relaciones de Hooke para casos elásticos, etc.), se transforman en un problema en el que se minimiza la Energía Potencial de Deformación dentro de una región dada, ante la acción de cargas.

Este funcional para el caso elástico se plantea así: se considera que la energía comunicada por las fuerzas externas a un sistema material se transforman en Energía Potencial de Deformación, por tanto

$$\text{Text} = E_p \quad 5.6$$

donde

Text = Trabajo externo

E_p = Energía de Deformación absorbida por el medio

La ecuación 5.6 es válida para problemas estáticos y elásticos (No se consideran efectos inelásticos ni dinámicos que introducirían efectos de amortiguamiento por pérdida de calor).

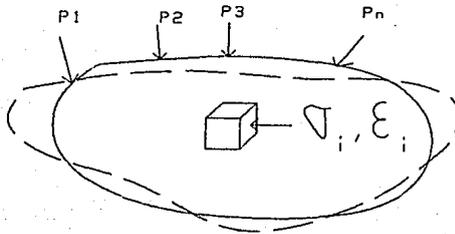


Figura V.2

El trabajo externo estará dado por:

$$\text{Text} = \int_S F_1 \delta_1 ds \quad 5.7$$

En tanto que la energía potencial de deformación está dada por la integral en todo el volumen del medio de los productos $\sigma \epsilon$ ($dvol$); ya que σ representa energía por unidad de volumen, en tanto que ϵ es una

cantidad adimensional, luego la Energía Potencial será:

$$E_p = \int_{vol} \sigma \epsilon dvol \quad 5.8$$

Así que reemplazando en 4, a 5 y a 6, se obtiene

$$\int_{s} F_i \delta_i ds = \int_{vol} \sigma \epsilon dvol \quad 5.9$$

Los productos $F_i \delta_i$ y $\sigma_i \epsilon_i$ son productos punto vectoriales (escalares).

Así por ejemplo si

$$F_i = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad \delta_i = \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{Bmatrix}$$

entonces:

$$\bar{F}_i \cdot \bar{\delta}_i = F_x \delta_x + F_y \delta_y + F_z \delta_z \quad 5.10$$

y matricialmente:

$$\bar{F}_i \cdot \bar{\delta}_i = [\delta]^t [F]$$

En tanto que

$$\bar{\sigma}_i = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad y \quad \epsilon_i = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

siendo:

$$\bar{\sigma}_i \cdot \bar{\epsilon}_i = \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \quad 5.11$$

y matricialmente

$$\bar{\sigma}_i \cdot \bar{\epsilon}_i = [\sigma]^t [\epsilon]$$

Ahora bien, el problema en la ecuación 5.9 consiste en que se conocen las cargas exteriores F_i , así como la distribución en el medio de σ y de ϵ , o sea que se desconoce:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_i &= \delta_i(x, y, z) && \text{en la frontera} \\ \bar{\sigma}_i &= \sigma_i(x, y, z) && \text{en el medio} \\ \bar{\epsilon}_i &= \epsilon_i(x, y, z) && \text{en el medio} \end{aligned}$$

y por lo tanto el problema matemático que debe resolverse es calcular el valor de cualquiera de la integrales a ambos lados de la ecuación

5.9. Por ejemplo en el caso de la ecuación 5.8

$$E_p = \int_{vol} \sigma_i \epsilon_i dvol$$

el problema se plantea así: Encontrar las funciones $\sigma(\alpha, \psi, \zeta)$ y $\epsilon(\alpha, \psi, \zeta)$ tales que se minimice la Energía Potencial de Deformación. Es decir, deben encontrarse las distribuciones de esfuerzos y deformaciones tales que la Energía Potencial sea mínima; ya que en la naturaleza al aplicar fuerzas a un sistema este se deformará de tal manera que se consuma la menor cantidad de energía. Es decir no adoptará deformaciones tales que la integral 5.16. represente una energía excesiva, sino la mínima, y además, obsérvese que la configuración para un mínimo es única. Notese que las funciones solución del problema $\sigma(\alpha, \psi, \zeta)$ y $\epsilon(\alpha, \psi, \zeta)$ cumplen con las condiciones de equilibrio, relaciones cinemáticas y las ecuaciones constitutivas, por lo que representa la solución del problema físico planteado.

MÉTODO DE SOLUCIÓN

A continuación se detallara la solución de este problema, con referencia al problema bidimensional. En este caso los vectores se representarán así:

$$\bar{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\epsilon} = [\epsilon]_{3 \times 1} \quad \bar{\sigma} = [\sigma]_{3 \times 1}$$

Para materiales elásticos la ley de Hooke se escribe así:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad 5.12$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad 5.13$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad 5.14$$

$$\text{De 5.12} \quad \sigma_x = E\epsilon_x + \nu\sigma_y$$

$$\text{De 5.13} \quad \sigma_y = E\epsilon_y + \nu\sigma_x$$

entonces:

$$\sigma_x = E\epsilon_x + \nu(E\epsilon_y + \nu\sigma_x) = E\epsilon_x + \nu E\epsilon_y + \nu^2\sigma_x$$

Despejando σ_x

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y)$$

De manera análoga:

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

En forma matricial se tendrá lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

entonces:

$$[\sigma]_{3 \times 1} = [D]_{3 \times 3} [\epsilon]_{3 \times 1}$$

donde:

[D] es la matriz simétrica definida por:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

de ahí que:

$$[\sigma]^t [\epsilon] = [\epsilon]^t [D] [\epsilon]$$

Así que la ecuación 5.8 queda:

$$E_p = \int_{vol} [\epsilon]^t [D] [\epsilon] dv$$

Ahora bien, las relaciones cinemáticas son:

$$\epsilon_x = \frac{\partial \delta_x}{\partial x} \quad ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial \delta_y}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial \delta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta_y}{\partial x} \right) \quad \text{S. 15}$$

$$\bar{\epsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \delta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \delta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta_y}{\partial x} \end{array} \right\}$$

$$E_p = \int_{V_01} \left[\frac{\partial \delta x}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial \delta y}{\partial \psi} \quad \left[\frac{\partial \delta x}{\partial \psi} + \frac{\partial \delta y}{\partial \alpha} \right] \right] [D] \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \delta y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \delta x}{\partial \psi} + \frac{\partial \delta y}{\partial \alpha} \end{bmatrix} dv \quad 5.16$$

Por lo que se ve el problema consiste en determinar los campos escalares $\delta x(\alpha, \psi)$ y $\delta y(\alpha, \psi)$ que minimizan el funcional 5.16. O sea determinar el campo de desplazamientos $\bar{\delta} = \delta x i + \delta y j$ que minimiza la energía potencial.

Por eso se ve que las integrales 5.7 y 5.8 dependen del campo vectorial de desplazamientos que se presenta en la región del problema considerado y que es el que debe determinarse.

Se tiene así que dicho campo puede tener la siguiente forma para cada uno de sus componentes escalares según α y ψ .

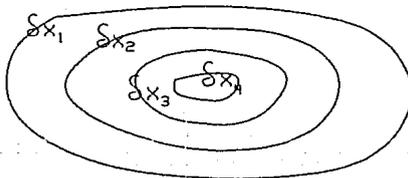


Fig.V.3 Curvas de nivel para δx
(o para δy)
 δ = desplazamiento

Si se discretiza la región, por ejemplo mediante triángulos (que es lo que se denomina "Elementos Finitos"), dentro del área comprendida en cada uno de ellos, puede suponerse que la variación de δx ó δy es lineal, es decir se define un plano.

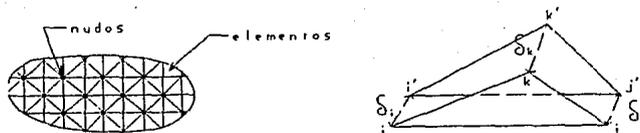


Figura V.4

La configuración real se aproxima por una serie de caras planas que definen una superficie poliédrica; esta será pues una aproximación al problema real. Las expresiones matemáticas de estas funciones serán:

$$\left. \begin{aligned} \delta_x(x, y) &= a + bx + cy \\ \delta_y(x, y) &= d + ex + fy \end{aligned} \right\} \quad 5.17$$

Las únicas incógnitas son los parámetros de estas funciones.

OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS

Se establecen las siguientes hipótesis.

- 1.- Se supone que se conocen los desplazamientos en cada nudo del triángulo.

Si se conoce δ_{x_i} , δ_{x_j} , δ_{x_k}

$$\left. \begin{aligned} \delta_{x_i} &= a + bx_i + cy_i \\ \delta_{x_j} &= a + bx_j + cy_j \\ \delta_{x_k} &= a + bx_k + cy_k \end{aligned} \right\} \quad 5.18$$

De aquí se obtienen los valores de a , b y c .

Para los desplazamientos en y se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{y_i} &= d + ex_i + fy_i \\ \delta_{y_j} &= d + ex_j + fy_j \\ \delta_{y_k} &= d + ex_k + fy_k \end{aligned} \right\} \quad 5.19$$

Con esto se obtienen d , e y f .

OBTENCION DE LAS CONSTANTES.

Para el sistema 5.18 se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \psi_1 \\ 1 & \alpha_j & \psi_j \\ 1 & \alpha_k & \psi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_j \\ \delta x_k \end{bmatrix} \quad \Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \psi_1 \\ 1 & \alpha_j & \psi_j \\ 1 & \alpha_k & \psi_k \end{bmatrix}$$

Se tiene por tanto que:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \delta x_1 & \alpha_1 & \psi_1 \\ \delta x_j & \alpha_j & \psi_j \\ \delta x_k & \alpha_k & \psi_k \end{vmatrix}}{\Delta} \rightarrow a = \frac{a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_j + a_3 \delta x_k}{\Delta}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \delta x_1 & \psi_1 \\ 1 & \delta x_j & \psi_j \\ 1 & \delta x_k & \psi_k \end{vmatrix}}{\Delta} \rightarrow b = \frac{b_1 \delta x_1 + b_2 \delta x_j + b_3 \delta x_k}{\Delta}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \delta x_1 \\ 1 & \alpha_j & \delta x_j \\ 1 & \alpha_k & \delta x_k \end{vmatrix}}{\Delta} \rightarrow c = \frac{c_1 \delta x_1 + c_2 \delta x_j + c_3 \delta x_k}{\Delta}$$

De manera análoga se obtendrán las constantes d , e y f para el campo $\delta y(\alpha, \psi)$. Se tiene que:

$$d = \frac{\begin{vmatrix} \delta y_1 & \alpha_1 & \psi_1 \\ \delta y_j & \alpha_j & \psi_j \\ \delta y_k & \alpha_k & \psi_k \end{vmatrix}}{\Delta} \rightarrow d = \frac{a_1 \delta y_1 + a_2 \delta y_j + a_3 \delta y_k}{\Delta}$$

$$e = \frac{b_1 \delta y_1 + b_2 \delta y_j + b_3 \delta y_k}{\Delta} ; \quad f = \frac{c_1 \delta y_1 + c_2 \delta y_j + c_3 \delta y_k}{\Delta}$$

Aplicando las relaciones cinemáticas 5.15 y 5.17 se tiene:

$$c_x = \frac{\partial \delta x}{\partial \alpha} = b \quad ; \quad c_y = \frac{\partial \delta y}{\partial \psi} = f \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial \delta x}{\partial \psi} + \frac{\partial \delta y}{\partial \alpha} = \text{Cte.}$$

Por lo cual la integral 5.16 queda:

$$E_p = \int_{\text{Vol}} [b \quad f \quad (c+e)] [D] \begin{bmatrix} b \\ f \\ c+e \end{bmatrix} dv$$

Por lo tanto:

$$[c] = \begin{bmatrix} b \\ f \\ c+e \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_1 \delta x_1 + b_2 \delta x_j + b_3 \delta x_k \\ c_1 \delta y_1 + c_2 \delta y_j + c_3 \delta y_k \\ c_1 \delta x_1 + c_2 \delta x_j + c_3 \delta x_k + b_1 \delta y_1 + b_2 \delta y_j + b_3 \delta y_k \end{bmatrix}$$

$$[c] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta x_j \\ \delta y_j \\ \delta x_k \\ \delta y_k \end{bmatrix}$$

De otra forma:

$$[c]_{3 \times 1} = [B]_{3 \times 6} [\delta^o]_{6 \times 1} \quad 5.20$$

donde:

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad y \quad [\delta^o] = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta x_j \\ \delta y_j \\ \delta x_k \\ \delta y_k \end{bmatrix}$$

De este modo la ecuación 5.16 queda:

$$E_p = \int_{\text{Vol}} [\delta^o]^t [B]^t [D] [B] [\delta^o] dv$$

$$E_p = [\delta^e]^t [B]^t [D] [B] [\delta^e] \int_{V_{e1}} dv$$

ya que $[\delta^e]$ y $[B]$ son independientes de las coordenadas.

Así pues:

$$E_p = [\delta^e]^t [B]^t [D] [B] [\delta^e] t A_k$$

o

$$E_p = [\delta^e]^t [K]_e [\delta^e] \quad 5.21$$

donde:

$$[K]_e = [B]^t [D] [B] t A_t$$

t = espesor unitario

A_t = área del triángulo = $\frac{\Delta}{2}$

La ecuación 5.21 sería válida solo para la figura triangular.

Ahora bien, las fuerzas que llegan a cada nudo del triángulo producen una energía tal que:

$$[\delta^e]^t_{1 \times 6} [F]_{6 \times 1} = E_p \quad 5.22$$

donde:

$$[F]_e = \begin{bmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \\ F_{x_j} \\ F_{y_j} \\ F_{x_k} \\ F_{y_k} \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

Igualando 5.21 con 5.22 se tiene:

$$[\delta^e] [F]_e = [\delta^e]^t [K]_e [\delta^e]$$

premultiplicando por $[\delta^e]^{-1}$ ambos lados, se obtiene:

$$[F]_e = [K]_e [\delta^e] \quad 5.23$$

Válida para un elemento.

Se puede generalizar a la malla total de la siguiente manera:

$$[F]_T = \sum_{i=1}^{N_e} [F]_e \quad ; \quad N_e = \text{Número de elementos}$$

$$[K]_T = \sum_{i=1}^{N_e} [K]_e$$

esta última expresión es válida ya que se pueden sumar las energías elementales de cada elemento, para obtener la energía total.

$$[\delta^e]_T = \sum_{i=1}^{N_e} [\delta_i]^e$$

Por lo tanto el problema global queda:

$$[K]_T \begin{Bmatrix} \delta \end{Bmatrix}_{2n \times 1} = [F]_{2n \times 1} \quad 5.24$$

Ahora se tiene un sistema lineal de $2n$ ecuaciones con $2n$ incógnitas, siendo n el número total de nudos de la malla. Así que el problema del funcional se ha transformado mediante el Método de Elementos Finitos en un sistema lineal de ecuaciones y los resultados que proporciona son valores discretos de las funcionales buscadas.

Conocidos los desplazamientos es posible calcular el estado de esfuerzos y deformaciones. Para ello se utilizan los desplazamientos conocidos de cada elemento.

Dado que, de 5.20 :

$$[\epsilon] = [B] \left\{ \delta^e \right\} \quad 5.25$$

$$y \quad [\sigma]_e = [D] [B] \left\{ \delta^e \right\} \quad 5.26$$

Nótese que los esfuerzos y deformaciones serán constantes en cada elemento, o sea tienen distribución uniforme en cada uno de ellos, pero, variando de elemento a elemento. Esto constituye un error de aproximación del método.

En lo que sigue se detallará la obtención de la matriz de rigidez total $[K]_T$, así como el vector de cargas $[F]_T$, mediante los cuales, al resolver el sistema 5.24, se obtendrán los desplazamientos de cada nudo, o sea el vector $\left\{ \delta \right\}_T$, que será parte de la solución buscada, la otra parte la constituyen la obtención del campo de esfuerzos y deformaciones mediante las ecuaciones 5.25 y 5.26.

Notese que los elementos vistos fueron triangulos, sin embargo, se pueden emplear rectángulos y, para problemas tridimensionales, pueden usarse paralelepípedos, etc. Además la solución se dió para el caso elástico, pero la misma metodología puede aplicarse a otros materiales e incluso a otros campos de la física (Termodinámica, Electricidad, etc.).

DETALLES DEL PROCESO

Servirán para ver como se generan mallas de elementos triangulares, numeración de nudos y elementos, elaboración de la matriz de rigidez total, del vector de cargas (incluyendo fuerzas de cuerpo), así como la solución de sistemas de ecuaciones y finalmente la manera de obtener el estado de esfuerzos y deformaciones conocidos los desplazamientos. Además se presentará un diagramma de bloques para programar el método por computadora.

ELABORACIÓN DE LA MALLA.

El medio se discretiza mediante una serie de elementos triangulares.

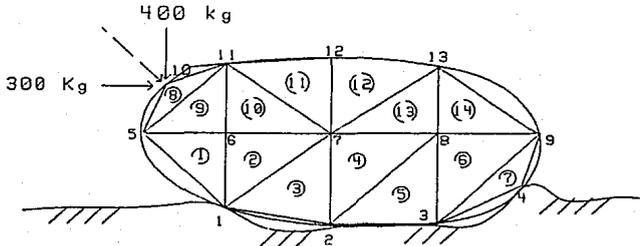


Figura V.5

Queda formada una malla caracterizada por el número de nudos y elementos, en la figura son 14 elementos y 13 nudos.

Comunente los nudos y elementos se numeran de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba.

Existen restricciones para formar mallas, como la que un nudo no debe quedar sobre alguno de los lados de un elemento.

DATOS PARA NUDOS.

Los nudos se identifican mediante sus coordenadas y sus condiciones de restricción, o sea debe señalarse si los nudos son libres de moverse o no, según las direcciones x , y ó z , y de giro en las mismas direcciones. En la tabla siguiente el número 1 indica que están restringidos y el cero que están libres. De esta manera, en la

figura 1, los nudos 1 a 4 están restringidos en todas las direcciones en tanto que del 5 al 13 están restringidos según φ . Los giros se indican también en la misma tabla. En ella se ve que pueden señalarse diferentes posibilidades de movimiento (grados de libertad).

TABLA V. 1

# de nudo	Rest.	Rest.	Rest.	Giro	Giro	Giro	Coor.	Coor.	Coor.
	α	ψ	φ	α	ψ	φ	α	ψ	φ
1	1	1	1	1	1	1	*	*	0
2	1	1	1	1	1	1	*	*	0
3	1	1	1	1	1	1	*	*	0
4	1	1	1	1	1	1	*	*	0
5	0	0	0	1	1	1	*	*	0
6	0	0	0	1	1	1	*	*	0
7	0	0	0	1	1	1	*	*	0
8	0	0	0	1	1	1	*	*	0
9	0	0	0	1	1	1	*	*	0
10	0	0	0	1	1	1	*	*	0
11	0	0	0	1	1	1	*	*	0
12	0	0	0	1	1	1	*	*	0
13	0	0	0	1	1	1	*	*	0

DATOS PARA ELEMENTOS

A su vez los elementos se indican señalando su número, los nudos que le pertenecen (incidencias), así como el tipo de material de que están constituidos. Al respecto los nudos de cada elemento se identifican como i , j y k , siguiendo el orden opuesto al giro de las manecillas del reloj (ver figura V.6)

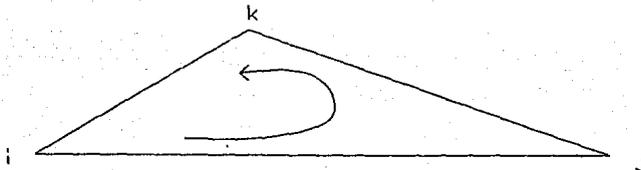


Figura V.6

Para el caso de la figura V.5, los datos serían los de la tabla 2. En ella, a los nudos i , j y k se les designa, respectivamente:

NUD(I)

NUD(J)

NUD(K)

TABLA V.2

# de elem.	NUD(I)	NUD(J)	NUD(K)	Tipo de material
1	1	6	5	3
2	1	7	6	2
3	1	2	7	2
4	2	8	7	2
5	2	3	8	2
6	3	9	8	3
7	3	4	9	3
8	5	11	10	3
9	5	6	11	3
10	6	7	11	3
11	7	12	11	1
12	7	13	12	1
13	7	8	13	3
14	8	9	13	3

DATOS SOBRE MATERIALES.

Puede tenerse más de un material, para esto, de cada material se dan los datos de: Peso volumétrico γ , Módulo de Elasticidad E y relación de Poisson ν .

TABLA V.3

tipo de material	E (Kg/m ²)	ν	γ (Kg/m ³)
1	2×10^8	0.25	2000
2	3×10^8	0.35	2100
3	1×10^7	0.45	1800

DATOS DE CARGAS

Se indican señalando el nudo sobre el cual actúan y sus componentes según α , ψ y ζ . Por ejemplo, para la figura 1 se tienen los datos de la TABLA 5.4

TABLA V.4

# de carga	# donde actúa	comp. α (Kg)	comp. ψ (Kg)	comp. ζ (Kg)
1	10	300	400	0
2	13	0	600	0

FORMACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE CADA ELEMENTO

Recordar para ello que esta matriz, $[K]^e$, se forma por el producto:

$$[K]^e = [B]^t [D] [B] t A_t \quad \text{con } t = 1$$

siendo:

$$A_t = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \psi_1 \\ 1 & \alpha_j & \psi_j \\ 1 & \alpha_k & \psi_k \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad \text{donde: } \begin{aligned} b_1 &= \psi_1 - \psi_k = b_1 \\ b_2 &= \psi_k - \psi_j = b_j \\ b_3 &= \psi_1 - \psi_j = b_k \\ c_1 &= \psi_j - \psi_k = c_1 \\ c_2 &= \psi_k - \psi_j = c_j \\ c_3 &= \psi_1 - \psi_j = c_k \end{aligned}$$

$$y \quad [D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

donde:

E = Módulo de elasticidad, y
 ν = relación de Poisson

Así que observando el orden de las matrices se tiene:

$$[B]_{6 \times 3}^t [D]_{3 \times 3} [B]_{3 \times 6} = [K]_{6 \times 6}^e$$

o sea que la matriz $[K]^e$ es de 6×6 . Se tiene por lo tanto que:

$$[K] = \left[\begin{array}{cccccc} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \underline{K_{61}} & \underline{K_{62}} & \underline{K_{63}} & \underline{K_{64}} & \underline{K_{65}} & \underline{K_{66}} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} I \\ \} J \\ \} K \end{array} \right\}$$

I J K

Esto indica la influencia de los datos de los nudos correspondientes sobre los renglones y las columnas de la matriz.

FORMACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE CADA ELEMENTO

Recordar para ello que esta matriz, $[K]^o$, se forma por el producto:

$$[K]_o = [B]^t [D] [B] t A_t \quad \text{con } t = 1$$

siendo:

$$A_t = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \psi_1 \\ 1 & \alpha_j & \psi_j \\ 1 & \alpha_k & \psi_k \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} b_1 &= \psi_1 - \psi_k = b_1 \\ b_2 &= \psi_k - \psi_j = b_2 \\ b_3 &= \psi_1 - \psi_j = b_3 \\ c_1 &= \psi_j - \psi_k = c_1 \\ c_2 &= \psi_k - \psi_j = c_2 \\ c_3 &= \psi_1 - \psi_j = c_3 \end{aligned}$$

$$y \quad [D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

donde:

E = Módulo de elasticidad, y
 ν = relación de Poisson

Así que observando el orden de las matrices se tiene:

$$[B]_{6 \times 3}^t [D]_{3 \times 3} [B]_{3 \times 6} = [K]_{6 \times 6}^o$$

o sea que la matriz $[K]^o$ es de 6×6 . Se tiene por lo tanto que:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} I \\ \} J \\ \} K \end{array} \right\}$$

I J K

Esto indica la influencia de los datos de los nudos correspondientes sobre los renglones y las columnas de la matriz.

Observese que en general el orden de la matriz es:

$$n_e = \text{Nudos del elemento} \times \text{grados de libertad}$$

Para el caso de un triángulo y para el problema bidimensional:

$$n_e = 3 \times 2 = 6$$

FORMACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TOTAL

Para esto, los elementos de la matriz de cada elemento se colocan en una matriz global, cuyas dimensiones serán:

$$NT = NN \times GL$$

donde:

NN = Número total de nudos de la malla.

GL = Grados de libertad.

De manera que los renglones y columnas de una matriz elemental se colocan en renglones y columnas de esta matriz global, según la regla siguiente:

Los renglones y columnas correspondientes a I se colocan en los renglones y columnas números N₁ y N₂.

siendo:

$$N_1 = [GL \times NUD(I)] - 1$$

$$N_2 = GL \times NUD(I)$$

(Recordar lo que significa NUD(I), NUD(J), etc. en la tabla V.2)

Asimismo, los correspondientes J y K se colocan en los renglones y columnas N₃, N₄, N₅ y N₆ respectivamente:

siendo:

$$N_3 = [GL \times NUD(J)] - 1$$

$$N_4 = [GL \times NUD(J)]$$

$$N_5 = [GL \times NUD(K)] - 1$$

$$N_6 = [GL \times NUD(K)]$$

De esta manera los datos correspondientes al elemento 8 de la figura V.5, se colocan (considerando que GL = 2) en:

$$N_1 = 2 \times 5 = 10$$

$$N_2 = 10$$

$$N_3 = 2 \times 11 - 1 = 21$$

$$N_4 = 22$$

$$N_5 = 2 \times 10 - 1 = 19$$

De esta manera la matriz global quedará:

(siendo NT = NN x GL = 13 x 2 = 26)

FIGURA V.7

1	2	...	9	10	11	...	19	20	21	22	...	28
2												
9			K ₁₁	K ₁₂			K ₁₅	K ₁₆	K ₁₃	K ₁₄		
10			K ₂₁	K ₂₂			K ₂₅	K ₂₆	K ₂₃	K ₂₄		
19			K ₅₁	K ₅₂			K ₅₅	K ₅₆	K ₅₃	K ₅₄		
20			K ₆₁	K ₆₂			K ₆₅	K ₆₆	K ₆₃	K ₆₄		
21			K ₃₁	K ₃₂			K ₃₅	K ₃₆	K ₃₃	K ₃₄		
22			K ₄₁	K ₄₂			K ₄₅	K ₄₆	K ₄₃	K ₄₄		
28												

Esta fué la matriz del elemento número 8.

Luego se formarían, de esta manera, matrices globales de cada elemento, y finalmente se sumarían entre sí todas estas matrices para obtener la matriz de rigidez total que se busca, la cual obviamente debe ser de orden $NT \times NT$.

OBTENCIÓN DEL VECTOR DE CARGAS.

Este vector se forma con las cargas concentradas aplicadas en cada nudo, así como por efecto de peso propio.

APORTACIÓN DE CARGAS CONCENTRADAS

En este caso como el vector de cargas concentradas $[F]$ es:

$$[F]_T = \begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \\ F_{x_3} \\ \vdots \\ F_{x_{NN}} \\ F_{y_{NN}} \end{bmatrix}$$

O sea un valor de orden $(NT \times 1)$, así que los datos de cargas se colocan en los renglones correspondientes al nudo donde actúan, por ejemplo para las cargas mostradas en la figura V.5, se obtendría (ver TABLA V.4).

$$\left\{ F_T \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Datos } F1(\text{nudo } 10) \quad 300 \quad \dots\dots\dots \text{ renglón } 19 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 400 \quad \dots\dots\dots \text{ renglón } 20 \\ \text{Datos } F2(\text{nudo } 13) \quad 600 \quad \dots\dots\dots \text{ renglón } 25 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \dots\dots\dots \text{ renglón } 28 \end{array} \right\}$$

CARGAS POR PESO PROPIO.

Para esto se procede concentrando un tercio del área correspondiente de cada elemento en cada uno de sus nudos, y luego la carga en cada nudo será igual a la suma de las cargas mencionadas correspondientes a cada elemento que llega a él. Por ejemplo (ver fig.V.5), para el nudo 6 la carga sería:

$$q = \frac{A_1 \gamma_1 + A_2 \gamma_2 + A_9 \gamma_9 + A_{10} \gamma_{10}}{3} \quad \begin{array}{l} \text{(carga vertical)} \\ \text{(espesor unitario)} \end{array}$$

la cual estaría colocada en el renglón doce del vector de cargas, ya que al nudo 6 concurren los elementos 1,2 9 y 10. Este dato se colocaría en el renglón 12 del vector de cargas, ya que la componente vertical de esta carga se obtiene multiplicando $6 \times 2 = 12$. De la misma manera se colocarían los pesos correspondientes para los demás nudos. Con esto se tendría completo el vector de cargas.

ELIMINACIÓN DE ECUACIONES POR RESTRICCIÓN DE MOVIMIENTOS

Esto se consigue gracias a que se eliminan los renglones y columnas cuyos desplazamientos están restringidos, lo cual se identifica mediante el número de nudo y su condición de restricción. Por ejemplo si el desplazamiento en α del nudo n_1 está restringido se eliminan el renglón y la columna números:

$$(GL \times n_1) - 1$$

En tanto que si el desplazamiento en ψ de otro nudo n está restringido se eliminan el renglón y la columna:

$$GL \times n_2$$

En el ejemplo de la figura V.5 están restringidos en α y ψ los nudos del 1 al 4 y se eliminarían los 8 primeros renglones de la matriz que aparece en la figura V.7.

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES

Como se vió antes, el Método del elemento finito conduce al

sistema lineal de ecuaciones dado por:

$$[K]_T [\delta]_T = [F]_T$$

Hemos ya visto como se forman $[K]_T$ y $[F]_T$. Solo falta resolver el sistema para obtener el vector de desplazamientos tanto en α como en ψ , correspondientes a cada nudo de la malla. Para esto puede emplearse cualquiera de los métodos numéricos conocidos, como el de Gauss-Jordan, Gauss-Seidel u otros (ver apéndice A). Vale la pena hacer la observación que la matriz $[K]_T$ resulta bandeada y porosa, es decir, tiene muchos elementos nulos. Por este motivo se han desarrollado diferentes versiones de los métodos anteriores que resultan más eficientes desde el punto de vista computacional, en lo referente a memoria necesaria y tiempo de cómputo. El tipo de estas matrices se representa en la figura V.8.

$$[K]_T = \begin{bmatrix} xxx & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & xxx & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & xxx & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & xxx \end{bmatrix}$$

FIGURA V.8

Ahora bien, cualquiera que sea el método de resolución empleado, nos proporciona la solución buscada, o sea el vector $[K]_T$ con lo cual se conocen los desplazamientos (tanto en α como en ψ) de los nudos de la malla. Los desplazamientos son en sí una representación discretizada del campo de desplazamientos buscado. De aquí se ve que entre más fina sea la malla mayor número de datos sobre dicho campo se conocerán, pero se incrementará el tiempo de cómputo, lo cual resulta más caro. Existe pues el problema de aproximación contra economía. Debe adoptarse entonces un criterio de optimización.

DETERMINACIÓN DEL ESTADO DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES

Conocidos los desplazamientos en cada nudo se calculan las deformaciones y los esfuerzos en cada elemento mediante las ecuaciones:

$$[\varepsilon_e] = [B] \{\delta^e\} \quad \text{y} \quad [\sigma] = [D][B][\delta^e]$$

En este caso para $\{\delta^e\}$ se emplean solo datos correspondientes a los desplazamientos de los nudos asociados a cada elemento.

Por ejemplo para el nudo 8 se tendría:

$$[\delta^8] = \begin{bmatrix} \delta_{x_8} \\ \delta_{y_8} \\ \delta_{x_{11}} \\ \delta_{y_{11}} \\ \delta_{x_{10}} \\ \delta_{y_{10}} \end{bmatrix}$$

De esta manera se obtendría:

$$\left\{ \varepsilon_o \right\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{así como} \quad \left\{ \sigma \right\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Notese que $\left\{ \sigma \right\}$ es uniforme en cada elemento, y con esto se obtiene el tensor esfuerzo en cada elemento:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

A partir de este tensor pueden encontrarse los esfuerzos principales por métodos conocidos. Aquí se ve también que este estado de esfuerzos es burdo y se obtiene mayor aproximación si la malla es más fina.

No obstante las limitaciones de precisión mencionadas antes, las cuales son inherentes a cualquier método numérico, este método da resultados muy satisfactorios que incluso pueden graficarse mediante programación, y además, permiten el manejo de cualquier geometría irregular, distribución de cargas y de heterogeneidad de propiedades de los elementos, las cuales son limitadas en otros métodos de análisis.

Notese además que los errores numéricos involucrados pueden ser del mismo orden a los que se tienen por falta de datos experimentales completos en toda la región.

VI. ANALISIS REALIZADOS

Pasando ahora a la parte correspondiente a la ejecución de los trabajos en la metodología de Investigación, se describirán en este capítulo los análisis realizados en la losa de concreto de la presa de Aguamilpa.

VI.1. Generalidades

En virtud de que el problema de la interacción en el sistema losa-suelo tiene un carácter esencialmente tridimensional, se optó por realizar la modelación utilizando la técnica del elemento finito, descrita en el capítulo anterior, para lo cual se emplearon elementos finitos tridimensionales mediante una malla como la mostrada en la figura VI.2. En el anexo VI.A se detallan las características generales del programa utilizado para llevar a cabo las modelaciones.

Las dimensiones de la presa y zonificación de materiales se encuentran representadas en la figura VI.1. El espesor de la losa, de acuerdo con la expresión $e = 0.003H$ y teniendo una altura máxima de 190 m, se consideró de 0.60 m. La forma de la losa es la que se presenta en la figura VI.1b.

Siendo el objetivo del estudio el diseño óptimo de la losa de concreto, se realizaron varios análisis, agrupándose en dos grandes familias, que son:

- 1) Análisis elásticos lineales con y sin juntas de tensión.
- 2) Análisis no elásticos-no lineales con y sin juntas de tensión.

A partir de estas familias se consideraron los siguientes casos:

- a) Análisis elástico-lineal sin juntas en planos verticales.
- b) Análisis elástico-lineal con juntas flexibles en planos verticales.
- c) Análisis no elástico-no lineal sin juntas en planos verticales.
- d) Análisis no elástico-no lineal con juntas flexibles en planos verticales.

- e) Análisis no elástico-no lineal sin juntas flexibles verticales en la franja central de la losa.

La colocación de la juntas flexibles (figura VI.3) obedece al hecho de que, al analizar la losa sin juntas, los resultados indicaron, como se detallará más adelante, la presencia de esfuerzos de tensión en algunas zonas de la losa.

La losa contará con una junta perimetral. El material de esta junta se consideró para los objetivos del análisis, muy compresible.

Para fines del análisis con elementos finitos, la losa se dividió en dos capas denominadas

- a) CAPA I.- Parte de la losa que se encuentra en contacto con el agua.
- b) CAPA II.- Parte de la losa que se encuentra en contacto con el enrocamiento.

Para las condiciones de frontera se consideraron las laderas como empotramientos rocosos permitiendo solo giros en los puntos localizados en esas zonas.

En todos los análisis la modelación se llevó a cabo considerando en la interacción losa-suelo, un contacto rugoso.

Para todos los casos la modelación se realizó analizando catorce etapas. Las primeras nueve corresponden a las etapas de construcción de la cortina y la losa, y las últimas, correspondientes a cinco etapas de llenado. Los resultados que se presentan en este trabajo son los que corresponden a la última etapa de llenado.

La figura VI.4 muestra los desplazamientos de la losa en la sección transversal máxima de la presa al final del llenado para todos los casos analizados.

En las figuras VI.7 a VI.11, que indican el estado de esfuerzos en la losa y en las zonas (material 5 y material 2), se presentan los resultados correspondientes a la mitad de la losa (vista desde aguas arriba), aprovechando la condición de simetría que se presenta en la boquilla en donde se localizará la cortina.

VI.2. ANÁLISIS ELÁSTICOS-LINEALES

VI.2.1. Análisis elástico lineal sin juntas verticales

Este análisis se llevó a cabo suponiendo que los materiales constitutivos de la presa (ver figura VI.1), tienen como características de deformabilidad las que se muestran en la tabla VI.1, siguiente.

TABLA VI.1

	$E, \times 10^6$ (Kg/m ²)	ν	ϕ	$C, \times 10^6$ (Kg/m)	γ (Kg/m ³)
LOSA	2000	.30	40°	2500	2400
JUNTA PERINETRAL	.0001	.40	0°	.00005	1900
MATERIAL 5	15	.20	32°	5	1050
MATERIAL 2	18	.15	35°	0	2100
ENROCAMIENTO	15	.15	40°	0	2100

Los resultados de estos análisis se presentan en las figuras VI.5 a VI.7ℓ correspondientes a la última etapa de llenado.

Las figuras VI.6a y VI.6& muestran los desplazamientos del terraplen y la losa en la máxima sección. La figura VI.5 muestra las zonas de extensión y compresión en relación a desplazamientos según el plano de la cara de la losa.

La figura VI.4 indica que en este caso analizado, el desplazamiento máximo en la losa resultó ser de 2.0 m.

En las figuras VI.7a a VI.7ℓ se presentan las distribuciones de esfuerzo calculados (esfuerzos normales y cortantes). Las partes sombreadas corresponden a las zonas de tensión en la losa y en los materiales de apoyo.

En las figuras VI.7a y VI.7d, que presentan los esfuerzos normales, actuando en sentido horizontal, en los planos localizados a 15 cm y 45 cm de la superficie mojada de la losa (capas I y II), las zonas sombreadas muestran que los esfuerzos de tensión alcanzan magnitudes considerables, del orden de los 100 Kg/cm². Es de sospecharse que si se introducen en la losa juntas verticales con relleno muy compresible estos esfuerzos de tensión serán menores. Por lo anterior se procedió a ejecutar un análisis similar al anterior introduciendo en la losa cierto número de juntas en planos verticales con relleno muy deformable (por ejemplo, mastic).

VI.2.2. Análisis elástico-lineal con juntas flexibles

En este análisis se asignó a los materiales constitutivos de la presa las características que se señalan en la tabla VI.2.

TABLA VI.2

	$E, \times 10^6$ (Kg/m ²)	ν	ϕ	$C, \times 10^6$ (Kg/m ²)	γ (Kg/m ³)
LOSA	2000	.30	40°	2500	2400
JUNTAS VERTICALES	.0001	.40	0°	.00005	1800
JUNTA PERIMETRAL	.0001	.40	0°	.00005	1900
MATERIAL 5	15	.20	32°	5	1850
MATERIAL 2	18	.15	35°	0	2100
ENROCAMIENTO	15	.15	40°	0	2100

La distribución de las juntas flexibles que surcan la losa se presenta en la figura VI.3a.

Los desplazamientos en la losa en la sección máxima de la presa al final del llenado, se presentan en la figura VI.4. El máximo desplazamiento es igual a 3.0 m superior al correspondiente al caso VI.2.1., anterior.

Las distribuciones de esfuerzo calculados para la losa se presentan en las figuras VI.8a a VI.8e. Los esfuerzos normales (figuras VI.8a a VI.8d), disminuyen, como era de preverse, respecto al caso anterior en que la losa estaba exenta de juntas en planos verticales (comparese la figura VI.7a con la VI.8a y la figura VI.7d con la VI.8d para el caso de los esfuerzos normales horizontales).

Al introducir las juntas de tensión en planos verticales, algunos esfuerzos paralelos a la línea de máxima pendiente, que para el caso de la losa sin juntas eran de tensión, se transformaron en esfuerzos de compresión (vease las figuras VI.7b, VI.8b, VI.7e y VI.8e).

VI.3. ANÁLISIS NO ELÁSTICOS-NO LINEALES

Los resultados de los análisis anteriores se refieren a materiales de apoyo de la losa cuyo comportamiento es elástico lineal. Si los materiales sobre los que descansa la losa no tienen este comportamiento es posible asemejar dicho comportamiento como un material no elástico-no lineal.

A fin de observar la importancia que pudiera tener para el diseño el considerar que durante el llenado el comportamiento del material fuese no elástico-no lineal, se efectuaron los análisis que se detallan en esta parte.

VI.3.1. Relación hiperbólica para representar el comportamiento no lineal de un suelo

Duncan y Chang (ref.10) han propuesto una relación de tipo hiperbólico para representar el comportamiento no lineal de un suelo en la curva esfuerzo-deformación (ver figura VI.12). Esta relación queda expresada por

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\epsilon}{\frac{1}{E_1} + \frac{\epsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}} \quad 6.1.$$

donde E_1 es el módulo tangente inicial en la curva VI.9a y $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ es el valor asintótico al que tiende el esfuerzo desviador $(\sigma_1 - \sigma_3)$, aproximado en la hipérbola para una deformación infinita.

Sin embargo, los valores de E_1 y $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ varían al variar la presión de confinamiento σ_3 en un ensayo de laboratorio. Janbu (ref. 10) establece que la variación de E_1 con respecto a σ_3 puede ser expresada mediante la ecuación

$$E_1 = k P_a \left[\frac{\sigma_3}{P_a} \right]^n \quad 6.2$$

donde σ_3 es el esfuerzo principal menor y P_a la presión atmosférica. k y n son constantes adimensionales que dependen del tipo de material.

La variación de $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ puede determinarse a partir de su relación con el esfuerzo desviador $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ en la falla. Esta relación es:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = R_f (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} \quad 6.3$$

donde a R_f se le conoce como relación de falla y es un parámetro cuyo valor es siempre menor que la unidad, lo que se deduce de la figura VI.12.

Por otro lado, de acuerdo con el criterio de Mohr Coulomb

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \left[\frac{2c \cos \phi + 2\sigma_3 \sin \phi}{1 + \sin \phi} \right] \quad 6.4$$

donde c es la cohesión del material y ϕ su ángulo de fricción interna.

Sustituyendo la ecuación 6.4 en la 6.3 y despejando a $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ se tiene

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} = \frac{1}{R_f} \left[\frac{2c \cos \phi + 2\sigma_3 \sin \phi}{1 + \sin \phi} \right] \quad 6.5$$

ecuación que da la variación de $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ en términos del nivel de esfuerzos existente.

Kondner (ref. 10) propone una expresión para determinar el módulo

tangente a la curva esfuerzo-deformación de acuerdo con el estado de esfuerzos existente dado por la expresión

$$E = 3000 (\sigma_3)^{1/3} \left[1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \right]^2 \quad 6.6$$

Sustituyendo la ecuación 6.5 en la 6.6 se tiene

$$E = \left[1 - \frac{R_f (1 - \text{sen}\phi) (\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos\phi + 2\sigma_3 \text{sen}\phi} \right] k P_a \left[\frac{\sigma_3}{P_a} \right]^n$$

VI.3.2. Endurecimiento de un material por esforzamiento

La influencia del endurecimiento por deformación que consiste en cargar un material inicialmente más allá de su límite de fluencia, modifica la relación esfuerzo-deformación, subsecuente.

Si, por ejemplo, una probeta de un cierto tipo de material es esforzada más allá del límite de fluencia (ver figura VI.13), hasta un punto *B*, descargada entonces hasta *C*, y vuelta a cargar, la resistencia a la fluencia aumenta de un valor en *A* hasta uno en *D*. Subsecuentes actos de descarga y carga incrementan la resistencia a la fluencia. Más aun, los módulos de elasticidad son variables en todo el proceso.

Al cargar hasta *B*, descargar a *C* y volver a cargar a *D*, se disipa una cierta cantidad de energía de deformación en forma de calor producida por fricción interna. Esta energía que se desprende queda representada por el área ahurada de la figura VI.13. La pérdida de energía de deformación se conoce como histéresis mecánica y el diagrama VI.13 se conoce como rizo de histéresis.

Al descargar hasta *C*, hay una deformación elástica *C'* recuperable representada por *CG* y una deformación permanente $e_p = OC$. O sea que, para cualquier punto sobre el diagrama esfuerzo-deformación, la deformación puede ser considerada como formada de dos partes; una elástica y una irrecuperable.

En los análisis realizados aquí se desprecia el rizo de histéresis pero se toma en cuenta la deformación irrecuperable así como la variación del módulo de elasticidad, de la manera en que se detalla en el siguiente inciso.

VI.3.3. Comportamiento del material de apoyo de la losa

Para llevar a cabo los análisis no elásticos-no lineales con el elemento finito se hicieron las siguientes consideraciones:

a) Durante la construcción el comportamiento de los materiales constitutivos de la presa, es elástico lineal de acuerdo con los resultados instrumentales presentados por Alberro y Macedo (referencia 1.12). El módulo de elasticidad y la relación de Poisson, hasta la

última etapa de construcción (colocación de la losa), para los diferentes materiales constitutivos de la presa, son los que se presentan en la tabla siguiente:

TABLA VI.3

	$E, \times 10^6$ (Kg/m ²)	ν	ϕ	$C, \times 10^6$ (Kg/m ²)	γ ³ (Kg/m ³)
LOSA	2000	.30	40°	2500	2400
JUNTAS VERTICALES (si las hay)	.0001	.40	0°	.00005	1900
JUNTA PERIMETRAL	.0001	.40	0	.00005	1900
MATERIAL 5	15	.20	32°	5	1950
MATERIAL 2	18	.15	35°	0	2100
ENROCAMIENTO	15	.15	40°	0	2100

b) Considerando un comportamiento hiperbólico de los materiales de apoyo en las relaciones esfuerzo-deformación, al final de cada etapa de llenado, se determinan los elementos de suelo en los que por lo menos dos de los esfuerzos principales son de tensión o bien en los que el esfuerzo normal al paramento de aguas arriba es de tensión y superior a 0.1 Kg/cm², y se les asocia un módulo de elasticidad igual a $E = 100 \text{ Kg/cm}^2$.

Por otro lado, se compara en cada elemento el esfuerzo desviador ($\sigma_1 - \sigma_3$) con el que correspondía al de la etapa de llenado anterior. Si este esfuerzo desviador sufrió un decremento a raíz de la última etapa de llenado, se considera que el elemento sufrió descarga y se le asocia un módulo

$$E = 3000 (\sigma_3)^{1/3}$$

de acuerdo con la ecuación 6.2, pero considerando deformaciones permanentes.

Si el esfuerzo desviador sufrió un incremento, se estima el valor del módulo considerando la expresión propuesta por Kondner

$$E = 3000 (\sigma_3)^{1/3} \left[1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{\text{ult}}} \right]^2$$

Si un elemento llega al estado de falla por esfuerzo cortante se supone que su módulo E es igual a 100 Kg/cm².

VI.3.4. Análisis no elástico-no lineal sin juntas verticales

La figura VI.4 muestra los desplazamientos de la losa en la sección máxima al final de la última etapa de llenado. El máximo desplazamiento en este caso fué de 6.0 m. Este desplazamiento es muy considerable y señala la importancia de la compactación de los materiales de apoyo de la losa.

Las figuras VI.9a a VI.9f muestran los esfuerzos en la losa y en las zonas de apoyo.

En las figuras VI.9a y VI.9d se observa que los esfuerzos de tensión y compresión en la losa, aumentan con respecto a los resultados obtenidos en los análisis elástico-lineales, alcanzando valores hasta de 260 y 650 Kg/cm², respectivamente. La zona de tensión (zona ashurada de la figura) para esfuerzos horizontales tanto en la capa I como en la capa II, es muy similar (en cuanto al área que abarca) a la calculada en los análisis elástico-lineales; la parte de la losa sometida a compresión abarca una franja central limitada por una línea de máxima pendiente (sobre el paramento mojado), situada aproximadamente a 80 metros del eje de simetría de la losa.

Con el objeto de ver la importancia que pudiera tener la colocación de las juntas verticales flexibles en el comportamiento de la losa, apoyada en este mismo tipo de materiales con comportamiento no lineal, se efectuó el análisis siguiente.

VI.3.5. Análisis no elástico-no lineal con juntas flexibles en planos verticales

Para este caso la distribución de las juntas es la que se presenta en la figura VI.3a.

La figura VI.4 indica que para este análisis se obtuvo un desplazamiento máximo de 6.0 m en la sección transversal máxima, igual al que se obtuvo para el caso anterior.

Las figuras VI.10a a VI.10f indican el estado de esfuerzos en la losa y en los materiales de apoyo de ella, al final del llenado total.

La superficie de la losa sometida a tensión (zona sombreada) abarca un área muy similar a la del caso anterior, estando limitada por la línea de máxima pendiente situada aproximadamente a 80 m del eje de simetría de la losa.

Los esfuerzos horizontales normales actuando en las capas I y II de la losa, mostrados en las figuras VI.10a y VI.10d, alcanzan valores máximos de 250 Kg/cm² en tensión y 450 Kg/cm² en compresión. Se observa que, si bien en este análisis hubo una reducción de esfuerzos con respecto al anterior caso, esta disminución no fué muy marcada. Teniendo en cuenta lo anterior, se efectuó un último análisis sin colocar juntas flexibles en la zona central de la pantalla, conservándose únicamente las juntas en las zonas de la losa sometidas a tensión. Este análisis es el que se detalla en el siguiente inciso.

VI.3.6. Análisis no elástico-no lineal sin juntas flexibles verticales en la franja central

Para este último caso, la distribución de las juntas es la que se presenta en la figura VI.3b.

El desplazamiento máximo de la losa en su eje de simetría fué de

6.0 m como puede observarse en la figura VI.4. Este desplazamiento es igual al de los dos casos anteriores.

Las figuras VI.11a a VI.11f muestran las distribuciones de esfuerzo en la losa y en los materiales de apoyo, 2 y 5.

Como puede verse en las figuras VI.11a y VI.11d, la zona de tensión en las capas I y II de la losa, de nueva cuenta abarca aproximadamente la misma área que la que cubren las de los casos anteriores.

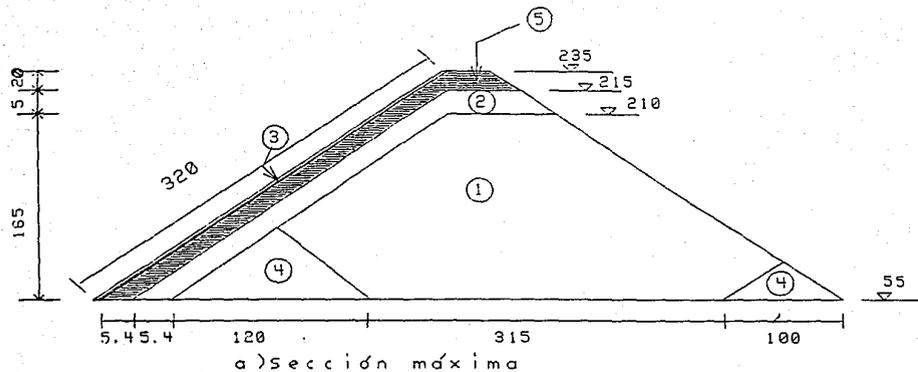
Los máximos esfuerzos horizontales de tensión y compresión en la losa alcanzan valores de 210 y 650 Kg/cm², respectivamente. El máximo valor de tensión (210 Kg/cm²) fué menor que el del caso del inciso VI.3.4.

La tabla VI.4 resume los máximos esfuerzos que se presentaron en la losa en los distintos casos analizados así como su localización.

TABLA VI.4

CASO	SENTIDO DEL ESF.	MAX. ESF TENSION (Kg/m ²)	ALTURA* (m)	MAX. ESF. COMPRESION (Kg/m ²)	ALTURA (m)
A	H	110	80 m L	308	83 m E
A	P	38	88 m L	45	5 m E
B	H	100	54 m L	283	83 m E
B	P	8	180 m L	110	0 m E
C	H	280	70 m L	850	83 m E
C	P	200	70 m L	40	75 m E
D	H	250	88 m L	450	40 m E
D	P	198	88 m L	100	0 m E
E	H	210	70 m L	850	83 m E
E	P	290	70 m L	40	75 m E

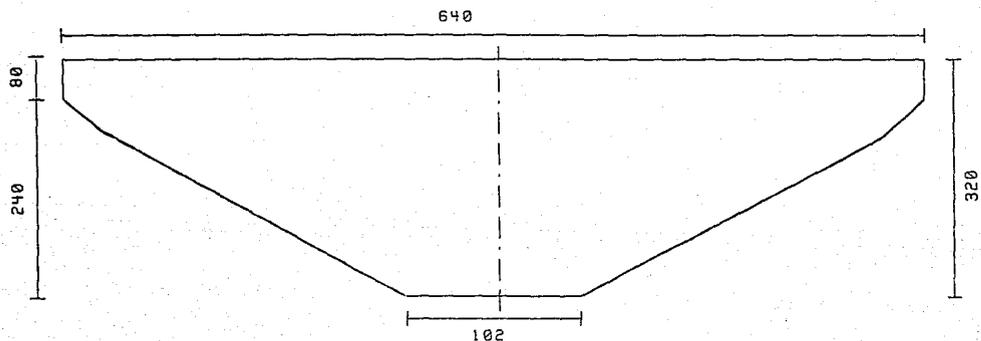
H = HORIZONTAL ; P = PARALELO A LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE
 L = CERCA DE LAS LAS LADERAS ; E = EN EL EJE DE LA LOSA
 * EN RELACION AL PUNTO MAS BAJO DE LA LOSA



MATERIALES

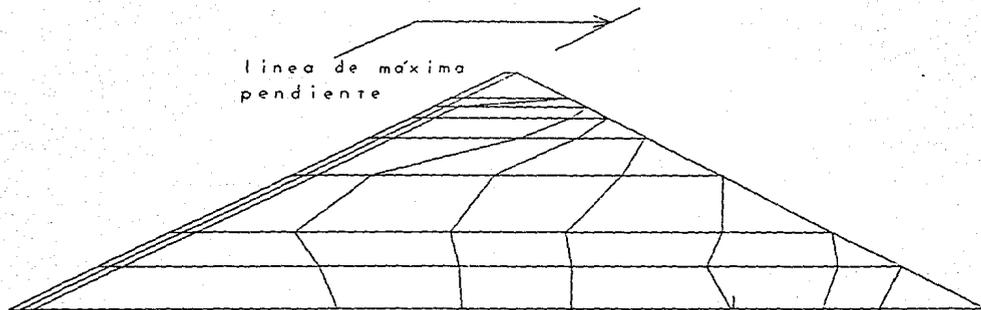
- 1.-ENROCAMIENTO
- 2.-FILTRO Y TRANSICIÓN
- 3.-CONCRETO
- 4.-ATAGUIAS
- 5.-MEZCLA

COTAS EN m
(fuera de escala)

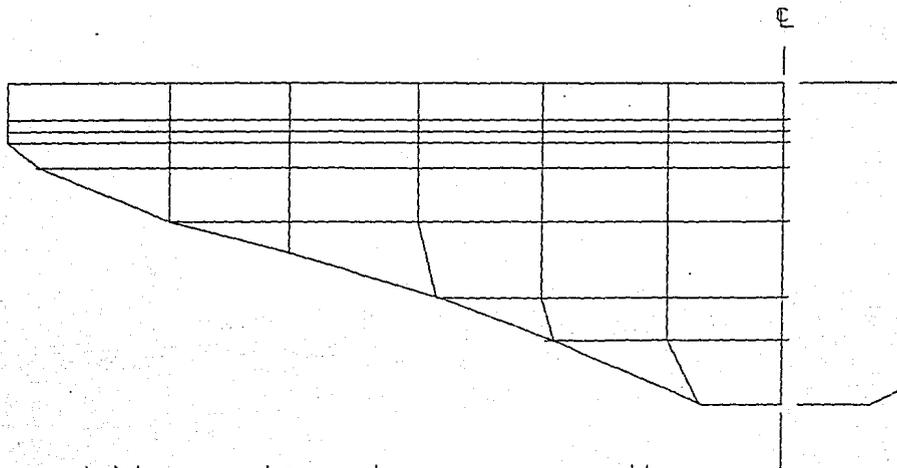


b) Dimensiones de la losa

Fig.VI.1. Forma y dimensiones de la presa de Aguamilpa

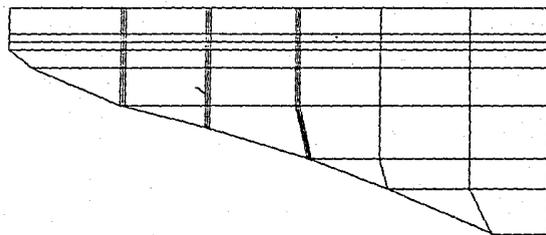
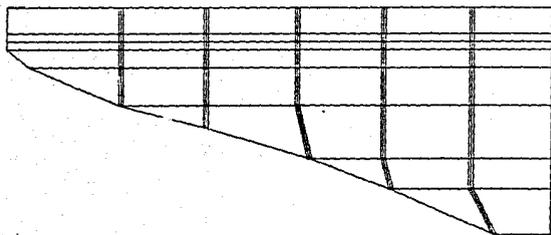


a) Sección máxima



b) Vista de aguas arriba

Fia.VI.2 Malla de elementos finitos



a) Losa con juntas flexibles verticales

b) Franja central sin juntas verticales

Fig. VI.3 Distribución de las juntas en la losa de concreto

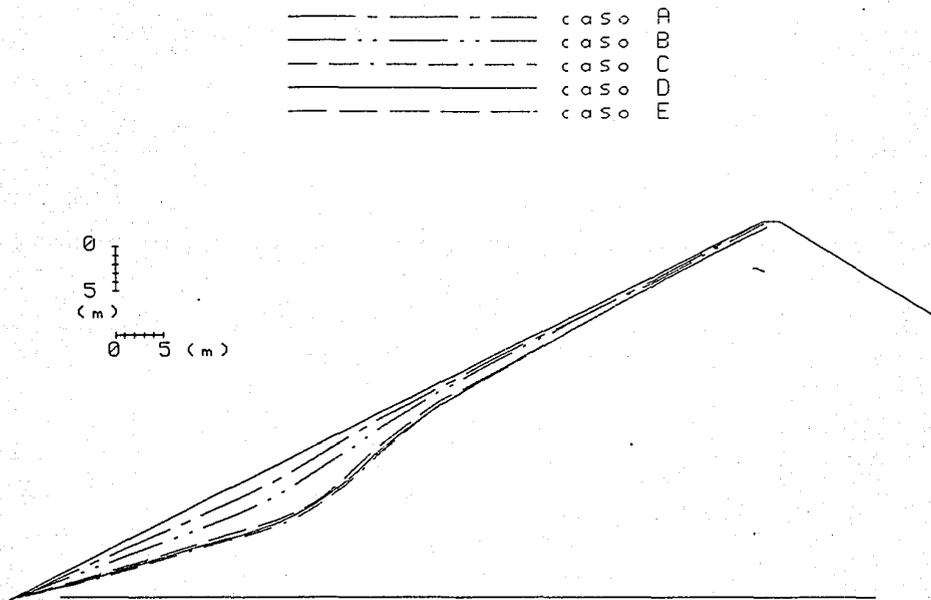


Fig. VI.4 Desplazamientos en la sección transversal de la Presa de Aguamilpa al final del llenado

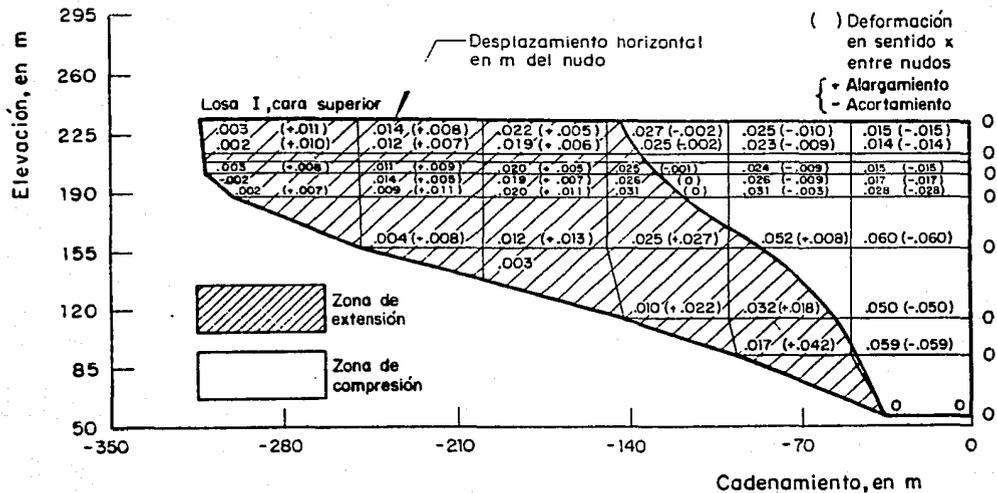


Fig. VI.5 Zona de extensión - Análisis elástico-lineal con elemento finito. Losa continua

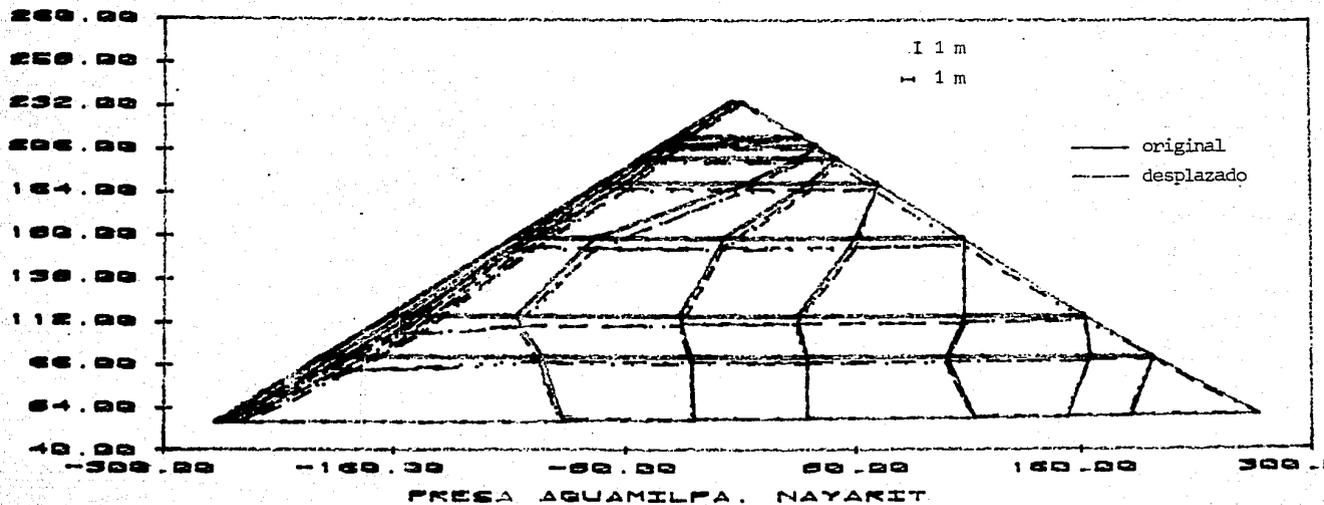


Fig. VI.6a Desplazamientos en la sección máxima, al final de la quinta etapa de llenado
 Caso A.

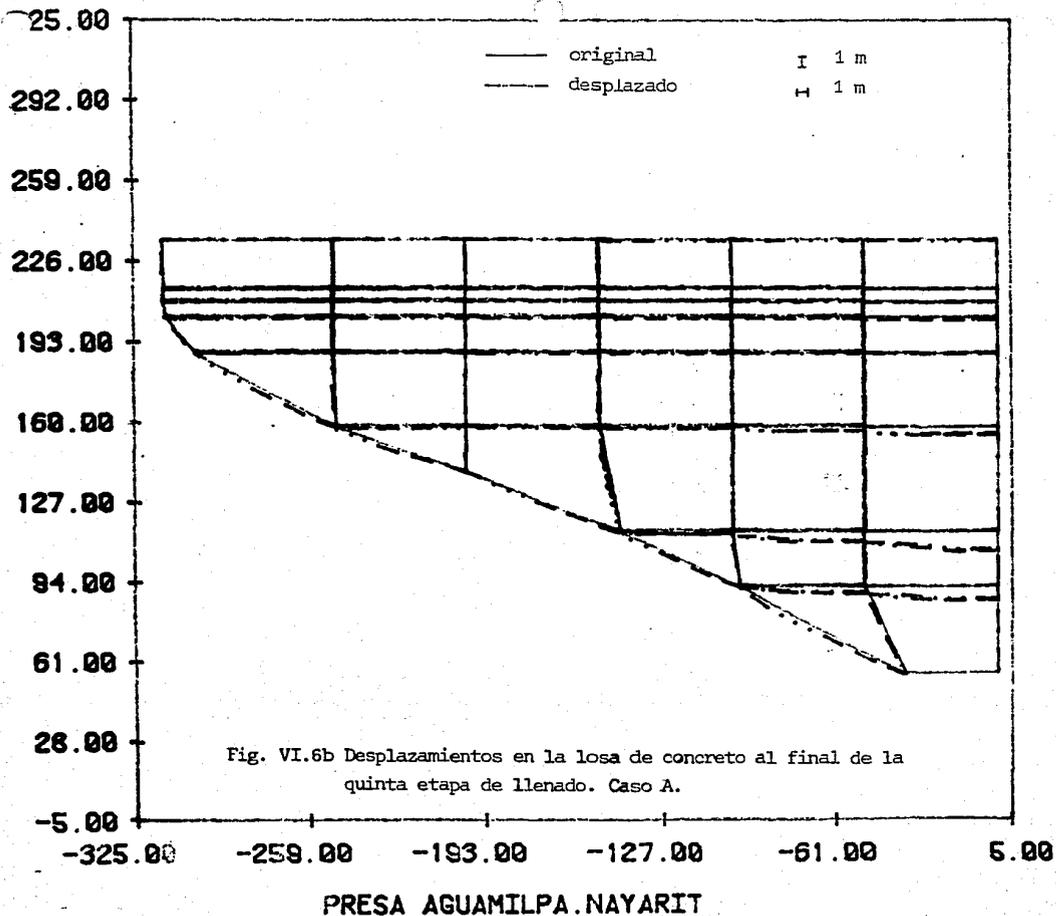


Fig. VI.6b Desplazamientos en la losa de concreto al final de la quinta etapa de llenado. Caso A.

PRESA AGUAMILPA. NAYARIT

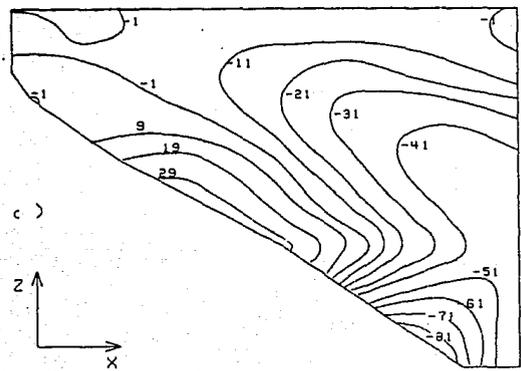
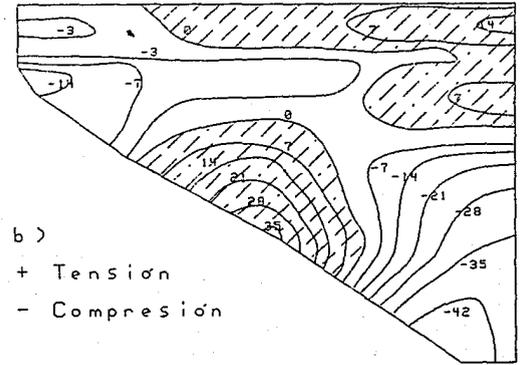
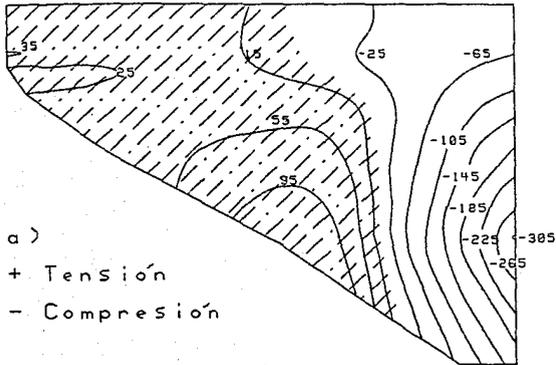


Fig.VI.7 CASO A, CAPA I DE LA LOS

- a) ESFUERZOS NORMALES HORIZONTALES
 - b) ESFUERZOS NORMALES PARALELOS A LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE
 - c) ESFUERZOS CORTANTES PARALELOS A LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE
- ESFUERZOS EN Kg/cm²

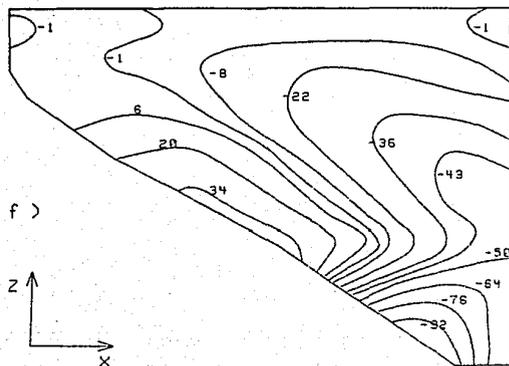
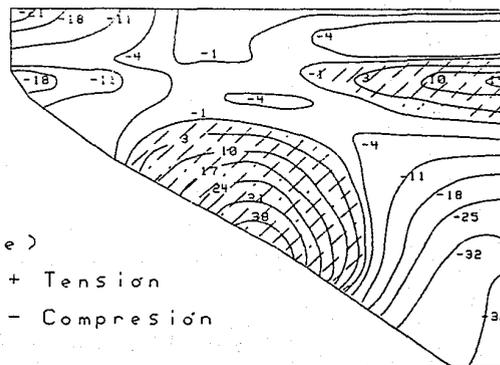
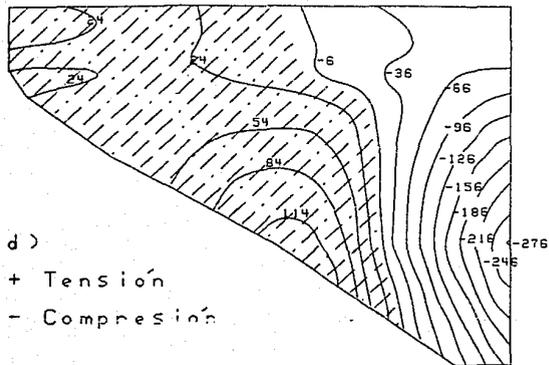


Fig. VI.7 CASO A, CAPA II DE LA LOSA
(CONTINUACION)

d) ESFUERZOS NORMALES HORIZONTALES

e) ESFUERZOS NORMALES PARALELOS A
LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE

f) ESFUERZOS CORTANTES PARALELOS A
LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE

ESFUERZOS EN Kg/cm^2

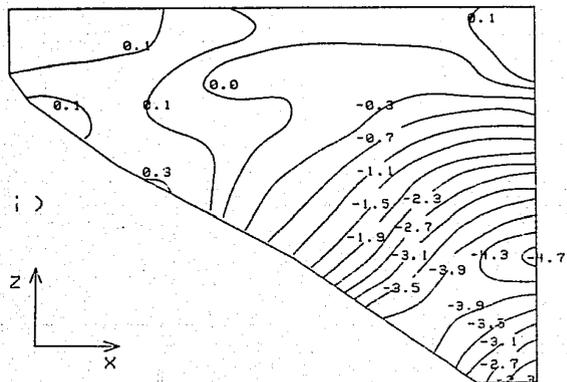
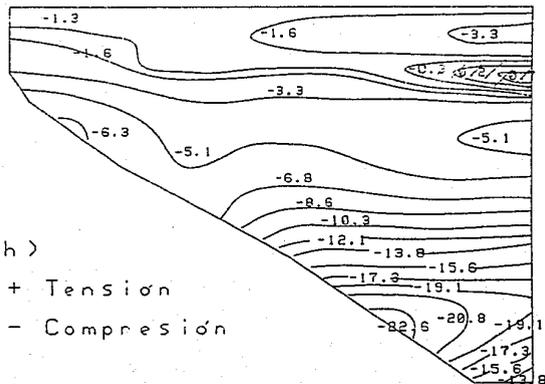
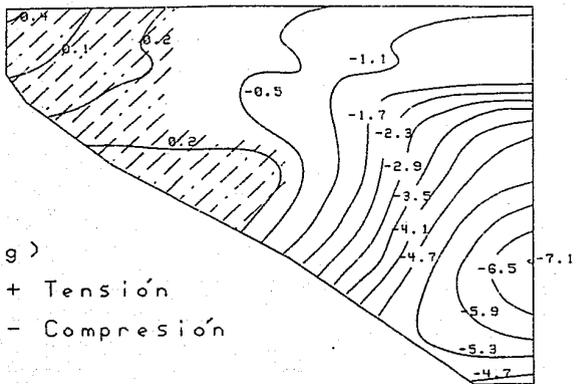


Fig. VI.7 CASO A, MATERIAL 5
(CONTINUACION)

- g) ESFUERZOS NORMALES HORIZONTALES
- h) ESFUERZOS NORMALES VERTICALES
- i) ESFUERZOS CORTANTES

ESFUERZOS EN Kg/cm^2

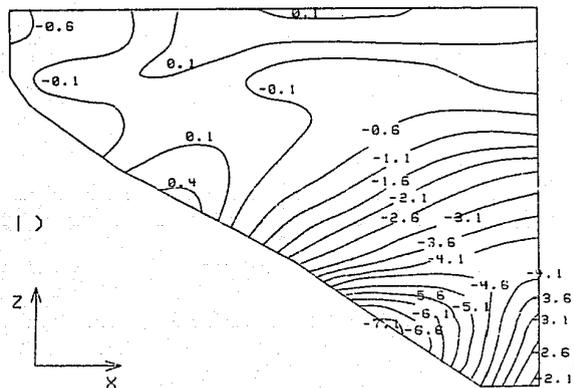
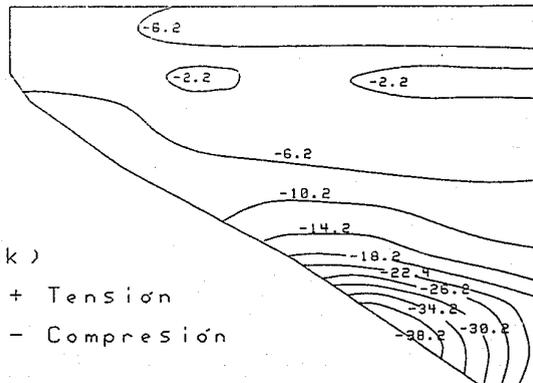
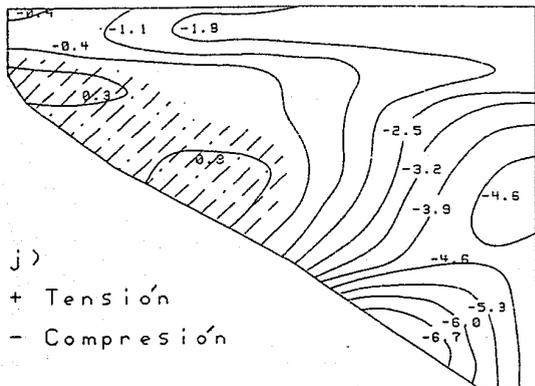


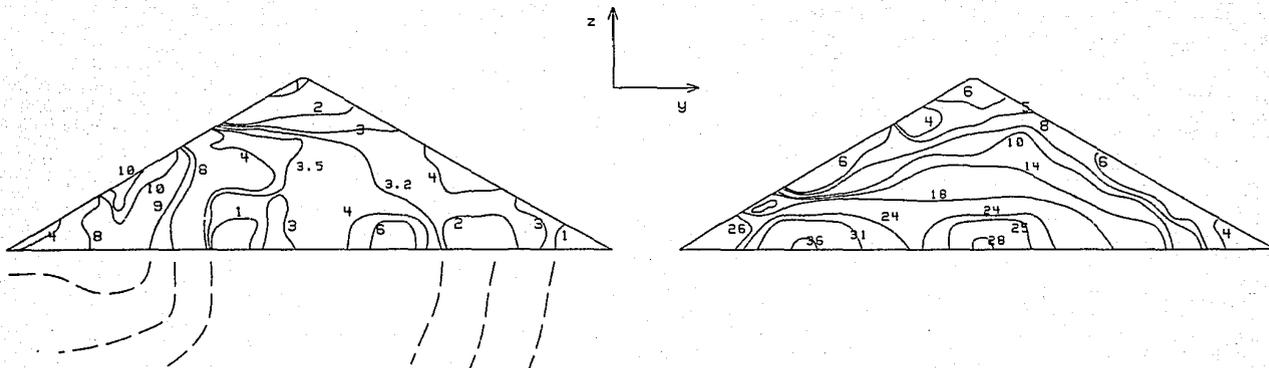
Fig. VI.7 CASO A, MATERIAL 2
(CONTINUACION)

j) ESFUERZOS NORMALES HORIZONTALES

k) ESFUERZOS NORMALES VERTICALES

l) ESFUERZOS CORTANTES

ESFUERZOS EN Kg/cm^2



A) ESFUERZOS HORIZONTALES

(LAS LINEAS PUNTEADAS SEÑALAN, DE MANERA MUY BURDA, LA POSIBLE PROYECCION DE LOS ESFUERZOS EN EL TERRENO NATURAL)

B) ESFUERZOS VERTICALES

FIG. VI.7m ESFUERZOS EN LA SECCION MAXIMA, CASO A

ESFUERZOS EN Kg/cm^2 , COMPRESION

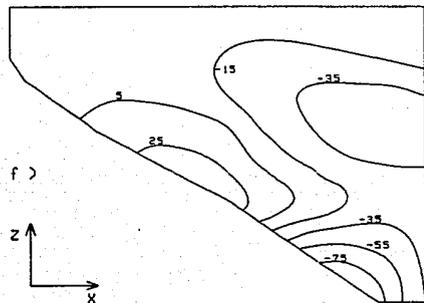
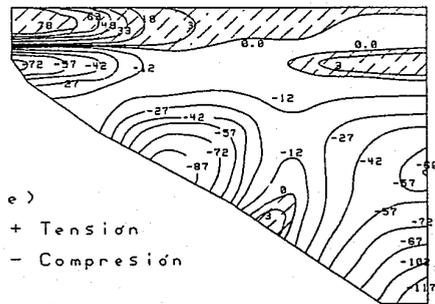
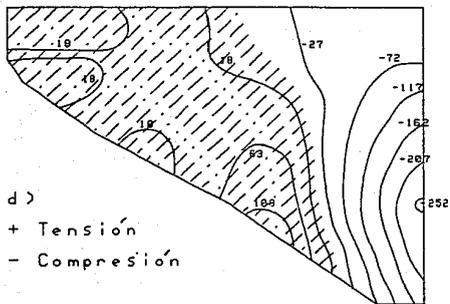


Fig.VI.8 CASO B, CAPA II DE LA LOSA
(CONTINUACION)

d) ESFUERZOS NORMALES HORIZONTALES

e) ESFUERZOS NORMALES PARALELOS A LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE

f) ESFUERZOS CORTANTES PARALELOS A LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE

ESFUERZOS EN Kg/cm^2

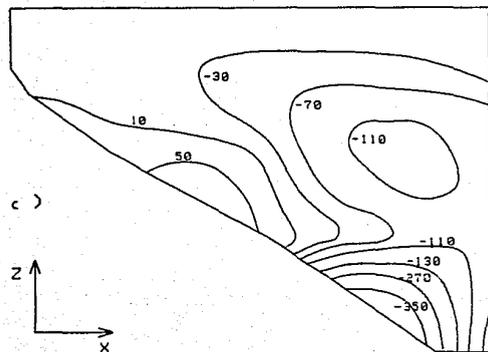
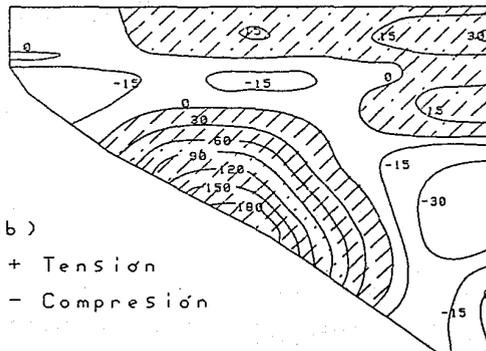
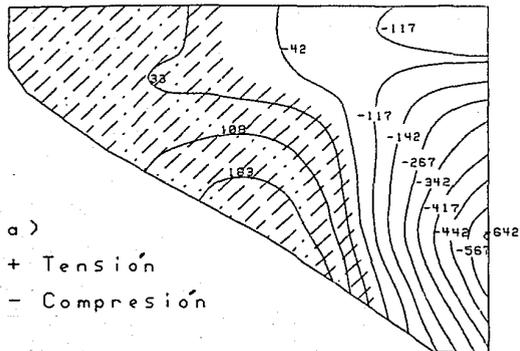


Fig. VI.9 CASO C, CAPA I DE LA LOSA

- a) ESFUERZOS NORMALES HORIZONTALES
 b) ESFUERZOS NORMALES PARALELOS A LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE
 c) ESFUERZOS CORTANTES PARALELOS A LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE
- ESFUERZOS EN Kg/cm^2

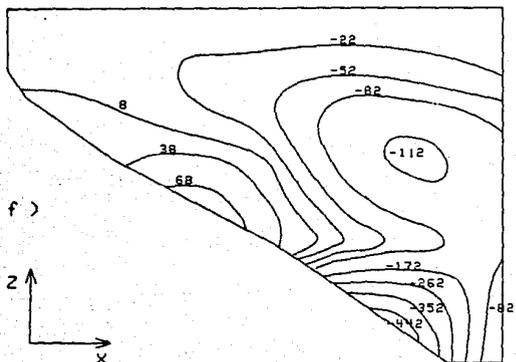
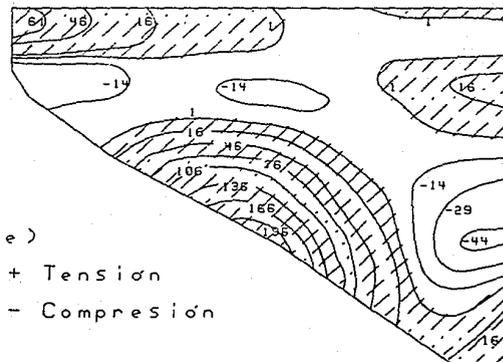
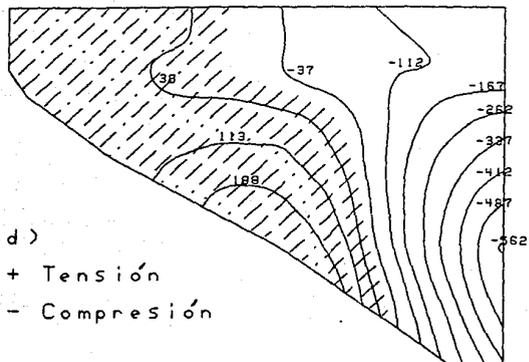


Fig. VI.9 CASO C, CAPA II DE LA LOSA
(CONTINUACION)

d) ESFUERZOS NORMALES HORIZONTALES

e) ESFUERZOS NORMALES PARALELOS A
LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE

f) ESFUERZOS CORTANTES PARALELOS A
LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE

ESFUERZOS EN Kg/cm^2

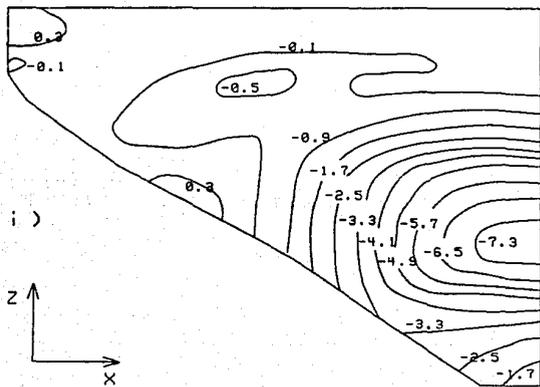
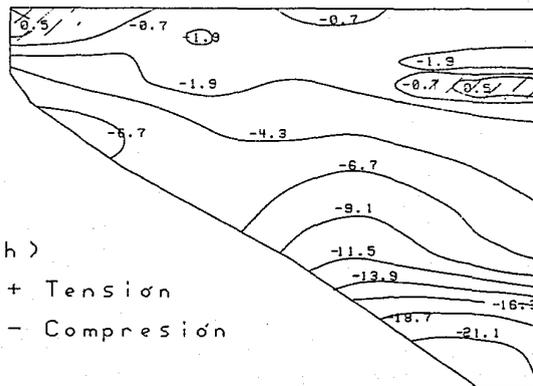
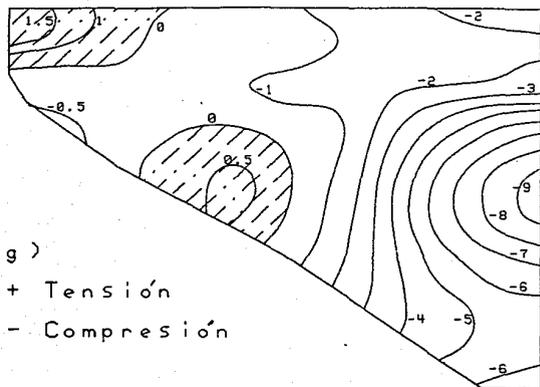


Fig. VI.9 CASO C, MATERIAL 5
(CONTINUACION)

- g) ESFUERZOS NORMALES HORIZONTALES
- h) ESFUERZOS NORMALES VERTICALES
- i) ESFUERZOS CORTANTES

ESFUERZOS EN Kg/cm²

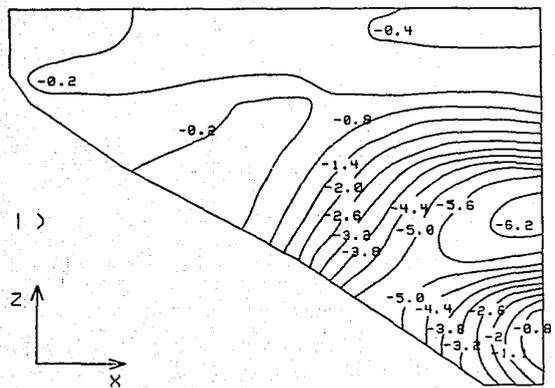
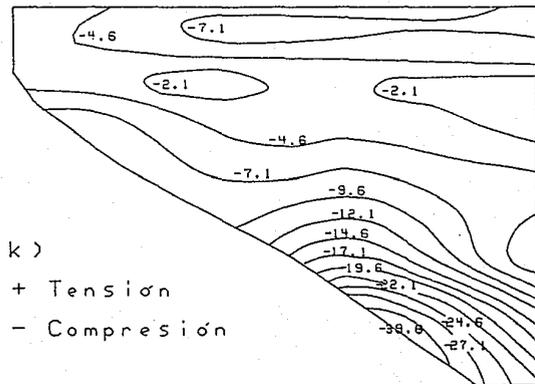
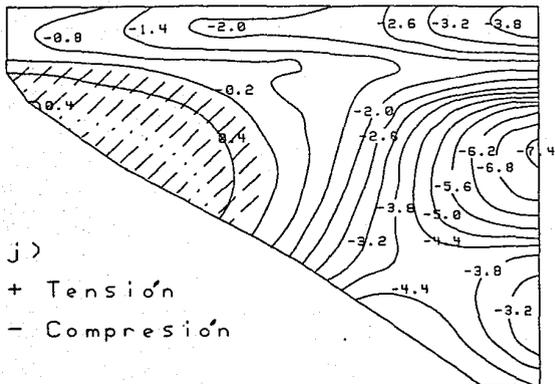


Fig.VI.9 CASO C, MATERIAL 2
(CONTINUACION)

- j) ESFUERZOS NORMALES HORIZONTALES
- k) ESFUERZOS NORMALES VERTICALES
- l) ESFUERZOS CORTANTES

ESFUERZOS EN Kg/cm²

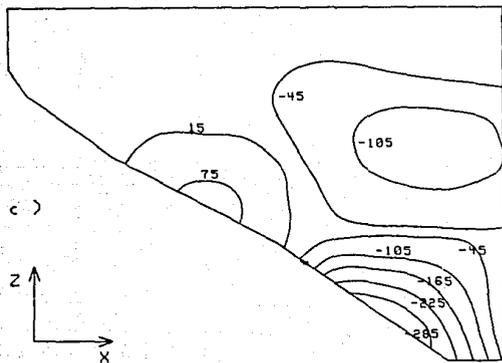
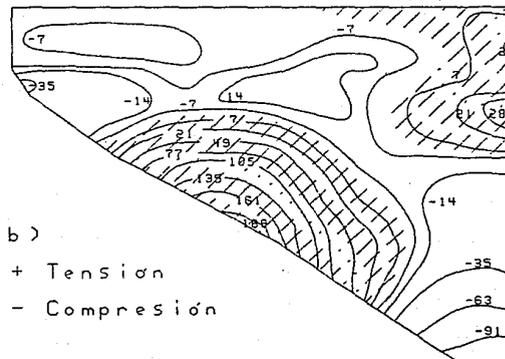
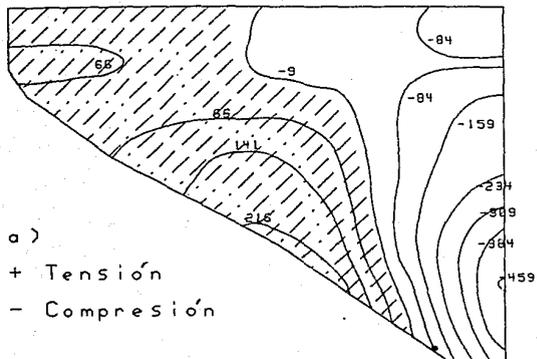


Fig.VI.10 CASO D, CAPA I DE LA LOSA

- a) ESFUERZOS NORMALES HORIZONTALES
 b) ESFUERZOS NORMALES PARALELOS A LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE
 c) ESFUERZOS CORTANTES PARALELOS A LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE
- ESFUERZOS EN Kg/cm^2

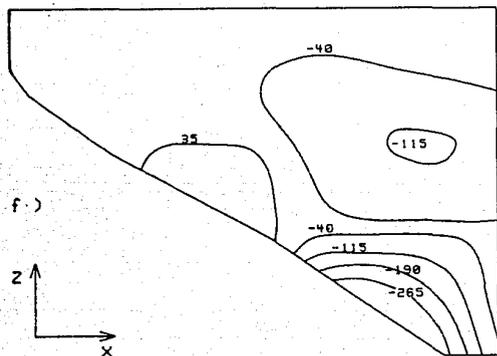
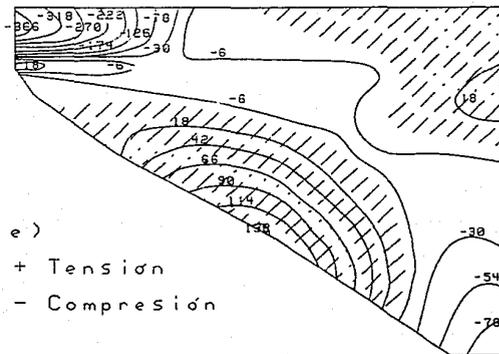
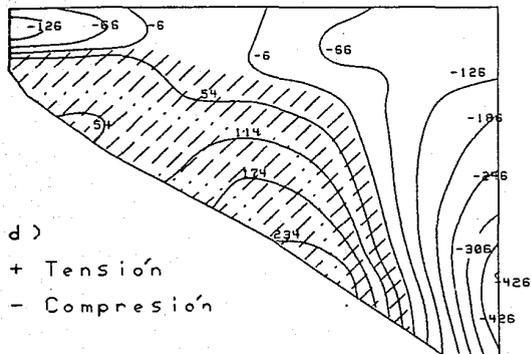


Fig.VI.10 CASO D, CAPA II DE LA LOSA
(CONTINUACION)

d) ESFUERZOS NORMALES HORIZONTALES

e) ESFUERZOS NORMALES PARALELOS A
LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE

f) ESFUERZOS CORTANTES PARALELOS A
LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE

ESFUERZOS EN Kg/cm^2

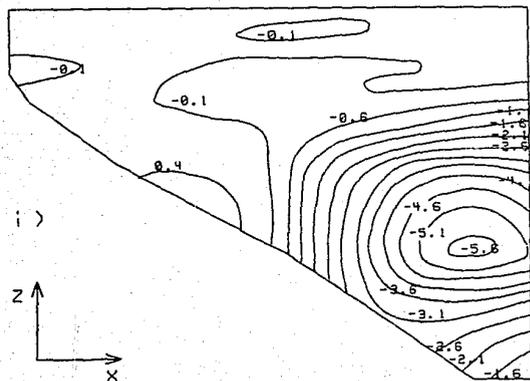
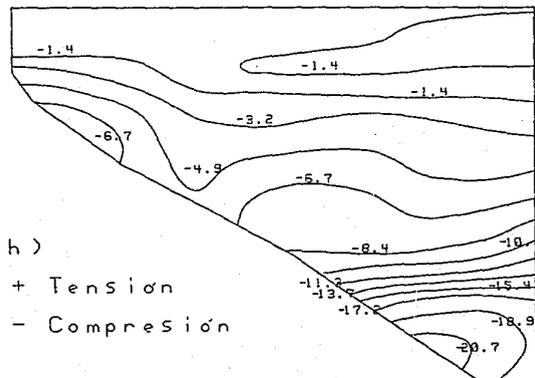
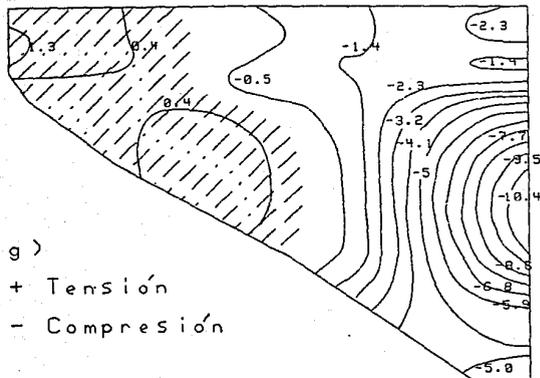


Fig.VI.10 CASO D, MATERIAL 5
(CONTINUACION)

g) ESFUERZOS NORMALES HORIZONTALES

h) ESFUERZOS NORMALES VERTICALES

i) ESFUERZOS CORTANTES

ESFUERZOS EN Kg/cm^2

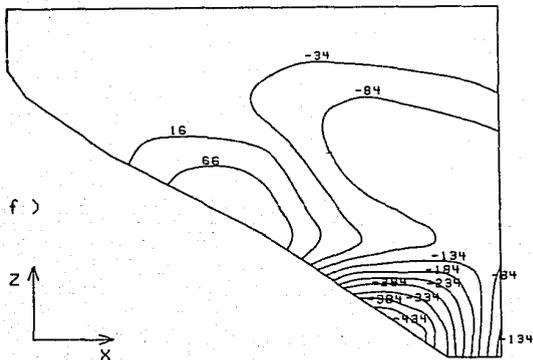
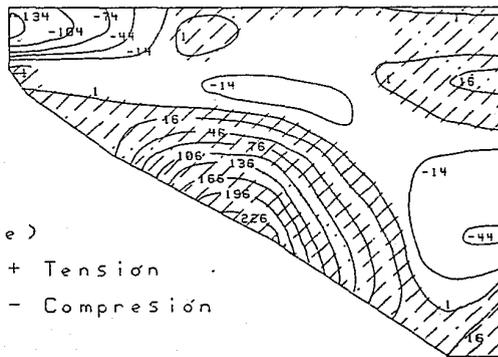
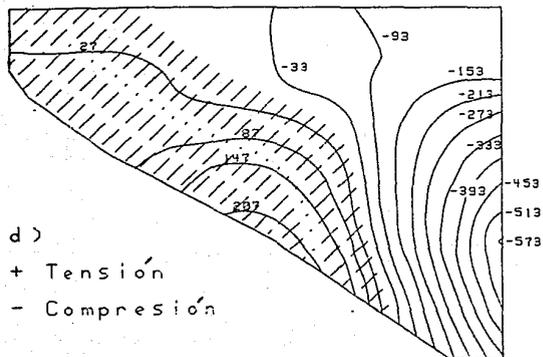


Fig.VI.11 CASO E, CAPA II DE LA LOSA
(CONTINUACION)

d) ESFUERZOS NORMALES HORIZONTALES

e) ESFUERZOS NORMALES PARALELOS A
LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE

f) ESFUERZOS CORTANTES PARALELOS A
LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE

ESFUERZOS EN Kg/cm^2

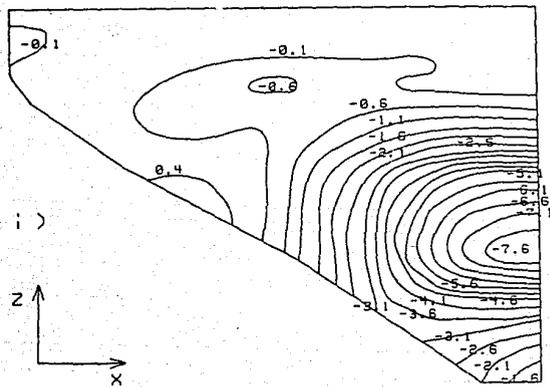
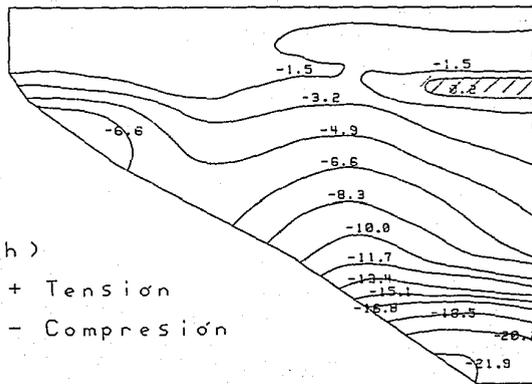
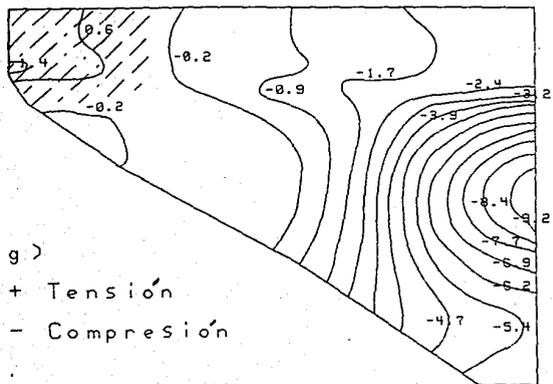


Fig.VI.11 CASO E, MATERIAL 5
(CONTINUACION)

g) ESFUERZOS NORMALES HORIZONTALES

h) ESFUERZOS NORMALES VERTICALES

i) ESFUERZOS CORTANTES

ESFUERZOS EN Kg/cm^2

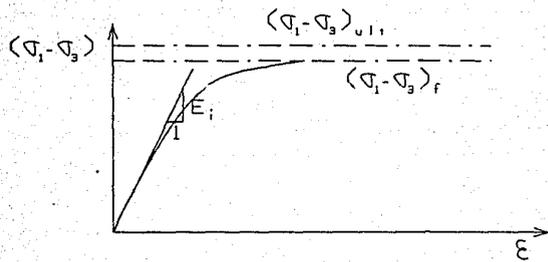


Fig. VI.12

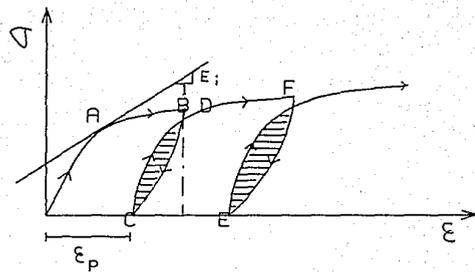


Fig. VI.13

ANEXO VI.A. DESCRIPCION DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA UTILIZADO EN LOS ANALISIS

El programa empleado para llevar a cabo los análisis es una versión modificada del denominado *SAP IV* y está basado en el método del elemento finito. Éste, utiliza elementos isoparamétricos de 8 nodos y permite simular tanto el proceso constructivo de una presa como el llenado de su embalse.

El programa está escrito en FORTRAN IV y adaptado para la computadora B-7800 de la Dirección General de Cómputo Académico de la UNAM. Utiliza un diagrama de flujo como el mostrado en la figura VI.A.1 teniendo las siguientes características

- a) Una rutina principal y 14 subrutinas.
- b) Requiere 3902 registros en disco.
- c) No necesita cintas durante el proceso.
- d) Graba resultados finales e intermedios en 15 archivos, que también emplea para lectura.
- e) Maneja elementos finitos de forma paralelepípeda isoparamétricos de 8 nodos.

La cantidad de nudos y elementos para la malla que puede manejar el programa depende de la capacidad en disco que se le asigne en la computadora.

En los casos analizados que aquí se presentan se utilizó una malla de 540 nudos y 450 elementos.

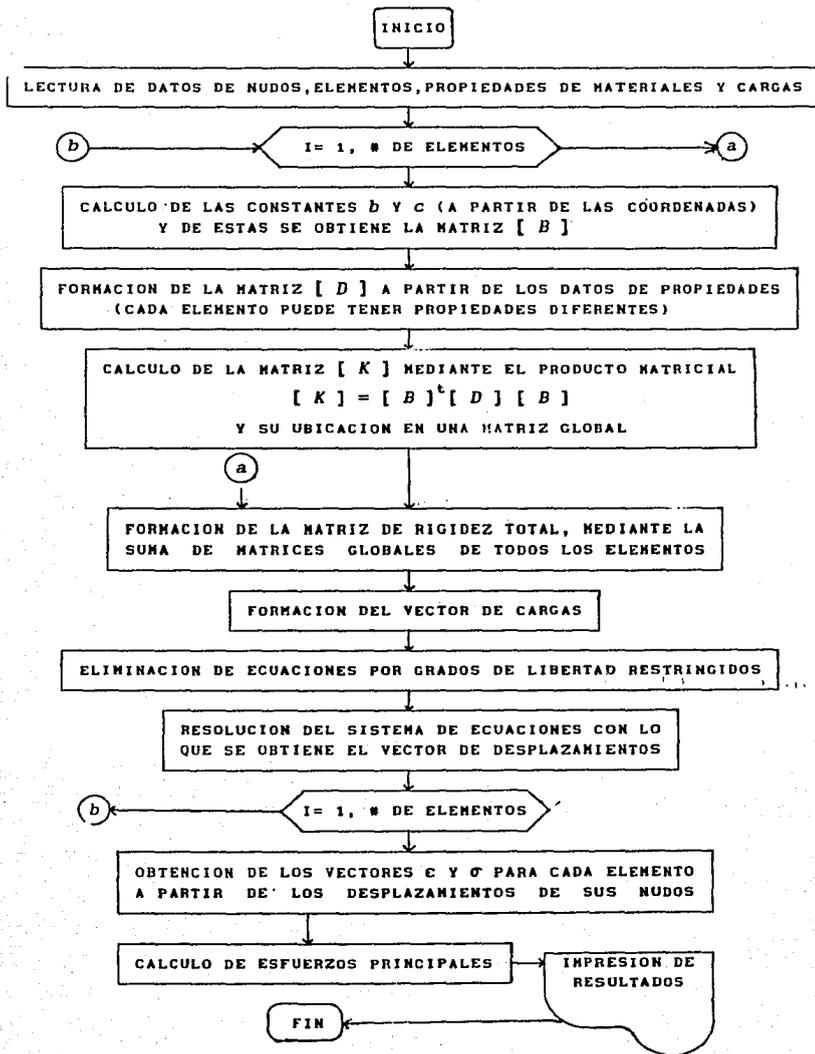


Fig. VI. A.1 DIAGRAMA DE BLOQUES DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO PARA COMPUTACIÓN.

NOTA: EL PROCEDIMIENTO INDICADO EN EL DIAGRAMA SE MODIFICA PARA ANALISIS NO LINEALES DE ACUERDO CON LO SEÑALADO EN EL INCISO VI.3.3.

CAPITULO VII. INTERPRETACION Y COMPARACION DE RESULTADOS

Continuando con la siguiente parte de la metodología de investigación, en este capítulo vamos a comparar los resultados obtenidos de los análisis realizados (ver capítulo anterior) con los que han presentado algunos investigadores, ya sea con mediciones en el campo o con resultados de análisis en cimentaciones, pavimentos o presas.

Cummings (REF.11) presenta mediciones realizadas en un material elástico mediante la técnica de la fotoelasticidad. El material es una placa de baquelita que al ser presionada por otra de acero, da como resultado la distribución de esfuerzos que se presenta en la figura VII.1. Esta figura concuerda en forma cualitativa con la distribución de esfuerzos (σ_y), en la sección máxima de la presa, que se presenta en la figura VI.7m (en dicha figura se tiene únicamente la distribución de esfuerzos en la masa del enrocamiento y puede considerarse en forma muy burda que los esfuerzos se proyectarían en el terreno natural de la manera que señalan las líneas punteadas). En las figuras se notan ciertas diferencias las cuales pueden deberse a que se tienen condiciones de carga desiguales estratificación de materiales distinta, y una geometría diferente.

Prado (ref.12) tiene mediciones realizadas en pavimentos flexibles tomadas en una pista de prueba. La figura VII.2 muestra las deflexiones de la carpeta asfáltica en la sección longitudinal. Como puede observarse en dicha figura la zona de compresión fué hacia el area central de la zona cargada de la carpeta y las zonas de extensión fueron hacia los extremos. Lo anterior concuerda con los resultados mostrados en la figura VI.5 obtenidos del análisis elástico para la losa sin juntas con el método del elemento finito, presentandose también compresión en la zona central de la losa y zonas de extensión en los los extremos de la losa proximos a las laderas.

Alberro y colaboradores (ref.13) también realizaron un análisis para la misma presa de Aguamilpa basado en la expresión de Boussinesq en el que se considera al medio en donde está apoyada la pantalla de concreto de la presa, como semi-infinito, y un contacto completamente liso entre la losa y el suelo. Las figuras VII.3a a VII.3c muestran

los resultados obtenidos por este investigador. Dichos resultados difieren de los obtenidos con el método del elemento finito en forma cuantitativa en cuanto a ordenes de magnitud (comparese por ejemplo la figura VII.3a con la VI.4) y en cuanto a la distribución de esfuerzos (comparese la figura VII.3b con la VI.5). Sin embargo en forma cualitativa se asemejan un poco más. Las diferencias encontradas en los dos métodos se deben a las hipótesis adoptadas y marcan la importancia que tiene la interacción entre la losa y el suelo dependiendo de si se considera un contacto liso o rugoso.

De las anteriores comparaciones podemos hacer algunos comentarios sobre los resultados obtenidos en los análisis.

En los análisis realizados, en lo que se refiere a esfuerzos en el sentido horizontal, se observa que todos los casos presentaron una zona de tensión que ocupa las dos terceras partes del área total de la losa (ver figuras VI.7a, VI.7d, VI.11a y VI.11d). Esto señala el efecto de la interacción entre el suelo y la losa al ser considerado un contacto rugoso y la influencia de los empotramientos rocosos. También se observa en las figuras que en todos los casos, aproximadamente al nivel 180 m, cerca de las laderas, se presentan altas concentraciones de esfuerzos de tensión, lo que puede ser explicado ya que se detectó que en esas zonas los materiales de apoyo de la losa se plastificaron. Las mismas figuras indican concentraciones de esfuerzos de compresión cerca del nivel 70 m debido a la influencia de las cargas y a la plastificación de materiales de apoyo.

En cada caso se puede observar lo siguiente:

Caso A.- Análisis elástico lineal sin juntas en planos verticales.- En este caso se presenta un desplazamiento máximo de 2 m. Este desplazamiento en presas ya construidas nunca se ha presentado. Por ejemplo, para la presa Foz do Areia con una altura de 160 m, el desplazamiento máximo fué de 80 cm, y para la presa New Exchequer considerando su parte más recientemente construida con altura de 107 m se registró un desplazamiento máximo de 158 cm. Sin embargo considerando que el desplazamiento máximo, de acuerdo con la experiencia, crece en forma proporcional al cuadrado de la altura de la presa, se deduciría de estas observaciones un desplazamiento máximo en la losa de la presa de Aguamilpa de 113 cm (considerando el desplazamiento de la presa Foz do Areia) y de 500 cm (considerando el presentado por la presa New Exchequer). Esta disparidad en los resultados puede deberse a que se tienen diferentes condiciones geométricas, así como diferencias en los materiales en cuanto a zonificación, compactación, etc.

Caso B.- Análisis elástico lineal con juntas en planos verticales.- En este caso se presenta un mayor desplazamiento en la losa. Es de esperarse que al ser colocadas las juntas se libere parte de la interacción entre la losa y el suelo y en consecuencia se presenten mayores desplazamientos. Sin embargo, la influencia de las juntas no es negativa sino al contrario, ya que se aminoran los esfuerzos de tensión y compresión en la losa, al trabajar ésta en partes separadas definidas por las juntas; de manera que la energía

externa no se absorbe completamente por la losa.

Caso C.- Análisis no elástico no lineal sin juntas en planos verticales.- Como podrá observarse en la tabla VI.1 en este caso se presentan mayores esfuerzos de tensión y compresión que en los casos elásticos y un mayor desplazamiento máximo. Esto se explica debido a que al ser los materiales de apoyo de la losa más compresibles son de esperarse mayores desplazamientos en la cortina y en consecuencia mayores esfuerzos de tensión y compresión.

Caso D.- Análisis no elástico no lineal con juntas en planos verticales.- En este caso los esfuerzos de tensión y compresión fueron un poco menores que en el caso C (ver tabla VI.1), debido al mismo efecto que tubieron las juntas en el caso B.

Caso E.- Análisis no elástico no lineal sin juntas en la franja central.- En este caso los esfuerzos de tensión resultaron ser un poco menores que el máximo presentado por el caso C y un poco mayores que los del caso D lo que era de esperarse ya que es un caso intermedio entre los dos últimos señalados.

VII.1. Observaciones sobre los desplazamientos en la losa

En la sección máxima en donde la resultante de las cargas es mayor que en cualquier otra sección, la posición del máximo desplazamiento es cercana a la de dicha resultante de cargas, fuera del centro del área cargada (recordar que el máximo desplazamiento en el pavimento de la fig. VII.1 fué al centro del área cargada). Las cargas hidráulicas sobre la losa tienen una distribución triangular cuya resultante cae a un tercio de la base del triángulo. En esa zona la losa soporta los mayores esfuerzos dados por las cargas, en consecuencia y tomando en cuenta las condiciones de frontera, en esa área se tendrán los máximos desplazamientos lo cual puede ser interpretado como la influencia de la distribución de las cargas. Al no estar las cargas aplicadas uniformemente repartidas, ya que tienen una distribución triangular, el desplazamiento se presenta fuera del centro del área cargada. Lo anterior confirma que la forma de los desplazamientos en la losa depende de la magnitud y distribución de las cargas según lo dicho en el capítulo 3.

La sección máxima presenta mayor movimiento que las secciones en las laderas. Las zonas en las laderas son áreas en donde el movimiento está más restringido que en la franja central de la losa, por contarse en esa zona con menos volumen de material deformable por unidad de área (aparte del de las laderas que es rígido) lo cual se refleja en la magnitud de los movimientos.

Los análisis no lineales arrojaron mayores deformaciones que los lineales. Los materiales no elásticos-no lineales son más compresibles en general que los elásticos-lineales, esto debido a que en cada incremento de carga el incremento en la deformación se hace cada vez mayor resultando como consecuencia desplazamientos mayores.

La deformación fué mayor cuando se colocaron juntas verticales en

los distintos casos, que cuando no se colocaron. En la losa sin juntas la pantalla interactúa en forma monolítica con el suelo, lo que hace que tenga mayor eficiencia en la transmisión de energía de deformación según su plano. Al ser colocadas las juntas, se tienen losas aisladas lo que permite mayor libertad al suelo y a la misma losa. Además, las juntas también sirven para romper parte de la interacción que existe entre la losa y el suelo, lo que a su vez provoca que aumenten los desplazamientos.

Los asentamientos diferenciales arrojados por los resultados de los análisis fueron mayores en el caso de la presa que en el caso de losas rígidas de cimentaciones. Esto es debido a que al tener la losa de la presa una de sus dimensiones mucho menor que las otras dos, esta se vuelve muy flexible, con los consecuentes asentamientos diferenciales.

De la figura VI.4, puede deducirse que la forma de la deflexión de la losa se alabeará más que si se tubiese una boquilla rectangular, o en otro tipo de losas rectangulares como las de pavimentos (en condiciones de carga estáticas) o cimentaciones. A menor altura la separación entre ambas laderas disminuye, haciendo que las franjas horizontales interiores tengan mayores restricciones al movimiento, provocando una interacción diferente entre ellas al ir aumentando la altura, siendo menor la influencia de la interacción en la parte más alta. Es de notarse el carácter tridimensional del problema, en cuanto a desplazamientos se refiere, y adquiere mayor relevancia cuando se tiene, como en el caso de la Presa de Aguamilpa, una geometría que no es simétrica con respecto a uno de los ejes. Las observaciones anteriores confirman lo dicho en el capítulo 3 en lo que se refiere a la manera en que debía modelarse el problema; esto es mediante un modelo con cálculo funcional, debido a la geometría irregular y no linealidad de los materiales.

VII.2.- Observaciones sobre los esfuerzos en la losa

En las zonas en donde se presenta un cambio de curvatura en los desplazamientos, generalmente aparece un cambio de esfuerzos; de compresión a tensión o viceversa. Las zonas de tensión en la franja central de la losa (veanse las figuras VI.6a a VI.10a) son debidas al cambio de curvatura de los desplazamientos que ocurre por la influencia de las condiciones de frontera. Lo mismo ocurre en las laderas.

Al modelarse la losa con el elemento finito se hizo la hipótesis de que su contacto con el suelo era completamente rugoso. Un punto de la losa que se mueva en cualquier sentido deberá ser seguido por el correspondiente punto del suelo. Esto genera esfuerzos adicionales reflejándose su influencia en las zonas de tensión que abarcan la losa (comparese las figuras VII.3b, correspondiente a la losa con contacto liso, con la de los análisis con elemento finito, figura VI.5). En la presa se piensa que no se tiene en realidad un contacto completamente rugoso, pero tampoco liso, sino un caso intermedio, en donde la losa puede deslizar en forma relativa con respecto al suelo cuando se hallan vencido las resistencias a la fricción liberándose con el tiempo parte de las tensiones en la losa.

Se cree que las deformaciones de la losa en la franja central destruyen parte del material hacia las laderas (o por lo menos restringen el movimiento del material en las laderas) provocando que estas se vuelvan más rígidas lo cual genera concentraciones de esfuerzo (tensiones en la dirección paralela a la línea de máxima pendiente en la zona central cercana a las laderas. Vease por ejemplo la figura VI.7b).

VII.3. Síntesis

Todos los resultados anteriores pueden interpretarse si se considera que en los problemas de interacción entre losa y suelo ya sean de presas, pavimentos o cimentaciones influyen los siguientes factores:

- a) Propiedades de los materiales
- b) Rigideces relativas
- c) Distancias entre apoyos fijos (claros)
- d) Separación de juntas
- e) Distribución espacial y temporal de cargas, y
- f) Relación entre el espesor de la losa y sus otras dimensiones

Ahora bien, la interacción dependerá por tanto de la manera como se distribuye la energía de deformación que adquiere el sistema losa suelo al actuar sobre las cargas, teniéndose que la energía se concentra en las regiones donde el módulo de elasticidad es más alto.

Así que debido a que la losa es menos deformable que el suelo tiende a transmitir las cargas normales a su plano en mayor proporción en el sentido de este, es decir a absorber la energía externa mediante flexión y transmitiendo una menor cantidad hacia el suelo de apoyo, que será en menor proporción a medida que aumente el espesor de la losa.

Por otra parte si la energía que recibe el suelo es suficiente para plastificarlo entonces este ya no tomará más energía haciendo que se incremente la que toma la losa, con el consecuente riesgo de que se agriete.

A su vez la colocación de juntas en la losa hace que se transmita menos energía en el plano de ella y se incremente la que toma el suelo. Esto provocará mayores desplazamientos del sistema losa suelo, pero menos esfuerzos en la losa reduciendo su probabilidad de agrietarse.

Por otra parte a menor longitud del claro existiran menos deflexiones en la losa por transmitirse energía hacia los apoyos. Esta situación hace que, por ejemplo, en presas la forma de la boquilla tenga influencia en la distribución de esfuerzos ya que en una boquilla triangular la distancia entre las laderas (según planos horizontales) es variable ocasionando una interacción bidimensional (según el plano de la losa) entre todos los elementos de losa.

En lo que se refiere al efecto de cargas, se ha encontrado por

ejemplo en pavimentos, que las fuerzas concentradas producen en el punto de aplicación una zona de tensión y en la periferia de tensión. Este fenómeno también puede considerarse que ocurre en presas si se ve que aparece una región de compresión aproximadamente en donde está la resultante de la presión hidrostática del agua. En cimentaciones esto no se observa ya que las cargas de columnas normalmente se transmiten a través de las contratraves, y no en puntos concentrados.

Entonces, si tomamos en cuenta de manera combinada los aspectos anteriores, se puede explicar el comportamiento observado tanto en losas de cimentación, como en pavimentos y presas.

De esta manera en las losas empleadas en cimentaciones se ha observado poco o nulo agrietamiento debido a que su gran espesor en relación al claro (defiendo este por la separación de contratraves), además de su mayor cantidad de refuerzo, así como del hecho de que las cargas se distribuyen mediante las contratraves. No obstante esto no implica que el suelo de apoyo no llegue a plastificarse (falla por capacidad de carga).

A su vez en pavimentos la alta relación entre claro (según la dirección de camino), así como el hecho de tener cargas concentradas móviles (incluso de impacto), originan que se generen esfuerzos de tensión y compresión que se desplazan con la posición de la carga, originando una especie de amasado del suelo de apoyo con su consiguiente extrusión. Todo esto explica la tendencia a agrietarse de los pavimentos y del fenómeno de bacheo.

En el caso de losas de concreto colocadas en el talud de aguas arriba de presas, se presenta una situación parecida a la que se tiene en pavimentos, sólo que en este caso con cargas coasistáticas, si se desprecian los efectos hidrodinámicos del oleaje del agua almacenada. Su diferencia radica en el efecto de empotramiento de las laderas y terreno de cimentación. Los resultados observados en este caso (presentados en este trabajo) parecen confirmar los conceptos anteriores, al ver los efectos de la no linealidad del suelo de apoyo de la losa, así como el de juntas verticales en ella.

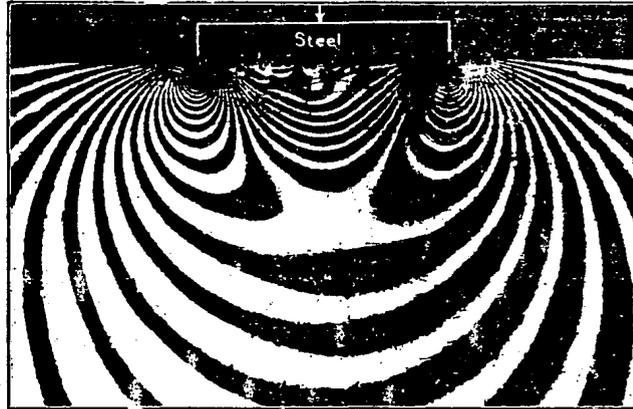
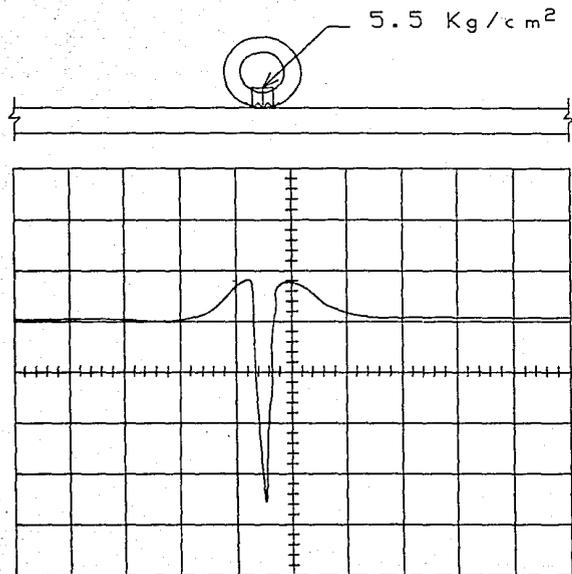


Fig. VII.1 Distribución de esfuerzos en un material elástico (placa de baquelita) determinado con la técnica de foto-elasticidad



ESC. VERT. 250 $\mu\text{E}/\text{DIV}$

ESC. HORZ. 0.5 S/DIV

TEMP. = 19° C

PRESION DE CONTACTO 5.5 Kg/cm²

fig.VII.2 Deflexiones de un pavimento flexible
(mediciones en una pista de prueba)

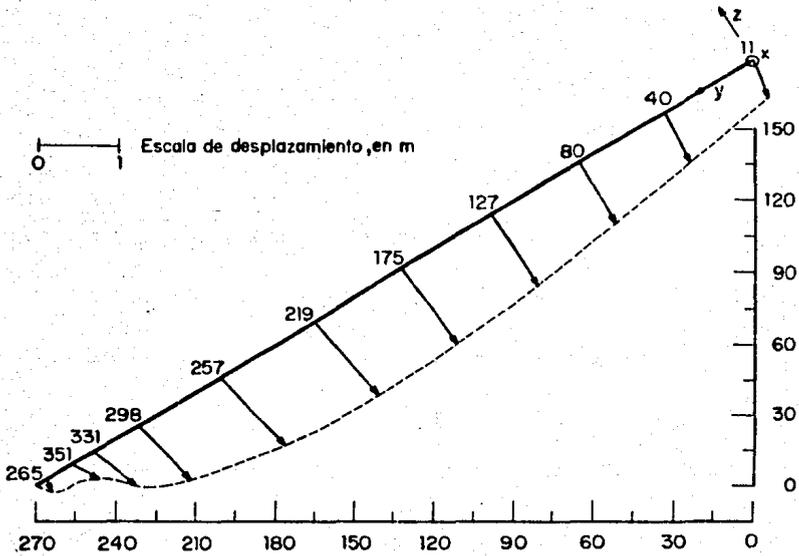


Fig.VII.3a Vectores desplazamiento de los nudos localizados en la losa sobre un corte $x=0$

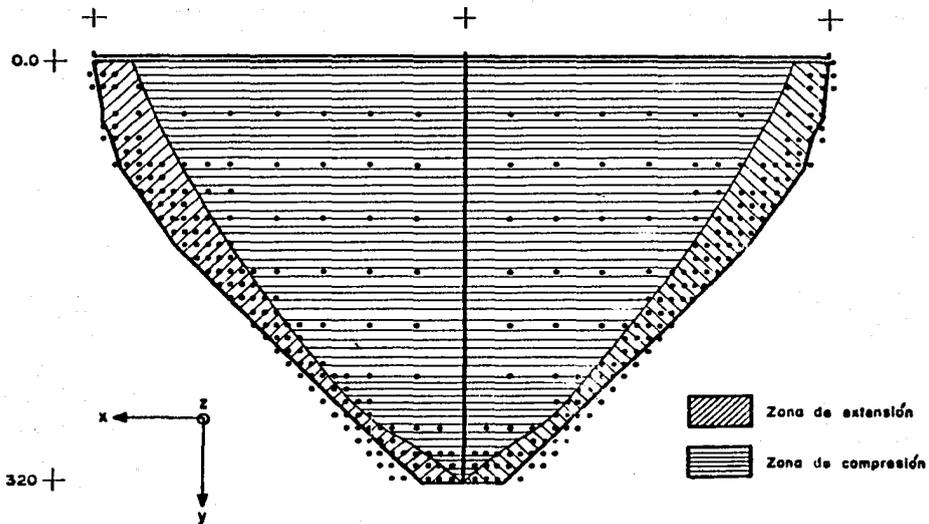


Fig. VII.3b Zonas de compresión y extensión (dirección x)

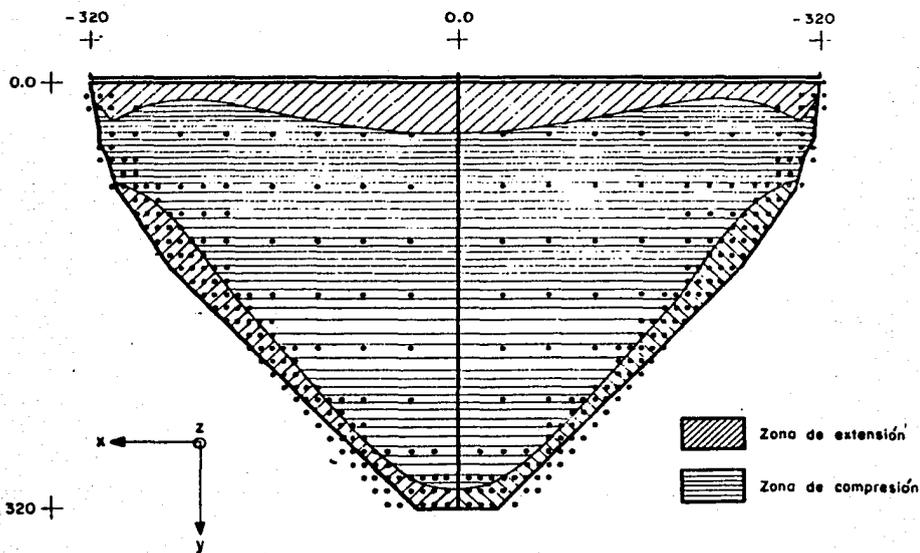


Fig. VII.3c Zonas de compresión y extensión (dirección y)

CAPITULO VIII. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Hemos llegado a la parte final de nuestro trabajo y de la misma metodología de investigación que venimos siguiendo. En esta parte estableceremos los aspectos más relevantes encontrados en la investigación y también daremos una serie de recomendaciones que podrán servir de base para mejorar lo que aquí se obtuvo.

Con base en los resultados obtenidos en el capítulo 6 y de las interpretaciones dadas en el capítulo 7 podemos establecer las siguientes conclusiones encontradas en la investigación:

- a) La interacción suelo estructura influye significativamente en el comportamiento de la losa. Esta aseveración se concluye de los resultados de los análisis llevados a cabo, observandose las peores condiciones cuando la losa tiene un contacto muy rugoso con los materiales de apoyo.
- b) Las juntas verticales favorecen la disminución de la interacción losa-suelo y permiten que la pantalla se acomode mejor a los asentamientos del suelo provocando la disminución de esfuerzos.
- c) Los resultados de los análisis con elemento finito, considerando una losa infinitamente rugosa, indican que la extensión de las zonas de tensión horizontal en la pantalla, es prácticamente independiente de la ley considerada para describir las relaciones esfuerzo-deformación del suelo (Alberro, ref.12).
- e) Las concentraciones de esfuerzos de tensión se presentan en las laderas y en la corona. Los máximos esfuerzos de tensión se generan en todos los casos cerca de los empotramientos y aproximadamente a la elevación 100. Por lo tanto dicha zona deberá contar con refuerzo horizontal adicional.

Estas conclusiones pueden generalizarse a grandes presas de

enrocamiento con pantalla de concreto con características similares a las de la presa de Aguamilpa.

Recordando que el objetivo del estudio es la optimización del diseño de la losa de la presa de Aguamilpa, de los incisos anteriores podemos concluir que el óptimo comportamiento de la losa se obtiene para una pantalla que descansa sobre un material con comportamiento elástico-lineal siendo su contacto con los materiales de apoyo lo más liso posible. En tal caso son mínimas tanto la magnitud como las zonas que abarcan los esfuerzos de tensión en la losa. Corresponde entonces, para asegurar un buen comportamiento de la losa, compactar enérgicamente el material de apoyo de la pantalla, mediante pasadas de un compactador vibrante según la pendiente del talud, antes de ser colocada la losa. Así mismo un riego de asfalto puede constituir una interposición que aminore la interacción entre el suelo y la losa, asemejando su comportamiento al de una losa lisa. Por lo tanto para la construcción de la presa de Aguamilpa se recomienda:

- a) Prestar especial atención a la compactación del material de apoyo de la losa.
- b) En la superficie terminada del suelo de apoyo de la losa, efectuar un riego de asfalto que además de constituir protección para evitar la erosión de la zona de transición, puede servir de interposición para reducir favorablemente la interacción losa-suelo.
- c) En la zona central de la losa, sometida a esfuerzos de compresión horizontales, las juntas verticales podrán ser juntas de compresión, cruzadas por el acero de refuerzo.
- d) En las zonas de concentración de esfuerzos de tensión (abajo de la elevación 160 y cerca de la corona, en la cercanía de los empotramientos), colocar juntas de tensión, distribuyendolas de la manera que indica la figura VIII.1. En estas zonas también convendría aumentar el refuerzo horizontal para evitar fallas entre juntas de tensión. Sería recomendable por tanto, analizar cuidadosamente la repartición del refuerzo horizontal en la losa.

Finalmente, con el objeto de mejorar los resultados de la investigación que hemos realizado se pueden dar las recomendaciones siguientes:

- a) Modelar la presa con el método del elemento finito, considerando la distribución de las juntas de tensión que se presenta en la figura VIII.1, haciendo la hipótesis de que se tiene un contacto intermedio entre liso y rugoso. Lo último puede lograrse utilizando para ello los denominados *elementos ficticios* (LI, ref.14), los que permiten desligar un punto común entre la losa y el suelo.
- b) Una vez construida la presa, instrumentarla a fin de observar su comportamiento, prestando especial cuidado a las zonas de tensión

que se presenten en la losa.

- c) Comparar los resultados observados con los calculados con el objeto de poder llegar a generalizaciones aplicables a un mayor número de casos de presas de enrocamiento con pantalla de concreto.

Con este trabajo creemos haber dado un buen ejemplo sobre la aplicación de la metodología de investigación a la solución de un problema práctico y cumplido con ello los objetivos perseguidos.

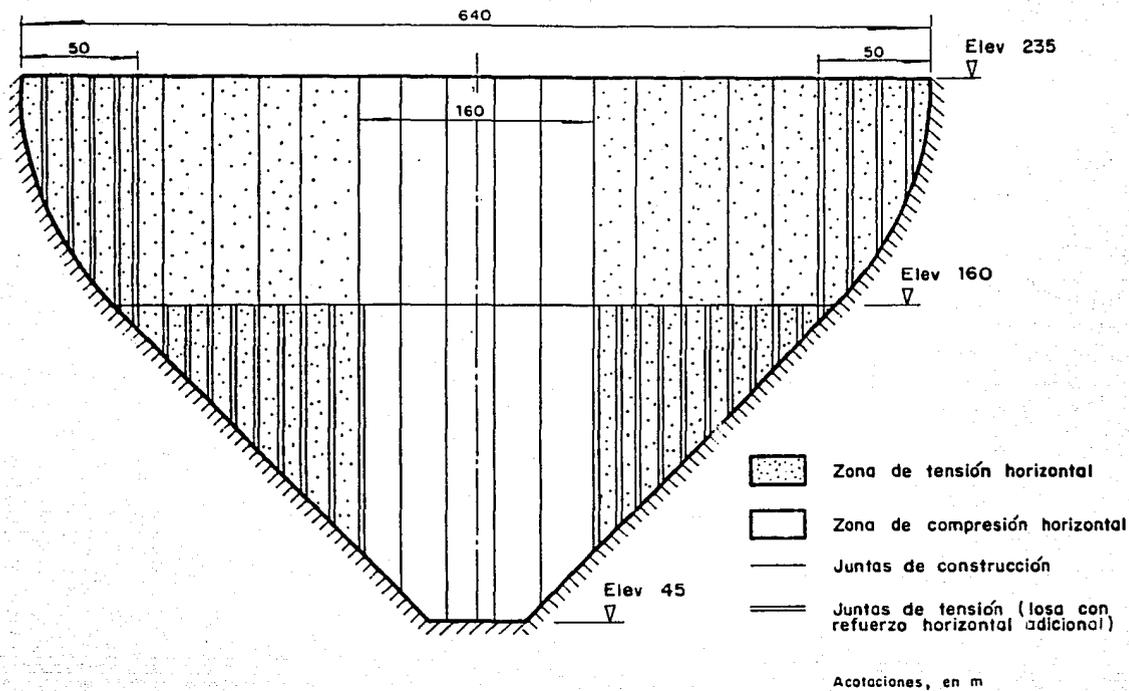


Fig. VIII.1 Distribución de las juntas de tensión

APENDICE A. METODOS NUMERICOS

A.1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

El sistema de ecuaciones algebraicas lineales

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \quad \text{A.1}$$

Puede escribirse en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{A.2a}$$

Lo cual se expresa simbólicamente como

$$Ax = b \quad \text{A.2b}$$

En donde A es la matriz del sistema

A la matriz A ampliada con la columna b se le denomina "Matriz Ampliada" del sistema y se representa por (A,b).

La solución de un sistema de ecuaciones es un conjunto de valores incógnitas que verifican simultáneamente a todas y cada una de las ecuaciones del sistema. A continuación se presentan algunos métodos para llegar a esa solución:

A.1.1. Método de eliminación completa

Este método consiste en aplicar el teorema fundamental de equivalencia que expresa que dos sistemas son equivalentes si admiten ambos al mismo sistema de valores incógnitas. De esta manera se puede ir sustituyendo ecuaciones del sistema por combinaciones lineales del mismo en las que se vayan eliminando incógnitas, hasta que, en el caso más general, quede una sola incógnita en cada ecuación. Con esto se puede despejar el valor de la incógnita que haya quedado en cada ecuación y finalmente obtener la solución para todo el sistema.

A.1.2. Método de Gauss-Jordan

El método consiste, básicamente, en sistematizar el teorema fundamental de equivalencia. Observando el sistema A.1 y sus equivalencias, puede notarse que las incógnitas están perfectamente ordenadas; es decir, en todas aparecen, en una primera columna, coeficientes de x_1 y la propia incógnita, en la segunda coeficientes de x_2 y la incógnita, y así sucesivamente. De aquí que se pueda ahorrar el trabajo de escribir repetidamente las incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n , y signos de igual en las ecuaciones, lo que viene a constituir la matriz ampliada (A,b) . La eliminación de incógnitas por medio de la sustitución de ecuaciones lineales, corresponde, en la matriz ampliada (A,b) , a tratar de convertir en ceros sus elementos, representativos de los coeficientes del sistema.

Las siguientes tres operaciones (operaciones elementales sobre renglones de una matriz) sobre la matriz ampliada, producen otra correspondiente a un sistema equivalente:

- 1.-Intercambiar dos renglones.
- 2.-Multiplicar todos los elementos de un renglón por una misma constante no nula.
- 3.-Sumar a los elementos de un renglón los correspondientes elementos de otro multiplicados por una constante.

Se puede decir que el método de eliminación completa consiste en aplicar las operaciones elementales sobre los renglones de la matriz ampliada (A,b) de manera de transformarla en otra matriz (I,c) en donde I es una matriz unitaria y c es el vector solución del problema.

A.1.3. Sistema de ecuaciones en banda

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es en banda, si los únicos elementos no nulos de la matriz del sistema se agrupan alrededor de la diagonal principal.

Ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ \dots \\ a_{n-1,n-2}x_{n-2} + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n = b_n \end{array} \right. \quad \text{A.3}$$

Los sistemas en banda con un solo elemento a cada lado de la diagonal principal, como el A.3 o con dos incógnitas en la primera ecuación y una sola nueva incógnita en cada posterior ecuación, se pueden resolver con el siguiente procedimiento:

- 1.- Asignar a x_1 cualquier valor arbitrario.
- 2.- Despejar de la primera ecuación la incógnita x_2 . El valor de esta dependerá del valor asignado a x_1 .
- 3.- Despejar de la segunda ecuación la incógnita x_3 , usando los valores de x_1 y x_2 obtenidos en los pasos 1 y 2.
- 4.- Para la última ecuación se puede escribir

$$a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n = b_n + r_n^0$$

En donde r_n^0 es el residuo resultante en la n -ésima ecuación, al considerar los valores X_0 de la incógnita. Por lo que puede decirse que se ha encontrado la solución del sistema:

$$AX_0 = b + r_0 \quad \text{A.4}$$

en donde $r_0 = \{0, 0, 0, \dots, r_n^0\}^T$

- 5.- Reemplazar ahora los términos independientes de A.3 por ceros y asignar a x_1 otro valor arbitrario para seguir el procedimiento anterior con el nuevo sistema de ecuaciones homogéneas. Se obtendrá así la solución del sistema

$$AX_1 = 0 + r_1 \quad \text{A.5}$$

en donde $r_1 = \{0, 0, 0, \dots, r_n'\}^T$

- 6.- Sumar miembro a miembro A.4 y A.5, afectando a la última ecuación un factor de corrección α para obtener

$$A(X_0 + \alpha X_1) = b + (r_0 + \alpha r_1) \quad \text{A.6}$$

En la ecuación A.6 se ve que si se da a α el valor de r_n^0/r_n' , la suma $X_0 + \alpha X_1$ dará la solución del sistema original, ya que con esto se elimina el residuo.

En el caso de sistemas en banda que tengan tres incógnitas en cada ecuación será necesario establecer dos factores de corrección α y β . Siguiendo el procedimiento anterior se resolverán los sistemas:

$$AX_0 = b + r_0$$

$$AX_1 = 0 + r_1$$

$$AX_2 = 0 + r_2$$

en donde

$$r_0 = \{0, 0, 0, \dots, r_{n-1}^0, r_n^0\}^T$$

$$r_1 = \{0, 0, 0, \dots, r_{n-1}', r_n'\}^T$$

$$r_2 = \{0, 0, 0, \dots, r_{n-1}'', r_n''\}^T$$

La suma de estos tres sistemas, afectados los dos últimos por los coeficientes α y β , respectivamente, da

$$A(X_0 + \alpha X_1 + \beta X_2) = b + (r_0 + \alpha r_1 + \beta r_2)$$

En donde habrá que determinar α y β de manera que sus valores satisfagan el sistema de dos ecuaciones

$$r_0 + \alpha_1 r_1 + \beta_1 r_2 = 0$$

$$r_0 + \alpha_2 r_1 + \beta_2 r_2 = 0$$

para que $X_0 + \alpha X_1 + \beta X_2$ sea solución del sistema $Ax = b$.

A.1.4. Métodos por aproximaciones sucesivas

Debido a que los métodos iterativos usan relativamente poca parte de la memoria de una computadora, son particularmente ventajosos para resolver sistemas de gran número de ecuaciones.

A.1.4.1. Método de Jacobi

Suponiendo en el sistema $Ax = b$, que

$$A = D + R$$

Donde D es una matriz diagonal; o sea, una matriz cuadrada cuyos elementos sobre la diagonal principal son los únicos diferentes de

cero. Entonces

$$(D + R)\alpha = b \Rightarrow D\alpha = b - R\alpha$$

de donde

$$\alpha = D^{-1}b - D^{-1}R\alpha \quad A.7$$

La ecuación A.7 sugiere el método iterativo

$$\alpha_{k+1} = D^{-1}b - D^{-1}R\alpha_k \quad A.8$$

Que es el método de Jacobi. Para que converja es necesario que los elementos diagonales de A sean lo más grande posible, por lo que conviene reordenar los renglones y columnas de dicha matriz, en este sentido. Por otra parte la diagonal de A no debe contener elementos nulos para que pueda existir la inversa D^{-1} . En caso de tenerlos también es posible hacer una reordenación de renglones y columnas.

En la ecuación A.1 se despeja α_1 de la primera ecuación, α_2 de la segunda, α_3 de la tercera, etcétera, obteniéndose

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}\alpha_2 - a_{13}\alpha_3 - \dots - a_{1n}\alpha_n) \\ \alpha_2 = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}\alpha_1 - a_{23}\alpha_3 - \dots - a_{2n}\alpha_n) \\ \alpha_3 = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}\alpha_1 - a_{32}\alpha_2 - \dots - a_{3n}\alpha_n) \\ \dots \\ \dots \\ \alpha_n = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}\alpha_1 - a_{n2}\alpha_2 - \dots - a_{n,n-1}\alpha_{n-1}) \end{array} \right. \quad A.9$$

Se considera a

$$X_0 = \{\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \alpha_3^{(0)}, \dots, \alpha_n^{(0)}\}^T$$

como la primera aproximación a la solución.

Se sustituye en los segundos miembros de las ecuaciones y se obtiene la nueva aproximación

$$X_1 = \{\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)}\}^T$$

El superíndice indica el número de la sustitución efectuada. La última aproximación se sustituye en los segundos miembros y se obtiene

$$X_2 = \{\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}, \dots, \alpha_n^{(2)}\}^T, \text{ etc.}$$

Repetiendo el proceso $k+1$ veces se llega a la aproximación

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} \alpha_2^{(k)} - a_{13} \alpha_3^{(k)} - \dots - a_{1n} \alpha_n^{(k)}) \\ \alpha_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} \alpha_1^{(k)} - a_{23} \alpha_3^{(k)} - \dots - a_{2n} \alpha_n^{(k)}) \\ \alpha_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31} \alpha_1^{(k)} - a_{32} \alpha_2^{(k)} - \dots - a_{3n} \alpha_n^{(k)}) \\ \dots \\ \alpha_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1} \alpha_1^{(k)} - a_{n2} \alpha_2^{(k)} - \dots - a_{n,n-1} \alpha_{n-1}^{(k)}) \end{array} \right.$$

A.1.4.2. Método de Gauss-Seidel

Este método es en general idéntico al de Jacobi; La diferencia consiste en que una vez que se calcula la componente $\alpha_1^{(k+1)}$, se usa inmediatamente en la misma iteración.

Las ecuaciones que determinan la iteración $k+1$ son

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} \alpha_2^{(k)} - a_{13} \alpha_3^{(k)} - \dots - a_{1n} \alpha_n^{(k)}) \\ \alpha_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} \alpha_1^{(k+1)} - a_{23} \alpha_3^{(k)} - \dots - a_{2n} \alpha_n^{(k)}) \\ \alpha_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31} \alpha_1^{(k+1)} - a_{32} \alpha_2^{(k+1)} - \dots - a_{3n} \alpha_n^{(k)}) \\ \dots \\ \alpha_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1} \alpha_1^{(k+1)} - a_{n2} \alpha_2^{(k+1)} - \dots - a_{n,n-1} \alpha_{n-1}^{(k+1)}) \end{array} \right.$$

A.1.4.3. Método de relajaciones

Considerando el sistema de ecuaciones A.1 se admitirá que los elementos de la diagonal principal son mayores, en valor absoluto, que la suma del resto de los elementos en valor absoluto, en el renglón correspondiente de la matriz del sistema.

Multiplicando ambos miembros de cada una de las ecuaciones de A.1 por el recíproco del elemento diagonal correspondiente, con signo menos, y pasando los segundos miembros al primero se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} -c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n + d_1 = 0 \\ c_{21}x_1 - c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n + d_2 = 0 \\ c_{31}x_1 + c_{32}x_2 - c_{33}x_3 + \dots + c_{3n}x_n + d_3 = 0 \\ \vdots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + c_{n3}x_3 + \dots - c_{nn}x_n + d_n = 0 \end{array} \right. \quad \text{A.10}$$

donde

$$c_{1j} = -a_j/a_{11}$$

$$\text{y, } -d_1 = -b_1/a_{11}; \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Si $x_j^{(0)}$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ son los valores de las incógnitas en una primera aproximación; sustituyéndolos en la ecuación A.10 queda el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} -c_{11}x_1^{(0)} + c_{12}x_2^{(0)} + c_{13}x_3^{(0)} + \dots + c_{1n}x_n^{(0)} + d_1 = R_1 \\ c_{21}x_1^{(0)} - c_{22}x_2^{(0)} + c_{23}x_3^{(0)} + \dots + c_{2n}x_n^{(0)} + d_2 = R_2 \\ c_{31}x_1^{(0)} + c_{32}x_2^{(0)} - c_{33}x_3^{(0)} + \dots + c_{3n}x_n^{(0)} + d_3 = R_3 \\ \vdots \\ c_{n1}x_1^{(0)} + c_{n2}x_2^{(0)} + c_{n3}x_3^{(0)} + \dots - c_{nn}x_n^{(0)} + d_n = R_n \end{array} \right.$$

en donde los valores R_i son los residuos para una primera aproximación

El método de relajaciones consiste en cambiar los valores iniciales de las incógnitas, de manera que sean despreciables todos los residuos R_i .

Si el valor $x_j^{(0)}$ de la incógnita x_j se incrementa en Δx_j , el residuo R_j cambia en $-\Delta x_j$ y el resto de los residuos R_i , $i \neq j$, cambian en $c_{ij}\Delta x_j$. De aquí se puede afirmar que para reducir a R_j a cero, debe incrementarse x_j en $\Delta x_j = R_j$. Al hacer esto, los otros R_i también cambiarán y podrán reducirse a cero, uno por uno, considerando Δx_j apropiados.

Conviene eliminar el mayor residuo que aparezca en el sistema en

cualquier estado del proceso, volverlo a hacer en el siguiente, y así sucesivamente hasta que todos los residuos sean despreciables, con el grado de aproximación preestablecido.

A.1.4.4. Método del camino de mayor inclinación

Este método y el que sigue, utilizan el concepto de gradiente, el cual se establece para sistemas lineales cuya matriz sea *simétrica y definida positiva*.

Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ es simétrica si sus elementos colocados simétricamente con respecto a la diagonal principal son iguales entre sí; es decir, si y solo si $a_{ij} = a_{ji}$ para toda i y toda j .

Una matriz cuadrada es definida positiva si su determinante y todos sus menores principales son mayores que cero; es decir, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

es definida positiva, si y solo si

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

El procedimiento iterativo de solución para el sistema $Ax = b$ consiste, básicamente, en seleccionar un vector solución inicial X_1 , una dirección v_1 y una distancia α_1 en la dirección de v_1 , para obtener la siguiente aproximación a la solución, X_2 y así sucesivamente.

Puede decirse que, en general, el método consiste en aplicar la fórmula

$$X_{i+1} = X_i + \alpha_i v_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad A.11$$

En el método del camino de mayor inclinación, dado el sistema de ecuaciones $Ax = b$, se define el vector residuo en la i -ésima iteración como

$$r_i = b - AX_i \quad A.12$$

En base a esta definición, las expresiones que determinan α_i y v_i en este método son

$$\alpha_i = \frac{r_i^T r_i}{r_i^T A r_i}, \quad v_i = r_i$$

por lo que la ecuación A.11 queda

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \frac{r_i^T r_i}{r_i^T A r_i} r_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

en donde r_i está dado por A.12.

A.1.4.5. Método del gradiente conjugado

En este método, dado el sistema $Ax = b$ con su solución aproximada X_i , se define el primer vector residuo r_i como en el método anterior

$$r_i = b - AX_i \quad A.13$$

y el vector v_i como

$$v_i = r_i$$

A partir de estos vectores se continúa la solución usando las expresiones

$$\alpha_i = \frac{r_i^T r_i}{r_i^T A r_i}$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \alpha_i v_i$$

$$\beta_i = - \frac{v_i^T A r_{i+1}}{v_i^T A v_i}$$

$$v_{i+1} = r_{i+1} + \beta_1 v_1$$

en donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$

A.2. Inversión de matrices

Siendo A una matriz cuadrada no singular, es decir que su determinante sea diferente de cero; A^{-1} es la inversa de A si

$$AA^{-1} = I$$

Haciendo $X = A^{-1}$ y sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene

$$AX = I$$

Puede considerarse que esta ecuación matricial representa un sistema de ecuaciones simultáneas, en donde no hay solo un vector de términos independientes sino n , los n vectores básicos que forman la matriz unitaria I . Además no existe solo un vector de incógnitas sino n , los que corresponden a cada columna de la matriz unitaria.

Por lo anterior es posible determinar la inversa de una matriz con el método de Gauss-Jordan de eliminación completa. Para lograrlo basta con aplicar las operaciones elementales sobre los renglones de la matriz ampliada (A, I) , de manera de transformar a A en I . De esta manera se obtiene la matriz ampliada (I, A^{-1}) con lo que queda determinada la inversa A^{-1} buscada.

A.2.1. Método de intercambio

Con este método se determina la matriz inversa en el mismo sitio en donde se tiene la matriz original, destruyéndose ésta.

Considerando el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, de la forma

$$Ax = b$$

cuya solución es

$$x = A^{-1}b$$

donde A^{-1} es la matriz del sistema A .

Básicamente el método consiste en despejar una incógnita de una ecuación y sustituirla en todas las otras, tomar otra incógnita de cualquier otra ecuación y sustituirla en todas la demás, etcétera; al repetir n veces el proceso se tendrán despejadas todas las incógnitas y resuelto el sistema.

A.2.2. Partición de matrices

Si la matriz A es de orden tan grande que no se pueda invertir con los métodos anteriores debido a la capacidad de almacenamiento de la computadora de que se disponga, es posible dividirla en submatrices

de orden menor y así determinar su inversa con el procedimiento siguiente:

Considerando el sistema de ecuaciones

$$Ax = b \quad \text{A.14}$$

en el que A es la matriz por invertir y b un vector cualquiera de términos independientes.

Si A_{22} representa una submatriz de A con inversa conocida, formada por algunos de los últimos renglones de A , y el mismo número de las últimas columnas, también de A , se puede expresar la ecuación matricial A.14, en forma notacional, como

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \text{A.15}$$

En donde, fijada la posición de la submatriz A_{22} en A , quedan obligadas las otras submatrices que aparecen en A.15. De esta manera, si A_{22} resulta ser de orden $m \times m$, el vector X_2 contendrá los últimos m elementos de x y el vector B_2 también tendrá los últimos m elementos de b .

Para resolver el sistema matricial A.15 se harán las operaciones matriciales indicadas en él, teniendo en cuenta que los elementos matriciales son a su vez matrices. Se tiene

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 = B_1 \quad \text{A.16}$$

$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 = B_2 \quad \text{A.17}$$

despejando el vector X_2 de A.17

$$A_{22}X_2 = B_2 - A_{21}X_1 \quad \text{A.18}$$

luego

$$X_2 = A_{22}^{-1}(B_2 - A_{21}X_1) \quad \text{A.18'}$$

sustituyendo A.18' en A.16 y despejando de esta el vector X_1

$$A_{11}X_1 + A_{12}A_{22}^{-1}(B_2 - A_{21}X_1) = B_1$$

de donde

$$X_1 = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}(B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2) \quad \text{A.19}$$

Haciendo

$$C = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \quad \text{A. 19'}$$

y

$$D = A_{12}A_{22}^{-1} \quad \text{A. 19''}$$

con ello A.19 queda

$$X_1 = C^{-1}(B_1 - DB_2) \quad \text{A. 20}$$

llevando A.20 a A.18 se obtiene

$$X_2 = A_{22}^{-1}B_2 - A_{22}^{-1}A_{21}C^{-1}(B_1 - DB_2)$$

ó

$$X_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}C^{-1}B_1 + (A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}C^{-1}D) \quad \text{A. 21}$$

haciendo ahora

$$E = A_{22}^{-1}A_{21} \quad \text{A. 21'}$$

y

$$F = A_{22}^{-1} + EC^{-1}D \quad \text{A. 21''}$$

se puede escribir A.21 como

$$X_2 = -EC^{-1}B_1 + FB_2$$

La solución del sistema será

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{-1} & -C^{-1}D \\ -EC^{-1} & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

por lo que la inversa de la matriz A es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} C^{-1} & -C^{-1}D \\ -EC^{-1} & F \end{bmatrix}$$

en donde C , D , E y F están definidas en A.19', A.19'', A.21' y A.21'' respectivamente (todas en función de A_{22}).

A.2.3. Método iterativo para mejorar la aproximación a la inversa de una matriz

La expresión

$$A^{-1}A = I$$

puede escribirse en la forma

$$O = I - A^{-1}A \quad \text{A.22}$$

Si B es una matriz aproximadamente igual a A^{-1} , la cual pudo haberse obtenido con el método de Gauss-Jordan, se puede escribir la matriz de residuos

$$R = I - BA \Rightarrow BA = I - R ; A = B^{-1}(I - R) ; A^{-1} = (I - R)^{-1}B$$

Los elementos de R son pequeños. Además, si todos los elementos de R resultan ser menores, en valor absoluto, que la unidad, los elementos de las potencias crecientes de R serán aun más pequeños, de manera que R^n tenderá a la matriz O a medida que n aumenta.

Por otra parte se puede considerar la identidad

$$(I - R)(I + R + R^2 + R^3 + \dots) = I \quad \text{A.23}$$

en donde la serie de matrices debe ser convergente por una serie de potencias cuyo término general tiende a la matriz cero cuando n tiende a infinito.

Premultiplicando ambos miembros de la ecuación A.23 por $(I - R^{-1})$, se obtiene

$$I + R + R^2 + R^3 + \dots = (I - R^{-1})$$

De donde se puede obtener la inversa de A al postmultiplicarla por su aproximación B . Por lo que se puede mejorar la aproximación de A^{-1} por medio de la expresión

$$A^{-1} = (I + R + R^2 + R^3 + \dots)B$$

En la cual solo habrá que considerar unos cuantos términos de la serie, por ser esta convergente, para obtener una mejor aproximación a la inversa de la matriz A .

A.3. Valores y vectores característicos

El problema de valores característicos de una matriz cuadrada A , consiste en determinar los valores de un parámetro λ que proporcionen soluciones diferentes de la trivial al sistema lineal

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad \text{A.24}$$

Es decir soluciones tales que $\alpha \neq 0$. Esos valores de λ se llaman valores característicos. Las soluciones de la ecuación A.24 se llaman vectores característicos de la matriz A .

A.3.1 Método directo

De A.24 se tiene

$$A\alpha - \lambda\alpha = 0$$

de donde

$$(A - \lambda I)\alpha = 0 \quad \text{A.25}$$

Para que el sistema lineal A.25 tenga solución diferente de la trivial, el determinante del sistema debe ser idénticamente nulo, o sea

$$|A - \lambda I| = 0$$

que en forma explícita puede escribirse como

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante e igualándolo a cero, se obtiene una ecuación algebraica en λ llamada *ecuación característica* de la matriz A .

$$\phi(\lambda) = 0$$

Que en forma explícita puede escribirse como

$$\phi(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

Las raíces de esta ecuación son los valores característicos de la matriz A . Sustituyendo cada uno de estos valores característicos en A.25, se obtiene un sistema lineal de ecuaciones homogéneas con solución diferente de la trivial; es decir, un sistema indeterminado. Entonces, si se dá a una de las incógnitas un valor arbitrario, por ejemplo $\alpha_1 = 1$, se obtienen los valores de las otras incógnitas en

términos de ésta, al resolver el sistema resultante. La solución será el vector característico correspondiente.

A.3.2. Método de Krylov

El método de Krylov para determinar la ecuación característica de una matriz, es una aplicación del teorema de Cayley-Hamilton, que establece que "toda matriz A verifica su propia ecuación característica", es decir

$$\phi(A) = 0$$

Sea

$$\phi(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

la ecuación característica de la matriz A de orden n . Como el orden de la matriz es n , la ecuación característica debe ser de grado n , por lo que $a_0 \neq 0$.

Dividiendo la ecuación anterior entre a_0 se tiene

$$F(\lambda) = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + b_2 \lambda^{n-2} + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n = 0$$

donde

$$b_1 = a_1/a_0, b_2 = a_2/a_0, \dots, b_n = a_n/a_0$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton

$$F(A) = A^n + b_1 A^{n-1} + b_2 A^{n-2} + \dots + b_{n-1} A + b_n I = 0$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación matricial por un vector y cualquiera, se tiene la expresión

$$F(A)y = A^n y + b_1 A^{n-1} y + b_2 A^{n-2} y + \dots + b_{n-1} A y + b_n y = 0$$

la cual puede considerarse un sistema lineal en las incógnitas b_1, b_2, \dots, b_n .

A.3.3. Método de Leverrier-Faddeev

Sea una matriz cuadrada cualquiera con ecuación característica

$$\lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + b_2 \lambda^{n-2} + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n = 0 \quad A.26$$

de la que se trata de obtener el valor de sus coeficientes $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$. El método de Leverrier-Faddeev para obtener dichos

coeficientes, hace uso de la definición de traza de una matriz, la cual expresa: La traza de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de su diagonal principal.

Si se representa con $\text{tr}A$ la traza de la matriz A , el método puede expresarse por medio del siguiente conjunto de ecuaciones recurrentes:

$$b_1 = - \frac{\text{tr}B_1}{1} \quad \text{A.26'}$$

donde $B = A$

$$b_k = - \frac{\text{tr}B_k}{k}$$

donde $B_k = A(B_{k-1} + b_{k-1}I)$ y $k = 2, 3, 4, \dots, n$

De las ecuaciones recurrentes tenemos

$$B_1 = A$$

$$B_2 = A(B_1 + b_1 I) = A^2 + b_1 A$$

$$B_3 = A(B_2 + b_2 I) = A^3 + b_1 A^2 + b_2 A$$

$$B_4 = A(B_3 + b_3 I) = A^4 + b_1 A^3 + b_2 A^2 + b_3 A$$

Con este método también pueden invertirse matrices. De acuerdo al teorema de Cayley-Hamilton se tiene que la matriz A debe verificar su propia ecuación característica, entonces

$$A^n + b_1 A^{n-1} + b_2 A^{n-2} + \dots + b_{n-1} A + b_n I = 0$$

Premultiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por A^{-1} , la inversa de A , se tiene

$$A^{n-1} + b_1 A^{n-2} + b_2 A^{n-3} + \dots + b_{n-1} I + b_n A^{-1} = 0$$

y despejando a A^{-1} se obtiene

$$A^{-1} = - \frac{1}{b_n} (A^{n-1} + b_1 A^{n-2} + b_2 A^{n-3} + \dots + b_{n-1} I) \quad \text{A.27}$$

Procediendo en igual forma se llegará a que

$$B_{n-1} = A^{n-1} + b_1 A^{n-2} + b_2 A^{n-3} + \dots + b_{n-2} A \quad \text{A.28}$$

Finalmente sustituyendo A.28 en A.27 se obtiene

$$A^{-1} = -\frac{1}{b} (B_{n-1} + b_{n-1} I)$$

Expresión que permite determinar la inversa de la matriz A.

A.3.4. Método de aproximaciones sucesivas

Dada la ecuación matricial $Ax = \lambda x$, se ocurre aplicar un método como el de Jacobi.

Sea α_0 un vector cualquiera que se aproxima a un vector característico de la matriz A; multiplicando α_0 por la matriz A y extrayendo del vector producto su elemento más grande, se obtiene

$A\alpha_0 = \lambda_1 \alpha_1$, en donde λ_1 y α_1 son los valores aproximados al valor característico y a la nueva aproximación al vector característico, respectivamente. Repitiendo el proceso con α_1 y siguiendo de esta manera se tiene

$$A\alpha_1 = \lambda_2 \alpha_2$$

$$A\alpha_2 = \lambda_3 \alpha_3$$

$$\dots$$

$$A\alpha_{n-1} = \lambda_n \alpha_n$$

Este método converge siempre al vector característico correspondiente al mayor valor característico. Con una transformación se puede llegar al menor valor. Si se premultiplican ambos miembros de la ecuación A.24 por A^{-1} se llegará a

$$A^{-1} - A\alpha = \lambda A^{-1} \alpha \Rightarrow \alpha = \lambda A^{-1} \alpha$$

de donde

$$A^{-1} \alpha = \frac{1}{\lambda} \alpha \quad \text{A.29}$$

Al aplicarse A.29, el método convergerá al valor más grande de $1/\lambda$, o sea al más pequeño de los valores de λ .

A.4. Ecuaciones diferenciales ordinarias

A.4.1. Solución de una ecuación diferencial

Dada la ecuación diferencial ordinaria de orden n y cualquier

grado, cuya forma más general es

$$F(x, \psi, \psi', \psi'', \dots, \psi^{(n)}) = 0 \quad \text{A.30}$$

se establece en matemáticas que en su solución general deben aparecer n constantes arbitrarias. Entonces, puede aceptarse que la solución de A.30 es

$$G(x, \psi, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad \text{A.31}$$

La ecuación A.31 representa, gráficamente, una familia de curvas planas, cada una de ellas obtenidas para los valores particulares de las n constantes c_1, c_2, \dots, c_n . Cada una de las soluciones particulares de la ecuación diferencial A.30 pueden obtenerse, analíticamente, sujetando a la solución general A.31 a n condiciones independientes que permitan valuar las constantes arbitrarias. Dependiendo de como se establezcan estas condiciones se distinguen dos tipos de problemas: Los llamados de valores iniciales, y los de valores en la frontera.

Un problema de valores iniciales está gobernado por una ecuación diferencial de orden n y un conjunto de n condiciones independientes, todas ellas válidas para el mismo punto inicial. Por el contrario, en los problemas de valores en la frontera deben establecerse condiciones de frontera en todos y cada uno de los puntos que constituyen la frontera del dominio de soluciones del problema.

La solución numérica de ecuaciones diferenciales consiste, básicamente, en sustituir el dominio continuo de soluciones por un formado con puntos aislados igualmente espaciados entre sí. De esta manera en un problema de valores iniciales, el dominio de definición de soluciones $x \geq a$ se sustituye por el conjunto infinito numerable de puntos $\alpha_0 = a, \alpha_1 = \alpha_0 + h, \alpha_2 = \alpha_0 + 2h, \alpha_3 = \alpha_0 + 3h, \dots$; y en el caso de valores en la frontera se sustituye el intervalo $a \leq x \leq b$ por el conjunto finito de puntos $\alpha_0 = a, \alpha_1 = \alpha_0 + h, \alpha_2 = \alpha_0 + 2h, \alpha_3 = \alpha_0 + 3h, \dots, \alpha_n = \alpha_0 + nh = b$, obtenido al dividir el intervalo en n partes iguales.

Hablándose discretizado el problema continuo, se tratará de obtener la solución para los puntos considerados, y esto se hará, en general, sustituyendo las derivadas que aparezcan en la ecuación diferencial y en sus condiciones de frontera o iniciales, por fórmulas numéricas de derivación que proporcionen aproximaciones a las derivadas o tratando de integrar la ecuación diferencial y reemplazando al proceso de integración por una forma numérica que se aproxime a la integral. Una vez hecho esto, la ecuación expresada en diferencias finitas debe ser aplicada repetidamente en todos los puntos pivotes donde se desconoce la solución para llegar a la solución aproximada del problema.

A.4.1.1. Solución numérica de problemas de valores iniciales

Un problema ordinario de valores iniciales está gobernado por una ecuación diferencial ordinaria y un conjunto de condiciones, todas

ellas válidas para el mismo punto inicial, $\alpha = \alpha_0$. La solución numérica de este problema consiste en evaluar la integral de $\psi(x)$ en todos los puntos pivotes de su intervalo de definición, los que estarán igualmente espaciados en h unidades. Estos valores se obtienen, paso a paso, a partir del punto inicial, lo que da el nombre de "métodos de integración paso a paso".

La evaluación de ψ en los puntos pivote $\alpha_i = \alpha_0 + ih$, $i = 1, 2, 3, \dots$, se lleva a cabo usando "fórmulas de recurrencia", que utilizan los valores conocidos de ψ en las estaciones anteriores α_{i-1} , α_{i-2} , α_{i-3} , ...; de manera que para aplicar estas ecuaciones es necesario, entonces, evaluar muy aproximadamente a $\psi(x)$ en algunos de los primeros puntos pivotes (uno a cuatro); y esto se hace, usualmente, desarrollando a $f(x)$ en series de potencias.

A.4.1.1a. Métodos de Integración de Euler

La solución de un problema de valores iniciales se obtiene generalmente paso a paso por métodos de integración hacia adelante, lo que permite evaluar ψ_{i+1} tan pronto se conozcan los valores ψ_i y ψ_{i-1} , de ψ en uno o más pivotes anteriores. Uno de estos métodos debido a Euler, es aplicable a ecuaciones de primer orden y no requiere conocer la solución de los puntos pivotes anteriores.

Dado el problema de valores iniciales

$$\frac{d\psi}{dx} = f(x, \psi), \quad \psi(\alpha_0) = \psi_0 \quad \text{A.33}$$

se debe integrar la ecuación diferencial en el intervalo $\alpha_1 \leq x \leq \alpha_{i+1} = \alpha_1 + h$, y evaluar la integral aplicando la fórmula, generada a partir de series de Taylor, de integración numérica

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_{i+1}} \frac{d\psi}{dx} dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_{i+1}} f(x, \psi) dx$$

$$\psi \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_{i+1}} = hf(\alpha_1, \psi_1) + O(h^2)$$

de donde se obtiene la siguiente expresión aproximada llamada fórmula de Euler

$$\psi_{i+1} = \psi_i + hf(\alpha_i, \psi_i) \quad \text{A.34}$$

Gráficamente el método de Euler consiste en ir de un valor ψ_n conocido de la solución de la ecuación diferencial $\psi' = f(x, \psi)$ en un punto, al siguiente, por medio de la tangente, (T_1) , a la curva integral $\psi = \psi(x)$ en el mismo punto de la solución conocida.

A.4.1.1b. Métodos de Runge-Kutta

En los métodos de Runge-Kutta en lugar de ir por la tangente T_1 , del método de Euler, se utiliza una secante con pendiente igual al promedio de pendientes de la curva integral en los puntos de coordenadas (x_n, y_n) y (x_{n+1}, y_{n+1}) , en donde $x_{n+1} = x_n + h$, y y_{n+1} puede estimarse con el procedimiento normal de Euler. De lo anterior se obtiene un método mejorado de Euler con error del orden de h^3 , definido por la expresión

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad A.34'$$

donde $f(x_{n+1}, y_{n+1})$ es el valor de la función $f(x, y)$ para $x = x_n + h$, y $y = y_n + hf(x_n, y_n)$.

Observando las ecuaciones A.34 y A.34' puede decirse que ambas consisten en aplicar la fórmula de recurrencia

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n) \quad A.35$$

donde

$$\phi(x, y) = f(x, y) \text{ en el método de Euler}$$

y

$\phi(x, y) = \frac{1}{2}[f(x, y) + f(x + h, y + hf(x, y))]$, $y' = f(x, y)$ en el método mejorado de Euler.

La ecuación A.35 da origen una gran variedad de métodos conocidos como de Runge-Kutta. La diferencia entre ellos consiste en la forma como se define la función $\phi(x, y)$.

Un método de Runge-Kutta para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con error del orden de h^5 consiste en aplicar la ecuación de recurrencia A.35, en donde la función $\phi(x, y)$ está dada por la expresión

$$\phi(x, y) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad A.36$$

en la cual

$$k_1 = f(x, y)$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{hk_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{hk_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x + h, y + hk_3)$$

La ecuación A.36 se obtiene haciendo un promedio pesado de las cuatro pendientes k_1, k_2, k_3, k_4 a la curva integral.

A.4.1.1c. Método predictor-corrector de Milne

Este es un método para ecuaciones diferenciales de primer orden con error de aproximado de h^5 , que requiere conocer la solución de ψ y el valor de su derivada ψ' , en los primeros cuatro puntos pivotes, para aplicarlo y continuar la solución con él. Estos valores de ψ pueden obtenerse desarrollando la función en series de potencias o aplicando alguno de los métodos de Euler o de Runge-Kutta.

Dada la ecuación diferencial y los valores de los cuatro puntos pivotaes

$$\psi' = f(x, \psi); \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3; f_0, f_1, f_2, f_3 \quad \text{A.37}$$

donde

$$f_1 = f(x_1, \psi_1)$$

puede integrarse la ecuación diferencial, entre x_{1-3} y x_{1+1} , aplicando la fórmula de integración numérica

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{4}{3} h \{ 0 \quad 2 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \} + O(h^5)$$

con lo cual se obtiene el "predictor" de Milne, o sea

$$\int_{x_{1-3}}^{x_{1+1}} \psi' dx = \int_{x_{1-1}}^{x_{1+1}} f(x, \psi) dx$$

entonces

$$\psi_{1+1} - \psi_{1-3} = \frac{4}{3} h (2f_{1-2} - f_{1-1} + 2f_1) + O(h^5)$$

por lo que

$$\psi_{1+1,p} = \psi_{1-3} + \frac{4}{3} h (2f_{1-2} - f_{1-1} + 2f_1)$$

con lo que puede calcularse f_{1+1} . el subíndice p indica el término "predictor".

El valor correcto de ψ_{1+1} se puede obtener integrando la ecuación diferencial entre x_{1-1} y x_{1+1} , por medio de

$$\int_{\alpha_{-1}}^{\alpha_1} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_{-1} + 4f_0 + f_1) + O(h^5)$$

que es la fórmula de Simpson de 1/3, de donde se obtiene

$$\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_{i+1}} \psi' dx = \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_{i+1}} f(x, \psi) dx$$

que es el "corrector" de Milne. De aquí

$$\psi_{i+1} - \psi_{i-1} = \frac{1}{3} h (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

finalmente

$$\psi_{i+1,c} = \psi_{i-1} + \frac{1}{3} h (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

A. 4.1.1d. Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\psi' = f(x, \psi, \varphi) ; \varphi' = g(x, \psi, \varphi) \quad \text{A. 38}$$

donde ψ y φ son funciones de la misma variable independiente x , con las dos condiciones iniciales

$$\psi(x_0) = \psi_0 ; \varphi(x_0) = \varphi_0 \quad \text{A. 39}$$

si se conocen los valores de $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_1, \varphi_2$ y φ_3 , al aplicar el método de Milne a las ecuaciones A.38 se obtiene el siguiente conjunto de fórmulas:

$$\psi_{i+1,p} = \psi_{i-3} + \frac{4}{3} h (2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i)$$

$$\varphi_{i+1,p} = \varphi_{i-3} + \frac{4}{3} h (2g_{i-2} - g_{i-1} + 2g_i)$$

que permiten determinar f_{i+1} y g_{i+1} . Además se tiene

$$\psi_{i+1,c} = \psi_{i-1} + \frac{1}{3} h (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) \quad \text{A. 40}$$

$$\varphi_{i+1,c} = \varphi_{i-1} + \frac{1}{3} h (g_{i-1} + 4g_i + g_{i+1})$$

las cuales son una aproximación al sistema A.38 con las condiciones iniciales A.39.

A.4.1.1e Solución de ecuaciones diferenciales de orden superior

Cualquier ecuación diferencial de orden alto puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Así la ecuación de orden n se transforma en n ecuaciones diferenciales de orden uno, que puede resolverse por el método anteriormente visto.

Por ejemplo, la ecuación diferencial de tercer orden

$$\psi''' = f(x, \psi, \psi', \psi'') \quad \text{A.41}$$

es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \psi' &= u \\ (\psi'' =) u' &= v \\ (\psi''' = u'' =) v' &= f(x, \psi, u, v) \end{aligned}$$

La integración hacia adelante paso a paso de ecuaciones diferenciales de orden superior puede también efectuarse sustituyendo en la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales, las derivadas por fórmulas numéricas de derivación consistentes; es decir, todas ellas con el mismo orden de error. La ecuación en diferencias finitas así obtenida, deberá aplicarse repetidamente en los puntos pivotes y resolverse en términos de la solución previamente obtenida, con el mismo procedimiento en los puntos pivotes anteriores. El proceso puede llevarse a cabo sin necesidad de iniciar la solución por series de Taylor.

A.4.1.2. Solución numérica de problemas de valores en la frontera

Un problema de valores en la frontera está gobernado por una ecuación diferencial de orden mayor que uno con ciertas condiciones de frontera en cada borde. Si la ecuación diferencial es ordinaria de orden $2n$, en general habrá n condiciones de frontera en cada borde ($x = a$ y $x = b$) del intervalo $a \leq x \leq b$ de definición de soluciones, y estas condiciones contendrán derivadas de orden $2n-1$.

A.4.1.2a. Integración Paso a Paso

Los problemas de valores en la frontera definidos por una ecuación diferencial ordinaria de orden dos, pueden resolverse usando los métodos de integración hacia adelante paso a paso, de la sección anterior. Para hacerlo debe considerarse a ψ_1 , la solución desconocida de ψ en el primer punto pivote, como parámetro, y resolver el sistema para diferentes valores de ψ_1 hasta que la solución correspondiente satisfaga la condición de frontera en el otro borde del intervalo de integración. El procedimiento para seleccionar los valores sucesivos de ψ_1 puede ser simplemente el de prueba y error y/o el de interpolación.

Los problemas de valores en la frontera de orden mayor de dos pueden resolverse con el mismo procedimiento, pero se requiere conocer el valor inicial (ψ_1) de dos o más parámetros y algunas de sus derivadas, lo que puede hacerlo bastante complejo.

A.4.1.2b. Solución de problemas lineales

La solución de un problema lineal de cualquier orden de valores en la frontera, por diferencias finitas, reduce la integración de la ecuación diferencial a la evaluación de las raíces de un sistema de ecuaciones algebraicas simultaneas. Estas raíces son los valores de la solución requerida en los puntos pivotes de su intervalo de definición.

Para resolver un problema ordinario lineal de valores en la frontera, por diferencias finitas, deben seguirse los siguientes pasos:

- 1) Dividir el intervalo de definición de la solución $[\alpha_0, \alpha_1]$ en n partes iguales de longitud h .
- 2) Sustituir en la ecuación diferencial y sus condiciones de frontera las derivadas por expresiones aproximadas de derivación numérica, todas ellas con el mismo orden de error (usualmente del orden h^2).
- 3) Al Aplicar el operador diferencial lineal, obtenido de la ecuación diferencial, en los $n-1$ puntos pivotes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$. Si en alguna de las fronteras no se conoce la solución, también en esa se deberá aplicar el operador diferencial. Al centrar el operador cerca de las fronteras, es posible que se recurra a puntos ficticios localizados fuera del rango de integración, los que pueden evaluarse usando las condiciones de frontera.
- 4) Resolver el sistema de ecuaciones algebraicas obtenidas en el punto anterior. Este sistema dará los valores de

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1} \text{ y de } \psi_0 \text{ y } \psi_n$$

A.4.1.2c. Solución numérica de problemas de valores característicos

Un problema de valores característicos es un problema de valores en la frontera definido por una ecuación diferencial homogénea, con condiciones homogéneas de frontera. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{d^2 \psi}{d\alpha^2} + k\psi = 0$$

en donde k es un parámetro, cuya solución debe verificar las condiciones de frontera

$$\psi(0) = 0, \psi(1) = 0$$

define un problema de valores característicos.

a) Integración paso a paso

Los problemas de valores característicos de orden dos pueden resolverse con los métodos de integración paso a paso. Para iniciar la solución habrá que asignar a ψ_1 cualquier valor conveniente, por ejemplo uno, ya que la solución puede estar multiplicada por cualquier factor de escala y seguir siendo solución. Al valor característico k se le darán valores arbitrarios sucesivos hasta que la solución correspondiente satisfaga la condición de frontera en el otro borde del intervalo de integración. Los valores sucesivos de k pueden mejorarse por interpolación.

b) Solución de problemas lineales

Las aproximaciones al menor valor característico de un problema de valores característicos lineal pueden obtenerse transformando la ecuación diferencial en la correspondiente ecuación de diferencias y resolviendo el problema de valores característicos, dado por el sistema de ecuaciones lineales así obtenido.

A.4.2. Ecuaciones diferenciales parciales

En esta parte se considera la solución de la ecuación diferencial parcial de segundo orden, que tiene la forma:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F = 0 \quad \text{A.42}$$

en donde los coeficientes A , B y C son, en general, funciones de las variables x , y , y u . La ecuación se considera

$$\text{Elíptica} \quad \text{si } B^2 - 4AC < 0$$

$$\text{Parabólica} \quad \text{si } B^2 - 4AC = 0$$

$$\text{Hipérbólica} \quad \text{si } B^2 - 4AC > 0$$

A.4.2.1. Ecuación diferencial parcial elíptica

Los casos que se consideran típicos de este tipo de ecuación, los constituyen la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{A.43}$$

y la llamada ecuación de Poisson, de la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y) \quad \text{A.44}$$

Las ecuaciones A.43 y A.44 se representan también mediante el denominado operador armónico o Laplaciano, para el que se usa el

símbolo ∇^2 ; es decir

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] u$$

Un método para resolver ecuaciones diferenciales parciales recurre al concepto de ecuaciones en diferencias finitas. En el caso de dos variables independientes, se necesitan considerar dos direcciones, estableciendo una malla. El operador que corresponde al término

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right]_{i,j}$$

en el renglón i y en la columna j , es

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right]_{i,j} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{1}{2h} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad \text{A. 45}$$

Aplicando el operador A.45 a la función $u(x, y)$ se obtiene

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]_{i,j} = \frac{1}{4h^2} \left[-u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} - u_{i+1,j+1} \right]$$

En el caso del operador armónico o Laplaciano se tiene

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \end{array} \right\} + \frac{1}{h^2} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 1 \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{h^2} \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad \text{A. 46}$$

Aplicando el operador diferencial A.46 a la función $u(x, y)$, se tiene

$$\nabla^2 u_{i,j} = \frac{1}{h^2} \left[u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \right]$$

A.4.2.2 Ecuación diferencial parcial parabólica

Un caso típico de este tipo de ecuación lo constituye el problema de la transmisión de calor en una sola dirección, representado por la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{A.47}$$

cuando el flujo es en la dirección x , siendo t el tiempo, u la distribución de la temperatura, que es función de x y t , y a una constante que depende de la conductividad térmica, densidad y calor específico del material.

Las fórmulas numéricas de derivación que se utilizan son

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{\Delta t} \quad \text{A.47'}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{1}{h^2} \left[u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1} \right] \quad \text{A.48}$$

El análisis ocurre en el punto j , en el instante i , deseándose la temperatura en ese punto en el instante que sigue, $i+1$. Sustituyendo las ecuaciones A.47' y A.48 en A.47, se tiene

$$\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{\Delta t} = \frac{a}{h^2} \left[u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1} \right]$$

de donde

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \frac{a\Delta t}{h^2} \left[u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1} \right]$$

A.4.2.3. Ecuación diferencial parcial hiperbólica

Un ejemplo que ilustra este tipo de ecuación es el caso de un cable vibrando, cuya ecuación de movimiento es

$$c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{A.49}$$

En donde $\psi(t,x)$ es la distancia perpendicular al cable en el instante t y en el punto x , siendo c^2 una constante que depende de las propiedades físicas del cable. Las condiciones en los extremos de la cuerda, por estar fijos, son que sus desplazamientos serán nulos, es decir

$$\psi(t,0) = 0 ; \psi(t,\alpha_1) = 0$$

Los operadores de diferencias finitas que se aplican y que

proviene de la ecuación A.49, para una cuerda que parte del reposo con velocidad nula en el instante $t=0$ ($\alpha_1=1 \Rightarrow \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t}_{t=0} = 0$), son

$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{1,j} = \frac{1}{h^2} \left[\psi_{1,j-1} - 2\psi_{1,j} + \psi_{1,j+1} \right] \quad \text{A.50}$$

en el instante i , y que involucra tanto al punto j como a los puntos adyacentes a la izquierda y derecha de dicho punto j , y

$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right|_{1,j} = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j} \right] \quad \text{A.51}$$

Que se aplica al punto j y en el instante i , pero que también hace referencia a los instantes $i-1$ e $i+1$, en dicho punto. El valor $\psi_{i,j}$ es el desplazamiento del cable en el instante i y en el punto o pivote j . Hay que distinguir j de α ya que, por ejemplo, en el extremo $\alpha=0$, $j=1$. Las variables de tiempo t e i no tienen diferencia entre sí.

Sustituyendo las ecuaciones A.50 y A.51 en A.49

$$\frac{c^2}{h^2} \left[\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1} \right] = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j} \right]$$

finalmente se tiene que

$$\psi_{i+1,j} = 2\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j} + a^2 \left[\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1} \right] \quad \text{A.52}$$

donde

$$a^2 = \frac{c^2 (\Delta t)^2}{h^2}$$

Suponiendo $c=1$, entonces si $\Delta t=0.1$, y $h=0.1$, se tiene

$$a^2 = 1$$

Tomando en cuenta este valor, la ecuación A.42 toma la forma de

$$\psi_{i+1,j} = \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1} - \psi_{i-1,j} \quad \text{A.53}$$

Para el instante $i=0$, de la ecuación anterior se tiene, para

$$j = 2, 3, 4, \dots, 10$$

$$\psi_{0,j-1} = \psi_{0,j+1} + \psi_{1,j+1} - \psi_{-1,j} \quad \text{A.54}$$

tomando en cuenta que

$$\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$$

que expresado en diferencias finitas se escribe

$$\frac{1}{2\Delta t} = (\psi_{1,j} - \psi_{-1,j}) = 0$$

por lo que

$$\psi_{-1,j} = \psi_{1,j}$$

sustituyendo en A.54, resulta

$$\psi_{1,j} = 0.5(\psi_{0,j+1} + \psi_{0,j-1}) \quad \text{A.55}$$

El método de solución consiste en aplicar la ecuación A.55 para $t=0$, y la A.53 para los instantes siguientes.

APENDICE B. CALCULO FUNCIONAL

B.1. Elementos de cálculo de variaciones

B.1.1. Concepto de funcional

Si consideramos en el plano αy una curva que une dos puntos A y B , y hacemos girar sobre el eje α dicha curva, ésta describirá una superficie S cuya área J se calcula con

$$J = 2\pi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} y \sqrt{1 + y'^2} \, d\alpha$$

donde

$$y' = \frac{dy}{d\alpha} ; y = f(\alpha)$$

Si se admite la posibilidad de ir variando la línea que define la función $y = f(\alpha)$, de manera que para cada conjunto de valores de y se defina una línea diferente, manteniendo fijos los extremos A y B , entonces J resultará función de y , por lo que

$$J = J[y(\alpha)]$$

Se dice entonces que J es una *función de línea* (Volterra), o bien una *funcional* (Hadamard).

B.1.2. Máximos y mínimos de funcionales

El cálculo de variaciones se ocupa de la determinación de los valores máximos y mínimos de las funcionales. El objeto del cálculo de variaciones consiste esencialmente en buscar una función argumento $y(\alpha)$ en correspondencia a la cual una integral del tipo

$$J[y] = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha, y, y') \, d\alpha$$

adquiere un valor máximo o un mínimo. Este valor se llama genéricamente un *extremo* de la funcional, y la función $y(\alpha)$ que le corresponde se denomina la *extremal*.

El problema fundamental del cálculo de variaciones puede expresarse así: en el dominio de las funciones argumento admisibles para una funcional determinada, hallar la función argumento (*extremal*) para la cual la funcional alcanza un valor extremo, con respecto a los valores que ella adquiere para todas las demás funciones argumento del dominio, que se hallan en una vecindad suficientemente pequeña de la *extremal*.

La vecindad de la función $y = f(\alpha)$ se define como sigue: Dada una cantidad positiva h , se dice que una función $y = f(\alpha)$ está en la vecindad (h) de una función $y = f(\alpha)$, en el intervalo (α_1, α_2) , cuando

se tiene

$$|f(x) - f^*(x)| < h \text{ para } \alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$$

B.1.3. Concepto de variación

Considérese una función continua $\eta(x)$ definida en el intervalo $\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$, con derivadas primera y segunda, también continuas, nula en los extremos, por lo demás la que sea. Y considérese también un parámetro ϵ que puede hacerse pequeño como se quiera; se llama variación de la función $\psi = f(x)$, y se escribe $\delta\psi$, la función

$$\delta\psi = \epsilon\eta(x)$$

Todas la funciones

$$\psi^* = \psi + \delta\psi = f(x) + \epsilon\eta(x)$$

pertenecen al dominio de las funciones argumento y , para un valor suficientemente pequeño ϵ , se hallan en una vecindad arbitraria pequeña de la extremal $\psi = f(x)$.

La funcional

$$J[\psi^*] = J[f(x) + \epsilon\eta(x)]$$

que puede considerarse como función $X(\epsilon)$ de la variable ϵ , tendrá, para $\epsilon = 0$, un máxima o un mínimo, relativamente a todos los valores de ϵ incluidos en una vecindad suficientemente pequeña de $\epsilon = 0$. La condición necesaria para que $\psi = f(x)$ sea una extremal es que

$$\frac{dX}{d\epsilon} = 0 \text{ para } \epsilon = 0 \quad \text{B.1}$$

donde

$$X(\epsilon) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(x, \psi + \epsilon\eta, \psi' + \epsilon\eta') dx$$

La ecuación B.1 también puede escribirse como

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \eta(x) \left\{ \frac{\partial F}{\partial \psi} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial \psi'} \right] \right\} dx = 0 \quad \text{B.2}$$

B.1.4. Lema fundamental del cálculo de variaciones

Si $N(x)$ es una función continua de x en (α_1, α_2) y se tiene

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \eta(x) M(x) dx = 0$$

cualquiera que sea la función $\eta(x)$, continua, con sus derivadas primera y segunda, y nula en los extremos α_1 y α_2 , entonces $M(x)$ tiene que ser idénticamente igual a cero, esto es

$$M(x) = 0 \text{ para } \alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$$

aplicando el lema anterior a la ecuación B.2 resulta

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial \psi'} \right] = 0 \quad \text{B.3}$$

y siendo que

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial \psi'} \right] = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \psi'} + \psi' \frac{\partial^2 F}{\partial \psi \partial \psi'} + \psi'' \frac{\partial^2 F}{\partial \psi'^2}$$

entonces la ecuación B.3 puede escribirse como

$$\psi'' \frac{\partial^2 F}{\partial \psi'^2} + \psi' \frac{\partial^2 F}{\partial \psi \partial \psi'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \psi'} - \frac{\partial F}{\partial \psi} = 0$$

esta expresión es la ecuación diferencial de Euler ordinaria de segundo orden en la variable ψ . Para que la función $\psi = f(x)$ sea máxima o mínima tiene que satisfacer esta ecuación.

B.1.5. Variación de una funcional

Se define

$$\delta J[\psi] = \epsilon \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon} \right]_0$$

o sea

$$\delta J = 0$$

a la condición necesaria para un extremo de la funcional $J[\psi]$. Se dice, entonces, que la funcional se hace estacionaria.

La expresión integral de la variación es

$$\delta J = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \delta \psi \left\{ \frac{\partial F}{\partial \psi} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial \psi'} \right] \right\} dx$$

B.1.6. Extremos de funcionales de varios argumentos

Sea J una funcional con varias funciones argumento $u_1(x), u_2(x), \dots$ que puede escribirse bajo la forma

$$J[u_1, u_2, \dots] = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} F[x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_1'(x), u_2'(x), \dots] dx$$

Introduciendo funciones arbitrarias $\eta(x), \zeta(x), \dots$ que se anulan en los extremos α_1 y α_2 , se afirma que la función

$$\mathcal{X}(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots) = \int_{\alpha}^{\alpha_1} F[x, f(x) + \epsilon_1 \eta(x), g(x) + \epsilon_2 \zeta(x), \dots, f' + \epsilon_1 \eta', g + \epsilon_2 \zeta', \dots] dx$$

debe tener un extremo cuando $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = 0$, obteniéndose en este caso

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial u_1'} \right] = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u_2} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial u_2'} \right] = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

El anterior sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, expresa la extensión de la condición de Euler para el caso de una función de varios argumentos. Sus integrales son precisamente las funciones extremales buscadas:

$$u_1 = f(x), u_2 = g(x), \dots$$

B.1.7. Extremos con condiciones auxiliares

Si el extremo que se busca resulta limitado por condiciones auxiliares, los problemas variacionales pueden ser un poco más complicados.

La condición

$$G(x, y, z) = 0$$

que consiste en una relación en términos finitos entre x , y y z , se llama *holonómica*.

El problema con condiciones auxiliares se plantea así: volver estacionaria la funcional J , dependiente de n funciones argumento $u_1(x), u_2(x), \dots$, con m condiciones auxiliares, holonómicas o no holonómicas $G_i(x, u_1, u_1', u_2, u_2', \dots) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Indicando con $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$, m funciones indeterminadas regulares en (x_1, x_2) , y considerando la función

$$F^*(x, u_1, u_1', u_2, u_2', \dots) = F + \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \dots + \lambda_m G_m$$

el problema equivale a buscar un extremo de

$$J^* [u_1, u_2, \dots] = \int_{x_1}^{x_2} F^*(x, u_1, u_1', u_2, u_2', \dots) dx$$

Al anularse δJ^* esto conduce a las n ecuaciones de Euler

$$\begin{cases} \frac{\partial F^*}{\partial u_1} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F^*}{\partial u_1'} \right] = 0 \\ \frac{\partial F^*}{\partial u_2} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F^*}{\partial u_2'} \right] = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

que junto con las ecuaciones para G_i lleva a tener un sistema de $n+m$ ecuaciones con $n+m$ funciones incógnitas

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$$

cuya integración da la resolución del problema. Las funciones $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ se denominan *multiplicadores de Lagrange*.

B.1.8. Variación de una integral doble

Para las integrales dobles del tipo

$$J[\varphi] = \int_A F(x, \varphi, \varphi, p, q) dA$$

donde

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad y \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

la condición de Euler que expresa la condición necesaria para que la funcional J se vuelva estacionaria es

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial p} \right] - \frac{d}{dy} \left[\frac{\partial F}{\partial q} \right] = 0$$

B.2. Funcionales lineales

Se llama forma lineal a la combinación

$$P_n(x_1) = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n = \sum_{i=1}^n k_i x_i$$

que cumple con

$$P_n(x_1 + \psi_1) = \sum_{i=1}^n k_i (x_1 + \psi_1) = \sum_{i=1}^n k_i x_1 + \sum_{i=1}^n k_i \psi_1 = P_n(x_1) + P_n(\psi_1)$$

$$P_n(ax_1) = \sum_{i=1}^n k_i (ax_1) = a \sum_{i=1}^n k_i x_1 = a P_n(x_1)$$

La ecuación de $P_n(x_1)$ se puede escribir como:

$$F[\psi(x)] = \int_a^b K(x)\psi(x)dx$$

en donde $K(x)$ se denomina *núcleo de la funcional*.

La funcional $F[\psi(x)]$ de la ecuación anterior es una funcional lineal y cumple con

$$F[\psi + \varphi] = F[\psi] + F[\varphi]$$

$$F[c\psi] = cF[\psi]$$

B.2.1. Espacios de Hilbert

Se llaman *funciones de cuadrado sumable* en (a,b) , todas las funciones $f(x)$ definidas en dicho intervalo, tales que existe y es limitada la integral

$$\int_a^b f^2(x)dx$$

Una función $f(x)$ en el intervalo (a,b) puede considerarse como un conjunto de valores adquiridos por la infinidad de coordenadas constituidas por todos los valores que la función misma adquiere en (a,b) , y por tanto a $f(x)$ se le podrá llamar *punto* del espacio de infinitas dimensiones, así definido.

Se puede definir la distancia entre dos puntos $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en el espacio de Hilbert, como

$$\Delta[f_1, f_2] = \left[\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx \right]^{1/2}$$

El origen del espacio Hilbertiano es la función idénticamente nula

$$f(x) = 0$$

La recta que proyecta desde el origen el punto $f(x)$ está

constituida por los puntos

$$\lambda f(x)$$

El coseno del ángulo ω , en el espacio hilbertiano, formado por las rectas que proyectan desde el origen los puntos $f_1(x)$ y $f_2(x)$, es:

$$\cos \omega = \frac{\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx}{\left[\int_a^b f_1^2(x)dx \int_a^b f_2^2(x)dx \right]^{1/2}}$$

Dos funciones que satisfacen la condición

$$\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = 0$$

se dice que son *ortogonales*.

El ángulo ω no cambia si los puntos $f_1(x)$ y $f_2(x)$, se reemplazan por los puntos $\lambda f_1(x)$ y $\mu f_2(x)$ siendo λ y μ dos números cualquiera. Escogiendo $\lambda = \lambda_0$ y $\mu = \mu_0$, con

$$\varphi_1(x) = \lambda_0 f_1(x), \quad \varphi_2(x) = \mu_0 f_2(x)$$

de manera que

$$\int_a^b \lambda_0^2 f_1^2(x)dx = \int_a^b \mu_0^2 f_2^2(x)dx = 1$$

entonces resulta

$$\cos \omega = \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx$$

siendo

$$\int_a^b \varphi_1^2(x)dx = \int_a^b \varphi_2^2(x)dx = 1$$

Las funciones $\varphi(x)$ que satisfacen la condición

$$\int_a^b \varphi^2(x)dx = 1$$

se llaman *normales*.

Se tiene un sistema de referencia *ortonormal* en el espacio

hilbertiano, mediante el conjunto de n funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, normales y ortogonales entre sí de dos en dos, tales que si i, j son dos índices cualquiera, e $i \neq j$, se tiene

$$\int_a^b \varphi_i^2(x) dx = 1, \quad \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0$$

La desigualdad de Bessel indica que el cuadrado del vector que une el origen con un punto del espacio hilbertiano no puede ser menor que la suma de los cuadrados de sus componentes con respecto a un sistema de referencia ortonormal, lo cual significa que

$$\int_a^b f^2(x) dx \geq \sum_{i=1}^n \left[\int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx \right]^2$$

Las funciones ortonormales pueden ser utilizadas como elementos para el desarrollo en serie, de funciones $f(x)$ de cuadrado sumable cualquiera mediante la expresión

$$f(x) = h_1 \varphi_1(x) + h_2 \varphi_2(x) + \dots$$

donde

$$h_1 = \int_a^b f(x) \varphi_1(x) dx$$

B.2.2. Ecuaciones de Fredholm y de Volterra

Indicando con $K(x, \xi)$ una función conocida de las variables x y ξ , si la ecuación

$$F[x, \psi(x)] = \varphi(x)$$

es una funcional lineal de $\psi(x)$, entonces resulta que

$$\int_a^b K(x, \xi) \psi(\xi) d\xi = \varphi(x) \quad \text{B.4}$$

La ecuación anterior se conoce como *integral de Fredholm de primera especie*. Una ecuación más general es

$$\left[\int_a^b K(x, \xi) \psi(\xi) d\xi \right] + \psi(x) = \varphi(x) \quad \text{B.5}$$

a la cual se le denomina *ecuación integral de Fredholm de segunda especie*. Haciendo variar el límite superior de la integral de la ecuación B.4 se tiene la integral de Volterra de primera especie, que es

$$\int_a^x K(x, \xi) \psi(\xi) d\xi = \varphi(x)$$

Variando ahora el límite superior de la integral de la ecuación B.5

$$\left[\int_a^x K(x, \xi) \psi(\xi) d\xi \right] + \varphi(x) = \varphi(x)$$

que es la ecuación integral de Volterra de segunda especie.

Una ecuación aun más general es

$$\psi(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \psi(\xi) d\xi = \varphi(x)$$

la cual puede desarrollarse en una serie de potencias de λ como

$$\psi(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x)\lambda + \alpha_2(x)\lambda^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\lambda^n \quad \text{B.6}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \varphi(x) \\ \alpha_1 &= - \int_a^x K(x, \xi) \alpha_0(\xi) d\xi \\ \alpha_2 &= - \int_a^x K(x, \xi) \alpha_1(\xi) d\xi \\ &\vdots \\ \alpha_n &= - \int_a^x K(x, \xi) \alpha_{n-1}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

determinandose así, en un proceso iterativo, los coeficientes del desarrollo en serie, de $\psi(x)$. La serie B.6 converge para todo valor de λ . En particular converge para $\lambda = 1$ que es el valor que da la solución de la ecuación de Volterra de segunda especie. Esta solución está proporcionada por tanto por la serie convergente

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \quad \text{B.7}$$

Una aplicación de lo anterior se tiene en la resolución de la ecuación diferencial homogénea de primer orden

$$\psi' = p(x)\psi \quad \text{B.8}$$

se quiere determinar su integral bajo la condición inicial de que para $x = a$ sea $\psi = b$.

Trasladando el origen de coordenadas al punto (a, b) , escribiendo

$$X = x - a, \quad Y = \psi - b, \quad P(x) = p(x), \quad Q(x) = bp(x)$$

con esto la ecuación B.8 se transforma en la ecuación no homogénea

$$Y' = P(x)Y + Q(x)$$

con las condiciones iniciales de que sea $Y = 0$ para $X = 0$. Integrando se tiene

$$Y(x) = \int_0^x P(\xi)Y(\xi)d\xi + R(x)$$

donde

$$R(x) = \int_0^x Q(\xi)d\xi$$

es una función conocida.

La ecuación B.8. se ha transformado así en una ecuación integral de Volterra de segunda especie, la cual siempre tiene solución, dándose ésta, por ejemplo, mediante la serie convergente B.7.

B.2.3. Transformaciones funcionales lineales

Considerando dos variables independientes s y t , sea $F(t)$ una función cualquiera de t , $f(s)$ una cualquiera de s , la relación

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)F(t)dt$$

con núcleo $K(s,t)$, es una transformación funcional lineal.

La transformación funcional se escribe

$$f(s) = T \left\{ F(t) \right\}$$

donde T es el operador que efectúa la transformación de $F(t)$ en $f(s)$.

La transformación inversa de T se indica T^{-1} , y se escribe

$$F(t) = T^{-1} \left\{ f(s) \right\}$$

B.2.4. Transformadas de Fourier y de Laplace

Las relaciones

$$f_1(s) = \int_a^b \cos st F(t)dt$$

y

$$f_2(s) = \int_a^b \operatorname{sen} st F(t)dt$$

son transformaciones con núcleos $K(s,t)$ dados por $\cos(st)$, y $\operatorname{sen}(st)$, respectivamente. Si se hace

$$f(s) = f_1(s) + if_2(s)$$

resulta la nueva transformación

$$f(s) = \int_a^b e^{ist} F(t) dt$$

que es la transformación de Fourier-Laplace, la cual tiene por núcleo

$$K(s, t) = e^{ist}$$

Se llama transformación de Fourier propiamente dicha y se indica con el símbolo \mathfrak{F} , la transformación

$$\mathfrak{F} \{ F(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} F(t) dt$$

Se llama transformación de Laplace propiamente dicha y se indica con \mathcal{L} , la transformación

$$\mathcal{L} \{ F(t) \} = \int_0^{\infty} e^{-yt} F(t) dt$$

Las transformaciones de Fourier y de Laplace tienen las siguientes propiedades:

$$\mathfrak{F}_{a,b} \{ F \} = [e^{ist} F]_a^b - ia \mathfrak{F}_{a,b} \{ F \}$$

$$\mathcal{L}_{a,b} \{ F \} = [e^{-yt} F]_a^b - y \mathcal{L}_{a,b} \{ F \}$$

$$\mathfrak{F}_{a,b} \{ F'' \} = [e^{ist} (F' - iaF)]_a^b - ia^2 \mathfrak{F}_{a,b} \{ F \}$$

$$\mathcal{L}_{a,b} \{ F'' \} = [e^{-yt} (F' - iaF)]_a^b + y^2 \mathcal{L}_{a,b} \{ F \}$$

Las transformadas inversas de Fourier y de Laplace están definidas por

$$\mathfrak{F}^{-1} \{ f(x) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(x) dx$$

en el caso de la transformación de Fourier, y

$$\mathcal{L}^{-1} \{ f(y) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{yt} F(y) dy$$

en el caso de la transformación de Laplace, siendo γ una constante conveniente, teniéndose que escoger mayor que la más grande de las partes reales de los afijos de las singularidades de la función $f(y)$.

El procedimiento que se sigue para resolver una ecuación diferencial usando estos conceptos es el de transformar dicha ecuación y manipular el resultado que se obtiene de manera que sea posible

antitransformarla para encontrar la solución buscada.

Un ejemplo de aplicación lo encontramos en la integración de la ecuación de Laplace bidimensional

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad \text{B.9}$$

siendo que

$$f(x, s) = \mathcal{L}\{F(x, t)\}$$

y

$$\mathcal{L}\{F'(x, t)\} = s\mathcal{L}\{F(x, t)\} - F(0)$$

Aplicando la transformación de Laplace a la ecuación B.9, se tiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + s^2 f = s F(x, 0) + \left[\frac{\partial F}{\partial t} \right]_{t=0} \quad \text{B.10}$$

Esta última expresión es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, en la que se ha supuesto que se conocen los valores de $F(x, t)$ y su derivada con respecto a t , para $t = 0$. Integrando la ecuación B.10 y antitransformando la función $f(x, s)$ obtenida, se llega a la determinación de $F(x, t)$ que resuelve la ecuación diferencial B.9.

APENDICE C. DESARROLLOS EN SERIE

Los desarrollos en serie son útiles en la solución de ecuaciones diferenciales. Los métodos que emplean estos desarrollos se basan en la idea de expresar la solución de la ecuación diferencial en términos de una serie, transformando el problema en otro en el que hay que determinar los valores de los coeficientes de dicha serie.

Antes de tratar el tema del desarrollo en series de una función, se verán algunos aspectos relacionados con las funciones de variable compleja, que servirán para estos desarrollos.

Sea la variable compleja

$$z = x + iy$$

en el campo complejo \mathbb{C} , y sea

$$w = u + iv$$

otra variable compleja en el campo \mathbb{C} , que depende de z . w se llama función de la variable compleja z en el campo \mathbb{C} cuando a todo valor de z en \mathbb{C} corresponde un valor determinado para w , siendo además w función continua de las variables x y y , provista de derivadas parciales del primer orden $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ finitas y continuas en \mathbb{C} , siempre que estas estén ligadas entre sí por la relación

$$\frac{\partial w}{\partial x} = i \frac{\partial w}{\partial y}$$

La relación anterior se llama condición de monogenidad.

Observaciones:

- 1) Se dice que \mathbb{C} constituye una región conexa cuando ésta es de una sola pieza.
- 2) Se llama curva simple a una curva cerrada que encierra en su interior a una región conexa.
- 3) Se llaman funciones uniformes (o monódromas) las que adquieren un solo valor para cada valor de la variable. De lo contrario se llaman multiformes o polidromas.
- 4) Se dice que una función de variable compleja es regular u holomorfa en el interior de un campo conexo \mathbb{C} , cuando dicha función es finita, continua y uniforme para todo valor de z contenido en el campo.
- 5) A las relaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

se les conoce con el nombre de condiciones de Cauchy-Riemann las que se derivan de la condición de monogenidad establecida anteriormente. Entonces, se dice que u y v son funciones armónicas

ya que de lo anterior se deduce lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

A las funciones u y v que cumplen estas relaciones se les denomina funciones armónicas asociadas.

Los puntos *ordinarios* de una función de variable compleja $f(z)$ son los que pueden encerrarse en una región conexa en que la función resulta holomorfa. Los puntos que no cumplen con esta propiedad se llaman puntos *singulares*.

Existen cuatro especies de puntos singulares: los puntos *críticos*, los que pertenecen a los tajos de las superficies de Riemann, los *polos* y los *puntos singulares esenciales*.

Un punto crítico es aquel en el que la función, al ser girada alrededor de dicho punto, adquiere un valor diferente al de partida. Por ejemplo, analizando la función $\ln z$.

$$\ln z = \ln r + i\theta$$

Si consideramos un punto P que rodee al origen formando una curva L' (fig. C.1.) formará el ángulo θ .

Por cada vuelta que el punto P' dé alrededor del origen, el $\ln z$ aumentará o disminuirá en $2\pi i$ (según si la vuelta es en el sentido antihorario u opuesto a él), ya que el ángulo θ habrá aumentado en esa cantidad. Entonces el origen es un punto crítico para la función $\ln z$.

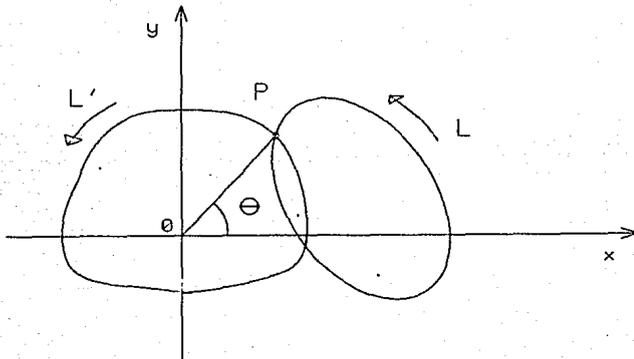


Figura C.1

Los polos son puntos en que el módulo de la función f se hace infinitamente grande, siempre que ellos sean ordinarios para la función recíproca $1/f$.

Los puntos singulares esenciales son puntos en que resultan a un mismo tiempo infinitas la función f y su recíproca, o bien en donde la función f resulta indeterminada.

C.1. Desarrollos en serie de potencias

C.1.1. Desarrollos en serie de Taylor

Toda función holomorfa se puede expresar, dentro de un campo circular, por medio de un desarrollo en series de Taylor.

La fórmula

$$w(z') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z'^n$$

siendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{w(z)}{z^{n+1}} dz$$

da el desarrollo en serie de potencias positivas de la variable z de toda función w holomorfa dentro de un círculo con centro en $z = 0$.

Para círculos con centro en un punto $z = z_0$, cualquiera se tiene

$$w(z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(z_0)}{n!} (z' - z_0)^n$$

C.1.2. Desarrollo en series de potencias negativas

La relación

$$w(z') = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n z'^{-n}$$

donde

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} w(z) z^{n-1} dz$$

da el desarrollo en series de potencias negativas de z .

En el caso de que el centro de c' no esté en el origen, sino en $z = z_0$, se tendrá

$$w(z') = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z' - z_0)^{-n}$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} w(z) (z - z_0)^{n-1} dz$$

TEOREMA DE LOS RESIDUOS

Al primer coeficiente que resulta del desarrollo en series de potencias negativas

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \omega(z) dz$$

se le denomina *residuo* de $\omega(z)$ en el punto $z = z_0$, y se escribe

$$\text{RES}[\omega(z)]_{z_0} = b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \omega(z) dz$$

de la expresión anterior

$$\oint_{C'} \omega(z) dz = 2\pi i \text{RES}[\omega(z)]_{z_0}$$

El teorema de los residuos establece que la integral de una función de variable compleja, calculada a lo largo de una curva cerrada L , es igual a $2\pi i$ multiplicado por la suma de los residuos de dicha función en cada uno de sus puntos singulares internos a L . De aquí que

$$\oint_L \omega(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \text{RES}[\omega(z)]_{z_n}$$

C. 2. Desarrollo en serie de Fourier

C. 2. 1. Funciones periódicas

Se dice que una función de variable compleja es periódica cuando es posible subdividir el plano complejo en una infinidad de regiones todas iguales entre sí, tales que la función adquiere los mismos valores en puntos correspondientes u homólogos, de dichas regiones.

Las funciones que adquieren los mismos valores en todos los puntos homólogos de ciertos paralelogramos se llaman doblemente periódicas o elípticas.

C. 2. 1. 1. Desarrollo de funciones simplemente periódicas en serie de Fourier

Si $f(z)$ es una función periódica uniforme de la variable compleja z , con período $2L$, y en el interior de una faja del plano z , comprendida entre dos rectas MN' y NN' paralelas a la dirección del período $2L$, no tienen ningún punto singular, entonces es posible desarrollarla en una serie de Fourier de la forma

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi z}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi z}{L} \right]$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(\varphi) d\varphi$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(\varphi) \cos \frac{n\pi\varphi}{L} d\varphi$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(\varphi) \sin \frac{n\pi\varphi}{L} d\varphi$$

C.2.2. Desarrollo en serie de Fourier en el campo real

En el campo real se puede hacer que el período se reduzca a 2π , con lo cual el punto $\alpha = -\pi$ puede tomarse como φ_0 y el punto $\alpha = +\pi$ como φ_1 . Lo anterior tiene la ventaja de que los coeficientes del desarrollo de $f(\varphi)$ en serie de Fourier se simplifican a:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) d\alpha$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha$$

y la función $f(\alpha)$ se expresa como

$$f(\alpha) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)$$

Una función $f(\alpha)$ definida en cierto intervalo $a \leq \alpha \leq b$ se dice seccionalmente continua cuando es posible subdividir dicho intervalo en un número finito de subintervalos, en cada uno de los cuales $f(\alpha)$ sea finita, continua y dotada de límites finitos cuando α se acerca a cualquiera de los extremos de cada sección desde su interior.

Toda función $f(\alpha)$ periódica de período 2π , que sea seccionalmente continua y monótona en el intervalo $(-\pi, \pi)$, puede siempre desarrollarse en una serie de Fourier.

REFERENCIAS:

- 1.- Magaña R., Sanginés H., Padilla R. Apuntes curso taller: *Metodología de la investigación*, UNAM.
- 2.- Mendoza M. *La Problemática de la Ingeniería de Cimentaciones en la Ciudad de México*, Segunda parte: Comportamiento de Cimentaciones. Edición de El Colegio Nacional, "Problemas de la Cuenca del Valle de México" -Un Ensayo Interdisciplinario-, 1988.
- 3.- Winkler E., 1867. *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*. Dominicus, Pragae.
- 4.- Gibson R.E. and Sills, 1975. *Settlement of a strip load on a non-homogeneous orthotropic incompressible elastic half-space*. Q.J. Mech. Appl.Math.28: 233-243.
- 5.- A.S.C.E. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*. Mayo, 1969, pp 819-826.
- 6.- Terzaghi K, 1943. *Theoretical Soil Mechanics*. Wiley, New York.
- 7.- A.S.C.E. *Journal of Applied Physics*. Volumen 12, febrero 1941, pp 155-164.
- 8.- Selvadural A.P.S. *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*. Developments in Geotechnical Engineering, Vol. 17. Elsevier.
- 9.- Levi E. *Teorías y Métodos de las Matemáticas Aplicadas*. Facultad de Ingeniería, UNAM, México, 1965.
- 10.-Kondner R.L. and Zelasko S.J. *A Hiperbolic Stress-Strain Formulation for Sands*. Procs., II Panamerican Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering Brazil, Vol. I (1903) pp 289-324.
- 11.-Cummings A.E., 1935. *Distribution of Stress Under a Foundation*. trans. A.S.C.E. (paper No.1945) pp. 1072-1083.
- 12.-Prado G. Mediciones en la Pista Circular del Instituto de Ingeniería, Sección de Pavimentos. Resultados próximos a publicarse.
- 13.-Alberro J., Magaña R., Hernández R., Zea C. *Optimación del Diseño de la Losa de Concreto de la Presa Aguamilpa*, segunda etapa. Informe del Instituto de Ingeniería, UNAM, a la Comisión Federal de Electricidad, México, 1988.
- 14.-Li, Xiangyne. Análisis dinámico de la Presa Aguamilpa. Tesis Doctoral en proceso de realización.
- 15.-Alberro J., Macedo G., Montañes L., González F. *Peñitas Dam, In Situ Stress-Strain Characteristics Materials*. II International Conference on Case Histories in Geotechnical Engineering, St. Louis, Missouri, 1988.

- 16.-Alberro J., Magaña R., Garnica P., Rodríguez H., Hernández R. *Estado de Esfuerzos y Deformaciones, Presa Aguamilpa Informe del Instituto de Ingeniería, UNAM, a la Comisión Federal de Electricidad, México, 1988.*
- 17.-Jaspers K. *La Filosofía. Breviarios del Fondo de Cultura Económica, México, 1953.*
- 18.-Escalante R., Max H., Miñano G. *Investigación, Organización y Desarrollo de la Comunidad. Nueva Biblioteca Pedagógica, 15a Edición, 1984.*
- 19.-López D. *Problemas Económicos de México. Instituto de Investigaciones Económicas, UNAM, México, 1966.*
- 20.-Cooke B. *Concrete Face Rockfill Dams. Design, Construction and Performance. 1986.*
- 21.-Elgotz. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Funcional. Editorial Mir.*
- 22.-Badillo J., Rodríguez R. *Mecánica de Suelos. Tomo II, Segunda Edición, Ed. Limusa, México, 1984.*
- 23.-Demeneghi A., Magaña R., Sangines H. *Apuntes: Introducción al Comportamiento de Materiales. Facultad de Ingeniería, UNAM, México, 1987.*
- 24.-Gaceta UNAM, *La ciencia, Asunto Secundario. La UNAM única entidad que estimula la investigación. Publicación número 12, 1/ago/1988.*
- 25.-Luthe R., Olivera A., Shutz F. *Métodos Numéricos. Editorial LIMUSA.*