UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS

"GENERALIZACION MULTIVECTORIAL DEL MAPA DE CARTAN Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN QUIMICA (FISICOQUIMICA)

PRESENTA

SUEMI RODRIGUEZ ROMO

MEXICO, D.F., JULIO DE 1989

R E S U M E N

En este trabajo se construye una generalización el álgebra de Clifford del mapa de Cartan (y de su versión extendida) reportado en la literatura, que incluye una simetría isotópica donde se usaron grupos de Lie (en representación multivectorial especialmente construída para tal efecto) asociados a las teorías de norma de mayor éxito en la actualidad y otra espacio-temporal; de hecho se analizaron las propiedades de este mapa y su inverso en el álgebra citada. Esta construcción tiene su fundamento en la teoría de Cartan de los espinores transformando el espacio de los mismos en su correspondiente multivectorial, factible de ser asociado a campos físicos para partículas elementales.

La estructura matemática aquí presentada permite obtener con sencillez las relaciones entre formas multilineales de la teoría de campo usadas en los cálculos de amplitud de interacción para diagramas de Feynman conocidas como identidades de Fierz e incluye como caso particular (la proyección del mismo a partir del mapa de Cartan multivectorial contiene información útil en la explicación de sus características y limitaciones) un conjunto de resultados asociados a un modelo de interacciones electrodébiles reportado recientemente, cuyos campos físicos están expresados en álgebra cuaterniónica y por lo tanto se encuentra incluído en la mecánica cuántica cuaterniónica usada últimamente en los modelos de prequarks.

Finalmente y con la idea de tener un modelo holonómico de interacción, se obtiene una ecuación asociada a la de Dirac donde el campo fermiónico se encuentra representado por su mapa de Cartan multivectorial bajo una simetría isotópica y otra espacio-temporal a elegir.

A B S T R A C T

A multivectorial generalization of the Cartan map, spinors to vectors, is constructed from $C^{2^{p+q}}$ spinors to $\mathcal{C}(p,q)$ Clifford algebra ($p = 1$ and $q = 3$) as a particular example in this thesis introducing an isotopic symmetry (SU(2) or SU(3) in our particular examples in order to relate to usual gauge theories) and, the symmetries of spacetime used as a basis to represent the physical fields. The algebraic properties of this map and of the operators representing observables are studied, the inversion map is also presented. We show explicitly the quaternion projection of the map, its properties and its mathematical and physical meaning; a comparison is also made with spinor-vector maps used in the literature.

To introduce the isotopic symmetry in the multivector Cartan map a multivector representation $\mathcal{C}(p,q)$ is used not necessarily restricted to the bivector subalgebra $\mathcal{C}^2(p,q)$, which is a common usage developed for some of the Lie groups more frequently used in physics.

This construction allows to recast all the Fierz identities into a single equation corresponding to the Clifford product of the multivector Cartan map for several particular cases. The procedure presented here can be generalized to any of the $C^{2^{p+q}}$ spinors and multilineal forms used in scattering amplitudes involving elementary particles for Feynman diagrams.

Finally, the multivector Cartan map is applied to the Dirac equation using $\mathcal{C}(1,3)$ as the basic spacetime symmetry and some gauge groups. The multivectorial Dirac equation can nevertheless be defined on any spacetime manifold, using the same procedure. The Dirac equation in a quaternionic electroweak model is projected, using both geometrical and physical arguments, from the general multivector Dirac equation, this allows an analysis of its properties and of some of its limitations.

INDICE GENERAL

INTRODUCCION.

El gran matemático británico William Kingdon Clifford (1845-1879) fue precursor de ideas matemáticas de especial interés tanto para la física como para la geometría y temas afines, con especial vocación para la docencia. En particular fue el creador del álgebra geométrica (llamada ahora álgebra de Clifford en su honor) usada en años recientes por un grupo cada vez más nutrido de científicos en el mundo, como lenguaje util para integrar ideas y resultados de muy diversas disciplinas.

En 1878 publicó Clifford el primer artículo al respecto de esta estructura matemática, sin embargo durante muchos años las técnicas vectoriales de Gibbs y Heaviside dominaron totalmente el mundo científico y tecnológico, mientras que las álgebras de Wessel, Grassmann, cuaterniónicas y en general de Clifford fueron relegadas casi por completo. En cerca de cien años de desarrollo de la ciencia física y matemática hubo luminarias como Wolfgang Pauli, P.A.M. Dirac o Ettore Majorana quienes usaron estas algebras asociativas para describir las propiedades de las particulas elementales pero sin reconocer explícitamente este hecho o al menos considerando el álgebra como un caso particular del álgebra de matrices necesaria para sus propósitos. Otros si lo hicieron como Arthur Eddington, Andres Mercier, Proca, en la década de 1930-1940, pero su percepción no fue transmitida hasta nosotros. A partir de 1960 varios físico-matemáticos (Marcel Riesz, Gaston Casanova, Roger Boudet, Teitler, David Hestenes entre otros) han trabajado consistentemente en las álgebras de Clifford y su aplicación a la física, siendo hasta 1986 que se organizó el primer taller internacional de álgebras de Clifford en Canterbury, Kent (Gran Bretaña) con la asistencia de 66 participantes y auspiciado por la NATO. En esta ocasión se reunieron científicos de la calidad de David Hestenes, Perti Lounesto, R.W. Tucker, E. Kähler, Kristina Bugajska, James P. Crawford, Dieter B. Ebner, Ruth Farwell o John Mc.Ewan entre otros, siendo Jaime Keller (asesor de esta tesis) el único participante de origen latinoamericano en este evento. En este taller se presentaron trabajos de una gran variedad de intereses (desde física teórica hasta ingeniería eléctrica) y su segunda versión se realizará durante este año (septiembre de 1989) en Montpellier, Francia. Cabe mencionar que en junio de 1981 Jaime Keller, Jerzi F. Plebansky y Marcos Rosenbaum coordinaron un simposio en México (auspiciado por la Facultad de Química, el entonces Centro de Estudios Nucleares, el Instituto de Matemáticas Aplicadas y la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM) titulado "Mathematics of the Physical Space Time" donde se abordaron conceptos relativos al álgebra de Clifford del espacio-tiempo y algunas de sus aplicaciones.

Estos son los antecedentes históricos que establecen la razón de una investigación sobre algunas características del álgebra de Clifford, propiedades y aplicaciones a modelos de interés en la explicación de fenómenos presentes en la naturaleza. Es así como este trabajo toma la proposición (por demás compartida por varios científicos) de que el álgebra geométrica es la base de un sistema matemático universal que permite integrar ideas y resultados (actualmente en diversas estructuras matemáticas) bajo conceptos geométricos útiles en la elucidación de conclusiones físicas para modelos fisicomatemáticos de la naturaleza. Su inevitabilidad en el desarrollo de la ciencia se observa en su frecuente redescubrimiento en diferentes lugares, por distintas personas y en diferentes épocas; las álgebras construidas por Dirac y Pauli en su intento de resolver problemas de la física, el álgebra de Clifford presente en la estructura de los operadores de creación y destrucción fermiónicos así como algunos trabajos recientes sobre teoría de determinantes presentadas por G.C. Rota y D. Hestenes, son algunos ejemplos de este hecho.

En esta tesis se pretende construir una generalización del mapa de Cartan (y su versión extendida) reportado en la literatura, que corresponde a un mapa espinor-vector (o en su versión extendida espinor-coaternio) basado en la teoría de Cartan para los espinores que incluiya a la vez simetrías isotópica y espacio-temporales en una álgebra de Clifford, a partir de un sistema espinor-multivector, donde el mapa multivectorial obtenido pueda tener significado como un campo físico asociado a alguna partícula elemental.

Esta construcción se propone pensando entre otras cosas, que el sentido geométrico del álgebra permitirá mostrar fácil y económicamente algunas relaciones entre las formas multilineales usuales en la teoría de transiciones entre partículas elementales, y podría constituir un procedimiento viable en la generación de modelos de norma holonómicos para las mismas. Es así como las identidades de Fierz comunes usadas en los cálculos de amplitud de transición para interacciones entre partículas elementales, que son obtenidas mediante el cálculo de trazas del producto de matrices de Dirac en alguna representación dada; adquieren significado geométrico libre de representación como el producto de mapas multivectoriales de Cartan.

Por otro lado se obtiene una ecuación de Dirac cuyo campo físico está representado por un multivector (construído usando una simetría isotópica y otra espaciotemporal) que en espacio-tiempo curvo no necesita una tétrada ortogonal dada en la vecindad de cada punto de la misma, a diferencia de lo ocurrido con los espinores. Esta idea es parecida a la construcción Dirac Kähler[20] (en nuestro caso el operador diferencial de la ecuación de Dirac se encuentra escencialmente intacto y el multivector asociado al campo físico tiene una estructura diferente a la usada en este caso) y a la ecuación de Dirac para multivectores reportada por P.R. Holland[13] (este autor combina una ecuación de Dirac con su dual en una estructura operador-estado en espacio-fase).

Para la consecución de este objetivo será preciso analizar además la representación multivectorial de los grupos de Lie más usuales en las teorías de norma de éxito probado (o probable) en teoría de campo para ser usada como simetría "isotópica" en el mapa generalizado, en este renglón existe la propuesta manejada por un conjunto de investigadores como M.F. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro[3], P. Lounesto[16], D. Hestenes y G. Sobczik[11] entre otros, sobre los grupos ortogonales, espín y pín a construir en el álgebra; siendo especialmente los últimos quienes abordan la representación multivectorial de grupos SU(n) bajo una conjetura que es analizada aquí para casos particulares de interés en este trabajo, contrastando con un mecanismo diferente de construcción no reportado en la literatura. Así como garantizar las propiedades adecuadas de los operadores asociados a magnitudes observables con respecto al mapa para conservar las mismas en el modelo multivectorial.

Existen algunos intentos de construcción de modelos vectoriales (que gracias a nuestra estructura se puede demostrar que son realmente cuaterniónicos) para interacción entre partículas elementales (sobre todo para interacciones electrodébiles) realizados recientemente por el grupo J. Mickelsson, C. Nash y G.C. Joshi, o por el grupo J. Reifler y R. Morris usando una propuesta que queda incluida como caso particular de la anteriormente mencionada; razón por la cual era de esperar que los resultados de estos autores queden incluidos dentro de la estructura global aquí presentada, se buscará adicionalmente el significado físico y matemático del método de proyección usado como un factor de interés en el estudio de los modelos asociados.

Finalmente se estudia el mapa inverso asociado al multivectorial de Cartan para lograr autoconsistencia en la construcción de esta estructura matemática que permita su adecuado uso en modelos físicos. Por esta razón se usa el teorema de Crawford reportado en la literatura para cualquier álgebra biespinorial de Dirac, demostrando que nuestra álgebra puede ser clasificada como tal, se reconstruye el espinor original como un producto de operadores de proyección obtenidos con elementos idempotentes primitivos del álgebra para cada dirección isotópica del grupo SU(n) dado.

CAPITULO I.

ALGEBRAS DE CLIFFORD
REPRESENTACION MULTIVECTORIAL DE GRUPOS DE LIE.

Comenzaremos este capítulo definiendo el álgebra geométrica de Clifford (por W.K. Clifford) y mostrando explícitamente el conjunto de axiomas mínimo necesario para nuestros fines operativos; estos axiomas estarán dados en términos de las operaciones fundamentales del álgebra (suma y producto), aún cuando por razones de significado e importancia geométrica y algebraica posteriormente se definirán otras operaciones, a saber: productos externo e interno, conmutador, anticonmutador, etc. Debido a que el álgebra de Clifford es un tipo diferente de otras álgebras asociativas gracias a algunos axiomas adicionales que, entre otras cosas, permiten clasificar los elementos de la misma, separaremos los axiomas presentados en dos partes; los que se relacionan con la definición de cualquier álgebra y aquellos específicos para la de Clifford[9].

Definición. Un álgebra de Clifford es un anillo asociativo $\mathcal{C}(p,q)$ sobre el campo de los números reales o complejos que a su vez es un espacio vectorial sobre esos mismos campos, tal que para todo par de elementos $A,B \in \mathcal{C}(p,q)$ (que en lo sucesivo llamaremos multivectores) y $\alpha,\beta \in$ (campo de los números reales o complejos) es cierto que:

$$\alpha(A\circ B) = (\alpha A)\circ B = A\circ(\alpha B).$$

Como consecuencia de lo anterior (que de hecho define simplemente a $\mathcal{C}(p,q)$ como un álgebra) se siguen los axiomas[10];

1.	$A+B \in \mathcal{C}(p,q)$,	cerradura en la suma.
2.	$A+B = B+A$,	conmutatividad en la suma.
3.	$(A+B)+C = A+(B+C)$,	asociatividad en la suma.
4.	Existe un elemento $0 \in \mathcal{C}(p,q)$, tal que $A+0 = A$,	existe la identidad aditiva.
5.	Existe un elemento $-A \in \mathcal{C}(p,q)$ tal que $A+(-A) = 0$,	existe un único inverso aditivo.

6. $A \circ B \in \mathcal{G}(p,q)$, cerradura en el producto.

7. $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$, asociatividad en el producto.

8. $A \circ (B+C) = A \circ B + A \circ C$,
$(B+C) \circ A = B \circ A + C \circ A$ distributividad del producto con respecto a la suma.

9. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

10. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

11. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

12. $1 \circ A = A \circ 1 = A$, (donde 1 representa el elemento unidad bajo la multiplicación).

Los axiomas 1 hasta 5 definen a $(\mathcal{G}(q,q),+)$ como un grupo abeliano bajo la suma que junto con los tres siguientes le conceden a $\mathcal{G}(p,q)$ la calidad de anillo asociativo. Finalmente gracias a los axiomas 9 a 12, $\mathcal{G}(p,q)$ queda definido como un espacio vectorial sobre el campo de los reales o complejos.

Para concluir la definición de un álgebra geométrica agregaremos algunos axiomas específicos de la misma, que en general permitirán clasificar los multivectores[12].

13. $A = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 + \dots = \sum_r^{n+1} \langle A \rangle_r$, donde n es el número de generadores del álgebra.

La cantidad $\langle A \rangle_r$ es la parte r-vectorial de A, cuando $A = \langle A \rangle_r$ para algún entero positivo r entonces se dice que A es homogéneo de grado r (o bien un r-vector). Históricamente los términos escalar, vector, bivector, trivector, etc. se usaron con profusión desde 1850 para designar lo que en nuestra nomenclatura será un cero-vector, 1-vector, 2-vector, 3-vector y así sucesivamente. Siguiendo la definición dada por Cartan, un r-vector será un sistema de r vectores tomados en un orden definido.

14. $\langle A+B \rangle_r = \langle A \rangle_r + \langle B \rangle_r$.

15. $\langle \lambda A \rangle_r = \lambda \langle A \rangle_r = \langle A \rangle_r \lambda$ si $\lambda = \langle \lambda \rangle_0$

Gracias a los axiomas 14 y 15 es evidente que hemos definido el espacio $\mathcal{G}^r(p,q)$ de todos los r-vectores como un subespacio lineal de $\mathcal{C}(p,q)$ (que por sí mismo ya es un espacio lineal) y a los escalares (reales o complejos) como una subálgebra conmutativa de $\mathcal{C}(p,q)$. De hecho el operador que extrae el r-vector de A, $\langle A\rangle_r$ funciona como un operador proyección ya que $\langle\langle A\rangle_r\rangle_r = \langle A\rangle_r$.

16. La relación entre los diferentes r-vectores de $\mathcal{C}(p,q)$ se establece gracias a su construcción y el producto entre los mismos ya que:

a) Si $A = \langle A\rangle_1$ entonces $A\circ A = A^2 = \langle A^2\rangle_0 + \langle A^2\rangle_2$

b) Todo multivector puede expresarse como una suma de r-vectores simples. Un multivector simple es aquel que puede factorizarse en el producto de r vectores anticonmutantes a_1, a_2, $\ldots a_r$ tal que

$$A_r = a_1\circ a_2\circ\ldots\circ a_r \qquad \text{donde} \qquad a_j\circ a_k = -a_k\circ a_j$$

para $j,k = 1.2\ldots n$ y $j \neq k$.

Como un comentario de gran importancia a este axioma, aclararemos la razón para denotar al álgebra de Clifford como $\mathcal{C}(p,q)$. Estrictamente hablando se ha simplificado la notación usual en aras de alcanzar mayor claridad, sin embargo es preciso conservar la información mínima necesaria para completar nuestra definición; como un dato de gran importancia para el manejo matemático y físico de los modelos a los que se aplicará esta estructura es necesario precisar el tipo de espacio lineal que se está generando, para lo cual basta con especificar la propiedad 16 a) para todos los 1-vectores base, generadores del álgebra. De esta forma si existen n 1-vectores anticonmutantes en $\mathcal{C}(p,q)$ el número de elementos en la base es 2^n, y p de los n 1-vectores son tales que $\langle A^2\rangle_0>0$ mientras que $q = n-p$ tendrán la característica de que $\langle A^2\rangle_0<0$ (se debe subrayar que a lo largo de este trabajo no se abordarán las álgebras de Clifford degeneradas $\mathcal{C}(p,q,r)$ donde de n 1-vectores, p son tales que $\langle A^2\rangle_0>0$, q con $\langle A^2\rangle_0<0$ y r tienen la propiedad $\langle A^2\rangle_0 = 0$), por esta razón es útil pensar que el álgebra $\mathcal{C}(p,q)$ es generada por el espacio vectorial $\langle A\rangle_1 = \mathcal{A}(p,q)$ quedando condicionada su estructura a los valores p,q; si p o q son nulos este espacio será euclideano y pseudoeuclideano en caso contrario.

17. Para todo r-vector A_r no nulo existe un vector no nulo a en $\mathcal{A}_{p,q}$ tal que $A_r a$ es un (r+1)-vector, gracias a lo cual se garantiza la existencia de r-vectores no triviales para todo grado finito $(r + 1) \leq n$.

Una vez establecida nuestra definición de $\mathcal{G}(p,q)$ procederemos a abordar aquellas operaciones y propiedades que por su importancia y significado geométrico deben establecerse desde el inicio de este trabajo.

Definición. El producto interno de dos multivectores cualesquiera $A,B \in \mathcal{G}(p,q)$ está dado como[11,12]

$$A\cdot B = \sum_r A_r\cdot B = \sum_s A\cdot B_s = \sum_r \sum_s A_r\cdot B_s$$

donde

a) $A_r = \langle A\rangle_r$, $B_s = \langle B\rangle_s$, y

b) $A_r\cdot B_s = \langle A_r \circ B_s\rangle_{|r-s|}$.

Definición. El producto externo de dos multivectores cualesquiera $A,B \in \mathcal{G}(p,q)$ está dado como[11,12]

$$A\wedge B = \sum_r A_r\wedge B = \sum_s A\wedge B_s = \sum_r \sum_s A_r\wedge B_s$$

donde

a) $A_r = \langle A\rangle_r$ y $B_s = \langle B\rangle_s$

b) $A_r\wedge B_s = \langle A_r \circ B_s\rangle_{r+s}$.

En ambas definiciones es notorio que tanto el producto interior como el exterior son derivados del producto del álgebra $\circ$ (cuyo símbolo en lo sucesivo se obviará), a su vez es posible observar cómo el producto interior disminuye el grado de B_s en r unidades (o viceversa), mientras que el exterior lo eleva en la misma cantidad. Gracias a la importancia y aplicaciones que se darán en lo sucesivo a éstos productos geométricos a continuación exploraremos algunas de sus identidades más importantes que pueden probarse a partir de los axiomas establecidos[12]

I.1) $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C.$

I.2) $A\wedge(B+C) = A\wedge B + A\wedge C.$

si $a \in \mathcal{A}_{p,q}$

I.3) $a\cdot A_r = \langle aA_r\rangle_{r-1} = \frac{1}{2}\,(aA_r - (-1)^r A_r a)$ para $r > 0$.

$$a\cdot A_r = a\cdot(a_1 a_2 \ldots a_r) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1}\, a\cdot a_k (a_1 \ldots \check{a}_k \ldots a_r)$$ donde

$a_i \in \mathcal{A}_{p,q}$ y el signo circunflejo invertido significa que debe omitirse a_k del producto. Si r es par se dice que el multivector $\langle A\rangle_r$ es par, e impar en caso contrario.

I.4) $a\wedge A_r = \langle aA_r\rangle_{r+1} = \frac{1}{2}\,(aA_r + (-1)^r A_r a)$ para $r \geq 0$.

$$a\wedge A_r = \left\{a - \sum_{k=1}^{r} a\cdot a_k a_k^{-1}\right\} A_r.$$

I.5) $aA_r = a\cdot A_r + a\wedge A_r = \langle aA_r\rangle_{r-1} + \langle aA_r\rangle_{r+1}$ para $r \geq 0$.

I.6) En general $AB = \sum_r A_r B = \sum_s AB_s = \sum_r \sum_s A_r B_s$, donde

$$A_r B_s = \sum_{k=0}^{1/2[(r+s)-|r-s|]} \langle A_r B_s\rangle_{|r-s|+2k}$$

Es posible incrementar considerablemente el conjunto de identidades aquí expuestas, sin embargo solo en el caso de que sea estrictamente necesario su uso en alguna expresión se procederá a mencionar la nueva identidad usada en el resto de este trabajo.

Concluiremos la presentación del álgebra de Clifford en este capítulo subrayando algunos hechos importantes; el producto de multivectores homogéneos no es homogéneo, el producto de multivectores pares es par por lo que todos los multivectores pares forman una subálgebra de $\mathcal{C}(p,q)$ (no es el caso del conjunto de multivectores impares) y finalmente es posible representar la estructura aquí presentada usando matrices cuadradas mxm[16].

I.A. La Simetría y la Teoría de Grupos.

Aun cuando el estudio de las simetrías en el mundo físico y el lenguaje matemático natural para describirlas (la teoría de los grupos) no se desarrollaron simultáneamente, su relación fue claramente formulada desde antes de 1930 (siendo más nítida en su aplicación a la mecánica cuántica de la teoría de campo) en un grado tal que gracias a la estructura de teoría de grupos se pueden evidenciar simetrías no manifiestas aún en física clásica u otras disciplinas relacionadas con la misma.

En la actualidad ha cobrado gran importancia el estudio de las simetrías internas de los sistemas (en un espacio diferente del de Minkowski, llamado isotópico) que aunadas a las espacio-temporales permiten interpretar el efecto de las transformaciones de simetría en las expresiones diferenciales parciales o integrales de la física matemática que determinan la dinámica del mismo, de esta forma el hecho de que el Lagrangiano (Hamiltoniano) de un sistema resulte invariante ante una transformación de simetría interna bajo un grupo de norma (invariancia de norma), es tan trascendente en el conocimiento de las fuerzas fundamentales y cargas conservadas conocidas en la naturaleza como lo son las simetrías continuas espacio-temporales: translación en el espacio (conservación del momento lineal), translación en el tiempo (conservación de energía), rotación en espacio tridimensional (conservación del momento angular) y transformación de Lorentz.

Adicionalmente es interesante mencionar dos tipos de simetrías existentes en la naturaleza, de tanta importancia como las anteriores: la simetría de permutación (invariancia de un sistema de varias partículas idénticas ante el intercambio de las mismas) y, finalmente, las simetrías discretas espacio-temporales. En éstas últimas podemos reconocer las siguientes transformaciones: inversión espacial o transformación de paridad (las interacciones débiles violan esta simetría), inversión temporal, finalmente la translación y rotación discretas de una red cristalina (las rotaciones generan los 32 grupos puntuales que corresponden a subconjuntos de rotaciones tridimensionales y de las reflexiones que dejan una red cristalina invariante, junto con la translación discreta forman los grupos espaciales de simetría básicos en la física de estado sólido[34]).

Como comentario final a los aspectos generales de las simetrías en la naturaleza y su realización bajo un modelo matemático, se mencionarán algunos hechos sobre la aplicación de la teoría de grupos en las simetrías físicas. En primer lugar el Hamiltoniano (Lagrangiano) de un sistema invariante bajo un conjunto de operaciones unitarias de simetría (para que las transformaciones lineales dejen invariantes a los observables físicos) conmutará con todos los operadores del grupo de simetría y sus estados propios son bases vectoriales de representaciones del grupo de simetría que pueden ser encontradas por métodos matemáticos generales. Por último es recomendable establecer el gran valor de la interpretación física de los resultados de la teoría de grupos, así como reconocer las desviaciones del modelo de simetría cuando la simetría física está rota por razones específicas.

A pesar de que ya se usó el conjunto de axiomas que definen un grupo en la definición misma de una álgebra de Clifford $\mathcal{C}(p,q)$, se procederá a enumerarlos nuevamente con el objetivo de lograr mayor comodidad en la lectura.

Definición: Todo conjunto $\{G; a, b, c \ldots\}$ es un grupo bajo la operación $\circ$, si para todo par ordenado de elementos $a, b \in G$ se ascocia otro elmento del conjunto $a \circ b \in G$ tal que[10,34];

i)	$a\circ(b\circ c) = (a\circ b)\circ c$	asociatividad
ii)	Existe un elemento $e \in G$ tal que par todo $a \in G$, $a\circ e = a$	existe la identidad
iii)	Para todo $a \in G$ hay un único elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a\circ a^{-1} = e$	existe el inverso de cada elemento

De esta forma todo conjunto de operadores de simetría que cumplan las anteriores propiedades formarán un grupo y se podrá usar la teoría de los mismos para analizar y manipular las simetrías de la naturaleza. En algunos casos los elementos del grupo tienen etiquetas que se comportan como parámetros continuos y por lo tanto contienen un número infinito de elementos, estos grupos son los llamados continuos y dos ejemplos serían los correspondientes al grupo de rotaciones en espacios euclideanos y las translaciones continuas (cuando un grupo es finito, el número de sus elementos es el orden del mismo).

En la realización de simetrías internas y espacio-temporales para sistemas físicos juega un papel relevante el conjunto de matrices invertibles $n \times n$ que incluye a la matriz 1 bajo la multiplicación matricial ya que tal cual o bien con algunas propiedades adicionales constituyen los grupos clásicos matriciales; ($\dagger$ significa aquí conjugada transpuesta y T significa transpuesta[34]).

i) El grupo lineal general $GL(n)$ formado por el conjunto de matrices invertibles $n \times n$.

ii) El grupo unitario $U(n)$ formado por todas las matrices unitarias $n \times n$ ($UU^{\dagger} = 1$).

iii) El grupo unitario especial $SU(n)$ consistente del conjunto de matrices unitarias con determinante uno.

iv) El grupo ortogonal $O(n)$ de matrices reales ortogonales $n \times n$ ($OO^{T} = 1$).

Cuando un subconjunto H de un grupo G forma a su vez un grupo bajo la misma operación que G, entonces constituye un subgrupo de G; de esta forma es sencillo reconocer que $O(n) \subset U(n) \subset GL(n)$ y que $SU(n) \subset U(n) \subset GL(n)$ siendo estas cadenas algunos ejemplos de las correspondientes al análisis de la estructura de los grupos de utilidad en el estudio de las simetrías físicas y su ruptura espontánea.

En la aplicación de la teoría de grupos a las simetrías de norma de las interacciones existentes en la naturaleza existe una división natural de tratamientos ya que son muchas y muy importantes las consecuencias físicas de tomar un grupo de norma para el cual la multiplicación del grupo es conmutativa (grupo abeliano) o no conmutativa (grupo no abeliano). El ejemplo más claro a saber radica en las notables diferencias entre la electrodinámica cuántica (QED) y el modelo estándar para interacciones débiles incluido en el correspondiente a Weimberg y Salam.

Algunos conceptos fundamentales en la teoría de grupos que entre otras cosas permiten la realización de las transformaciones del grupo como transformaciones lineales sobre espacios vectoriales (estados físicos) en física clásica y cuántica (de hecho esta realización es una representación del grupo) son los siguientes[10,34]:

a) Isomorfismo. Dos grupos G y G′ son isomórficos si existe una correspondencia uno a uno entre sus elementos tal que preserva la operación del grupo. En otras palabras si $g_1 \in G \longleftrightarrow g_1' \in G'$ y $g_1 \circ g_2 = g_3$ en G, entonces $g_1' \circ g_2' = g_3'$ en G′ y viceversa.

b) Homomorfismo. Un homomorfismo de un grupo G a otro G′ es un mapa (no necesariamente uno a uno) que preserva la operación del grupo. Como es fácil notar, el isomorfismo es un caso especial del homomorfismo.
La teoría entera de las representaciones de un grupo se construye usando homomorfismos de grupos abstractos para alguna simetría física a grupos de operadores lineales sobre espacios vectoriales (espacio de estados físicos).

c) Representación de un grupo. Si existe un homomorfismo de un grupo G a un grupo de operadores U(G) sobre un espacio vectorial lineal V, entonces U(G) forma una representación del grupo G; la dimensión de la representación es la dimensión del espacio vectorial V. Se dice que una representación es fidedigna si el homomorfismo se transforma en isomorfismo y en caso contrario se trata de una representación degenerada, siendo más concretos, la representación de un grupo es un mapeo tal que

$g \in G \xrightarrow{U} U(g)$ donde $U(g)$ es un operador sobre V tal que $U(g_1)U(g_2) = U(g_1g_2)$.

Por último se dice que dos representaciones de un grupo relacionadas mediante una transformación de semejanza son equivalentes entre sí.

Debido a que en este trabajo se busca aplicar algunos conceptos matemáticos a la teoría de campo de las partículas, es de interés el estudio de la teoría matemática general de los grupos contínuos, estrictamente hablando nos interesan los grupos infinitos cuyos elementos pueden ser parametrizados en forma analítica y contínua (grupos de Lie) tales que nos garanticen una adecuada estructura geométrica y algebraica al ser aplicados en un campo. Sin embargo todos los grupos contínuos de interés en simetrías físicas son representables por grupos de matrices con alguna estructura algebraica y geométrica adicional ya conocida. Estos son los llamados grupos lineales o clásicos de Lie y serán los que tratemos posteriormente.

I.B. Representación Multivectorial de Grupos de Lie.

Con el objetivo de poder construir el mapa que permita definir el campo multivectorial bajo una simetría de norma es preciso presentar una de las muchas representaciones que un grupo de Lie puede tener; la multivectorial. Comenzaremos por recordar que el producto interno de dos elementos $x, y \in \mathcal{A}_{p,q}$ define el tensor métrico en $\mathcal{A}_{p,q}$, por lo que toda isometría del producto interno o transformación lineal $f = f(x)$ de $\mathcal{A}_{p,q}$ en sí mismo, tal que[12]

I.B.1. $$f(x) \circ f(y) = x \circ y$$

es una transformación ortogonal de $\mathcal{A}_{p,q}$. El grupo de todas las transformaciones ortogonales de $\mathcal{A}_{p,q}$ es el grupo ortogonal $O(p,q)$.

Como E. Artin y E. Cartan[2,6] demostraron, toda isometría $f = f(x)$ de $\mathcal{A}_{p,q}$ puede expresarse como una aplicación de n reflecciones simples (de hecho la isometría más sencilla) expresables individulamente como;

$$\text{I.B.2.} \qquad R_u(x) = -uxu^{-1}$$

tal que

$$\text{I.B.3.} \qquad f(x) = (-1)^k u_k \ldots u_2 u_1 x u_1^{-1} u_2 \ldots u_k^{-1},$$

si escribimos $U = u_k \ldots u_1$ entonces I.B.3. se transforma en;

$$\text{I.B.4.} \qquad f(x) = (-1)^k U x U^{-1}.$$

En virtud de la importancia de la expresión I.B.4. se ha clasificado a todos los multivectores U factorizables en un producto de k vectores como k-versores. El grupo multiplicativo de todos los versores invertibles en $\mathcal{C}(p,q)$ se conoce como el grupo de Clifford mientras que el correspondiente a los versores unitarios invertibles en $\mathcal{C}(p,q)$ se llama grupo versor $V(p,q)$. El grupo $V(p,q)$ es homomórfico 2:1 al $O(p,q)$[12].

El grupo multiplicativo de todos los versores unitarios pares en $\mathcal{C}(p,q)$ es el grupo espín de $\mathcal{A}_{p,q}$ (Spin(p,q)) y algunos autores llaman a sus elementos espinores* (aún cuando no todos los espinores son versores). El grupo rotor de $\mathcal{A}_{p,q}$ $\text{Spin}^{+}(p,q)$ está constituído por un tipo especial de versor par S tal que

$$\text{I.B.5} \qquad S^{\dagger}S = 1 \quad \text{donde } S^{\dagger} = a_r \ldots a_2 a_1 \quad \text{si} \quad S = a_1 a_2 \ldots a_r$$
$$\text{ya que } a_i^{\dagger} = a_i.$$

Por construcción $\text{Spin}^{+}(p,q)$ es un subgrupo de Spin(p,q) que corresponde al grupo generador de todas las rotaciones de $\mathcal{A}_{p,q}$ y que en el caso de los espacios Euclideanos obviamente coinciden.

Es conveniente reconocer que la identificación y clasificación de los grupos clásicos de Lie fue influenciada por

*Apéndice

la representación de las transformaciones lineales con matrices, por lo cual cabe esperar diferentes caracterizaciones de los grupos al usar distintas representaciones (éste sería el caso al usar álgebra geométrica) y es por esta razón que conviene introducir algunos elementos de lenguaje comunes para el tratamiento de los fenómenos físicos. Se llamará espacio-tiempo al espacio vectorial pseudoeuclideano con signatura (1,3) cuyo grupo ortogonal O(1,3) es el grupo de Lorentz (sus elementos permiten construir las transformaciones de Lorentz), el grupo $SO^{+}(1,3)$ es conocido como el grupo propio de Lorentz y $Spin^{+}(1,3)$ es su representación espin 1/2.

Antes de continuar el análisis de la teoría de grupos de Lie cabe mencionar su teorema fundamental por excelencia; los generadores de un grupo de Lie forman una álgebra de Lie donde la multiplicación (paréntesis de Lie) está definida como $[a,b] \equiv a\circ\partial b - b\circ\partial a$ para a y b elementos del álgebra (en esta expresión ∂b y ∂a son las derivadas de a y b). Como consecuencia directa del teorema se deduce que al clasificar álgebras de Lie se clasifica a grupos de Lie con la ventaja de que la primera se logra con los métodos normales del álgebra lineal (toda álgebra de Lie es un espacio lineal) y aún cuando tradicionalmente este procedimiento se realiza mediante la representación matricial en nuestro caso nos proponemos emplear el álgebra geométrica para describir y clasificar álgebras de Lie[12].

Con la finalidad de simplificar el estudio de las álgebras abstractas de Lie se construirá un álgebra asociativa isomórfica en la que el paréntesis de Lie (producto del álgebra) se representará como

I.B.6. $$[A,B] = \frac{1}{2}(AB-BA)$$

donde los elementos A, B, C... pueden identificarse como transformaciones lineales, matrices, operadores diferenciales o alguna otra posibilidad acorde con los fundamentos de estas álgebras. Como el álgebra de Clifford es asociativa, cualquier subálgebra de la misma cerrada bajo el paréntesis de Lie es un álgebra de Lie, es posible mostrar que el espacio de los bivectores en $\mathcal{C}(p,q)$ es cerrado bajo la operación I.B.6) ya que para todo par $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ y $e_{mn} = e_m \wedge e_n$ elementos de $\mathcal{C}(p,q)$

$$[e_{ij}\ ,\ e_{mn}] = g_{in} e_j \wedge e_m - g_{im} e_j \wedge e_n + g_{jm} e_i \wedge e_n - g_{jn} e_i \wedge e_m$$

si $g_{ij} = g_{mn} = 0$, esta álgebra se llamará en lo sucesivo bivectorial.

En algunos trabajos sobre el tema[12] es común observar la hipótesis de trabajo en la que se asegura que toda álgebra de Lie es isomórfica a un álgebra bivectorial, lo que por cierto garantiza una representación bivectorial para la primera. Aún cuando no existe la demostración formal de esta aseveración es comúnmente conocida la existencia de representaciones bivectoriales para la mayor parte de las álgebras de Lie de interés físico que proporcionan un mecanismo simple para el análisis, representación y clasificación de las álgebras de Lie. La importancia de esta propuesta radica en que aún siendo falsa, cuando menos indicaría una clasificación de las álgebras de Lie acorde con su representación multivectorial (que por cierto no ha sido extensamente analizada)[12].

Procederemos a continuación a examinar las álgebras bivectoriales (representación de las correspondientes a Lie) que por su aplicación a los fenómenos naturales revisten alguna importancia, siendo quizá los de mayor interés los llamados grupos espinoriales ya mencionados con anterioridad.

Para describir la estructura del álgebra de Lie $\mathcal{C}^2(\mathcal{A}_{p,q})$, se elige una base $e_1,\ldots,e_n$ en $\mathcal{A}_{1,q+n-p}$ tal que su producto interno fije un tensor métrico mientras que el exterior determine una base para $\mathcal{C}^2(\mathcal{A}_{p,q})$. Debido a que toda álgebra bivectorial es subálgebra de alguna otra, es posible exhibir la representación multivectorial del álgebra de Lie del grupo unitario especial $SU(n)$ y su generalización $SU(p,q)$ como una subálgebra de $C^2(2p,2q)$, donde se ha elegido al conjunto de vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $f_1 = e_{n+1}$, $f_2 = e_{n+2}\ldots$, $f_n = e_{2n}$ como base de $\mathcal{A}_{2p,2q}$ con las siguientes propiedades[11,12]

$$e_i \cdot e_j = f_i \cdot f_j = g_{ij} ,$$

$$e_i \cdot f_j = 0$$

donde $i,j = 1,\ldots,n$. Usando estos vectores se construyen los bivectores

$$E_{ij} = e_i \wedge e_j + f_i \wedge f_j$$

$$F_{ij} = e_i \wedge f_j - f_i \wedge e_j \qquad i \neq j$$

$$H_k = e_k \wedge f_k - e_{k+1} \wedge f_{k+1} \qquad i,j = 1,\ldots,n \quad y \quad k = 1,\ldots,n-1$$

Los bivectores E_{ij}, F_{ij} y H_k son linealmente independientes entre sí y forman una base de un espacio con dimensión $n^2 - 1$ que constituye una representación multivectorial de los generadores del grupo SU(p,q). Los ejemplos que se presentan a continuación mostrarán esta correspondencia explícitamente.

Con la estructura matemática ya desarrollada es posible construir representaciones multivectoriales para varias familias de grupos de Lie de interés en las simetrías de las leyes naturales, a continuación se estudiarán algunas de ellas que por sus características y aplicaciones son importantes.

i) SU(0,5)

Este grupo en espacio euclídeo fue uno de los primeros en ser usado con algún éxito relativo en teorías gran unificadas de la interacción entre partículas elementales y actualmente se le considera una etapa intermedia, si bien no indispensable, pero al menos útil, en el camino a la respuesta final de unificación[29].

Para obtener la representación multivectorial de SU(0,5) se extiende el espacio a una dimensionalidad de $10(A_{0,10})$ con los vectores base; $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ y la métrica $e_i \cdot e_j = f_i \cdot f_j = g_{ij} = \mathrm{diag}\,(-1,-1,-1,-1,-1)$.

Los vectores base del espacio $\mathcal{E}^2(A_{0,10})$ permiten obtener los siguientes bivectores;

$$E_{12} = e_1 \wedge e_2 + f_1 \wedge f_2 \qquad F_{12} = e_1 \wedge f_2 - f_1 \wedge e_2$$

$$E_{13} = e_1 \wedge e_3 + f_1 \wedge f_3 \qquad F_{13} = e_1 \wedge f_3 - f_1 \wedge e_3$$

$$E_{14} = e_1 \wedge e_4 + f_1 \wedge f_4 \qquad F_{14} = e_1 \wedge f_4 - f_1 \wedge e_4$$

$$E_{15} = e_1 \wedge e_5 + f_1 \wedge f_5 \qquad F_{15} = e_1 \wedge f_5 - f_1 \wedge e_5$$

$$E_{23} = e_2 \wedge e_3 + f_2 \wedge f_3 \qquad F_{23} = e_2 \wedge f_3 - f_2 \wedge e_3$$

$$E_{24} = e_2 \wedge e_4 + f_2 \wedge f_4 \qquad F_{24} = e_2 \wedge f_4 - f_2 \wedge e_4$$

$$E_{25} = e_2 \wedge e_5 + f_2 \wedge f_5 \qquad F_{25} = e_2 \wedge f_5 - f_2 \wedge e_5$$

$$E_{34} = e_3 \wedge e_4 + f_3 \wedge f_4 \qquad F_{34} = e_3 \wedge f_4 - f_3 \wedge e_4$$

$$E_{35} = e_3 \wedge e_5 + f_3 \wedge f_5 \qquad F_{35} = e_3 \wedge f_5 - f_3 \wedge e_5$$

$$E_{45} = e_4 \wedge e_5 + f_4 \wedge f_5 \qquad F_{45} = e_4 \wedge f_5 - f_4 \wedge e_5$$

$$H_1 = e_1 \wedge f_1 - e_2 \wedge f_2 \qquad H_3 = e_3 \wedge f_3 - e_4 \wedge f_4$$

$$H_2 = e_2 \wedge f_2 - e_3 \wedge f_3 \qquad H_4 = e_4 \wedge f_4 - e_5 \wedge f_5$$

que forman una representación fidedigna de los 24 generadores del grupo SU(5) ya que reproducen el álgebra de conmutadores de Lie con las constantes de estructura apropiadas para el caso. por ejemplo:

$$[E_{ij}, E_{ik}] = E_{jk}$$

$$[E_{ij}, E_{k\ell}] = 0$$

$$[F_{ij}, F_{ik}] = E_{jk}$$

$$[F_{ij}, F_{k\ell}] = 0$$

$$[E_{ij}, F_{kl}] = 0$$

$$[F_{jk}, H_i] = 0 \text{ si } j \neq i+1$$

$$[F_{jk}, H_i] = E_{jk} \quad \text{si} \quad j = i+1$$

$$[E_{ij}, F_{ij}] = -2H_j$$

$$[H_i, H_j] = [H_i, H_i] = 0$$

$$[E_{jk}, H_i] = 0 \quad \text{si } i \neq j \neq k \text{ y } j \neq i+1$$

$$[E_{ik}, H_i] = F_{kl}$$

$$[E_{j,k}, H_i] = -F_{jk} \quad \text{con } j = i+1,$$

son relaciones que fueron obtenidas con el álgebra de Clifford $\mathcal{C}(0,10)$ que contiene evidentemente a SU(0,5) y al grupo $\mathcal{C}(0,5)$. Como todos los multivectores usados en $\mathcal{C}(0,5)$ y $\mathcal{C}(0,10)$ son unitarios, éstos son isomórficos a los grupos versores V(0,5) y V(0,10), los que a su vez son homomórficos 2:1 a los correspondientes grupos ortogonales.

Cabe hacer un alto con la construcción matemática relativa al grupo de Lie SU(0,5) para introducir un punto de gran interés físico. En la construcción multivectorial de este grupo aparece de forma natural la necesidad de una expansión al espacio generador base $\mathcal{A}_{0,10}$ y la construcción de $\mathcal{C}(0,10)$ que lleva directamente a O(0,10) y su correspondiente grupo especial, este hecho es sumamente importante ya que sugiere la construcción de una teoría gran unificada vertical SO(0,10) para superar las dificultades del modelo SU(0,5), esta construcción ha sido abordada con fuertes esperanzas de éxito ya que a su vez constituiría una concatenación conceptual con los modelos de cuerdas de grupos excepcionales para interacciones fundamentales con inclusión de simetrías horizontales entre familias de partículas elementales. Finalmente cabe subrayar que al abordar la construcción de los grupos de Lie involucrados usualmente en las teorías gran unificadas[18,29] y sus rupturas de simetría con una sola estructura matemática, el álgebra de Clifford, además de ganar naturalidad en los modelos se evita el manejo arbitrario de representaciones en función de su complejidad en algún grupo determinado (los grupos SO(4n+2) usados en muchos modelos son de difícil análisis con la técnica tensorial usual para estudiar los grupos de norma más pequeños en la cadena de simetría a diferentes escalas, por lo tanto es común encontrar mezclas extrañas de análisis y representaciones que obscurecen las ideas físicas).

Gracias a la definición del grupo Spin y a las propiedades del álgebra de Clifford sabemos que los elementos del grupo Spin (0,10) son aquellos que ante la involución $e_i \longrightarrow -e_i$, $f_i \longrightarrow -f_i$ en $\mathcal{C}(0,10)$ no cambian de signo y evidentemente contiene al grupo SU(0,5)[10,12]; por su parte los elementos del grupo Spin (0,5) serán invariantes ante la involución $e_i \longrightarrow -e_i$ en $\mathcal{C}(0,10)$ y están contenidos en el grupo Spin (0,10). Asímismo, es posible demostrar el isomorfismo entre los elementos del grupo Spin (0,5) y los correspondientes en el grupo $\mathcal{C}(0,4)$[12].

Cuando en el estudio de partículas elementales en interacción se emplea SU(0,5) con fines gran unificadores a altas energías, es necesario que a energías menores ocurra una ruptura de simetría para recuperar el modelo QCD y Weimberg-Salam a la escala predicha por las ecuaciones del grupo de renormalización, por lo tanto siempre es útil hacer obvia la forma en que está contenido el grupo maximal no simple SU(3)xSU(2)xU(1) en SU(5). Para la construcción multivectorial que aquí se ha hecho es factible hacer la siguiente identificación;

$$E_{12}(SU(0,5)) \longleftrightarrow E_{12}(SU(0,3))$$

$$E_{13}(SU(0,5)) \longleftrightarrow E_{13}(SU(0,3))$$

$$E_{23}(SU(0,5)) \longleftrightarrow E_{23}\ (SU(0,3))$$

$$F_{12}(SU(0,5)) \longleftrightarrow F_{12}(SU(0,3))$$

$$F_{13}(SU(0,5)) \longleftrightarrow F_{13}(SU(0,3))$$

$$F_{23}(SU(0,5)) \longleftrightarrow F_{23}(SU(0,3))$$

$$H_1(SU(0,5)) \longleftrightarrow H_1\ (SU(0,3))$$

$$H_2(SU(0,5)) \longleftrightarrow H_2\ (SU(0,3))$$

con lo que se identificaron los ocho generadores del grupo SU(0,3) en SU(0,5) (claro que bajo la certificación del álgebra de Lie correspondiente), una identificación semejante a la anterior nos permite reconocer los tres generadores del grupo SU(0,2);

$$E_{45}(SU(0,5)) \longleftrightarrow E_{12}(SU(0,2))$$

$$F_{45}(SU(0,5)) \longleftrightarrow F_{12}(SU(0,2))$$

$$H_{4}(SU(0,5)) \longleftrightarrow H_{1}(SU(0,2))$$

Finalmente elegimos a

$$H_{3}(SU(0,5)) \longleftrightarrow E_{1}(SU(0,1))$$

como el único generador del grupo abeliano dado, de esta forma la ruptura de simetría $SU(0,5) > SU(0,3) \times SU(0,2) \times U(1)$ tiene clara representación multivectorial (el resto de los generadores en SU(0,5) transforman bajo los dos grupos no abelianos y físicamente representan operadores que permiten la interacción entre quarks y leptones, adicional a la electro-débil y fuerte pura) .

En virtud de que para este caso se han empleado espacios euclídeos, los grupos rotores involucrados ($Spin^{+}(0,10)$, $Spin^{+}(0,5)$, $Spin^{+}(0,3)$) son isomorfos a los grupos espín correspondientes (Spin(0,10), Spin(0,5), Spin(0,3)).

ii) SU(1,3)

Existe un considerable interés en el análisis de este tipo de grupos construidos usando el espacio minkowskiano como generadores del álgebra multivectorial ya que en algunos modelos son una posible etapa intermedia en la ruptura de simetría en grupos gran unificadores mayores que SU(5) . En este caso se usará un espacio $A_{2,6}$ con los vectores base e_0, e_1, e_2, e_3; f_0, f_1, f_2, f_3 tales que $e_i \cdot e_j = f_i \cdot f_j = g_{ij} = \mathrm{diag}\ (1,-1,-1,-1)$ para $i,j = 0,1,2,3$, que permite obtener los siguientes bivectores compuestos;

$$
\begin{aligned}
E_{01} &= e_0 \wedge e_1 + f_0 \wedge f_1 & F_{01} &= e_0 \wedge f_1 - f_0 \wedge e_1 \\
E_{02} &= e_0 \wedge e_2 + f_0 \wedge f_2 & F_{02} &= e_0 \wedge f_2 - f_0 \wedge e_2 \\
E_{03} &= e_0 \wedge e_3 + f_0 \wedge f_3 & F_{03} &= e_0 \wedge f_3 - f_0 \wedge e_3 \\
E_{12} &= e_1 \wedge e_2 + f_1 \wedge f_2 & F_{12} &= e_1 \wedge f_2 - f_1 \wedge e_2 \\
E_{13} &= e_1 \wedge e_3 + f_1 \wedge f_3 & F_{13} &= e_1 \wedge f_3 - f_1 \wedge e_3 \\
E_{23} &= e_2 \wedge e_3 + f_2 \wedge f_3 & F_{23} &= e_2 \wedge f_3 - f_2 \wedge e_3 \\
H_0 &= e_0 \wedge f_0 - e_1 \wedge f_1 & H_2 &= e_2 \wedge f_2 - e_3 \wedge f_3 \\
H_1 &= e_1 \wedge f_1 - e_2 \wedge f_2 & &
\end{aligned}
$$

que son las representaciones multivectoriales de los 15 generadores del grupo SU(1,3) ya que reproducen el álgebra de Lie de sus conmutadores.

Como es evidente, el grupo de Clifford $\mathcal{C}(2,6)$ contiene al $\mathcal{C}(1,3)$, al ser ambos unitarios son isomorfos a los correspondientes grupos versores y 2:1 homomórficos a sus grupos ortogonales. Cuando se construye el grupo espín Spin (1,3) se observa que es isomorfo a $\mathcal{C}(3,0)$, mientras que $\mathrm{Spin}^{+}(1,3)$ (representación multivectorial espín 1/2 del grupo propio de Lorentz) lo es a $\mathcal{C}(0,2)$[11,12].

iii) SU(3).

El éxito de la cromodinámica cuántica (QCD) como una teoría de campo de Yang-Mills con grupo de norma no abeliano $SU(3)_c$ actuando sobre un número cuántico llamado color radica en que es un principio dinámico que explica (y predice) hechos experimentales que involucran interacciones fuertes, de hecho la idea de los quarks nace como una necesidad de clasificación de espectros relacionados con hadrones pero después se encontró que su papel en el modelo es más importante que un mero ordenamiento. Es por esta razón que debe incluirse el análisis multivectorial de este grupo en todo modelo sobre campos.

Al efectuar el estudio sobre el grupo SU(5) se construyó indirectamente el grupo SU(3) mediante la técnica ya abordada con anterioridad y a pesar de la validez probada de la misma, tiene el inconveniente de forzarnos a expandir nuestro espacio base $\mathcal{A}_{p,q}$ a otro $\mathcal{A}_{2p,2q}$ con varias dimensiones adicionales de espacio interno o isotópico[12]. Esta característica del método es irrelevante cuando se aplica la representación multivectorial a modelos que aceptan espacios de dimensionalidad más altas que el de Minkowskii (teoría de cuerdas o supersimetría), por otro lado es común desear restringir la situación al espacio-tiempo físico de la naturaleza $\mathcal{A}_{1,3}$ y su álgebra de Clifford $\mathcal{C}(1,3)$ como los espacios lineales fundamentales para la representación de grupos de Lie.

En virtud de las condiciones para la representación matricial de las álgebras de Clifford sabemos que la representación irreducible $\mathcal{C}(1,3)$ sobre el campo de los reales es 4x4 y a su vez es conocido que el espacio de estas matrices es generado por 16 de ellas linealmente independientes, elegimos las matrices de Dirac y sus productos de tal forma que toda matriz H representación de algún elemento en $\mathcal{C}(1,3)$ puede ser expandida con respecto a esta base. De esta forma se garantiza que el grupo SU(3) (u otros de menor orden) tienen representación fidedigna en $\mathcal{C}(1,3)$; es fácil observar que siempre y cuando el grupo de Lie tenga a lo más 16 generadores podrá tener representación multivectorial en $\mathcal{C}(1,3)$, cuando el grupo sea mayor se forzará la inclusión de mayor dimensionalidad en $\mathcal{A}_{p,q}$.

Con base en lo antes dicho se pueden encontrar varias representaciones para el grupo SU(3) en $\mathcal{C}(1,3)$ en el campo de los complejos, la primera de ellas está dada como;

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\gamma_{01} + i\gamma_{23}) \qquad \lambda_5 = \frac{1}{2}(i\gamma_3 - \gamma_{123})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(\gamma_{02} - i\gamma_{13}) \qquad \lambda_6 = \frac{i}{2}(\gamma_{023} + \gamma_2)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(\gamma_{03} + i\gamma_{12}) \qquad \lambda_7 = \frac{i}{2}(\gamma_1 + \gamma_{013})$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2}(\gamma_0 + i\gamma_{012})$$

$$\lambda_8 = \left(\frac{i}{\sqrt{3}}\gamma_5 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\gamma_{03} - \frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma_{12} \right)$$

donde λ , i = 1,...8 reproducen el álgebra de Lie de conmutadores para SU(3) y $\{\gamma_\mu , \gamma_{\mu\nu} , \gamma_{\mu\nu\rho} , \gamma_{\mu\nu\rho\tau}\} \in \mathcal{C}(1,3)$. Cabe hacer notar que solamente los generadores λ_1 , λ_2 , λ_3 y λ_8 están incluidos en $C^2(1,3)$ por lo que serán una subálgebra de C(1,3) con la característica adicional de ser la representación multivectorial de SU(2,0) x U(1,0) (λ_1 , λ_2 y λ_3 son los generadores de SU(2,) y λ_8 de U(1,0)), el resto de los generadores no forman una subálgebra de SU(3) (son los versores impares de C(1,3)) y transforman simultáneamente bajo las subálgebras SU(2) y U(1).

Es notoria la transformación de λ_i (i = 1,2,3) ante el multivector $i\gamma_5$, la de λ_j (j = 4,5) ante $i\gamma_{12}$ y la correspondiente a λ_k (k = 6,7) ante $\gamma_{03} = (i\gamma_5)(i\gamma_{12})$, que son los elementos que permiten construir el generador de U(1). Esta observación recuerda el trabajo publicado por J. Keller[14] en el que se efectúa un estudio sobre la cantidad de idempotentes que definen a los proyectores mínimos necesarios para clasificar ideales mínimos en $\mathcal{C}(1,3)$ y la consecuencia que ésto tendría en cuanto a la representación matricial del álgebra, bajo esta construcción de SU(3) se puede garantizar que

$$\left[\tfrac{1}{2}(1+i\gamma_5)\right]\lambda_i = \lambda_i\left[\tfrac{1}{2}(1+i\gamma_5)\right] = \lambda_i \qquad \text{para } i = 1,2,3 \text{ donde } \lambda_i \in SU(2).$$

$$\left[\tfrac{1}{2}(1-i\gamma_5)\right]\lambda_i = \lambda_i\left[\tfrac{1}{2}(1-i\gamma_5)\right] = 0$$

$$\left[\tfrac{1}{2}(1+i\gamma_{12})\right]\lambda_j = \lambda_j\left[\tfrac{1}{2}(1+i\gamma_{12})\right] = \lambda_j \qquad \text{para } j = 4,5$$

$$\left[\tfrac{1}{2}(1-i\gamma_{12})\right]\lambda_j = \lambda_j\left[\tfrac{1}{2}(1-i\gamma_{12})\right] = 0$$

$$\left[\tfrac{1}{2}(1+\gamma_{03})\right]\lambda_k = \lambda_k\left[\tfrac{1}{2}(1+\gamma_{03})\right] = 0 \qquad \text{para } k = 6,7$$

$$\left[\tfrac{1}{2}(1-\gamma_{03})\right]\lambda_k = \lambda_k\left[\tfrac{1}{2}(1-\gamma_{03})\right] = 0 .$$

donde $\frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_5)$ es el proyector de quiralidad del campo, $\frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_{12})$ es el correspondiente al espín y el restante se interpreta como la proyección Z del momento lineal. Finalmente es interesante indicar que esta estructura multivectorial tiene representación matricial no trivial para la quiral correspondiente a las matrices de Dirac, lo cual coincide con el hecho de que al elegir los proyectores quiralidad y espín para clasificar ideales mínimos de $\mathcal{C}(1,3)$ (llamados espinores*) se induce la representación quiral para las matrices de Dirac[28].

Otra construcción para SU(3) en $\mathcal{C}(1,3)$ está dada como:

$$\lambda_1 = -\frac{i}{2}(\gamma_{23} + \gamma_{023}) \qquad \lambda_5 = \frac{1}{2}(\gamma_3 - i\gamma_{123})$$

$$\lambda_2 = \frac{i}{2}(\gamma_{13} + \gamma_{013}) \qquad \lambda_6 = \frac{1}{2}(\gamma_2 + i\gamma_{01})$$

$$\lambda_3 = \frac{i}{2}(\gamma_{12} + \gamma_{012}) \qquad \lambda_7 = \frac{1}{2}(\gamma_1 - i\gamma_{02})$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2}(\gamma_5 + i\gamma_{03})$$

$$\lambda_8 = \frac{i}{2\sqrt{3}}(2\gamma_0 + i\gamma_{12} - i\gamma_{012})$$

bajo las mismas condiciones de notación que en el caso anterior. Sabemos que la parte par de un álgebra de Clifford será una subálgebra de la misma, sin embargo lo contrario no es forzosamente cierto, de hecho éste es un ejemplo en el cual se construye la representación multivectorial de SU(2) usando combinaciones apropiadas de multivectores impares y pares como se observa para los tres primeros generadores de SU(3) (por cierto invariantes ante γ_0). El generador de U(1) corresponde a λ_8 y se construye con la combinación lineal de los multivectores que dejan invariantes los generadores del grupo hasta un factor dado (además de γ_0 para λ_i con i = 1,2,3, están $i\gamma_{12}$ para λ_j con j = 4,5 y $i\gamma_{012} = \gamma_0(i\gamma_{12})$ para λ_k con k = 6,7). Para esta construcción se puede observar que

*Apéndice

$$\left[\frac{1}{2}\,(1+\gamma_0)\right]\lambda_i = \lambda_i\left[\frac{1}{2}\,(1+\gamma_0)\right] = \lambda_i \qquad \text{para} \quad i = 1,2,3 \quad \text{donde} \quad \lambda_i \in SU(2)$$

$$\left[\frac{1}{2}\,(1-\gamma_0)\right]\lambda_i = \lambda_i\left[\frac{1}{2}\,(1-\gamma_0)\right] = 0$$

$$\left[\frac{1}{2}\,(1+i\gamma_{12})\right]\lambda_j = \lambda_j\left[\frac{1}{2}\,(1+i\gamma_{12})\right] = 0 \qquad \text{para } j = 4,5$$

$$\left[\frac{1}{2}\,(1-i\gamma_{12})\right]\lambda_j = \lambda_j\left[\frac{1}{2}\,(1-i\gamma_{12})\right] = \lambda_j$$

$$\left[\frac{1}{2}\,(1+i\gamma_{012})\right]\lambda_k = \lambda_k\left[\frac{1}{2}\,(1+i\gamma_{012})\right] = 0 \qquad \text{para } k = 6,7$$

$$\left[\frac{1}{2}\,(1-i\gamma_{012})\right]\lambda_k = \lambda_k\left[\frac{1}{2}\,(1-i\gamma_{012})\right] = \lambda_k$$

donde $\frac{1}{2}\,(1 \pm \gamma_0)$ es un proyector tipo masa para el campo. Esta estructura de SU(3) tiene representación no trivial para la normal de Dirac, lo cual coincide con el hecho de que al elegir los proyectores masa y espín para clasificar ideales mínimos de $\mathcal{G}(1,3)$ (espinores*) se induce la representación normal de Dirac.

Una vez presentados dos casos es sencillo inducir un esquema de comportamiento general; se construyen los generadores de SU(2) usando algún elemento multivectorial de simetría con interés físico para clasificar espinores en el modelo. El proyector restante en $\mathcal{G}(1,3)$ permite encontrar la simetría multivectorial de dos generadores más y determina hasta constantes de normalización el correspondiente a U(1) (este es la combinación lineal de los tres multivectores que dejan invariante a los generadores del grupo, siendo uno de ellos el producto de las únicos multivectores en $\mathcal{G}(1,3)$ independientes necesarios para clasificar espinores), los dos generadores restantes tendrán una simetría dada por el producto de los otros dos multivectores de simetría. Finalmente se garantiza al menos una representación matricial no trivial para el sistema multivector-espinor en el grupo SU(3) fijada por dos

*Apéndice

proyectores elegidos arbitrariamente en función de su utilidad física o matemática[14,28].

iv. SU(2)

El modelo que combina exitosamente las interacciones débiles y electromagnéticas es el SU(2)xU(1) donde se encuentra incluido el grupo no abeliano más sencillo en el proceso de generalización a isosespín en la física moderna, además, este grupo es localmente isomorfo a SO(3) y su cuadrado lo es al grupo propio de Lorentz. Este grupo contiene tres generadores que fueron representados multivectorialmente al estudiar SU(5) (en un espacio expandido) y cuando menos fueron mostradas dos posibilidades en $\mathcal{C}(1,3)$ en la sección correspondiente a SU(3) usando multivectores no simples y en un caso no homogéneos; gracias a los grados de libertad incluidos en $\mathcal{C}(1,3)$ sobre el campo de los reales y aún sobre el de los complejos, se puede garantizar una gran variedad de representaciones multivectoriales de SU(2) (además de las que ya fueron mencionadas, se pueden elegir las representaciones γ_{0i} con $i = 1,2,3$ y $\{i\gamma_0, i\gamma_0\gamma_5, \gamma_5\}$ entre otras mas).

Es así como en este capítulo, después de una introducción necesaria para presentar el álgebra de Clifford y sus propiedades así como algunos elementos de simetría en teoría de grupos, se usó la representación multivectorial de los grupos de Lie (ejemplificando con algunos casos particulares de utilidad en la teoría de campo aplicada a partículas elementales) para inducir un manejo diferente en la clasificación de los mismos a través del álgebra de Lie de sus generadores; contrastando el mecanismo ya reportado en la literatura de duplicación del espacio generador del álgebra de Clifford para construir el álgebra de Lie de los generadores de un grupo SU(n) como subálgebra de la parte bivectorial de la primera. Con otro mecanismo nuevo de construcción en el cual los proyectores que clasifican ideales mínimos (espinores) en el álgebra de Clifford asociada a un espacio generador permiten construir representaciones multivectoriales de grupos de Lie SU(n) sin necesidad de una duplicación de este espacio.

Adicionalmente, en este sistema multivector-espinor se puede establecer una representación matricial no trivial para los multivectores del álgebra de Clifford y los generadores del grupo de Lie correspondiente, analizándose a fondo el caso correspondiente a SU(3) para este mecanismo alternativo de construcción.

CAPITULO II.

GENERALIZACION MULTIVECTORIAL DEL MAPA DE CARTAN

MAPA INVERSO.

II.A. INTRODUCCION.

Elie Cartan fue uno de los fundadores de la teoría moderna de los grupos de Lie y en sus notas se encuentran las raices del tratamiento geométrico de las representaciones de los grupos ortogonales y sus subgrupos (tanto con parámetros reales como complejos). El propósito de este capítulo será extender la estructura espinor-multivector desarrollada por Cartan para incluir simetrías isotópicas y espacio-temporales, debido a la importancia de las aplicaciones que el trabajo de este gran matemático francés tiene.

Por ejemplo, Cartan[6] define un espinor en espacio tridimensional euclídeo (E_3) mediante las componentes de un vector isotrópico (de norma nula), como el par de cantidades ξ_0 , ξ_1 tal que

$$X_1 = \xi_0^2 - \xi_1^2$$

$$\text{II.1)} \quad X_2 = i(\xi_0^2 + \xi_1^2)$$

$$X_3 = -2\xi_0\xi_1$$

donde X_i $i = 1,2,3$ son las componentes de un vector isotrópico $\left(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = \xi_0^4 + \xi_1^4 - 2\xi_0^2\xi_1^2 - \xi_0^4 - 2\xi_1^2\xi_0^2 - \xi_1^4 + 4\xi_0^2\xi_1^2 = 0\right)$,

de esta forma un espinor se establece como un vector isotrópico polarizado o dirigido (la rotación alrededor de un eje por un ángulo 2π cambia su polarización). En nuestro caso adoptaremos la definición de un espinor como la de un ideal mínimo de algún álgebra geométrica, utilizando la teoría de Cartan sobre los espinores para construir un mapa que relacione a los mismos con los multivectores de un álgebra de Clifford generada por el espacio que permitió definir a los primeros, según Cartan[6].

Definición. El mapa de Cartan $N(\xi,\ell)$ de $C^2 x C^2$ a $H(2)$ está dado por

$$N^{0}(\xi,\ell) = -(\xi_1\ell_2 - \xi_2\ell_1)$$

$$\text{II.2)} \qquad N(\xi,\ell)= \begin{bmatrix} \xi_1\ell_1 - \xi_2\ell_2 \\ i(\xi_1\ell_1 + \xi_2\ell_2) \\ -(\xi_1\ell_2 + \xi_2\ell_1) \end{bmatrix} .$$

donde

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} \in C^2$$

(espinores de dos componentes de Weyl), N es un vector isotrópico y N^0 es un escalar[24], en total $N = [N^0,N]$ forman un cuaternio.

Esta definición merece algunas anotaciones adicionales; en primer lugar es interesante mencionar que a pesar de las razones que provocaron históricamente la introducción de los espinores en la física matemática (para obtener ecuaciones de onda de primer orden y teorías covariantes relativistas entre otras cosas) estos objetos matemáticos poseen características no deseables en un modelo de interacción entre partículas de diversos espines (es común interpretar al espinor $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ como aquel con proyección 1/2 hacia arriba sobre el eje Z, lo que ya introduce una estructura coordenada local arbitraria; además para el grupo de las transformaciones relativistas tanto ψ como $-\psi$ deben representar el mismo estado físico, lo que puede provocar dificultad en la interpretación de algunas expresiones) por lo que es deseable implementar una estructura matemática única entre espinores y multivectores. Adicionalmente es conveniente recordar que cuando Cartan[6] desarrolla su teoría demuestra que el espacio euclídeo de dimensión $2\nu + 1$ ($E_{2\nu+1}$) tiene 2^{ν} ecuaciones para un ν-plano isotrópico que definen a un espinor (el espacio $E_{2\nu}$ define semiespinores de dos tipos diferentes con magnitud 2^{ν}), por lo que un espinor con dos componentes solamente puede ser construido en un espacio E_3 (que es el caso ya que N es un vector tipo espacio isotrópico y N^0 es un escalar, los que al considerarse simultáneamente en $N = [N^0,N]$ definen un cuaternio) o bien E_2. Finalmente debemos subrayar que el mapa de Cartan ha quedado definido como un mapa 2:1 sobre cualquier tipo de variedad de estados físicos.

Gracias a que el mapa de Cartan $N(\xi,\xi)$ es lineal y simétrico es posible asegurar que al aplicarle un operador diferencial D resulta que

$$\text{II.3)} \qquad DN(\xi,\xi) = 2D'N(\xi,\xi) = 2N(D'\xi,\xi) = 2N(\xi,D'\xi)$$

donde D' es el operador diferencial correspondiente a D que actúa sobre el primer argumento del mapa o bien sobre el segundo y por lo tanto actúa sobre el espacio espinorial ξ. Cuando se analiza el efecto de diversos operadores de importancia por su significado físico sobre el mapa II.2) se observa que dado un operador en el espacio espinorial es posible encontrar su operador equivalente actuando sobre un espacio multivectorial generado por el mapa $N(\xi,\xi)$;

$$\text{II.4)} \qquad \underline{O}N(\xi,\xi) = N(\tilde{\underline{O}}\xi,\xi)$$

donde $\underline{O}$ es un operador (que puede o no ser diferencial) en el espacio multivectorial, mientras que $\tilde{\underline{O}}$ es su equivalente actuando sobre el espacio espinorial[24]. De hecho es sencillo intuir que los operadores tipo posición (como es la posición misma y los potenciales que son función de la misma) serán idénticos en ambas representaciones mientras que los operadores diferenciales (energía y momento) seguirán el comportamiento II.3), finalmente el operador espin cambiará de la representación de Pauli a la de Proca.

La conmutatividad del mapa de Cartan $N(\xi,\xi)$ con los operadores fundamentales de todo modelo de interacción expresada en II.4) garantiza que este mapa conserva los valores propios de los estados que se usan para obtener información física. Si ξ es un estado propio del operador $\tilde{\underline{O}}$ con valor propio λ entonces;

$$\underline{O}N(\xi,\xi) = N(\tilde{\underline{O}}\,\xi,\xi) = N(\xi,\tilde{\underline{O}}\xi) \quad \text{se transforma a}$$

II.5)

$$\underline{O}N(\xi,\xi) = N(\lambda_o\xi,\xi) = N(\xi,\lambda_o\xi) = \lambda_o N(\xi,\xi).$$

Con la finalidad de escribir el mapa II.2) en la forma adecuada para su extensión geométrica a otras dimensiones y simetrías, así como su uso en el siguiente capítulo se reescribe de la siguiente forma;

II.6) $\quad N^{\alpha}(\xi,\ell) = \xi^{T}\sigma_{\alpha}\bar{\ell}*$,

con $\tau_{\alpha} = (1, \tau_{Pauli})$ como una base para los cuaternios; $\xi, \ell \in C^2$ y se ha usado el espinor bajo la representacion conjugada ℓ^{-} ya que si

II.7) $$\ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad \bar{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_2^* \\ -\ell_1^* \end{pmatrix} \in C^2 .$$

donde $\left(\xi_a \ , \ \ell_a\right)$ son números complejos y $\left(\xi_a^* \ , \ \ell_a^*\right)$ son sus conjugadas complejas. Es sencillo notar que bajo la definición II.7)

II.8) $\quad \bar{\ell}* = \varepsilon\ \ell$, donde $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es la representación matricial del tensor métrico espinorial.

Teorema II.1. El cuaternión generado por el mapa de Cartan $N(\xi,\ell) = N^{\alpha}(\xi,\ell)\sigma_{\alpha}$ es equivalente al multivector $N(\xi,\ell) = 2\ \varepsilon\ell\xi^{T}$ donde el factor escalar muestra la degeneración que existe en el grupo de Clifford $\mathscr{C}(3,0) = \{1,\ \sigma_i\ ;\ i\sigma_i\ ,\ i1\}$ al ser una doble cobertura (una en el campo de los reales y otra bajo los imaginarios del álgebra de los cuaternios).

Prueba.

Sea

$$N(\xi,\ell) = N^{\alpha}(\xi,\ell)\sigma_{\alpha} = (\xi_1\ell_2 - \xi_2\ell_1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (\xi_1\ell_1 - \xi_2\ell_2)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$i(\xi_1\ell_1 + \xi_2\ell_2)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - (\xi_1\ell_2 + \xi_2\ell_1)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \xi_1\ell_2 & \xi_2\ell_2 \\ -\xi_1\ell_1 & -\xi_2\ell_1 \end{pmatrix}$$

mientras que

$$N(\xi,\ell) = 2\ \varepsilon\ \ell\xi^{T} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}(\xi_1\xi_2) = 2\begin{pmatrix} \ell_2\xi_1 & \ell_2\xi_2 \\ -\ell_1\xi_1 & -\ell_1\xi_2 \end{pmatrix}$$

con lo que el teorema quedó demostrado.

II. B. MAPAS EXTENDIDOS DE CARTAN.

Conservando la idea de superar las dificultades matemáticas que una estructura espinorial independiente de la multivectorial pudiera tener, se aborda el objetivo de construir mapas que impongan condiciones sobre los campos que puedan modelar las partículas elementales de acuerdo a sus propiedades isotópicas y espacio-temporales, cuando menos para clasificar las representaciones proyectadas irreducibles de diversos grupos con interés en teoría de campo.

En esta sección se construirá un mapa inspirado en el de Cartan con las características adicionales de que se usarán espinores (ideales mínimos) de dimensión arbitraria, un grupo de norma y el grupo de Clifford $\mathcal{C}(1,3)$ como la simetría del espacio-tiempo $A_{1,3}$ para todos los casos. De hecho se presentará un mecanismo de construcción que, al mismo tiempo que generaliza la estructura, permite darle un seguimiento geométrico asociable a una teoría de norma.

Definición. El mapa extendido de Cartan es la forma bilineal $M^{\alpha}_{\beta}(\psi,\chi)$ de $C^{2^n} x C^{2^n}$ a C dada por los siguientes coeficientes;

II.B.1) $M^{\alpha}_{\beta}(\psi,\chi) = \psi^{T}\Gamma^{\alpha}(\lambda_{\beta}\overline{\chi})^{*}$ donde;

i) $\chi,\psi \in C^{2^n}$ siendo ideales mínimos de $\mathcal{C}(1,3)$ o sea espinores del espacio-tiempo. La representación conjugada espinorial para el espinor quedará definida de tal manera que $\overline{\chi}^{*} = \varepsilon\ \chi$; ε será la métrica espinorial elegida de tal forma que el mapa multivectorial sin simetría de norma pero con simetría espacio temporal sea igual para todo valor de n y se mantenga en todo momento la biyección $\overline{\overline{\psi}} = (-1)^{2n}\psi$ para $\psi \in C^{2^n}$, lo que equivale a extender el mapa de la dimensión espinorial $C^{2^{(n-1)}}$ a C^{2^n} asignando a un número complejo el papel de un espinor de Weyl.

ii) $\Gamma^{\alpha} \in \mathcal{C}(1,3)$ $\alpha = 0,\ldots,15$ como la representación multivectorial de la simetría espacio-tiempo.

iii) λ_β es la representación multivectorial de los generadores de un grupo de Lie, que en general se toma como alguno de los usados en teoría de norma para campos físicos.

Ahora queda clara la extensión hecha al mapa original de Cartan escrito en la forma II.6); se permitió el empleo de espinores de dimensión arbitraria, se usó el grupo completo de Clifford $\mathscr{C}(1,3)$ para el espacio-tiempo en lugar de la correspondiente subálgebra cuaterniónica σ_α y finalmente se introdujo la representación multivectorial para un grupo de Lie a elegir.

Es evidente que el mapa II.B.1 puede construirse para cualquier grupo de norma que acepte representación multivectorial (ver I.B.), sin embargo los casos especiales con mayor interés son los que han sido explorados ampliamente en teoría de campo; SO(10), SU(5), SU(3) y SU(2). Cuando se representa matricialmente el mapa M^α_β es posible que al emplear algunos grupos de Lie se use la representación matricial irreducible para Γ^α mientras que se deberá elegir alguna reducible cuando se usa para otros casos. Es posible que algunos autores (quizá por razones históricas) no empleen el grupo $\mathscr{C}(1,3)$ completo en el espacio-tiempo, limitándose a usar la parte cuaterniónica del mapa II.B.1, este es el caso de los trabajos presentados por F. Reifler[24,25,26] donde llama mapa extendido de Cartan al caso particular de $M^\alpha_\beta(\psi\chi)$ con simetría de norma SU(2) y representación cuaterniónica para el espacio-tiempo tal que

II.B.2) $\quad B^\alpha_\beta(\psi,\chi) = \psi^T\sigma^\alpha\tau^*_\beta\,\varepsilon\,\chi \qquad$ donde

i) σ^α con $\alpha = 0,1,2,3$; es una subálgebra cuaterniónica de $\mathscr{C}(1,3)$ formada por $\{1, i\gamma_{23}, i\gamma_{31}, i\gamma_{12}\}$ que bajo la representación quiral para las matrices de Dirac tienen una representación matricial

$$\left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}\sigma_{\text{Pauli}}&0\\0&\sigma_{\text{Pauli}}\end{pmatrix} \right\} \text{ donde } 1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

ii) τ_β con $\beta = 0,1,2,3$; son los generadores del grupo de norma con representación multivectorial $(1, \gamma_0, \gamma_{123}, i\gamma_5)$ que bajo la representación quiral para las matrices de Dirac tienen la representación matricial

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -i1 \\ i1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ donde } 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii) $\psi, \chi \in C^4$, el autor define estos objetos como pares de espinores de Weyl.

Comentando un poco esta construcción es obvio que al ser un caso particular de II.B.1) tendrá limitaciones adicionales, de hecho el autor las reconoce al aceptar que sus grupos de norma serán productos directos de SU(2) y a lo más U(1) (por ejemplo SU(2)xSU(2)xU(1) para modelar cromodinámica cuántica)[27]. La razón es muy simple, necesita un grupo de norma que conmute con el correspondiente al espacio-tiempo (índices de Lorentz) para que su elección de una base cuaterniónica para la simetría espacio-tiempo no pierda información con respecto a aquella que corresponde al grupo $\mathcal{G}(1,3)$ completo (para el grupo de norma SU(2) el mapa $M^\alpha_\beta(\psi,\chi)$ es cuatro veces degenerado bajo la representación multivectorial $\{1, \gamma_0, \gamma_{123}, \gamma_5\}$ y por lo tanto solamente cubre cuatro veces a $B^\alpha_\beta(\psi,\chi)$).

II.C. MAPA MULTIVECTORIAL DE CARTAN.

Los mapas que se han presentado en la sección anterior están escritos por componentes y para los objetivos que se persiguen en este trabajo se necesita que éstos sean escritos multivectorialmente (como es el caso del mapa II.2) al ser usado en el teorema II.1) para lo cual basta con usar II.B.1) para definir el mapa multivectorial de Cartan $M_\beta(\psi,\chi)$ de $C^{2^n} \times C^{2^n}$ a $\mathcal{G}(1,3)$ dado por

II.C.1) $\quad M_\beta(\psi,\chi) = M^\alpha_\beta(\psi,\chi)\Gamma_\alpha$,

de tal forma que se tendrá un multivector para cada dirección isotópica β

Teorema II.C.1. El multivector generado por el mapa de Cartan $M_\beta(\psi,\chi) = M^\alpha_\beta(\psi,\chi)\Gamma_\alpha$ es equivalente al multivector $M_\beta(\psi,\chi) = 4\lambda_\beta\tau_3(\varepsilon\ \chi\psi^T)^T\tau_3$ siempre y cuando $\psi^T\Gamma_i\lambda^*_\beta\ \varepsilon\ \chi = \lambda_\beta\psi^T\Gamma_i\ \varepsilon\ \chi$ para todo β, i.

Prueba. Se tiene que

$M_\beta(\psi,\chi) = M^\alpha_\beta(\psi,\chi)\Gamma_\alpha = (\psi^T\Gamma^\alpha\lambda^*_\beta\ \varepsilon\ \chi)\Gamma_\alpha$ y

$M_\beta(\psi,\chi) = (\lambda_\beta\psi^T\Gamma^\alpha\ \varepsilon\ \chi)\Gamma_\alpha = \lambda_\beta M^\alpha_0(\psi,\chi)\Gamma_\alpha$ por lo que

$M_\beta(\psi,\chi) = \lambda_\beta M_0(\psi,\chi)$, con lo cual bastará con obtener la expresión para $M_0(\psi,\chi)$.

Para probar la segunda parte de este teorema tomaremos por comodidad el caso especial $\psi = \chi$ con lo que al construir el mapa $M_0(\psi,\psi)$ se obtiene

$$M_0(\psi,\psi) = M^\alpha_0(\psi,\psi)\Gamma_\alpha = \begin{pmatrix} \tau_1\eta_2 & -\tau_1\eta_1 & \tau_1\tau_2 & -\tau_1^2 \\ \tau_2\eta_2 & -\tau_2\eta_1 & \tau_2^2 & -\tau_1\tau_2 \\ -\eta_1\eta_2 & \eta_1^2 & -\tau_2\eta_1 & \tau_1\eta_1 \\ -\eta_2^2 & \eta_1\eta_2 & -\tau_2\eta_2 & \tau_1\eta_2 \end{pmatrix}$$

que es idéntico a la matriz

$$M_0(\psi,\psi) = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}(\tau_1\tau_2\eta_1\eta_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que corresponde a la expresión $M_0(\psi,\psi) = 4\tau_3\psi\psi^T\ \varepsilon\ \tau_3$.

Es preciso comentar algunos puntos de interés sobre el anterior teorema; la condición que exige el mismo permite que la relación entre multivector en una dirección isotópica dada $M_\beta(\psi,\chi)$ y el construido con la unidad en el espacio isotópico $M_o(\psi,\chi)$ esté fijada por el correspondiente generador del grupo de Lie lo cual simplifica mucho el manejo de estos campos sin ser una condición esencial para la expresión multivectorial de los mapas de Cartan, se puede demostrar que los grupos de norma SU(2) y SU(3) satisfacen esta condición. Por otro lado el caso especial que se usó para probar la segunda parte del teorema es el más común en este trabajo, a lo más se usará el mapa $M^\alpha_\beta(\psi,\overline{\psi})$. En esta prueba se emplea la representación irreducible de las matrices de Dirac (también por razones de comodidad) y la extensión del campo M_o a dimensiones superiores se logra asignando a todo escalar complejo la calidad de un espinor de Weyl con lo que se pasa de la dimensión 2^ν a la subsecuente $2^{\nu+1}$ conservando la estructura del multivector M_o (este mapa solamente contiene información sobre la estructura expacio-tiempo dada por $\mathcal{C}(1,3)$).

Tomaremos un caso particular del teorema II.C.1 que tiene especial interés por la estructura que contiene, como un ejemplo de la misma. Se trata de construir el mapa II.B.1) para el grupo de Lie SU(2) y proyectarlo sobre una base cuaterniónica, lo que por supuesto deberá coincidir con el multivector generado por el mapa II.B.2) sobre la misma base.

Teorema II.C.2. El cuaternión $B_\alpha(\psi,\chi) = B^\beta_\alpha(\psi,\chi)\sigma_\beta$ subálgebra de $\mathcal{C}(1,3)$ se construye proyectando la parte cuaterniónica del multivector $M^T_\alpha(\psi,\chi)$ mediante operadores aplicados a los antecedentes y consecuentes del mismo según sea el caso (ésto equivale a decir que el multivector completo no es proyectado a su subálgebra cuaterniónica hasta que es usado como operador sobre otro multivector o bien algún mínimo ideal del mismo) de la siguiente forma;

$$\text{II.C.2)}\quad B_\alpha(\psi,\chi) = -\frac{1}{2}\left(\tau_\uparrow M^T_\alpha(\psi,\chi)\tau_\uparrow + \tau_\downarrow M^T_\alpha(\psi,\chi)\tau_\downarrow + \tau_+ M^T_\alpha(\psi,\chi)\tau_- + \tau_- M^T_\alpha(\psi,\chi)\tau_+\right)$$

donde

$$\tau_{+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\,(\tau_1 + i\tau_2)\sigma_2$$

$$\tau_{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\,(\tau_1 - i\tau_2)\sigma_2$$

$$\tau_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\,(1 + \tau_3)\sigma_2$$

$$\tau_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\,(1 - \tau_3)\sigma_2$$; bajo la nomenclatura

en la que se escribió II.B.2).

Prueba;

Con la finalidad de ejemplificar el procedimiento a seguir en esta etapa, tomaremos el caso particular para el índice $\alpha = 3$ (para el resto de los casos la prueba es en todo análoga y solamente se darán resultados intermedios)

$$B_3(\psi,\chi) = B_3^{\alpha}(\psi,\chi)\sigma_{\alpha} = B_3^{0}(\psi,\chi)\sigma_0 + B_3^{1}(\psi,\chi)\sigma_1 + B_3^{2}(\psi,\chi)\sigma_2 +$$
$$+ B_3^{3}(\psi,\chi)\sigma_3$$

por lo tanto

$$B_3(\psi,\chi) = \begin{pmatrix} (\xi_2\nu_1 + \eta_2K_1) & -(\xi_1\nu_1 + \eta_1K_1) & 0 & 0 \\ (\xi_2\nu_2 + \eta_2K_2) & -(\xi_1\nu_2 + \eta_1K_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\xi_2\nu_1 + \eta_2K_1) & -(\xi_1\nu_1 + \eta_1K_1) \\ 0 & 0 & (\xi_2\nu_2 + \eta_2K_2) & -(\xi_1\nu_2 + \eta_1K_2) \end{pmatrix}$$

ya que $\left\{\sigma_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{Pauli} & 0 \\ 0 & \sigma_{Pauli} \end{pmatrix} \right\}$ mientras que

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad y \quad \chi = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$ resulta

$$B_3^0(\psi,\chi) = (-\xi_1\nu_2 + \xi_2\nu_1 - \eta_1k_2 + \eta_2k_1);$$
$$B_3^1(\psi,\chi) = (-\xi_1\nu_1 + \xi_2\nu_2 - \eta_1k_1 + \eta_2k_2);$$
$$B_3^2(\psi,\chi) = -i(\xi_1\nu_1 + \xi_2\nu_2 + \eta_1k_1 + \eta_2k_2);$$
$$B_3^3(\psi,\chi) = (\xi_1\nu_2 + \xi_2\nu_1 + \eta_1k_2 + \eta_2k_1).$$

sin embargo $B_3(\psi,\chi)$ también puede escribirse como

$$B_3(\psi,\chi) = 2\left\{\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\varepsilon\ \chi\psi^T\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\varepsilon\ \chi\psi^T\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix} +\right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\varepsilon\ \chi\psi^T\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\varepsilon\ \chi\psi^T\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right\} \text{ donde}$$

$$\varepsilon\ \chi\psi^T = \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\nu_1\\\nu_2\end{pmatrix}(\xi_1\xi_2\ \eta_1\eta_2) = \begin{pmatrix}\nu_2\xi_1 & \nu_2\xi_2 & \nu_2\eta_1 & \nu_2\eta_2\\ -\nu_1\xi_1 & -\nu_1\xi_2 & -\nu_1\eta_1 & -\nu_1\eta_2\\ -k_2\xi_1 & -k_2\xi_2 & -k_2\eta_1 & -k_2\eta_2\\ k_1\xi_1 & k_1\xi_2 & k_1\eta_1 & k_1\eta_2\end{pmatrix}$$

por lo tanto se puede concluir que

$B_3(\psi,\chi) = B_3^{\alpha}(\psi,\chi)\sigma_{\alpha} = 2(\tau_{\uparrow}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{\uparrow} - \tau_{\downarrow}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{\downarrow} - \tau_{+}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{-} +$
$\tau_{-}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{+})$; por un mecanismo análogo se obtienen expresiones para el resto de los índices por lo que se resume el siguiente cuadro;

$$B_0(\psi,\chi) = -2(\tau_{+}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{-} + \tau_{\downarrow}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{\downarrow} + \tau_{\uparrow}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{\uparrow} + \tau_{-}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{+})$$

$$B_1(\psi,\chi) = 2(\tau_{\uparrow}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{-} + \tau_{-}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{\downarrow} + \tau_{\downarrow}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{+} + \tau_{+}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{\uparrow})$$

$$B_2(\psi,\chi) = 2i(\tau_{+}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{\uparrow} - \tau_{-}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{\downarrow} - \tau_{\uparrow}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{-} + \tau_{\downarrow}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{+})$$

$$B_3(\psi,\chi) = 2(\tau_{\uparrow}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{\uparrow} - \tau_{\downarrow}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{\downarrow} - \tau_{+}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{-} + \tau_{-}\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_{+})$$

Para proseguir el desarrollo de la comprobación necesitaremos utilizar algunas propiedades de los operadores involucrados;

$$\tau_\pm\tau_3 = \mp\ \tau_\pm \qquad \tau_3\tau_\pm = \pm\ \tau_\pm$$

$$\tau_{\uparrow\downarrow}\tau_3 = \pm\ \tau_{\uparrow\downarrow} \qquad \tau_3\tau_{\uparrow\downarrow} = \pm\ \tau_{\uparrow\downarrow}$$

$$\tau_2\tau_\pm = \pm\ i\tau_{\downarrow\uparrow} \qquad \tau_\pm\tau_2 = \pm\ i\tau_{\uparrow\downarrow}$$

$$\tau_2\tau_{\uparrow\downarrow} = \pm\ i\tau_\mp \qquad \tau_{\uparrow\downarrow}\tau_2 = \mp\ i\tau_\pm$$

$$\tau_1\tau_\pm = \tau_{\downarrow\uparrow} \qquad \tau_\pm\tau_1 = \tau_{\uparrow\downarrow}$$

$$\tau_1\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_\mp \qquad \tau_{\uparrow\downarrow}\tau_1 = \tau_\pm\ .$$

Ahora bien, sabemos que $M_1(\psi,\chi) = 4\tau_1\tau_3(\varepsilon\ \chi\psi^T)\tau_3$ ya que en este caso se está usando el grupo de norma SU(2) por lo tanto;

$$\varepsilon\ \chi\psi^T = \frac{1}{4}\ \tau_3M_0^T(\psi,\chi)\tau_3 = \frac{-i}{4}\ \tau_3M_1^T(\psi,\chi)\tau_2 = \frac{-i}{4}\ \tau_3M_2^T(\psi,\chi)\tau_1$$

$$= \frac{1}{4}\ \tau_3M_3^T(\psi,\chi)\ .$$

Substituyendo el valor de $\varepsilon\ \chi\psi^T$ para todos los mapas multivectoriales tenemos que

$$B_0(\psi,\chi) = -2(\tau_+\tau_3M_0^T(\psi,\chi)\tau_3\tau_- + \tau_\downarrow\tau_3M_0^T(\psi,\chi)\tau_3\tau_\downarrow + \tau_\uparrow\tau_3M_0^T(\psi,\chi)\tau_3\tau_\uparrow +$$

$\tau_-\tau_3M_0^T(\psi,\chi)\tau_3\tau_+)$, usando las propiedades de los operadores obtenemos

$$B_0(\psi,\chi) = -\ \frac{1}{2}\ (\tau_+M_0^T(\psi,\chi)\tau_- + \tau_\downarrow M_0^T(\psi,\chi)\tau_\downarrow + \tau_\uparrow M_0^T(\psi,\chi)\tau_\uparrow + \tau_-M_0^T(\psi,\chi)\tau_+)$$

En forma semejante

$$B_1(\psi,\chi) = \frac{-i}{2}\ (\tau_\uparrow\tau_3M_1^T(\psi,\chi)\tau_2\tau_- + \tau_-\tau_3\ M_1^T(\psi,\chi)\tau_2\tau_\downarrow + \tau_\downarrow\tau_3M_1^T(\psi,\chi)\tau_2\tau_+$$

$$+\ \tau_+\tau_3M_1^T(\psi,\chi)\tau_2\tau_\uparrow)$$ equivale a

$$B_1(\psi,\chi) = -\frac{1}{2}\left(\tau_\uparrow M_1^T(\psi,\chi)\tau_\uparrow + \tau_- M_1^T(\psi,\chi)\tau_+ + \tau_\downarrow M_1^T(\psi,\chi)\tau_\downarrow + \tau_+ M_1^T(\psi,\chi)\tau_-\right).$$

$$B_2(\psi,\chi) = \frac{1}{2}\left(\tau_+\tau_3 M_2^T(\psi,\chi)\tau_1\tau_\uparrow - \tau_-\tau_3 M_2^T(\psi,\chi)\tau_1\tau_\downarrow - \tau_\uparrow\tau_3 M_2^T(\psi,\chi)\tau_1\tau_- + \tau_\downarrow\tau_3 M_2^T(\psi,\chi)\tau_1\tau_+\right) \text{ equivale a}$$

$$B_2(\psi,\chi) = -\frac{1}{2}\left(\tau_+ M_2^T(\psi,\chi)\tau_- + \tau_- M_2^T(\psi,\chi)\tau_+ + \tau_\uparrow M_2^T(\psi,\chi)\tau_\uparrow + \tau_\downarrow M_2^T(\psi,\chi)\tau_\downarrow\right).$$

$$B_3(\psi,\chi) = \frac{1}{2}\left(\tau_\uparrow\tau_3 M_3^T(\psi,\chi)\tau_\uparrow - \tau_\downarrow\tau_3 M_3^T(\psi,\chi)\tau_\downarrow - \tau_+\tau_3 M_3^T(\psi,\chi)\tau_- + \tau_-\tau_3 M_3^T(\psi,\chi)\tau_+\right) \text{ equivale a}$$

$$B_3(\psi,\chi) = -\frac{1}{2}\left(\tau_\uparrow M_3^T(\psi,\chi)\tau_\uparrow + \tau_\downarrow M_3^T(\psi,\chi)\tau_\downarrow + \tau_+ M_3^T(\psi,\chi)\tau_- + \tau_- M_3^T(\psi,\chi)\tau_+\right),$$

el teorema quedó probado.

Los comentarios necesarios a este teorema son muy diversos;

a) Los nombres asignados a los operadores multivectoriales que permiten extraer al subálgebra cuaterniónica contenida en $\mathcal{G}(1,3)$ son indicativos de su uso al ser aplicados por la derecha y/o izquierda a un multivector o un ideal del mismo.

i) $\tau_{\uparrow/\downarrow}$ es el operador que extrae la parte superior (inferior) del multivector o ideal multivectorial al que se aplica bajo la métrica espinorial anulando el sector restante (esto equivale a una clasificación bajo algún espacio isotópico). El efecto de este operador es el mismo ya sea que se aplique hacia la derecha o a la izquierda.

ii) $\tau_{+/-}$ es el operador escalón hacia arriba o abajo con aplicacion de una métrica espinorial. El efecto de este operador depende de su forma de aplicación;

ii.1) τ_+ es un operador de subida en el isoespín cuando se aplica sobre multivectores e ideales multivectoriales a la izquierda.

τ_+ es un operador de bajada en el isoespín cuando se aplica sobre multivectores e ideales multivectoriales a la derecha.

ii.2) τ_- es un operador de bajada en el isoespín cuando se aplica sobre multivectores e ideales multivectoriales a la izquierda.

τ_- es un operador de subida en el isoespín cuando se aplica sobre multivectores e ideales multivectoriales a la derecha.

Bajo este enfoque la expresión II.C.2) al ser aplicada a un multivector o ideal multivectorial por la derecha o izquierda los transforman de forma tal que dos términos ($\tau_+ \; \varepsilon \; \chi\psi^T\tau_- + \tau_\downarrow \; \varepsilon \; \chi\psi^T\tau_\downarrow$) solamente tienen componente inferior en el isoespín (uno de ellos se mapea bajo la métrica espinorial de la parte inferior del objeto matemático al que se aplica, el otro se mapeó bajo la misma métrica a partir de la superior) mientras que los términos restantes solamente tienen componente superior en el isoespin (bajo la misma construcción anterior).

b) Los operadores $\tau_{+/-}$ y $\tau_{\uparrow/\downarrow}$ están escritos como combinación lineal de dos representaciones cuaterniónicas con lo que resulta interesante observar que para extraer la parte cuaterniónica de un multivector se usan proyectores que a su vez están incluídos en un álgebra cuaterniónica; esto equivale a tener una estructura

II.C.3) $$m'_k = \sum_{i\,j} m_i M_k m_j$$

donde M es un multivector en $\mathcal{G}(1,3)$; $m_{i,j}$ son proyectores con representación cuaterniónica y m'_k será un cuaternión más. Las expresiones intermedias dadas en el recuadro de la comprobación serán válidas para cualquier grupo de norma usado; pero a menos que se hubiera elegido (como es el caso) a SU(2), al introducir el mapa M no se hubiera logrado la sencillez dada en II.C.2).

c) Gracias a que en este caso el grupo de norma SU(2) conmuta con la subálgebra cuaterniónica de $\mathcal{C}(1,3)$; el mapa obtenido al proyectar a cuaterniones el mapa multivectorial $M_\beta(\psi,\chi)$ para SU(2) tendrá un análisis y propiedades simétricas para el índice de norma y el de Lorentz.

II. D. MAPA INVERSO.

Se ha mostrado como un espinor ψ define 16 coeficientes escalares $M^\alpha_\beta(\psi,\psi)$ para cada índice isotópico a través del mapa extendido de Cartan y mediante ellos un multivector $M_\beta(\psi,\psi) = M^\alpha_\beta(\psi,\psi)\Gamma_\alpha$, en esta sección se emprenderá el camino contrario para garantizar la autoconsistencia del razonamiento global.

Siguiendo el razonamiento propuesto por J.P. Crawford[7] se propone que el espinor original ψ puede ser construido como;

II.D.1) $$\psi_\beta = \frac{e^{-i\varphi}}{4N} M^\alpha_\beta(\psi,\psi)\Gamma_\alpha \eta$$

donde 4N es una constante de normalización, φ es una fase global, η un espinor arbitrario constante, $M^\alpha_\beta(\psi,\psi)$ la imagen del mapa extendido de Cartan con índices espacio-temporales e isotópicos, finalmente $\Gamma_i \in \mathcal{C}(1,3)$.

Cuando el conjunto de 16 coeficientes $M^\alpha_\beta(\psi,\psi)$ por cada dirección isotópica forman un álgebra biespinorial de Dirac (como ocurre cuando se usa el grupo de norma SU(2) o SU(3)) es aplicable el teorema de factorización e inversión del autor, en caso contrario el desarrollo II.D.1 no puede factorizarse como se muestra en el apéndice (A.15) pero es perfectamente válido.

Los escalares $M^\alpha_\beta(\psi,\psi)$ forman un álgebra biespinorial de Dirac si

II.D.2) $$T_\mu T^\mu = \sigma^2 + \pi^2$$
$$K_\mu K^\mu = -J_\mu J^\mu$$
$$J_\mu K^\mu = 0$$

$$\Sigma_{\mu\nu} = (\sigma^2 + \pi^2)^{-1}\left[\sigma\, \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} J^{\rho} K^{\tau} - \pi (J_{\mu}K_{\nu} - J_{\nu}K_{\mu})\right]$$

cuando $\sigma = \psi^T \phi_\beta$; $\pi = \psi^T \gamma_5 \phi_\beta$; $J_\mu = \psi^T \gamma_\mu \phi_\beta$; $K_\mu = \psi^T \gamma_5 \gamma_\mu \phi_\beta$

$$\Sigma_{\mu\nu} = \psi^T \gamma_{\mu\nu} \phi_\beta$$

donde $\phi_\beta = (\overline{\lambda}_\beta\ \varepsilon\ \psi)$ siendo λ_β un generador de algún grupo de Lie mientras que $\{1, \gamma_\mu, \gamma_{\mu\nu}, \gamma_5\gamma_\mu, \gamma_5\} \in \Gamma_1 \in \mathcal{C}(1,3)$ y ε es la métrica espinorial.

Las ecuaciones II.D.2) forman parte de las llamadas identidades de Fierz y es posible probar que cuando el mapa multivectorial de Cartan está construido usando SU(2) y SU(3) las ecuaciones son satisfechas, razón por la cual en estos casos particulares es posible escribir el espinor ψ mediante los mapas de acuerdo con II.D.1), además la expresión se factoriza de acuerdo con A.15) (siempre y cuando no se caiga en las situaciones especiales que trata el autor).

Para ilustrar esta sección tomaremos el caso especial del mapa extendido de Cartan con grupo de norma SU(2) $M_{\beta}^{\sim}(\psi,\psi)$ donde

$\psi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ y se obtiene lo siguiente para cada dirección isotópica;

II.D.3) $\beta = 0$

$$\psi'_0 = \frac{e^{-i\varphi}}{4N} \Big[2(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1) + (\xi_1^2-\xi_2^2+\eta_1^2-\eta_2^2)\gamma_1 + i(\xi_1^2+\xi_2^2+\eta_1^2+\eta_1^2)\gamma_2 -$$

$$-2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2)\gamma_3\Big]\Big[1 - \frac{i(\xi_1\xi_2- \eta_1\eta_2)}{2(\xi_1\eta_2- \xi_2\eta_1)}\gamma_{012} - \frac{(-\xi_1^2-\xi_2^2+\eta_1^2+\eta_2^2)}{2(\xi_1\eta_2- \xi_2\eta_1)}\gamma_{013} -$$

$$- \frac{i(\xi_2^2-\xi_1^2+\eta_1^2-\eta_2^2)}{2(\xi_1\eta_2- \xi_2\eta_1)}\gamma_{013}\Big]\eta ,$$ donde se ha usado el teorema

de la factorización de Crawford[7] gracias a que $\sigma = 2(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)$ se supone no nulo (el término π es nulo para todo espinor ψ) Bajo la representación irreducible quiral para las matrices de Dirac y sus productos se optiene

II.D.4) $$\psi'_0 = \frac{e^{-i\psi}}{4N} \begin{pmatrix} 4\xi_1\eta_2 & -4\xi_1\eta_1 & 4\xi_1\xi_2 & -4\xi_1^2 \\ 4\xi_2\eta_2 & -4\xi_2\eta_1 & 4\xi_2^2 & -4\xi_1\xi_2 \\ -4\eta_1\eta_2 & 4\eta_1^2 & -4\xi_2\eta_1 & 4\xi_1\eta_1 \\ -4\eta_2^2 & 4\eta_1\eta_2 & -4\xi_2\eta_2 & 4\xi_1\eta_2 \end{pmatrix} \eta ,$$

para relacionar ψ'_0 con ψ se busca el espinor η adecuado y lo más que se logra es reconocer que ψ'_0 es un espinor rotado $\pi/2$ en el plano definido por σ_3 (el número de elecciones posibles es infinito).

$\beta = 1$

En este caso tanto σ como π son nulos para cualquier espinor ψ, por lo que no es posible usar el teorema de la factorización.

II.D.5)

$$\psi_1' = \frac{e^{-i\varphi}}{4N}\Big[2(\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2)\gamma_0 + 2(\xi_1\eta_1-\xi_2\eta_2)\gamma_1 - 2i(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2)\gamma_2 -$$

$$-2(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1)\gamma_3 + (-\xi_1^2+\xi_2^2-\eta_1^2+\eta_2^2)\gamma_{01} + (-i\xi_1^2-i\xi_2^2-i\eta_1^2-i\eta_2^2)\gamma_{02} +$$

$$+2(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)\gamma_{03} + 2i(\eta_1\eta_2-\xi_1\xi_2)\gamma_{12} + (\xi_1^2+\xi_2^2-\eta_1^2-\eta_2^2)\gamma_{13} +$$

$$+(i\xi_1^2-i\xi_2^2-i\eta_1^2+i\eta_2^2)\gamma_{23}\Big]\eta$$

que bajo la representación irreducible quiral para las matrices de Dirac y sus productos significa que

$$\text{II.D.6)}\qquad \psi_1' = \frac{e^{-i\varphi}}{4N}\begin{pmatrix} 4\eta_1\eta_2 & -4\eta_1^2 & 4\xi_2\eta_1 & -4\xi_1\eta_1 \\ 4\eta_2^2 & -4\eta_1\eta_2 & 4\xi_2\eta_2 & -4\xi_1\eta_2 \\ -4\xi_1\eta_2 & 4\xi_1\eta_1 & -4\xi_1\xi_2 & 4\xi_1^2 \\ -4\xi_2\eta_2 & 4\xi_2\eta_1 & -4\xi_2^2 & 4\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}\eta ,$$

bajo una única elección del espinor constante de referencia η se obtiene que $\psi_1' = \tau_1\psi_0'$.

$\beta = 2$

En este caso $\sigma = \pi = J_\mu = 0$ para todo índice μ y espinor ψ, por que no es posible usar el teorema de la factorización.

$$\text{II.D.7)}\qquad \psi_2' = \frac{e^{-i\varphi}}{4N}\Big[i(-\xi_1^2+\xi_2^2+\eta_1^2-\eta_2^2)\gamma_{01} + (\xi_1^2+\xi_2^2-\eta_1^2-\eta_2^2)\gamma_{02} +$$

$$2i(\xi_1\xi_2-\eta_2\eta_1)\gamma_{03} + 2(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)\gamma_{12} + i(\xi_1^2+\xi_2^2+\eta_1^2+\eta_2^2)\gamma_{13} + (-\xi_1^2+\xi_2^2-\eta_1^2+\eta_2^2)$$

$$+ 2(\eta_2\xi_1+\eta_1\xi_2)\gamma_{012} + 2i(\xi_2\eta_2+\xi_1\eta_1)\gamma_{013} + 2(\xi_2\eta_2-\xi_1\eta_1)\gamma_{023} +$$

$$+ 2(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)\gamma_{123}\Big]\eta$$

que bajo la representación irreducible

quiral para las matrices de Dirac y sus productos significa que

$$\text{II.D.8)}\quad \psi_2' = \frac{e^{-i\varphi}}{4N} \begin{pmatrix} -4i\eta_1\eta_2 & 4i\eta_1^2 & -4i\xi_2\eta_1 & 4i\xi_1\eta_1 \\ -4i\eta_2^2 & 4i\eta_1\eta_2 & -4i\xi_2\eta_2 & 4i\xi_1\eta_2 \\ -4i\xi_1\eta_2 & 4i\xi_1\eta_1 & -4i\xi_1\xi_2 & 4i\xi_1^2 \\ -4i\xi_2\eta_2 & 4i\xi_2\eta_1 & -4i\xi_2^2 & 4i\xi_1\xi_2 \end{pmatrix} \eta ,$$

bajo una única elección del espinor constante de referencia η se obtiene que $\psi_2' = \tau_2\psi_0'$.

$\beta = 3$

$$\text{II.D.9)}\quad \psi_3' = \frac{e^{-i\varphi}}{4N} \Big[2(\eta_2\xi_1-\xi_2\eta_1)\gamma_5 + (\xi_1^2+\eta_2^2-\xi_2^2-\eta_1^2)\gamma_1 + i(\xi_1^2+\xi_2^2-\eta_1^2-\eta_2^2)\gamma_2 +$$

$$+ 2(\eta_2\eta_1-\xi_1\xi_2)\gamma_3\Big]\Big[1 - \frac{(-i\xi_1^2+i\xi_2^2-i\eta_1^2+i\eta_2^2)}{2(\eta_2\xi_1-\xi_2\eta_1)}\gamma_1 - \frac{(\xi_1^2+\xi_2^2+\eta_1^2+\eta_2^2)}{2(\eta_2\xi_1-\xi_2\eta_1)}\gamma_2 -$$

$$\frac{i(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)}{(\eta_2\xi_1-\xi_2\eta_1)}\gamma_3\Big]\eta$$, donde se ha usado el teorema de factorización de Crawford[7] gracias a que $\pi = 2i(\eta_2\xi_1-\xi_2\eta_1)$ se supone no nulo (el término σ es nulo para todo espinor ψ). Bajo la representación quiral irreducible para las matrices de Dirac

II.D.10) $$\psi_3' = \frac{e^{-i\varphi}}{4N} \begin{bmatrix} 4\xi_1\eta_2 & -4\xi_1\eta_1 & 4\xi_1\xi_2 & -4\xi_1^2 \\ -4\xi_2\eta_2 & -4\xi_2\eta_1 & 4\xi_2^2 & -4\xi_1\xi_2 \\ 4\eta_1\eta_2 & -4\eta_1^2 & 4\xi_2\eta_1 & -4\xi_1\eta_1 \\ 4\eta_2^2 & -4\eta_1\eta_2 & -4\xi_2\eta_2 & -4\xi_1\eta_2 \end{bmatrix} \eta ,$$

bajo una única elección del espinor constante arbitrario η se obtiene que $\psi_3' = \tau_3\psi_0'$.

Resumiendo; el espinor original ψ que mediante el mapa extendido de Cartan define un multivector $M_\beta(\psi,\psi)$ para cada dirección isotópica queda transformado en un juego de espinores ψ_β después de aplicar el mapa inverso, que se relacionan con el álgebra de Lie del grupo SU(2) de norma (el grupo de norma aplicado en el mapa de Cartan extendido reaparece después del mapa inverso como propiedad de los campos espinoriales mismos). Este resultado no es sorprendente ya que la expresión II.D.1) puede ser escrita como

II.D.11) $$\psi_\beta = \frac{e^{-i\varphi}}{4N} M_\beta(\psi,\psi)\eta ,$$ donde $M_\beta(\psi,\psi)$ es el mapa multivectorial de Cartan en la dirección isotópica β, usando el teorema II.C.1) sabemos que $M_\beta(\psi,\psi) = \tau_\beta M_0(\psi,\psi)$ por lo que II.D.11) se transforma a;

$$\psi_\beta = \frac{e^{-i\varphi}}{4N} \tau_\beta M_0(\psi,\psi)\eta = \tau_\beta \left[\frac{e^{-i\varphi}}{4N} M_0(\psi,\psi)\eta \right]$$ o sea

II.D.12) $$\psi_\beta = \tau_\beta\psi_0 ,$$ con τ_β generador de SU(2).

Para el caso del grupo de norma SU(3) el procedimiento es el mismo y los resultados análogos, con algunas salvedades ya que es necesario usar una representación reducible de las matrices de Dirac y la métrica espinorial se define de tal forma que garantice la biyección $\overline{\psi} = (-1)^{2n}\psi$ y extendiendo el mapa $M_o(\psi,\psi)$ de manera que a todo escalar le corresponda un espinor de Weyl. El resultado final (bajo una rotación de ejes) conduce a

$$\psi_\beta = \frac{e^{-i\varphi}}{4N} M^\alpha_\beta(\psi,\psi)\Gamma_\alpha\eta = \frac{e^{-i\varphi}}{4N} M_\beta(\psi,\psi)\eta$$

$$\psi_\beta = \frac{e^{-i\varphi}}{4N} \lambda_\beta M_o(\psi,\psi)\eta = \lambda_\beta\left[\frac{e^{-i\varphi}}{4N} M_o(\psi,\psi)\eta \right]$$

finalmente

II.D.13) $\psi_\beta = \lambda_\beta\psi_o$, donde λ_β son los generadores de SU(3).

Comentarios Finales.

Para terminar este capítulo es pertinente hacer algunos comentarios adicionales;

a) El análisis que se realizó en este capítulo se ejemplificó en dos grupos de Lie sencillos con claro uso en modelos físicos ampliamente probados; SU(2)xU(1) (interacciones electrodébiles) y SU(3) (cromodinámica cuántica), sin embargo el procedimiento de construcción de la estructura matemática es lo suficientemente amplio para incluir otros grupos de norma siempre y cuando tengan representación multivectorial, por lo que este trabajo puede extenderse a algunos modelos gran unificadores. Asímismo es factible variar el grupo $\mathcal{G}(1,3)$ asociado al espacio-tiempo si así se deseara.

b) En este trabajo se adoptó la definición de un espinor como ideal mínimo multivectorial (ver apéndice) y por lo tanto no se distinguió entre pares de espinores o biespinores. Es conocido que la diferencia entre ambos estriba en sus propiedades de transformación de Lorentz e inversión espacial (solamente los biespinores transforman entre sí ante esta operación), más aún existe la alternativa de que los multivectores que se aplican sobre pares de espinores sean representados matricialmente en forma substancialmente diferente a aquellos que actúan sobre biespinores; este punto de vista tiene un fuerte significado geométrico y se sustenta en que la ecuación de Dirac escrita en su forma más natural (que pone de manifiesto inmediatamente su invariancia relativista) involucra un biespinor y acepta representación quiral para las matrices de Dirac[15]. Los generadores multivectoriales del grupo SU(2) localmente isomorfo al grupo de las rotaciones espaciales en tres dimensiones para la representación quiral tienen la forma $\gamma^{g}_{0i} = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}$ que al ser aplicados sobre el biespinor $\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}$ asocia una quiralidad distinta para cada espinor de Weyl (físicamente ξ se identifica como un espinor de Weyl de quiralidad derecha, mientras que $\bar{\eta}$ es de quiralidad izquierda) y se considera que la representación quiral es adecuada para los multivectores que definen a los ideales izquierdos llamados biespinores. Si se buscara una representación adecuada para los multivectores cuyos ideales mínimos son pares de espinores $\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ y bajo asociación de ideas anterior propondríamos que en este caso los generadores del grupo SU(2) tuvieran la forma $\gamma_{0i} = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$ con lo que ψ queda definido mediante espinores de Weyl de su misma quiralidad (izquierda o derecha), a nivel de representación matricialesta última correspondería a la representación del multivector dual en representación quiral ya que $\gamma^{g}_{ij} = \begin{pmatrix} -i\sigma_k & 0 \\ 0 & -i\sigma_k \end{pmatrix}$; es decir γ_{0i} en la representación asociada a pares de espinor sería indistinguible a i veces el multivector dual $\gamma_{ij} = \gamma_5 \gamma_{0i}$ en la representación quiral (la transformación de dualidad es una operación de simetría en el álgebra multivectorial dada por el pseudoescalar del álgebra y expresada convencionalmente como γ_5).

Cuando se habla de un espinor como ideal multivectorial se está incluyendo en esta concepción todas las representaciones irreducibles n/2 del grupo propio de Lorentz (aún del extendido por paridad). Si se trata de 2^2 espinores solo es posible tener pares de espinores o biespinores (espacios euclídeos de cuatro a cinco dimensiones); cuando la dimensionalidad del espacio aumenta las posibilidades se incrementan rápidamente y no tendría sentido "en este trabajo" buscar representaciones matriciales para cada caso particular. Bajo este enfoque y asegurando la autoconsistencia de una elección dada sobre el tipo de ideal mínimo ante transformación de Lorentz extendida que se desea, se usó en esta sección (y se continuará con esta idea) la representación multivectorial quiral a sabiendas que solamente existen dos opciones de nuestro interés; si el ideal mínimo es un biespinor bajo una única métrica espinorial, el mapa de Cartan multivectorial conserva su estructura y la representación es adecuada al tipo de espinor elegido, si el ideal mínimo fuese un par de espinores "bajo una única métrica espinorial" el mapa de Cartan multivectorial conserva su estructura y la representación adecuada al tipo de espinor elegido se obtiene dualizando la quiral (la matriz que bajo la representación quiral corresponda al multivector Γ_i bajo la representación asociada a pares de espinores corresponderá el multivector dual $\gamma_5\Gamma_i$).

En concreto, la representación matricial de los multivectores está asociada a las propiedades de transformación ante el grupo propio de Lorentz extendido por paridad de sus ideales mínimos (espinores) y siempre existirá la posibilidad de relacionarlos entre sí mediante alguna transformación. De cualquier forma la estructura del mapa multivectorial y sus propiedades no se alteran por el efecto de la representación matricial usada, o por las propiedades de transformación del ideal mínimo multivectorial ante el grupo propio de Lorentz extendido por paridad.

c) Es importante discutir las propieades del transformación de II.D.1) ante el grupo de Lorentz propio, en el apéndice se muestra que las formas bilineales que siguen un álgebra biespinorial usan un espinor que transforma como $\psi \longrightarrow S\psi$ cuando $S \in SO(3,1)$. La única diferencia entre la estructura estudiada por P. Crawford[7] y la que se presenta en esta sección estriba en el conjunto de coeficientes $(\psi^T\Gamma_1(\lambda_\beta\bar{\psi})^*)$ que pueden formar un álgebra biespinorial de Dirac (cuando menos ocurre para los grupos de norma SU(2) y SU(3)) pero no transforman como un escalar ante la acción del grupo propio de Lorentz, la razón es sencilla M^α_β no se construye como observable físico puesto que en lugar de usar la conjugada de Dirac del espinor ψ se usa su transpuesta, ésto se deriva del origen mismo del mapa extendido de Cartan que se generaliza del dado en II.6). Para que ψ_β de II.D.1) transforme como un espinor ante SO(3,1) bastará con introducir la conjugada de Dirac de ψ en lugar de su transpuesta sin que por ésto se altere la estructura general del mapa.

d) Gracias a que el mapa II.B.1) se construyó conservando la linealidad y simetría del original es posible garantizar que

$$\text{II.D.14)}\quad DM_\beta(\psi,\psi) = 2D'M_\beta(\psi,\psi) = 2M_\beta(D'\psi,\psi) = 2M_\beta(\psi,D'\psi)$$

donde D' es el operador diferencial que actúa sobre el espacio espinorial asociado a D que es un operador diferencial en el espacio de los multivectores. En general se garantiza que en forma análoga a II.4) se puede escribir;

$$\text{II.D.15)}\quad \underline{O}M_\beta(\psi,\psi) = M_\beta(\tilde{\underline{O}}\psi,\psi) = M_\beta(\psi,\tilde{\underline{O}}\psi)$$

donde $\underline{O}$ es un operador (diferencial o no) en el espacio multivectorial, mientras que $\tilde{\underline{O}}$ es su equivalente actuando sobre el espacio espinorial.

e) El último comentario de este capítulo tiene como objetivo establecer las condiciones bajo las cuales se puede expresar un multivector cualquiera (que en lo sucesivo representaremos como γ_M) según la estructura dada en el teorema II.C.1), con lo cual se puede considerar construído a partir de un determinado espinor ψ mediante el mapa multivectorial de Cartan en una dirección isotópica (bajo un grupo de Lie).

Iniciaremos el análisis con el mapa multivectorial de Cartan sin dirección de norma $M_o(\psi,\psi)$ (el resto de los mapas se podrá construir a partir de él mediante el teorema II.C.1)) cuya estructura nos permite garantizar que de los 16 posibles términos del desarrollo $M_o(\psi,\psi) = M_o^{\alpha}(\psi,\psi)\Gamma_{\alpha}$ en $\mathscr{C}(1,3)$ seis de ellos serán nulos, bajo la representación quiral para las matrices de Dirac los términos nulos corresponden a γ_0 , γ_{ij} , γ_{ijk} , γ_5 con i,j,k = 1,2,3. Cuando se construye el multivector $M_{\beta}(\psi,\psi) = \lambda_{\beta}M_o(\psi,\psi)$ la forma del generador λ_{β} para el grupo de Lie elegido será determinante en la estructura del mismo conservando o no la cantidad de términos no nulos en el desarrollo.

Es así como si λ_{β} corresponde a los generadores del grupo SU(2) (γ_0 , $\gamma_0\gamma_5$ e $i\gamma_5$) los coeficientes nulos corresponderán sucesivamente a los siguientes términos; (escalar, γ_{0ij} , γ_{ijk} , γ_5 con i,j,k = 1,2,3) para β = 1, (escalar, γ_0 , γ_i , γ_5 con i = 1,2,3) para β = 2, (escalar, γ_0 , γ_{0i} , γ_{ijk} con i,j,k = 1,2,3) para β = 3. Donde todos los coeficientes (nulos o no) se obtienen a partir de las forma bilineales II.B.1). Cuando se usan grupos de Lie cuyos generadores tienen representación multivectorial no homogénea (como ocurre con SU(3)) el multivector $M_{\beta}(\psi,\psi)$ tendrá más de 10 términos no nulos en su desarrollo (en SU(3) serán 15 para toda dirección isotópica) por lo que es de esperarse que todo multivector pueda ser considerado como el resultado de la aplicación del mapa extendido de Cartan multivectorial bajo una dirección isotópica, ya que siempre será posible garantizar que $\gamma_M = \sum_{\beta} A^{\beta}_{M,\psi}\lambda_{\beta}M_o(\psi,\psi) = \Lambda_{M,\psi}M_o(\psi,\psi)$ para algún conjunto λ_{β} que en el más general de los casos se tome como el correspondiente al grupo GL(n)[34].

Es así como en este capítulo se construyó un mapa multivectorial de Cartan (basado en la teoría sobre espinores del mismo autor) que bajo un espacio isotópico cualquiera (de hecho se analizaron como ejemplo los grupos SU(2) y SU(3)) y $\mathscr{C}(1,3)$ como simetría espaci-temporal, conmuta con los operadores físicos observables cuando es simétrico. Este mapa transforma $C^{2^n} \times C^{2^n}$ a $\mathcal{C}(1,3)$ aceptando espinores (ideales mínimos del álgebra de Clifford) de cualquier dimensión. Para implementar la transformación inversa se hizo uso del teorema reportado en la literatura por J.P. Crawford[7] para multivectores cuyos coeficientes corresponden a un álgebra biespinorial de Dirac (como nuestro caso no es el reportado en el mencionado artículo se debió demostrar que podía clasificarse como tal); finalmente se estudiaron las propiedades de la estructura matemática presentada, encontrando adicionalmente un mecanismo de proyección del mapa original a un caso particular reportado en la literatura bajo un análisis multivectorial profundo de las limitaciones y alcances de este último.

CAPITULO III
TRANSFORMACIONES GENERALIZADAS DE FIERZ. ANALISIS GEOMETRICO.

II.A.. INTRODUCCION.

Una de las aplicaciones que se le dará a la estructura matemática desarrollada en el Capítulo II es la de concederle caracter geométrico a las identidades de Fierz (tomaremos como referencia las reportadas por Y. Takahashi[31]) con lo cual se muestra la potencia del análisis multivectorial de los mapas extendidos de Cartan para interpretar y generalizar transformaciones útiles en los cálculos de amplitudes de transición para modelos de interacción de ciertos procesos físicos[1,9].

Es común que para modelar un fenómeno se proponga alguna interacción en particular que al ser traducida a un diagrama de Feynman produce una amplitud de transición ordenada de manera distinta a como se calcula normalmente en la literatura, de ahí que se deba reordenar la interacción propuesta para homologarla a la ya conocida. Es aquí donde se usan las transformaciones de Fierz, las más difundidas se refieren solo a algunos casos especiales de las interacciones electrodébiles (grupo de norma SU(2)) por lo que es importante generalizarlas a cualquier tipo de interacción (e indirectamente a cualquier grupo de norma).

La forma cuadrilineal general de los operadores de campo que intervienen en una amplitud de transiciones[32];

III.1) $Q_{ij}^{abcd} = \bar{\psi}_a \Gamma_i \psi_b \bar{\psi}_c \Gamma_j \psi_d$, donde ψ_i es la función de onda espinorial para el fermión i involucrado en el proceso y $\bar{\psi}_i$ es su conjugada de Dirac, mientras que $\Gamma_i \in \mathcal{C}(1,3)$. Cuando se intercambia el orden de las partículas es posible expander III.1) en una nueva base tal que;

III.2) $$Q_{ij}^{abcd} = -\sum F_{ijk\ell} Q_{k\ell}^{adcb}$$

donde el signo menos surge debido a que los operadores de campo fermiónicos anticonmutan, cuando $i = j$, $F_{ijk\ell}$ se reduce a F_{ik} que es conocida como matriz de Fierz .

Las identidades de Fierz también pueden ser usadas para obtener relaciones entre derivadas espacio-temporales de un espinor y un tensor (lo que significa que las cantidades físicas asociadas con el campo espinorial pueden espresarse en términos de corrientes y sus derivadas sin el conocimiento expreso de la dinámica del sistema).

Es conveniente mencionar que subsisten algunas diferencias de notación en la literatura ya que es común encontrar autores para los cuales las identidades de Fierz se definen sobre el álgebra de Clifford $\mathcal{C}(1,3)$ cuyos vectores base $A_{1,3}$ son las matrices gamma de Dirac y por lo tanto la expresión III.2) resulta ser derivada de ellas (de cualquier forma los resultados prácticos son equivalentes), de esta forma las identidades de Fierz básicas se escriben como[31];

III.3) $$\delta_{ab}\delta_{cd} = \frac{1}{4}\sum_{c=1}^{16}(\gamma_c)_{ad}(\gamma_c)_{cb}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kroenecker mientras que $\gamma_c \in \mathcal{C}(1,3)$ normalizadas como

$$Tr[\gamma_A\ ,\ \gamma_B) = 4\delta_{AB}\ ,$$

y los índices en letras latinas son espinoriales con lo que III.3) expresa el mismo rearreglo hecho en III.2) para los campos fermiónicos, es notable observar como se está usando implícitamente el formalismo Dirac-Kähler para representar matricialmente a los ideales mínimos de $\mathcal{C}(1,3)$ ya que cada columna de la matriz γ_c tiene asociado un índice espinorial (ver apéndice). Una expresión más general para III.3) sería

III.4) $$(\gamma_A)_{ab}(\gamma_B)_{cd} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \sum_{C,D} Tr[\gamma_C\gamma_A\gamma_D\gamma_B](\gamma_C)_{ad}(\gamma_D)_{cb}$$

de tal manera que calculando la traza del producto de las cuatro matrices se ha resuelto el problema para cualquier caso $\gamma_A, \gamma_B \in \mathcal{C}(1,3)$ (lo que por cierto es sumamente tedioso y largo), una vez que se ha especificado el rearreglo de las índices espinoriales resulta inútil y molesta su escritura por lo que en lo sucesivo se obviará.

Una vez que se ha calculado para cualquier caso la expresión III.4), que por cierto suele escribirse como

$$(\gamma_A)_{ab}(\gamma_B)_{cd} = \frac{1}{4} \sum_{C=1}^{16} (\gamma_A\gamma_C)_{ad}(\gamma_B\gamma_C)_{cb} \quad \text{o bien}$$

$$(\gamma_A)\ [\gamma_B] = \frac{1}{4} \sum_{C=1}^{16} (\gamma_A\gamma_C)[\gamma_B\gamma_C] \quad \text{para todo}$$

γ_A, γ_B, γ_C $\in \mathcal{C}(1,3)$, se derivan de este resultado las relaciones entre las corrientes hermitianas $J_\alpha = \bar{\psi}\Gamma_\alpha\psi$ con $\Gamma_\alpha \in \mathcal{C}(1,3)$ sobre el campo de los números complejos. Cuando se reconstruyó el espinor ψ hasta una fase mediante los coeficientes J_α (ver capítulo II y apéndice) se usaron algunas de estas relaciones mediante las cuales se definió un álgebra biespinorial de Dirac. Para reconstruir el espinor con su fase global incluida se tendrían que definir otras cantidades invariantes de norma $R_\mu = i\bar{\psi}^c\gamma_\mu\psi$ donde $\bar{\psi}^c$ es el espinor conjugado de carga del correspondiente conjugado de Dirac (para recuperar la fase global en el espinor construido usando el mapa multivectorial de Cartan M_β bastará con substituir ψ^T por $\bar{\psi}^c$ en la definición del mismo), las relaciones entre las corrientes J_μ y R_μ así como sus productos también fueron obtenidos por Y. Takahashi mediante las relaciones III.4).

III.B. PRODUCTO DE MAPAS MULTIVECTORIALES. DE CARTAN

En esta sección se analizará el producto de Clifford de los mapas multivectoriales de Cartan generados en el capítulo anterior con la finalidad de relacionarlo con las identidades de Fierz, en todos los casos particulares se desarrollarán corolarios de teoremas de este capítulo.

Corolario al Teorema II.C.1). El producto de Clifford de los mapas $M_1(\psi,\chi)$ de $C^{2^n} x C^{2^n} \longrightarrow \mathcal{C}(1,3)$ con simetría de norma del grupo generado por λ_1 está dado por:

III.B.1.. $M_i(\psi,\chi)M_j(\chi',\psi') = 4M_j(\psi,\psi')M_i(\chi',\chi)$ donde $M_j(\psi,\psi')$ es un escalar para cada dirección isotópica j dado como

III.B.2) $M_j(\psi,\psi') = \psi^T\lambda_j' \, \varepsilon \, \psi'$ con $\lambda_j' = \tau_3\lambda_j^T\tau_3$.

Prueba.

$$M_i(\psi,\chi)M_j(\chi',\psi') = (4\lambda_i\tau_3(\varepsilon \, \chi\psi^T)^T\tau_3)(4\lambda_j\tau_3(\varepsilon \, \psi'\chi'^T)^T\tau_3)$$

$$M_i(\psi,\chi)M_j(\chi',\psi') = 16\lambda_i\tau_3(\varepsilon \, \chi\psi^T)^T\tau_3\lambda_j\tau_3(\varepsilon \, \psi'\chi'^T)^T\tau_3$$

como $\tau_3^T = \tau_3$ y $\tau_3\lambda_j\tau_3 = (\tau_3\lambda_j^T\tau_3)^T$ entonces

$$M_i(\psi,\chi)M_j(\chi',\psi') = 16\lambda_i\tau_3(\varepsilon \, \chi\psi^T\tau_3\lambda_j^T\tau_3 \, \varepsilon \, \psi'\chi'^T)^T\tau_3$$ o sea

$$M_i(\psi,\chi)M_j(\chi',\psi') = 16\lambda_i\tau_3(\varepsilon \, \chi\psi^T\lambda_j' \, \varepsilon \, \psi'\chi'^T)^T\tau_3$$

$$M_i(\psi,\chi)M_j(\chi',\psi') = 16\lambda_i\tau_3(\psi^T\lambda_j' \, \varepsilon \, \psi')(\varepsilon \, \chi\chi'^T)^T\tau_3$$ finalmente

$$M_i(\psi,\chi)M_j(\chi',\psi') = 4M_j(\psi,\psi')M_i(\chi',\chi);$$

con lo que el corolario ha sido probado.

Este corolario es el caso más general que se puede presentar ya que está construido para cualquier grupo de norma y dimensión de los ideales mínimos o espinores ya que ψ, χ, ψ', $\chi' \in C^{2^n}$. Sin embargo se desea relacionar este tipo de productos en el álgebra de Clifford con las identidades de Fierz escritas en el espacio-tiempo físico, por lo que será conveniente analizar con mayor profundidad el caso C^4. Adicionalmente se estudiará el efecto que pudiera tener un grupo de norma específico como SU(2) en el uso del producto geométrico de mapas multivectoriales y su relación con las interacciones como teorías de norma (por ejemplo la interacción débil está relacionada con un grupo de norma SU(2)) en las que se emplean las identidades de Fierz.

Como ejemplo del corolario al teorema II.C.1), el producto de Clifford de los multivectores $M_i(\psi,\chi)$ para el grupo de norma SU(2) estará dado por;

$$M_i(\psi,\chi)M_j(\chi',\psi') = M_j(\psi,\psi')M_i(\chi',\chi)$$

donde $\psi,\ \chi,\ \chi',\ \psi',\ \in C^4$ y $M_j(\psi,\psi')$ es el escalar $\psi^T\tau_j\ \varepsilon\ \psi'$ que puede obtenerse con la combinación lineal de los coeficientes de la representación multivectorial para SU(2) dada por $\{1,\ \gamma_0,\ \gamma_0\gamma_5\ ,\ i\gamma_5\}$, de tal manera que;

III.B.3)

$$M_0(\psi,\psi') = \frac{1}{4}\ \{\overset{(1)}{M_0^9(\psi,\psi')} - \overset{(\gamma_0)}{M_1^1(\psi,\psi')} + \overset{(\gamma_{123})}{M_2^{14}(\psi,\psi')} + \overset{(\gamma_5)}{iM_3^{15}(\psi,\psi')}\}$$

$-\gamma_0$

$$M_1(\psi,\psi') = \frac{1}{4}\ \{\overset{(\gamma_0)}{-M_0^1(\psi,\psi')} + \overset{(1)}{M_1^0(\psi,\psi')} + \overset{(\gamma_5)}{M_2^{15}(\psi,\psi')} - \overset{(\gamma_{123})}{iM_3^{14}(\psi,\psi')}\}$$

γ_{123}

$$M_2(\psi,\psi') = \frac{1}{4}\ \{\overset{(\gamma_{123})}{M_0^{14}(\psi,\psi')} - \overset{(\gamma_5)}{M_1^{15}(\psi,\psi')} + \overset{(1)}{M_2^0(\psi,\psi')} + \overset{(\gamma_0)}{iM_3^1(\psi,\psi')}\}$$

$i\gamma_5$

$$M_3(\psi,\psi') = \frac{1}{4}\ \{\overset{(\gamma_5)}{iM_0^{15}(\psi,\psi')} - \overset{(\gamma_{123})}{iM_1^{14}(\psi;\psi')} - \overset{(\gamma_0)}{iM_2^1(\psi,\psi')} + \overset{(1)}{M_3^0(\psi,\psi')}\}$$

donde se colocó entre paréntesis el multivector cuyo coeficiente está en la parte inferior inmediata. Es claro que los escalares se relacionan entre sí mediante el álgebra SU(2) representada por $\{1,\ \gamma_0\ ,\ \gamma_0\gamma_5\ ,\ i\gamma_5\}$.

Corolario al teorema II.C.2). El producto de Clifford de los cuaterniones $B_j(\psi,\chi)$ con grupo de norma SU(2) está dado por

III.B.4) $$B_J(\psi,\chi)\circ B_K(\chi',\psi') = C_{JK}^{PQ}\ B_P^o(\psi,\psi')B_Q(\chi',\chi)$$

con $C^{JKPQ} = g^{JP}g^{KQ} + g^{JQ}g^{KP} - g^{JK}g^{PQ} - i\ \varepsilon^{JKPQ}$ donde

g^{JK} es el tensor métrico de Lorentz,

ϵ^{JKPQ} es el tensor permutación totalmente antisimétrico,

$\psi, \psi', \chi, \chi' \in C^4$ son ideales mínimos de los multivectores $\mathcal{G}(1,3)$.

Prueba.

Con la finalidad de ejemplificar el procedimiento a usar ya que es totalmente repetitivo, se tomará un caso particular

$$B_3(\psi,\chi)\circ B_1(\chi',\psi') = 4(\tau_\uparrow\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_\uparrow - \tau_\downarrow\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_\downarrow - \tau_+\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_-$$

$$+\tau_-\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_+)(\tau_\uparrow\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_- + \tau_-\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_\downarrow + \tau_\downarrow\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_+ + \tau_+\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_\uparrow)$$

gracias a las siguientes propiedades de los operadores τ

a) $\tau_\uparrow\tau_\uparrow = -\frac{1}{2}(1+\tau_3)$

b) $\tau_\uparrow\tau_+ = -\frac{1}{2}(\tau_1+i\tau_2)$

c) $\tau_\uparrow\tau_- = \tau_\uparrow\tau_\downarrow = 0$

d) $\tau_\downarrow\tau_- = -\frac{1}{2}(\tau_1-i\tau_2)$

e) $\tau_\downarrow\tau_\downarrow = -\frac{1}{2}(1-\tau_3)$

f) $\tau_\downarrow\tau_\uparrow = \tau_\downarrow\tau_+ = 0$

g) $\tau_-\tau_\uparrow = -\frac{1}{2}(\tau_1-i\tau_2)$

h) $\tau_-\tau_+ = -\frac{1}{2}(1-\tau_3)$

j) $\tau_-\tau_- = \tau_-\tau_\downarrow = 0$

k) $\tau_+\tau_- = -\frac{1}{2}(1+\tau_3)$

l) $\tau_+\tau_\downarrow = -\frac{1}{2}(\tau_1+i\tau_2)$

m) $\tau_+\tau_\uparrow = \tau_+\tau_+ = 0$

la expresión anterior se transforma a;

$$B_3(\psi,\chi)\circ B_1(\chi',\psi') =$$

$$4(\tau_\uparrow\ \varepsilon\ \chi\psi^T\left[-\tfrac{1}{2}\ (1+\tau_3)\right]\varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_- + 4\tau_\uparrow\ \varepsilon\ \chi\psi^T\left[-\tfrac{1}{2}\ (\tau_1+i\tau_2)\right]\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_\uparrow$$

$$-4\tau_\downarrow\ \varepsilon\ \chi\psi^T\left[-\tfrac{1}{2}\ (\tau_1-i\tau_2)\right]\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_\downarrow - 4\tau_\downarrow\ \varepsilon\ \chi\psi^T\left[-\tfrac{1}{2}\ (1-\tau_3)\right]\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_+ -$$

$$-4\tau_+\varepsilon\ \chi\psi^T\left[-\tfrac{1}{2}\ (\tau_1-i\tau_2)\right]\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_- - 4\tau_+\ \varepsilon\ \chi\psi^T\left[-\tfrac{1}{2}\ (1-\tau_3)\right]\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_\uparrow +$$

$$4\tau_-\ \varepsilon\ \chi\psi^T\left[-\tfrac{1}{2}\ (1+\tau_3)\right]\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_\downarrow + 4\tau_-\ \varepsilon\ \chi\psi^T\left[-\tfrac{1}{2}\ (\tau_1+i\tau_2)\right]\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_+\ ,$$

o bien

$$B_3(\psi,\chi)\circ B_1(\chi',\psi') = -2\tau_\uparrow\ \varepsilon\ \chi\psi^T\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_- - 2\tau_\uparrow\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_3\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_-$$

$$-2\tau_\uparrow\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_1\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_\uparrow - 2i\tau_\uparrow\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_2\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_\uparrow + 2\tau_\downarrow\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_1\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_\downarrow$$

$$-2\tau_+\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_3\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_\uparrow - 2\tau\ \ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_3\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_\downarrow + 2\tau_+\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_1\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_-$$

$$-2i\tau_+\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_2\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_- + 2\tau_+\ \varepsilon\ \chi\psi^T\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\ \tau_\uparrow - 2\tau_-\ \varepsilon\ \chi\psi^T\ \ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\ \tau_\downarrow$$

$$-2\tau_-\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_1\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_+ - 2i\tau_-\ \varepsilon\ \chi\psi^T\tau_2\ \varepsilon\ \psi'\chi'^T\tau_+\ .$$

Por otro lado como $B^o_j(\psi,\psi') = \psi^T\tau_j\ \varepsilon\ \psi'$ tenemos que

$$B_3(\psi,\chi)\circ B_1(\chi',\psi') = -2B^o_o(\psi,\psi')\tau_\uparrow\ \varepsilon\ \chi\chi'^T\tau_- - 2B^o_3(\psi,\psi')\tau_\uparrow\ \varepsilon\ \chi\chi'^T\tau_-$$

$$-2B^o_1(\psi,\psi')\tau_\uparrow\ \varepsilon\ \chi\chi'^T\tau_\uparrow - 2iB^o_2(\psi,\psi')\tau_\uparrow\ \varepsilon\ \chi\chi'^T\tau_\uparrow + 2B^o_1(\psi,\psi')\tau_\downarrow\ \varepsilon\ \chi\chi'^T\tau_\downarrow$$

$$-2iB^o_2(\psi,\psi')\tau_\downarrow\ \varepsilon\ \chi\chi'^T\tau_\downarrow + 2B^o_o(\psi,\psi')\tau_\downarrow\ \varepsilon\ \chi\chi'^T\tau_+ - 2B^o_3(\psi,\psi')\tau_\downarrow\ \varepsilon\ \chi\chi'^T\tau_+$$

$$+2B^o_1(\psi,\psi')\tau_+\ \varepsilon\ \chi\chi'^T\tau_- - 2iB^o_2(\psi,\psi')\tau_+\ \varepsilon\ \chi\chi'^T\tau_- + 2B^o_o(\psi,\psi')\tau_+\ \varepsilon\ \chi\chi'^T\tau_\uparrow$$

$$-2B^o_o(\psi,\psi')\tau_-\ \varepsilon\ \chi\chi'^T\tau_\downarrow - 2B^o_1(\psi,\psi')\tau_-\ \varepsilon\ \chi\chi'^T\tau_+ - 2iB^o_2(\psi,\psi')\tau_-\ \varepsilon\ \chi\chi'^T\tau_+$$

$$-2B^o_3(\psi,\psi')\tau_+\ \varepsilon\ \chi\chi'^T\tau_\uparrow - 2B^o_3(\psi,\psi')\tau_-\ \varepsilon\ \chi\chi'^T\tau_\downarrow\ ,$$

agrupando términos

$$B_3(\psi,\chi)\circ B_1(\chi',\psi') =$$

$$B^{\circ}_{0}(\psi,\psi')(-2\tau_{\uparrow}\ \varepsilon\ \chi\chi'^{T}\tau_{-} + 2\tau_{\downarrow}\ \varepsilon\ \chi\chi'^{T}\tau_{+} + 2\tau_{+}\ \varepsilon\ \chi\chi'^{T}\tau_{\uparrow} - 2\tau_{-}\ \varepsilon\ \chi\chi'^{T}\tau_{\downarrow})$$

$$+B^{\circ}_{1}(\psi,\psi')(2\tau_{\downarrow}\ \varepsilon\ \chi\chi'^{T}\tau_{\downarrow} -2\tau_{\uparrow}\ \varepsilon\ \chi\chi'^{T}\tau_{\uparrow} + 2\tau_{+}\ \varepsilon\ \chi\chi'^{T}\tau_{-} - 2\tau_{-}\ \varepsilon\ \chi\chi'^{T}\tau_{+}) +$$

$$+B^{\circ}_{2}(\psi,\psi')(-2i\tau_{\uparrow}\ \varepsilon\ \chi\chi'^{T}\tau_{\uparrow} -2i\tau_{\downarrow}\ \varepsilon\ \chi\chi'^{T}\tau_{\downarrow} - 2i\tau_{+}\ \varepsilon\ \chi\chi'^{T}\tau_{-} -2i\tau_{-}\ \varepsilon\ \chi\chi'^{T}\tau_{+}) +$$

$$+B^{\circ}_{3}(\psi,\psi')(-2\tau_{\uparrow}\ \varepsilon\ \chi\chi'^{T}\tau_{-} -2\tau_{\downarrow}\ \varepsilon\ \chi\chi'^{T}\tau_{+} - 2\tau_{-}\ \varepsilon\ \chi\chi'^{T}\tau_{\downarrow} - 2\tau_{+}\ \varepsilon\ \chi\chi'^{T}\tau_{\uparrow}) .$$

Identificando términos

$$B_3(\psi,\chi)\circ B_1(\chi',\psi') = -iB^{\circ}_{0}(\psi,\psi')B_2(\chi,\chi')-B^{\circ}_{1}(\psi,\psi')B_3(\chi,\chi') +$$
$$+ iB^{\circ}_{2}(\psi,\psi')B_{0}(\chi,\chi') - B^{O}_{3}(\psi,\psi')B_1(\chi,\chi')$$

que corresponde al caso particular de III.B.4) para el cual $j = 3$ y $k = 1$.

La forma del producto III.B.4) quedó determinada fundamentalmente por la combinación del corolario al teorema II.C.1) (caso particular del grupo de Lie SU(2)) y las propiedades de los proyectores para extraer la subálgebra cuaterniónica del mapa $M_{\beta}(\psi,\psi) \in \mathcal{C}(1,3)$, adicionalmente gracias a que el caso particular $B^{\alpha}_{j}(\psi,\chi)$ tiene un grupo de norma que conmuta con la base cuaterniónica elegida para representar la simetría espacio-tiempo, el producto de Clifford III.B.4) en espacio isotrópico es equivalente al correspondiente en espacio-tiempo.

$$B^{\alpha}(\psi,\chi)\circ B^{\beta}(\chi',\psi') = C^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}B^{\gamma}_{o}(\psi,\psi')B^{\delta}(\chi',\chi)$$

con

$$C^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} - i\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

donde

$g_{\alpha\beta}$ es el tensor métrico de Lorentz,

$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ es el tensor permutación totalmente antisimétrico,

$\psi, \psi', \chi, \chi' \in C^4$ son ideales mínimos de los multivectores $\mathcal{G}(1,3)$.

Esta propiedad se repetirá siempre que el grupo de norma conmute con el elegido para expresar la simetría espacio-tiempo, en virtud de ser ésta una característica particular de algún modelo de interacción lo más común es que el producto de Clifford III.B.1) en el espacio isotópico no sea equivalente al correspondiente en espacio-tiempo (no hay simetría entre los indices de Lorentz y los de norma).

Con la finalidad de mostrar en forma completa los productos geométricos de los mapas multivectoriales dados en el anterior capítulo y como un ejemplo de lo que éstos implicarían para el mapa de Cartan original se presenta el siguiente

Corolario al teorema II.1). El producto geométrico de los mapas cuaterniónicos $N(\xi,\ell)$ y $N(\ell',\xi')$ con $\xi, \ell, \ell', \xi' \in C^2$ (espinores de Weyl) está dado por;

III.B.5) $\quad N(\xi,\ell) \circ N(\ell',\xi') = 2N^\circ(\xi,\xi')N(\ell',\ell).$

Prueba

$$N(\xi,\ell) \circ N(\ell',\xi') = (2\ \varepsilon\ \ell\ \xi^T)(2\ \varepsilon\ \xi'\ell'^T) = 4\ \varepsilon\ \ell\ \xi^T\ \varepsilon\ \xi'\ell'^T$$

ya que por el teorema II.1)

$$N(\xi,\ell) = N^\alpha(\xi,\ell)\sigma_\alpha = 2\ \varepsilon\ \ell\ \xi^T,$$

además $\quad \xi^T\ \varepsilon\ \xi' = \xi_1\xi'_2 - \xi_2\xi'_1 = \eta^\circ(\xi,\xi')$ $\quad$ por lo tanto

$$N(\xi,\ell) \circ N(\ell',\xi') = 4N^\circ(\xi,\xi')\ \varepsilon\ \ell\ell'^T = 2N^\circ(\xi,\xi')(2\ \varepsilon\ \ell\ell'^T)$$

finalmente

$$N(\xi,\ell) \circ N(\ell',\xi') = 2N^\circ(\xi,\xi')N(\ell',\ell),$$

con lo que se ha probado el corolario.

Para terminar esta sección es importante efectuar algunas observaciones, tanto el mapa II.C.2) como el producto de Clifford III.B.4) fueron postulados por F. Reipler[24,25,27] sin un análisis multivectorial paralelo lo que le impide notar las limitaciones de su construcción. La lógica de extensión que este autor usa es repetitiva ya que sobre la base del mapa original de Cartan II.2) realiza un mapeo en el cual al producto de dos números complejos $\xi_i \eta_j$ le asocia al pasar a la dimensionalidad inmediata superior (de C^{2^n} a $C^{2^{n+1}}$ para espinores, de $E_{2\nu}$ a $E_{2\nu+1}$ o bien de $E_{2\nu+1}$ a $E_{2\nu+3}$ para el espacio base A_p asociado) todo el mapa original de Cartan $N^{\alpha}(\xi,\eta)$ donde ξ es el espinor de Weyl asociado al número complejo ξ_i mientras que η es el espinor de Weyl correspondiente a η_j. De esta forma construye el mapa $B_K(\psi,\chi)$ que corresponde a la proyección cuaterniónica del mapa multivectorial de Cartan $M^{\alpha}_{\beta}(\psi,\chi)$ para el grupo de norma SU(2). Este procedimiento puede ser repetido n veces consecutivas con lo que se definirían mapas para multipletes $\psi \in C^{2^n}$ consistentes de 2^{n-1} espinores de Weyl y se tendrían grupos de norma $[SU(2)]^n \times U(1)$ (al repetir en la extensión anterior la estructura del mapa de Cartan se tendrá fijo el grupo de norma como alguna potencia SU(2)) con una base cuaterniónica para el espacio-tiempo. Asímismo el producto III.B.4) se extenderá a[27];

$$B_{J_1 \ldots J_{n-1}}(\psi,\chi) \circ B_{K_1 \ldots K_{n-1}}(\chi',\psi') = \left(1/2^{n-2}\right) \left[C^{P_1 Q_1}_{J_1 K_1} \ldots C^{P_{n-1} Q_{n-1}}_{J_{n-1} K_{n-1}}\right] \times$$

$$\times\, B^{o}_{P_1 \ldots P_{n-1}}(\psi,\psi')\, B_{Q_1 \ldots Q_{n-1}}(\chi',\chi)$$

lo que muestra una sucesiva proyección cuaterniónica que indica una base espacio-temporal cuaterniónica y un grupo de norma no simple potencia de SU(2), lo cual conserva la simetría del mapa ante los indices de Lorentz y norma.

Es efectivamente cierto que al extender el mapa original de Cartan a la dimensión inmediata superior siguiendo esta construcción aparece el grupo de norma SU(2) sobre una base cuaterniónica, pero para las aplicaciones a modelos de interacción útiles no es deseable tener limitaciones en cuanto a los grupos de norma a usar, de hecho la construcción presentada en este trabajo como el mapa multivectorial extendido de Cartan permite una elección totalmente arbitraria del grupo de norma (estrictamente basta con tener representación multivectorial para que sea posible su uso) así como del grupo base para expresar al espacio-tiempo eliminando las limitaciones del trabajo de Reifler al mismo tiempo que lo muestra como un caso particular bajo ciertas restricciones de orden geométrico.

III.C. IDENTIDADES DE FIERZ COMO PRODUCTOS DE MAPAS MULTIVECTORIALES DE CARTAN.

En esta sección usaremos el corolario al teorema II.C.1) para mostrar como las identidades de Fierz obtenidas por Y. Takahashi[31] tienen un significado geométrico y pueden ser obtenidas usando solamente la información contenida en este corolario y las propiedades del álgebra de Clifford $\mathscr{C}(p,q)$ presentadas en el primer capítulo de este trabajo.

Las corrientes hermitianas usadas normalmente en el cálculo de las amplitudes de transición para interacciones entre partículas tienen la siguiente forma;

III.C.1) $$J = \psi^{\dagger}\gamma^{0}\psi \ , \quad J_{5} = i\psi^{\dagger}\gamma_{0}\gamma_{5}\psi \ , \quad J_{\mu} = i\psi^{\dagger}\gamma_{0}\gamma_{\mu}\psi \ ,$$

$$J_{5\mu} = i\psi^{\dagger}\gamma_{0}\gamma_{5}\gamma_{\mu}\psi \ , \quad J_{\mu\nu} = \psi^{\dagger}\gamma_{0}\gamma_{\mu\nu}\psi \ .$$

Para algunos casos particulares (por ejemplo la reconstrucción de un espinor con la fase global explícita) se suelen usar además de las anteriores corrientes hermitianas, las cantidades invariantes de norma

III.C.2) $$R_{\Gamma_{\alpha}} = i\psi^{c\dagger}\gamma_{0}\Gamma_{\alpha}\psi$$

donde ψ^{c} es el espinor conjugado de carga de ψ y se define de tal manera que

III.C.3) $\psi^{c\dagger}\gamma_o\psi = i\psi^{c\dagger}\gamma_5\psi = i\psi^{c\dagger}\gamma_5\gamma_\mu\psi = 0.$

Las definiciones anteriores han usado la notación convencional de Y. Takahashi y su tensor métrico $g^\mu_\nu = \text{diag}(-1,1,1,1)$ de tal manera que la signatura del espacio-tiempo de este autor es el valor negativo de la correspondiente a $A_{1,3}$, espacio generador del álgebra $\mathcal{C}(1,3)$, sin embargo los cálculos posteriores serán autoconsistentes y locales por lo que las conclusiones obtenidas serán válidas. Asimismo $(1, \gamma_\mu , \gamma_{\mu\nu} , \gamma_5\gamma_\mu , \gamma_5)$ es la base $\Gamma_\alpha \in \mathcal{C}(1,3)$ y pueden representarse como las matrices de Dirac si fuera necesario, lo que por cierto no ocurre en este capítulo.

Ahora bien, gracias a la definición II.B.1) del mapa extendido de Cartan

II.B.1) $M^\alpha_\beta(\eta,\chi) = \eta^T\Gamma^\alpha\lambda^*_\beta \; \varepsilon \; \chi$

es posible garantizar que

III.C.4. $M^\alpha_1(\psi^*,\overline{\psi}^*) = \psi^{*T}\Gamma^\alpha\gamma_o \; \varepsilon \; (\varepsilon\,\psi) = \psi^\dagger\Gamma^\alpha\gamma_o\psi$,

donde $\varepsilon^2 = 1$ y el mapa II.B.1) fue usado para la siguiente substitución;

$$\eta \longrightarrow \psi^* , \quad \chi \longrightarrow \overline{\psi}^* = \varepsilon \; \psi$$

con la dirección isotópica dada por $\lambda^*_\beta = \lambda^*_1 = \gamma_o$ que corresponde a uno de los tres generadores del grupo SU(2) y estará contenida en cualquier grupo no simple o de rango mayor que tenga como subgrupo a SU(2) (de hecho todos los de interés en la física de altas energías).

En forma semejante II.B.1) permite escribir

III.C.5 $M^\alpha_1(\psi^{*C},\overline{\psi}^*) = \psi^{c\dagger}\Gamma^\alpha\gamma_o\psi$

con la substitución

$$\eta \longrightarrow \psi^{C*} \text{ y } \chi \longrightarrow \varepsilon \; \psi = \overline{\psi}^*$$

bajo la misma direccion isotópica anterior.

De esta forma las expresiones III.C.1) se pueden agrupar como $J_{\Gamma_\alpha} = i\psi^{\dagger}\gamma_o\Gamma_\alpha\psi$ y III.C.2) $R_{\Gamma_\alpha} = i\psi^{c\dagger}\gamma_o\Gamma_\alpha\psi$ resultan análogas a III.C.4) y III.C.5) hasta un signo bajo el cambio de métrica ya previsto.

Por otro lado es conocido que las identidades de Fierz son relaciones entre las corrientes hermitianas J_{Γ_α} y las cantidades invariantes de norma R_{Γ_α} (ya sea que se mezclen entre sí o no lo hagan), sin embargo gracias al mapa multivectorial de Cartan (teorema II.C.1)) y al producto entre ellos (corolario al teorema II.C.1)) así somo a las propiedades del álgebra de Clifford $\mathcal{C}(1,3)$ es posible encontrar fácilmente relaciones entre las expresiones III.C.4) y III.C.5), del corolario al teorema II.C.1)

III.B.1) $M_i(\psi,\chi)M_j(\chi',\psi') = 4M_j(\psi,\psi')M_i(\chi',\chi)$ o sea

$$(M_i^{\alpha}(\psi,\chi)\Gamma_\alpha)(M_j^{\beta}(\chi',\psi')\Gamma_\beta) = 4M_j(\psi,\psi')M_i^{\delta}(\chi',\chi)\Gamma_\delta$$

donde $M_j(\psi,\psi') = \psi^T\lambda_j\varepsilon\psi'$ con $\lambda_j = \varepsilon_3\lambda_j^T\varepsilon_3$ y los subíndices i,j indican direcciones isotópicas, es posible deducir las siguientes ecuaciones;

III.C.6) $$M_1^{\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\Gamma_\alpha)(M_1^{\beta}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\Gamma_\beta) = 4M_1(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{\delta}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\Gamma_\delta$$

donde $M_1(\psi^*,\overline{\psi}^*) = \psi^{\dagger}\gamma_o\psi = J$.

$$(M_1^{\alpha}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\Gamma_\alpha)(M_1^{\beta}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\Gamma_\beta) = 4M_1(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)M_1^{\delta}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\Gamma_\delta$$

donde $M_1(\psi^{c*},\overline{\psi}^*) = \psi^{c\dagger}\gamma_o\psi = R = 0$ por lo que esta ecuación se reduce a

III.C.7) $$M_1^{\alpha}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\Gamma_\alpha)(M_1^{\beta}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\Gamma_\beta) = 0.$$

$$\text{III.C.8)}\quad M_1^{\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\Gamma_{\alpha})(M_1^{\beta}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\Gamma_{\beta}) = 4M_1(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{\delta}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\Gamma_{\delta}$$

donde $M_1(\psi^*,\overline{\psi}^*) = \psi^{+}\gamma_o\psi = J.$

$$\text{III.C.9)}\quad M_1^{\alpha}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\Gamma_{\alpha})(M_1^{\beta}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\Gamma_{\beta}) = 4M_1(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)M_1^{\delta}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\Gamma_{\delta}$$

donde $M_1(\psi^{c*},\overline{\psi}^*) = \psi^{c+}\gamma_o\psi = R = 0.$

que son todas las posibles combinaciones entre los mapas multivectoriales de Cartan asociados a III.C.4) y III.C.5) o sea contienen todas las relaciones posibles entre J_{Γ_α} y R_{Γ_α}, por esta razón a la relación III.B.1) se le llamará en lo sucesivo identidad de Fierz generalizada.

Para obtener la información relativa a las identidades de Fierz como se conocen usualmente bastará con usar las propiedades del producto de Clifford entre dos multivectores no homogéneos para después igualar los coeficientes de cada r-vector en ambos miembros de la ecuación (III.C.6, III.C.7, III.C.8 y III.C.9) obteniéndose de la misma 16 identidades de Fierz ya que el álgebra usada fue $\mathcal{G}(1,3)$. El procedimiento con que se obtienen las identidades determina la forma que ellas presentan en el sentido de que la combinación lineal de varias identidades de Fierz será otra identidad más, es así como este procedimiento permitirá obtenerlas en la forma usual o bien en alguna de sus combinaciones lineales (Takahashi prueba como las identidades que él enlista son dependientes entre sí)[31]. A continuación se procederá a mostrar algunos casos particulares a manera de ejemplos en los que se obtengan identidades de Fierz por el procedimiento multivectorial ya descrito.

i) Tomemos como primer caso la parte escalar de los productos III.C.6), III.C.7), III.C.8) y III.C.9) por tener análogo directo dentro del conjunto de identidades de Fierz usuales. Por comodidad de notación el índice en el grupo de Clifford del espacio-tiempo $\mathcal{G}(1,3)$ se escribirá con notación directa del versor al que corresponda como coeficiente en el multivector no homogéneo $M_1(\eta,\chi)$, es así como $M_1^E(\eta,\chi)$ será coeficiente de su parte escalar, $M_1^{\mu}(\eta,\chi)$ lo será del μ-vector, $M_1^{\mu\nu}(\eta,\chi)$ corresponderá al $\mu\nu$-vector mientras que $M_1^{d\mu\nu}(\eta,\chi)$ a su 2-vector dual ($\gamma^d_{\mu\nu} = \gamma_5\gamma_{\mu\nu}$), $M_1^{5\mu}(\eta,\chi)$ será el coeficiente del 3-vector dual a μ ($\gamma_{5\mu} = \gamma_5\gamma_\mu$) y finalmente $M_1^5(\eta,\chi)$ corresponde al coeficiente de su parte pseudoescalar.

i.1) Así pues, la parte escalar de III.C.6) será;

$$M_1^E(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^E(\psi^*,\overline{\psi}^*) + M_1^{\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*) + \tfrac{1}{2}M_1^{\mu\nu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{\mu\nu}(\psi^*,\overline{\psi}^*) +$$

$$+ M_1^{5\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{5\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*) + M_1^5(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^5(\psi^*,\overline{\psi}^*) = 4M_1(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^E(\psi^*,\overline{\psi}^*)$$

que al traducir a las corrientes hermitianas tipo III.C.1) bajo la métrica adecuada nos lleva a la relación;

$$J^2 - J_\alpha J_\alpha + \frac{1}{2} J_{\alpha\beta}J_{\alpha\beta} + J_{5\mu}J_{5\mu} - J_5 = 4J^2 \quad \text{o sea}$$

$$\text{III.C.10)} \quad - 3J^2 - J_\alpha J_\alpha + \frac{1}{2} J_{\alpha\beta}J_{\alpha\beta} + J_{5\mu}J_{5\mu} - J_5 = 0$$

que corresponde a la identidad JJ-1 reportada por Y. Takahashi[31].

i.2) En forma análoga al caso anterior y recordando las propiedades III.C.3) la parte escalar del producto III.C.9) será

$$\text{III C.11)} \quad -R_\alpha R_\alpha + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = 0$$

que corresponde a la identidad RR-1 reportada por Y. Takahashi[31].

i.3) La parte escalar del producto III.C.7) es;

$$M_1^E(\psi^{*c},\overline{\psi}^*)M_1^E(\psi^*,\overline{\psi}^*) + M_1^{\mu}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)M_1^{\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*) + \tfrac{1}{2}M_1^{\mu\nu}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)M_1^{\mu\nu}(\psi^*,\overline{\psi}^*) +$$

$$+ M_1^{5\mu}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)M_1^{5\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*) + M_1^5(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)M_1^5(\psi^*,\overline{\psi}^*) = 0$$

que al traducir a las corrientes hermitianas III.C.1) y las cantidades invariantes de norma III.C.2) bajo la métrica apropiada y tomando en cuenta las propiedades III.C.3), se transforma a

$$\text{III.C.12)} \quad R_\mu J_\mu + \frac{1}{2} R_{\mu\nu} J_{\mu\nu} = 0$$

que corresponde a la identidad RJ-1 reportada por Y. Takahashi[31].

i.4) La parte escalar del producto III.C.8) es;

$$M_1^E(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^E(\psi^{c*},\overline{\psi}^*) + M_1^\mu(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^\mu(\psi^{c*},\overline{\psi}^*) + \frac{1}{2}M_1^{\mu\nu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{\mu\nu}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)$$

$$+ M_1^{5\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{5\mu}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*) + M_1^S(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^S(\psi^{c*},\overline{\psi}^*) = 4M_1(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^E(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)$$

que al traducir a las corrientes hermitianas III.C.1) y las cantidades invariantes de norma III.C.2) bajo la métrica apropiada y tomando en cuenta las propiedades III.C.3), se transforma a

$$\text{III.C.13)} \quad J_\mu R_\mu + \frac{1}{2} J_{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 0$$

que corresponde a la identidad JR-1 reportada por Y. Takahashi[31].

ii) En el segundo caso se obtendrá la parte 1-vector de las cuatro ecuaciones analizadas.

ii.1) La parte 1-vectorial de la ecuación III.C.6) es;

$$M_1^E(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^\mu(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_\mu + M_1^\mu(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^E(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_\mu + M_1^\nu(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{\mu\nu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_\nu\gamma_{\mu\nu}$$

$$+ M_1^{\mu\nu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^\nu(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_{\mu\nu}\gamma_\nu + M_1^{d\mu\nu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{5\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma^d_{\mu\nu}\gamma_{5\mu} +$$

$$+ M_1^{5\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{d\mu\nu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_{5\mu}\gamma^d_{\mu\nu} + M_1^S(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{5\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_5\gamma_{5\mu} +$$

$$+ M_1^{5\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^S(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_{5\mu}\gamma_5 = 4M_1(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^\mu(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_\mu$$

que al expresar como las corrientes hermitianas III.C.1) bajo la métrica adecuada nos lleva a la relación

$$-2iJJ_{\mu} - 2iJ_{\nu}J_{\mu} - 2iJ^{d}_{\mu\nu}J_{5\mu} - J_{5}J_{5\mu} = -4iJJ_{\mu} \quad \text{o sea}$$

III.C.14) $$JJ_{\mu} - J_{\nu}J_{\mu\nu} - J^{d}_{\mu\nu} - J_{5}J_{5\mu} = 0$$

que corresponde a la combinación lineal de las identidades JJ-3 y JJ-8 reportadas por Y. Takahashi[31] (de hecho es la resta y estrictamente corresponde a una separación arbitraria, pero válida de III.C.14).

ii.2) En forma análoga el caso anterior y gracias a las propiedades III.C.3), la parte 1-vector del producto III.C.9) será

III.C.15) $$R_{\nu}R_{\mu\nu} = 0$$

que corresponde a la identidad RR-8 reportada por Y. Takahashi[31] ya que la correspondiente a RR-3 es nula.

ii.3) La parte 1-vector del producto III.C.7) es;

$$M^{E}_{1}(\psi^{c*},\overline{\psi}^{*})M^{\mu}_{1}(\psi^{*},\overline{\psi}^{*})\gamma_{\mu} + M^{\mu}_{1}(\psi^{c*},\overline{\psi}^{*})M^{E}_{1}(\psi^{*},\overline{\psi}^{*})\gamma_{\mu} + M^{\nu}_{1}(\psi^{c*},\overline{\psi}^{*})M^{\mu\nu}_{1}(\psi^{*},\overline{\psi}^{*})\gamma_{\nu}\gamma_{\mu\nu}$$

$$+ M^{\mu\nu}_{1}(\psi^{c*},\overline{\psi}^{*})M^{\nu}_{1}(\psi^{*},\overline{\psi}^{*})\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\nu} + M^{5\mu}_{1}(\psi^{c*},\overline{\psi}^{*})M^{d\mu\nu}_{1}(\psi^{*},\overline{\psi}^{*})\gamma_{5\mu}\gamma^{d}_{\mu\nu} +$$

$$+ M^{d\mu\nu}_{1}(\psi^{c*},\overline{\psi}^{*})M^{5\mu}_{1}(\psi^{*},\overline{\psi}^{*})\gamma^{d}_{\mu\nu}\gamma_{5\mu} + M^{5}_{1}(\psi^{c*},\overline{\psi}^{*})M^{5\mu}_{1}(\psi^{*},\overline{\psi}^{*})\gamma_{5}\gamma_{5\mu} +$$

$$+ M^{5\mu}_{1}(\psi^{c*},\overline{\psi}^{*})M^{5}_{1}(\psi^{*},\overline{\psi}^{*})\gamma_{5\mu}\gamma_{5} = 0,$$

que al escribirse usando las corrientes hermitianas III.C.1) y las cantidades invariantes de norma III.C.2) bajo la métrica apropiada (tomando en cuenta las propiedades III.C.3) se transforma a

$$-iR_\mu J + R_\nu J_{\nu\mu} - R_{\mu\nu}J_\nu - iR^d_{\mu\nu}J_{5\nu} = 0 \quad \text{o sea}$$

III.C.16) $$R_\mu J + iR_\nu J_{\nu\mu} - iR_{\mu\nu}J_\nu + R^d_{\mu\nu}J_{5\nu} = 0$$

que corresponde a la identidad RJ-3 reportada por Y. Takahashi[31].

ii.4) La parte 1-vector del producto III.C.8) es;

$$M_1^\mu(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^E(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\gamma_\mu + M_1^E(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^\mu(\psi^{c*},\overline{\psi}^*) + M_1^\nu(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{\mu\nu}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\gamma_\nu\gamma_{\mu\nu}$$
$$+ M_1^{\mu\nu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^\nu(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\gamma_{\mu\nu}\gamma_\nu + M_1^{5\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{d\mu\nu}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\gamma_5\gamma^d_{\mu\nu} +$$
$$+ M_1^{d\mu\nu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{5\mu}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\gamma^d_{\mu\nu}\gamma_{5\mu} + M_1^5(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{5\mu}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\gamma_5\gamma_{5\mu} +$$
$$M_1^{5\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^5(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\gamma_{5\mu}\gamma_5 = 4M_1(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^\mu(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\gamma_\mu$$

que al ser expresado mediante las corrientes hermitianas III.C.1) y las cantidades invariantes de norma III.C.2) bajo la métrica adecuada y las propiedades III.C.3) resulta ser;

$$JR_\mu - iJ_{\nu\mu}R_\nu + iJ_\nu R_{\mu\nu} - J^d_{5\nu}R_{\mu\nu} = 4JR_\mu \quad \text{o sea}$$

III.C.17) $$-3JR_\mu - iJ_{\nu\mu}R_\nu + iJ_\nu R_{\mu\nu} - J^d_{5\nu}R_{\mu\nu} = 0$$

que corresponde a la identidad JR-3 reportada por Y. Takahashi .

iii) En este último caso se abordará el análisis de la parte 3-vector de los cuatro productos estudiados.

iii.1) La parte 3-vectorial de la ecuación III.C.6) es;

$$M_1^E(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{5\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_{5\mu} + M_1^{\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{d\mu\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_\alpha\gamma^d_{\mu\alpha} +$$

$$+ M_1^{\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{5}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_\mu\gamma_5 + M_1^{d\mu\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma^d_{\mu\alpha}\gamma_\alpha +$$

$$+ M_1^{\mu\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{5\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_{\mu\alpha}\gamma_{5\alpha} + M_1^{5\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{E}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_{5\mu} +$$

$$+ M_1^{5\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{\mu\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_{5\alpha}\gamma_{\mu\alpha} + M_1^{5}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_5\gamma_\mu =$$

$$4M_1(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{5\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_{5\mu}$$

que al expresar como función de las corrientes hermitianas III..C.1) bajo la métrica adecuada nos lleva a;

$$- iJJ_{5\mu} - iJ_\alpha J^d_{\mu\alpha} + J_\mu J_5 - iJ^d_{\mu\alpha}J_\alpha + J_{\lambda\alpha}J_{s\alpha} - iJ_{5\mu}J + J_{\lambda\alpha}J_{5\alpha} + J_\mu J_5 =$$

$$- 4iJJ_{5\mu}$$

o sea

$$\text{III.C.18)} \qquad iJJ_{5\mu} - iJ_\alpha J^d_{\mu\alpha} + J_\mu J_5 - J_{\mu\alpha}J_{5\alpha} = 0$$

que corresponde a una combinación lineal de las identidades JJ-4 y JJ-7 reportadas por Y. Takahashi[31] (de hecho corresponden a una separación arbitraria pero válida de III.C.16).

iii.2) En forma análoga al caso anterior y gracias a las propiedades III.C.3), la parte 3-vectorial del producto III.C.9) será

$$\text{III.C.19)} \quad R_\alpha R^d_{\mu\alpha} = 0$$

que corresponde a la identidad RR-4 reportada por Y.

Takahashi[31] ya que la correspondiente a RR-7 es nula.

iii:3). La parte 3-vectorial del producto III.C.7) es;

$$M_1^E(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)M_1^{5\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_{5\mu} + M_1^{\alpha}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)M_1^{d\mu\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_\alpha\gamma^d_{\mu\alpha} +$$

$$+ M_1^{\mu}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)M_1^{5}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_\mu\gamma_5 + M_1^{d\mu\alpha}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)M_1^{\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma^d_{\mu\alpha}\gamma_\alpha +$$

$$+ M_1^{\mu\alpha}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)M_1^{5\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_{\mu\alpha}\gamma_{5\alpha} + M_1^{5\mu}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)M_1^{E}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_{5\mu} +$$

$$+ M_1^{5\alpha}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)M_1^{\mu\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_{5\alpha}\gamma_{\mu\alpha} + M_1^{5}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)M_1^{\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_5\gamma_\mu = 0$$

que gracias a las propiedades III.C.3) se puede escribir en función de las corrientes hermitianas III.C.1) y las cantidades invariantes de norma III.C.2) como

$$\text{III.C.20)} \quad R_\mu J_5 + iR_\alpha J^d_{\mu\alpha} - iR^d_{\mu\alpha}J_\alpha - R_{\lambda\alpha}J_{5\alpha} = 0$$

que corresponde a la identidad RJ-7 reportada por Y. Takahashi[31].

iii.4) La parte 3-vector de III.C.8) es;

$$M_1^E(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{5\mu}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\gamma_{5\mu} + M_1^{\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{d\mu\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_\alpha\gamma^d_{\mu\alpha} +$$

$$+ M_1^{\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{5}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\gamma_\mu\gamma_5 + M_1^{d\mu\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma^d_{\mu\alpha}\gamma_\alpha +$$

$$+ M_1^{\mu\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{5\alpha}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\gamma_{\mu\alpha}\gamma_{5\alpha} + M_1^{5\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{E}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_{5\mu} +$$

$$+ M_1^{5\alpha}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{\mu\alpha}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\gamma_{5\alpha}\gamma_{\mu\alpha} + M_1^{5}(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{\mu}(\psi^*,\overline{\psi}^*)\gamma_5\gamma_\mu =$$

$$4M_1(\psi^*,\overline{\psi}^*)M_1^{5\mu}(\psi^{c*},\overline{\psi}^*)\gamma_{5\mu}$$

que gracias a las propiedades III.C.3) corresponde a;

$$J_\alpha R^d_{\mu\alpha} - J^d_{\mu\alpha}R_\alpha + J_5 R_\mu = 0$$

combinación lineal de las identidades JR-7 y JR-4 reportadas por Y. Takahashi.

Finalizamos este capítulo con algunos comentarios importantes al respecto; en primer lugar es evidente la facilidad y sencillez con que se obtuvieron algunas identidades de Fierz partiendo del análisis del producto de mapas multivectoriales de Cartan a lo que se debe añadir que este procedimiento es igualmente válido cuando se emplean otro tipo de corrientes para usos diferentes en el modelo, (el procedimiento es general y su sencillez se mantiene para cantidades diferentes a las usuales) las ventajas en cuanto a economía y sentido geométrico con respecto a la forma usual de determinación de las mismas (cálculo de trazas en formas cuadrilineales que involucran matrices de Dirac en una representación dada) son ahora evidentes. Aún cuando se puede asignar alguna representación a las matrices de Dirac, el análisis multivectorial que se hizo es independiente de la misma ya que se basa exclusivamente en las propiedades del álgebra de Clifford usada[10] (que en este caso fue $\mathcal{C}(1,3)$, pero que en caso de ser necesario se podría extenderse a otra dimensión o signatura). Por otro lado es conveniente subrayar que la dirección isotópica usada es de vital importancia en el análisis multivectorial hecho y se deriva de la forma usual en que se definen las cantidades observables en un modelo, los resultados obtenidos no son reproducibles si se ignorara la simetría de norma en el mapa (podría pensarse en producir el multivector asociado a las corrientes en estudio con simetría espacio-temporal exclusivamente). Por último el estudio hecho por F. Reifler[27] como una aproximación de simetría de norma a las identidades de Fierz (que por cierto está incluido como una proyección cuaterniónica con grupo de Lie $[SU(2)]^n$ del mapa multivectorial de Cartan y sus productos geométricos aquí presentados) adolece de las limitaciones propias de usar la subálgebra cuaterniónica de $\mathcal{C}(1,3)$, razón suficiente para desconfiar de la posibilidad de construir todas las identidades de Fierz asociables al álgebra completa $\mathcal{C}(1,3)$; como es claro en este capítulo el procedimiento usado elimina en forma consistente este tipo de limitaciones, explicándolas así como sus propiedades asociadas gracias a un adecuado análisis multivectorial.

CAPITULO IV.

ECUACIONES MULTIVECTORIALES DE MOVIMIENTO.

IV.A. INTRODUCCION.

Es común que las ecuaciones que determinan la dinámica de una partícula se desarrollen en un sistema matemático que mezcle objetos de naturaleza y propiedades de transformación diferentes cuya definición requiere condiciones topológicas muy diversas y que por lo tanto contiene información no necesariamente extendible a cualquier tipo de variedad. La razón de esta mezcla es de tipo histórico, sin embargo actualmente el álgebra geométrica o de Clifford permite una estructura matemática suficientemente general[10,11] como para incluir las ramas más diversas de las matemáticas modernas y los objetos de su estudio dentro de un solo sistema, es así como se desea que los elementos incluídos en las ecuaciones de movimiento pertenezcan a un solo sistema matemático en el cual pueden ser descritos espinores, vectores, tensores, twistores como multivectores, para una variedad de cualquier dimensión, con estructura de espín o no[17,24,25].

Como un segundo uso del mapa multivectorial de Cartan se aplicará a la ecuación de Dirac de movimiento transformándola en una ecuación multivectorial de movimiento con la información de grupo de norma y estructura espacio-tiempo contenida en el mapa usado, de esta forma se busca presentar un mecanismo de inclusión de multivectores a ecuaciones de movimiento (formalmente se podría aplicar a otro tipo de expresiones como son los lagrangianos, sin embargo aquí se adoptó el punto de vista de transformar solamente la ecuación de movimiento para después asociarle un lagrangiano escrito en el espacio de los multivectores mediante las técnicas usuales, en su caso) en una variedad de dimensión arbitraria con estructura de espín o sin ella. Gracias a este mecanismo es posible construir ecuaciones de movimiento (y sus lagrangianos) donde coexistan campos asociados a partículas de espines bosónicos y fermiónicos bajo un grupo de norma y una estructura espacio-temporal dada, donde los mecanismos de ruptura espontánea de la simetría pueden sufrir algunas reinterpretaciones.

IV.B. APLICACION DEL MAPA MULTIVECTORIAL DE CARTAN A LA ECUACION DE DIRAC.

Es posible escribir la ecuación de Dirac para una partícula masiva como el par de ecuaciones simultáneas[9,15]

$$\text{IV.B.1)}\qquad \begin{aligned} (D^{0}\sigma_{0} + D^{i}\sigma_{i})\bar{\eta} &= m_{0}\zeta \\ (D^{0}\sigma_{0} - D^{i}\sigma_{i})\zeta &= m_{0}\bar{\eta} \end{aligned}$$

donde $\psi = (\zeta, \bar{\eta})$ es un campo biespinorial de Dirac, σ_{i} son las matrices de Pauli, finalmente (D^{0}, D^{i}) son las componentes del cuadrivector momento asociado a la partícula con masa en reposo m_{0} (donde nuevamente $\bar{\eta}$ representa al espinor "conjugado espinorial" de η).

Rearreglando las ecuaciones IV.B.1) la ecuación de Dirac queda expresada como[25];

$$\text{IV.B.2)}\qquad D^{\alpha}\bar{\sigma}_{\alpha}\psi = -\phi^{\alpha}\tau_{\alpha}\bar{\psi}$$

donde el campo de Dirac es ahora un par de espinores $\psi = \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}$, $\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{\eta} \\ -\bar{\zeta} \end{pmatrix}$ es su conjugado espinorial, $\phi^{\alpha} = (0,0,0,-m)$ $\tau_{\alpha} = \tau^{\alpha} = (1, \tau_{i})$ son los generadores del grupo de norma SU(2) aplicados al espacio isotópico generado por los espinores de Weyl ψ ($\tau_{i} = 1\otimes\sigma_{i}$ donde 1 tiene las dimensiones congruentes a η o ζ) y $\sigma_{\alpha} = (1, -\sigma_{Pauli})$ en la ecuación IV.B.2) (en lo sucesivo se usará la notación más sencilla $\sigma_{\beta} = \sigma^{\beta} = (1, \sigma_{Pauli})$)

Es importante notar que en la ecuación de Dirac escrita como IV.B.2) el cuadruplete ϕ^{α} elige el término adecuado τ_{α} que permite mezclar las quiralidades correctas del espinor ψ para asignar masa de Dirac a la partícula en cuestión (de hecho la ecuación está escrita para una quiralidad definida en cada miembro de la misma distinta entre sí y es el valor de $\phi^{\alpha} \neq 0$ el que permite en forma correspondiente a IV.B.1) la coexistencia de elementos de distinta quiralidad generando con ella una masa de Dirac).

Se aplicará el mapa multivectorial de Cartan $M_\omega(\psi,\psi')$: $C^4 x C^4 \longrightarrow \mathfrak{C}(1,3)$ a la ecuación de Dirac IV.B.2) bajo un grupo de norma generado por λ_ω:

$$M_\omega(\psi, D^\alpha\sigma_\alpha\psi) = -M_\omega(\psi, \phi^\alpha\tau_\alpha\overline{\psi}),$$

por un lado sabemos que

IV.B.3) $$M_o(\psi, D^\alpha\sigma_\alpha\psi) = 4\tau_3(\varepsilon\ D^\alpha\sigma_\alpha\psi\psi^T)^T\tau_3 ,$$

al desarrollar esta expresión obtenemos el siguiente resultado

IV.B.4)

$$M_o(\psi, D^\alpha\sigma_\alpha\psi) = \frac{1}{2}\left[\tau_o M_o(\psi,\psi)D^o\sigma_o + \tau_1 M_1(\psi,\psi)D^1\sigma_1 + \tau_2 M_2(\psi,\psi)D^2\sigma_2 + \right.$$
$$\left. + \tau_3 M_3(\psi,\psi)D^3\sigma_3\right] = \frac{1}{2}\ \tau^\alpha M_{\alpha'}(\psi,\psi)D^\beta\sigma_{\beta'}\delta^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta}$$

donde $\delta^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha = \beta = \alpha' = \beta';\ \alpha,\beta,\alpha',\beta' = 0,1,2,3 \\ 0 \text{ para cualquier otra combinación} \end{cases}$,

el operador diferencial actúa sobre el campo multivectorial $M_\alpha(\psi,\psi)$ y éstos siguen el álgebra de Lie de los generadores SU(2).

Por otro lado se puede comprobar que;

IV.B.5) $$M_o(\psi, \phi^\alpha\hat{\tau}_\alpha\overline{\psi}) = 4\tau_3(\varepsilon\ \phi^\alpha\hat{\tau}_\alpha\overline{\psi}\psi^T)^T\tau_3$$

es equivalente a

IV.B.6) $$M_o(\psi, \phi^\alpha\tau_\alpha\overline{\psi}) = \phi^o M_o(\psi,\overline{\psi}) + \phi^1 M_o(\psi,\overline{\psi})\tau_1 + \phi^2 M_o(\psi,\overline{\psi})\tau_2 +$$
$$\phi^3 M_o(\psi,\overline{\psi})\tau_3 = M_o(\psi,\overline{\psi})\phi^\alpha\tau_\alpha$$

por lo que al usar esta última expresión en combinación con el teorema II.C.1) nos permite concluir lo siguiente;

$$M_\omega(\psi,\phi^\alpha\tau_\alpha\overline{\psi}) = \lambda_\omega M_0(\psi,\overline{\psi})\phi^\alpha\tau_\alpha \quad \text{o sea}$$

IV.B.7) $$M_\omega(\psi,\phi^\alpha\tau_\alpha\overline{\psi}) = M_\omega(\psi,\overline{\psi})\phi^\alpha\tau_\alpha$$

con lo que la ecuación multivectorial de Dirac bajo el grupo de norma generado por λ_ω queda escrita como

IV.B.8) $$\frac{\lambda_\omega}{2}\,\tau^\alpha M_{\alpha'}(\psi,\psi)D^\beta\sigma_{\beta'}\delta^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta} = -M_\omega(\psi,\overline{\psi})\phi^\alpha\tau_\alpha \quad ,$$

para la dirección isotópica λ_ω en el espacio generado por el grupo de Lie a quien pertenece λ_ω , estrictamente la ecuación IV.B.8) aislada no identifica directamente el grupo de norma usado ya que es el conjunto de todas ellas (para todos los generadores λ_ω) al relacionarse entre sí lo que identifica el álgebra de Lie de los generadores del grupo usado. De hecho es claro que cuando $\omega = 0$ en IV.B.8)

IV.B.9) $$\tau^\alpha M_{\alpha'}(\psi,\psi)D^\beta\sigma_{\beta'}\delta^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta} = -2M_0(\psi,\overline{\psi})\phi^\alpha\tau_\alpha$$

se obtiene la ecuación multivectorial básica de Dirac sin simetría de norma explícita, esta última se introduce multiplicando esta expresión por cada uno de los generadores del grupo de norma elegido.

Es interesante subrayar el efecto que tiene el producto geométrico de los mapas multivectoriales (identidades de Fierz generalizadas) en la ecuación IV.B.8). Tomemos la ecuación de Dirac multivectorial en la dirección λ_{i_1} (cualquier generador del grupo de norma deseado) entonces;

IV.B.10) $$\lambda_{i_1}\tau^\alpha M_{\alpha'}(\psi,\psi)D^\beta\sigma_{\beta'}\delta^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta} = -2M_{i_1}(\psi,\overline{\psi})\phi^\beta\tau_\beta$$

si multiplicamos esta ecuación por el escalar $M_{i_2}(\psi,\psi)$ (λ_{i_2} deberá ser un generador del grupo de norma diferente de λ_{i_1})

IV.B.11) $$M_{i_2}(\psi,\psi)\lambda_{i_1}\tau^\alpha M_{\alpha'}(\psi,\psi)D^\beta\sigma_{\beta'}\delta^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta} = -M_{i_2}(\psi,\psi)M_{i_1}(\psi,\overline{\psi})\phi^\beta\tau_\beta .$$

Usando la identidad de Fierz generalizada III.B.1)

$$M_{i_2}(\psi,\psi)M_{i_1}(\psi,\overline{\psi}) = M_{i_1}(\psi,\overline{\psi})M_{i_2}(\psi,\psi)$$

resulta que la expresión IV.B.11) se transforma a

IV.B.12) $$M_{i_2}(\psi,\psi)\lambda_{i_1}\tau^{\alpha}M_{\alpha'}(\psi,\psi)D^{\beta}\sigma_{\beta'}\delta_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = -M_{i_1}(\psi,\overline{\psi})M_{i_2}(\psi,\psi)\phi^{\beta}\tau_{\beta}\,.$$

La aplicación sucesiva de los productos geométricos del tipo III.B.1) nos llevarán a una expresión del tipo

IV.B.13)

$$\prod_{i=i_2}^{i_n} M_i(\psi,\psi)\lambda_{i_1}\tau^{\alpha}M_{\alpha'}(\psi,\psi)D^{\beta}\sigma_{\beta'}\delta_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = -M_{i_1}(\psi,\overline{\psi})\prod_{i=i_n}^{i_2} M_i(\psi,\psi)\phi^{\beta}\tau_{\beta}$$

que gracias a la estructura desarrollada en el capítulo anterior puede ser fácilmente reducible para cada caso particular de grupo de norma elegido.

La ecuación multivectorial de Dirac con el grupo de norma generado por $(\lambda_{i_1},\ldots\lambda_{i_n})$ dada por IV.B.13) es el resultado de un rearreglo de las n ecuaciones originales (una para cada dirección isotópica) y de hecho las identidades de Fierz generalizadas simplemente transforman las ecuaciones originales aplicando una fase que depende del grupo de norma elegido.

IV.C. CASO PARTICULAR DE LA ECUACION MULTIVECTORIAL DE DIRAC.

Para probar la bondad de la ecuación multivectorial de Dirac con grupo de norma formada por el sistema IV.B.8) la proyectaremos bajo algunos criterios de origen físico a un caso particular de interés en la fenomenología de la teoría de campo.

Tomemos el caso particular del grupo de norma SU(2) efectuando un corte espacio-tiempo (o sea referido a un tiempo propio dado γ_o) de tal forma que la componente temporal del operador diferencial momento (aplicado por cierto al mapa libre de simetría de norma) quede en un subespacio distinto al correspondiente de las componentes espaciales, por lo que la ecuación IV.B.8) resulta ser

$$\text{IV.C.1)} \qquad P_{+}\tau_{i}\tau^{o}M_{o}(\psi,D^{o}\psi)\sigma_{o} + P_{-}\tau_{i}\tau^{j}M_{j'}(\psi,D^{K}\psi)\sigma_{K'}\delta_{jK}^{j'K'} =$$

$$= -M_{i}(\psi.\dot{\overline{\psi}})\phi^{\beta}\tau_{\beta}$$

$$\text{donde } \delta_{jK}^{j'K'} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k = j' = k' \ ; \ j,k,j',k' = 1,2,3 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

τ_i es un generador de SU(2), $P_{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $P_{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y D^{α} es el operador diferencial aplicado al espacio de los espinores.

El corte espacio-tiempo se hizo con la finalidad de cambiar la representación del grupo de Lorentz propio usada (matrices de Pauli) a las matrices de Proca en la base del operador diferencial, con lo que el primer miembro de la ecuación IV.C.1) se proyecta sobre la base cuaterniónica (σ^{o}, σ^{i}) de tal forma que se obtenga por separado la componente temporal de las espaciales. Se procede a aplicar la identidad de Fierz generalizada para después recombinar las componentes temporales y espaciales formando otras que son funciones lineales de las primeras bajo un ángulo específico de rotación, a continuación se proyecta la parte cuaterniónica del mapa multivectorial de Cartan en toda la ecuación para finalmente recuperar los vectores base del operador diferencial proyectados en el primer miembro de la ecuación bajo la representación de Proca del grupo de Lorentz propio. La ecuación IV.C.1) se ha transformado en la siguiente expresión;

IV.C.2) $\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\left[iB^{o}_{o}(\psi,\psi)P_a + \frac{1}{4}\ B^{o}_{\beta}(\psi,\psi)\tau_j\tau^{\beta}\tau_j P_b\right]\Big\{P_+\tau_1\tau^{o}M_o(D^{o}\psi,\psi)\sigma_o +$

$$P_-\tau_1\tau^{j}M_{j'}(\psi,D^{K}\psi)\sigma_K,\delta^{j'K'}_{jK}\Big\}\begin{pmatrix}\sigma^{o}\\ \sigma^{j}\end{pmatrix}\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\begin{pmatrix}\Sigma\\ \Sigma^{o}_{j}\end{pmatrix} =$$

$$= -\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\left[\frac{i}{2}\ B^{o}_{o}(\psi,\psi)\left(\phi^{\beta}\tau_{\beta}M_1(\psi,\overline{\psi})\right)\right]\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}$$

donde;

i) Los símbolos $\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}$ y $\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}$ son, en notación contraída, los operadores que extraen la parte cuaterniónica del multivector que se encuentre entre ellos (según lo hecho en II.C.2); es así como para extraer la parte cuaterniónica del multivector A se usa la siguiente notación

$$\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\ A\ \tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow} = \tau_+A\tau_- + \tau_-A\tau_+ + \tau_{\uparrow}A\tau_{\uparrow} + \tau_{\downarrow}A\tau_{\downarrow}\ ,$$

las expresiones y significado de τ_+, τ_-, $\tau_{\uparrow}$ y $\tau_{\downarrow}$ se encuentran desarrollados en el teorema II.C.2)

ii) La base cuaterniónica $(\sigma^{o},\ \sigma^{i})$ está integrada por las matrices de Pauli, mientras que $(\Sigma^{o},\ \Sigma^{j})$ son matrices correspondientes a la representación de Proca para el grupo propio de Lorentz de espín 1.

$$\Sigma^{0} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad \Sigma^{1} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix}\quad \Sigma^{2} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix}\quad \Sigma^{3} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

iii) $\left(\frac{i}{2}\ B^{o}_{o}(\psi,\psi)P_a + \frac{1}{4}\ B^{o}_{\beta}\ (\psi,\psi)\tau_j\tau^{\beta}\tau_j P_b\right)$ es un factor resultante del efecto combinado de dos circunstancias; la identidad de Fierz generalizada IV.B.13) y la mezcla de componentes espacio-temporales que se hizo al pasar de la base cuaternió- nica representación espín 1/2 del grupo propio de Lorentz (matrices de Pauli) a las de Proca, mediante $P_a = 1$ y

$P_b = \begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix}$ (siguiendo II.B.2) $B^O_O(\psi,\psi) = \psi^T \varepsilon \psi$ y $B^O_\beta (\psi,\psi) = \psi^T \tau^*_\beta \varepsilon \psi$).

Analizando con más cuidado este factor, es posible interpretarlo como un operador rotación que al aplicarse sobre una base defina otra hasta un factor de fase dado por un multivector en el espacio de Lorentz reflejado en un eje j más un escalar.

En resumen, se ha usado la ecuación IV.B.8) para un caso particular; el grupo de norma SU(2), una base espacio-tiempo cuaterniónica representación espín 1 del grupo propio de Lorentz (que por cierto tiene las componentes espacio-tiempo mezcladas con respecto a la base usada en IV.B.8) representación 1/2 del grupo propio de Lorentz bajo un ángulo arbitrario) para el operador diferencial y finalmente la proyección cuaterniónica de la ecuación original. Lo que a continuación se desarrolla es la escritura de la ecuación IV.C.2) en una forma ya reportada en la literatura.

Para lograr mayor comodidad en el análisis se estudiará la ecuación IV.C.2) separando sus dos miembros, comenzando con el primero resulta que al aplicar los proyectores P en representación matricial se obtiene lo siguiente;

IV.C.3)

$$\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow} \Big[iB^o_o(\psi,\psi)\tau_1\tau^o M_o(D^o\psi,\psi)\sigma_o\sigma^O + \frac{1}{4} B^o_\beta(\psi,\psi)\tau_j\tau^\beta\tau_j\tau_1\tau^j M_j,(\psi,D^K\psi)\sigma_K,\sigma^{K'}\delta^{j'k'}_{JK} \;;$$

$$;\; iB^o_o(\psi,\psi)\tau_1\tau^j M_j,(\psi,D^K\psi)\sigma_K,\sigma^{K'}\delta^{j'K'}_{JK} \Big] \tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow} \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Sigma^o_j \end{pmatrix}$$

donde se ve en forma clara que los proyectores permitieron que los componentes espaciales y temporales en la primera base (σ^o,σ^i) se mezclarán definiendo nuevas componentes espaciales y temporales en la nueva base (Σ^o,Σ^i). Guiándonos por las componentes temporal y espaciales del operador diferencial se rearregla IV.C.3) de la siguiente forma;

IV.C.4)

$$iB^{o}_{o}(\psi,\psi)\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\tau_{1}M_{o}(D^{o}\psi,\psi)\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\Sigma_{o} + \tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\left(iB^{o}_{o}(\psi,\psi),\ \frac{i}{4}\ B^{o}_{\beta}(\psi,\psi)\tau_{J}\tau^{\beta}\tau_{J}\right)$$

$$\tau_{1}\tau^{J}M_{J'}(D^{K}\psi,\psi)\ \delta^{J'K'}_{JK}\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\begin{bmatrix}\Sigma_{K}\\ \Sigma_{o}^{K}\end{bmatrix}$$

que de forma directa es expresable como

IV.C.5)

$$iB^{o}_{o}(\psi,\psi)\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\tau_{1}M_{o}(D^{o}\psi,\psi)\Sigma_{o} + iB^{o}_{o}(\psi,\psi)\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\tau_{1}\tau^{J}M_{J'}(D^{K}\psi,\psi)\delta^{J'K'}_{JK}\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\Sigma_{K}$$

$$+ \tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\left(\frac{1}{4}\ B^{o}_{\beta}(\psi,\psi)\tau_{J}\tau^{\beta}\tau_{K}\tau^{J}M_{J'}(D^{K}\psi,\psi)\delta^{J'K'}_{JK}\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\Sigma_{o}\right.$$

ya que τ_{1}, τ_{J} y τ_{K} siguen el álgebra de Lie del grupo SU(2).

Usando el teorema II.C.1) y gracias a que

$$B^{o}_{\beta}(\psi,\psi)\tau_{J}\tau^{\beta}\tau_{K} = B^{o}_{J_{\alpha}}\tau^{\alpha T}\tau_{K}$$

donde $B^{o}_{J_{\alpha}} = (\psi^{T}\tau_{3}\tau^{T}_{J}\tau_{\alpha}\tau_{3}\ \varepsilon\ \psi)$, la expresión IV.C.5) puede escribirse como

IV.C.6) $$iB^{o}_{o}(\psi,\psi)\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}M_{1}(D^{o}\psi,\psi)\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\Sigma_{o} +$$

$$iB^{o}_{o}(\psi,\psi)\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\tau_{1}\tau^{J}M_{J'}(D^{K}\psi,\psi)\delta^{J'K'}_{JK}\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\Sigma_{K} +$$

$$\frac{1}{4}\ \tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\left(B^{o}_{J_{\alpha}}\tau^{T}_{\alpha}\right)\tau_{K}\tau^{J}M_{J'}(D^{K}\psi,\psi)\delta^{J'K'}_{JK}\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\Sigma_{o}.$$

Desarrollando un poco más esta expresión resulta que es igual a

IV.C.7)

$$iB^{\circ}_{o}(\psi,\psi)\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}M_1(D^{o}\psi,\psi)\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\Sigma_o + iB^{\circ}_{o}(\psi,\psi)\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\tau_1\tau^{J}M_J,(D^{K}\psi,\psi)\delta^{J'K'}_{JK}\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\Sigma_K +$$

$$+ \frac{1}{4} \; B^{\circ}_{J_o}(\psi,\psi)\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\tau_K\tau^{J}M_J,(D^{K}\psi,\psi)\delta^{J'K'}_{JK}\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\Sigma_o +$$

$$+ \frac{1}{4} \; B^{\circ}_{J_1}(\psi,\psi)\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\tau_1\tau_K\tau^{J}M_J,(D^{K}\psi,\psi)\delta^{J'K'}_{JK}\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\Sigma_o -$$

$$- \frac{1}{4} \; B^{\circ}_{J_2}(\psi,\psi)\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\tau_2\tau_K\tau^{J}M_J,(D^{K}\psi,\psi)\delta^{J'K'}_{JK}\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\Sigma_o +$$

$$+ \frac{1}{4} \; B^{\circ}_{J_3}(\psi,\psi)\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\tau_3\tau_K\tau^{J}M_J,(D^{K}\psi,\psi)\delta^{J'K'}_{JK}\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\Sigma_o .$$

Tomando la transpuesta de IV.C.7), usando el teorema II.C.1 nuevamente y finalmente agrupando se obtiene;

IV.C.8) $$\frac{i}{2}B^{\circ}_{o}(\psi,\psi)D^{\alpha}\Sigma_{\alpha}\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}M^{T}_{1}(\psi,\psi)\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow} + \frac{1}{4}\,\Sigma_o\left(\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}B^{\circ}_{J_o}(\psi,\psi)M^{T}_{K}(D\psi,\psi)\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\,\Sigma_o\left(\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}B^{\circ}_{J_1}(\psi,\psi)M^{T}_{K}(D\psi,\psi)\tau_1\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\right) + \frac{1}{4}\,\Sigma_o\left(\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}B^{\circ}_{J_2}(\psi,\psi)M^{T}_{K}(D\psi,\psi)\tau_2\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\,\Sigma_o\left(\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}B^{\circ}_{J_3}(\psi,\psi)M^{T}_{K}(D\psi,\psi)\tau_3\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\right) .$$

Es interesante mencionar algunos hechos relacionados con la expresión IV.C.8);

- El operador $\left[\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow},\ \tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\right]$ que permite extraer la parte cuaterniónica del multivector que encierren es igual a su transpuesta ya que

$$\tau^{T}_{+} = -\tau_{-} \;;\; \tau^{T}_{\downarrow} = -\tau_{\downarrow} \;\text{ y }\; (\tau_{\uparrow})^{T} = -\tau_{\uparrow} .$$

- Las matrices de Proca tienen la propiedad siguiente;

$\Sigma_o^T = \Sigma_o \; ; \; \Sigma_i^T = - \Sigma_i$ con $i = 1,2,3.$

- Gracias al teorema II.C.1) es fácil probar que

$\tau^J M_{J'}(D^K\psi, \psi)\delta_{JK}^{J'K'} = M_o(D^K\psi, \psi)$ para $k = 1,2,3$

por lo que si definimos $D = (D^1, D^2, D^3)$ entonces la expresión anterior se transforma a

$\tau^J M_{J'}(D^K\psi, \psi)\delta_{JK}^{J'K'} = M_o(D\psi, \psi),$

adicionalmente

$\tau_i\tau^J M_{J'}(D^K\psi, \psi)\delta_{JK}^{J'K'} = \tau_i M_o(D\psi, \psi) = M_i(D\psi, \psi)$

gracias al mismo teorema.

- Debido a que τ_i $(i = 1,2,3)$ reproducen el álgebra de Lie $\tau_i\tau_j = i\tau_k$

A continuación se usarán las propiedades de los operadores τ_m obtenidos en la comprobación del teorema II.C.2) para desarrollar la expresión IV.C.8

IV.C.9) $$\frac{i}{2} B_o^o(\psi,\psi)D^\alpha\Sigma_\alpha \Big(\tau_+ M_i^T(\psi,\psi)\tau_- + \tau_- M_i^T(\psi,\psi)\tau_+ + \tau_\uparrow M_i^T(\psi,\psi)\tau_\uparrow +$$

$$+ \tau_\downarrow M_i^T(\psi,\psi)\tau_\downarrow\Big) + \frac{1}{4}\Sigma_o \Big[\tau_+ B_{J_o}^o M_k^T(D\psi,\psi)\tau_- + \tau_- B_{J_o}^o M_k^T(D\psi,\psi)\tau_+ +$$

$$\tau_\uparrow B_{J_o}^o M_k^T(D\psi,\psi)\tau_\uparrow + \tau_\downarrow B_{J_o}^o M_k^T(D\psi,\psi)\tau_\downarrow\Big] + \frac{1}{4} \Sigma_o\Big(\tau_- B_{J_1}^o(\psi,\psi) M_k^T(D\psi,\psi)\tau_\downarrow +$$

$$+ \tau_+ B_{J_1}^o(\psi,\psi) M_k^T(D\psi,\psi)\tau_\uparrow + \tau_\uparrow B_{J_1}^o(\psi,\psi) M_k^T(D\psi,\psi)\tau_- + \tau_\downarrow B_{J_1}^o(\psi,\psi) M_k^T(D\psi,\psi)\tau_+\Big)$$

$$+ \frac{i}{4}\Sigma_o \Big(\tau_\uparrow B_{J_2}^o M_k^T(D\psi,\psi)\tau_- - \tau_\downarrow B_{J_2}^o M_k^T(D\psi,\psi)\tau_+ + \tau_- B_{J_2}^o M_k^T(D\psi,\psi)\tau_\downarrow -$$

$$- \tau_+ B^{\circ}_{j_2} M^T_k(D\psi,\psi)\tau_{\uparrow}\Big) + \frac{1}{4}\Sigma_{\circ}\Big(\tau_{\uparrow} B^{\circ}_{j_3}(\psi,\psi) M^T_k(D\psi,\psi)\tau_{\uparrow} - \tau_{\downarrow} B^{\circ}_{j_3}(\psi,\psi) M^T_k(D\psi,\psi)\tau_{\downarrow}$$

$$+ \tau_- B^{\circ}_{j_3} M^T_k(D\psi,\psi)\tau_+ - \tau_+ B^{\circ}_{j_3}(\psi,\psi) M^T_k(D\psi,\psi)\tau_-\Big)$$

Para continuar el análisis del primer miembro de la ecuación IV.C.2) será conveniente reordenar algunos términos en IV.C.9). Usando el teorema II.C.1) y las propiedades del mapa multivectorial de Cartan ante los operadores diferenciales se procederá a obtener el siguiente resultado

$$M^T_j(D\psi,\psi) M^T_k(\psi,\psi) = 16\tau_3 \ \varepsilon \ (D\psi)\psi^T\tau_3\tau^T_j\tau_3 \ \varepsilon \ \psi\psi^T\tau_3\tau^T_k \quad \text{o bien}$$

$$M^T_j(\psi,D\psi) M^T_k(\psi,\psi) = 16\tau_3 \ \varepsilon \ \psi D\psi^T\tau_3\tau^T_j\tau_3 \ \varepsilon \ \psi\psi^T\tau_3\tau^T_k ,$$

por comodidad se usará el primer caso con lo que

$$\begin{aligned} M^T_j(D\psi,\psi) M^T_k(\psi,\psi) &= 4\left(\psi^T\tau_3\tau^T_j\tau_3 \ \varepsilon \ \psi\right)\left(4\tau_3 \ \varepsilon \ (D\psi)\psi^T\tau_3\tau^T_k\right) \\ &= 4B^{\circ}_{j_{\circ}}(\psi,\psi) M^T_k(D\psi,\psi) . \end{aligned}$$

En general es posible demostrar que

$$\text{IV.C.10)} \qquad \begin{aligned} M^T_j(D\psi,\psi)\tau_{\alpha} M^T_k(\psi,\psi) &= \left(\psi^T\tau_3\tau^T_j\tau_{\alpha}\tau_3 \ \varepsilon \ \psi\right) M^T_k(D\psi,\psi) \\ &= B^{\circ}_{j_{\alpha}} M^T_k(D\psi,\psi) . \end{aligned}$$

Usando el resultado IV.C.10) en IV.C.9) ésta se transforma a;

$$\text{IV.C.11)} \qquad \frac{1}{2}B^{\circ}_{\circ}(\psi,\psi) D^{\alpha}\Sigma_{\alpha}\Big(\tau_+ M^T_i(\psi,\psi)\tau_- + \tau_- M^T_i(\psi,\psi)\tau_+ + \tau_{\uparrow} M^T_i(\psi,\psi)\tau_{\uparrow}$$

$$+ \tau_{\downarrow} M^T_i(\psi,\psi)\tau_{\downarrow}\Big) + \frac{1}{4}\Sigma_{\circ}\Big(\tau_+ M^T_j(D\psi,\psi) M^T_k(\psi,\psi)\tau_- + \tau_- M^T_j(D\psi,\psi) M^T_k(\psi,\psi)\tau_+ +$$

$$+ \tau_{\uparrow} M^T_j(D\psi,\psi) M^T_k(\psi,\psi)\tau_{\uparrow} + \tau_{\downarrow} M^T_j(D\psi,\psi) M^T_k(\psi,\psi)\tau_{\downarrow}\Big) +$$

$$+ \frac{1}{4}\,\Sigma_o\Big(\tau_+ M_j^T(D\psi,\psi)\tau_1 M_k^T(\psi,\psi)\tau_\uparrow + \tau_- M_j^T(D\psi,\psi)\tau_1 M_k^T(\psi,\psi)\tau_\downarrow +$$

$$\tau_\uparrow M_j^T(D\psi,\psi)\tau_1 M_k^T(\psi,\psi)\tau_- + \tau_\downarrow M_j^T(D\psi,\psi)\tau_1 M_k^T(\psi,\psi)\tau_+\Big) +$$

$$+ \frac{i}{4}\,\Sigma_o\Big(\tau_\uparrow M_j^T(D\psi,\psi)\tau_2 M_k^T(\psi,\psi)\tau_- - \tau_\downarrow M_j^T(D\psi,\psi)\tau_2 M_k^T(\psi,\psi)\tau_+ +$$

$$\tau_- M_j^T(D\psi,\psi)\tau_2 M_k^T(\psi,\psi)\tau_\downarrow - \tau_+ M_j^T(D\psi,\psi)\tau_2 M_k^T(\psi,\psi)\tau_\uparrow\Big) +$$

$$+ \frac{1}{4}\,\Sigma_o\Big(\tau_\uparrow M_j^T(D\psi,\psi)\tau_3 M_k^T(\psi,\psi)\tau_\uparrow - \tau_\downarrow M_j^T(D\psi,\psi)\tau_3 M_k^T(\psi,\psi)\tau_\downarrow$$

$$+ \tau_- M_j^T(D\psi,\psi)\tau_3 M_k^T(\psi,\psi)\tau_+ - \tau_+ M_j^T(D\psi,\psi)\tau_3 M_k^T(\psi,\psi)\tau_-\Big)$$

Rearreglando esta última expresión se obtiene

IV.C.12)

$$\frac{i}{2}\,B_o^{\alpha}(\psi,\psi)D^{\alpha}\Sigma_\alpha\Big\{\tau_+ M_i^T(\psi,\psi)\tau_- + \tau_- M_i^T(\psi,\psi)\tau_+ + \tau_\uparrow M_i^T(\psi,\psi)\tau_\uparrow + \tau_\downarrow M_i^T(\psi,\psi)\tau_\downarrow\Big\}$$

$$+ \frac{1}{4}\,\Sigma_o\ \Big[\tau_\uparrow M_j^T(D\psi,\psi)(1+\tau_3)M_k^T\tau_\uparrow +$$

$$+ \tau_\uparrow M_j^T(D\psi,\psi)(\tau_1 + i\tau_2)M_k^T(\psi,\psi)\tau_- + \tau_\downarrow M_j^T(D\psi,\psi)(1-\tau_3)M_k^T(\psi,\psi)\tau_\downarrow +$$

$$+ \tau_\downarrow M_j^T(D\psi,\psi)(\tau_1 - i\tau_2)M_k^T(\psi,\psi)\tau_+ + \tau_- M_j^T(D\psi,\psi)(\tau_1 + i\tau_2)M_k^T(\psi,\psi)\tau_\downarrow +$$

$$+ \tau_- M_j^T(D\psi,\psi)(1+\tau_3)M_k^T(\psi,\psi)\tau_+ + \tau_+ M_j^T(D\psi,\psi)(\tau_1 - i\tau_2)M_k^T(\psi,\psi)\tau_\uparrow +$$

$$+ \tau_+ M_j^T(D\psi,\psi)(1-\tau_3)M_k^T(\psi,\psi)\tau_-\ \Big]$$

Usando las propiedades de los operadores τ_m enlistados en la prueba del corolario al teorema II.C.2), IV.C.12) se transforma a

$$\text{IV.C.13)} \qquad \frac{i}{2}\, B^{\circ}_{o}(\psi,\psi)\, D^{\alpha}\Sigma_{\alpha}\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}M^{T}_{i}(\psi,\psi)\,\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}$$

$$-\ \frac{1}{2}\ \Sigma_{o}\left(\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}M^{T}_{j}(D\psi,\psi)\,\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\right)\left(\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}M^{T}_{k}(\psi,\psi)\,\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\right)$$

en notación contraída que por la linealidad y simetría del mapa ante el operador diferencial equivale a

$$\text{IV.C.14a)} \qquad \frac{i}{2}\, B^{\circ}_{o}(\psi,\psi)\, D^{\alpha}\Sigma_{\alpha}\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}M^{T}_{i}(\psi,\psi)\,\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}$$

$$-\ \frac{1}{4}\ \left[D\Sigma_{o}\ \left(\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}M^{T}_{j}(\psi,\psi)\,\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\right)\left(\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}M^{T}_{k}(\psi,\psi)\,\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\right)\right]$$

recordando que por el álgebra de Lie de SU(2) y las propiedades de los mapas extendidos de Cartan multivectoriales; $i,j,k,$ toman un orden cíclico.

El teorema II.C.2) garantiza que es posible substituir en IV.C.14) la identidad

$$B_{\alpha}(\psi,\psi) = -\ \frac{1}{2}\ \left(\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}M^{T}_{\alpha}(\psi,\psi)\,\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\right)$$

con lo que el primer miembro de la ecuación IV.C.2) adopta la forma

$$\text{IV.C.14)} \qquad -iB^{\circ}_{o}(\psi,\psi)\, D^{\alpha}\Sigma_{\alpha}B_{i}(\psi,\psi)\ -\ \left\{D\Sigma_{o}B_{j}(\psi,\psi)\right\}\cdot B_{k}(\psi,\psi)\,.$$

Por otro lado es sencillo probar que $D^{\alpha}\Sigma_{\alpha}B_{i}(\psi,\psi)$ equivale a $-iD^{\alpha}S_{\alpha}F_{i}$, donde S^{α} es la representación irreducible de Proca para el grupo propio de Lorentz espín uno,

$$S^{\circ} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ S^{1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix},\ S^{2} = \begin{pmatrix}0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0\end{pmatrix},\ S^{3} = \begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Recordando la construcción del mapa $B_\alpha(\psi,\psi)$ (teorema II.C.2) éste no se desarrolla sobre toda el álgebra $\mathcal{C}(1,3)$ sino sobre la base cuaterniónica (σ^o, σ_i), pero en el caso particular aquí tratado el cambio de base a las matrices de Proca conlleva otra reducción más en el espacio ya que solamente sobreviven las nuevas componentes espaciales dadas como

$F_j = i\left[B^1_j(\psi,\psi),\ B^2_j(\psi,\psi),\ B^3_j(\psi,\psi)\right]$ en $\dot{D}^\alpha \Sigma_\alpha B_j(\psi,\psi)$.

Una vez reconocido el efecto del cambio de base a la representación de Proca es sencillo notar que la única parte no nula del término $(D\Sigma_o B_j(\psi,\psi))\cdot B_k(\psi,\psi)$ será equivalente a $-(DF_j)\cdot F_k$. Después de este análisis es factible escribir IV.C.14) como

$$\text{IV.C.15)}\quad -B^o_o(\psi,\psi)D^\alpha S_\alpha F_i + (DF_j)\cdot F_k\ ,$$

expresión en la que los campos multivectoriales F_i están desarrollados sobre una base tipo espacio tridimensional y no sobre la cuaterniónica correspondiente a $B_j(\psi,\psi)$.

La expresión IV.C.15) es el primer miembro transpuesto de la ecuación IV.C.2) por lo que solo resta analizar su segundo miembro transpuesto. El segundo miembro de IV.C.2) es

$$-\ \tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\left[\frac{iB^o_o(\psi,\psi)}{2}\ \phi^\beta \tau_\beta M_i(\psi,\overline{\psi})\right]\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}$$

que es evidentemente igual a

$$\text{IV.C.16)}\qquad \frac{-iB^o_o(\psi,\psi)}{2}\ \tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\left[\phi^\beta \tau_\beta M_i(\psi,\overline{\psi})\right]\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}$$

La expresión anterior es equivalente a

$$\text{IV.C.17)}\ \frac{i}{2}\ B^o_o(\psi,\psi)\ \tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\left[\phi_i M_o(\psi,\overline{\psi}) + i\ \epsilon_{imn}\phi_m M_n(\psi,\overline{\psi})\right]\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}$$

siempre y cuando se garantize que en el cuadruplete ϕ^β la componente cero sea nula para cualquier caso. El procedimiento para mostrar esta equivalencia hace uso del teorema II.C.1) y por ser repetitivo solo se mostrará un caso particular. Supongamos i = 2, entonces IV.C.16) queda escrita como

$$\frac{i}{2}\ B^{\circ}_{o}(\psi,\psi)\ \tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\left[\phi^{1}\tau_{1}M_{2}(\psi,\overline{\psi}) + \phi^{2}\tau_{2}M_{2}(\psi,\overline{\psi}) + \phi^{3}\tau_{3}M_{2}(\psi,\overline{\psi})\right]\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}$$

que es equivalente a

$$\frac{i}{2}\ B^{\circ}_{o}(\psi,\psi)\ \tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\left[i\tau_{3}\tau_{2}M_{2}(\psi,\overline{\psi})\phi_{1} + \tau_{2}M_{2}(\psi,\overline{\psi})\phi_{2} - i\tau_{1}\tau_{2}M_{2}(\psi,\overline{\psi})\phi_{3}\right]\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}$$

por el teorema II.C.1) esta expresión se transforma a

$$\frac{i}{2}\ B^{\circ}_{o}(\psi,\psi)\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\left[iM_{3}(\psi,\overline{\psi})\phi_{1} + M_{o}(\psi,\overline{\psi})\phi_{2} - iM_{1}(\psi,\overline{\psi})\phi_{3}\right]\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}$$

siendo el caso particular de IV.C.17) para i = 2.

Tomando la transpuesta de IV.C.17) se obtiene

$$\frac{i}{2}\ B^{\circ}_{o}(\psi,\psi)\ \tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}\left[\phi_{i}M^{T}_{o}(\psi,\overline{\psi}) + i\ \epsilon_{kmn}\phi_{m}M^{T}_{n}(\psi,\overline{\psi})\right]\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow} \quad \text{o bien}$$

$$\text{IV.C.18)}\qquad \frac{1}{2}\ B^{\circ}_{o}(\psi,\psi)\phi_{i}\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}M^{T}_{o}(\psi,\overline{\psi})\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow} + i\ \epsilon_{kmn}\phi_{m}\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}M^{T}_{n}(\psi,\overline{\psi})\Big]\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}$$

Pero gracias al teorema II.C.2) sabemos que

$$B_{\alpha}(\psi,\overline{\psi}) = -\frac{1}{2}\ \tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow}M^{T}_{\alpha}(\psi,\overline{\psi})\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\ ,$$

por lo tanto IV.C.18) resulta ser igual a

$$\text{IV.C.19)}\qquad -\ iB^{\circ}_{o}(\psi,\psi)\left[B_{o}(\psi,\overline{\psi})\phi_{i} + i\ \epsilon_{kmn}\phi_{m}B_{n}(\psi,\overline{\psi})\right]$$

Finalmente se puede concluir que la ecuación IV.C.2) puede ser escrita como

$$-\ iB^{\circ}_{o}(\psi,\psi)D^{\alpha}S_{\alpha}F_{i} + (DF_{j})\cdot F_{k} =$$

$$= -\ iB^{\circ}_{o}(\psi,\psi)\left[B_{o}(\psi,\overline{\psi})\phi_{i} + i\ \epsilon_{kmn}\phi_{m}B_{n}(\psi,\overline{\psi})\right.\ .$$

o bien

$$\text{IV.C.20)} \quad D^{\alpha}S_{\alpha}F_{i} + i\,\frac{(DF_{j})\cdot F_{k}}{B_{o}^{o}(\psi,\psi)} = B_{o}(\psi,\overline{\psi})\phi_{i} + i\,\epsilon_{kmn}\phi_{m}B_{o}(\psi,\overline{\psi})$$

esta ecuación fue estudiada por F. Reifler[25] aplicada a un modelo de interacciones electrodébiles (en el mapa se usa el grupo de norma SU(2)). El mapa que él define $B_{\alpha}(\psi,\chi)$ es un caso particular de $M_{\alpha}(\psi,\chi)$ en el que se toma la subálgebra cuaterniónica; pero además este análisis permite concluir que la ecuacion IV.C.20) es el resultado de un cambio de representación (de espin 1/2 a espín 1 del grupo propio de Lorentz) de la base del operador diferencial en la que las componentes espacic-temporales de una representación son las correspondientes a la otra mezcladas entre sí (se puede pensar en una fase o "rotación" que permite redefinir nuevas componentes a partir de las originales). Así mismo el cambio de base del operador diferencial es la causa de que el multivector $B_{i}(\psi,\psi)$ escrito en álgebra cuaterniónica se proyecte a F_{i}, por lo que el primer miembro de la ecuación IV.C.20) no está escrito en a toda el álgebra cuaterniónica mientras que el segundo miembro sí lo está ya que en este último no hay operadores diferenciales que puedan sufrir un cambio de base.

Para finalizar este capítulo será conveniente realizar una serie de comentarios de relevancia en el uso e interpretación física tanto de la ecuación general IV.B.8) como de su proyección IV.C.20).

i) El mapa extendido de Cartan definido en II.B.1) como

$$M_{\beta}^{\alpha}(\psi,\chi) = \psi^{T}\Gamma^{\alpha}(\lambda_{\beta}^{*}\overline{\chi}^{*}) = \psi^{T}\Gamma^{\alpha}\lambda_{\beta}^{*}\,\varepsilon\,\chi$$

es invariante ante transformaciones infinitesimales de norma en el espacio de los espinores ψ y siempre y cuando $\varepsilon\,\omega^{i} = -\,\omega^{iT}\varepsilon$ así como $(\Gamma^{\alpha}\lambda_{\beta}^{*})(\theta_{i}\omega^{iT}) = (\theta_{i}\omega^{iT})(\Gamma^{\alpha}\lambda_{\beta}^{*})$ para todo índice i, donde ω^{i} es un generador del grupo de norma y θ_{i} es su fase asociada. La proyección de este mapa en el caso particular II.B.2) cumple estas condiciones cuando ω^{i} sean los generadores del grupo SU(2) ya que la base usada para el espacio-tiempo es cuaterniónica. Por otro lado este mapa será invariante ante una transformación de Lorentz en el espacio de los espinores ψ,χ cuando $\gamma^{T}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}\lambda^{*}_{\beta}\ \varepsilon = -\Gamma^{\alpha}\lambda^{*}_{\beta}\ \varepsilon\ \gamma_{\alpha\beta}$ con $\alpha,\beta = 0,1,2,3$ ($\gamma_{\alpha\beta}$ es la representación multivectorial del grupo propio de Lorentz) ; el mapa II.B.2) no cumple la anterior condición para todos los valores de índices α,β. Al aplicar el operador CPT a los espinores ψ,χ (la aplicación sucesiva, en el orden indicado, de los operadores que conjugan la carga, cambian paridad e invierten la dirección del tiempo en los pares de espinores dados) el mapa extendido de Cartan transforma como;

IV.C.21) $$M^{\alpha}_{\beta}\Big[\mathrm{CPT}\psi(x,t),\ \mathrm{CPT}\chi(x,t)\Big] = e^{-i\pi}M^{\alpha}_{\beta}\Big[\psi(-x,-t),\ \chi(-x,-t)\Big].$$

Por último es preciso reconocer que formalmente el mapa II.B-1) está definido sobre dos espacios de Hilbert distintos, que bajo aplicaciones físicas corresponden a los generados por las soluciones de un par de ecuaciones de Dirac (lo que por cierto no excluye el caso particular en que ambos coincidan).

ii) En el teorema II.C.2) se muestra la forma en que se construye la subálgebra cuaterniónica del multivector $M_{\alpha}(\psi,\chi) \in \mathcal{C}(1,3)$, si se aplicara el mismo procedimiento a $B_{\alpha}(\psi,\chi)$ (subálgebra cuaterniónica de $\mathcal{C}(1,3)$ se comprobaría que éste permanece invariante ante la transformación (la proyección cuaterniónica de un álgebra cuaterniónica es ella misma); la física descrita por un Lagrangiano (función de campos cuaterniónicos cuya forma está condicionada a las operaciones entre ellos) no se altera con los cambios en los cuaterniones que dejan el álgebra invariante. Este automorfismo fue analizado desde el inicio del estudio de la mecánica cuántica cuaterniónica en los trabajos de Birkhoff, von Neuman (1936) y Finkelstein (1960's). Nuestro trabajo se caracteriza por presentar una estructura más general que la desarrollada por estos autores (lo que ellos muestran como una transformación de norma se circunscribe a una proyección algebraica de $\mathcal{C}(1,3) \longrightarrow$ cuaterniones que incluye el caso particular cuaterniones $\longrightarrow$ cuaterniones) con la consiguiente ventaja de que podemos incluir también otros casos de interés físico en el mismo esquema de razonamiento lógico. Por otro lado, mientras que en la mecánica cuántica cuaterniónica los campos clásicos corresponden a funciones valuadas cuaterniónicas del espacio-tiempo donde los campos físicos serán las componentes de los campos cuaterniónicos;[21,23] en nuestro modelo el campo con interpretación física es todo el multivector $M_\alpha(\psi,\chi)$ y no sus componentes aisladas. Es así como en el primer caso una transformación de norma que permitirá la combinación entre las componentes del campo está modelando la rotación entre los campos físicos (partículas asociadas), mientras que en el segundo las rotaciones serán entre los campos valuados multivectorialmente (caso particular cuaterniónico)[21]. En la actualidad los modelos de prequarks son escritos de forma natural en álgebra cuaterniónica para la representación de los campos asociados a partículas elementales[23].

iii) Como caso particular de III.B.4), cuando $\chi = \chi' = \psi' = \psi$ y se toma solamente la parte espacial del producto, se obtiene

IV.C.22) $$iB_o^i(\psi,\psi) = \frac{(F_i \wedge F_j, F_k)}{\lambda} \quad \text{donde } \lambda = \|F_i\| \; ; \quad \text{para } i,j,k \text{ cíclico}$$

con lo que se obtienen 9 grados de libertad para fijar el espinor ψ a partir de sus formas bilineales (ocho de ellos provienen de cada componente espincrial en el campo de los complejos y una por libertad de fase); puesto que para este caso el mapa $C^4 x C^4 \longrightarrow \mathcal{C}(1,3)$ cuatro veces degenerado, posee diez coeficientes no nulos por cobertura (dirección isotópia) y, gracias a la relación IV.C.22) permite 9 grados de libertad en total, como se esperaba.

Por otro lado si asignamos bajo la representación quiral un valor particular al espinor ψ tal que presente una quiralidad definida[30], con lo que podría ser identificado físicamente como un neutrino (antineutrino) (en el sentido de corresponder a un campo para una partícula sin masa en reposo), los campos F_i con $i = 1,2$ (F_3 sería nulo) pueden comparararse directamente con el correspondiente al campo electromagnético (que también está escrito en álgebra cuaterniónica) en la ecuación de Maxwell

$$- \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{3} \alpha^j \frac{\partial}{\partial x^j} \psi = 4\pi\Phi \quad \text{con}$$

IV.C.23)

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ H_x - iE_x \\ H_y - iE_y \\ H_z - iE_z \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} \quad y \quad \alpha^j = \left\{ 1, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

desarrollada por Oppenheimer, Okamura y por H.E. Moses en 1958[19] cuando se tienen dos ondas electromagnéticas polarizadas viajando en la dirección z, para F_1: $E_y = H_x = 0$ y $E_x = H_y$ mientras que para F_2: $H_x = - E_y$ y $E_x = H_y = 0$. Lo anterior refuerza la antigua idea de la dualidad fotón-neutrino que permitiría eventualmente la construcción de fotones a partir de pares de neutrinos (es decir, se conceptualiza al neutrino como un fotón "enroscado"), al menos se podría pensar en el campo del fotón como dos campos espinoriales "fusionados"[17].

iv). En caso de desearlo la estructura aquí presentada permitiría abordar la construcción de un Lagrangiano para el modelo. En general se puede usar como método buscar combinaciones de los campos que reproduzca la ecuación de movimiento y corrientes conservadas observadas experimentalmente, con la característica adicional de que los campos asociados a una partícula sean de naturaleza multivectorial con las propiedades y características antes descritas en función del grupo de Lie y la simetría espaci-temporal usada en su construcción. Es interesante analizar el marco general aquí expuesto para la proyección de un mapa descrito en una subálgebra de otro (proyección dada por el teorema II.C.2)) con respecto al Lagrangiano propuesto en el modelo del mapa proyectado, el caso que se ha mostrado en este trabajo corresponde a la proyección del mapa $M_\beta(\psi,\chi)$ escrito en $\mathcal{C}(1,3)$ con grupo de norma SU(2) al correspondiente $B_\beta(\psi,\chi)$ con el mismo grupo de norma pero con estructura cuaterniónica. Este ejemplo es sumamente enriquecedor ya que $B_\beta(\psi,\chi)$ con estructura cuaterniónica se enmarca dentro de los conceptos básicos de la teoría de norma generada para la mecánica cuántica cuaterniónica en la que ya se han explorado profusamente los Lagrangianos posibles asociados a los cuaternios y por lo tanto a sus propiedades (así como mecanismos de ruptura espontánea de la simetría)[21]. Es por ésto que la estructura total del modelo depende fuertemente de las propiedades algebraicas de los campos usados, por lo tanto el punto de vista de nuestro trabajo permite un giro conceptual en este tipo de modelos ya que los campos cuaterniónicos y sus transformaciones de norma se presentan como proyecciones particulares a una subálgebra del grupo completo de Clifford asociado al espacio-tiempo $\mathcal{C}(1,3)$ para el grupo de norma SU(2) y el Lagrangiano se puede construir en la subálgebra cuaterniónica (lo que constituye la costumbre general) o bien en el álgebra completa del grupo $\mathcal{C}(1,3)$ para después proyectar a los cuaternios en lo que podría proponerse como una ruptura espontánea de simetría en el índice espacio-temporal análoga a la que se implementa en el grupo de norma.

v). Cuando se rearregló la ecuación de Dirac en la forma IV.B.2) se hizo uso del cuadruplete $\phi^\alpha = (0,0,0,m)$ para asignarle una masa de Dirac a la partícula descrita por el espinor ψ, a la que queremos identificar libremente como un electrón. Supongamos ahora que proponemos otro valor al cuadruplete ϕ^α tal que corresponda por ejemplo a $\phi^\alpha = (0,m',0,0)$. Estonces la ecuación de Dirac IV.B.2) equivale al par de ecuaciones desacopladas

$$\text{IV.C.24)} \qquad \begin{aligned} P^\alpha\sigma_\alpha\zeta &= m'\bar{\zeta}^* \\ P^\alpha\sigma_\alpha\eta &= -m'\bar{\eta}^* \end{aligned}$$

donde $\psi = \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}$ es el espinor asociado a este nuevo cuadruplete, cuando se toma el límite $m' \longrightarrow 0$ el par de ecuaciones IV.C.24) se podría asociar a un neutrino (en el sentido de corresponder a un campo para una partícula sin masa en reposo).

De lo anterior se busca mostrar que la elección de una forma particular para ϕ_β (que por cierto reproducen el álgebra SU(2) de tal forma que al contraerse con τ_β se cierre el álgebra de este grupo de Lie) determina algunos elementos que permiten identificar al espinor asociado con una partícula elemental, en lo sucesivo $\hat{\phi}_\beta = (0,0,0,1) = \phi_\beta/m$ se asociará con el electrón mientras que $\hat{\phi}_\beta = (0,1,0,0) = \phi_\beta/m'$ lo será con el neutrino (con la consecuente degeneración entre familias ya que para efecto de este cuadruplete el electrón, muón y taón son indistinguibles entre sí al igual que sus correspondientes neutrinos). Por cierto es interesante observar que al asociar distintos $\hat{\phi}_\beta$ para dos partículas diferentes lo que se les está asignando es una dirección isotópica en el espacio de norma SU(2) que recuerda el procedimiento usual de ruptura espontánea de la simetría (mecanismo de Higgs[30]), cuando al valor esperado del campo en el vacío se le asigna arbitrariamente una dirección isotópica, por lo tanto y bajo esta interpretación será forzoso garantizar que $\phi^\circ \equiv 0$ para toda partícula.

vi). De acuerdo con la teoría de perturbaciones, la sección transversal de dispersión en la interacción entre partículas elementales puede expresarse como[1,9,18,30]

IV.C.25) $$d\sigma = \frac{|M|^2}{F}\, dQ$$

donde M es la amplitud invariante que contiene la información física asociable al proceso y se determina mediante las reglas de Feynman del diagrama correspondiente, dQ es el factor espacio fase invariante de Lorentz y F es el flujo incidente en el laboratorio. Ya que es M la cantidad físicamente significativa en un proceso, en lo sucesivo nos circunscribiremos a su análisis.

En la teoría de perturbaciones a segundo orden como una aproximación adecuada para los fines de este trabajo y considerando exclusivamente propagadores escalares en el proceso, las reglas de Feynman[1,9,18] para la amplitud invariante de una interacción pueden conducir a la siguiente expresión;

$$\text{IV.C.26)} \quad - \quad iM = \left\{ie\bar{u}_c\gamma^{\mu}\ \frac{1}{2}\ (1-\gamma^5\omega)u_A\right\} \ \frac{g^{\nu}_{\mu}}{p^2-m^2_{\omega}} \ \left\{ie\bar{u}_D\gamma_{\nu}\frac{1}{2}(1-\gamma_5\omega)u_B\right\}$$

donde el diagrama usado es;

$$J^{\mu(1)} = ie\bar{u}_c\gamma^{\mu}\ \frac{1}{2}\ (1-\gamma^5\omega)u_A$$

$$J^{(2)}_{\nu} = ie\bar{u}_D\gamma_{\nu}\ \frac{1}{2}\ (1-\gamma_5\omega)u_B$$

g^{ν}_{μ} es el tensor métrico de Lorentz.

con u_i como biespinor asociado al fermión i. El factor ω es 0 en caso de que la interacción sea puramente vectorial (QED) o 1 cuando coexistan corrientes axiales y vectoriales en el proceso (interacción electrodébil), finalmente $\frac{g^{\nu}_{\mu}}{p^2-m^2_{\omega}}$ es el propagador escalar de la interacción con momento p y masa m_{ω} la cual será cero si $\omega = 0$. Este caso particular permite relacionar directamente el mapa extendido multivectorial de Cartan con diagramas incluidos en la electrodinámica cuántica (QED) donde A,B,C,D serán electrones (o bien una combinación de taones y muones que conservan su identidad durante la transición) y el factor ω es nulo; asi como con los correspondientes a las interacciones electrodébiles donde A,B,C,D, se identican como electrones, neutrinos o bien algún quark (u y d o bien c y s) que al formar parte de un hadrón participan en este tipo de interacciones.

Usando el mapa multivectorial de Cartan se propone la siguiente expresión para la amplitud invariante de dispersión entre partículas elementales correspondiente a las caracteristicas particulares ya descritas antes

$$\text{IV.C.27)}\quad iM = \frac{e^2}{2}\left[1 + i\gamma_5 \operatorname{sen}\theta_{AC}\right]\left(\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow} M_o(\psi'_A,\overline{\psi}_C)\,\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\right)^{\nu}\frac{g^{\mu}_{\nu}}{p^2 - m^2}$$

$$\left[1+i\gamma_5 \operatorname{sen}\Theta_{BD}\right]\left(\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow} M_o(\psi'_B,\overline{\psi}_D)\,\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\right)\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\Big)_{\mu}\quad ,$$

en esta expresión la corriente de transición entre dos partículas (A y B) se obtiene como la parte cuaterniónica del mapa multivectorial $M_o(\psi'_A,\overline{\psi}_B)$ escrito en dos espacios de Hilbert distintos (los correspondientes a los pares de espinores A y B) para posiciones espacio-temporales diferentes (nótese que el mapa no tiene dirección isotópica ya que cuando se usa alguna en particular las corrientes de transición entre partículas no se pueden modelar usando cuaterniones). Finalmente θ_{AB} será el ángulo generado por los cuaternios $\hat{\phi}_k(A)$ y $\hat{\phi}_k(B)$ (direcciones isotópicas asociadas a las partículas A y B), se postulará la aditividad y conservación de $\hat{\phi}_k$ durante una interacción (de esta forma se le da a $\hat{\phi}_k$ la naturaleza de una etiqueta característica de la partícula con el número de grados de libertad suficiente para ser expresada en función de los números conservados dentro de los modelos conocidos de interacción; carga eléctrica, número bariónico y leptónico) con lo cual se tiene un mecanismo para asignar masa al propagador de la interacción (m_ω). Al forzar la conservación de $\hat{\phi}_k$ bajo aditividad de los mismos en cada vértice del diagrama de Feynman se obtiene un cuadruplete asociado al bosón de norma cuya masa queda definida como directamente proporcional a la norma de este último. Usando este mecanismo se predice una masa nula para el fotón y los gluones; mientras W^+, W^- y Z tendrán masa distinta de cero.

Cuando se usa IV.C.27) en diagramas de QED se sabe que $\operatorname{sen}\theta_{AC} = \operatorname{sen}\theta_{BD} = 0$ y $m_\gamma = 0$, la expresión resultante coincide con IV.C.26) para $\omega = 0$. Si se toma el caso en que $\operatorname{sen}\theta_{AC} = \operatorname{sen}\theta_{BD} = 1$ y $m_\omega \neq 0$ se reproduce la amplitud invariante para procesos electrodébiles, en v) se obtuvo el valor $\hat{\phi}_k(\nu)$ que evidentemente es ortogonal a $\hat{\phi}_k(e^-)$ pero gracias al postulado de aditividad y conservación es posible garantizar que esta propiedad se presenta en cualquier par de partículas que intercambian un bosón de norma SU(2) W^+ (por ejemplo $e^- + W^+ \longrightarrow \nu$, $u \longrightarrow W^+ + d$ y $c \longrightarrow W^+ + S$). Es así como se tienen restricciones para los cuaternios asociables a quarks basados en su aditividad y conservación en todo diagrama de Feynman (se puede exigir norma unitaria) y en la forma de la amplitud de transición probada experimentalmente, es importante subrayar ésto ya que en este trabajo se busca obtener la mayor cantidad de información posible a partir de resultados observados (o bien factibles de ser observados), por lo que para establecer alguna información sobre los cuaternios asociados a los quarks esnecesario hacer un análisis en la estructura multivectorial de la amplitud invariante de transición ya que la ecuación de Dirac para estos fermiones carece de significado físico directo por no observarse libres en la naturaleza (siempre se encuentran confinados en hadrones observables experimentalmente). Una forma de obtener mayor cantidad de restricciones para perfilar por completo la naturaleza de $\hat{\phi}_k$ (quark) a partir de medidas experimentales, podría consistir en extender la expresión IV.C.27) a una mayor dimensionalidad (C^8) para implementar la simetría SU(3) que permite modelar transiciones entre quarks de diferente color. Este análisis se concluirá presentando la forma en que la estructura multivectorial IV.C.27) modela el ángulo de Cabibbo.

Con el objetivo de explicar los hechos experimentales relacionados con las secciones transversales de interacción entre algunas partículas elementales (por ejemplo $K^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ y $\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$) se propuso una rotación de estados de quarks d y s puros en un ángulo θ_c llamado de Cabibbo.

La relación entre las amplitudes de transición invariantes para el decaimiento β extraño ($s \longrightarrow u + e + \overline{\nu}$) y el no extraño ($d \longrightarrow u + e + \overline{\nu}$) se define como la tangente del ángulo de Cabibbo. Si postulamos la validez de la expresión IV.C.27) para ambos casos (de hecho ya se ha mostrado su aplicabilidad para el decaimiento β no extraño) se obtiene que

IV.C.28)

$$\tan\theta_c = \frac{\left[1+i\gamma_5 \operatorname{sen}\theta_{su}\right]\left[\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow} M_o(\psi'_s,\overline{\psi}_u)\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\right]^{\nu} \dfrac{g^{\mu}_{\nu}}{p^2-m'^2}\left[\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow} M_o(\psi'_{\nu},\overline{\psi}_e)\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\right]_{\mu}}{\left[1+i\gamma_5 \operatorname{sen}\theta_{du}\right]\left[\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow} M_o(\psi'_d,\overline{\psi}_u)\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\right]^{\nu} \dfrac{g^{\mu}_{\nu}}{p^2-m^2}\left[\tau^{\pm}_{\uparrow\downarrow} M_o(\psi'_{\nu},\overline{\psi}_e)\tau^{\mp}_{\uparrow\downarrow}\right]_{\mu}}$$

al incluir los valores conocidos en esta expresión ($\operatorname{sen}\theta_{du} == 1$) y despreciando el momento transferido por el propagador, el análisis multivectorial de IV.C.28) permitiría pensar que $\operatorname{sen}\theta_{su} = 1$ y $m = .4837\, m' = \sqrt{\tan\theta_c}\, m'$.

Es conveniente mencionar que existen formas alternativas de usar (e interpretar) este tipo de modelos ya que si se hubieran postulado los cuaternios $\hat{\phi}_k$ asociados a los quarks, así como expresiones diferentes para las amplitudes de transición multivectoriales IV.C.27) y una relación específica entre m y m' se podría haber ajustado el ángulo de Cabibbo a su valor experimental; sin embargo este procedimiento deja una gran cantidad de suposiciones sin justificación clara y sería contrario a la filosofía de este trabajo[26]. En un modelo vectorial para interacciones electrodébiles F. Reifler y R. Morris[25,26] definen los cuaternios $\hat{\phi}_k$ como Higgs asociados a quarks y leptones bajo la postulación de su relación con la carga eléctrica, número bariónico y leptónico así como de un Lagrangiano (que tiene como corrientes conservadas las expresiones que forman el segundo miembro de IV.C.20) y cuya ecuación de movimiento es esta misma expresión) y una matriz de transición sumamente arbitraria en su estructura (en este trabajo se buscó emplear el mapa extendido de Cartan multivectorial en la amplitud de transición invariante bajo el criterio de mayor sencillez posible): considerando la evidente generalidad de nuestro desarrollo sobre el presentado para estos autores (siempre es posible proyectar la subálgebra cuaterniónica de $\mathcal{G}(1,3)$ para un mapa con norma SU(2) que corresponde al caso presentado por ellos) nuestra política de trabajo permite reducir considerablemente las suposiciones arbitrarias en el modelo.

vii) La derivada usada en IV.B.1) (de donde se obtuvo la ecuación multivectorial IV.B.8) y su proyección posterior IV.C.20) puede ser escrita como[25]

IV.C.29) $$D^{\alpha} = i\hbar\nabla^{\alpha} + eV^{\alpha}_{k}t^{k} + e_{o}V^{\alpha}_{o}t^{o}$$

V^{α}_{β} $\beta = 0,k$ son potenciales de Yang-Mills directamente observables.

e identificada como una derivada covariante si t_{β} son los generadores de algún grupo de Lie.

Tomando como ejemplo el caso particular del grupo SU(2) en el cual e y e_{o} son los valores absolutos de las cargas eléctrica y neutra respectivamente, IV.C.29) deberá ser igual a la derivada covariante para el modelo Weinberg-Salam

IV.C.30) $$D'^{\alpha} = i\hbar\nabla^{\alpha} - gW^{\alpha}_{k}t'^{k} - g_{o}W^{\alpha}_{o}t'^{o}$$

donde g y g_{o} son los coeficientes de acoplamiento y W^{α}_{β} son los potenciales de Yang-Mills en este modelo no directamente observables. Los generadores de SU(2) t^{β} y t'^{β} estarán en distinta representación y será el ángulo de Weinberg quien directamente fijará su relación cuando son diagonales (lo contrario también es cierto, la representación de los generadores diagonales $t_{o}(t'_{o})$ y $t_{3}(t'_{3})$ determina el ángulo de Weinberg). Así cuando $t_{3} = + t'_{3} - t'_{o}$ y $t_{o} = -3t'_{3} + t'_{o}$ se tiene que

$$eV^{\alpha}_{3}(t'_{3} + t'_{o}) + e_{o}V^{\alpha}_{o}(3t_{3}-t'_{o}) = gW^{\alpha}_{3}t^{3\prime} + g_{o}W^{\alpha}_{o}t'_{o}$$

y como $$W^{\alpha}_{3} = V^{\alpha}_{o}\cos\theta_{w} + V^{\alpha}_{3}\operatorname{sen}\theta_{W}$$

$$W^{\alpha}_{0} = -V^{\alpha}_{o}\operatorname{sen}\theta_{w} + V^{\alpha}_{3}\cos\theta_{W}$$

entonces obtenemos las siguientes relaciones

$$\tan\theta_W = \frac{1}{3}\cot\theta_w = \frac{g_o}{g} \qquad \mathrm{sen}^2\theta_w = \frac{1}{4}$$

$$e_o = e\tan\theta_W$$

que corresponden adecuadamente a los valores ya probados experimentalmente.

viii) El comentario final a este capítulo es sobre las objeciones que podrían presentarse al uso de campos multivectoriales para describir campos bosónicos y fermiónicos en un modelo. La solución a este conflicto tiene orígenes diversos; cuando se comenzaron a usar campos vectoriales para describir partículas de espín 1/2, W. Witten[33] probó un mecanismo para que un campo bosónico en el Lagrangiano se comporte como fermiónico gracias a la adición de un término anómalo al mismo con determinadas propiedades de transformación en la acción mecano-cuántica cuando el campo en cuestión representa un solitón girado en un ángulo 2π si el tiempo transcurre de $-\infty$ a ∞. Esta construcción permite esperar que en un Lagrangiano con campos multivectoriales sea posible fijar la estadística deseada para un campo físico mediante la adición de términos anómalos en forma semejante a lo hecho por E. Witten.

En un nivel diferente, H. Bacry y M. Boon[4] presentaron un trabajo en el cual se definen álgebras bosónicas y fermiónicas como álgebras de Clifford sobre espacios vectoriales complejos de dimensión 2n dotados de una forma simpléctica (bosones) o simétrica (fermiones) donde la base canónica generadora del álgebra de Clifford está integrada por n operadores de creación y n de destrucción asociados al campo. Este mecanismo es útil si el modelo en el cual se trabaja permite que la estadística de los campos físicos se defina hasta que éstos se cuantizan; por otro lado se sabe que en teoría de campo para un caso libre de interacción es posible escribir[1,30]

IV.C.31)

$$\phi(x,t) = \int \frac{d^3k}{\left[(2\pi)^3 2\omega_k\right]^{1/2}} \left[a(k)\,e^{i(k\cdot x-\omega_k t)} + a^{+}(k)\,e^{-i(k\cdot x-\omega_k t)}\right]$$

donde la estadística del campo queda dada por la relación entre los operadores de destrucción ($a(k)$) y creación ($a^{+}(k)$). Gracias a esta expresión es claro que si el campo $\phi(x,t)$ está escrito en álgebra multivectorial también lo estarán $a(k)$ y $a^{+}(k)$, siendo siempre posible que al fijar el álgebra de Clifford para $a(k)$ y $a^{+}(k)$ (simpléctica o simétrica) quede determinada la forma de los campos multivectoriales correspondiente a cada estadística.

Es así como en este capítulo se obtuvo una ecuación de movimiento; la de Dirac, en la cual el campo físico está representado por un multivector en $\mathcal{G}(1,3)$ obtenido del espinor en la ecuación original mediante la aplicación del mapa multivectorial de Cartan para una dirección isotópica dada en un grupo de Lie con una simetría espaci-temporal $\mathcal{G}(1,3)$, de hecho se obtuvieron un conjunto de ecuaciones multivectoriales de Dirac (una para generador del grupo de Lie elegido en la construcción del mapa) que pueden transformarse entre sí gracias al uso de la identidad de Fierz generalizada o producto de mapas multivectoriales de Cartan. Esta ecuación puede ser usada en cualquier tipo de variedad (con estructura de espín o sin ella) y es una construcción alternativa a la presentada por P.R. Holland[13] o bien a la de Dirac-Kähler[20], con sus respectivas diferencias.

De la ecuación multivectorial de Dirac se obtuvo mediante un mecanismo de proyección con fuerte significado geométrico dado por razones físicas, un caso particular reportado en la literatura aplicado a interacciones electrodébiles, explicando sus propiedades y limitaciones. Finalmente a través de una serie de comentarios se analizaron, desde las propiedades se transformación del mapa ante operaciones de simetría en el espacio espinorial hasta la conexión de la estructura con parámetros experimentales (ángulos de Weinberg y Cabibbo, así como amplitudes invariantes de interacción), buscando dar algunas ideas para la continuación del trabajo; construcción de Lagrangianos, relación con mecánica cuántica cuaterniónica y campos electromagnéticos en la misma, finalizando con cuantización de los campos multivectoriales usados.

A P E N D I C E

ESPINORES.

En el estudio de los sistemas físicos con simetría rotacional se observa que algunos de ellos se describen usando funciones de onda mecano-cuánticas que corresponden a representaciones doble valuadas del grupo SO(3,1) y son conocidas como fermiónicas mientras que por el contrario las representaciones sencillas existen también en la naturaleza (sistemas bosónicos), las consecuencias físicas y su tratamiento matemático son de vital importancia en el análisis de cualquier modelo de interacción en la materia.

Para iniciar este apéndice hablaremos del grupo de Lorentz homogéneo como el conjunto de transformaciones lineales continuas que dejan invariante la longitud de todo vector espacio-temporal perteneciente a la base $\mathcal{A}_{1,3}$ generadora del álgebra de Clifford $\mathcal{C}(1,3)$, cuando el determinante de estas transformaciones es unitario el grupo es el de Lorentz propio. Son transformaciones propias de Lorentz las rotaciones espaciales en tres dimensiones y el conjunto de transformaciones de Lorentz especiales que mezclan coordenadas espaciales y temporales; las que corresponden a las llamadas boosts de Lorentz a lo largo de un eje coordenado (ésto significa físicamente una transformación entre dos estructuras coordenadas moviéndose una con respecto a la otra a través de un eje espacial a una velocidad dada). Los generadores de las rotaciones y los boosts de Lorentz satisfacen el álgebra de Lie del grupo SO(3,1) localmente isomorfo al grupo SU(2)xSU(2) lo cual puede ser usado para obtener las representaciones del grupo SO(3,1) usando las dadas para SU(2), sea por lo tanto[15]

A.1 $$\left[N_m, N_n\right] - i\,\epsilon^{mnk}\, N_k \qquad (m,n = 1,2,3)$$

A.2 $$\left[M_m, M_n\right] = i\,\epsilon^{mnk}\, M_k \qquad (m,n = 1,2,3)$$

A.3 $$\left[M_m, N_n\right] = 0$$

el álgebra de Lie $SU(2)_M x SU(2)_N$ donde los generadores M y N están dados de la siguiente forma;

A.4 $$M_m = \left(J_m + iK_m\right)/2$$

$$(m = 1,2,3,)$$

A.5 $$N_m = \left(J_m - iK_m\right)/2$$

con J_m y K_m como los generadores de las rotaciones y de los boosts de Lorentz respectivamente. Se puede etiquetar una representación por el par de números (u,v) donde u(u+1) y v(v+1) son valores propios de los dos operadores de Casimir M^2 y N^2, el espín de la representación (m,n) es m + n.

La representación irreducible no trivial más simple generada de esta forma es bidimensional (las representaciones de N_m y M_m son las matrices de Pauli) y está etiquetada como (1/2,0) o (0,1/2) correspondiendo a fermiones izquierdos o derechos. Esta representación se conoce como doble valuada (lo que ocurrirá siempre que m + n sea semientero) ya que las rotaciones por $2\pi\omega$ con ω impar transforman la identidad en su negativo mientras que para ω par ocurre lo contrario.

En algunos textos formales de teoría de grupos[15,34] se define un espinor de Lorentz como un objeto complejo de dos componentes ($\xi^{\alpha}; \alpha = 1,2$) que bajo una transformación de Lorentz se comporta como

A.6 $$\xi^{\alpha} \longrightarrow \xi'^{\alpha} = A^{\alpha}_{\beta}\xi^{\beta}$$

donde $A \in SL(2)$ y al tomar un espacio euclídeo tridimensional (rotaciones) corresponde al usual espinor de Pauli mientras que un espinor con índice puntado será aquella cantidad compleja de dos componentes ($\xi_{\dot{\alpha}}$; $\dot{\alpha} = 1,2$) que bajo una transformación de Lorentz se comporta como[15]

A.7 $$\xi_{\dot\alpha} \longrightarrow \xi'_{\dot\alpha} = \xi_{\dot\beta} A^{+\dot\beta}_{\ \dot\alpha} .$$

Para la teoría no relativista de partículas con espín arbitrario s necesitaremos magnitudes con (2s + 1) componentes (espinores simétricos de orden 2s), en especial las representaciones irreducibles del grupo propio de Lorentz en el espacio tiempo nos permitirá escribir espinores de Dirac en términos de los de Weyl (dos componentes). Los espinores de orden superior se definen como conjuntos de magnitudes que se transforman como los productos de componentes de un cierto número de espinores de primer orden (entre los índices del mismo se mezclan los puntados y los no puntados).

Cuando se incluye la inversión en el grupo de simetría para los espinores se deben considerar pares de espinores $(\xi^{\alpha}, \xi_{\dot\alpha})$ llamados biespinores a diferencia de los correspondientes a $(\xi^{\alpha}, \xi^{\alpha})$ y $(\xi^{\dot\alpha}, \xi^{\dot\alpha})$ que son conocidos como pares de espinores. Una partícula de espín 1/2 que se mueva a la velocidad de la luz se representaría en un sistema dado por una función de onda de solamente dos componentes (espinor de Weyl) que por ser una proyección de la solución relativista para la misma puede ser por igual puntada o no puntada y es solo debido a la necesidad de introducir una masa en reposo de Dirac en la ecuación de onda la que obliga a considerar al biespinor como la función de onda en la forma simétrica de la ecuación de Dirac.

En este punto es importante hacer una anotación histórica para recordar que en 1937 fue Elie Cartan[6] quien estableció las bases matemáticas de la teoría de los espinores y las aplicaciones de las mismas a algunos modelos de las leyes físicas imperantes en su momento, aún cuando estrictamente los espinores fueron usados primero por los físicos en mecánica cuántica. En este trabajo Cartan desarrolla su teoría considerando a los espinores como una representación lineal del grupo de las rotaciones en un espacio n dimensional y estableciendo algunos elementos de conexión con álgebras geométricas, se da un significado geométrico al concepto del espinor, se definen multivectores y planos isotrópicos mediante pares de espinores en espacios euclídeos de cualquier dimensión así como un estudio riemanniano de los mismos.

A.I. SISTEMA DE ESPINORES Y MULTIVECTORES.

A través del desarrollo histórico de la teoría de campo han surgido diversos modelos que buscan la comprensión de los fenómenos naturales bajo el menor número de parámetros posibles así como la exploración de simetrías cuya manifestación no es evidente, en este camino ha surgido la necesidad de una interpretación geométrica de los eventos físicos así como la necesidad de una estructura matemática que permita fácilmente el desarrollo de modelos de gran espectro de aplicación (teorías gran unificadas y supersimetrías), gracias a ésto se comenzó a explorar un sistema multivector-espinor con verdadero interés científico. Por otro lado el criticismo actual ha forzado a la comunidad a ahondar en la interpretación de conceptos y construcciones fundamentales, por ejemplo; es común considerar a la primera forma fundamental de algún espacio vectorial como primigenia (objeto básico), actualmente se está explorando la idea de considerar la construcción del espacio-tiempo y la formulación de la mecánica cuántica como realizaciones fuertemente relacionadas entre sí, de tal manera que todo modelo completo de interacción debe fundamentar ambas simultáneamente[8].

Desde el punto de vista matemático ha surgido de algunos años para acá la inquietud de fijar unívocamente la naturaleza primigenia de los espinores sobre el resto de los objetos matemáticos (la postura contraria también tiene adeptos), para este trabajo este punto es irrelevante ya que basta con garantizar la factibilidad del sistema multivector-espinor para llevar a buen término nuestro propósito.

Una postura ampliamente generalizada por D. Hestenes[11,12], K. Bugajska[5] y J. Keller[14] entre otros, define a los espinores como ideales mínimos izquierdos de un álgebra multivectorial dada; sea $\mathcal{L}$ un subespacio del álgebra multivectorial $\mathcal{C}(p,q)$ bajo la suma con la propiedad de que la suma de elementos en $\mathcal{L}$ estará siempre en $\mathcal{L}$

y tal que es invariante bajo multiplicación por la izquierda

A.8 si $\chi \in \mathcal{L}$ y $M \in \mathcal{C}(p,q)$ entonces $M\chi \in \mathcal{L}$,

el espacio espinorial dual $\mathcal{L}^{\dagger}$ es tal que

A.9 si $\chi^{\dagger} \in \mathcal{L}^{\dagger}$ y $M \in \mathcal{C}(p,q)$ entonces $\chi^{\dagger}M \in \mathcal{L}^{\dagger}$

(lo que correspondería a un ideal mínimo derecho). A pesar de que esta postura la comparten varios autores, hay ciertas diferencias en cuanto a la representación matricial de los ideales mínimos o espinores que va desde la columna (renglón) hasta la matriz cuadrada (formalismo Dirac-Kähler) de lo cual, siendo autoconsistente, es posible lograr resultados equivalentes ya que en ambas condiciones todo multivector se puede construir mediante el producto de espinores tal que

A.10 $M = M^{\alpha\beta}\chi_{\alpha}\chi^{\dagger}_{\beta}$ donde

$M^{\alpha\beta}$ es un escalar

$\chi_{\alpha} \in \mathcal{L}$ y $\chi^{\dagger}_{\beta} \in \mathcal{L}^{\dagger}$.

A su vez siempre es posible construir un ideal mínimo mediante multivectores, lo cual es trivial en el caso de la representación cuadrada y amerita un teorema (Crawford) cuando se trata de una columna o un renglón. Sin embargo aún no se han analizado las propiedades de transformación ante el grupo de Lorentz de los ideales mínimos tales que se pueda garantizar la convergencia de la estructura espinor-multivector con las leyes de comportamiento presentes en la naturaleza.

Sabemos que el multivector M transforma bajo la acción de algún elemento S del grupo de Lorentz (SO(3,1)) como

A.11 $M \longrightarrow SMS^{-1}$

por lo que al definir el espinor como ideal mínimo de M es forzoso que

A.12 $\chi \longrightarrow S\chi$

lo cual coincide con A.6) y/o A.7) por otro lado es claro que cuando se representa al espinor ψ con una matriz cuadrada (es posible que se use toda la matriz o bien que solamente una columna contenga al espinor y por lo tanto la posición del mismo dentro de la matriz cuadrada sea un índice espinorial)[5], es posible pensar en él como algún elemento del álgebra de Clifford. En el caso espacio-tiempo es claro que toda matriz cuadrada 4x4, ψ admite la descomposición[22]

A.13 $$\psi = \psi_o + \psi_\alpha \gamma^\alpha + \frac{1}{2}\psi_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta} + \psi_{\alpha 5}\gamma^\alpha\gamma^5 + \psi_5\gamma^5$$

en los elementos del álgebra $\mathcal{C}(1,3)$ $\left\{1, \gamma^\alpha, \gamma^{\alpha\beta}, \gamma^{\alpha 5}, \gamma^5\right\}$ sin considerar sus propiedades de transformación ante el grupo propio de Lorentz ya que bajo la acción de éste los elementos de A.13) transforman de diferentes formas entre sí.

El problema planteado en el anterior párrafo es resuelto en la literatura cuando menos en dos formas;

a) Algunos autores circunscriben la expansión A.13) a la representación multivectorial del grupo propio de Lorentz Spin (1,3) y en caso necesario a la correspondiente al espín 1/2, $\mathrm{Spin}^+(1,3)$. Adicionalmente se garantiza que para todo vector $x \in A_{p,q}$, $\psi x \psi^+$ es también un vector[11,12].

b) También se encuentra extendido el concepto (con algunas variantes) de expandir una función de onda espinorial como

A.14 $$\psi = e^{-i\phi}\, R^i \Gamma_i \eta$$

donde R^i son formas cuadráticas que satisfacen el álgebra biespinorial de Dirac, ϕ es una fase, $\Gamma_i \in \mathcal{C}(1,3)$ y η es un espinor constante arbitrario.. Mediante el teorema de inversión de Crawford[7] es posible garantizar que dado el conjunto de funciones reales que satisfacen el álgebra biespinorial de Dirac es posible encontrar el espinor ψ que les corresponde bajo la construcción A.14), adicionalmente este teorema puede ser usado para desarrollar un espinor en una expansión multivectorial particular bajo la elección arbitraria de un espinor constante η y una fase global ϕ.

Cuando se desarrolla la expresión A.14) y mediante el uso del teorema de factorización del propio Crawford se puede escribir el espinor ψ como

A.15 $$\psi = e^{-i\psi}\Lambda_{+}S_{+}\eta$$

donde Λ_{+} y S_{+} forman parte de un conjunto de operadores de proyección a los que se les puede asignar significado físico. De esta forma es claro que la elección de η es esencialmente irrelevante ya que los operadores de proyección generan la dirección adecuada en el espacio espinorial, por lo que la función de onda espinorial A.14) o A.15) está determinada hasta una fase ϕ (como es obvio la fase de la función de onda espinorial no puede quedar determinada de las cantidades observables).

La construcción de Crawford para el espinor ψ (equivalente a un ideal mínimo del álgebra) garntiza su transformación correcta bajo la acción del grupo propio de Lorentz ya que bajo SO(1,3);

$$R^{i} \longrightarrow R^{i}$$

$$\Gamma^{i} \longrightarrow S\Gamma_{i}S^{-1}$$

$$\eta \longrightarrow S\eta \quad \text{con } S \in SO(1,3).$$

CONCLUSIONES.

A lo largo del desarrollo de este trabajo, al final de cada capítulo, se realizaron comentarios que buscaban mostrar algunos alcances, aplicaciones y consecuencias particulares de utilidad en cada caso en forma práctica y eficiente; por esta razón (y buscando eliminar la redundancia) se presentarán solamente las conclusiones generales del mismo.

i) La representación multivectorial de los grupos de Lie inducirá una clasificación de los mismos que permitirá su uso en un solo lenguaje matemático, eliminando las dificultades usuales inherentes a su representación en distintas estructuras; sobre todo en modelos físicos de gran unificación donde al implementar el mecanismo de ruptura espontánea de la simetría, los grupos (simples o no simples) involucrados presentan complejidades diversas en un lenguaje tradicional (matricial o tensorial). Es así como al usar álgebras de Clifford para representar grupos de Lie cualquier mecanismo de ruptura espontánea de la simetría tendrá representación sencilla en este lenguaje, que a su vez inducirá grupos de gran unificación (SO(10) por ejemplo) propuestos en forma natural y relacionados con los modelos modernos de cuerdas.

Finalmente, se presentó el sistema multivector-espinor bajo un estudio global relacionando las características de los ideales mínimos multivectoriales con representaciones para grupos de Lie en álgebras no bivectoriales que además de ser un camino alternativo para construir las mismas, evidencía una notable correlación entre los proyectores necesarios para clasificar ideales mínimos de algún álgebra de Clifford dada $\mathcal{G}(p,q)$ y la representación multivectorial de algunos grupos de Lie en la misma.

ii) El mapa extendido de Cartan, cuya inspiración está en la teoría original de este autor, que incluye una simetría asociada al espacio-tiempo $\mathcal{G}(1,3)$ y otra en espacio isotópico dada por los grupos de norma usuales en teoría de campo, se generaliza aplicándole una estructura multivectorial en $\mathcal{C}(1,3)$ (grupo asociado al espacio-tiempo). El mapa multivectorial resultante conmuta con los operadores asociados a observables físicas en el espacio de las funciones espinoriales, con lo que sus valores propios son invariantes ante la aplicación del mapa. A su vez, la estructura aquí presentada puede usarse en espacios de cualquier dimensión donde a los ideales mínimos (espinores) del álgebra de Clifford $\mathcal{C}(p,q)$ se les transforme (usando el mapa multivectorial) bajo algún grupo de Lie deseado, garantizando la autoconsistencia de la misma mediante la construcción de un mapa inverso que permite obtener un espinor rotado en el espacio isotópico a partir del multivector asociado al mapa extendido de Cartan.

Por último, es el producto de Clifford de mapas multivectoriales de Cartan bajo alguna dirección isotópica (dada por la forma de definir las corrientes hermitianas o cantidades invariantes) quien da la información, en índice de Lorentz, sobre las relaciones que involucran las corrientes hermitianas usuales en los cálculos de transición entre partículas, mostrándose en este trabajo que la cantidad de relaciones o identidades de Fierz obtenibles mediante este procedimiento depende de la base espacio-temporal usada en el mapa multivectorial de Cartan (siendo máxima cuando se usa el grupo $\mathcal{C}(1,3)$) al mismo tiempo que la construcción y método de análisis es igual bajo definiciones distintas de las cantidades invariantes involucradas.

iii) El caso particular de la generalización multivectorial del mapa extendido de Cartan en el cual se usa la subálgebra cuaterniónica de $\mathcal{C}(1,3)$ (lo que constituye una situación común en varios autores que entre otras cosas estudian modelos que incluyen prequarks en su estructura) y el grupo de norma SU(2) se relacionó exitosamente con trabajos publicados recientemente en la literatura, útiles en modelos de norma para interacción entre partículas elementales, usando un mecanismo de proyección económico y susceptible de generalización enmarcado en un sistema multivector-espinor de operadores cuyas propiedades e interpretación geométrica permitieron descubrir y explicar las limitaciones propias a los modelos particulares ya citados. Al analizar el producto de Clifford de la proyección cuaterniónica de estos mapas multivectoriales se les pudo relacionar con estructuras ya reportadas con la ventaja de que este método multivectorial justifica y evidencía propiedades y limitaciones en estos casos de manera clara y natural.

iv) El producto de Clifford de mapas multivectoriales de Cartan permitió mostrar una aplicación de interés práctico de la estructura matemática desarrollada; la obtención sencilla y rápida, a partir de una sola expresión de las identidades de Fierz aunada a un análisis multivectorial de las mismas. El último capítulo de esta tesis correspondió a la aplicación de este mapa a la ecuación de Dirac con la finalidad de obtener una ecuación donde el campo físico asociado a una partícula esté representado por el mapa multivectorial de Cartan construido usando el espinor de la ecuación de Dirac original bajo un grupo de norma y una simetría espacio-temporal $\mathcal{C}(1,3)$. La ecuación así obtenida (que puede ser transformada mediante la identidad de Fierz generalizada) fue proyectada al grupo de norma SU(2) y la subálgebra cuaterniónica de $\mathcal{C}(1,3)$ (bajo un cambio de la representación de la base en el operador diferencial) obteniéndose una ecuación de movimiento ya reportada en la literatura con aplicación en interacciones electrodébiles; lo que además de mostrar la utilidad de la ecuación multivectorial construida permitió seguir en un análisis multivectorial las propiedades y limitaciones de modelos particulares (cuaterniónicos, de uso cada vez más amplio desde los trabajos de Finkelstein) conservando algunas características y capacidades de cálculo propias de los modelos comunes ya reconocidos y probados experimentalmente. Así mismo, esta estructura da algunos elementos de plausibilidad sobre viejas ideas relativas a la dualidad fotón-neutrino etiquetando a las partículas elementales mediante la asignación de una dirección isotópica en el espacio SU(2).

Al concluir este trabajo solo resta mencionar que el camino aquí iniciado tiene un posible futuro en el análisis de los modelos holonómicos de supersimetría gracias a la esperanza, aquí alimentada, de que el álgebra de Clifford constituye un lenguaje útil que permite un estudio más transparente de las leyes físicas que gobiernan los fenómenos de interacción entre partículas elementales.

BIBLIOGRAFIA

1. Aitchison I.J.R., "An Informal Introduction to Gauge Field Theories", Cambridge University Press, 1984.
2. Artin E., "Geometric Algebra", Interscience, New York, 1957.
3. Atiyah M.F., Bott R. and Shapiro A., "Clifford Modules", Topology, Vol. 3, Suppl. 1, pp.3-38. Pergamon Press, 1964.
4. Bacry H. and Boon M., "Boson Algebra as a Symplectic Clifford Algebra", J. Math. Phys., 28(11), 2639, 1987.
5. Bugajska K., "Geometrical Properties of the Algebraic Spinors for $R^{3,1}$", J. Math Phys., 27(1), 143, 1986.

   Bugajska K., "Spinors and Space-Times", J. Math. Phys. 27(3), 853, 1986.

   Bugajska K., "Some Problems of Spinor and Algebraic Spinor Structures", 27(11), 2700, 1986.
6. Cartan E., "The Theory of Spinors", Hermann Paris, 1937.
7. Crawford J.P., "On the Algebra of Dirac Bispinor Densities: Factorization and Inversion Theorems", J. Math. Phys., 26(7), 1439, 1985.
8. Dauns J., "Metric Are Clifford Algebra Involutions", Int. Jour. of Theor. Phys., 27(2), 183, 1988.
9. Halzen D. and Martin A.D., "Quarks and Leptons; Am Introductory Course in Modern Particle Physics", John Wiley and Sons, 1984.
10. Herstein I.N., "Topics in Algebra" 2nd. edition, John Wiley and Sons, 1975.
11. Hestenes D., "Space-Time Algebra", Gordon and Breach, 1966.
12. Hestenes D. and Sobczyk G., "Clifford Algebra to Geometric Calculus", D. Reidel Publishing Company, 1984.
13. Holland P.R., "Minimal Ideals and Clifford Algebras in the Phase Space Representation of Spin-1/2 Fields", In Proceedings of the NATO and SERC Workshop on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics, Canterbury, England 1985, O.S.R. Chisholm and A.K. Common, Eds., NATO ASI C-183, Reidel, Dordrecht.

14. Keller J., "Generalization of the Dirac Equation Admitting Isospin and Color Symmetries", Quantum Theory and Gravitation, III Symposium Loyola Univerisy, New Orleans, June 1985. Int. J. Theor. Phys. 23, 818, 1984. Ibid 21, 829, 1982. Ibid 25, 779, 1986. Ibid 28, 795 1989.
15. Lifshitz E.M., Berestetskii V.B. and Pitaevskii L.P., "Relativistic Quantum Theory", Pergamon New York, 1979.
16. Lounesto P., (1980). Ann. Inst. Henry Poincaré, A33, 53-61.
17. Mickelsson J., "The Vector Form of the Neutrino Equation and the Photon Neutrino Duality", J. Math. Phys. 26(19), 2346, 1985.
18. Mohapatra R.N. and Lai C.H., "Selected Papers on Gauge Theories of Fundamental Interactions", World Scientific Singapore, 1981.
19. Moses H.E., "A Spinor Representation of Maxwell's Equations", Nuovo Cimento Suppl. No. 1, 1° Trimestre, 1958.
20. Napsuciale M.M., "La Formulación de un Modelo SUSY en Términos de Espinores Algebraícos". Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias, CINVESTAV IPN. México, 1989.
21. Nash C. and Joshi G.C., "Spontaneous Symmetry Breaking and the Higgs Mechanism for Quaternion Fields", J. Math. Phys., 28(2), 463, 1986.
22. Nash P.L., "On the Exceptional Equivalence of Complex Dirac Spinors and Complex Space-time Vectors", J. Math. Phys., 27(5), 1185, 1986.
23. Razon A., Horwitz L.P. and Biedenham L.C., "On a Basic Theorem of Quaternion Modules", J. Math. Phys., 30(1), 59, 1989.
24. Reifler F., "A Vector Wave Equation for Neutrinos", J. Math. Phys. 25(4), 1088, 1984.
25. Reifler F., "A Vector Model for Electroweak Interactions", J. Math. Phys. 26(3), 542, 1985.
26. Reifler F. and Morris R., "A Prediction of the Cabibbo Angle in the Vector Model for Electroweak Interactions", J. Math. Phys. 26(8), 2059, 1985.
27. Reifler F. and Morris R., "A Gauge Symmetric Approach to Fierz Identities", J. Math. Phys., 27(11), 2803, 1986.

28. Rodriguez Romo S., "Algunos Usos de los Métodos Multivectoriales y Espinoriales en Teoría Cuántica de la Materia", tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias, Fac. de Química, U.N.A.M., 1986.
29. Ross G., "Grand Unified Theories", Frontiers in Physics V-60, 1985.
30. Ta Pei Cheng and Ling Fong Li, "Gauge Theory of Elementary Particle Physics", Clarendon Press Oxford, 1984.
31. Takahashi Y., "The Fierz Identities - A Passage Between Spinors and Tensors", J. Math. Phys. 24(7), 1783, 1983.
32. Velarde O.J., "Transformaciones Generalizadas de Fierz y Aplicaciones", tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias, CINVESTAV IPN, México, 1988.
33. Witten E., Nucl. Phys. B223, 433, 1983.
34. Wu-Ki-Tung, "Group Theory in Physics", World Scientific Singapore, 1985.