

201
27



Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

GEOMETRIA NO EUCLIDIANA DESDE
UN PUNTO DE VISTA ELEMENTAL

T E S I S

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

presenta

GRETEL ANA KELLER CORTINA

México, D. F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1989



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Introducción	4
Capítulo 1.	
Euclides y los <u>Elementos</u> .	7
1.1 Euclides y sus obras.	7
1.2 Los <u>Elementos</u> de Euclides.	10
Capítulo 2.	
El quinto postulado y el surgimiento de la geometría no euclidiana.	30
2.1 Demostraciones del quinto postulado.	30
2.2 Equivalentes al quinto postulado.	41
2.3 Resumen histórico de las demostraciones y equivalencias al quinto postulado; surgimiento de las nuevas geometrias.	42
Capítulo 3.	
El modelo de Poincaré de la geometría lobachevskiana.	46
3.1 Definición del modelo de Poincaré.	46
3.2 El modelo de Poincaré y los postulados.	51
3.3 Resultados que dependen de la geometría lobachevskiana.	60

3.4	Definición de área.	64
3.5	El modelo de Poincaré en el semi-plano y su equivalencia con el modelo de Poincaré en el disco.	67
Capítulo 4.		
El modelo de Klein y su equivalencia con el modelo de Poincaré.		71
4.1	Definición del modelo de Klein.	73
4.2	Algunos conceptos de la geometría lobachevskiana vistos a través del modelo de Klein.	74
4.3	Demostración de equivalencia entre el modelo de Klein y el modelo de Poincaré.	76
4.3.1	El modelo de Klein en la semi-esfera.	77
4.3.2	Transformación por Inversión del modelo de Klein en la semi-esfera al modelo de Poincaré.	78
4.3.3	Incidencia de puntos.	79
4.3.4	Incidencia de rectas.	80
4.3.5	Incidencia de puntos y rectas.	81
4.3.6	Intersección de rectas.	82
4.3.7	Congruencia de ángulos y segmentos.	83
Apéndice I. Inversión.		85

Apéndice II. Lobachevski y su geometria. 100

Bibliografía. 107

INTRODUCCION

El surgimiento de la geometría no euclidiana es el resultado de numerosos estudios, realizados durante más de seiscientos años, en torno a los Elementos de Euclides, debidos a la gran controversia que éstos causaran desde su publicación.

Por ello, se ha considerado importante iniciar el presente trabajo con un breve análisis histórico de la obra de Euclides. Esto se hace en el primer capítulo, profundizando básicamente en su libro Elementos, en el cual se encuentra fundamentalmente el sistema de la geometría euclidiana, el cual se basa en cinco postulados.

La obra de Euclides ha sido motivo, a lo largo de la historia, de numerosas críticas. Entre las cuales destacan las que provocó el planteamiento del quinto postulado, ya que su calidad intuitiva no es tan simple, por lo que se pensaba que no debía estar incluido en los postulados. Por otra parte su recíproco puede demostrarse mediante el empleo de los primeros cuatro postulados, lo cual hizo pensar que el quinto postulado podía ser también consecuencia de ellos.

Por ello, en el segundo capítulo se presenta un breve análisis de la discusión en torno al quinto postulado, para así mostrar cómo a raíz de los intentos por demostrarlo, surge un nuevo enfoque, en el que no sólo se llegó a su aceptación, sino

que también se vio que, tomando los primeros cuatro postulados de Euclides y substituyendo el quinto por alguna de las posibilidades de negarlo, puede construirse otro sistema geométrico, lo que dió lugar al surgimiento de la geometría no euclidiana.

De las dos posibles formas de ver la negación del quinto postulado, Lobachevski utilizó una de ellas y Riemann utilizó la otra dando lugar a dos enfoques diferentes de la geometría no euclidiana, que son los que se conocen como geometría lobachevskiana, o hiperbólica, y geometría riemanniana, o elíptica. Cabe aclarar que a diferencia de Lobachevski, quien parte de la validez de los primeros cuatro postulados, Riemann solo utiliza algunos como parte de la base de su sistema geométrico.

En este trabajo, por su naturaleza, se estudiara unicamente el enfoque lobachevskiano.

Con el fin de que la geometría lobachevskiana fuera más comprensible se construyeron varios modelos para representarla. Los más conocidos son los debidos a Henri Poincaré y Félix Klein.

En el tercer capítulo se da una explicación del modelo de Poincaré y se muestra cómo quedan representados en dicho modelo algunos resultados propios de la geometría de Lobachevski.

El cuarto capítulo se inicia con la presentación del modelo de Klein y otros resultados de la geometría que el modelo representa.

Ambos modelos son similares en muchos aspectos, puesto que representan la misma geometría. Sin embargo algunos resultados se visualizan más claramente si se analizan a través de alguno de los dos modelos. Es por esto que, para finalizar el cuarto capítulo,

se demuestra por medio de la transformación por inversión (a diferencia de la proyección estereográfica utilizada por Klein), que los modelos son equivalentes, lo que conlleva a que puedan ser utilizados de manera indistinta, facilitando así el estudio de la geometría lobachevskiana.

Finalmente se presentan dos apéndices, uno de ellos referente a la geometría de Lobachevski, en el cual se da una breve explicación de su surgimiento y de su definición, además se enumeran algunos resultados que le son propios; el otro es referente a la transformación por inversión donde ésta se define y se presentan los principales teoremas utilizados en este trabajo.

CAPITULO 1

Euclides y los Elementos.

1.1 Euclides y sus obras.

A pesar de no conocerse ni el lugar ni la fecha exacta del nacimiento de Euclides, se calcula que debe de haber nacido en Grecia alrededor del año 300 A.C., pues según deducciones de Proclo (410-485 D.C.), Euclides vivió intermedio a la época de los primeros discípulos de Platón (428/7-347/6 A.C.) y Arquimides (287-212 A.C.), siendo contemporáneo de Ptolomeo (305-283 A.C.)¹.

La mayoría de los geómetras que pudieron haber sido maestros de Euclides fueron discípulos de Platón; estos se encontraban en Atenas al igual que anteriores matemáticos y escritores de elementos que ahí vivieron y enseñaron.

Algunos autores consideran que Euclides perteneció a la escuela de Platón, debido a que su obra Elementos concluye con una investigación acerca de los cinco sólidos regulares. Sin embargo, esto no es algo que se pueda afirmar. En opinión de otros autores la inclusión de este tema en el texto complementa el estudio de Euclides, haciéndolo más general.²

Es por medio de Pappus, al referirse a los estudios de

¹ Heath, T. Euclid's Elements, pp.1y2.

² Ibid., p.2.

Apolonio con alumnos de Euclides, que se sabe que éste último fue llamado por Ptolomeo a Alejandria para fundar una escuela.³

Entre los trabajos que realizó Euclides se encuentran:

Pseudaria, que incluye todo tipo de teoremas a manera de ejercicios; se consideraba a este libro como una pérdida irreparable, pero se sabe de él a través de los escritos de Proclo.⁴

Data, (δεδομένα) es un libro de geometría elemental, que forma parte de la introducción al análisis avanzado por medio de ejercicios elementales. Se plantean en él una serie de proposiciones deduciéndolas de otras. Data es, en ocasiones, utilizado como un suplemento de los Elementos.⁵

Sobre la división de las figuras, (περὶ διαίρεσιν βιβλίου), cuya versión en griego se perdió y sólo se encontró una copia, en latín, de un texto árabe. El libro trata de la división de las figuras en figuras iguales o desiguales; i.e. un cuadrado en cuadrados (iguales), o un cuadrado en triángulos y cuadrados (desiguales). De las treinta y seis proposiciones de que consta el libro, sólo se conservan cuatro demostraciones, las demás fueron omitidas por el traductor árabe.⁶

Porismas, que consta de tres libros con proposiciones; algunas de ellas pertenecen ahora a la teoría moderna de las

³ Ibidem.

⁴ Ibid., p.7.

⁵ Ibid., p.8.

⁶ Ibid., pp. 8 y 9.

transversales y a la geometría proyectiva.⁷

Lugares Superficiales, (τόποι πρὸς ἐπιφανεία). Estos dos libros tratan de las superficies de revolución de segundo grado y de las secciones de las mismas.⁸

Cónicas. Esta obra consta de cuatro libros que, según Pappus, fue completada por Apolonio para dar un total de ocho libros. Trata de la teoría general de las cónicas, concentrándose más en aquellas propiedades que son necesarias para el análisis de la obra Lugares Superficiales de Aristacus.⁹

Phaenomena es una obra astronómica que consiste de proposiciones de geometría esférica. Euclides se basó en la obra de Autolycus περί κινουμένου σφαιράου, aunque también en un texto anterior: La Sphaerica, cuyo contenido es exclusivamente matemático.¹⁰

Optica, obra publicada por Heiberg (1895) quien incluye Catoptrica en el mismo volumen, aunque no hay la certeza de que ésta última pertenezca a Euclides.¹¹

Elementos de música (αἱ κατὰ μουσικὴν στοιχειώσεις). No se tiene la seguridad de que esta obra la haya escrito Euclides, aunque es mencionada por autores posteriores; dentro de estos elementos se encuentran dos tratados: la teoría de los intervalos e introducción a la armonía.¹²

⁷ Ibid., pp. 10-15.

⁸ Ibid., p. 15.

⁹ Ibid., p. 16.

¹⁰ Ibid., pp. 16, 17.

¹¹ Ibid., p. 17.

¹² Ibidem.

1.2 Los Elementos de Euclides.

Los Elementos (Stoicheia) están constituidos por trece libros que contienen un total de cuatrocientas sesenta y cinco proposiciones. Los primeros cuatro libros y el sexto tratan de Geometría plana; los tres últimos de Geometría del espacio; el quinto expone la teoría de las proporciones; el séptimo, el octavo y el noveno contienen la Aritmética de los números racionales; el décimo estudia los irracionales.

La obra de Euclides ha sido comentada por varios autores entre los que se encuentra Proclo, quien en su obra califica los comentarios de autores que lo precedieron como "llenos de todo tipo de confusiones, sin atenerse a las causas y sin discriminación dialéctica o pensamiento filosófico."¹³ Entre estos autores se encuentran:

Herón de Alejandría (s.III D.C.)¹⁴, del cual se sabe de sus comentarios acerca de la obra de Euclides no sólo por Proclo, sino también por las referencias que de él hace el árabe An-Nairizi¹⁵. Dentro de los comentarios de Herón, se puede encontrar que él no admite más de tres axiomas, hace distinciones de un número de casos particulares de las proposiciones de Euclides con respecto a que si una figura debe dibujarse de una manera o de otra, da demostraciones alternativas a algunas de las proposiciones de Euclides y proporciona el recíproco, complementa o extiende

¹³ Ibid. p. 19.

¹⁴ Ibid. p. 20.

¹⁵ Ibid. p. 21.

otras.¹⁶

Porphyry (232-304 D.C.), quien hace notar la necesidad del uso de ciertas palabras al enunciar algunas proposiciones, así como del entendimiento correcto de éstas. También da algunas demostraciones alternativas a ciertas proposiciones.¹⁷

Los comentarios de Pappus a la obra de Euclides no se limitan a los Elementos, pero refiriéndose a éstos, comenta acerca del cuarto postulado, de los axiomas y de ciertas proposiciones, incluyendo demostraciones alternativas.¹⁸

Simplicius, el griego, también hizo comentarios a la obra de Euclides. Los comentarios a las definiciones, postulados y axiomas (incluyendo el comentario al quinto postulado) se preserva por medio de los comentarios árabes de An-Nairizi.¹⁹

Anteriormente ya se habían escrito otros Elementos, de lo cual se tiene conocimiento por medio del trabajo de Eudemos sobre la historia de la geometría; entre los autores se encuentran Hipócrates de Chios (segunda mitad del s.V A.C.), Leon, quien fuera mayor que Eudoxus (408-355A. C.) pero menor que Platón (428/7-347/6 A.C.), aunque no perteneció a su escuela. El libro de texto de geometría de la Academia se debió a Theudius de Magnesia junto con Amyclas de Heraclea, Menaechmus (discípulo de Eudoxus), Dinostratus y Athenaeus de Cyzicus, quienes realizaron un trabajo más general. El trabajo de Theudius parece ser el inmediato

¹⁶ Ibid. pp. 22-24.

¹⁷ Ibid. p. 24.

¹⁸ Ibid. pp. 24-27.

¹⁹ Ibid., pp. 27,28.

anterior al de Euclides, pues entre estos dos, Eudamus solo hace referencia al trabajo de Hermodotimus de Colophon como el descubridor de varios elementos y no como el elaborador de un texto.²⁰

La tarea que Euclides se planteó al escribir los Elementos, fue la de reunir el conocimiento matemático que los griegos habían desarrollado desde el tiempo de Tales (640-546 A.C.), actualizándolo y organizándolo para formar un único sistema lógico. Esto implicó identificar cuáles serían las definiciones o suposiciones básicas de las cuales partiría y cuáles serían los teoremas que había de demostrar, incluyendo las demostraciones que ya existían o bien proporcionando nuevas pruebas.

Euclides desarrolló el sistema planteado en los Elementos comenzando con una serie de primeros principios, por los cuales se entiende, según Aristóteles, "aquellos de los cuales no es posible probar la verdad"²¹, es decir, que de ellos se asume su existencia para de ahí probar el resto. Estos "primeros principios" se encuentran a manera de definiciones, comenzando a enumerar lo esencial y a partir de lo cual las definiciones siguientes se hacen de manera recursiva. A continuación se enuncian dichas definiciones²²:

- 1.- Un punto es aquél que no tiene partes.
- 2.- Una línea es un largo sin ancho.

²⁰ Ibid., pp. 116-117.

²¹ Ibid., p. 117.

²² Heath, T. The thirteen books of Euclid's Elements, p. 1.
traducción Inglés-Español: G. Keller.

- 3.- Los extremos de una línea son puntos.
- 4.- Una línea recta es una línea que yace en forma pareja sobre sus puntos.
- 5.- Una superficie es aquella que sólo tiene largo y ancho.
- 6.- Los extremos de una superficie son líneas.
- 7.- Una superficie plana es una superficie que yace en forma pareja a las líneas rectas que están sobre sí misma.
- 8.- Un ángulo plano es la inclinación de una a otra de dos líneas en un plano las cuales se encuentran una con otra y no están en una línea recta.
- 9.- Y cuando las líneas que contienen al ángulo son rectas, el ángulo es llamado *rectilíneo*.
- 10.- Cuando una línea recta levantada sobre una línea recta forma los ángulos adyacentes iguales entre sí. Cada uno de los ángulos iguales es recto y la línea recta que se levanta sobre la otra es llamada *perpendicular* a aquella sobre la cual se levanta.
- 11.- Un ángulo obtuso es un ángulo mayor a un ángulo recto.
- 12.- Un ángulo agudo es un ángulo menor que un ángulo recto.
- 13.- Un límite es aquello que es un extremo de algo.
- 14.- Una *figura* es aquello que está contenida por cualquier límite o límites.
- 15.- Un círculo es una figura plana contenida por una línea de tal modo que todas las líneas rectas que caen sobre ella desde un punto entre aquellas que están dentro de la figura son iguales entre sí.
- 16.- Y el punto es llamado el centro del círculo.
- 17.- Un diámetro del círculo es cualquier línea recta trazada a

través del centro y terminada en ambas direcciones por la circunferencia del círculo, y tal línea recta también biseca al círculo.

- 18.- Un *semicírculo* es la figura contenida por el diámetro y la circunferencia que éste corta. Y el centro del *semicírculo* es el mismo que el del círculo.
- 19.- *Figuras rectilíneas* son aquellas contenidas por líneas rectas, *triláteros* aquellas figuras contenidas por tres, *cuadriláteros* aquellas contenidas por cuatro y *poliláteros* aquellas contenidas por más de cuatro líneas.
- 20.- Sobre las figuras *trilaterales*, un *triángulo equilátero* es aquél que tiene igual sus tres lados, un *triángulo isósceles* aquél que tiene solamente dos de sus lados iguales, y un *triángulo escaleno* es aquél que tiene sus tres lados desiguales.
- 21.- Aún más, de las figuras *trilaterales*, un *triángulo de ángulo recto* es aquél que tiene un ángulo recto, un *triángulo de ángulo obtuso* es aquél que tiene un ángulo obtuso, y un *triángulo de ángulo agudo* es aquél que tiene sus tres ángulos agudos.
- 22.- Sobre las figuras *cuadrilaterales*, un *cuadrado* es aquél que es *equilátero* y de ángulos rectos; un *oblongo* aquél que tiene ángulos rectos pero no es *equilátero*; un *rombo* aquél que es *equilátero* pero no tiene sus ángulos rectos; un *romboide* aquél que tiene sus lados y ángulos opuestos iguales entre sí pero no es *equilátero* ni tiene sus ángulos rectos. Y los *cuadriláteros* distintos a estos son *trapeacios*.
- 23.- *Líneas rectas paralelas* son líneas rectas que, estando en el

mismo plano y prolongándose indefinidamente en ambas direcciones, no se encuentran en ninguna dirección.

Posteriormente Euclides enuncia cinco suposiciones básicas a las que denominó postulados. Estos son²³:

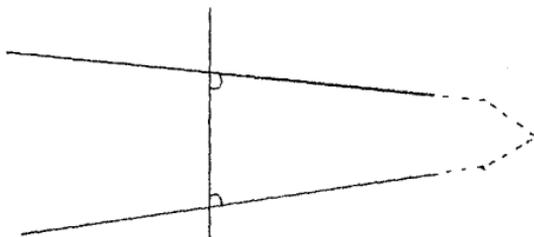
1^{er} postulado. Es posible trazar una línea recta de cualquier punto a cualquier punto.

2^{do} postulado. Es posible prolongar una línea recta finita, continuamente, en una línea recta.

3^{er} postulado. Es posible describir un círculo con cualquier centro y distancia.

4^o postulado. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

5^o postulado. Si una línea recta cae sobre dos líneas rectas formando los ángulos en el mismo lado menos que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, si se prolongan indefinidamente, se encuentran en aquél lado donde están los ángulos menores que dos rectos.



Se incluye en el texto lo que se ha denominado como Nociones

²³ Ibid., p. 2.

Comunes, de las cuales se ha dudado que Euclides las haya incluido en el texto original, contemplándose la posibilidad de que haya sido intercaladas en el texto en el tiempo de Apolonio. La duda de la autenticidad radica fundamentalmente en dos aspectos: el estar colocadas después de los Postulados, pues se relacionan más con las Definiciones, y el hecho de que las Nociones Comunes no tienen un carácter puramente geométrico. En general, se acepta más la posibilidad de que Euclides haya redactado las tres primeras nociones (sin descartar la posibilidad de que haya sido en textos anteriores)²⁴. Estas Nociones son:²⁵

1. Cosas que son iguales a la misma cosa son también iguales entre sí.
2. Si iguales se añade a iguales, los totales son iguales.
3. Si iguales se substraen de iguales, los restantes son iguales.
4. Cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que la parte.

De los cinco postulados se derivan una serie de proposiciones o teoremas, los cuales organizó Euclides de tal manera que no se utilizase, para su demostración, un nuevo postulado mientras se pudiera avanzar con los postulados anteriores.

A continuación se enuncian las primeras 28 proposiciones para

²⁴ Heath, T. Euclid's Elements pp. 221-232.

²⁵ Heath, T. The thirteen books of Euclid's Elements, p. 2.

mostrar un poco del espíritu con que éstas fueron formuladas; también se presentan algunas demostraciones en las cuales se muestra el tipo de razonamiento empleado por Euclides²⁶ (cabe notar que, apesar de que algunas proposiciones nos parezcan obvias, no es tan importante el enunciar la posibilidad de construcción o existencia como lo es el procedimiento lógico que lleva a la demostración):

1. Dada una línea recta finita, constrúyase un triángulo equilátero.
2. Colóquese a partir de un punto dado (como extremo) una línea recta igual a otra dada.
3. Dadas dos líneas rectas desiguales, córtese o sepárese de la mayor una línea recta igual a la menor.
4. Si dos triángulos tienen dos lados de uno iguales respectivamente a dos del otro, y los ángulos comprendidos por dichas parejas de líneas rectas son iguales, también tendrán la base de uno igual a la del otro, un triángulo será igual al otro, y los ángulos restantes de uno serán iguales a los restantes del otro, respectivamente.

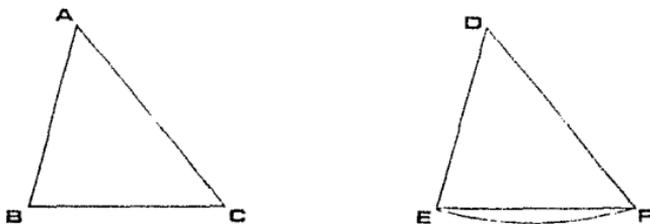
Demostración.

Sean ABC, DEF dos triángulos tales que dos lados AB, AC sean iguales a DE, DF respectivamente, dígase AB a DE y AC a DF, y el ángulo BAC igual a el ángulo EDF.

²⁶ Ibid., pp. 2-20.

Nota: En algunas demostraciones se ha modificado el lenguaje, modernizándolo, para una mejor comprensión.

Digo que la base BC es también igual a la base EF, el triángulo ABC será igual a el triángulo DEF, y los ángulos restantes seran iguales a los ángulos restantes, respectivamente, es decir aquellos que subtienden los lados iguales, esto es, el ángulo ABC a el ángulo DEF y el ángulo ACB a el ángulo DFE.



Pues si el triángulo ABC fuera puesto en el triángulo DEF, y si el punto A se colocase sobre el punto D, y la línea recta AB sobre DE, entonces, el punto B también coincidiría con E, porque AB es igual a DE.

Nuevamente, haciendo coincidir AB con DE, la línea recta AC también coincidirá con DF, porque el ángulo BAC es igual a el ángulo EDF,

en consecuencia el punto C también coincidirá con el punto F, porque AC es igual a DF.

Pero B también coincide con E, de aquí que la base BC coincidirá con la base EF, (pues, si al coincidir B con E y C con F, la base BC no coincide con la base EF, dos líneas rectas encerrarán un espacio; lo que es imposible.

Por lo tanto la base BC coincidirá con la base EF)

y será igual a ella.

(N.C. 4)

De modo que todo el triángulo ABC coincidirá con todo el triángulo DEF,

y será igual a él.

Y los ángulos restantes también coincidirán con los ángulos restantes y serán igual a ellos,

el ángulo ABC a el ángulo DEF

y el ángulo ACB a el ángulo DFE.

Por lo tanto, etc.²⁷

5. En los triángulos isósceles, los ángulos de la base son iguales entre si, y si los lados iguales se prolongan, los ángulos que están bajo la base serán también iguales.

6. Si en un triángulo dos ángulos son iguales, los lados opuestos a los ángulos iguales también serán iguales.

7. Dadas dos líneas rectas trazadas sobre otras (a partir de sus extremos) y que se cortan en un punto, no pueden trazarse sobre la misma línea recta (a partir de sus extremos) y del mismo lado de ella, otras dos líneas rectas que se corten en otro punto y que sean iguales a las anteriores respectivamente, es decir, cada una igual a la que pase por el mismo extremo.

8. Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a otros dos del otro, y además tienen sus bases

²⁷ Euclides sefa terminar sus demostraciones enunciando el postulado palabra por palabra. Para evitar repeticiones, se concluirá diciendo, simplemente: Por lo tanto, etc.

iguales, tendrán también iguales los ángulos opuestos a las líneas rectas iguales.

9. Bisecar un ángulo rectilíneo dado.
10. Bisecar una línea recta finita dada.
11. Trazar una línea recta perpendicularmente a otra dada desde un punto de esta.
12. Trazar una línea recta perpendicular a otra infinita dada, desde un punto que no esté sobre ésta última.
13. Si se traza una línea recta sobre otra, formando ángulo, formará dos ángulos rectos o bien ángulos cuya suma sea igual a dos ángulos rectos.
14. Si con una línea recta cualquiera y pasando por un punto en ella dos líneas rectas, que no estén en el mismo lado de la primera, forman ángulos adyacentes cuya suma sea igual a dos rectos, las dos líneas rectas serán una continuación de la otra, constituyendo una sola línea recta.
15. Si dos líneas rectas se cortan, forman ángulos opuestos por el vértice iguales entre sí.
16. En un triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo exterior es mayor que cualquiera de los interiores y opuestos.

Demostración.

Sea ABC un triángulo, prolonguense uno de sus lados BC hasta D;

Digo que el ángulo exterior ACD es mayor que cualquiera de los ángulos interiores y opuestos CBA, BAC.

Sea AC bisecado en E (prop. 10), y sea BE prolongado hasta F en línea recta;

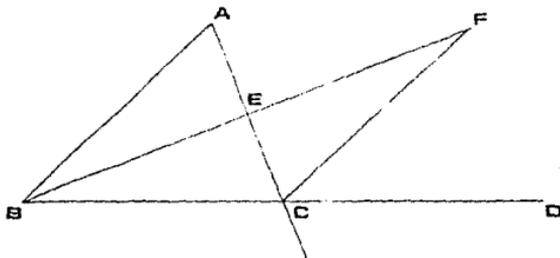
sea EF igual a BE,

(prop. 3)

únanse F y C [post. 1], y trácese AC por G. [post. 2]

Entonces, como AE es igual a EC, y BE a EF,

los lados AE, EB son iguales a los lados CE, EF respectivamente;



y el ángulo AEB es igual al ángulo FEC, por ser ángulos opuestos por el vértice. [prop. 15]

Entonces la base AB es igual a la base FC,

y el triángulo AEB es igual al triángulo FCE,

y los ángulos restantes son iguales a los otros ángulos restantes, respectivamente, es decir, aquellos que subtienen los lados iguales; [prop. 4]

entonces, el ángulo BAE es igual a el ángulo ECF.

Pero el ángulo ECD es mayor que el ángulo ECF; [M.C. 5]

Entonces el ángulo ACD es mayor que el ángulo BAE.

De igual forma, si BC es bisecado, el ángulo BCG, es decir, el ángulo ACD [prop. 15], puede probarse que es mayor que el ángulo ABC.

Por lo tanto etc.

Q. E. D.

17. En un triángulo dado, la suma de cualesquiera dos ángulos es

menor que dos rectos.

Demostración.

Sea ABC un triángulo;

Digo que dos ángulos del triángulo ABC tomados de cualquier manera son menores que dos ángulos rectos.

Prolónguese BC hasta D.

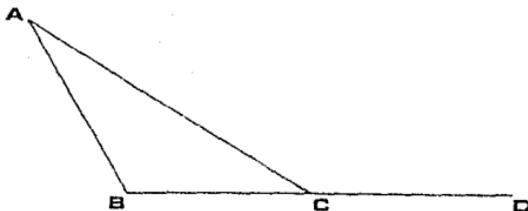
[post. 2]

Entonces, puesto que el ángulo ACD es un ángulo exterior al triángulo ABC, es mayor que el ángulo opuesto e interior ABC.

[prop. 16]

Agréguese el ángulo ACB a cada uno; entonces, los ángulos ACD, ACB son iguales a dos ángulos rectos.

[prop. 13]



Entonces los ángulos ABC, BCA son menores que dos ángulos rectos.

Similarmente podemos probar que los ángulos BAC, ACB son también menores que dos rectos, y también los ángulos CAB, ABC.

Por lo tanto etc.

Q. E. D.

18. En un triángulo, el lado mayor se opone al ángulo mayor.

19. En un triángulo, el ángulo mayor es opuesto al lado mayor.

20. En un triángulo la suma de dos lados cualesquiera es mayor que el otro lado.

21. Si sobre uno de los lados de un triángulo, y a partir de sus extremos, se trazan dos rectas que se corten dentro del triángulo, la suma de las rectas así trazadas será menor que la suma de los dos lados restantes del triángulo, pero el ángulo que comprendan será mayor.

22. Con tres líneas rectas, que sean iguales a tres líneas rectas dadas, constrúyase un triángulo; por tanto es necesario que la suma de dos cualesquiera de ellas sea mayor que la restante.

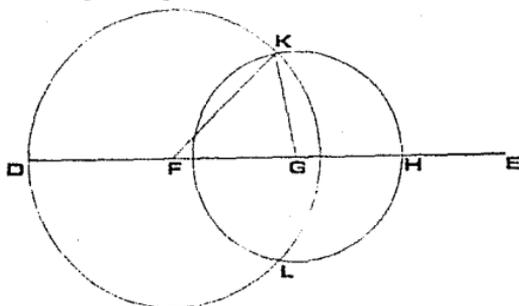
Demostración.

Sean A, B, C , las tres líneas dadas tales que al tomar cualesquiera dos de ellas sean más grandes que la restante, llámese:

A, B mayores que C ,

A, C mayores que B ,

y B, C mayores que A ;



A _____

B _____

C _____

se requiere entonces construir un triángulo con líneas rectas iguales a A, B, C .

Constrúyase una línea recta DE, con D como un extremo pero con longitud infinita en dirección de E,
y sea DF igual a A, FG igual a B y GH igual a C. [prop. 3]

Con centro en F y distancia FD trácese el círculo DKL; de nuevo, con centro en G y distancia GH trácese el círculo KLM;
y únase KF y KG;

Digo que el triángulo KFG se ha construido de tres líneas rectas iguales a A, B, C.

Puesto que el punto F es centro del círculo DKL, FD es igual a FK.

Pero FD es igual a A; entonces,

KF es igual a A.

De nuevo, como el punto G es centro del círculo KLM,

GH es igual a GK.

Pero GH es igual a C; entonces,

KG es igual a C.

y FG es igual a B;

entonces, las tres líneas rectas KF, FG, GK, son iguales a las tres líneas rectas A, B, C, y de ellas se ha construido el triángulo KFG.

Q. E. D.

23. Dada una línea recta y un punto en ella construir un ángulo rectilíneo igual a otro dado.

24. Si dos triángulos tienen dos lados de uno iguales, respectivamente, a dos del otro, pero uno de los ángulos comprendidos por una de las parejas de lados es mayor que el de la otra, también tendrá la base mayor el triángulo de la pareja de

mayor ángulo.

25. Si dos triángulos tienen dos lados de uno iguales, respectivamente a dos del otro, pero la base del primero es mayor que la del segundo, el ángulo de la primera pareja de rectas será mayor que el de la segunda.

26. Si dos triángulos tienen dos ángulos de uno iguales, respectivamente a dos del otro, y un lado igual a un lado, ya sea el lado que une los ángulos iguales o aquél que subtiende uno de los ángulos iguales, también tendrán los lados restantes iguales a los lados restantes y el ángulo restante al ángulo restante.

Demostración.

Sean ABC, DEF dos triángulos tales que los ángulos ABC, BCA sean iguales a los ángulos DEF, EFD respectivamente, y cuyos lados que unen ángulos iguales sean iguales, es decir, el lado BC a EF;

Digo que también tendrán los lados restantes iguales a los lados restantes, respectivamente; es decir, el lado AB al DE y AC al DF, y el ángulo restante igual al ángulo restante, es decir, el ángulo BAC al EDF.

Pues, si AB no es igual a DE entonces, uno de ellos es mayor.

Sea AB mayor y sea BG igual a DE; y únase GC.

Entonces, como BG es igual a DE, y BC a EF, los lados GB, BC son iguales a los lados DE, EF respectivamente;

y el ángulo GBC es igual al ángulo DEF; entonces, la base GC es igual a la base DF, y el triángulo GBC es igual al triángulo DEF, y los ángulos restantes son iguales a los ángulos restantes, es decir aquellos que subtienden lados iguales;

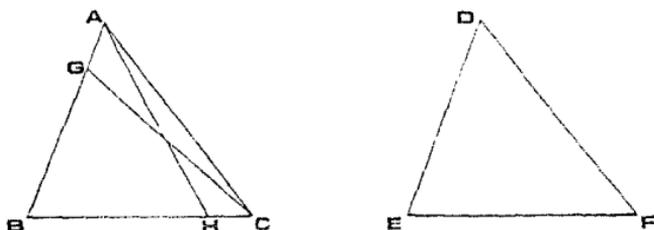
(prop 4)

entonces, el ángulo GCB es igual al ángulo DFE.

Pero el ángulo DFE es igual, por hipótesis, al ángulo BCA; entonces, el ángulo BCG es igual al ángulo BCA, es decir, que el más chico es igual al mayor, lo que es imposible.

Entonces AB no es desigual a DE, por lo tanto es igual a él.

Pero BC también es igual a EF; por lo tanto los lados AB, BC son iguales a los lados DE, EF respectivamente, y el ángulo ABC es igual al ángulo DEF; entonces, la base AC es igual a la base DF, y el ángulo restante BAC es igual al ángulo restante EDF. (prop. 4)



Nuevamente, sean lados que subtienden ángulos iguales, como AE a DE;

Digo de nuevo que los lados restantes serán iguales a los lados restantes, llámense AC a DF y BC a EF, y aún más el ángulo restante BAC es igual al ángulo restante EDF.

Pues, si BC no es igual a EF, uno de ellos es mayor.

Sea BC el mayor, si es posible, y sea BH igual a EF; y únase AH.

Entonces, como BH es igual a EF, y AB a DE, los lados AB, BH son iguales a los lados DE, EF respectivamente, y contienen ángulos iguales; entonces, la base AH es igual a la base DF, y el triángulo ABH es igual al triángulo DEF, y los ángulos restantes

serán iguales a los ángulos restantes, es decir, aquellos que subtienden lados iguales; (prop. 4) entonces, el ángulo BHA es igual al ángulo EFD.

Pero el ángulo EFD es igual al ángulo BCA; por lo tanto en el triángulo AHC, el ángulo exterior BHA es igual al ángulo interior y opuesto BCA:

lo que es imposible.

(prop. 16)

Por lo tanto BC no es desigual a EF, por lo tanto es igual a él.

Pero AB también es igual a DE; por lo tanto los lados AB, BC son iguales a los lados DE, EF respectivamente, y contienen ángulos iguales; entonces, la base AC es igual a la base DF, el triángulo ABC es igual al triángulo DEF, y el ángulo restante BAC es igual al ángulo restante EDF

(prop. 4)

Por lo tanto etc.

Q. E. D.

27. Si una línea recta corta a otras dos formando con éstas ángulos alternos internos iguales, las rectas serán paralelas entre sí.

Demostración.

Sea EF la línea recta que corta a las líneas rectas AB, CD formando los ángulos alternos internos AEF, EFD iguales;

Digo que AB es paralela a CD.

De lo contrario, al prolongar AB, CD se encontrarán en dirección de B, D o hacia A, C.

Prolónguese para que se encuentren en dirección de B, D en G.

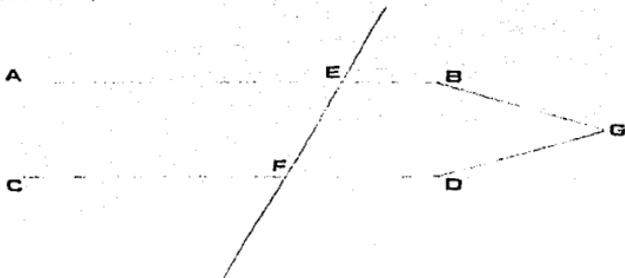
Entonces en el triángulo GEF, el ángulo exterior AEF es igual

al ángulo interior y opuesto EFG:

lo cual es imposible.

[prop. 16]

Por lo tanto, AB, CD al prolongarse no se encontrarán en dirección de B, D.



Similarmenete se puede probar que tampoco se encontrarán en la dirección de A, C.

Pero líneas rectas que no se encuentran en cualquier dirección son paralelas;

[Def. 23]

Por lo tanto AB es paralela a CD.

Por lo tanto etc.

Q. E. D.

28. Si una línea recta que atraviesa a otras dos, forma con una de estas un ángulo externo igual al interno y opuesto del mismo lado, o los ángulos interiores en el mismo lado igual a dos ángulos rectos, las líneas rectas serán paralelas entre sí.

Cabe notar que para la demostración de estas proposiciones no se utiliza el quinto postulado. Es a partir de la proposición 29 que éste se utiliza y es por ello que el resto de las proposiciones no han sido incluidas, ya que, tanto éstas como los

resultados que de ellas se desprendan, dependerán de la validez del quinto postulado. Este último será analizado más adelante.

Sin embargo, dentro de las primeras 28 proposiciones se encuentran una serie de resultados que tienen implicaciones de gran valor; entre éstos están los siguientes:

La existencia de perpendiculares (prop. 11 y 12); en un triángulo el ángulo exterior es mayor que cualquiera de los interiores y opuestos (prop. 16); en un triángulo la suma de cualesquiera dos ángulos es menor que dos rectos (prop. 17); es posible construir un triángulo dados sus tres lados (prop. 22); criterios de congruencia de triángulos (preps. 24, 25 y 26); existencia de paralelas; el recíproco del quinto postulado es cierto (prop. 27); etc.

Puesto que estos resultados se derivan básicamente de los primeros cuatro postulados, será importante recordarlos, ya que su validez dependerá únicamente de la validez de estos postulados.

CAPITULO 2

El quinto postulado y el surgimiento de la geometría no euclidiana

2.1 Demostraciones del quinto postulado.

Desde su formulación, el quinto postulado (el postulado de las paralelas) causó gran controversia, pues mientras algunos consideraban que no era evidente, por lo que no debía incluirse entre los postulados, otros argumentaban que si su recíproco es demostrable mediante los primeros cuatro postulados, entonces el quinto postulado también debería ser consecuencia de estos. Por esto es muy comprensible la multitud de intentos que se hicieron por probar este postulado.

En la mayoría de las demostraciones no se intentó demostrar el quinto postulado de una manera directa, sino que se utilizó un equivalente de éste, actualmente conocido como el postulado de Playfair:

Dada una línea recta y un punto exterior a ella, existe una única línea recta paralela a la recta dada por el punto dado.

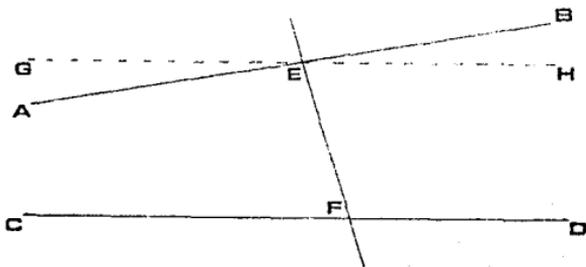
A continuación se presenta la demostración del quinto

postulado de Euclides a partir del postulado de Playfair.¹

Sean AB , CD líneas rectas tales que formen con la transversal EF los ángulos AEF y EFC , y $AEF + EFC < 180^\circ$

Por demostrar que AB , CD se intersecan del lado de A y C .

Por E trácese la línea recta GH de tal manera que forme con EF el ángulo GEF igual (y alterno) al ángulo EFD .



Entonces GH es paralela a CD .

[prop. 27]

Entonces AB debe intersecar a CD en una u otra dirección, ya que de no ser así, AB sería paralela a CD ; entonces se tendrían dos líneas rectas AB , GH paralelas a CD por el mismo punto E , lo cual es imposible.

Por lo tanto AB y CD se intersecan.

Puesto que AB y CD se intersecan, deben formar un triángulo con EF ,

pero en cualquier triángulo la suma de cualesquiera dos ángulos es menor que dos ángulos rectos,

¹Heath, T., Euclid's Elements, p. 313.

por lo tanto los ángulos AEF y EFC (cuya suma es menor que dos ángulos rectos), y no los ángulos BEF y EFD (cuya suma es mayor que dos ángulos rectos) son los ángulos del triángulo; (prop.

131

esto es que, EA y FC se intersecan en la dirección de A, C; o en el lado de EF en el cual la suma de los ángulos es menor que dos ángulos rectos. Q.E.D.

Se ha demostrado entonces, que el postulado de Playfair implica el quinto postulado de Euclides, por lo que cualquier demostración del primero será válida para el segundo; y puesto que éste es más evidente, parece natural que se haya preferido utilizar en las demostraciones que se intentaron del quinto postulado.

Cabe aclarar que para demostrar el quinto postulado no es posible utilizar ningún equivalente a éste, pues se estaría partiendo de lo que se quiere probar; y que además, esto es distinto a demostrar su equivalente, lo cual no es más que una simplificación de la demostración.

Algunas de estas demostraciones son:

Prueba de Proclo²:

Mediante este razonamiento Proclo quería demostrar que, si se tienen dos rectas paralelas, cualquier recta que corte a una de

²Greenberg, M. p.123

ellas cortará también a la otra, lo cual es una forma equivalente de plantear el postulado de Playfair (y por lo tanto de plantear el quinto postulado de Euclides).

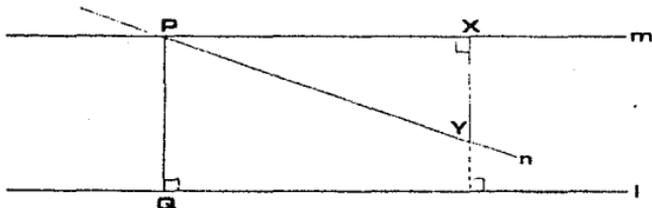
Dadas dos líneas paralelas l y m . Supóngase que la línea n corta a m en P .

Por demostrar que n corta también a l .

Sea Q el pie de la perpendicular desde P a l

Si n coincide con PQ , entonces, interseca a l en Q . Si no, un segmento PY de n está entre PQ y otro segmento PX en m .

Sea X el pie de la perpendicular desde Y a m .



Ahora, como el punto Y reside indefinidamente desde P en n , el segmento XY aumenta indefinidamente en tamaño, y por lo tanto eventualmente se vuelve mayor que el segmento PQ .

Por lo tanto Y debe de cruzar al otro lado de l , entonces, n debe cortar a l .

En esta demostración Proclo supone que³:

a) Si dos líneas se intersecan, la distancia a una de ellas desde un punto de la otra, aumenta indefinidamente a medida que el punto se aleja del lugar de intersección de las dos rectas.

b) El segmento más corto que une una línea a un punto externo es el segmento perpendicular.

c) *La distancia entre dos paralelas esta acotada.*

a) y b) pueden probarse usando los postulados 1 a 4, sin embargo c) se está utilizando como un postulado adicional que resulta ser equivalente al quinto postulado de Euclides⁴; es por ello que la prueba hecha por Proclo no es válida.

Wallis realizó numerosos intentos por demostrar el quinto postulado al no conseguirlo, agrega a los cuatro primeros postulados un quinto⁵:

Dado cualquier triángulo ABC y dado cualquier segmento DE. Existe un triángulo DEF, con DE como uno de sus lados que es semejante al triángulo ABC.

A partir de este nuevo grupo de postulados, Wallis realiza lo que para él es una demostración del quinto postulado⁶:

Dado un punto P exterior a una línea recta l, constrúyase una paralela a l por P (trazando la perpendicular PQ a l y luego por P

³ Prenowitz, W. y Jordan, M., *Basic Concepts of Geometry*, p. 29.

⁴ Greenberg, M. J., *Euclidean and Non Euclidean Geometry*, p. 123.

⁵ *Ibid.*, p.125.

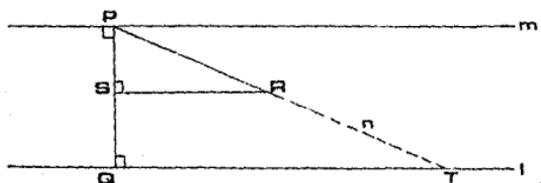
⁶ *Ibid.*, p.126.

la perpendicular m a PQ). Sea n cualquier otra línea recta por P .

Debemos probar que n interseca a l .

Considérese un segmento n con P como un extremo y que esté entre un segmento de m y PQ ; de cualquier punto R en este segmento sea RS perpendicular a PQ .

Aplíquese el postulado de Wallis al triángulo PSR y el segmento PQ . Entonces existe un punto T tal que el triángulo PSR sea semejante al triángulo PQT (es más, déjese a T en el mismo lado de la línea PQ que R).

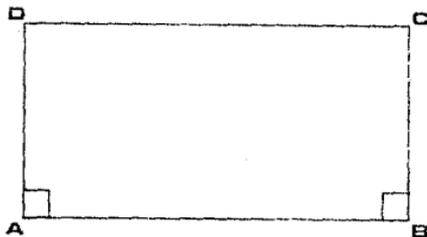


Por definición de triángulos semejantes $\angle TPQ \cong \angle RPS$. Pero como las rectas PQ y PS coinciden, éstos son lados comunes, y puesto que T está en el mismo lado respecto a PQ que R , la única manera de que sean congruentes es que sean iguales. Entonces, las líneas PR y PT coinciden, entonces, T está en n . De igual forma, $\angle PQT \cong \angle PSR$, pues son rectos; entonces, T está en l . Entonces, l y n se intersecan en T ; m es, por lo tanto, la única línea por P paralela a l .

El postulado que Wallis utiliza⁷ implica que existen un par de triángulos no congruentes semejantes⁸, lo cual es un equivalente al quinto postulado y por lo tanto la demostración no es válida.

Gerolamo Saccheri utilizó para su prueba el estudio de cuadriláteros ABCD que tienen dos lados iguales , $AD = CB$, y perpendiculares a un tercer lado AB. Sin asumir el postulado de las paralelas hizo un estudio exhaustivo de dichos cuadriláteros (que ahora reciben el nombre de cuadriláteros de Saccheri).

Saccheri probó que el ángulo en C era igual que el ángulo en D; y formuló tres hipótesis⁹:



(1) La hipótesis del ángulo obtuso (los ángulos en C y D son mayores de 90°).

⁷ Prenowitz, W. y Jordan, M., pp. 30 y 31.

⁸ Eves, H., Estudio de las Geometrías, p. 321.

⁹ Prenowitz, W. y Jordan, M., Basic Concepts of Geometry. p.32.

(2) La hipótesis del ángulo recto (los ángulos en C y D son rectos).

(3) La hipótesis del ángulo agudo (los ángulos en C y D son menores de 90°).

La idea de Saccheri era que suponer la validez de las hipótesis (1) o (3) llevaría a una contradicción, por lo que la hipótesis (2) sería la válida (i.e. utilizaría el método de reducción al absurdo).

Logró invalidar la hipótesis (1) mediante el uso del postulado 2 y de las proposiciones 16, 17 y 18 de Euclides¹⁰. Sin embargo, la hipótesis del ángulo recto implica que:

*Si en un cuadrilátero un par de lados opuestos son iguales y si los ángulos adyacentes al tercer lado son rectos, entonces los otros dos ángulos también son rectos*¹¹.

Lo anterior es un equivalente al quinto postulado así es que, a pesar de que intenta no utilizarlo, lo deja implícito y esto invalida su demostración.

Posteriormente J. Heinrich Lambert hizo su estudio acerca de un cuadrilátero con tres ángulos rectos, y formuló las mismas hipótesis que Saccheri para el ángulo restante. Sin embargo sus hipótesis no podían llevarlo a la demostración ya que se estaba suponiendo otro equivalente al quinto postulado:

¹⁰ Gans, D., An Introduction to Non Euclidean Geometry, pp. 22-23.

¹¹ Eves, H., Estudio de las Geometrías, p. 321.

Si en un cuadrilátero tres ángulos son rectos, el cuarto también lo es¹².

Por otra parte, A. Legendre planteó tres nuevas hipótesis en las que tomaba como objeto de estudio los triángulos y analizaba la suma de sus ángulos interiores, ésta podía ser:

- mayor que dos rectos,
- igual a dos rectos, o
- menor que dos rectos.

Invalidó la primera hipótesis y uno de sus intentos por invalidar la tercera fue¹³:

Sea ABC un triángulo cuya suma de sus ángulos sea menor que dos ángulos rectos.

Se define el defecto de un triángulo como la diferencia de 180° y la suma de sus ángulos interiores,

entonces, la suma de sus ángulos es $180^\circ - \alpha$, donde α es el defecto del triángulo en grados.

Constrúyase el triángulo BCD de tal modo que $\angle BCD = \angle ABC$, $CD = AB$ y uniendo BD. La suma de sus ángulos, por ser congruente al original, es $180^\circ - \alpha$.

Dibújese por D una línea que interseque a AB y AC en E y F respectivamente, formando los triángulos BDE y CDF. La suma de

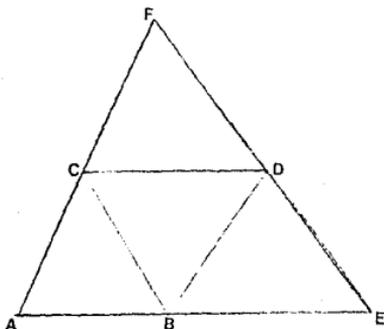
¹² Ibidem.

¹³ Ibid., p. 28.

todos los ángulos no es mayor de $720^\circ - 2\alpha$. Por lo que la suma de los ángulos del triángulo AEF es no mayor que $720^\circ - 2\alpha - 540^\circ = 180^\circ - 2\alpha$.

Por lo tanto el defecto del triángulo AEF es por lo menos 2α mientras que el del original ABC es α .

Por lo tanto se ha podido encontrar una construcción que duplica el defecto.



De igual modo puede construirse un triángulo cuyo defecto sea no menor que 4α , y así sucesivamente. Es decir, que puede construirse un triángulo cuyo defecto sea arbitrariamente grande. Pero el defecto de un triángulo debe ser menor que 180° . Por lo tanto se tiene una contradicción.

Por lo tanto, la suma de los ángulos de un triángulo no puede ser menor que dos rectos.

Los intentos de demostración de Legendre no fueron válidos ya que utiliza, como una de sus hipótesis, un equivalente al quinto

postulado: la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° ¹⁴, y para demostrar su tercera hipótesis utiliza otro equivalente: dado un punto en un ángulo es posible trazar una recta que intersecte a ambos lados del ángulo¹⁵.

También Bolyai realizó diversos intentos por demostrar el quinto postulado; el que a continuación se presenta se basa, como en los casos de Proclo y Wallis, en la idea de demostrar que por un punto exterior a una recta, sólo es posible trazar una paralela a ella, ya que cualquier otra recta por ese punto la intersectará¹⁶ (postulado de Playfair):

Dado P no en una línea l, PQ perpendicular a l en Q, y m perpendicular a PQ en P.

Sea n cualquier línea por P distinta de m y PQ.

Por demostrar que n intersecta a l.

Sea A cualquier punto entre P y Q.

Sea B el único punto tal que A, Q, y B sean colineales y $AQ=QB$.

Sea R el pie de la perpendicular de A a n.

Sea C el único punto tal que A, R, y C sean colineales y $AR=RC$.

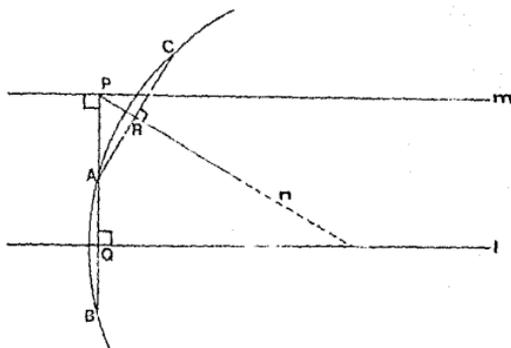
Entonces, A, B, y C no son colineales, entonces, hay un único

¹⁴ Ibidem.

¹⁵ Gans, D., An Introduction to Non-Euclidean Geometry, p. 29.

¹⁶ Greenberg, M. pp. 135-136.

círculo γ que pasa por ellos.



Como l biseca perpendicularmente a la cuerda AB de γ , y n biseca perpendicularmente a la cuerda AC de γ , entonces, l y n se intersecan en el centro de γ .

En este caso Bolyai utiliza la siguiente equivalencia:

*Una circunferencia puede hacerse pasar por tres puntos cualesquiera no colineales*¹⁷.

2.2 Equivalentes al quinto postulado.

En todos los intentos que se hicieron por demostrar el quinto postulado se utilizaron axiomas equivalentes o suposiciones que implicaban o eran consecuencia del quinto postulado; a continuación se enuncian algunos de estos equivalentes:

La distancia entre dos paralelas está acotada.

¹⁷ Eves, H., *Estudio de las Geometrías*, p. 321.

Existen un par de triángulos no congruentes semejantes.

Si en un cuadrilátero un par de lados opuestos son iguales y si los ángulos adyacentes al tercer lado son rectos, entonces los otros dos ángulos también son rectos.

Si en un cuadrilátero tres ángulos son rectos, el cuarto también lo es.

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° .

Dado un punto en un ángulo es posible trazar una recta que interseque a ambos lados del ángulo.

Una circunferencia puede hacerse pasar por tres puntos cualesquiera no colineales.

Por un punto exterior a una recta dada solo es posible trazar una paralela a dicha recta.

2.3 Resumen histórico de las demostraciones y equivalencias al quinto postulado; surgimiento de las nuevas geometrías.

Se han mostrado ya unos cuantos de los numerosos intentos que se hicieron por demostrar el quinto postulado; entre las personas que lo intentaron, incluyendo a los que ya he mencionado, se encuentran: Ptolomeo (305-283 A.C.), Proclo (410-485), el astrónomo y matemático persa Nassiraddin (1201-1274), y el inglés Wallis (1616-1703), entre algunos otros.

La primera contribución significativa se debió al italiano Gerolamo Saccheri (1667-1733), profesor de la Universidad de Pavia, quien en 1733 publicó Euclides ab omni noevo vindicatus ("Euclides liberado de toda falla"). En su extenso trabajo,

Saccheri estudió un cuadrilátero ABCD en el que $AC = BD$ y los ángulos en A y B son rectos. Formuló, en base a esto, tres hipótesis y logró demostrar, por medio de este cuadrilátero, que la suma de los ángulos interiores de un triángulo no exceden dos rectos.

En 1766 el alemán Johann Heinrich Lambert (1728-1777) escribió Die Theorie der Parallelinien. El utilizó un cuadrilátero con tres ángulos rectos y formuló las mismas hipótesis que Saccheri para el ángulo restante. Lambert eliminó la hipótesis del ángulo obtuso pero no así la del agudo, cuyas conclusiones al respecto fueron confusas. Sin embargo, formuló una conjetura acerca de la geometría donde podría verificarse dicha hipótesis.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833), italo-francés, realizó también numerosos intentos por demostrar el postulado de las paralelas, mismos que publicó en Elements de geometrie desde 1794 hasta 1823, año en que finalmente creyó haberlo logrado; pero en su prueba utilizó un axioma adicional que, al ser muy evidente, no parecía ser equivalente al quinto postulado. Legendre utilizó al igual que Saccheri y Lambert el método de reducción al absurdo, pero consideró tres hipótesis nuevas: la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor, igual o menor que dos ángulos rectos; nunca pudo invalidar la última hipótesis.

Después de tantos fracasos en la demostración del quinto postulado, se consideró un nuevo punto de vista en el que, utilizando el postulado equivalente formulado por Playfair, surgen tres hipótesis:

Saccheri estudió un cuadrilátero ABCD en el que $AC = BD$ y los ángulos en A y B son rectos. Formuló, en base a esto, tres hipótesis y logró demostrar, por medio de este cuadrilátero, que la suma de los ángulos interiores de un triángulo no exceden dos rectos.

En 1766 el alemán Johann Heinrich Lambert (1728-1777) escribió Die theorie der Parallellinien. El utilizó un cuadrilátero con tres ángulos rectos y formuló las mismas hipótesis que Saccheri para el ángulo restante. Lambert eliminó la hipótesis del ángulo obtuso pero no así la del agudo, cuyas conclusiones al respecto fueron confusas. Sin embargo, formuló una conjetura acerca de la geometría donde podría verificarse dicha hipótesis.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833), italo-francés, realizó también numerosos intentos por demostrar el postulado de las paralelas, mismos que publicó en Elements de geometrie desde 1794 hasta 1823, año en que finalmente creyó haberlo logrado; pero en su prueba utilizó un axioma adicional que, al ser muy evidente, no parecía ser equivalente al quinto postulado. Legendre utilizó al igual que Saccheri y Lambert el método de reducción al absurdo, pero consideró tres hipótesis nuevas: la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor, igual o menor que dos ángulos rectos; nunca pudo invalidar la última hipótesis.

Después de tantos fracasos en la demostración del quinto postulado, se consideró un nuevo punto de vista en el que, utilizando el postulado equivalente formulado por Playfair, surgen tres hipótesis:

Dada una recta y un punto fuera de ella puede trazarse:

- más de una paralela,
- sólo una paralela, (quinto postulado)
- o ninguna paralela a la recta dada.

Bajo este nuevo enfoque, el ruso Nicolai Ivanovich Lobachevski (1793-1836), presentó un trabajo a la división Física-Matemática de la Universidad de Kazán, en el año de 1826, acerca de una nueva geometría en la que no era válido el quinto postulado, y en cambio se cumplía que por un punto exterior a una recta dada puede trazarse más de una paralela a dicha recta.

Mientras tanto, el húngaro Johan Bolyai (1802-1860), quien había trabajado en lo mismo desde 1823, continuó su trabajo hasta su publicación en 1831.

Por otro lado, hay evidencia, por medio de sus cartas personales a Bessel (1829) y papeles personales, que en Alemania, Karl Friedrich Gauss (1777-1855), había ya llegado a significativas conclusiones al respecto, pero dichos resultados no serían publicados sino hasta después de su muerte por el temor que Gauss sentía de darlos a conocer.

Así pues, Lobachevski, Bolyai y Gauss habían llegado al mismo resultado, al descubrimiento de una geometría en donde no era válido el quinto postulado: la Geometría no euclidiana.

El orden de aparición de las publicaciones fue lo que dió prioridad para que la nueva geometría se denominara: Geometría Lobachevskiana, también conocida como Geometría Hiperbólica.

Fue con la construcción de los modelos de Félix Klein (1849-1925), Henri Poincaré (1854-1912), Eugenio Beltrami y Arthur

Cayley, que la nueva geometría ganó carácter intuitivo y fue establecida, de manera incuestionable, la independencia de los cinco postulados.

En 1854, Bernhard Riemann (1826-1866) demostró que podía desarrollarse otra geometría no euclidiana compatible con la hipótesis del ángulo obtuso, en la cual se cumple que: por un punto exterior a una recta dada ninguna paralela a ella puede trazarse. En esta geometría, a diferencia de las planteadas con anterioridad, no sólo no es válido el quinto postulado sino que incluso, a diferencia de las otras geometrías, no se verifica la unicidad de la recta que une dos puntos dados. A esta geometría se le denomina Riemanniana o Elíptica.

CAPITULO 3

El modelo de Poincaré de la geometría lobachevskiana.

3.1 Definición del modelo de Poincaré.

Si el quinto postulado de Euclides fuera consecuencia de los primeros cuatro postulados sucedería que, negando éste y admitiendo los otros, se llegaría a contradicciones con alguno de ellos y por lo tanto a contradicciones con la geometría euclidiana. Fue así como Lobachevski construyó una nueva geometría; supuso los primeros cuatro postulados, los cuales implican la existencia de las paralelas y en vez del quinto postulado utilizó el siguiente principio:

Por un punto exterior a una recta dada puede trazarse más de una paralela¹.

De este nuevo conjunto de postulados dedujo una serie de teoremas en los cuales es imposible encontrar contradicción alguna.

Estos teoremas son muy diferentes de aquellos a los que se

¹ Negación del postulado de Playfair.

está acostumbrado e implican resultados muy distintos a los de la geometría de Euclides, por ejemplo²:

- No existen figuras semejantes no congruentes.
- La suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos.
- No siempre es posible trazar una circunferencia por tres puntos dados, etc.

Cabe notar que estos resultados son la negación de los que se habían presentado ya como equivalentes al quinto postulado, por lo que es de esperarse que en una geometría en donde no es válido este postulado, los resultados anteriores sean ciertos.

Posteriormente, otros autores contribuyeron a la consolidación de la teoría Lobachevskiana. Henrie Poincaré, nacido en Francia en 1854, hizo grandes contribuciones a diversas ramas de la física y las matemáticas; y su imaginación se ve reflejada en su obra Les fondements de la Geometrie donde planteó un modelo de la geometría de Lobachevski relacionándolo con la ciencia experimental, lo cual permite que la geometría que éste representa se torne más comprensible.

En este modelo se supone un mundo encerrado en un círculo de radio R y que está sometido a las siguientes leyes³:

² Serie: Filosofía de la Ciencia, Henrie Poincaré, p. 147.

_La temperatura no es uniforme, sino que es máxima en el centro y disminuye a medida que se aleja de él, para reducirse al cero absoluto cuando alcanza la circunferencia por la cual está limitado el mundo.

La temperatura absoluta en cada punto será proporcional a R^2-r^2 ; donde r es la distancia del punto considerado al centro del círculo.

_Todos los cuerpos dentro de este mundo tienen el mismo coeficiente de dilatación; de manera que la longitud de una regla cualquiera es proporcional a su temperatura absoluta.

_Un objeto transportado de un punto a otro cuya temperatura sea diferente, se pone inmediatamente en equilibrio térmico con su nuevo medio.

_La luz atraviesa medios de distinta refringencia y de manera tal que el índice de refracción sea inversamente proporcional a R^2-r^2 . En estas condiciones las trayectorias de los rayos luminosos no serían rectas sino círculos.

Así, un objeto se volverá más pequeño a medida que se acerque al límite del círculo; por lo cual, para un ser que habite en ese mundo, este le parecerá infinito, pues, al acercarse al límite tanto él como sus pasos serán cada vez más pequeños, de tal modo

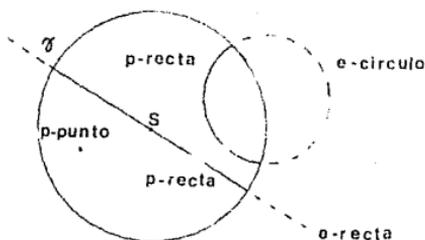
⁴ Ibid., pp.137-140.

que nunca podrá llegar al límite del círculo; además las impresiones visuales de estos seres seguirán la misma trayectoria que los rayos luminosos.

Si estos seres crearan una geometría, ésta correspondería a una geometría no euclidiana como la que fuera planteada por Lobachevski; es decir, que este mundo es un modelo de esta geometría, sin embargo, para ellos correspondería a una geometría euclidiana.

Procederé ahora a la definición de los elementos de dicho modelo con respecto a la geometría de Euclides; me referiré entonces al plano euclidiano como el plano Π y sus elementos serán los e-puntos, e-rectas, etc. y a los elementos del modelo de Poincaré me referiré como los p-puntos, p-rectas, etc. .

Se define entonces:



p-plano como el interior de la e-circunferencia γ con centro en S y radio $r > 0$.

p-punto como cualquier e-punto contenido en el interior de γ .

p -recta los e -arcos de e -circunferencias, de radio finito o infinito, contenidos en γ , y ortogonales a ésta; i.e. los e -arcos de e -circunferencias ortogonales a γ , y los e -diámetros de γ .

La noción de *incidencia* de puntos y rectas es la misma que la euclidiana.

Dos p -rectas son *paralelas* si no tienen ningún p -punto en común.

La p -longitud de un p -segmento AB , denotado por L_B^A , se define como:

$$L_B^A = \frac{1}{2} \log(AB, UV),$$

donde U y V son las intersecciones de la p -recta que contiene al p -segmento AB con γ , de tal forma que, al dividir a la p -recta en dos p -semirectas, V está en la p -semirecta que contiene a B y U en la p -semirecta que no lo contiene; y (AB, UV) es la razón cruzada de A, B, U, V ; definida como:

$$(AB, UV) = \frac{AU \cdot BV}{BU \cdot AV}$$

Esta cantidad es positiva puesto que U, V no separan a A, B , por lo que AU y BU tienen el mismo signo, al igual que BV y AV , y por lo tanto el logaritmo de (AB, UV) existe.

Un p -ángulo se define como el e -ángulo en el punto de intersección de las e -curvas que forman la p -recta, i.e. el e -ángulo entre las tangentes en el punto de intersección

Dos p -ángulos son *iguales* si lo son en el sentido euclidiano.

Dos p -segmentos son p -congruentes si y sólo si tienen la misma p -longitud; es decir, si existe una inversión que mande un p -segmento en el otro, ya que la inversión preserva la razón cruzada⁵, y por lo tanto, si existe una inversión que mande un segmento en el otro, su razón cruzada será la misma, de ahí que sus longitudes coincidan y los segmentos sean p -congruentes.

3.2 El modelo de Poincaré y los postulados.

El modelo de Poincaré, por ser un modelo de la geometría planteada por Lobachevski, deberá cumplir con los primeros cuatro postulados de Euclides y con la suposición que hace Lobachevski en lugar del quinto postulado.

Pasaré entonces a comprobar ésto utilizando la geometría euclidiana. En cada postulado se da la definición que diera Euclides, (a excepción del quinto postulado donde se da la definición que dió Lobachevski), y se define su equivalente en términos de los elementos del modelo de Poincaré.

1^{er} postulado. _ Es posible trazar una línea recta de cualquier punto a cualquier punto.

_ Dados dos p -puntos, es posible trazar una p -recta por ellos.

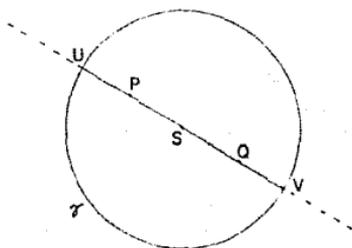
⁵ Teorema de razón cruzada. (Apendice 1. Inversión)

Demostración.

Sean P y Q p -puntos en γ ,

entonces P y Q son e -puntos (por definición).

CASO 1. Si P , Q y S están e -alineados.



Entonces existe una e -recta l que pasa por P y Q , (post. 1),
y contiene también a S ,

Sean U y V las intersecciones de l con γ ,

entonces UV es una e -cuerda de γ que contiene a S ,

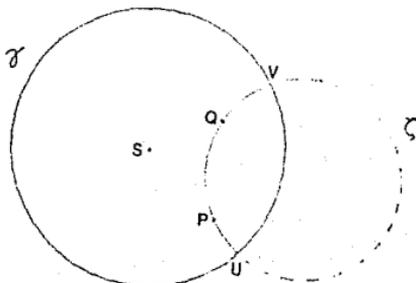
por lo tanto UV es un e -diámetro de γ ,

por lo tanto UV es una p -recta por P y Q . (por definición)

Además la p -recta UV es única ya que, por el postulado 2 de
Euclides la recta UV lo es.

CASO 2. Si P , Q y S no están e-alineados.

Entonces existe una circunferencia ζ ortogonal a γ que pasa por P y Q .



Ya que, sean P y Q p-puntos en γ y sean P' y Q' los inversos de P y Q respecto a γ ,

sea ζ la circunferencia que pasa por P , Q , P' y Q' , entonces ζ es una circunferencia ortogonal a γ que pasa por P y Q .⁶

Sean U y V las intersecciones de ζ con γ , entonces UV es un e-arco de ζ contenido en γ que contiene a P y Q , por lo tanto UV es una p-recta que pasa por P y Q .

Además la p-recta UV es única.⁷

⁶ Shiveley, L., Geometría Moderna, p.97.

⁷ Ibidem.

2^{do} postulado. _ Es posible prolongar una línea recta finita, continuamente, en una línea recta.

_ Para cada p-segmento AB y CD existe un punto E tal que B está entre A y E y $CD \cong BE$.

Demostración.

Sean AB y CD p-segmentos.

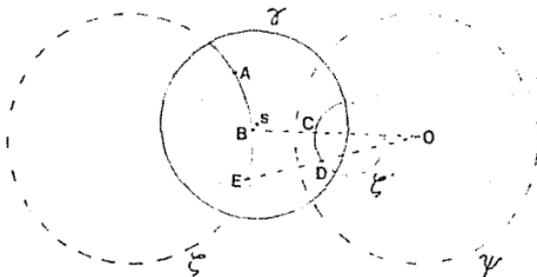
Sea $L_D^C = k$

Por demostrar que existe un p-punto E tal que:

$L_E^A = L_B^A + L_D^C$, si B divide a la p-recta AB en dos p-semirectas, entonces A está en una de ellas y E en la otra y

$$L_E^B = L_D^C.$$

Sean ζ y ζ' los e-círculos que contienen a AB y CD respectivamente,



sea ψ una circunferencia con centro en O tal que C y B sean puntos inversos con respecto a ella, entonces, C, B y O están

e-alineados, (Def. de Inversión) y ψ es la circunferencia de antisimilitud⁸ de ζ y ζ' .

el inverso de D con respecto a ψ es un punto E en ζ tal que O, D y E están e-alineados (Def. de Inversión),

es decir que existe una inversión que manda a CD en BE', por lo tanto $CD \cong BE$

es decir que existe E tal que $L'_E = k = L'_D$ de tal forma que por construcción E está en la p-semirecta que no contiene a A.

3^{er} postulado. _ Es posible describir un círculo con cualquier centro y distancia.

_ Es posible describir un p-círculo con cualquier p-centro y p-distancia.

Un p-círculo es un e-círculo tal que todos sus p-puntos están a la misma p-distancia de un p-punto llamado p-centro. .

Sea P un p-punto en γ , y sea $r > 0$ una p-distancia dada.

Entonces, por P es posible trazar una infinidad de p-rectas, y en cada una de ellas trazar la distancia $r > 0$ hacia ambos lados de P. (posts. 1y2)

⁸ Una circunferencia de antisimilitud de dos circunferencias es una circunferencia respecto a la cual las dos son mutuamente inversas. Shiveley, Geometría Moderna, pp. 101/2.

⁹ Teorema de razón cruzada. Ver capítulo de Inversión.

Los extremos de los p-segmentos así trazados serán los p-puntos del p-círculo. con P como p-centro.

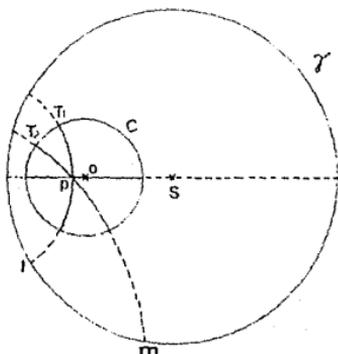
Demostración.

Sean l y m p-rectas por P ,

por definición, l y m son e-círculos ortogonales a γ ,

sean P y Q las intersecciones de l y m (por construcción P es una de las intersecciones),

por ser γ ortogonal a l y m el centro S de γ está en la recta que pasa por PQ , pues γ es un elemento de la familia Γ de círculos ortogonales a la familia Σ de círculos que pasan por P y Q ¹⁰.



Sean T_1 y T_2 puntos en l y m de tal forma que $L_p^{T_1} = L_p^{T_2} = r$.

[post. 2]

¹⁰ Shiveley, Geometría Moderna, pp. 81-91.

se traza por T_1 la e-recta tangente a l ; O es la intersección de dicha tangente con la e-recta que pasa por PQ , por lo tanto, OT_1 es el radio de C y C es también ortogonal a m^{11} , entonces C es un elemento de Γ .

Por demostrar que T_2 también está en C .

Sea ψ la circunferencia de antisimilitud de l y m , entonces l y m son mutuamente inversos, entonces ψ pasa por P^{12} , entonces P es su propio inverso, y

el inverso de T_1 es un punto T_2' en m ,

Por definición de congruencia de segmentos $L_p^{T_1'} = L_p^{T_2'}$,

como ψ es la circunferencia de antisimilitud de l y m , C es ortogonal a ψ , por lo tanto C es su propia inversa, puesto que C no pasa por el centro de ψ^{13} ,

por lo tanto el inverso de T_1 está en C , por lo tanto T_2' está en C , pero como

$$L_p^{T_1} = L_p^{T_2} \quad \text{y} \quad L_p^{T_1} = L_p^{T_2} \quad \text{entonces} \quad L_p^{T_2} = L_p^{T_2'}$$

además T_2 y T_2' están en m , por lo tanto $T_2 = T_2'$,

por lo tanto T_2 está en C .

De igual forma, sea n cualquier otra p-recta por P , entonces n es ortogonal a γ por P y si un punto T_3 en n es tal que $L_p^{T_3} = r > 0$ entonces T_3 está en C .

¹¹ Ibidem.

¹² Ibidem.

¹³ Ibidem.

Por lo tanto C es un e-círculo tal que todos sus puntos están a la misma p -distancia $r > 0$ de P .

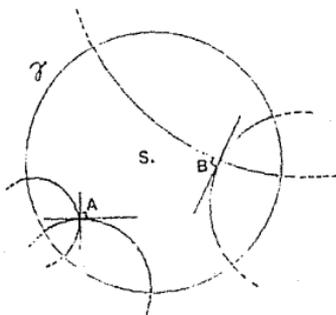
i.e. C es un p -círculo con p -centro P y p -distancia $r > 0$.

Cabe notar que el p -centro de C no coincide con el e-centro e-círculo descrito por el p -círculo.

4° postulado. _ Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

_ Todos los p -ángulos rectos son congruentes entre sí.

Sean A y B p -ángulos rectos en γ entonces A y B son los e-ángulos formados por las tangentes a la curvas que los forman, entonces, los ángulos en A y B son rectos euclidianamente;



por lo tanto son iguales entre sí.

por lo tanto los ángulos A y B son congruentes.

5° postulado (Lobachevski) _ Por un punto exterior a una línea recta puede trazarse más de una paralela.

_ Por un p-punto exterior a una p-recta puede trazarse más de una paralela.

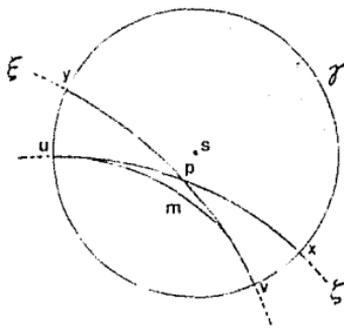
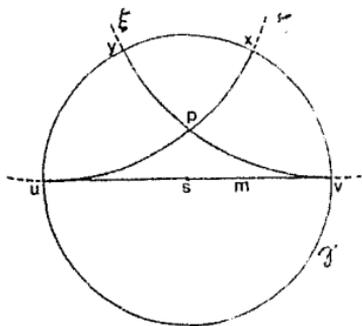
Sea P un p-punto en γ , y m una p-recta que no contiene a P .

Sean U y V las intersecciones del e-círculo m con γ .

Entonces, tanto U como V no son p-puntos. (por definición)

Trácese el círculo ζ ortogonal a γ que pase por P y U .

Sea X la otra intersección de ζ con γ , entonces el e-arco UX es una p-recta l que no intersecciona a la p-recta m , es decir, l es paralela a m por P .



Trácese el e-círculo ξ ortogonal a γ que pase por P y V .

Sea Y la otra intersección de ξ con γ , entonces el e-arco YV es una p-recta n que no intersecciona a la p-recta m .

es decir, n es otra paralela a m por P .

De hecho toda p -recta que pase por P y cuyos extremos estén entre las cuerdas UY y VX de γ será paralela a m por P .

A las p -rectas l y n se les denomina *paralelas límite*.

3.3 Resultados que dependen de la geometría lobachevskiana.

Anteriormente se mencionó que hay una serie de resultados que dependen de esta geometría, los cuales se pueden verificar en el modelo de Poincaré.

El hecho de que *las paralelas no sean equidistantes* es uno de estos resultados¹⁴; pues si

m es una p -recta y P un p -punto exterior a ella,

sea l una de las paralelas límite a m por P , y U y X los extremos de l ,

sea Q un punto cualquiera de m ;

si Q se aproxima a U entonces la distancia de Q a m se aproxima a cero y

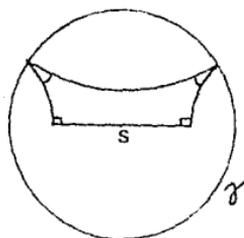
si Q se aproxima a X , entonces la distancia de Q a m se incrementa,

es decir, que la distancia aumenta en una dirección y disminuye en otra al acercarse a la p -recta de una manera asintótica.

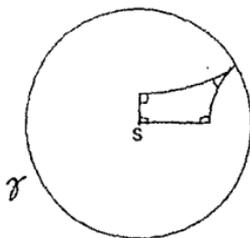
¹⁴ Greenberg, H., pp.155-157.

De hecho la distancia más corta entre dos rectas está dada por su *perpendicular común*¹⁵, sin embargo ésta no siempre existe.

También se tiene, en el modelo de Poincaré, que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor de 180° y por lo tanto todos los triángulos tienen defecto positivo¹⁶. De este resultado se desprende el hecho de que los cuadriláteros rectángulos no existen y de ahí que la suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero convexo es menor de 360° ¹⁷, pues si se une un par de vértices opuestos, se obtendrán del cuadrilátero dos triángulos, cuya respectiva suma de ángulos interiores será menor que 180° , por lo tanto la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero (que es igual a la suma de los ángulos interiores de los dos triángulos) será menor de 360° .



a) Cuadrilátero de Saccheri.



b) Cuadrilátero de Lambert.

¹⁵ Este concepto se analizará más adelante.

¹⁶ Greenberg, M. p. 153.

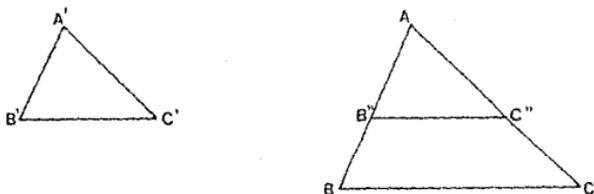
¹⁷ Ibidem.

En las figuras anteriores se muestra como se verían los cuadriláteros de Saccheri y de Lambert en el modelo de Poincare.

Otro resultado importante es que *no existen triángulos semejantes que no sean congruentes*¹⁹, ya que,

supongamos que existen triángulos ABC y $A'B'C'$ que sean semejantes pero no congruentes.

Entonces los lados correspondientes no son congruentes pues, de serlo, los triángulos serían congruentes, (prop. 26)



Supóngase entonces que $AB > A'B'$ y $AC > A'C'$, entonces existen puntos B'' en AB y C'' en AC de tal forma que $AB'' \cong A'B'$ y $AC'' \cong A'C'$. (prop. 31)

¹⁹ *Ibid.*, p. 154.

Entonces los triángulos $A'B'C'$ y $AB''C''$ son congruentes,

[prop. 26]

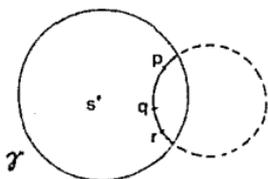
entonces los ángulos correspondientes son iguales.

i.e. $\angle A'B''C'' \cong \angle B'$ y $\angle AC''B'' \cong \angle C'$.

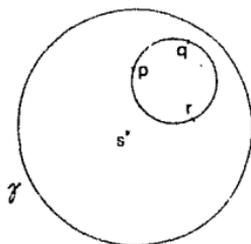
Por hipótesis los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, entonces $\angle AB''C'' \cong \angle B$ y $\angle AC''B'' \cong \angle C$ y por lo tanto BC es paralelo a $B''C''$ [prop.27],

por lo tanto en el cuadrilátero $BB''C''C$ se tiene que la suma de los ángulos interiores es 360° , lo cual es una contradicción en esta geometría.

Otro resultado es que *no siempre es posible trazar un p-círculo por tres p-puntos dados.*



a) Existe el e-círculo por tres p-puntos, pero no existe el p-círculo.



b) Existen tanto el e-círculo como el p-círculo por los tres p-puntos.

En el modelo se puede observar que, a pesar de que los tres puntos dados sean p-puntos, el e-círculo que pasa por ellos existe

pero no necesariamente quedará contenido enteramente en γ y por lo que no necesariamente será un p-círculo.

3.4 Definición de área. Defecto de un triángulo.

Cuando se define el concepto de área en geometría euclidiana se utiliza para la medición cuadrados unitarios, con los cuales se cubre la superficie que se desea medir. Sin embargo, como se vió anteriormente, los rectángulos no existen en la geometría Lobachevskiana, de ahí que los cuadrados tampoco, por lo que no es posible utilizar estas figuras como base de medición.

Sin embargo la definición de área es independiente de la figura que se utilice como medida o de la que se vaya a medir; lo importante es tener una función que cumpla con las propiedades que responden al concepto usual de área y que sea válida en esta geometría y, por lo tanto, lo sea en sus modelos cualesquiera que estos sean.

Esas propiedades son, basicamente:

1_ Las Figuras congruentes tienen la misma área.

2_ Si una figura es dividida en un número finito de subfiguras, la suma de las áreas de las subfiguras es igual al área de la figura original.

El defecto de un triángulo es una función que cumple con estas propiedades, pues:

El defecto de un triángulo se define como la diferencia entre

180° y la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Así, si se tiene un triángulo ABC, su defecto será:

$$\delta(ABC) = 180^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C)$$

donde $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ es la medida de los ángulos del triángulo ABC en grados. (En ocasiones se toma el defecto de un triángulo como un número real y no como una medida en grados).

Habiendo definido el defecto de un triángulo de esta manera se tiene que:

1_ Si dos triángulos son congruentes, entonces sus ángulos correspondientes son iguales, por lo tanto la suma de sus ángulos es la misma, por lo que sus defectos son iguales.

2_ Dado un triángulo, si este se divide en dos triángulos, la suma de los defectos de los dos triángulos es igual al defecto del triángulo original.

Pues si ABC es un triángulo y D un punto entre A y B, CD es interior al $\angle ACB$, entonces, $\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB$, además $\angle ADC + \angle CDB = 180^\circ$

entonces,

$$\delta(ABC) = 180^\circ - (\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA)$$

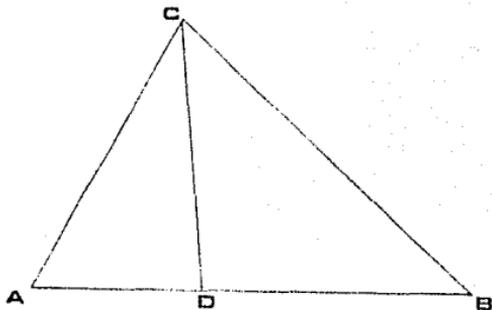
$$\delta(ADC) = 180^\circ - (\angle CAD + \angle ADC + \angle DCA)$$

$$\delta(DBC) = 180^\circ - (\angle CDB + \angle DCB + \angle BCD)$$

$$\text{y además } \angle CAB = \angle CAD \text{ y } \angle ABC = \angle DBC$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \delta(ABC) &= 180^\circ - (\angle CAD + \angle DBC + \angle ECD + \angle DCA). \\
 &= 180^\circ - (\angle CAD + \angle DCA + \angle DBC + \angle BCD) + \\
 &180^\circ - (\angle ADC + \angle CDB).
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \delta(ABC) &= 180^\circ - (\angle CAD + \angle ADC + \angle DCA) + \\
 &180^\circ - (\angle CDB + \angle DBC + \angle BCD). \\
 &= \delta(ADC) + \delta(CDB).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la suma de los defectos de los dos triángulos es igual al defecto del triángulo original.

Se tiene entonces que, el substituir el cuadrado por el triángulo, como medio de medición, permite definir el área de un triángulo como proporcional a su defecto.

En 1794 Gauss descubrió que dicha relación estaba dada por la siguiente fórmula:

$$\text{AREA (ABC)} = \frac{\pi}{180^\circ} k^2 \delta(\text{ABC})$$

la constante de proporcionalidad $\frac{\pi}{180^\circ} k^2$ depende de cual sea

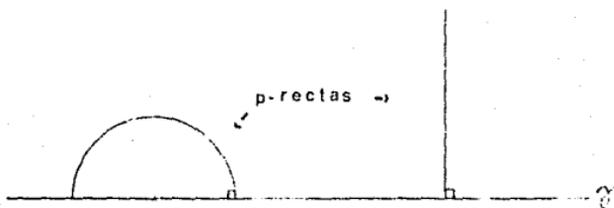
el triángulo que se escoja para ser la unidad de medida.

Puede observarse que por la forma en que está definida el área ésta resulta estar acotada puesto que el defecto de un triángulo varia entre cero y 180° ; ya que la suma de los ángulos de un triángulo no podrá ser menor que cero por lo tanto el defecto no será mayor de 180° .

Por lo tanto el área de un triángulo no podrá ser mayor de πk^2 .

3.5 El modelo de Poincaré en el semi-plano y su equivalencia con el modelo de Poincaré en el disco.

Poincaré construyó también otro modelo de la geometría de Lobachevski.

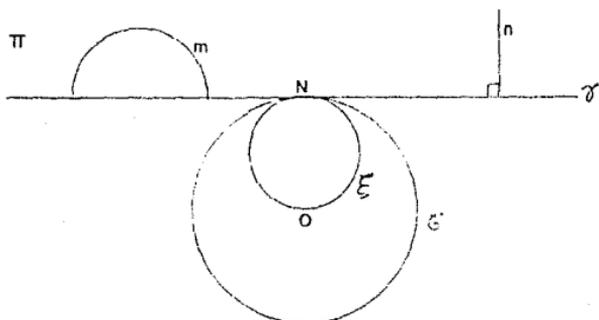


En este modelo el p-plano está representado por un

e-semiplano, los p-puntos son e-puntos contenidos en el e-semiplano y las e-rectas son e-rayos perpendiculares a la e-recta γ (que divide a los dos e-semiplanos) o bien e-semicircunferencias ortogonales a γ (i.e. cuyo centro está en γ) contenidas en el p-plano. γ no pertenece al p-plano.

Este modelo cumple y tiene todas las propiedades del modelo anterior pues puede demostrarse que son equivalentes.

A continuación se muestra como es posible encontrar una transformación (Inversión) que lleve de un modelo a otro logrando que sus elementos (plano, recta, punto, etc.) coincidan.



Sea Π el e-semiplano superior que representa al modelo "extendido" de Poincaré y γ la e-recta que lo delimita,

Sea C una e-circunferencia con e-centro en O y radio R de tal forma que sea tangente a γ en N y este contenida en el e-semiplano inferior.

Inviértase respecto a C , entonces

γ se invierte en una e-circunferencia ξ (ver. 1) tangente a γ y

ζ en N , y que pasa por O , por lo tanto ξ está en el interior de ζ .

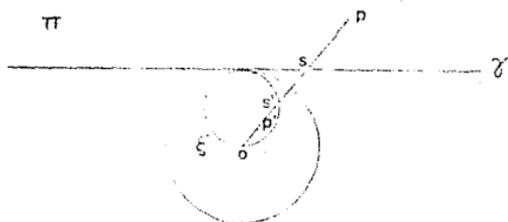
— Sea P un ϵ -punto en Π , entonces su inverso P' está en el interior de ξ .

Demostración.

Trácese OP , sea $S' = OP \cap \xi$,

entonces, $S = OP \cap \gamma$ es el inverso de S' , ya que ξ y γ son inversos respecto a ζ y S' (en ξ) y S (en γ) están alineados con

O ,



entonces, $OS \cdot OS' = R^2$

Sea P' tal que $OP \cdot OP' = R^2$, i.e. P' el inverso de P

Por demostrar que P' está en el interior de ξ ,

i.e. que $OP' < OS'$ (ya que OS' es una cuerda de ξ)

Supóngase que $OP' > OS'$,

sabemos que $OS \cdot OS' = OP \cdot OP' = R^2$ y $OP > OS$, entonces

$$OP \cdot OP' > OS \cdot OP' \text{ entonces, } R^2 > OS \cdot OP',$$

$$OP \cdot OS' > OS \cdot OS' \text{ entonces, } OP \cdot OS' > R^2$$

por lo tanto, $OP \cdot OS' > OS \cdot OP'$,

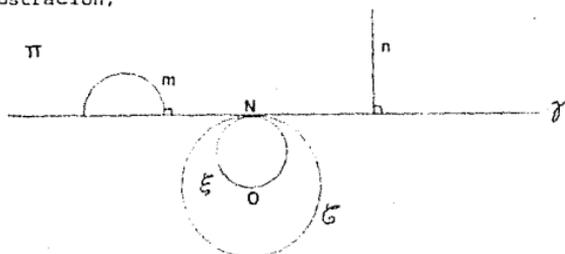
pero por hipótesis $OP' > OS'$, por lo tanto $OS > OP$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $OP' < OS'$, es decir que P' esta en el interior de ξ . Q.E.D.

Por lo tanto el e-semiplano Π se invierte en el interior de ξ y todo e-punto en el interior de ξ va a dar al semiplano Π .

El interior de la e-circunferencia ξ corresponde al otro modelo de Poincaré ya que los elementos del modelo extendido se invierten en los elementos del otro modelo y viceversa.

Demostración;



CASO 1 Sea m una e-circunferencia ortogonal a γ (es decir una p^* -recta del modelo "extendido"), entonces se invierte (Teo. 3) en una e-circunferencia m' ortogonal (Teo. 4) a ξ , (por lo tanto se invierte en una p -recta).

Si m pasa por O , entonces (Teo. 2), m' es una e-recta que no pasa por O y es ortogonal (Teo. 4) a ξ , por lo tanto m' es una diámetro de ξ (es decir m' es una p -recta).

CASO 2. Sea n un e-rayo de Π ortogonal a γ (es decir una p^* -recta del modelo "extendido"), entonces se invierte (Teo. 1) en una e-circunferencia n' ortogonal (Teo. 4) a ξ (es decir n' es una

p-recta).

Si la c-recta que contiene a n pasa por O entonces el inverso de n , n' , es el diámetro de ξ que va de O a N , pues el inverso de la e-recta es ella misma y esta pasa por O y N , (por lo tanto n' es una p-recta).

CAPITULO 4

El modelo de Klein y su equivalencia con el modelo de Poincaré.

Félix Klein (1849-1925), nacido en Dusseldorf, Alemania, realizó grandes contribuciones a casi todas las ramas de la Matemática y la Física. Sus logros más importantes en la geometría fueron los fundamentos proyectivos de las geometrías no euclidianas y la creación del "Programa de Erlangen".

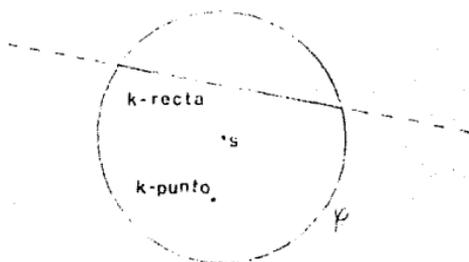
Si bien es cierto que la geometría hiperbólica había sido ya descubierta por Lobachevski (1829) y por Bolyai (1832), y poco antes que Klein, Beltrami había ya reconocido que era válida en superficies de curvatura negativa constante, las geometrías no euclidianas se volvieron del dominio común entre los matemáticos cuando, en 1871 y 1873, Klein publicó dos obras tituladas Über die sogenannte nicht-euklidische Geometrie.

Su contribución esencial en este sentido fue construir modelos proyectivos para tres tipos de geometrías: la hiperbólica planteada por Lobachevski y Bolyai, la elíptica y la euclidiana.

El modelo de la geometría de Lobachevski realizado por Klein, es también conocido como el modelo de Beltrami-Klein.

4.1 Definición del modelo de Klein.

A continuación se explica dicho modelo en términos de los elementos de la geometría euclidiana (e-puntos, e-rectas, etc.). A los elementos del modelo de Klein se les identificará como k-puntos, k-rectas, etc.



Considérese un círculo φ con centro en s y radio $r > 0$; esta curva será el límite de lo que ahora es el k-plano, definiéndose así:

Un *k-punto* es cualquier e-punto contenido en el interior de φ .

Una *k-recta* es cualquier e-cuerda del e-círculo φ .

Dos *k-rectas* son *paralelas* si no tienen *k-puntos* en común.

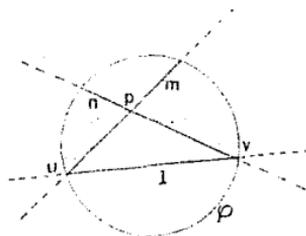
Las nociones de *orden* e *incidencia* de *k-rectas* y *k-puntos* coincide con la noción euclidiana, por lo que no se hará distinción al hablar de estos conceptos.

Dos k -ángulos serán k -congruentes si tienen la misma medida euclidianamente y dos k -segmentos serán k -congruentes si tienen la misma k -longitud.

La manera de medir k -ángulos y la k -longitud se definirán más adelante de tal manera que se obtenga la equivalencia de este modelo con el de Poincaré.

4.2 Algunos conceptos de la geometría de Lobachevskiana vistos a través del modelo de Klein.

En este modelo puede observarse, de manera muy clara, que si P es un k -punto exterior a una k -recta l , entonces existe más de una paralela a l por P .

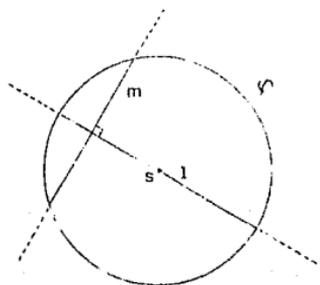


De hecho, sean U y V las e -intersecciones de l con φ , entonces las e -cuerdas de φ que pasan por U y P , m , y por V y P , n , representan las paralelas límite por P a l ; y todas las rectas que pasan por P y que están en la región que se indica en la figura son paralelas a l por P .

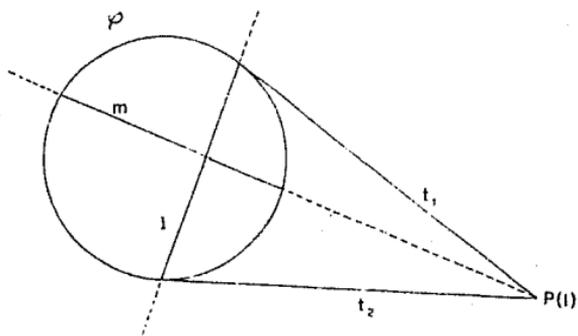
El concepto de *perpendicularidad* tiene una manera muy especial de definirse en este modelo:

CASO 1. Si de dos k -rectas l y m una de ellas es un e -diámetro de φ , entonces

l es *perpendicular* a m en el sentido de Klein si y sólo si lo es en el sentido euclidiano.



CASO 2. Si ninguna de las k -rectas l y m es e -diámetro de φ .

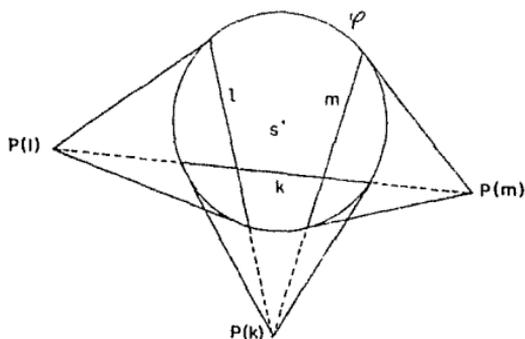


Sea $P(l)$ un punto fuera de φ y t_1 y t_2 las tangentes a φ por

los extremos de l . Entonces, si t_1 y t_2 se intersecan en $P(l)$ a este punto se le denomina el polo de l . Entonces,

l es perpendicular a m en el sentido de Klein si y sólo si la e-recta m pasa por el polo de l .

Una vez definido el concepto de paralelismo y perpendicularidad en el modelo de Klein cabe hacer notar que dos k -rectas paralelas l y m no necesariamente tienen una perpendicular común.



De hecho, utilizando la definición de perpendicularidad puede decirse que:

Una k -recta será perpendicular a dos k -rectas l y m si y sólo si la e-recta k pasa, simultáneamente, por los polos de l y m .

4.3 Demostración de equivalencia entre el modelo de Klein y el modelo de Poincaré.

Se han definido y observado una serie de conceptos y

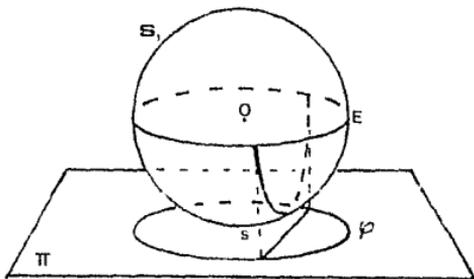
resultados en los modelos de Poincaré y de Klein, ambos modelos de la misma geometría. Es de esperarse que por esta razón dichos modelos sean equivalentes; de serlo, los resultados que sean válidos en un modelo lo serán en el otro y podrá trabajarse entonces de manera indistinta con uno u otro modelo.

Pasaré entonces a mostrar dicha equivalencia, para lo cual será necesario redefinir algunas cosas y mostrar la correspondencia que existe entre los elementos básicos de un modelo y los del otro.

4.3.1 El modelo de Klein en la semi-esfera

Sea φ , con centro en S y radio $r > 0$, la circunferencia que represente al modelo de Klein en el plano Π .

Considérese la esfera S_1 con centro en O y radio $r > 0$ tangente al plano Π en el punto S .



Si se proyecta de manera ortonormal a Π la circunferencia φ

en la esfera S_1 , φ se proyecta en el ecuador E de S_1 , y el interior de φ se proyecta en el "hemisferio Sur" de S_1 .

Entonces los k -puntos del interior de φ van a dar a puntos en el "hemisferio sur" de S_1 , las k -rectas van a dar a semicircunferencias en S_1 ortogonales a E .

Así, llámese $k_{(p)}$ -puntos a las poyecciones de los k -puntos y $k_{(p)}$ -rectas a las proyecciones de las k -rectas en S_1 .

De esta manera se obtiene un modelo de Klein en la semi-esfera y de ahora en adelante se trabajará con este modelo.

4.3.2 Transformación por Inversión del modelo de Klein en la semi-esfera al modelo de Poincaré.

Ahora sea S_2 la esfera con centro en N y radio $R=2r$.

Inviertase la esfera S_1 con respecto a S_2 con N como centro de inversión y R el radio de inversión.

Entonces S_1 se invierte en el plano Π tangente a S_1 y S_2 en S_1 .

[Fig. 51]

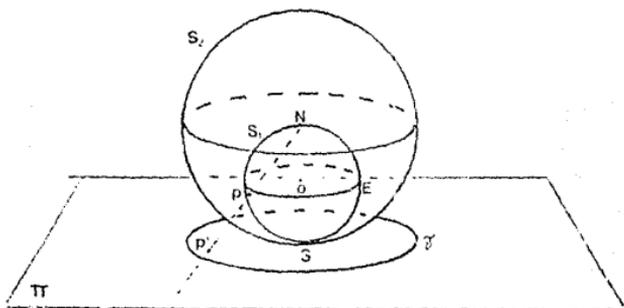
el ecuador E de S_1 se invierte en la circunferencia γ en Π

[Fig. 52]

y el "hemisferio sur" de S_1 se invierte en el interior de γ puesto que para cualquier punto P en el "hemisferio sur" de S_1 su inverso P' (que está en Π) y N el centro de inversión están alineados.

[Def. de Inversión]

De esta manera, sea la circunferencia γ en Π con centro es S y radio $R=2r$ la circunferencia del modelo de Poincaré.



Digo entonces que los elementos del modelo de Klein en la esfera se invierten en los elementos del modelo de Poincaré en el plano Π ; para demostrar esto se verá como se preserva la incidencia de puntos y rectas, y la congruencia de ángulos y segmentos.

4.3.3 Incidencia de puntos.

— $K(p)$ -puntos van a dar en p -puntos; pues ya se vió anteriormente que los puntos que están en el "hemisferio sur" de S_1 (que son los $K(p)$ -puntos) se invierten en los puntos en el interior de γ que por definición del modelo de Poincaré son los p -puntos.

4.3.4 Incidencia de rectas

— $K(p)$ -rectas van a dar a p -rectas; pues,

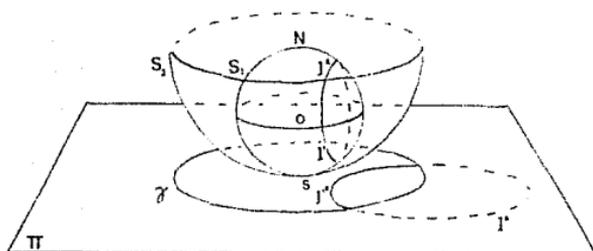
Sea l una $k(p)$ -recta cualquiera,

Por demostrar que su inverso l' respecto a S_2 es una p -recta.

CASO 1. Si l no pasa por S (el centro de γ), l es una circunferencia ortogonal a E ,

considérese l^* la circunferencia completa,

l^* es una circunferencia que no pasa por K (el centro de inversión), por lo tanto l'^* es una circunferencia (re. σ) (que no pasa por N) ortogonal a γ (re. γ).

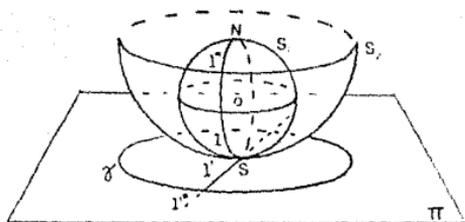


Considérese l' el arco de l'^* contenido en γ ,

Entonces l' , inversa de l , es un arco de circunferencia ortogonal a γ , y contenido en ella, por lo tanto es una p -recta

[definición de p -recta]

CASO 2. Si l pasa por S , entonces l^* (la circunferencia completa) pasa por N ,



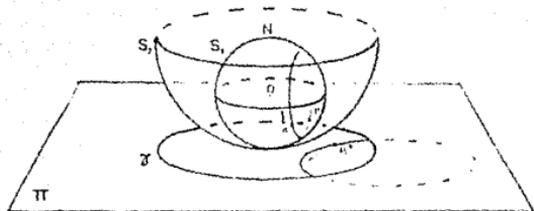
por lo tanto l^* es una circunferencia que pasa por el centro de inversión por lo que su inverso l'^* es una recta que no pasa por el centro de inversión $(\pi_{(p)}, O)$, y como l^* es tangente a S_2 en S entonces l'^* es tangente a S_2 en S , i.e. l'^* pasa por S , por lo tanto l' (la cuerda de γ formada por l'^*) es un diámetro de γ , y por lo tanto es una p-recta.

4.3.5 Incidencia de puntos y rectas.

— Una $k(p)$ -recta que pasa por dos $k(p)$ -puntos se invierte en una p-recta que pasa por dos p-puntos, los cuales son inversos de los $k(p)$ -puntos originales.

Sean A y B $k(p)$ -puntos y l la $k(p)$ -recta que incide con A y B .

Sean A' y B' los inversos respecto a S_2 de A y B respectivamente,



sea l' el inverso de l , entonces A' y B' están en l' ya que si l' es inversa de l y A y B están en l , como el inverso es único, los inversos de A y B tienen que estar en el inverso de l .

4.3.6 Intersección de rectas.

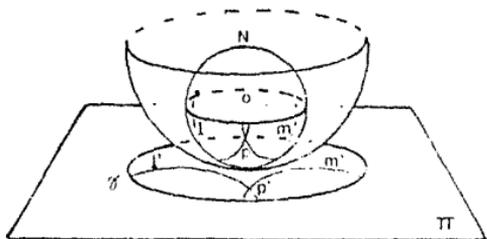
— Si dos $k(p)$ -rectas se intersecan en un $k(p)$ -punto dado entonces las p -rectas correspondientes se intersecan en el inverso de dicho $k(p)$ -punto.

Sean l y m $k(p)$ -rectas distintas y P su $k(p)$ -punto de intersección.

Sean l' y m' las p -rectas inversas de l y m respectivamente, entonces P está en l y P está en m ,

por lo tanto P' , inverso de P , está en l' y P' está en m' ,

por lo tanto P' está en l' y m' , que son p -rectas distintas con un p -punto en común P' .



4.3.7 Congruencia de ángulos y segmentos.

— Si dos $k(p)$ -rectas forman un ángulo α , entonces sus inversas l' y m' forman un ángulo β tal que $|\beta| = |\alpha|$.

Este resultado es inmediato del comportamiento de los ángulos bajo inversión.

Se define que:

— Dos k -segmentos son k -congruentes si y sólo si son p -congruentes, y

— Dos k -ángulos son k -congruentes si y sólo si son p -congruentes.

A partir de estas definiciones los siguientes resultados son

inmediatos:

___ Si dos $k(p)$ -segmentos son congruentes entonces los p -segmentos inversos serán congruentes.

___ Si dos $k(p)$ -ángulos son congruentes entonces sus inversos también lo son.

Esto se debe a que, como el modelo de Klein es equivalente al modelo de Klein en la esfera, si dos ángulos o segmentos son congruentes en el modelo de Klein en la esfera, por definición también lo serán en el modelo de Poincaré.

Se ha determinado así la equivalencia entre el modelo de Klein en la esfera y el modelo de Poincaré, ya que los elementos básicos de un modelo se corresponden de manera biunívoca, mediante la inversión, a los elementos del otro modelo. Pues la inversión es una transformación del espacio en sí mismo en donde: (1) a cada punto del espacio le corresponde uno y sólo un punto del mismo, (2) cada inverso es único y además (3) si P es inverso de P' , entonces P' es inverso de P . Y puesto que el modelo de Klein es equivalente al modelo de Klein en la esfera, se sigue que el modelo de Klein y el de Poincaré son equivalentes.

APENDICE I

INVERSION

En el siglo XVI François Vieta conocia ya lo que se denomina como puntos inversamente relacionados. Robert Simson en la restauración (1749) de la obra de Apolonio Lugares Geometricos Planos, incluyó (tomando como base el comentario hecho por Pappus) uno de los teoremas básicos de la teoria de inversión; i.e. que la inversa de una recta o una circunferencia es una circunferencia o una recta, respectivamente. Simon A.J. L'Hallier (1750-1840) en sus Eléments d'analyse géométrique et analyse algebrigue appliquées a la recherche des lieux géométriques (Paris y Génova, 1808) dió casos especiales de este teorema. Pero la inversión como una transformación simplificadora para el estudio de las figuras es un producto de tiempos más recientes; y fue independientemente explorada por varios autores. Bützberger ha señalado que Jacob J. Heiner reveló, en 1824, en un manuscrito no publicado un conocimiento de la transformación por inversión. Al año siguiente volvió a encontrarse esta transformación por el astrónomo y estadístico belga Adolphe Quetelet. Independientemente fue encontrada por L. I. Magnus en una forma más general (1831); por J

Bellavitis en 1836; por J. W. Stubbs y J. R. Ingram de la Universidad de Trinidad en Dublin en 1842 y 1843, y por Sir William Thomson (Lord Kelvin) en 1845. Thomson utilizó la inversión para dar demostraciones geométricas de algunas proposiciones difíciles de la teoría matemática de la elasticidad. En 1847 Liouville llamó inversión a la transformación por radios recíprocos. también se le denomina reflexión en una circunferencia.

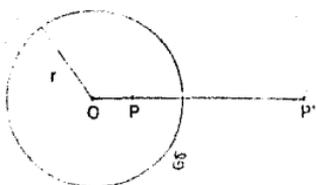
Definición de Inversión.

Si un punto P no está en el centro O de la circunferencia $\mathcal{C}(O,r)$, el inverso de P en, o con respecto a, la circunferencia $\mathcal{C}(O,r)$ es el punto P' que está en la recta OP de tal modo que:

$$OP \cdot OP' = r^2$$

La circunferencia $\mathcal{C}(O,r)$ se llama *circunferencia de inversión*; el punto O centro de inversión, r el radio de inversión y r^2 la potencia de inversión.

De la definición se sigue que a cada punto P del plano distinto de O , le corresponde un punto inverso único P' , y que si P' es el inverso de P , entonces P es el inverso de P' .



La circunferencia de inversión $C(O, r)$ se invierte en ella misma ya que si P es un punto de $C(O, r)$ entonces $OP = r$, por lo tanto $OP \cdot OP = r^2$ y P es su propio inverso.

Teoremas de Inversión.

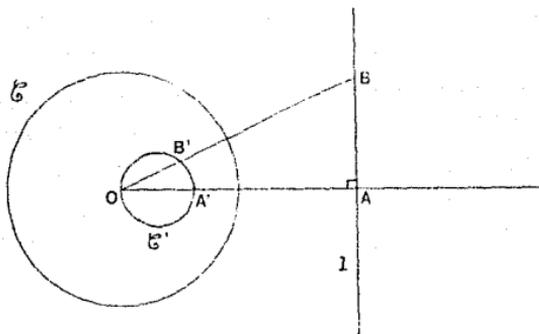
Teorema 1. El inverso de una línea recta que no pasa por el centro de inversión, es una circunferencia por el centro de inversión.

Demostración.

Sea A el pie de la perpendicular por el punto O a la recta L y A' , B' puntos inversos de A y B con respecto a la circunferencia $C(O, r)$.

Sea C' la circunferencia con diámetro OA' , entonces el ángulo $\angle OB'A' = \angle OAB$, por lo tanto el ángulo $\angle OB'A'$ es recto, por lo tanto el punto B' está en la circunferencia C' .

Sea C' cualquier otro punto diferente de O en \mathcal{C}' ,
 entonces la recta OC' corta a l en un punto C de tal forma
 que C' es el inverso de C con respecto a $\mathcal{C}(O,r)$,



por lo tanto la recta l se invierte en la circunferencia \mathcal{C}' .

El centro de \mathcal{C}' pertenece a la perpendicular desde O a l , por lo que si l no tiene puntos en común con $\mathcal{C}(O,r)$ entonces \mathcal{C}' está en el interior de $\mathcal{C}(O,r)$.

Si l es tangente a $\mathcal{C}(O,r)$ entonces \mathcal{C}' es también tangente a $\mathcal{C}(O,r)$ en el mismo punto.

Si l y $\mathcal{C}(O,r)$ se cortan, entonces \mathcal{C}' pasará por sus puntos de intersección.

Teorema 2. El inverso de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta que no pasa por el centro de inversión.

Demostración.

Supongamos que O (el centro de inversión) A y B son puntos distintos de la circunferencia C' y A' , B' inversos de A y B respecto a $C(O, r)$ (la circunferencia de inversión).

Por el teorema 1, la recta $A'B'$ se transforma en una circunferencia C'' que pasa por O , A y B ; es decir en la circunferencia C' , de lo que se deduce que C' se transforma en la recta $A'B'$.

Más aún, la línea recta es perpendicular al diámetro de la circunferencia que pasa por el centro de inversión.

Teorema 3. El inverso de una circunferencia de radio finito que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia de radio finito que no pasa por este punto.

Demostración.

Sea $C(O, r)$ la circunferencia de inversión y ξ una circunferencia que no pasa por O .

Sea A un punto cualquiera en ξ y se B el otro punto de intersección de la recta OA con ξ ,

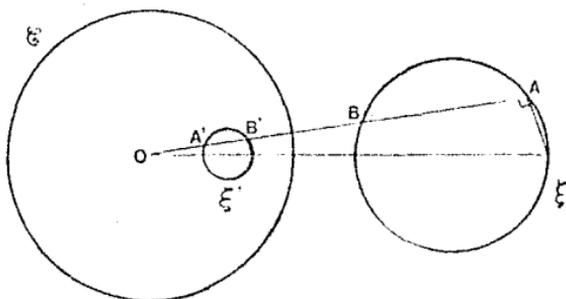
sean A' y B' los inversos de A y B con respecto a $C(O, r)$.

Entonces

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$$

de ahí $\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} = r^2$ y $OA \cdot OB \cdot OA' \cdot OB' = r^4$.

El producto $OA \cdot OB = g$ no varía al desplazar el punto A por ξ , por lo que g es una magnitud constante positiva si O está en el exterior de ξ y negativa si O está en el interior de ξ .



Por lo que se tiene $OA' \cdot OB' = \frac{r^2}{g}$ y por lo tanto

$$\frac{OA}{OB'} \cdot \frac{OB}{OA'} = \frac{g^2}{r^2}, \quad \text{o bien} \quad \frac{OA}{OB'} = \frac{g}{r}.$$

De aquí se deduce que las figuras descritas por los puntos A y B' son semejantes; por consiguiente el punto B' describe una circunferencia ξ' .

El centro de inversión O será el centro de similitud de las circunferencias ξ y ξ' , y será exterior si $g > 0$ e interior si $g < 0$.

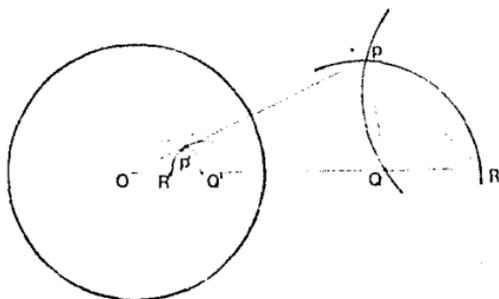
Si ξ interseca a $\mathcal{C}(O, r)$ en algún punto entonces ξ' interseca a $\mathcal{C}(O, r)$ en el mismo punto.

Si ξ es ortogonal a $\mathcal{C}(O, r)$ se invierte en sí misma.

Teorema 4. Si dos curvas se intersecan en un punto cualquiera distinto del centro de inversión su ángulo de intersección en ese punto es igual en magnitud pero opuesto en signo al ángulo de intersección de las curvas inversas en el punto inverso.

Demostración.

Sean las curvas que se intersecan en P , un punto distinto de O , el centro de inversión.



Trácese OP y otra línea por O que corte a las curvas dadas en Q y R .

Sean P' , Q' y R' inversos de P , Q y R , respectivamente, entonces el inverso de las curvas por P, Q y R, P son curvas que pasan por P', Q' y P', R' , respectivamente, ya que

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$$

PQ es antiparalela a $P'Q'$ con respecto a OP y OQ , entonces

$$\angle QPO = \angle OQ'P' \quad \text{y} \quad \angle RPO = \angle OR'P',$$

por lo que

$$\angle QPR = -\angle Q'P'R'$$

Si QQ' tiende a CP , en el límite RP y PQ son tangentes a las respectivas curvas, formando los ángulos de intersección de las curvas. Igualmente respecto a $R'P'$ y $Q'P'$.

Por lo tanto los ángulos de intersección son iguales en magnitud pero opuestos en signo.

Teorema de razón cruzada. La razón cruzada de cuatro puntos distintos sobre una circunferencia es invariante respecto a una inversión cuyo centro sea distinto de los cuatro puntos mencionados.

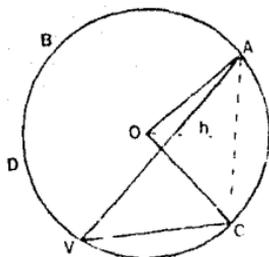
Demostración.

Sean A, B, C y D los cuatro puntos distintos sobre la circunferencia C , y sea C' la circunferencia inversa de C .

$$(A'B', C'D') = \left(\frac{A'C'}{C'B'} \right) = \left(\frac{AC}{CB} \right) = (AB, CD)$$
$$\frac{A'D'}{D'B'}$$

Ya que, si A, B, C y D son puntos de una circunferencia, entonces, la razón cruzada $(AB, CD) = \left(\frac{AC}{CB} \middle| \frac{AD}{DB} \right)$, donde AC, CB, AD, DB son las longitudes euclidianas de las cuerdas que unen

respectivamente los puntos.



Sea V un punto cualquiera de C distinto de A, B, C y D.

Sea h la bisectriz del ángulo AOC, h es perpendicular a AC; por lo tanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\angle AOC}{2}\right) &= \frac{AC}{2} \mid OA, \text{ entonces,} \\ AC &= 2 \, OA \operatorname{sen}\left(\frac{\angle AOC}{2}\right) = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\angle AOC}{2}\right) = 2r \operatorname{sen} \angle AVC, \end{aligned}$$

ya que el ángulo central es el doble del ángulo inscrito.

Análogamente:

$$\left. \begin{aligned} CB &= 2r \operatorname{sen} \angle CVB \\ AD &= 2r \operatorname{sen} \angle AVD \\ DB &= 2r \operatorname{sen} \angle DVB \end{aligned} \right\} (AB, CD) = V(AB, CD) = \frac{\operatorname{sen} \angle AVC}{\operatorname{sen} \angle CVB} ; \frac{\operatorname{sen} \angle AVD}{\operatorname{sen} \angle DVB} =$$

$$\left(\frac{AC}{CB} \mid \frac{AD}{DB} \right) .$$

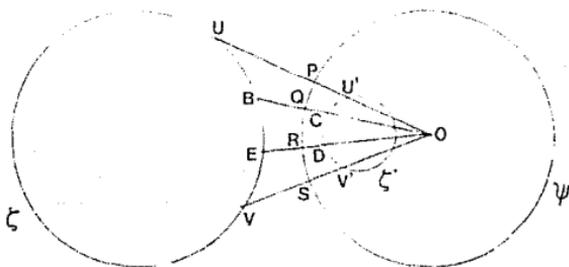
Este número es positivo o negativo dependiendo de la posición

de A, B, C y D.

Si AB no están separados por CD, la razón cruzada es positiva, y si AB están separados por CD, la razón cruzada es negativa.

De lo anterior se tiene que si ζ y ζ' son circunferencias mutuamente inversas respecto a una circunferencia ψ con centro en O y B, E, U, y V en ζ y C, D, U', y V' en ζ' puntos respectivamente inversos, entonces, $(BE, UV) = (CD, U'V')$.

Demostración.



Sean $P = UU'O \cap \psi,$
 $Q = U'U'O \cap \psi,$
 $R = VO \cap \psi,$ y
 $S = V'O \cap \psi.$

Entonces, si x es un punto en ψ , se tiene que

$$\angle QxP = \frac{1}{2} \angle QOP,$$

entonces, $\text{sen } \angle QxP = \text{sen } \frac{1}{2} \angle QOP = \frac{QP}{2} / r,$

entonces, $QP = 2r \operatorname{sen} QxP = 2r \operatorname{sen} QOP/2$.

Análogamente para PR, QS y SR y como

$$(QR, PS) = \frac{QP}{PR} \cdot \frac{QS}{SR} = \frac{\frac{\operatorname{sen} QXP}{\operatorname{sen} PKX}}{\frac{\operatorname{sen} QXS}{\operatorname{sen} SXR}} = \frac{2r \operatorname{sen} (QOP/2) \cdot 2r \operatorname{sen} (SOR/2)}{2r \operatorname{sen} (POR/2) \cdot 2r \operatorname{sen} (QOS/2)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} (ROU/2) \cdot \operatorname{sen} (UOE/2)}{\operatorname{sen} (UOE/2) \cdot \operatorname{sen} (SOV/2)} = \frac{\operatorname{sen} (COU'/2) \cdot \operatorname{sen} (V'OD/2)}{\operatorname{sen} (U'OD/2) \cdot \operatorname{sen} (COV'/2)}$$

ya que:

$$\angle COU' = \angle BOU = \angle QOP$$

$$\angle U'OD = \angle UOE = \angle POR$$

$$\angle COV' = \angle BOV = \angle QOS$$

$$\angle V'OD = \angle VOE = \angle SOR$$

por lo tanto,

$$\frac{BU \cdot VE}{UE \cdot BV} = \frac{CU' \cdot V'E}{U'D \cdot CV'}$$

es decir que

$$(BE, UV) = (CD, U'V')$$

y por lo tanto se preserva la razón cruzada bajo la inversión.

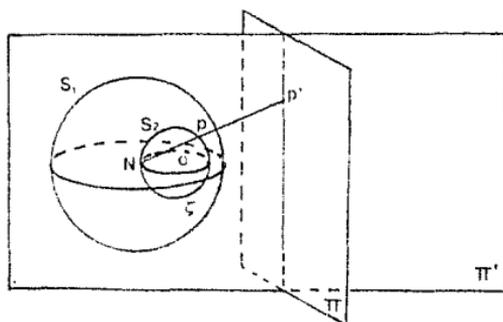
Teorema 5 El inverso de un plano que no pasa por el centro de inversión es una esfera que pasa por el centro de inversión; y reciprocamente el inverso de una esfera de radio finito que pasa por el centro de inversión es un plano que no pasa por el centro de inversión.

Más aún, el plano es ortogonal al diámetro de la esfera que

pasa por el centro de inversión.

Demostración.

Sea S_1 una esfera de radio R y centro en N . S_1 es la esfera de inversión.



Sea S_2 una esfera con centro en O y radio r que pasa por N .

Sea Π un plano ortonormal a la recta NO .

P.D. El inverso de S_2 con respecto a S_1 es el plano Π .

Sea P cualquier punto distinto de N en S_2 ,

sea P' el punto de intersección de la recta NP y el plano Π .

Entonces P' es el inverso de P , ya que:

P está en una circunferencia ζ de radio máximo que pasa por N , el centro de inversión,

Sea Π' el plano que contiene a ζ .

Entonces ζ es una circunferencia que pasa por el centro de

inversión; por el teorema 1, se invierte en una recta l que no pasa por el centro de inversión. Pero l está en Π ya que P' lo está y por lo tanto P' es el inverso de P . De hecho la recta l es la intersección de los planos Π y Π' .

Por lo tanto todo punto de S_2 tiene su inverso en Π , por lo tanto el inverso de S_2 con respecto a S_1 es Π .

Por el teorema 2, el recíproco es cierto.

Si S_1 y S_2 se intersecan, Π y S_2 también.

Si S_1, S_2 son tangentes entonces Π será tangente a S_1 y S_2 en el mismo punto.

Teorema 6. El inverso de una esfera de radio finito que no pasa por el centro de inversión, es una esfera de radio finito que no pasa por este punto.

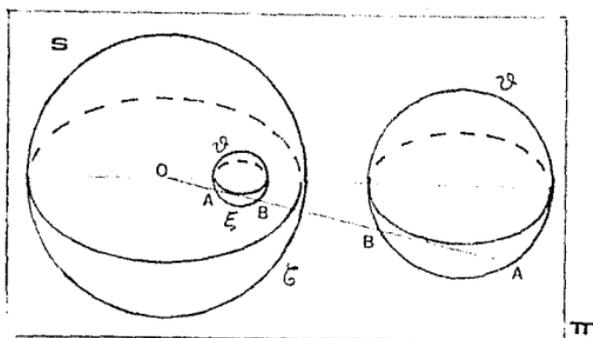
Demostración.

Sea \mathcal{S} la esfera de inversión y \mathcal{O} una esfera que no pasa por O .

Sea A un punto cualquiera en \mathcal{O} y sea B el otro punto de intersección de la recta OA y el centro de \mathcal{O} . Entonces los puntos A y B están en una circunferencia de radio máximo ξ de la esfera \mathcal{O} , y el plano Π corta a \mathcal{S} en otra circunferencia $\mathcal{C}(O, r)$ de radio máximo, puesto que O está en Π .

Entonces, por el teorema 3, la circunferencia ξ que no pasa

por O se invierte, respecto a $\mathcal{U}(O,r)$, en una circunferencia ξ' que no pasa por el centro de inversión y que es una circunferencia de radio máximo de la esfera ϑ' .



Se sigue entonces que el inverso de la esfera ϑ es la esfera ϑ' .

Teorema 7. Si dos curvas se intersecan en un punto cualquiera distinto del centro de inversión, su ángulo de inversión es igual en magnitud pero opuesto en signo al ángulo de intersección de las curvas inversas por el punto inverso.

La demostración es inmediata del teorema 4, pues si dos curvas se intersecan, tómesese el plano en el que están contenidas

las rectas tangentes que forman el ángulo,

entonces el inverso de éstas está contenido en el mismo plano, puesto que los inversos deben ser colineales y dos rectas definen un único plano,

entonces, por el teorema 4, el ángulo que forman las rectas inversas correspondientes es igual en magnitud pero opuesto en signo; además, las rectas inversas son tangentes a las curvas inversas a las originales en el mismo punto,

por lo tanto, el ángulo se conserva en cuanto a magnitud pero no en cuanto a signo.

APENDICE 2

La geometría de Lobachevski.

Nikolai Ivánovich Lobachevski nació el 20 de noviembre de 1792, estudió en la Universidad de Kazán donde recibió el grado de maestro en física y matemáticas, y posteriormente ingresó como profesor.

Fue ahí donde Lobachevski conoció a M. L. Magnitski, con quien tuviera problemas por su divergencia de opinión respecto a la política académica de la Universidad. Magnitski había sido nombrado, en 1819, miembro de la Dirección Principal de Escuelas, e inmediatamente después fue encargado de la inspección de la Universidad y escuelas de Kazán. Habiendo encontrado anomalías en la administración de la Universidad, Magnitski se encargó de la reorganización de ésta, además de instituir un nuevo sistema de enseñanza.

En 1822, Magnitski, después de haber reorganizado la Universidad de Kazán, propuso a los profesores de dicha Universidad la presentación de libros de texto y resúmenes de clase con el fin de publicarlos. Lobachevski, quien se había interesado en la teoría de las paralelas al ser profesor de Geometría de los primeros niveles, presentó, en el verano de 1823,

un manuscrito de Geometría del cual era autor. No existe constancia alguna que indique la solicitud de Lobachevski para que el manuscrito Geometría fuera publicado.

G. B. Nikolski, director de la Universidad, hizo llegar el manuscrito a Magnitski, solicitando la autorización para publicarlo. Magnitski remitió el escrito al académico N. I. Fuss solicitándole su opinión. La crítica de Fuss fue muy severa y desfavorable, en virtud de esto Magnitski contestó al director que el manuscrito no podía ser publicado y que sugería que Lobachevski realizara las correcciones que Fuss había indicado. Lobachevski no hizo corrección alguna y el manuscrito nunca fue publicado, aunque posteriormente fue rescatado de los archivos de la Universidad.

En este escrito Lobachevski reunió, en los cinco primeros capítulos, todo lo que no dependía del postulado de las paralelas de Euclides, abarcando temas de planimetría y esfereometría.

Geometría es la primera obra en el mundo que trata, de manera separada, la geometría absoluta de la geometría euclidiana.

En 1826 Lobachevski presentó un trabajo bajo el título de Exposition succinte des principes de la Geometrie avec une demonstration rigoureuse du theoreme des paralleles, del cual solicitó su publicación. Aunque nuevamente el trabajo no fue publicado, el contenido de éste se conoce gracias a que, tres años más tarde, Lobachevski logró publicar en la revista " Mensajero de Kazán " un tercio de este trabajo, bajo el título Acerca de los principios de geometría.

En este escrito se presenta, después de algunas consideraciones preliminares, una exposición de los principios de la geometría no euclidiana creada por Lobachevski, a la cual él llamaba geometría imaginaria, y finaliza con una serie de ecuaciones que, basadas en esa geometría, relacionan los lados y los ángulos de los triángulos rectángulos.

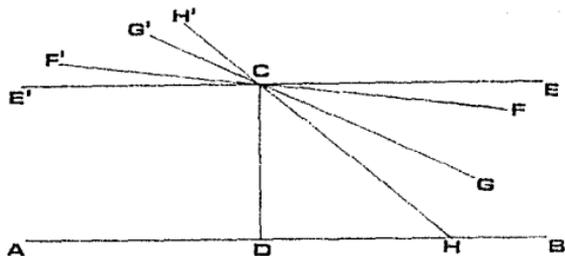
Tanto los trabajos que Lobachevski había presentado, como sus publicaciones posteriores, le atrajeron violentas críticas por no ser comprendidos; es posible que debido a esto Lobachevski haya decidido escribir Geometrich e Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien (1840)¹, en el cual presenta sólo los principios de su nueva geometría, expuestos de una manera más abordable. Fue con esta obra que el mundo matemático de ese entonces logró familiarizarse con las ideas de Lobachevski.

En las Investigaciones geométricas de la teoría de las líneas paralelas, después de una corta introducción, Lobachevski enuncia 15 proposiciones fundamentales de la geometría absoluta, a las cuales recurre en su exposición. A continuación se adentra en el camino que lo conduce a la geometría no euclidiana, para mostrar ésto considérese la siguiente figura :

Sea C un punto exterior a la recta AB, sea CD la

¹ Título en español: "Investigaciones geométricas de la teoría de las líneas paralelas"

perpendicular a AB desde C.



En el mismo plano, trácese la recta $E'CE$ perpendicular a CD por C .

La hipótesis que hace Lobachevski para completar la geometría absoluta conforme a su punto de vista, es que en el mismo plano ACB pasa por el punto C , además de la recta $E'CE$ (paralela euclidiana), al menos una recta más $G'CG$ que tampoco corta a AB .

Es evidente que en virtud de tal hipótesis, toda recta $F'CF$ que pase por el punto C entre las rectas $E'CE$ y $G'CG$ (es decir, dentro de los ángulos ECG y $E'CG'$ opuestos por el vértice), tampoco se encuentre con AB , lo que hace que por el punto C pase en el mismo plano un número infinito de rectas que no corten a AB .

Aquellas rectas del primer cuadrante (es decir, en el ángulo recto DCE) se dividen en dos categorías: las que se encuentran con AB (como la recta $H'CH$) y las que no se encuentran con AB (como la recta $F'CF$); las primeras (del primer cuadrante) están más próximas a la perpendicular CD , y las segundas a CE . De la

continuidad del haz resulta que esos cuadrantes deben contener una recta que separe a las rectas de la primera categoría de las rectas de la segunda categoría. Sin embargo ese haz no puede contener la última línea que corte a AB. Por lo tanto la recta límite será la primera que no cortará a AB.

En el cuarto cuadrante (en el ángulo recto $E'CD$), evidentemente sucederá lo mismo que en el primer cuadrante, por lo que también se tendrá una primera recta que no corte a AB.

A esas dos rectas Lobachevski las llama paralelas a AB. A las otras rectas que están contenidas en el ángulo que forman las rectas paralelas y que no cortan a AB, Lobachevski no las califica como paralelas a AB.

Al plano en el cual se realizan las hipótesis de Lobachevski se le llama plano Lobachevskiano y en ese mismo sentido se habla del espacio Lobachevskiano.

Lo anterior es la base de la geometría planteada por Lobachevski, aunque desde luego éste definió una serie de conceptos y proposiciones que completan su teoría⁴.

Algunos resultados propios de la geometría lobachevskiana.

1. Dada una línea recta y un punto exterior a ella, existe una infinidad de rectas paralelas a la recta dada que pasan por el

⁴Kagan. V. F., Lobachevski, pp. 87-160.

punto dado.

2. Las líneas rectas paralelas no son equidistantes.
3. Dos rectas paralelas tienen, a lo más, una perpendicular común.
4. Existen líneas paralelas tales que si una línea recta corta a una de las dos, no corta a la otra.
5. Existen líneas paralelas a una misma recta que no son paralelas entre sí.
6. El ángulo de paralelismo en un punto para una recta sólo depende de la distancia del punto a la recta y disminuye a medida que la distancia aumenta.
7. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre menor que dos rectos.
8. Dos triángulos son congruentes si los tres ángulos de uno son iguales a los tres del otro.
9. No existen triángulos semejantes no congruentes.
10. El área de un triángulo está acotada.
11. La recta que pasando por el punto medio de un lado de un triángulo, es perpendicular a la mediatriz de un segundo lado, biseca al tercer lado.
12. El ángulo exterior de un triángulo límite³ es mayor que el

³Un triángulo límite es aquel que está formado por dos rayos paralelos y un segmento que une los orígenes de los rayos.

ángulo interior opuesto.

13. La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es menor que 360° .

14. Los ángulos en la cima de un cuadrilátero de Saccheri son iguales y agudos.⁴

15. No siempre existe la circunferencia que pase por tres puntos dados no colineales.

⁴ Un cuadrilátero ABCD es de Saccheri si $\angle A = \angle B = 90^\circ$ y $AB = BC$. AB se llama Base, CD cima y, $\angle C$ y $\angle D$ ángulos en la cima.

BIBLIOGRAFIA

A continuación se presenta una bibliografía para ser consultada por aquellos que deseen profundizar en los temas que se presentan en este trabajo. Los libros que fueron fuente directa de éste se encuentran señalados por un asterisco (*).

Beardon, Alan F., The Geometry of Discrete Groups, Springer-Verlang, Nueva York, 1983.

Bonola, R., Non-Euclidean Geometry, A critical and Historical Study of Its Development, Dover, Nueva York, 1955.

Borsuk, K. y W. Szwielew, Foundations of Geometry, North-Holland Publ., Amsterdam, 1960.

Courant, P. y H. Robbins, What is Mathematics?, Oxford University Press, 1941.*

Coexter, H. S. M., Non-Euclidean Geometry, University of Toronto Press, 1968.

Dictionary of scientific Biography, vols. VII y XI, Charles
Cribuer's sons, Nueva York, 1973.*

Eves, H. y C. Newson, An Introduction to the Foundations
and Fundamental Concepts of Mathematics, rev. ed.,
Nueva York, Holt, Rinchart, Winston.

Eves, H., Estudio de las geometrías, vol. 1, UTEHA, México,
1969.*

Efimov, N. V., Geometria superior, MIR, Moscú, 1984.*

Ford, L. R., Automorphic functions, 2a. ed., Chelsea,
Nueva York, 1951.

Gans, D., An introduction to non-euclidean geometry,
Academic Press.*

Greenberg, M. J., Euclidean and Non Euclidean Geometry,
Development and History.*

Heath, Sir Thomas L., The thirteen books of Euclid's
Elements, vol. I, 2^a ed., Dover, Nueva York.*

Heath, Sir Thomas L., The thirteen books of Euclid's Elements, colecc. Great Books, vol. XI, pp 1-400, 23ªed., Encyclopedia Británica, Nueva York, 1980.*

Henri Poincaré, Filosofía de la Ciencia, Nuestros Clásicos, no. 32, UNAM, 1984.*

Hilbert, D. and S. Cohn-Vossen, Geometry and Imagination, Chelsea, Nueva York, 1952.*

Hilbert, D., Foundations of Geometry, Open Court, La Salle, Illinois.

Kagán, V. F., Lobachevski, MIR, URSS, 1986.*

Kulczycki, S., Non-Euclidean Geometry, Pergamon, Oxford, 1961.

Lehner, J. A., Short course in automorphic functions, Holt, Runchart y Winston, Nueva York, 1966.

Lobachevski, N. I., Nuevos principios de la geometría con una teoría completa de las paralelas, Comunicaciones Internas, No. 10, Depto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1980.*

- Magnus, Wilhem, Noneuclidean Tessellations and their Groups,
Academic Press, Nueva York, 1963.
- Manning, H. P., Non-Euclidean Geometry, Dover, Nueva York,
1963.
- Meschkowski, Herbert., Noneuclidean Geometry, 3rd.,
Academic Press, U.S.A., 1972.*
- Noise, E. E., Elementary Geometry from and Advanced
Standpoint, Addison-Wesley, Massachussets, 1963.
- Prenowitz, Walter y Jordan, Meyer., Basic concepts of
geometry, Xerox.*
- Rosenfeld, B. A., y Segeeva, N. D., Proyección
estereográfica, Lecciones populares de matemáticas,
MIR, URSS, 1977. *
- Saccheri, G., Euclides Vindicatus, Open Court Publ.,
Chicago, Illinois, 1926.
- Schwerdtfeger, Hans, Geometry of complex numbers, Dover,
Nueva York, 1979.

Shively, L. S., Introducción a la Geometría Moderna, 21ª ed., CECSA, México, 1980.

Smith, D. E., A sourcebook in Mathematics, Dover, Nueva York, 1959.

Smogorzhevski, A.S. Apuntes de la geometría de Lobachevski, Lecciones populares de matemáticas, MIR, URSS, 1978.

Sommerville, D. M., Elements of Non-Euclidean Geometry, Dover, Nueva York, 1958.

Thurston, William P., Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hiperbolic geometry, Boletín (New series) de la American Mathematical Society, vol. 6, no. 3, mayo de 1982.