

01176
lej.
2

SOBRE CONTROL ADAPTABLE DE SISTEMAS NO LINEALES

ALEJANDRO RODRIGUEZ PALACIOS

TESIS

Presentada a la División de Estudios de

Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERIA

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener

el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA

(ELECTRICA)

CIUDAD UNIVERSITARIA (JUNIO 1989)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo diseñar un controlador adaptable que estabilice a una familia de sistemas no lineales que incluya sistemas no linealizables y, en algún sentido conveniente, a todos los sistemas linealizables. El resultado principal de la tesis es la determinación de un controlador y una ley de adaptación paramétrica que permiten garantizar la estabilidad global del equilibrio x_e , para la familia de sistemas no lineales mencionada antes. Esta familia está caracterizada por la existencia de un controlador paramétrico que "genera" un subsistema estrictamente pasivo para una elección conveniente de la salida. Como parte del procedimiento de diseño del controlador adaptable estabilizante, se utilizó una versión no lineal del lema de Kalman-Yacubovich-Popov. No se ha determinado, hasta el momento, qué tan grande es esta familia de sistemas no lineales. Sin embargo, se ha explorado a través de algunos ejemplos y se conjetura que contiene sistemas de interés práctico.

Indice

INDICE

1. INTRODUCCION	1
2. PRELIMINARES	3
2.1 Sistemas Disipativos	3
2.1.1 Disipatividad: descripción entrada-salida	4
2.1.2 Disipatividad: descripción en el espacio de estados	7
2.1.3 Sistemas No Lineales de Dimensión Finita	10
2.2 Linealización Exacta en el Espacio de Estados	17
2.3 Control Adaptable de Sistemas Lineales	22
2.3.1 Adaptación Directa de los Parámetros de la Planta	24
2.3.2 Control Realimentado con B_p Conocida	26
2.3.3 Control Realimentado con B_p Desconocida	28
3. CONTROL ADAPTABLE DE SISTEMAS NO LINEALES	31
3.1 Linealización Exacta y Control Adaptable	31
3.1.1 Linealización Exacta "Adaptable" Entrada-Salida	32
3.1.2 Linealización Exacta "Adaptable" en el Espacio de Estados ..	43
3.2 Métodos de Control Basados en la Propiedad de Pasividad	47

Indice

4. ESTABILIZACION ADAPTABLE DE UNA CLASE DE SISTEMAS NO LINEALES:	
CASO NO LINEALIZABLE	49
4.1 Planteamiento del Problema	49
4.2 La Clase \mathcal{D}	51
4.3 Lemas Preliminares	54
4.4 Resultado Principal	61
5. METODOLOGIA DE DISEÑO Y EJEMPLOS	64
5.1 Método de Diseño	65
5.2 Ejemplos	67
6. CONCLUSIONES	79
6.1 Discusión	79
6.2 Direcciones Futuras de Investigación	80
BIBLIOGRAFIA	82
APENDICE	86

1. INTRODUCCION.

El control de sistemas dinámicos no lineales es un problema no trivial que ocupa la atención de muchos investigadores. En la actualidad es una de las áreas de mayor interés. Recientemente, el control adaptable se ha interesado en su estudio. Este interés ha generado dos líneas de investigación conceptualmente diferentes. La primera busca hacer asintóticamente exacta la cancelación de los términos no lineales, que modelan a la planta, en el proceso de linealización, suponiendo incertidumbre en los parámetros. La segunda, no se interesa en la linealización del sistema, sino solamente en preservar o generar la propiedad de pasividad de éste en malla cerrada.

El trabajo que aquí se presenta sigue la segunda línea de investigación mencionada. Y tiene como objetivo, diseñar un controlador adaptable que establezca a una familia de sistemas no lineales que incluya sistemas no linealizables y, en algún sentido conveniente, a todos los sistemas linealizables.

El resultado principal de la tesis es la determinación de un controlador y una ley de adaptación que permitan garantizar estabilidad global para una familia de este tipo. Esta familia está caracterizada por la existencia de un controlador paramétrico que "genera" un subsistema estrictamente pasivo.

El presente trabajo está formado por cinco capítulos. En el capítulo 2, constituido a su vez por tres secciones, se reúne la herramienta que será empleada para probar el resultado principal de este trabajo. En la primera sección, se establece el escenario de trabajo y se expone el concepto de disipatividad de sistemas dinámicos. Se dedica la segunda sección al problema de linealización exacta en el espacio de estados. Y, en la última, se presenta el problema de control adaptable de sistemas lineales.

1. Introducción

El capítulo 3 presenta un panorama general de los objetivos y algunos resultados obtenidos, en la literatura, en las dos líneas de investigación de control adaptable que fueron aludidas líneas arriba.

El resultado principal de este trabajo se presenta en la cuarta sección del capítulo 4. En la primera se establece el planteamiento del problema que nos ocupa, en la segunda sección, se define una clase de salidas que sirven para caracterizar a los sistemas no lineales para los cuales se verifica el resultado de este trabajo y, en la tercera sección se demuestran varios lemas que facilitan la prueba del resultado principal.

En el capítulo 5 se presenta el método de diseño del controlador adaptable y se discuten algunos ejemplos.

Finalmente, en el último capítulo, se discuten los resultados obtenidos y se presenta una lista de algunos de los problemas de interés, relacionados con este trabajo, para investigaciones futuras.

Se incluye en un apéndice un trabajo que se desprende de la tesis y el cual se ha sometido a la revista: IEEE Transactions on Automatic Control.

2. PRELIMINARES.

Este capítulo reúne la herramienta que será empleada para probar el resultado obtenido en este trabajo. Está constituido por tres secciones. En la primera se establece el escenario de trabajo y se expone el concepto de disipatividad de sistemas dinámicos. La segunda sección, plantea el problema de linealización exacta en el espacio de estados y se enuncia el resultado que lo resuelve. Finalmente, en la última sección, se esboza el problema de Control Adaptable para sistemas lineales. No se pretende hacer una exposición detallada de ninguno de estos tópicos que, por sí mismos, comprenden muchas páginas de la literatura especializada.

2.1 SISTEMAS DISIPATIVOS.

En Física e Ingeniería se tiene particular interés en los sistemas disipativos. La propiedad de disipación de energía, que distingue a estos sistemas de los sistemas dinámicos en general, dá por resultado una restricción fundamental en su comportamiento dinámico. Ejemplos típicos de sistemas disipativos son las redes eléctricas en las cuales parte de la energía eléctrica se disipa en las resistencias en forma de calor, los sistemas viscoelásticos en los cuales la fricción viscosa es responsable de una pérdida similar de energía, y los sistemas termodinámicos para los cuales la segunda ley postula una forma de disipación que conlleva un aumento en la entropía.

Por otro lado, una manera de probar que un sistema dinámico es estable es mostrando que disipa más energía de la que genera. Según hipótesis adecuadas, esto puede implicar que su energía almacenada decae con el tiempo y, entonces, que su estado interno debe converger a un estado de equilibrio.

2. Preliminares

Recuérdese, por ejemplo, el método de la energía para sistemas mecánicos conservativos [1]. La definición de disipatividad codifica esta noción de que la energía se disipa. Y, como sucede con el método directo de Lyapunov, la "energía" no necesita ser energía física; es simplemente una función de la entrada y la salida del sistema, determinada de tal manera que la estabilidad del sistema se pueda verificar.

En control se tiene interés en los sistemas disipativos por sus implicaciones sobre la estabilidad de los sistemas. Uno de los resultados principales en la teoría de estabilidad afirma que: un sistema realimentado es estable entrada-salida y de ganancia finita si está constituido por un sistema pasivo en el lazo directo y, en el lazo de realimentación, por uno estrictamente pasivo de ganancia finita y estable entrada-salida. Además, la suma de las "energías" almacenadas en cada lazo es una función de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado (Teoremas 9 y 10 de [2]). Sin embargo, no existe una única función de energía almacenada, sino un continuo de tales posibles funciones de energía para un sistema con un comportamiento entrada-salida prescrito [3].

2.1.1 Disipatividad: descripción entrada-salida.

De manera general se puede pensar en un sistema como una relación entre las señales que intercambia con el mundo externo. A este nivel, se puede definir la noción de disipatividad con respecto a una "función de energía", llamémosla E , a través de la siguiente desigualdad

$$E(s, p, T) \geq 0 \quad (2.1)$$

para toda $T \geq 0$ y todas las señales admisibles, s . T representa el intervalo de tiempo en el cual se realizan las mediciones y p es el conjunto de parámetros (tales como los estados iniciales) que pueden afectar a las mediciones. Para darle claridad a la noción descrita, se comienza por dividir a las señales admisibles, a las que se considerará como elementos de un

2. Preliminares

espacio de funciones definido apropiadamente, en dos grupos: las señales de entrada y las señales de salida. Y piénsese a la "relación entre estas señales" como un mapeo entre espacios de funciones. Se formalizará esto siguiendo las referencias [4] y [5].

Sea T el conjunto de instantes de tiempo que son de interés (usualmente \mathbb{R}_+ o \mathbb{Z}_+). Sea V un espacio con producto interno, denotado por $\langle \dots \rangle_V$, (típicamente \mathbb{R}^n) y F el conjunto de funciones sobre T que toman valores en V ,

$$F = \{ f \mid f: T \rightarrow V \}. \quad (2.2)$$

Para cada T en T , sea P_T un mapeo lineal de F en F . Se define la truncación de f en T como el resultado de aplicar el operador P_T a f , i.e.,

$$(P_T f)(t) \triangleq \begin{cases} f(t), & t \in T; \\ \theta, & t > T, \end{cases} \quad (2.3)$$

en donde θ es el vector cero en V . El operador P_T es una proyección sobre F , ya que $P_T^2 = P_T$ y se le conoce, también, como el operador de truncación. Para simplificar la notación conviene usar f_T para representar a $P_T f$. En lo que sigue se considerará solamente el siguiente espacio de funciones (señales):

$$L_2^n := L_2^n(\mathbb{R}_+) \triangleq \{ f \in F \mid \|f(t)\|_2 < \infty \} \quad (2.4)$$

(con $T = \mathbb{R}_+$ y $V = \mathbb{R}^n$) en donde $\|f(t)\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \|f(t)\|^2 dt$ y $\|\cdot\|$ es la norma euclídeana. Si se define el producto interno en L_2^n por

$$\langle f_1, f_2 \rangle \triangleq \int_0^{+\infty} \langle f_1(t), f_2(t) \rangle_V dt, \quad (2.5)$$

entonces L_2^n es un espacio vectorial con producto interno y será completo si V lo es. Nótese que el producto interno definido en (2.5) está inducido por el

2. Preliminares

de V . Una extensión útil de L_2^n es el espacio extendido $L_{2\sigma}^n(\mathbb{R}_+)$ que se define como

$$L_{2\sigma}^n := L_{2\sigma}^n(\mathbb{R}_+) \stackrel{\Delta}{=} \{f \in F \mid f_T \in L_2^n, \forall T \in T\}. \quad (2.6)$$

Se dice que un mapeo $H: L_{2\sigma}^n \rightarrow L_{2\sigma}^n$ es causal (i.e., no anticipatorio) si y sólo si $P_T H P_T^u = P_T H$, $\forall T \in T$.

Se define a continuación un sistema dinámico desde la perspectiva entrada-salida que se ha expuesto. Tómesese $T = \mathbb{R}_+$, $V = \mathbb{R}^n$ y supóngase que $U = L_2^m(\mathbb{R}_+)$ y $Y = L_2^p(\mathbb{R}_+)$ son espacios de funciones (señales) con operadores de truncación adecuados P_T^u y P_T^y , los cuales, definen a los espacios extendidos $U_\sigma = L_{2\sigma}^m(\mathbb{R}_+)$ y $Y_\sigma = L_{2\sigma}^p(\mathbb{R}_+)$, respectivamente. A U_σ se le llama el espacio de señales de entrada y a Y_σ el espacio de señales de salida. Es conveniente usar la siguiente notación para el producto interno truncado de u y v , $\langle u, v \rangle_T \stackrel{\Delta}{=} \langle P_T^u u, P_T^v v \rangle$, en donde $\langle \dots \rangle$ es el producto interior de U o Y , según sea el caso.

Definición 2.1: Un sistema dinámico se define como un mapeo causal del espacio de entrada U_σ al espacio de salida Y_σ . Al operador $H: U_\sigma \rightarrow Y_\sigma$ se le conoce como una representación entrada-salida del sistema dinámico. (Esta definición incluye la condición $P_T^y H P_T^u = P_T^y H$ en U).

Para el operador definido arriba, se definirá el concepto de disipatividad. Éste puede definirse mediante operadores Q , S y R más generales que los aquí considerados [4].

Definición 2.2 : Sean $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$ y $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matrices constantes con Q y R simétricas. El sistema dinámico H es disipativo con respecto a Q , S y R , lo que se denota por (Q, S, R) -disipativo, si y sólo si se satisface

$$\langle y, Qy \rangle_T + 2\langle y, Su \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T \geq 0 \quad (2.7)$$

$\forall T \in \mathbb{R}_+$ y $\forall u \in L_{2c}^m$ (con condiciones iniciales iguales a cero).

Un sistema es pasivo si es $(0, \frac{1}{2}I, 0)$ -disipativo, y estrictamente pasivo en la salida si es $(-\epsilon I, \frac{1}{2}I, 0)$ -disipativo, en donde I es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{m \times m}$, $U_c = Y_c$ y $\epsilon > 0$. Otras formas de disipatividad pueden obtenerse para diferentes combinaciones de Q , S y R [6].

2.1.2 Disipatividad: descripción en el espacio de estados.

El concepto de disipatividad se ha introducido como una propiedad de la descripción entrada-salida de los sistemas dinámicos. Se verán ahora sus implicaciones en la representación en el espacio de estados. En este contexto, un sistema dinámico es visto como un objeto matemático abstracto que mapea entradas (causas, excitaciones) en salidas (efectos, respuestas) vía un conjunto de variables intermedias, el estado, que resumen la influencia de las entradas pasadas.

Se considerarán sólo sistemas dinámicos continuos definidos en \mathbb{R}_+ . Y para ser consistentes con la sección anterior se denotará a los espacios de funciones de entradas y salidas admisibles por U_c y Y_c , respectivamente. (Se está considerando a los espacios anteriores como espacios L_{2c}^n). Sea \mathbb{R}_+^2 el sector causal de \mathbb{R}^2 definido por

$$\mathbb{R}_+^2 \triangleq \{ (t_2, t_1) \in \mathbb{R}^2 \mid t_2 \geq t_1 \}.$$

Definición 2.3 [2.4]: Se dice que un sistema dinámico está descrito en la forma de espacio de estados si está determinado por un conjunto abstracto X (el espacio de estados) y dos mapeos; el mapeo transición de estados, Φ , y el mapeo de salida, r . Estos satisfacen los siguientes axiomas:

- 1) $\Phi: \mathbb{R}_+^2 \times X \times U_c \rightarrow X$;
- 2) $\Phi(t_0, t_0, x_0, u) = x_0 \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in X \text{ y } u \in U_c$;
- 3) $\Phi(t_1, t_0, x_0, u_1) = \Phi(t_1, t_0, x_0, u_2) \quad \forall (t_1, t_0) \in \mathbb{R}_+^2, x_0 \in X$

2. Preliminares

- y $u_1, u_2 \in U_0 \ni u_1(t) = u_2(t)$ para $t_0 \leq t \leq t_1$;
- 4) $\Phi(t_2, t_0, x_0, u) = \Phi[t_2, t_1, \Phi(t_1, t_0, x_0, u), u]$ $\forall (t_1, t_0), (t_2, t_1)$
 $\in \mathbb{R}_+^2, x_0 \in X$ y $u \in U_0$;
- 5) $r: \mathbb{R}_+ \times X \times U_0 \rightarrow Y_0$;
- 6) la función $r[t, \Phi(t, t_0, x_0, u), u(t)]$ definida para $t \geq t_0$, es la restricción en $[t_0, \infty)$ de una función $y \in Y_0 \forall x_0 \in X, t_0 \in \mathbb{R}$ y $u \in U_0$;
- 7) $\Phi(t, t_0, 0, 0) = 0 \forall (t, t_0) \in \mathbb{R}_+^2$, y $r(t, 0, 0) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

La definición anterior ve al sistema dinámico a través del estado x que está entre la entrada u y la salida y . Se escribirá al estado y a la salida al tiempo t como

$$x(t) = \Phi(t, t_0, x_0, u), \tag{2.8a}$$

$$y(t) = r[t, \Phi(t, t_0, x_0, u), u(t)], \tag{2.8b}$$

respectivamente. Se puede considerar al sistema como una colección de trayectorias en el espacio de estados; cada una emanando de una condición inicial y guiadas por una entrada particular.

Los conceptos de alcanzabilidad y controlabilidad de un sistema dinámico serán importantes más adelante por lo que a continuación se definen.

Definición 2.1: Se dice que un estado $x_0 \in X$ de un sistema dinámico descrito en el espacio de estados es:

- i) alcanzable en el tiempo $t_0 \in \mathbb{R}$ si existe un $t_{-1} \in \mathbb{R}$ con $t_{-1} \leq t_0$ y una $u \in U_0$ tales que $\Phi(t_0, t_{-1}, 0, u) = x_0$.
- ii) controlable en el tiempo $t_0 \in \mathbb{R}$ si existe un $t_1 \in \mathbb{R}$ con $t_1 \geq t_0$ y una $u \in U_0$ tales que $\Phi(t_1, t_0, x_0, u) = 0$.

Se dice que un sistema dinámico es alcanzable (controlable) si cada estado $x_0 \in X$ es alcanzable (controlable) $\forall t_0 \in \mathbb{R}$.

En la definición anterior, alcanzabilidad requiere que el mapeo $\Phi(t_0, \dots, 0, \dots)$

sea sobre en X , mientras que controlabilidad necesita que 0 esté en el espacio imagen de $\Phi(\cdot, t_0, x_0, \cdot)$.

Con la descripción entrada-salida basada, como antes, en $U = L_2^m(\mathbb{R}_+)$ y $Y = L_2^p(\mathbb{R}_+)$, con $y = Hu$ una respuesta en estado cero, se introducen los conceptos de razón de suministro (supply rate) [4] y disipatividad.

Definición 2.5: Sea $w: U \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada por

$$w(u, y) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u \quad (2.9)$$

en donde $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$ y $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices constantes con Q y R simétricas. Se dice que un sistema dinámico descrito en el espacio de estados es disipativo con respecto a la razón de suministro $w(\cdot, \cdot)$ si $w(t) = [u(t), y(t)]$, evaluada a lo largo de las trayectorias del sistema satisface:

$$\int_{t_0}^{t_1} w(t) dt \geq 0 \quad (2.10)$$

$\forall t_1 \geq t_0$ y $\forall u \in L_{2c}^m$, siempre que el estado inicial sea $x(t_0) = 0$.

Obsérvese que la desigualdad (2.10) es precisamente (2.7) para los espacios L_p considerados. La razón de suministro es una abstracción del concepto potencia de entrada. En los sistemas físicos, la potencia de entrada está asociada con la noción de energía almacenada. En este sentido, la desigualdad (2.10) restringe la manera en la que el sistema absorbe energía. De [3] y [4] se sigue que disipatividad implica la existencia de una función de almacenamiento $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ con la propiedad de que $\forall t_1 \geq t_0$, $x_0 \in X$ y u admisible

$$\phi(x_0) + \int_{t_0}^{t_1} w[u(t), y(t)] dt \geq \phi(x_1) \quad (2.11)$$

en donde $y(\cdot)$ y $x_1 = x(t_1)$ son la salida y el estado final, respectivamente, que resultan del estado inicial $x_0 = x(t_0)$ y la entrada u . Pensando en términos energéticos se puede interpretar a la expresión (2.11) como sigue:

$$\begin{aligned} & \text{energía inicial almacenada} + \text{energía suministrada al sistema} \\ & \geq \text{energía final almacenada.} \end{aligned}$$

Para sistemas abstractos más generales, el razonamiento físico no es aplicable. Sin embargo, se puede definir una posible candidata para el nombre "energía almacenada", una función llamada almacenamiento disponible (available storage) [3]. Lamentablemente ésta no es única. Esto refleja el hecho de que las ecuaciones de estado no son suficientes, en sí mismas, para especificar un mecanismo de almacenamiento de energía. Pueden consultarse las referencias [3] y [4] para más detalles.

2.1.3 Sistemas No Lineales de Dimensión Finita.

Se tiene interés en una clase de sistemas dinámicos no lineales, descritos en el espacio de estados, para la cual se cuenta con un criterio algebraico, en términos de las funciones del estado del sistema, que permite establecer la propiedad entrada-salida de disipatividad. Este criterio algebraico puede interpretarse como una versión no lineal del Lema de Kalman-Yakubovich-Popov [7]. Este lema se enunciará después de unas definiciones.

Definición 2.6 [8]: Se dice que una matriz de orden $m \times m$ $H(s)$ de funciones racionales reales es positiva real, lo que se denota por $H(s) \in \{PR\}$, si:

- 1) todos los elementos de $H(s)$ son analíticos en el semiplano derecho abierto $\text{Re}\{s\} > 0$;
- 2) los polos de cualquier elemento de $H(s)$ en el eje imaginario $j\omega$ son distintos y la matriz residuo asociada de $H(s)$ es semidefinida positiva; y

3) $H(j\omega) + H^T(-j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega$ que no sea un polo de ningún elemento de $H(j\omega)$.

Definición 2.7 [9]: Se dice que una matriz racional $H(s)$ es estrictamente positiva real, lo que se denota por $H(s) \in \{\text{SPR}\}$, si existe algún $\mu > 0$ tal que $H(s - \mu) \in \{\text{PR}\}$.

En relación a estas definiciones y sus extensiones puede consultarse [10] para matrices y [11] para funciones. El siguiente lema proporciona condiciones necesarias y suficientes para que una matriz racional $H(\cdot)$ sea estrictamente positiva real.

Lema 2.8 (KYP) [9]: Supóngase que los polos de la matriz de transferencia racional $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ están en $\text{Re}[s] < -\mu$ en donde $\mu > 0$ y (A, B, C, D) es una realización mínima de $H(s)$. Entonces $H(s - \mu) \in \{\text{PR}\}$ si y sólo si existen matrices $P = P^T > 0$, L y K tales que

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= -LL^T - 2\mu P \\ PB &= C^T - LK \\ K^T K &= D + D^T. \end{aligned}$$

Considérese una familia de sistemas dinámicos no lineales descritos por ecuaciones de la forma

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \quad (2.12a)$$

$$y = h(x) + J(x)u \quad (2.12b)$$

en donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ y $y \in \mathbb{R}^p$. Los controles admisibles son de cuadrado integrable localmente, i.e., pertenecen a $L_{2\sigma}^m$. Las funciones $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$; $G(x) \triangleq [g_1(x), \dots, g_m(x)]$ en donde $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad i=1, \dots, m$, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $J: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}$ del vector de estado x , cumplen con $f(0)=0$, $h(0)=0$ y satisfacen la siguiente condición:

Hipótesis 2.9: Las funciones que aparecen en (2.12) son suficientemente

suaves para asegurar que el sistema está bien definido; esto es, para cualquier $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ y $u(\cdot)$ admisible, existe una única solución en $[t_0, \infty)$ tal que $y(\cdot)$ es de cuadrado integrable localmente [$u \in L_{2\sigma}^m$, $y \in L_{2\sigma}^p$].

Se asocia a (2.12) una razón de suministro dada por (2.9) y la siguiente función, llamada almacenamiento disponible en [4], definida por

$$\phi_a(x_0) = - \inf_{u(\cdot), T \geq 0} \int_0^T w(u, y) dt \quad (2.13)$$

sujeta a (2.12) y $x(0) = x_0$. Se impondrán las siguientes condiciones al sistema (2.12) y a (2.9) (véase [4] y [7]).

Hipótesis 2.10: El espacio de estados del sistema (2.12) es alcanzable desde el origen. Es decir, dados cualesquiera $x_1 = x(t_1) \in \mathbb{R}^n$ y $t_1 \in \mathbb{R}$, existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ con $t_0 \leq t_1$ y un control admisible $u(\cdot)$ tales que el estado puede llevarse desde $x(t_0) = 0$ hasta $x(t_1) = x_1$.

Hipótesis 2.11: La función de almacenamiento disponible $\phi_a(x)$, cuando existe, es una función diferenciable de x .

Hipótesis 2.12: Para cualquier $y \neq 0$ existe alguna u tal que la razón de suministro (2.9) satisface $w(u, y) < 0$.

El siguiente teorema muestra que la propiedad de disipatividad puede caracterizarse en términos de la ecuación de estado (2.12).

Teorema 2.13 [7]: El sistema (2.12) es disipativo con respecto a (2.9) si y sólo si existen funciones reales $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ y $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{q \times m}$ (para algún $q \in \mathbb{N}$) que satisfacen

$$\begin{aligned} \phi(x) &\geq 0, \quad \phi(0) = 0 \\ \nabla^T \phi(x) f(x) &= h^T(x) Q h(x) - l^T(x) l(x) \end{aligned}$$

2. Preliminares

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}G^T(x)\nabla\phi(x) &= \underline{S}^T(x)h(x) - W^T(x)l(x) \\ \underline{R}(x) &= W^T(x)W(x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$\forall x$, en donde

$$\begin{aligned} \underline{R}(x) &= R + J^T(x)S + S^TJ(x) + J^T(x)QJ(x) \\ \underline{S}(x) &= QJ(x) + S. \end{aligned}$$

Demostración: (Suficiencia) Supóngase que existen funciones $\phi(\cdot)$, $l(\cdot)$ y $W(\cdot)$ tales que (2.14) se cumple. Se demostrará que (2.10) se verifica. Para cualquier $u(\cdot)$ admisible y $t_0 \in \mathbb{R}$ y $t_1 \geq t_0$, y cualquier $x(t_0)$, se tiene, con

$$\begin{aligned} y^T Q y &= \nabla^T \phi(x) f(x) + l^T(x) l(x) + 2u^T J^T(x) Q h(x) + u^T J^T(x) Q J(x) u \\ 2u^T S^T y &= u^T G^T(x) \nabla \phi(x) + 2u^T W^T(x) l(x) - 2u^T J^T(x) Q h(x) + 2u^T S^T J(x) u \\ u^T R u &= u^T W^T(x) W(x) u - 2u^T J^T(x) S u - u^T J^T(x) Q J(x) u \end{aligned}$$

que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \nabla^T \phi(x) [f(x) + G(x)u] dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} [l(x) + W(x)u]^T [l(x) + W(x)u] dt = \phi[x(t_1)] - \phi[x(t_0)] + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} [l(x) + W(x)u]^T [l(x) + W(x)u] dt, \end{aligned}$$

y fijando $x(t) = 0$ se cumple (2.10).

(Necesidad) Supóngase que el sistema es disipativo. Se probará que $\phi_a(x)$, dada por (2.13), es una solución de (2.14) para funciones $l(\cdot)$ y $W(\cdot)$ apropiadas. Como el sistema es alcanzable (Hipótesis 2.10), para cualquier estado x_0 en t_0 , existe un $t_{-1} < 0$ y un control admisible $u(\cdot)$ definido en $[t_{-1}, 0]$ tal que $x(t_{-1}) = 0$ y $x(0) = x_0$. De disipatividad

$$\int_0^T w(u, y) dt \geq - \int_{t_{-1}}^0 w(u, y) dt.$$

Dado que el lado derecho de esta desigualdad depende sólo de x_0 , mientras que $u(\cdot)$ puede elegirse arbitrariamente en $[0, T]$, existe una función de x , $C: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\int_0^T w(u, y) dt \geq C(x_0) > -\infty \quad (2.15)$$

siempre que $x(0) = x_0$. De (2.15) se tiene que $\phi_a(x) < \infty \forall x$; de (2.13) que $\phi_a(x) \geq 0 \forall x$ y de disipatividad $\phi_a(0) = 0$. Ahora debe mostrarse que $\phi_a(\cdot)$ satisface (2.11) $\forall t_1 \geq t_0$ y toda $u(\cdot)$ admisible, en donde $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$ [3]. De (2.13) se tiene que

$$\phi_a(x_1) \leq \int_{t_{-1}}^{t_1} w(u, y) dt$$

para cualquier u admisible que lleve $x(t_{-1}) = 0$ a $x(t_1) = x_1$, con $t_{-1} \leq t_0$. En particular, sean $t_{-1} < t_0$ y $u(\cdot)$ definida en $[t_{-1}, t_0]$ tales que $x(t_0) = x_0$ sea alcanzable de manera óptima. Excepto por las condiciones de frontera $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$, u está libre en $[t_0, t_1]$. Por lo tanto,

$$\phi_a(x_1) \leq \int_{t_{-1}}^{t_0} w(u, y) dt + \int_{t_0}^{t_1} w(u, y) dt.$$

Finalmente, de (2.13) se tiene el resultado buscado. Ahora, usando la Hipótesis 2.11, se obtiene

$$\dot{\phi}_a[x(t)] \leq w[u(t), y(t)] \quad (2.16)$$

a lo largo de cualquier trayectoria de (2.12). Para convertir a esta desigualdad en una igualdad se introduce la función $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, u) = \dot{\phi}_a(x) + w(u, y) = -\nabla^T \phi_a(x) [f(x) + G(x)u] + w[u, h(x) + J(x)u]. \quad (2.17)$$

De (2.16), $d(x, u) \geq 0 \forall x, u$. Además, de (2.17) se tiene que $d(x, u)$ es cuadrática en u . Combinando estas dos observaciones, se sigue que $d(x, u)$ puede factorizarse como sigue

$$d(x, u) = [l(x) + W(x)u]^T [l(x) + W(x)u] \quad (2.18)$$

para algunas funciones, no únicas, $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$, $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{q \times m}$ y algún $q \in \mathbb{N}$. Sustituyendo (2.18) en (2.17) se llega a que

$$\begin{aligned} -\nabla^T \phi_a(x) f(x) - \nabla^T \phi_a(x) G(x)u + h^T(x) Q h(x) + 2h^T(x) \underline{S}(x)u + u^T \underline{R}(x)u = \\ = l^T(x) l(x) + 2l^T(x) W(x)u + u^T W^T(x) W(x)u \end{aligned}$$

$\forall x, u$. Igualando coeficientes de la misma potencia de u , se obtiene (2.14) con $\phi = \phi_a$. ■

La expresión (2.13) proporciona la solución mínima para (2.14), según [7]. A continuación se enuncia un resultado análogo para sistemas lineales invariantes en el tiempo.

Teorema 2.14 [4]: Una condición necesaria y suficiente para que el sistema lineal invariante en el tiempo

$$\dot{x} = Fx + Gu \quad (2.19a)$$

$$y = H^T x + Ju \quad (2.19b)$$

con $\{F, G\}$ completamente controlable, sea disipativo con respecto a la razón de suministro (2.9) es que existan matrices P, L y W con $P = P^T \geq 0$ que

satisfagan

$$\begin{aligned} PF + F^T P &= HQH^T - LL^T \\ PG &= H(QJ - S) - LW \\ R + S^T J + J^T S + J^T QJ &= W^T W. \end{aligned} \tag{2.20}$$

La función de almacenamiento para probar este teorema es $\phi(x) = x^T P x$. Como puede observarse de (2.20) este teorema no es el Lema de Kalman-Yakubovich-Popov para sistemas estrictamente pasivos en la salida. Según [8], [9] y [12] sólo coincidirán para grado relativo cero.

Willems [3] sugiere que la teoría de los sistemas disipativos puede ser útil en la investigación de la estabilidad, mediante los métodos de Lyapunov, de los sistemas dinámicos. En general, las funciones de almacenamiento $\phi(\cdot)$, cuando existen, sólo son semidefinidas positivas. Por esto, no pueden usarse como funciones de Lyapunov candidatas para probar estabilidad del sistema libre. En el método directo de Lyapunov, las funciones de Lyapunov son funciones generalizadas de energía que, de acuerdo con ciertas condiciones, corresponden a $\phi(\cdot)$ en el Teorema 2.13. Esto nos lleva a considerar esas condiciones para las cuales las funciones de almacenamiento $\phi(\cdot)$ califiquen como funciones de Lyapunov, es decir, sean al menos definidas positivas. Se comienza con la siguiente definición.

Definición 2.15: El sistema (2.12) es de estado cero detectable si para cualquier trayectoria tal que $u(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ se tiene que $x(t) \equiv 0$, con $x(0) = 0$.

El siguiente lema proporciona las condiciones para que las funciones $\phi(\cdot)$ sean definidas positivas.

Lema 2.16 [7]: Si el sistema (2.12) es disipativo con respecto a (2.9) y es de estado cero detectable, entonces todas las soluciones $\phi(\cdot)$ de (2.14) son

definidas positivas. ■

De esta manera se puede verificar la estabilidad de los sistemas a los cuales se aplica el lema anterior, simplemente usando las soluciones $\phi(\cdot)$ de (2.14) como funciones de Lyapunov candidatas, como lo afirma el siguiente teorema.

Teorema 2.17 [7]: Con las hipótesis del lema anterior se tiene que el sistema libre $\dot{x}=f(x)$ es estable (Lyapunov) si $Q \geq 0$ y asintóticamente estable si $Q < 0$. ■

Se sigue que los sistemas pasivos son estables mientras que los estrictamente pasivos en la salida son asintóticamente estables. Debe notarse que el teorema anterior proporciona sólo condiciones para estabilidad local del equilibrio en $x=0$. Para asegurar estabilidad asintótica globalmente se necesitan imponer condiciones más fuertes sobre el sistema, como detectabilidad uniforme del estado cero, que se define a continuación.

Definición 2.18: Se dice que el sistema (2.12) tiene la propiedad de detectabilidad uniforme del estado cero, si existe una función continua y creciente $\beta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ con $\beta(0) = 0$ y $\beta(\sigma) \rightarrow \infty$ cuando $\sigma \rightarrow \infty$ y una constante $T \geq 0$, tal que para cualquier x_0 y t_0 con $u(t) \equiv 0$, se tiene

$$\|y\|_{2,T}^2 \geq \beta(\|x\|), \quad \forall x \in X. \quad (2.21)$$

La definición anterior implica que para todas las soluciones $\phi(\cdot)$ de (2.14) se cumple [4],[7]:

$$\phi(x) \geq \beta(\|x\|). \quad (2.22)$$

2.2 LINEALIZACION EXACTA EN EL ESPACIO DE ESTADOS.

En esta sección se expondrá sucintamente la noción de linealización exacta en el espacio de estados. Este término se usa para acentuar la diferencia entre

esta técnica y la linealización aproximada que, generalmente, indica la aproximación del comportamiento dinámico de un sistema no lineal mediante su expansión en una serie de potencias truncada a primer orden. A lo largo de esta sección se considerarán sistemas de control no lineales como en (2.12a), i.e.,

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \quad (2.23)$$

El estado x pertenece a un subconjunto abierto M de \mathbb{R}^n , f y las columnas de G ; g_1, \dots, g_m , son campos vectoriales suaves (i.e., de clase C^∞) definidos en M y las m componentes del vector de entrada u , u_1, \dots, u_m , son funciones del tiempo evaluadas en \mathbb{R} . Se considerará, además, que el valor de cada u_i , al tiempo t , es una función del valor del estado en t y, posiblemente, de algunas otras funciones v_1, \dots, v_m evaluadas en \mathbb{R} . Supondremos esta dependencia de la siguiente forma

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (2.24)$$

en donde $\alpha: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\beta: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ son funciones suaves. A este modo de control se le conoce como control por realimentación de estado estático. Con (2.24) se modifica la dinámica original de (2.23) y se obtiene el sistema de control

$$\dot{x} = \bar{f}(x) + \bar{G}(x)v \quad (2.25)$$

con

$$\bar{f}(x) = f(x) + G(x)\alpha(x) \quad (2.26a)$$

$$\bar{G}(x) = G(x)\beta(x). \quad (2.26b)$$

Se admitirá que la matriz $\beta(\cdot)$ es invertible para toda x en M . Esto hace posible invertir la transformación (2.26), y obtener

2. Preliminares

$$f(x) = \bar{f}(x) - \bar{G}(x)\beta^{-1}(x)\alpha(x) \quad (2.27a)$$

$$G(x) = \bar{G}(x)\beta^{-1}(x) \quad (2.27b)$$

Como puede observarse de (2.25) el control (2.24) preserva la estructura de las ecuaciones (2.23). Respecto a las acciones de $\alpha(x)$ y $\beta(x)$, estrictamente hablando, sólo (2.26a) puede considerarse como una "realimentación", mientras que (2.26b) deberá pensarse como un cambio de coordenadas, dependiente de x , en el espacio de las entradas.

Dado un sistema no lineal, considérese el problema de modificarlo, mediante realimentación del estado, de manera tal que todo él sea localmente difeomórfico (i.e., equivalente mediante un cambio de coordenadas) a un sistema lineal y controlable. Con otras palabras, dada una colección de campos vectoriales f, g_1, \dots, g_m (como antes) y un estado inicial x_0 , encontrar (si es posible) una vecindad U de x_0 , un par de funciones α, β (con β invertible) definidas en U , una transformación de coordenadas $z = \Phi(x)$ definida en U , una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y un conjunto de vectores $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i=1, \dots, m$ tales que

$$D\Phi[f + G\alpha] \circ \Phi^{-1}(z) = Az \quad (2.28a)$$

$$D\Phi[G\beta]_i \circ \Phi^{-1}(z) = b_i, \quad i=1, \dots, m \quad (2.28b)$$

$\forall z \in \Phi(U)$ con (A, B) controlable. $D\Phi$ es la matriz jacobiana de Φ .

El problema planteado en el párrafo anterior puede expresarse de manera informal como sigue: Dado un sistema no lineal encontrar un sistema de coordenadas para el cual exista una ley de control no lineal que cancele las no linealidades del sistema. La solución del problema será global si $U = \mathbb{R}^n$. Se definen, a continuación, algunos conceptos de Geometría Diferencial [13].

Definición 2.19: Sean f y g dos campos vectoriales definidos en \mathbb{R}^n . El

2. Preliminares

paréntesis de Lie de f y g , denotado por $[f, g]$, es un campo vectorial definido por

$$[f, g] = Dg \cdot f - Df \cdot g \quad (2.29)$$

en donde Dg denota la matriz jacobiana de g cuya ij -ésima entrada es $\partial g_i / \partial x_j$.

Se acostumbra denotar a (2.29) por $ad_f g$ y se define por inducción, con $ad_f^0 g = g$, como sigue

$$ad^k g = [f, ad^{k-1} g]. \quad (2.30)$$

Definición 2.20: Sea $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar suave. El gradiente de h , denotado por dh , es el vector renglón

$$dh = [\partial h / \partial x_1, \dots, \partial h / \partial x_n] \quad (2.31)$$

(se usa también la notación: $\nabla_x h(\cdot)$).

Definición 2.21: Para un campo escalar h y un campo vectorial $f = (f_1, \dots, f_n)$ el producto dual de dh y f es un campo escalar definido por

$$\langle h, f \rangle = (\partial h / \partial x_1) f_1 + \dots + (\partial h / \partial x_n) f_n. \quad (2.32)$$

Suele llamársele a (2.32) la derivada de Lie de $h(x)$ a lo largo del campo vectorial $f(x)$ y se usa también la siguiente notación:

$$L_f h := \langle dh, f \rangle. \quad (2.33)$$

Definición 2.22: Se dice que un conjunto linealmente independiente de campos vectoriales $\{X_1, \dots, X_m\}$ en \mathbb{R}^n es involutivo si existen campos escalares $\alpha_{ijk}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$[X_i, X_j] = \alpha_{ij1} X_1 + \dots + \alpha_{ijm} X_m, \forall i, j. \quad (2.34)$$

Definición 2.23: Se dice que un conjunto linealmente independiente de campos vectoriales $\{X_1, \dots, X_m\}$ en \mathbb{R}^n es completamente integrable si para cada punto existe una subvariedad m -dimensional M en \mathbb{R}^n tal que en cada punto de M el espacio tangente de M está generado por X_1, \dots, X_m . O bien, si existe $n-m$ campos escalares linealmente independientes h_1, \dots, h_{n-m} que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\langle dh_i, X_j \rangle = 0 \quad (2.35)$$

$\forall i, j$ con $1 \leq i \leq n-m, 1 \leq j \leq m$.

Apelando a la simplicidad, en lo que sigue, se pensará en sistemas no lineales con una sola entrada, dados por

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.36)$$

con u escalar, f y g campos vectoriales suaves y $f(0)=0$. El teorema siguiente, que da respuesta al problema de la linealización exacta en el espacio de estados, fué demostrado por R. Su en 1982 [14] (véase [15] también).

Teorema 2.24 [15]: Para el sistema no lineal descrito por (2.36), el problema de linealización exacta en el espacio de estados tiene solución si y sólo si existe una región U de \mathbb{R}^n que contiene al origen en la cual se cumplen las siguientes condiciones:

- 1) $\dim[\text{Span}\{g(0), \text{ad } g(0), \dots, \text{ad}^{n-1} g(0)\}] = n$,
- 2) $\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-2} g\}$ es involutivo en U . ■

La condición en (1) implica que los vectores tangentes $g(x)$,

$ad_f g(x), \dots, ad_f^{n-1} g(x)$ son linealmente independientes $\forall x$ en una vecindad adecuada de $x=0$. Por lo tanto, la distribución $\text{Span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$ es no singular en una vecindad de $x=0$ y tiene dimensión $(n-1)$.

Cabe mencionar que el término empleado para referirse al problema planteado es linealización por realimentación (del estado). Y se dice que un sistema no lineal descrito por (2.36) es linealizable por realimentación si existe una región $U \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen, un difeomorfismo de estado $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, y un control no lineal de la forma $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ con $\beta(x) \neq 0$ en U tal que, en las nuevas coordenadas $z = \Phi(x)$, el sistema original se transforme en

$$\dot{z} = Az + bv \quad (2.37)$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Para simplificar el lenguaje, cuando un sistema no lineal, como el descrito por (2.36), se pueda transformar en uno lineal y controlable de la manera expuesta, se dirá simplemente que el sistema es linealizable.

2.3 CONTROL ADAPTABLE DE SISTEMAS LINEALES.

En esta última sección, se enunciará el problema de control de un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo descrito en el espacio de estados con parámetros desconocidos, teniendo acceso a todas las variables de estado del sistema. Se tiene interés en el caso en el que los parámetros de un controlador, elegido adecuadamente, puedan ajustarse de manera tal que el error entre la salida de la planta y la salida de un modelo de referencia tienda a cero asintóticamente con estabilidad interna. Para obtener leyes de adaptación estables se usa el método directo de Lyapunov. Demostrando la

existencia de una función de Lyapunov para todo el sistema puede establecerse estabilidad global para el mismo. La elección de tal función juega un papel crucial en la construcción de una ley de adaptación adecuada. Sin embargo, determinar dicha función es un problema difícil, en particular, para los sistemas no lineales.

Puesto que en las siguientes subsecciones se hará uso del teorema de estabilidad de Lyapunov, se enuncia en seguida.

Teorema 2.25 [16]: Dado un sistema lineal e invariante en el tiempo $\dot{x}=Ax$; el equilibrio $x=0$ es asintóticamente estable si y sólo si para cualquier matriz $Q=Q^T>0$ existe una matriz $P=P^T>0$ tal que la siguiente ecuación matricial

$$A^T P + P A = - Q \quad (2.39)$$

se verifica. ■

El contenido de esta sección sigue de cerca a la referencia [16]; véase también [17] y [18].

Considérese el sistema dinámico lineal invariante en el tiempo, que en adelante se le llamará la planta, descrito por la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u \quad (2.40)$$

en donde $x_p \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$; $A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B_p \in \mathbb{R}^{n \times p}$ son matrices constantes pero desconocidas y el par (A_p, B_p) es controlable. Se supondrá que el estado x_p es medible. Se establecerá un modelo de referencia mediante la siguiente ecuación diferencial lineal invariante en el tiempo

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r \quad (2.41)$$

en donde $A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz Hurwitz, $B_m \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y r es una entrada de referencia acotada. $\forall t \geq t_0$, $x_m(t)$ representa una trayectoria deseada que deberá seguir $x_p(t)$. El problema que se plantea es determinar un método para controlar a la planta (2.40) de manera que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_p(t) - x_m(t)] = 0. \quad (2.42)$$

En otras palabras, determinar un control acotado, u , tal que todas las señales en el sistema permanezcan acotadas y se verifique (2.42).

Un hecho importante, que debe tenerse en mente en la búsqueda de este método, es un resultado bien conocido de la teoría de control que afirma lo siguiente: un sistema lineal invariante en el tiempo y controlable puede ser estabilizado usando realimentación del estado. Por otro lado, dependiendo de la información que previamente se tenga de la planta, la solución de este problema de control se puede intentar por diferentes caminos.

2.3.1 Adaptación Directa de los Parámetros de la Planta.

Este caso se incluye con el único fin de mostrar el procedimiento general empleado para resolver el problema de control planteado y exhibir la relación entre el método directo de Lyapunov y la elección de una ley de adaptación de manera tal que todo el sistema sea estable (Lyapunov). Piénsese que $u(t) = r(t)$ $\forall t \geq t_0$ en (2.40), y que los parámetros de la planta a_{ij} y b_{ij} , que son las entradas de las matrices A_p y B_p , respectivamente, aunque desconocidos se pueden ajustar directamente. Aún más, supóngase que las derivadas temporales de los parámetros pueden ajustarse usando la información de la entrada y la salida. Sea $u(t) = r(t)$ $\forall t \geq t_0$, y admitase que las ecuaciones diferenciales de la planta y del modelo pueden escribirse como

$$\text{Planta: } \dot{x}_p = A_p(t)x_p + B_p(t)r \quad (2.43a)$$

2. Preliminares

$$\text{Modelo: } \dot{x}_m = A_m x_m + B_m r \quad (2.43b)$$

Definición 2.25: Considérense las ecuaciones (2.40) y (2.41). El error en el estado y el error en los parámetros se definen de la siguiente manera:

$$e(t) \triangleq x_p(t) - x_m(t), \quad (2.44a)$$

$$\phi(t) \triangleq A_p - A_m, \quad (2.44b)$$

$$\psi(t) \triangleq B_p - B_m. \quad (2.44c)$$

Usando (2.43) y (2.44) las ecuaciones del modelo del error están dadas por

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) + \phi(t)x_p + \psi(t)r. \quad (2.45)$$

El problema es adaptar los elementos de las matrices $A_p(t)$ y $B_p(t)$ o equivalentemente $\phi(t)$ y $\psi(t)$ de manera tal que $e(t)$, $\phi(t)$ y $\psi(t)$ estén acotadas y $e(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Como A_m es una matriz Hurwitz, por el Teorema 2.25, existe una única matriz $P=P^T > 0$. Con esta matriz P , considérese la siguiente función de Lyapunov candidata

$$V(e, \phi, \psi) = e^T P e + \text{Tr}[\phi^T \phi + \psi^T \psi] \quad (2.46)$$

en donde $\text{Tr}(M)$ es la traza de la matriz M . Obsérvese que V es definida positiva. Diferenciando (2.46) con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias de (2.45) se obtiene la siguiente expresión

$$\dot{V}(e, \phi, \psi) = e^T (A_m^T P + P A_m) e + 2e^T P (\phi x_p + \psi r) + 2\text{Tr}[\dot{\phi} \phi] + 2\text{Tr}[\dot{\psi} \psi].$$

2. Preliminares

Y con las siguientes leyes de adaptación

$$\dot{A}_p = \dot{\phi} = -P e x_p^T \quad (2.47a)$$

$$\dot{B}_p = \dot{\psi} = -P e r^T \quad (2.47b)$$

$\dot{V}(e, \phi, \psi)$ se convierte en

$$\dot{V} = -e^T Q e + 2e^T P \phi x_p - 2Tr[x_p e^T P \phi] + 2e^T P \psi r - 2Tr[r e^T P \psi].$$

De $Tr[ab^T] = b^T a$ para $a, b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, se llega a

$$\dot{V}(e, \phi, \psi) = -e^T Q e \leq 0. \quad (2.48)$$

De aquí, el estado de equilibrio ($e=0, \phi=0, \psi=0$) del sistema descrito por (2.45) y (2.47) es globalmente estable y $e, \phi, \psi \in L_\infty$. Usando (2.48) se llega a que $e \in L_2^n$. Luego, como los términos que aparecen en el lado derecho de (2.45) están acotados, se tiene que $\dot{e} \in L_\infty^n$. Con lo que e es uniformemente continua y por lo tanto $e(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. El hecho de que ϕ y ψ no tiendan a cero no es relevante en este caso, ya que no es el objetivo de control aquí. Sin embargo, esto sucederá si la entrada de referencia es excitante persistente.

2.3.2 Control Realimentado con B_p Conocida.

Se considerará el caso en el que los elementos de la matriz A_p en (2.40) son desconocidos pero constantes mientras que los de B_p son conocidos. En este caso, la matriz B_m del modelo de referencia la puede elegir el diseñador igual a B_p , si así lo desea. O bien, puede elegir B_m de manera tal que

$$B_m = B_p M, \quad (2.49)$$

en donde M es una matriz constante conocida. El control de entrada a la

planta se genera usando realimentación estática del estado, i.e.,

$$u(t) = K(t)x_p + Mr \quad (2.50)$$

en donde $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ depende de B_p y la matriz de realimentación $K(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ se ajusta adaptablemente. Se impondrá la siguiente condición sobre el sistema (2.40).

Hipótesis 2.27: Existe una matriz constante, que se denotará por K^* , tal que

$$A_p + B_p K^* = A_m. \quad (2.51)$$

En términos de (2.44b) y (2.44c), lo que afirma esta hipótesis es que $\Phi, \forall \Phi \in \text{Span}\{B_p\}$. Claramente en este caso $\Phi \neq 0$. Usando (2.44a), (2.49)-(2.51) se obtienen las ecuaciones diferenciales del error

$$\dot{e} = A_m e + B_p [K(t) - K^*] x_p. \quad (2.52)$$

Se debe determinar una ley de adaptación para $K(t)$ de manera tal que $e(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Esto se puede conseguir si

$$\dot{K}(t) = \dot{\Phi}(t) = -B_p^T P e x_p^T \quad (2.53)$$

en donde $\Phi(t) \triangleq K(t) - K^*$ y $P = P^T > 0$ satisface (2.39). La siguiente función

$$V(e, \Phi) = e^T P e + \text{Tr}[\Phi^T \Phi] \quad (2.54)$$

es una función de Lyapunov para el sistema dado por (2.52) y (2.53), ya que

$$\dot{V} = -e^T Q e + 2e^T P B_p \Phi x_p - 2\text{Tr}[x_p^T P B_p \Phi] = -e^T Q e \leq 0 \quad (2.55)$$

Finalmente, de (2.55) y (2.52) se tiene que $e \in L_2^n$ y $\dot{e} \in L_\infty^n$, con lo que $x_p(t) \rightarrow x_m(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

2. Preliminares

Con $\Gamma = \Gamma^T > 0$, la ley de adaptación (2.53) se puede cambiar por

$$\dot{\phi} = -\Gamma B_p^T P e x_p^T \quad (2.56)$$

y la estabilidad global se conseguirá reemplazando el término $\phi^T \phi$ en (2.54) por $\phi^T \Gamma^{-1} \phi$.

2.3.3 Control Realimentado con B_p Desconocida.

En este último caso, tanto A_p como B_p en (2.40) son matrices constantes pero desconocidas y el control u se genera usando realimentación. Puesto que ahora no es posible satisfacer (2.49), el diseño del controlador se basará en suposiciones relativas a la estructura de B_p .

Hipótesis 2.28: Considérese el sistema dado por (2.40). Supóngase que existen matrices constantes K^* y M^* tales que

$$A_p + B_p K^* = A_m \quad (2.57a)$$

$$B_p M^* = B_m \quad (2.57b)$$

en donde A_m y B_m son las matrices del modelo de referencia (2.41).

Se usará la estructura de control mostrada en la figura 2.1 [16]. Los parámetros de las matrices $M(t)$ y $K(t)$, se adaptarán usando las señales disponibles en el sistema. Si $M(t) \equiv M^*$ y $K(t) \equiv K^*$, entonces la matriz de transferencia de la planta y el controlador es idéntica a la del modelo. El control de entrada para la estructura mostrada en la figura 2.1 se expresa por

$$u(t) = M(t)K(t)x_p(t) + M(t)r(t). \quad (2.58)$$

Sustituyendo (2.58) en (2.40) se tiene

$$\dot{x}_p = [A_p + B_p M(t)K(t)]x_p + B_p M(t)r. \quad (2.59)$$

Con (2.41), (2.57) y (2.59) se construyen las ecuaciones del modelo del error, suponiendo que $M(t)$ es no singular:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_m e + [A_p + B_p M(t)K(t) - A_m]x_p + B_p [M(t) - M^*]r \\ &= A_m e + B_m [K(t) - K^*]x_p + B_m [(M^*)^{-1}M(t) - I]K(t)x_p + B_m [(M^*)^{-1}M(t) - I]r \\ &= A_m e + B_m \phi(t)x_p + B_m [(M^*)^{-1}M(t) - I]M^{-1}(t)M(t)[K(t)x_p + r]; \\ \dot{e} &= A_m e + B_m \phi(t)x_p + B_m \psi(t)u, \end{aligned} \quad (2.60)$$

en donde $\phi(t) \triangleq K(t) - K^*$ y $\psi(t) \triangleq (M^*)^{-1}M^{-1}(t)$.

Considérense las siguientes leyes de adaptación:

$$\dot{\phi} = -B_m^T P e x_p^T \quad (2.61a)$$

$$\dot{\psi} = -B_m^T P e u^T \quad (2.61b)$$

en donde la matriz P satisface (2.39). Considérese, ahora, la siguiente función de Lyapunov candidata

$$V(e, \phi, \psi) = e^T P e + \text{Tr}[\phi^T \phi + \psi^T \psi] \quad (2.62)$$

y diferenciándola con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias de (2.60) y (2.61) se obtiene:

$$\dot{V} = -e^T Q e + 2e^T P B_m \phi x_p + 2e^T P B_m \psi u - 2\text{Tr}[x_p^T e^T P B_m \phi] - 2\text{Tr}[u^T e^T P B_m \psi]$$

2. Preliminares

$$= -e^T Q e \leq 0. \quad (2.63)$$

De (2.63) se concluye que las soluciones de (2.60) y (2.61) están acotadas ($e, \phi, \Psi \in L_\infty$), y se tiene estabilidad global en el espacio $\{e, \phi, \Psi\}$. Sin embargo, $\Psi = (M^*)^{-1} - M^{-1}(t)$ y se tiene interés en el error paramétrico $\tilde{M}(t) \triangleq M(t) - M^*$. De aquí que sólo se tenga estabilidad uniforme en el espacio $\{e, \phi, \tilde{M}\}$, debido a la existencia de la función de Lyapunov (2.62), y no estabilidad asintótica uniforme ya que $V(e, \phi, \Psi)$ no es radialmente no acotada en este espacio. Así, las leyes de adaptación obtenidas para este problema, aseguran que los parámetros están acotados y que los errores de la salida convergen a cero sólo cuando los valores iniciales de los parámetros $M(t_0)$ y $K(t_0)$ pertenecen a alguna vecindad acotada de los valores deseados M^* y K^* . Lo cual contrasta con los casos anteriores en los que los resultados obtenidos se verifican para condiciones iniciales arbitrarias.

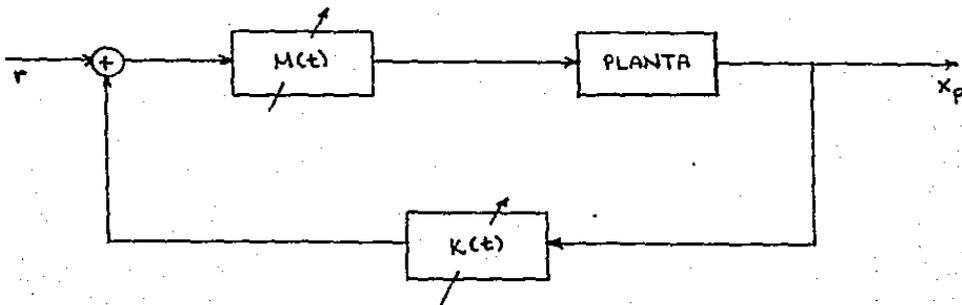


Figura 2.1

3. CONTROL ADAPTABLE DE SISTEMAS NO LINEALES.

En los últimos años el control adaptable se ha interesado en el control de sistemas dinámicos no lineales. Se han conformado dos vías principales de investigación. Una de ellas, encuentra su motivación en robustecer las técnicas de linealización exacta, por realimentación del estado, de sistemas no lineales. Éstas dependen de la cancelación exacta de los términos no lineales presentes en el modelo del sistema. La otra en cambio, no persigue tal linealización, sino solamente preservar o generar propiedades de pasividad del sistema no lineal en el lazo cerrado, explotando para ello su estructura.

Es el propósito de este capítulo proporcionar un panorama general, sin detalles, de los objetivos y algunos resultados obtenidos, hasta el momento en la literatura, en estas dos vías de investigación. Para esto, el capítulo se ha dividido en dos secciones. La primera trata el problema de linealización "adaptable" por realimentación y se divide, a su vez, en dos subsecciones: linealización entrada-salida y linealización en el espacio de estados. Se dedica la segunda sección al problema de preservar la propiedad de pasividad del sistema no lineal. El contenido de este capítulo se basa en las referencias [19] a [22].

3.1 LINEALIZACION EXACTA Y CONTROL ADAPTABLE.

Tratar de extender las técnicas de control adaptable a sistemas no lineales es un problema no trivial. Esto es, entre otras cosas, debido a que no se dispone de una metodología de diseño que emplee realimentación no lineal. Se ha invertido mucho tiempo y esfuerzo en la caracterización de la clase de sistemas no lineales que sean linealizables bajo la acción de un grupo de transformaciones no lineales, conocido como el grupo de realimentación no lineal (nonlinear feedback group) [14].

Una propiedad conveniente de los sistemas no lineales, desde el punto de vista de síntesis, es que sus dinámicas sean equivalentes, en algún sentido, a una lineal (el tipo de comportamiento lineal deseado se expondrá en las siguientes dos subsecciones). Una manera de controlar a tales sistemas, es diseñar un controlador para el sistema lineal equivalente y, luego, usar la transformación inversa para expresarlo en las coordenadas originales. Construir la transformación que linealiza implica resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que, en general, es una tarea muy difícil.

A pesar de las aplicaciones que este enfoque ha tenido, [23] y [24], su principal desventaja parece estar en el hecho de que se basa en la cancelación exacta de los términos no lineales, que aparecen en el modelo del sistema, para obtener el comportamiento lineal deseado. La situación es particularmente difícil en aquellos casos para los cuales la planta contiene parámetros inciertos o desconocidos. En este caso, la transformación que linealiza, siendo función de los parámetros de la planta, es ella misma desconocida. El enfoque de diseño mencionado no toma en cuenta la incorporación de un controlador adaptable. Por lo tanto, si existen errores o incertidumbre en el modelado de los términos no lineales, la cancelación no será exacta y, por lo tanto, el comportamiento del sistema tampoco será lineal.

El control adaptable sugiere, entonces, el uso de una ley de adaptación paramétrica que ayude a robustecer, es decir, a hacer asintóticamente exacta la cancelación de los términos no lineales cuando la incertidumbre en estos es en los parámetros. En este capítulo sólo se discute el caso continuo.

3.1.1 Linealización Exacta "Adaptable" Entrada-Salida.

Sin entrar en detalles, para lo cual puede consultarse [15], se plantea el siguiente problema.

El Problema de Linealización Exacta Entrada-Salida. Cuándo se puede hacer lineal la respuesta entrada-salida de un sistema no lineal mediante realimentación del estado?

Para el caso de parámetros conocidos la respuesta puede encontrarse en [15]. Considérese sólo el caso de parámetros desconocidos.

a) *Nam & Arapostathis (1988)* [19]. Un trabajo inicial en este sentido y motivado en parte por [25], es el de la referencia [19]. En el se presenta un esquema de control adaptable con modelo de referencia para sistemas no lineales, descritos en la forma canónica de realimentación pura [26], con parámetros desconocidos. Y, según hipótesis adecuadas, se establece convergencia global del error de salida para todos los estimados iniciales del vector de parámetros, contenidos en una vecindad abierta de los parámetros verdaderos en el espacio de los parámetros.

Los sistemas que se trabajan en [19], están representados por las siguientes ecuaciones

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \quad (3.1a)$$

$$z = h(x_1) \quad (3.1b)$$

en donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, h es una función real y x_1 es la primera componente del estado x . f y las m columnas de G ; g_1, \dots, g_m , son campos vectoriales suaves, definidos en \mathbb{R}^n , de la forma

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dots \\ f_{n-1}(x) \\ f_n(x) \end{bmatrix}; \quad g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dots \\ g_{11}(x) \end{bmatrix}, \dots, g_m(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ g_{m1}(x) \\ \dots \\ g_{mm}(x) \end{bmatrix} \quad (3.1c)$$

Esta estructura ha sido utilizada en [23], [24] y [25].

De entrada se hacen las siguientes suposiciones sobre el sistema:

- 1) todo el estado x es medible;
- 2) no se presentan dinámicas parásitas;
- 3) los parámetros inciertos aparecen linealmente, esto es,

$$f_1(x) = \sum_{j=1}^{s_1} a_{1j} f_{1j}(x_1, \dots, x_{1+1}), \quad i=1, \dots, n-1;$$

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{s_n} a_{nj} f_{nj}(x);$$

$$g_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{l_{ij}} b_{ijk} g_{ijk}(x), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq s_i, \quad (3.2)$$

en donde los coeficientes a_{ij} y b_{ijk} son los parámetros desconocidos; y

- 4) el sistema (3.1), (3.2) es linealizable en entrada-salida.

Su análisis se basa en el sistema (3.1) con $m=1$, y $n+1$ parámetros desconocidos. Se persigue un objetivo de modelo de referencia. El modelo de referencia lineal para esta planta tiene grado relativo igual a n y está representado por

$$h(s) = 1/(s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_n), \quad (3.3)$$

el denominador es un polinomio Hurwitz. El control u que resuelve el problema de control de modelo semejante (model matching control problem) depende del

vector de parámetros p_* . Cuando éste se desconoce, el problema se resuelve haciendo que u dependa de un estimado \hat{p} de p_* , que se actualiza continuamente. Sea

$$\dot{x} = \hat{f}(x) + \hat{g}(x)u \quad (3.4a)$$

un modelo estimado del sistema (3.1), para $m=1$, en donde

$$\hat{f} = [\hat{a}_1 \bar{f}_1 \dots \hat{a}_n \bar{f}_n]^T, \quad \hat{g} = [0 \dots 0 \hat{b}_1 \bar{g}_1]^T, \quad (3.4b)$$

con $\bar{f}_1, \dots, \bar{g}_1$ campos escalares suaves, definidos en \mathbb{R}^n y conocidos. $\hat{p} = [\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n \hat{b}_1]^T$ es un estimado de p_* . En la medida en que los parámetros estimados no se anulen, el sistema (3.4) será globalmente linealizabile, ya que, por la estructura del controlador u (véase la ecuación (3.18a) con $r=n$), éste será singular en aquéllos que anulen.

Usando el esquema del error aumentado y basándose en un algoritmo pseudogradiante, se diseña una ley de adaptación para \hat{p} . Y, siempre que la norma de las perturbaciones no lineales esté dominada por una función afín, se demuestra que el controlador adaptable con modelo de referencia garantiza que el error de salida converge globalmente a cero, para todos los estimados iniciales del vector de parámetros en alguna vecindad abierta de los valores verdaderos de estos en el espacio de los parámetros. Sin esta restricción en el espacio de los parámetros, para algunos valores de los parámetros estimados, el sistema no será equivalente a uno lineal. Por otro lado, renunciar a esta restricción significa que la convergencia será solamente local, esto es, se puede encontrar una vecindad del vector de parámetros verdadero, que depende del estado inicial y de la entrada de referencia, para la cual se garantiza convergencia.

Las conclusiones de su resultado principal son válidas para cualquier planta no lineal de grado relativo n y linealizabile, con la hipótesis adicional de

que el modelo aproximado (3.4) sea linealizabile para todos los parámetros estimados en alguna vecindad abierta de los verdaderos. Estos resultados se extienden a sistemas con varias entradas

b) Sastry & Isidori (1987) [20]. Siguiendo la misma línea, el trabajo presentado en [20] es más general y directo que el de [19]. En aquél se presentan resultados iniciales sobre control adaptable de sistemas no lineales de "fase mínima" que son exactamente linealizables en entrada-salida mediante realimentación del estado. Y, análogamente a [19], se usa adaptación paramétrica para robustecer la cancelación de los términos no lineales en el proceso de linealización. Sin embargo, el tipo de sistemas que se estudian es más general, están descritos por

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \quad (3.5a)$$

$$y = h(x) \quad (3.5b)$$

en donde $x \in \mathbb{R}^n$; $u, y \in \mathbb{R}^m$ y f, g, h son campos vectoriales suaves definidos en \mathbb{R}^n . Nótese que el sistema (3.1) está contenido en la descripción anterior, en la que no se impone estructura alguna sobre los campos.

Se dá una respuesta completa al problema de seguimiento adaptable, para sistemas con grado relativo uno. Sin embargo, para el caso general, se imponen condiciones aparentemente muy restrictivas sobre la dependencia del regresor en el estado y los parámetros para completar la prueba de estabilidad. Las condiciones que se imponen sobre el sistema son las mismas que en [19], y ya fueron enunciadas. Pero en [20] se consideran las consecuencias de la técnica de linealización en la dinámica interna del sistema no lineal.

El análisis se realiza para sistemas monovariantes descritos por (3.5) pero con $m=1$. Es decir,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (3.6a)$$

$$y = h(x). \quad (3.6b)$$

La forma del control u es la misma en ambos trabajos. A diferencia de [19], en [20] se usa la noción de fase mínima. Ésta está relacionada con el concepto de grado relativo fuerte del sistema y sus dinámicas de ceros. Estas definiciones se incluyen a continuación.

Definición 3.1 [20]: Se dice que el sistema (3.6) tiene grado relativo fuerte r , si se satisface, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, lo siguiente

$$L_g h(x) = L_g L_f h(x) = \dots = L_g L_f^{r-2} h(x) = 0,$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0.$$

La definición anterior puede interpretarse en términos del número de veces que se debe diferenciar la salida, y , antes de que aparezcan términos que incluyan a la entrada u . Es claro que para los sistemas con grado relativo uno, lo anterior sólo sucederá una vez. Cuando el grado relativo del sistema (3.6) es r , la ley de control que linealiza tiene la siguiente forma

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \left[-L_f^r h(x) + v \right] \quad (3.7)$$

Al aplicarle este control al sistema no lineal se obtiene uno lineal en entrada-salida de orden r . Si $r < n$, entonces $n-r$ de los n estados originales se vuelven no observables por realimentación del estado. Así, las leyes de control que linealizan pueden pensarse como el equivalente no lineal de colocar algunos de los polos de lazo cerrado en los ceros del sistema, haciéndolos, de esta manera, no observables. A las dinámicas de los estados que se volvieron no observables, por realimentación del estado, se les llama la dinámica cero del sistema y se define en el siguiente párrafo.

Si el sistema (3.6) tiene grado relativo r , entonces, en las nuevas

coordenadas, se puede escribir en su forma normal, esto es, con $z_1 \in \mathbb{R}^r$, $z_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$ y $z_{1i} = L_f^{i-1} h(x)$, $i=1, \dots, r$; se tiene

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1i} &= z_{1, i+1}, \quad i=1, \dots, r-1; \\ \dot{z}_{1r} &= f_1(z_1, z_2) + g_1(z_1, z_2)u \\ \dot{z} &= \Psi(z_1, z_2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$y = z_{11}$$

en donde $f_1(z_1, z_2)$ representa a $L_f^r h(x)$ y $g_1(z_1, z_2)$ representa a $L_g L_f^{r-1} h(x)$ en las nuevas coordenadas. Si $x=0$ es un punto de equilibrio del sistema libre (i.e., $f(0)=0$) y $h(0)=0$, entonces las dinámicas

$$\dot{z}_2 = \Psi(0, z_2) \quad (3.9)$$

son las dinámicas de ceros, mencionadas antes. En relación con éstas se tiene la siguiente definición.

Definición 3.2 [34]: Se dice que el sistema (3.6) es de fase mínima globalmente (localmente) si las dinámicas de ceros son asintóticamente estables globalmente (localmente).

Una aplicación importante de la definición anterior es seguimiento de trayectoria. Si el objetivo de control es que la salida $y(t)$ siga a una trayectoria de referencia deseada $y_m(t)$, entonces, reemplazando en (3.7)

$$v = y_m^r + \alpha_r (y_m^{r-1} - y^{r-1}) + \dots + \alpha_1 (y_m - y) \quad (3.10)$$

en donde los coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ se eligen de manera tal que el polinomio $s^r + \alpha_r s^{r-1} + \dots + \alpha_1$ sea Hurwitz, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.3 [20]: Supóngase que las dinámicas de ceros del sistema (3.6) son exponencialmente estables globalmente, que $\Psi(z_1, z_2)$ tiene derivadas parciales continuas y acotadas en z_1, z_2 y que $y_m, \dot{y}_m, \dots, y_m^{r-1}$ están acotadas. Entonces, con la ley de control (3.7), (3.10) se tiene seguimiento acotado, esto es, x está acotado y $y(t)$ converge a $y_m(t)$. ■

El resultado anterior se extiende en [20] al caso multivariable.

Para el caso de parámetros desconocidos, se resuelve el problema de seguimiento y linealización para sistemas monovariantes de grado relativo uno. Se supone que los parámetros desconocidos aparecen linealmente, como en [19],

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n_1} \theta_{i*}^1 f_i(x) \quad (3.11a)$$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n_2} \theta_{j*}^2 g_j(x) \quad (3.11b)$$

con $\theta_{i*}^1, i=1, \dots, n_1; \theta_{j*}^2, j=1, \dots, n_2$ los parámetros desconocidos y las funciones conocidas $f_i(x), g_j(x)$. Los estimados, al tiempo t , para (3.11) son respectivamente,

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{n_1} \hat{\theta}_{i*}^1(t) f_i(x) \quad (3.12a)$$

$$\hat{g}(x) = \sum_{j=1}^{n_2} \hat{\theta}_{j*}^2(t) g_j(x) \quad (3.12b)$$

en donde $\hat{\theta}_{i*}^1, \hat{\theta}_{j*}^2$ representan los estimados de los parámetros verdaderos al

tiempo t , respectivamente. El control que linealiza, (3.7), se reemplaza por

$$u = \frac{1}{L_g^{\wedge} h} \left[-L_f^{\wedge} h + v \right] \quad (3.13)$$

y $L_g^{\wedge} h$, $L_f^{\wedge} h$ son los estimados de $L_g h$, $L_f h$, respectivamente, basados en (3.12), i.e.,

$$L_f^{\wedge} h = \sum_{i=1}^{n_1} \hat{\theta}_i^1(t) L_{f_i} h \quad (3.14a)$$

$$L_g^{\wedge} h = \sum_{j=1}^{n_2} \hat{\theta}_j^2(t) L_{g_j} h. \quad (3.14b)$$

Con $\tilde{\theta} \triangleq \theta - \hat{\theta}$, el vector de error paramétrico y w el vector regresor se tiene el siguiente resultado: seguimiento adaptable.

Teorema 3.4 [20]: Tómesese (3.6) de fase mínima exponencialmente y los estimados de f y g dados en (3.12). Defínase la siguiente ley de control, con \dot{y}_m acotada,

$$u = \{ -L_f^{\wedge} h + \dot{y}_m + \alpha(y_m - y) \} / L_g^{\wedge} h. \quad (3.15)$$

Si $L_g^{\wedge} h$, definida en (3.14b), es diferente de cero para toda x , y y_m está acotada, entonces la ley de adaptación paramétrica tipo gradiente

$$\dot{\tilde{\theta}} = -(y - y_m)w$$

garantiza que $y(t)$ está acotada y converge asintóticamente a $y_m(t)$. Además, todas las variables del estado x y $\hat{\theta}$ están acotadas. ■

En el teorema anterior nada se dice respecto a la convergencia paramétrica. Condiciones de excitación persistente se requerirán en este caso. Sin embargo, éstas son difíciles de satisfacer, ya que el vector regresor es una función no lineal en x .

Al querer extender esta metodología a sistemas monovariantes de grado relativo mayor que uno, surgen varios obstáculos serios. Los parámetros ya no aparecen linealmente en (3.14). Y, para encarar este problema, se recurre a la sobreparametrización, de donde el número de parámetros aumenta rápidamente con r . El regresor es función de x y de los parámetros estimados. Se utiliza el esquema del error aumentado y se imponen condiciones, aparentemente, muy restrictivas sobre el regresor, por ejemplo, que sus derivadas parciales con respecto a sus argumentos estén acotadas. Con todo esto, los autores logran extender el resultado del Teorema 3.4. Tampoco se garantiza convergencia paramétrica en este caso.

c) Sastry & Kokotovic (1988) [21]. Como se mencionó en su oportunidad, las referencias [19] y [20] no consideran el caso de dinámicas no modeladas. A diferencia de éstas, en [21] se utilizan los resultados de [20] y se incorpora la presencia de dinámicas parásitas. En particular, se muestra que el esquema adaptable para sistemas con grado relativo uno, propuesto en [20], es robusto con respecto a la presencia de dinámicas no modeladas, en una vecindad del equilibrio de orden $(1/\mu)$, con μ el parámetro de perturbación singular.

En [21] se emplean dos técnicas de análisis de sistemas no lineales: linealización exacta entrada-salida y perturbaciones singulares. Las técnicas de control adaptable se usan de la misma manera que en [19] y [20]. Las técnicas de perturbaciones singulares se utilizan para estudiar los efectos de la dinámica incierta, i.e., los efectos de la presencia de dinámicas parásitas de alta frecuencia, no modeladas, en algunos de los esquemas adaptables.

Usando (3.12), el sistema (3.6a) se reescribe como

$$\dot{x} = \hat{f}(x) + \hat{g}(x)u + \Delta f(x) + \Delta g(x)u \quad (3.16)$$

con $\Delta f(x) \triangleq f(x) - \hat{f}(x)$ y $\Delta g(x) \triangleq g(x) - \hat{g}(x)$. Se establece una clase de incertidumbres Δf , Δg para las cuales se consigue seguimiento asintótico con un control nominal. Y, para este objetivo de control, se discuten varios enfoques (por ejemplo, desacoplamiento total de perturbaciones, control de modo deslizante y control adaptable) que buscan mejorar la robustez de las leyes de control con respecto a la incertidumbre paramétrica Δf , Δg . La condición que deben satisfacer Δf y Δg es la siguiente

$$\Delta f, \Delta g \in \text{Ker}\{dh, dL_f h, \dots, dL_f^{r-1} h\}, \quad (3.17)$$

con r el grado relativo de la planta. Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.5 [21]: (Rechazo exacto a perturbaciones) Si los estimados $\hat{f}(x)$, $\hat{g}(x)$ de $f(x)$, $g(x)$, respectivamente, satisfacen (3.17) y el objetivo para y es seguir una trayectoria dada $y_m(t)$, entonces la ley de control nominal

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} \left[-L_f^r h + \hat{v} \right] \quad (3.18a)$$

con

$$\hat{v} = y_m^{(r)} + \alpha_1 (y_m^{(r-1)} - L_f^{r-1} h) + \dots + \alpha_r (y_m - h) \quad (3.18b)$$

diseñada para el modelo estimado

$$\dot{x} = \hat{f}(x) + \hat{g}(x)u \quad (3.18c)$$

consigue, también, seguimiento asintótico para el sistema (3.6a). ■

El término "rechazo exacto a perturbaciones", interpreta a Δf , Δg como perturbaciones que están desacopladas de la salida vía el control realimentado (3.18a).

La proposición anterior no garantiza que las $n-r$ variables de las dinámicas de ceros permanecerán acotadas. Para probar esto, se requiere otra caracterización de las incertidumbres Δf y Δg .

Con respecto a las dinámicas no modeladas, [21] supone que son estables y el objetivo de control que se considera es regulación de la salida, esto es, el seguimiento de $y_m(t) \equiv 0$. Se obtienen resultados preliminares sobre la robustez de la linealización adaptable con respecto a la forma de dinámica incierta mencionada (este tipo de estudio se realiza también en [22]). Se muestra que, para grado relativo uno, la regulación adaptable es robusta en presencia de dinámicas no modeladas. Mientras que para sistemas con grado relativo mayor que uno no se cuenta, aún, con resultados de robustez.

A manera de sumario, los tres trabajos comentados en esta subsección ([19], [20] y [21]), buscan linealizar exactamente en entrada-salida al sistema no lineal, robusteciendo la cancelación de los términos no lineales mediante una ley de adaptación paramétrica, cuando la incertidumbre en estos es en los parámetros. Se consideran dos objetivos de control: seguimiento de trayectoria y regulación de la salida. Se aplica el esquema adaptable para sistemas con grado relativo $r \leq n$ y se obtiene un resultado completo sólo para $r=1$. Para $r > 1$, se presentan obstáculos serios a los que se les hace frente de diferentes maneras. Sin embargo, aún no se tienen resultados completos como en el caso anterior. En [21], se incorpora la presencia de dinámicas rápidas no modeladas y se obtienen resultados parciales de robustez.

3.1.2 Linealización Exacta "Adaptable" en el Espacio de Estados.

Análogamente al inicio de la subsección anterior, se plantea el siguiente

problema (para detalles véase [15]).

El Problema de Linealización Exacta en el Espacio de Estados. Cuándo se puede volver lineal la ecuación diferencial que relaciona la entrada con el estado mediante realimentación del estado y una transformación de coordenadas?

Nuevamente, el interés es sólo en el caso adaptable, o sea, cuando los parámetros que aparecen en el modelo de la planta se desconocen. El trabajo a comentar en esta subsección es [22], ya que es el primero que ha trabajado este problema, abriendo un camino diferente al concebido en [20]. En [22], se incluyen las dinámicas no modeladas. Se presentan condiciones para estabilidad global de una ley de control adaptable diseñada para el modelo de orden reducido de una clase de plantas no lineales de orden mayor. El objetivo de control es regulación del estado. Se garantiza que éste se cumple cuando están presentes las dinámicas no modeladas, al menos en una región de estabilidad. Y se analiza la robustez del esquema de control propuesto. Para esto, se explota el hecho de que existe una variedad invariante, conocida como la variedad lenta, en la cual la planta está descrita por un modelo de orden reducido [27] (ver ecuaciones (3.19) y (3.20) más adelante). Se trabaja con las siguientes suposiciones.

Sobre la planta:

- 1) el orden de ésta es mayor debido a las dinámicas no modeladas; y
- 2) las dinámicas no modeladas son rápidas y estables.

Sobre el modelo de orden reducido (que ignora la presencia de dinámicas parásitas):

- 4) los parámetros desconocidos aparecen linealmente;
- 5) es linealizabile por realimentación en el espacio de estados;
- 6) la incertidumbre en los parámetros satisface una condición de estructura semejante; y
- 7) el estado es medible.

La planta, que incluye un vector de parámetros constante, está descrita por

$$\dot{x} = f_1(x, p_*) + F_1(x, p_*)z + G_1(x, p_*)u \quad (3.19a)$$

$$\mu \dot{z} = f_2(x, p_*) + F_2(x, p_*)z + G_2(x, p_*)u \quad (3.19b)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^r$ y $p_* \in \mathbb{R}^q$; $\mu > 0$ es el parámetro de perturbación singular. Las funciones f_1 , f_2 , F_1 , F_2 , G_1 , G_2 son acotadas y diferenciables con respecto a x y a p_* . $\forall p_* \in B_p \subset \mathbb{R}^q$ y $\forall x \in B_x \subset \mathbb{R}^n$. μ pequeña implica que \dot{z} es grande, por lo tanto, las dinámicas no modeladas son rápidas. Se tienen dos escalas de tiempo diferentes para la planta (3.19). En el límite singular, cuando μ pasa de $\mu > 0$ a $\mu = 0$, se separan las dinámicas lentas de las rápidas. Se obtiene, de esta manera, el modelo de orden reducido

$$\dot{x} = f(x, p_*) + G(x, p_*)u \quad (3.20)$$

en donde

$$f(x, p_*) \triangleq f_1(x, p_*) - F_1(x, p_*)F_2^{-1}(x, p_*)f_2(x, p_*) \quad (3.21a)$$

$$G(x, p_*) \triangleq G_1(x, p_*) - F_1(x, p_*)F_2^{-1}(x, p_*)G_2(x, p_*) \quad (3.21b)$$

con $f(0, p_*) = 0 \forall p_* \in B_p \subset \mathbb{R}^q$. Precisamente, el estado x de (3.20) evoluciona en una variedad invariante denominada la variedad lenta. (3.20) representa a las dinámicas lentas de (3.19). Separando las incertidumbres paramétricas, se expresa (3.20) como

$$\dot{x} = f(x, \hat{p}) + G(x, \hat{p})u + \Delta f(x, p_*, \hat{p}) + \Delta G(x, p_*, \hat{p})u \quad (3.22)$$

en donde \hat{p} es un estimado de p_* y

$$\Delta f(x, p_*, \hat{p}) \triangleq f(x, p_*) - f(x, \hat{p}), \quad (3.23a)$$

$$\Delta G(x, p_*, \hat{p}) \triangleq G(x, p_*) - G(x, \hat{p}). \quad (3.23b)$$

Haciendo $\Delta f=0$ y $\Delta G=0$, aun cuando $\hat{p} \neq p_*$, se obtiene el modelo de diseño

$$\dot{x} = f(x, \hat{p}) + G(x, \hat{p})u. \quad (3.24)$$

Como se mencionó antes, Δf y ΔG deben satisfacer la siguiente condición.

Hipótesis 3.6 [22]: $\forall x \in B_x \subset \mathbb{R}^n$ y cada par $p_*, \hat{p} \in B_p$ el vector Δf y las columnas Δg_i de ΔG satisfacen

$$\Delta f, \Delta g_i \in \text{Span}\{g_i(x, \hat{p})\}, \quad i=1, \dots, m. \quad (3.25)$$

A la hipótesis anterior se le conoce como la condición de estructura semejante.

Se supone que (3.24) es linealizable, mediante una transformación de coordenadas $\phi(x, \hat{p})$ y un control de realimentación del estado $u=\alpha(x, \hat{p})$. Con esta suposición y la Hipótesis 3.6, se demuestra la siguiente proposición.

Proposición 3.7 [22]: Supóngase que (3.24) es linealizable y que se satisface la hipótesis 3.6, entonces el modelo de orden reducido (3.20) es linealizable precalculando ϕ y α para p_* , un valor fijo arbitrario de \hat{p} . Esto es, dada cualquier pareja $\{\phi(x, p_*), \alpha(x, p_*)\}$ que satisface

$$D\phi(x, p_*)[f(x, p_*) + G(x, p_*)\alpha(x, p_*)] = A\phi(x, p_*)$$

con A una matriz Hurwitz, existe un control $u(x, p_*, p_*)$, tal que la identidad

$$D\phi(x, p_*)[f(x, p_*) + G(x, p_*)u(x, p_*, p_*)] = A\phi(x, p_*) \quad (3.26)$$

se verifica $\forall p_* \in B_p$ y $\forall x \in B_x$. ■

Con el difeomorfismo precalculado, ϕ_0 , se puede diseñar un control adaptable que solamente actualice al control $\alpha(x, \hat{p})$. Si no se satisface la Hipótesis 3.6, entonces ϕ también deberá ser actualizado.

Para construir el controlador que linealiza, se usa un estimado del vector de parámetros desconocidos. Se resuelve el problema considerando que éste se conoce y en el esquema de control así diseñado se sustituye p_* por su estimado. Se obtiene entonces un control de equivalencia cierta dado implícitamente por la expresión

$$G(x, \hat{p})[u - \alpha(x, p_0)] = \Delta f(x, p_0, \hat{p}) + \Delta G(x, p_0, \hat{p})\alpha(x, p_0) \quad (3.27)$$

para cada par $p_0, \hat{p} \in B_p$ y $\forall x \in B_x$. Una solución de éste, es el llamado control pseudoinverso

$$\hat{u} \triangleq \alpha(x, \hat{p}) = \alpha(x, p_0) + G^+(x, \hat{p})[\Delta f(x, p_0, \hat{p}) + \Delta G(x, p_0, \hat{p})\alpha(x, p_0)], \quad (3.28)$$

en donde $G^+ = [G^T G]^{-1} G^T$.

Con la hipótesis hecha sobre los parámetros, se diseña una ley de adaptación para estos y se obtiene que el equilibrio del sistema adaptable es estable (en el sentido de Lyapunov), se estima su región de atracción y se muestra que se obtiene regulación del estado. Se incluyen las dinámicas no modeladas en el diseño de control no adaptable y se prueba la estabilidad del equilibrio del sistema completo (3.19).

3.2 METODOS DE CONTROL BASADOS EN LA PROPIEDAD DE PASIVIDAD.

La segunda vía de investigación fué fuertemente motivada por el problema de robótica. El objetivo de control que se plantea no es linealizar al sistema, sino sólo preservar sus propiedades de pasividad en el lazo cerrado. Este enfoque usado por primera vez en [28], ha sido explotado por diversos

Investigadores para resolver varios problemas de robótica [29].

En robótica se tiene interés, entre otras cosas, en el diseño de leyes de control adaptable para robots manipuladores rígidos que aseguren seguimiento asintótico de trayectoria con todas las señales internas acotadas. Los controladores que logran este objetivo para todas las trayectorias deseadas y todas las condiciones iniciales, se dice que son globalmente convergentes. Estas leyes de control incorporan explícitamente la estimación de los parámetros desconocidos presentes en el modelo del robot. Debido a la estructura Hamiltoniana de la dinámica del robot rígido, se tiene que el mapeo $u \rightarrow x_2$ es pasivo, en donde x_2 representa una parte del estado y u es la entrada. Esta observación fué reportada en la literatura por primera vez en [35] y estudiada en detalle en [29]. Se busca diseñar un controlador estrictamente pasivo de manera tal que el sistema en malla cerrada sea estable y se preserve la propiedad de pasividad.

Los resultados obtenidos usando este método, en general, no conducen a un sistema lineal ni aun en el caso ideal de parámetros conocidos. La motivación principal en usar este enfoque, está en que conduce, en el caso adaptable, a ecuaciones del error en las cuales el regresor es independiente de las aceleraciones de las uniones del robot manipulador.

Existen algunas aplicaciones de esta segunda vía de investigación fuera del ámbito de la robótica, por ejemplo en estudios aeroespaciales, en procesos químicos y otros [30]-[33].

4. ESTABILIZACION ADAPTABLE DE UNA CLASE DE SISTEMAS NO LINEALES: CASO NO LINEALIZABLE.

Siguiendo el segundo enfoque comentado en el capítulo anterior, se extienden los resultados de [22] al caso en el que las plantas (sistemas dinámicos no lineales) no son necesariamente linealizables pero poseen ciertas propiedades de pasividad. Concretamente, se reemplaza la hipótesis de linealización usada en [22] por la existencia de un difeomorfismo de estado, un control de realimentación del estado y una salida para los cuales el sistema en malla cerrada define un mapeo estrictamente pasivo [5]. Por el momento no se ha caracterizado a la familia de sistemas no lineales que cumplen con esto. Sin embargo, se sabe que existen sistemas no linealizables que admiten una salida y un control tales que, en malla cerrada, son estrictamente pasivos. Más aún, existe una subclase de los linealizables que tienen esta propiedad. Por otro lado, todos los sistemas no lineales que pertenecen a la clase de los linealizables, admiten una salida tal que la función de transferencia del sistema en lazo cerrado es estrictamente positiva real, condición suficiente para probar estabilidad del equilibrio del sistema.

Este capítulo está dividido en cuatro secciones. En la primera se plantea el problema que motiva este trabajo. La segunda, define un tipo de salidas para las cuales se puede construir un control que hace estrictamente pasivo al sistema en malla cerrada. En la tercera sección se demuestran unos lemas preliminares que facilitan la demostración del resultado principal de este trabajo que se encuentra en la cuarta sección. Se ha restringido al caso en el que no se presentan dinámicas no modeladas y se consideran solamente propiedades globales.

4.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Se tiene interés en sistemas dinámicos no lineales descritos por ecuaciones

de la forma

$$\dot{x} = f(x, p_0) + G(x, p_0)u \quad (4.1)$$

en donde $x \in \mathbb{R}^n$ y el vector de parámetros p_0 pertenece a \mathbb{R}^q . Se supondrá que $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ son funciones acotadas y diferenciables de sus argumentos; $u \in \mathbb{R}^m$. Se hará referencia a (4.1) como la planta. Se considera conocido un modelo de la planta con parámetros desconocidos y se supondrá que el orden de la planta y el orden del modelo son el mismo (no se está considerando el caso en el que existen dinámicas no modeladas).

Se desea diseñar un control que regule el estado y tal que el sistema en malla cerrada sea estable en el sentido de Lyapunov y estrictamente pasivo en la salida, para una entrada convenientemente elegida. Como se mencionó líneas arriba, no se tiene interés en linealizar al sistema. Sino en utilizar la propiedad de disipatividad de los sistemas dinámicos. Y, puesto que se desconocen los parámetros del modelo, se recurrirá a una ley de adaptación paramétrica que ayude a alcanzar el objetivo de control planteado.

Como en [22], se tiene el problema de que, en general, tanto el difeomorfismo como el control dependen de los parámetros. Esto dificulta, e inclusive imposibilita, la caracterización de las órbitas de este grupo de transformaciones. Para encarar el problema se "congela" una órbita para un valor fijo y arbitrario del vector de parámetros y se obtiene una solución, de entre las posibles, conocida como "control pseudoinverso" [22]. Este procedimiento lleva al sistema a la órbita de alguno estrictamente pasivo. Entonces, aun cuando no se esté en la órbita del sistema no lineal estrictamente pasivo de interés, se está en la de algún otro que también tiene esta propiedad. Si se pudiera encontrar una ley de adaptación que asegurara convergencia paramétrica, entonces los errores paramétricos se anularían y las dos órbitas coincidirían. Sin embargo, esto no es el objetivo.

En el caso que se estudia en este trabajo, la ley de adaptación paramétrica sólo ayuda a conseguir la estabilización del sistema no lineal. Una parte del sistema adaptable en malla cerrada es estrictamente pasiva para una elección adecuada de la salida.

4.2 LA CLASE D.

En esta sección se define un tipo especial de salidas que sirven para diseñar un control adaptable para el sistema no lineal. En adelante se usará la siguiente notación. Comenzando con los parámetros que pertenecen a \mathbb{R}^q se tiene:

p_* : vector constante de parámetros desconocidos.

$\hat{p}(t)$: vector de parámetros estimados. (4.2)

p_0 : un estimado a priori del vector de parámetros.

Sea H una función de x y de cualesquiera de los vectores de (4.2). Se tiene, entonces que:

$$H_*(x) \triangleq H(x, p_*); H_0(x) \triangleq H(x, p_0); H(x) \triangleq H(x, \hat{p}(t)),$$

$$\tilde{H}(x) \triangleq H_*(x) - \hat{H}(x); \tilde{H}_0(x) \triangleq H_0(x) - \hat{H}(x); \bar{H}(x) \triangleq H_0(x) - H_*(x). \quad (4.3)$$

Como es usual, el error en los parámetros se denota por: $\bar{p} \triangleq p_* - \hat{p}$. La definición siguiente determina a la clase de sistemas no lineales que fué aludida al comienzo de este capítulo.

Definición 4.1: Considérese un sistema dinámico no lineal descrito por

$$\dot{x} = f_*(x) + G_*(x)u \quad (4.4)$$

en donde f_0 y G_0 son funciones acotadas y diferenciables de sus argumentos. Supóngase que el sistema es alcanzable desde el origen y que $f_0(0)=0 \forall p_0 \in \mathbb{R}^q$, esto es, $x=0$ es un estado de equilibrio para todas las parametrizaciones de la planta. Se dice que $y=h(z)$, con $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$, es una salida de clase \mathcal{D} para el sistema (4.4) si tiene las siguientes propiedades:

i) $h(0) = 0$ y h es de clase C^∞ ,

ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall p_0 \in \mathbb{R}^q$ existen un difeomorfismo de estado

$$z = \Phi(x, p_0), \quad \Phi(0, p_0) = 0$$

y un control de realimentación del estado

$$u = \alpha(x, p_0), \quad \alpha(0, p_0) = 0$$

tales que, el sistema dinámico

$$\dot{z} = F(z) + v \tag{4.5a}$$

$$y = h(z) \tag{4.5b}$$

con

$$F[\Phi_0(x)] = D\Phi_0(x)[f_0(x) + G_0(x)\alpha_0(x)] \tag{4.5c}$$

define un operador $v \rightarrow y$ estrictamente pasivo en la salida. Es decir, a lo largo de las trayectorias de (4.5), con $z(0)=0$, se tiene.

$$\langle v, y \rangle_T \geq \epsilon \|y\|_{2,T}^2, \quad \forall T \in \mathbb{R}_+, \quad \forall v \in L_{2e}^n, \quad \text{para algún } \epsilon > 0.$$

iii) El sistema (4.5) satisface la condición de detectabilidad uniforme del estado cero. Con otras palabras, para todas las soluciones de $\dot{z} = F(z)$, con

$z(0) = z_0$, existe una función de clase K , $\beta(\cdot)$, y una constante $T \geq 0$ tales que $\|y\|_{2,T}^2 \geq \beta(\|z\|)$. ■

Observaciones:

- 1) $\beta(\cdot)$ es de clase K si satisface las condiciones de la definición 2.18.
- 2) El operador $v \rightarrow y$ es $(-\epsilon I, \frac{1}{2}I, 0)$ -disipativo de acuerdo con (2.7).
- 3) La clase de sistemas que admiten salidas de clase \mathcal{D} se puede definir, informalmente, como aquella para la cual existe un control tal que el sistema en malla cerrada es estrictamente pasivo en la salida. Abusando del lenguaje, se dirá que estos sistemas son "pasivizables".

No obstante que disipatividad es una propiedad entrada-salida, independiente de las coordenadas del estado, se ha incluido en la definición anterior un difeomorfismo de estado para facilitar la construcción de las funciones requeridas para establecer $(-\epsilon I, \frac{1}{2}I, 0)$ -disipatividad. La siguiente proposición afirma que para todos los sistemas linealizables se puede construir una salida apropiada de manera tal que la función de transferencia del sistema en malla cerrada sea SPR [8] y [9].

Proposición 4.2: Todos los sistemas no lineales que pertenecen a la clase de los sistemas linealizables admiten una salida y tal que el operador $v \rightarrow y$ es estrictamente positivo real.

Demostración: Para los sistemas linealizables la expresión (4.5c) se reduce a $\dot{z} = Az$, para alguna matriz Hurwitz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (véase [15]). Resolviendo la ecuación de Lyapunov $A^T P + PA = -Q$, con $Q = Q^T > 0$ y fijando $y = h(z) = Pz$ se tiene el sistema;

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Iv \\ y &= Pz \end{aligned} \tag{4.6}$$

en donde I es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n \times n}$. Obsérvese que el triplete (A, I, P) es controlable y observable dado que $I, P > 0$. Luego, del lema 2.8 se concluye

que el operador $v \rightarrow y$ es estrictamente positivo real. ■

Nótese que la proposición anterior no afirma que el operador sea estrictamente pasivo en la salida sino que la función de transferencia del sistema (4.6) es SPR. Esto es suficiente para probar estabilidad del equilibrio. Estos dos conceptos coinciden cuando el orden relativo del sistema es cero. No obstante, existen sistemas linealizables que admiten una salida para la cual el operador entrada-salida es estrictamente pasivo. Para una discusión detallada de las diferentes relaciones entre positividad y pasividad véase [5] y [12].

4.3 LEMAS PRELIMINARES.

Dada la planta (4.4), en general, no se conoce el vector de parámetros p_* . En lugar de p_* , se usa un estimado de éste, $\hat{p}(t)$. El cual puede estar fijo, p_0 , o variar de acuerdo a alguna ley de adaptación, $\dot{\hat{p}}$. Usando la notación de (4.3) para representar a la incertidumbre en los parámetros, se puede reescribir a (4.4) de la siguiente manera:

$$\dot{x} = \hat{f}(x) + \hat{G}(x)u + \tilde{f}(x) + \tilde{G}(x)u. \quad (4.7)$$

Es evidente que si $\hat{p} \equiv p_*$, entonces $\tilde{f}(x)=0$ y $\tilde{G}(x)=0$. Por otro lado, si se ignora la incertidumbre paramétrica, aún cuando $\hat{p} \neq p_*$, se obtiene el modelo de diseño de (4.4) dado por

$$\dot{x} = \hat{f}(x) + \hat{G}(x)u. \quad (4.8)$$

Se va a imponer la siguiente condición sobre la incertidumbre paramétrica:

Hipótesis 4.3: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ y cada par p_* , $\hat{p} \in \mathbb{R}^q$ el vector $\tilde{f}(x)$ y las columnas $\tilde{g}_i(x)$ de $\tilde{G}(x)$, $i=1, \dots, m$, satisfacen

$$\tilde{f}(x), \tilde{g}_1(x), \dots, \tilde{g}_m(x) \in \text{Span}\{\hat{g}_1(x), \dots, \hat{g}_m(x)\}.$$

A la hipótesis 4.3, se le conoce como la condición de estructura semejante (structure matching condition) [22].

Se considerará, también, que los parámetros desconocidos en la planta (4.4) aparecen linealmente:

Hipótesis 4.4: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ y cada par p_* , $\hat{p} \in \mathbb{R}^q$ existen matrices $\Psi_i(x)$, de orden $n \times q$, tales que

$$\tilde{f}(x) = \Psi_0(x)\tilde{p}, \quad (4.9a)$$

$$\tilde{g}_i(x) = \Psi_i(x)\tilde{p}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.9b)$$

A continuación se probarán varios lemas que serán de utilidad en la demostración del resultado central de este trabajo. Es de interés el caso en el que el difeomorfismo deseado se pueda precalcular para algún valor fijo y arbitrario del vector de parámetros, por ejemplo p_0 , en lugar del vector desconocido p_* .

Estos lemas están relacionados con el comentario hecho al final de la sección uno, en el sentido de "congelar una órbita" para un valor fijo de \hat{p} . La idea es la siguiente. Considérese al conjunto de parejas (Φ, α) , determinadas en la definición 4.1, como un grupo de transformaciones actuando sobre el espacio de los sistemas que son $(-\varepsilon I, \frac{1}{2}I, 0)$ -disipativos. Supóngase, para empezar, que se conocen los parámetros de la planta. Esto con el fin de que las componentes de la pareja (Φ, α) no dependan, por el momento, de los parámetros. El conjunto de los sistemas $(-\varepsilon I, \frac{1}{2}I, 0)$ -disipativos forma una órbita (o una clase de equivalencia) bajo la acción del grupo. En particular, se tiene interés en los sistemas no lineales descritos por (4.4) que están en la órbita del grupo de transformaciones que contiene a un sistema $(-\varepsilon I, \frac{1}{2}I, 0)$ -disipativo. Hasta ahora, se desconocen condiciones sobre f y G que

aseguren que el sistema no lineal descrito por estas funciones esté en dicha órbita.

Supóngase que estas órbitas se pueden caracterizar y que la pareja (Φ, α) depende de p_* . Es evidente, por sí solo, que el problema es muy complejo. Una manera de encararlo (análogamente a [22]) es fijar un valor de \hat{p} arbitrariamente y determinar a la pareja (Φ_0, α_0) . Esto es lo que se quiere decir con "congelar una órbita" para $\hat{p}=p_0$. Para este caso, se diseña un control u , y una ley de adaptación tales que estabilicen al sistema en malla cerrada. Si p_0 coincide con p_* , se tiene el problema resuelto. Pero, en general, esto no es así.

Lema 4.5: Considérese el sistema (4.8) y supóngase que se satisface la hipótesis 4.3. Tómese $\alpha_0(x)$ tal que la igualdad (4.5c) se verifique. Entonces la ecuación

$$\hat{G}(x)[u - \alpha_0(x)] = \tilde{f}_0(x) + \tilde{G}_0(x)\alpha_0(x) \quad (4.10)$$

admite una solución de la forma

$$u(x, p_0, \hat{p}) = \alpha_0(x) + \hat{G}^+(x)[\tilde{f}_0(x) + \tilde{G}_0(x)\alpha_0(x)] \quad (4.11)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ y cada par $p_0, \hat{p} \in \mathbb{R}^q$, en donde $G^+(x) = [\hat{G}^T(x)\hat{G}(x)]^{-1}\hat{G}^T(x)$.

Demostración : Sustitúyase (4.11) en (4.10) para obtener

$$[\hat{G}(x)\hat{G}^+(x) - I][\tilde{f}_0(x) + \tilde{G}_0(x)\alpha_0(x)] = 0.$$

De la hipótesis 4.3 existe una función $\beta(\cdot)$ tal que

$$\tilde{f}_0(x) + \tilde{G}_0(x)\alpha_0(x) = \hat{G}(x)\beta(x).$$

por lo tanto,

$$[\hat{G}(x)\hat{G}^+(x)\hat{G}(x) - \hat{G}(x)]\beta(x) = 0$$

ya que $\hat{G}(x)\hat{G}^+(x)\hat{G}(x) = \hat{G}(x)$. ■

El siguiente lema es una versión del anterior para p_0 y p_* . Se demuestra de la misma forma por lo que su prueba se omite.

Lema 4.6: Considérese (4.4), supóngase 4.3 y que $\alpha_0(x)$ satisface (4.5c). Entonces

$$G_*(x)[u - \alpha_0(x)] = \bar{f}(x) + \bar{G}(x)\alpha_0(x) \quad (4.12a)$$

admite una solución de la forma

$$u(x, p_0, p_*) = \alpha_0(x) + G_*^+(x)[\bar{f}(x) + \bar{G}(x)\alpha_0(x)] \quad (4.12b)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$; y cada par $p_*, p_0 \in \mathbb{R}^q$. ■

Lema 4.7: Dado cualquier par $\{\phi_0(x), \alpha_0(x)\}$ que satisfaga (4.5c) y suponiendo que se cumple 4.3, se sigue que existe un control $u^* = u(x, p_0, p_*)$ que aplicado a (4.4) lo transforma en $\dot{z} = F(z)$ y tal que la identidad

$$D\phi_0(x)[f_*(x) + G_*(x)u^*] = f[\phi_0(x)]$$

se verifica $\forall x \in \mathbb{R}^n$, y cada $p_* \in \mathbb{R}^q$.

Demostración: Diferenciando $z = \phi_0(x)$ con respecto al tiempo y usando (4.4):

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= D\phi_0[f_* + G_*u] \\
&= D\phi_0[f_0 + G_0\alpha_0 + f_* + G_*u - f_0 - G_0\alpha_0] \\
&= D\phi_0[f_0 + G_0\alpha_0] + D\phi_0[-\bar{f} + G_*u - G_0\alpha_0] \\
&= F[\phi_0(x)] + D\phi_0[-\bar{f} - \bar{G}\alpha_0 + G_*(u - \alpha_0)] \\
&= F[\phi_0(x)].
\end{aligned}$$

En la penúltima igualdad se usó (4.5c) y el lema 4.6. ■

El siguiente lema dice cómo calcular un control para un p_0 cualquiera cuando el campo vectorial $F(\cdot)$ en (4.5) se conoce.

Lema 4.8: Sea $\phi_0(x)$ como en el lema anterior y $F(\cdot)$ un campo vectorial que satisface (4.5). Un control $u = \alpha_0(x)$ que transforma

$$\dot{x} = f_0(x) + G_0(x)u \tag{4.13}$$

en $\dot{z} = F(z)$ es

$$\alpha_0(x) = G_0^+(x)[D^{-1}\phi_0(x)F(\phi_0(x)) - f_0(x)]. \tag{4.14}$$

Demostración: Calculando $\dot{\phi}_0(x)$ y usando (4.13) se tiene:

$$\dot{z} = \dot{\phi}_0(x) = D\phi_0(x)\dot{x} = D\phi_0(x)[f_0(x) + G_0(x)u] = D\phi_0(x)[f_0(x) + G_0(x)\alpha_0(x)].$$

De (4.14) se sigue que

$$G_0(x)\alpha_0(x) = D^{-1}\phi_0(x)F[\phi_0(x)] - f_0(x).$$

con lo que

$$\dot{z} = D\phi_0(x)\{f_0(x) + D^{-1}\phi_0(x)F[\phi_0(x)] - f_0(x)\} = F[\phi_0(x)]. \quad \blacksquare$$

Considérese la expresión (4.12a). Reemplazando p_0 por su estimado \hat{p} se obtiene un control de equivalencia cierta, dado implícitamente por (4.10). Las soluciones de (4.10) se denotarán por $\hat{\alpha}_0(x) = \alpha(x, p_0, \hat{p})$. Una solución de $\hat{\alpha}_0(x)$ es el llamado "control pseudoinverso" dado por (4.11). Recuérdese que $\alpha_0(x)$ se precalcula usando (4.5c) para cualquier $p_0 \in \mathbb{R}^q$. Si $G(x)$ no depende de los parámetros, entonces se puede calcular u usando el lema 4.8 para el sistema (4.8):

$$u(x, \hat{p}) = G^+(x)[D^{-1}\phi(x)f(\phi(x)) - \hat{f}(x)].$$

El siguiente lema utiliza la hipótesis 4.4 y una solución de (4.10) para separar la incertidumbre paramétrica.

Lema 4.9: Supóngase que se verifica la hipótesis 4.4. Sea $u = \hat{\alpha}_0(x)$ una solución de (4.10). Entonces el sistema (4.4) se transforma en

$$\dot{x} = D^{-1}\phi_0(x)\{F[\phi_0(x)] + \Omega(x, \hat{p})\tilde{p}\} \quad (4.15)$$

en donde

$$\Omega(x, \hat{p}) = D\phi_0(x)[\Psi_0(x) + \sum_{i=1}^m \Psi_i(x)\hat{\alpha}_{0_i}(x)] \quad (4.16)$$

es una matriz de orden $n \times q$ llamada la matriz regresor.

Demostración: Calcúlese $\dot{\phi}_0(x)$ y usando (4.4) se tiene:

$$\dot{z} = D\phi_0[f_0 + G_0 u]$$

$$\begin{aligned}
 &= D\phi_0[f_0 + G_0\alpha_0 + f_* + G_*u - f_0 - G_0\alpha_0] \\
 &= D\phi_0[f_0 + G_0\alpha_0] + D\phi_0[\tilde{f} - f_0 + \hat{f} + (\hat{G} + \tilde{G})u - (\hat{G} + \tilde{G}_0)\alpha_0] \\
 &= F[\phi_0] + D\phi_0[\tilde{f} + \tilde{G}u] + D\phi_0[\hat{G}(u - \alpha_0) - \tilde{f}_0 - \tilde{G}_0\alpha_0] \\
 &= F[\phi_0] + D\phi_0[\Psi_0 + \sum_{i=1}^m \Psi_i \hat{\alpha}_{0_i}] \tilde{p} \\
 &= F[\phi_0(x)] + \Omega(x, p) \tilde{p}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, con $\dot{x} = D^{-1}\phi_0(x)\dot{z}$ se tiene el resultado buscado. Se usó $\alpha_0(x)$ que satisface (4.5c) y el lema 4.7. ■

El resultado técnico utilizado en este trabajo es el lema generalizado de Kalman-Yakubovich-Popov establecido en [7] y discutido en la sección uno del Capítulo 2. Una versión, adecuada al propósito de este trabajo, se enuncia a continuación.

Proposición 4.10: Supóngase que $y=h(z)$ es una salida de clase \mathcal{D} para el sistema (4.4). Entonces $\forall z \in \mathbb{R}^n$ existen funciones reales $V_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ (para algún $p \in \mathbb{N}$) que satisfacen

$$V_1(z) > 0 \quad \forall z \neq 0, \quad V_1(0) = 0 \tag{4.17a}$$

$$\nabla V_1(z)F(z) = -c\|h(z)\|^2 - \|l(z)\|^2 \tag{4.17b}$$

$$\nabla^T V_1(z) = h(z). \quad \blacksquare \tag{4.17c}$$

La condición de detectabilidad del estado cero impuesta sobre (4.5) se requiere para asegurar que la función $V_1(\cdot)$, que será usada como un término

en la función de Lyapunov candidata, sea definida positiva de acuerdo a (4.17a), véase el lema 2.16. Asimismo, la condición de uniformidad de la definición 4.1 es esencial para establecer la regulación asintótica (o estabilización adaptable) del estado de la planta como se verá a continuación. Finalmente, el resultado principal de este trabajo se enuncia en la siguiente sección.

4.4 RESULTADO PRINCIPAL.

En esta sección se prueba el resultado obtenido en este trabajo.

Teorema 4.11: Supóngase que el sistema (4.4) satisface las condiciones de la definición 4.1, que se cumplen las hipótesis 4.3, 4.4 y la

Hipotesis 4.12: Existe una salida y de clase \mathcal{D} para (4.4).

Entonces, con una ley de control dada por

$$u(x, p_0, \hat{p}) = \alpha_0(x) + \hat{G}^+(x)[\tilde{f}_0(x) + \tilde{G}_0(x)\alpha_0(x)] \quad (4.11)$$

$$\alpha_0(x) = G_0^+(x)\{D^{-1}\phi_0(x)F[\phi_0(x)] - f_0(x)\} \quad (4.14)$$

y una ley de adaptación

$$\dot{\hat{p}} = \Gamma \Omega^T(x, \hat{p})h[\phi_0(x)], \quad \Gamma = \Gamma^T > 0, \quad \hat{p}(0) = p_0, \quad (4.18)$$

se obtiene un sistema adaptable globalmente convergente, esto es, $x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, $x \in L_{\infty}^n$ y $\hat{p} \in L_{\infty}^q$. Además, el equilibrio $x=0$, $\hat{p}=p_0$ es estable en el sentido de Lyapunov.

Demostración: Directamente del lema 4.9 se tiene que

$$\dot{z} = F(z) + \Omega(x, \hat{p})\{\phi_0^{-1}(z), \hat{p}\}\tilde{p}. \quad (4.19)$$

Por otro lado, de (4.18) el error paramétrico satisface

$$\dot{\tilde{p}} = -\Gamma \Omega^T(x, \hat{p}) h[\phi_0(x)]. \quad (4.20)$$

Las ecuaciones del modelo del error (4.19) y (4.20) describen completamente al sistema adaptable. Para analizar su estabilidad considérese la siguiente función de Lyapunov candidata:

$$V(z, \tilde{p}) = V_1(z) + \frac{1}{2} \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \tilde{p} \quad (4.21)$$

con $V_1(z)$ como en la proposición 4.10. Obsérvese que $V(\dots)$ es definida positiva. Diferenciando (4.21) con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias de (4.19) y (4.20) se obtiene, usando (4.17):

$$\begin{aligned} \dot{V}(z, \tilde{p}) &= \nabla V_1(z) \dot{z} + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} \\ &= \nabla V_1(z) F(z) + \nabla V_1(z) \Omega \tilde{p} + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} \\ &= -\epsilon \|h(z)\|^2 - \|l(z)\|^2 + \tilde{p}^T [\Omega^T \nabla V_1(z) + \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}}] \\ &= -\epsilon \|h(z)\|^2 - \|l(z)\|^2 + \tilde{p}^T [\Omega^T h(z) + \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}}] \\ &= -\epsilon \|h(z)\|^2 - \|l(z)\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dot{V}(z, \tilde{p}) \leq 0$. Ahora, como V es definida positiva y \dot{V} es semidefinida negativa se establece la estabilidad del equilibrio. Además, por la condición de detectabilidad uniforme del estado cero $V_1(z) \geq \beta(\|z\|)$, por lo tanto, V es radialmente no acotada y se sigue que $x \in L_\infty^n$ y $\hat{p} \in L_\infty^q$. Para probar que también se tiene regulación asintótica del estado de la planta, obsérvese que (4.19) y (4.20) es un sistema autónomo y si $\dot{V} = 0$ sólo en $z=0$;

se seguiría, del principio de invariancia de LaSalle, que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para probar esto, nótese que las trayectorias a lo largo de las cuales V es constante deben satisfacer $\dot{h}=0$. De (4.17c) esto significa que $\nabla V_1(z)=0$ y consecuentemente V_1 alcanza un mínimo. Por otro lado, de (2.22), se tiene que $V_1(z) \geq \beta(\|z\|)$ para todas las soluciones $V_1(\cdot)$ de (4.17). De esta manera, y por las características de $\beta(\cdot)$, V_1 tiene un único mínimo en $z=0$. ■

En todos los lemas y proposiciones enunciados se ha considerado el caso general en el que la incertidumbre paramétrica está presente en todas las componentes de $f_*(x)$ y de $G_*(x)$ (hipótesis 4.4). Esto obliga a imponer la condición de disipatividad entre los vectores n -dimensionales v y y . Cuando la incertidumbre aparece sólo en algunos renglones de f_* y G_* , se pueden definir vectores v y y de dimensión menor aumentando así las posibilidades de asegurar la propiedad de entrada-salida requerida.

La condición de detectabilidad uniforme del estado cero, es esencial para probar estabilidad asintótica globalmente en el teorema 4.11. Se ha impuesto, fundamentalmente porque, en general, las funciones de almacenamiento, que satisfacen el teorema 2.13, sólo son semidefinidas positivas.

En el siguiente capítulo se presenta una metodología de diseño para el controlador adaptable y algunos ejemplos de sistemas dinámicos no lineales, no linealizables, que son estabilizados por él.

5. METODOLOGIA DE DISEÑO Y EJEMPLOS.

En este capítulo se presenta un método para diseñar un controlador adaptable que estabiliza a una familia de sistemas no lineales de manera tal que una parte del sistema adaptable es estrictamente pasiva para una elección conveniente de la salida. Mediante algunos ejemplos se muestra la aplicación de este método. Dos secciones constituyen este capítulo. En la primera se describe el método de diseño y, en la segunda, se presentan los ejemplos y sus simulaciones.

Como se comentó en el capítulo anterior, dado un sistema dinámico no lineal

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad (5.1)$$

como en (4.4), se desconocen, hasta ahora, las condiciones que deberán satisfacer f y G de manera tal que se pueda garantizar que (5.1) satisface la definición 4.1. De hecho, ni aún en el caso monovariable se tiene una respuesta. Sin embargo, se sabe que existen una subclase de la clase de los sistemas linealizables y una clase de sistemas no linealizables que satisfacen las condiciones de dicha definición. Los ejemplos que se presentan, en la siguiente sección, apoyan estas afirmaciones.

Considérese una familia de sistemas no lineales que no son linealizables exactamente de acuerdo con el teorema 2.24, y que están descritos por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \vdots \\ f_1(x_1) \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} u \quad (5.2)$$

para alguna i tal que $1 \leq i \leq n$. Los puntos significan que pueden haber funciones

no lineales de todo el estado $x \in \mathbb{R}^n$. Con otras palabras, el sistema (5.2) está descrito de manera tal que en la i -ésima componente de $f(x)$ se tiene una función no lineal solamente en la i -ésima componente del estado x y, correspondientemente, un cero en la i -ésima componente del campo vectorial que precede a u . Sobre las funciones que definen a (5.2) se imponen las mismas condiciones que el en capítulo anterior.

La razón por la cual los sistemas descritos por (5.2) no son linealizables, es que el rango de la siguiente matriz

$$[g(x) \text{ ad}_f g(x) \dots \text{ ad}_f^{n-1} g(x)]$$

es menor que $n \forall x \in \mathbb{R}^n$. Esto viola las hipótesis del teorema 2.24. Se pierde controlabilidad en la variable de estado x_1 . Es intuitivamente claro que existen otras familias de sistemas no lineales que no son linealizables, pero el autor desconoce un procedimiento sistemático para obtenerlas.

5.1 METODO DE DISEÑO.

Considérese un sistema no lineal descrito por

$$\dot{x} = f_*(x) + g_*(x)u \tag{5.3}$$

y que satisface las hipótesis del teorema 4.11. Sean $F(\cdot)$ y $h(\cdot)$ los campos vectoriales asociados a (5.3), de acuerdo con la definición 4.1 (véase la observación 1). Un método para diseñar un controlador adaptable que estabilice al sistema (5.3) se describe mediante los siguientes pasos:

PASO 1: Reescribir al sistema a estabilizar como en (4.7) usando (4.9):

$$\dot{x} = \hat{f}(x) + \hat{g}(x)u + \Omega(x, \hat{p})\tilde{p}. \tag{5.4}$$

PASO 2: Determinar una función de almacenamiento $\phi(\cdot)$ para los campos $F(\cdot)$ y

$h(\cdot)$ propuestos (véase la observación 1 más adelante).

PASO 3: Construir una función de Lyapunov candidata para el sistema (5.4) dada por

$$V(x, \tilde{p}) = \phi(x) + \frac{1}{2} \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \tilde{p}.$$

PASO 4: Diferenciar a $V(x, \tilde{p})$ con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema (5.4).

PASO 5: Elegir u y \tilde{p} de manera tal que se obtenga

$$\dot{V}(x, \tilde{p}) = \nabla \phi(x) F(x) \leq 0.$$

Observaciones:

- 1) Por el comentario que sigue a la ecuación (5.1), los campos vectoriales $F(\cdot)$ y $h(\cdot)$ del Paso 2, se obtienen por inspección del sistema que se desea estabilizar.
- 2) En el método anterior no se ha usado en ningún paso el difeomorfismo de estado de la definición 4.1. Sin embargo, si éste se requiere, el procedimiento descrito no se modifica, ya que pueden expresarse todas las funciones en las nuevas coordenadas.
- 3) Por las hipótesis del teorema 4.11, la función de almacenamiento para el Paso 2, es definida positiva y radialmente no acotada. Sin embargo, para algunos sistemas es suficiente que ésta sea definida positiva localmente (i.e., en una vecindad de algún punto de equilibrio de interés).
- 4) Un inconveniente de este método es que, en general, no es fácil construir

la función de almacenamiento adecuada. Este problema es análogo al de encontrar una función de Lyapunov candidata para probar estabilidad del equilibrio. A pesar de esta desventaja, el conocimiento de los campos $F(\cdot)$ y $h(\cdot)$ y el criterio algebraico del teorema 2.13 sugieren dicha construcción, sobre todo cuando no se requieren los vectores completos u y $h(\cdot)$.

5) El control u en el Paso 5 se puede obtener resolviendo (4.14) con \hat{p} en lugar de p_0 ,

$$u = \hat{g}^+(x)[F(x) - \hat{f}(x)],$$

o bien, resolviendo las ecuaciones (4.11) y (4.14).

6) La propiedad de pasividad estricta está presente en los Pasos 2, 3 y 5, en los cuales se explota dicha propiedad para construir el controlador adaptable que estabiliza.

En la siguiente sección, se usa el método aquí descrito para diseñar un controlador adaptable que estabilice a la familia de sistemas no lineales descrita por (5.2).

5.2 EJEMPLOS.

En esta sección se trabaja con sistemas no lineales que no son linealizables en el sentido ya discutido. Sin embargo, se incluye un ejemplo de un sistema que es linealizable. Solamente el primer ejemplo se desarrolla con detalle.

Ejemplo 5.1. Considérese el siguiente sistema, no linealizable,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1^2 \operatorname{sen} x_1 \\ a_* x_2 - x_2 \operatorname{sen}^2 x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (5.5)$$

con un parámetro desconocido, a_* , que aparece linealmente. Supóngase, que a_* es un real positivo. En las simulaciones del sistema (5.5) se observó que, para valores positivos del parámetro a_* , el sistema es inestable. La grafica 1 muestra este hecho para $a_*=1$. Nótese, además, que el sistema (5.5) satisface la hipótesis 4.3.

El objetivo de control es estabilizar al sistema (5.5). Se diseñará un control u y una ley de adaptación para a_* , de manera tal que se verifique el objetivo de control. Se proponen por inspección, las siguientes funciones

$$F(x) = \begin{bmatrix} -x_1^2 \operatorname{sen} x_1 \\ -a x_2 - x_2 \operatorname{sen}^2 x_1 \end{bmatrix}; \quad h(x) = 2x_2,$$

con $a > 0$, para las cuales el siguiente sistema

$$\dot{x} = F(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (5.6a)$$

$$y = h(x) \quad (5.6b)$$

define un mapeo $u \rightarrow y$ estrictamente pasivo en la salida.

Se plantea la siguiente pregunta. Existirá un control u que aplicado a (5.5) resulte en el sistema descrito por $F(\cdot)$ y $h(\cdot)$?

Antes de responderla, se verificará que (5.6), efectivamente, tiene la propiedad de pasividad mencionada. Esto puede mostrarse con una función de almacenamiento $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = x_2^2 + 1 - \cos x_1 \quad (5.7)$$

y una función $l: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$l(x) = |\sin x_1| [x_1^2 + 2x_2^2]^{1/2},$$

ya que se satisfacen las condiciones del teorema 2.13. En efecto, $\phi(\cdot)$ es semidefinida positiva y

$$\nabla\phi(x)F(x) = -\varepsilon h^2(x) - l^2(x)$$

$$\nabla\phi(x)g(x) = h(x)$$

con $\varepsilon = \frac{1}{2}a > 0$. Explícitamente,

$$\nabla\phi(x)F(x) = -2ax_2^2 - (x_1^2 + 2x_2^2)\sin^2 x_1. \quad (5.8)$$

Nótese que si $a < 0$, que corresponde a $a_u > 0$ en (5.5), el sistema (5.6) no será estrictamente pasivo en la salida elegida. Por otro lado, $\forall x \in S$ con

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < x_1 < \pi, x_2 \in \mathbb{R} \}, \quad (5.9)$$

la función de almacenamiento $\phi(\cdot)$ es definida positiva y $\dot{\phi} < 0$. Por lo tanto, el equilibrio $x=0$ del sistema (5.6a), con $u=0$, es localmente asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov $\forall x \in S$.

Con respecto a la pregunta formulada antes, considérese, inicialmente, el caso en el que se conoce el valor verdadero de a_u . Entonces, una elección de u que satisface el objetivo de control es el siguiente

$$u = -(a + a_*)x_2, \quad (5.10)$$

pues aplicado a (5.5) resulta en el sistema (5.6). Un control de equivalencia cierta \hat{u} para (5.5), se obtiene de (5.10) reemplazando a_* por su estimado \hat{a} :

$$\hat{u} = -(a + \hat{a})x_2. \quad (5.11)$$

Aplicando (5.11) a (5.5) se obtiene

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1^2 \text{sen} x_1 \\ -ax_2 - x_2 \text{sen}^2 x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \tilde{a}, \quad (5.12)$$

en donde $\tilde{a} \triangleq a_* - \hat{a}$. Como se desconoce el valor verdadero de a_* , se buscará una ley de adaptación usando la siguiente función de Lyapunov candidata

$$V(x, \tilde{a}) = \phi(x) + \frac{1}{2}\tilde{a}^2 \quad (5.13)$$

con $\phi(\cdot)$ está dada por (5.7). Diferenciando a (5.13) con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias de (5.12) se tiene

$$\dot{V}(x, \tilde{a}) = -2ax_2^2 - x_1^2 \text{sen}^2 x_1 - 2x_2^2 \text{sen}^2 x_1 + \tilde{a}(2x_2^2 + \dot{\tilde{a}}).$$

Ahora, eligiendo $\dot{\tilde{a}} = -2x_2^2$ se tiene que $\dot{V}(x, \tilde{a}) \leq 0$, que es igual a (5.8). De esta manera, el sistema adaptable es

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1^2 \text{sen} x_1 \\ -ax_2 - x_2 \text{sen}^2 x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \tilde{a}, \quad (5.14a)$$

$$\dot{\tilde{a}} = -2x_2^2. \quad (5.14b)$$

De (5.13) y de $\dot{V} \leq 0$, se tiene que \tilde{a} está acotada y que $\forall x(0) \in S$ se cumple que $x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Se mostrará, en seguida, que se puede obtener (5.11) empleando las expresiones (4.11) y (4.14). En términos de la incertidumbre paramétrica, se puede reescribir a (5.5) como sigue

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1^2 \operatorname{sen} x_1 \\ \hat{a} x_2 - x_2 \operatorname{sen}^2 x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \tilde{a}. \quad (5.15)$$

Se obtendrá $\hat{u} = \hat{\alpha}(x)$, precalculando $\alpha_0(x)$. Para esto, se calcula

$$\hat{\alpha}(x) = \alpha_0(x) + g^+(x) \tilde{f}_0(x) \quad (5.16)$$

con

$$\alpha_0(x) = g_0^+(x) [F(x) - f_0(x)]$$

y

$$\tilde{f}_0(x) = [0 \ x_2]^T (a_0 - \hat{a}).$$

Entonces,

$$\alpha_0(x) = -(a + a_0)x_2 \quad (5.17)$$

y usando (5.17) en (5.16) se llega a que $\hat{\alpha}(x) = -(a + \hat{a})x_2$. El control obtenido por este procedimiento es, precisamente, el control pseudoinverso del capítulo anterior.

Se verá, ahora, que el desarrollo expuesto está comprendido en el método de diseño discutido en la sección anterior.

Paso 1: Es el sistema (5.15).

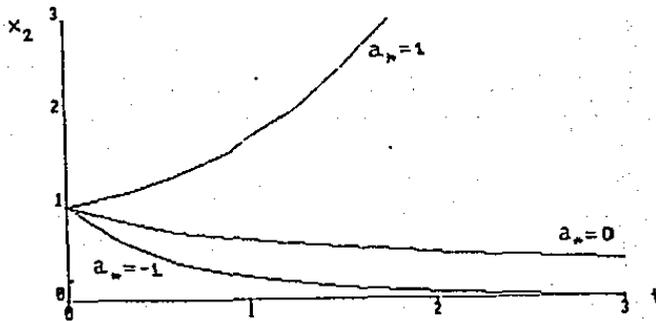
Paso 2: Es la función $\phi(\cdot)$ dada en (5.7).

Paso 3: Es la ecuación (5.13).

Paso 4: $\dot{V}(x, \tilde{a}) = -x_1^2 \sin^2 x_1 - 2x_2^2 \sin^2 x_1 + 2\tilde{a}x_2^2 + 2x_2 u + \tilde{a}(2x_2^2 + \tilde{a})$.

Paso 5: Ecuaciones (5.11) y (5.14b).

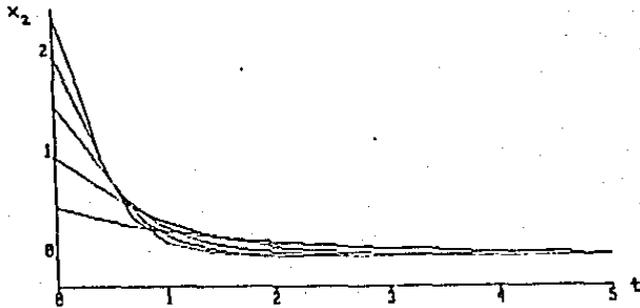
Se presentan a continuación las gráficas de las simulaciones para el ejemplo 1. La gráfica 1 corresponde al sistema (5.5) en malla abierta y, se muestra a x_2 vs t , para diferentes valores de a_* , con condiciones iniciales: $x_1(0)=x_2(0)=1$. No se presenta la gráfica de x_1 vs t , porque esta parte del sistema, que no es controlable, es estable (esto se observó en las simulaciones). Por otro lado, si x_1 es inestable, el sistema (5.5) no se puede estabilizar con el control propuesto.



Gráfica no. 1

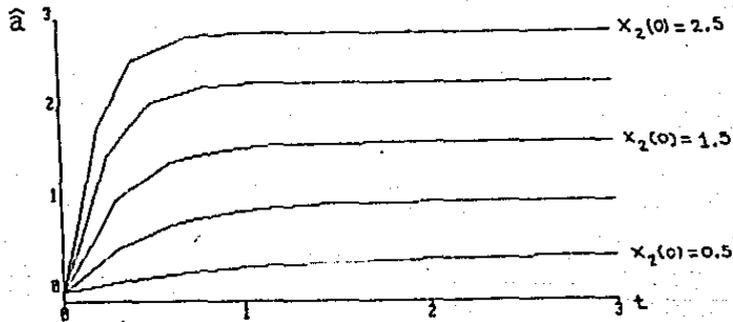
La gráfica 2, concierne al sistema adaptable (5.14), con \hat{a} en lugar de \tilde{a} . Se graficó x_2 vs t para diferentes condiciones iniciales en x_2 ; con $x_1(0)=1$, $a=1$

y $\hat{a}(0)=0$.



Gráfica no. 2

La gráfica 3, muestra a \hat{a} vs t . Esta gráfica se corresponde con la anterior, con $x_1(0)=1$, $a_s=1$, $\hat{a}(0)=0$ y las mismas condiciones iniciales para x_2 que en la gráfica 2. Obsérvese que \hat{a} no converge a a_s , pero permanece acotada.

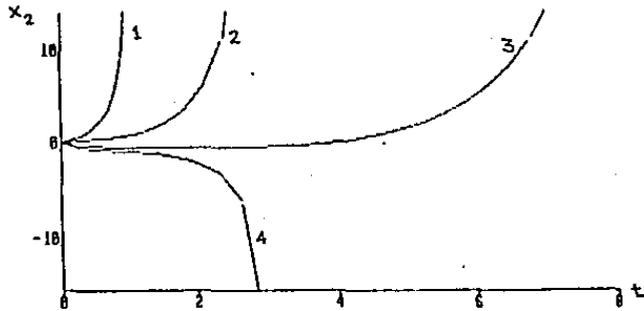


Gráfica no. 3

Ejemplo 5.2 Considérese el siguiente sistema no lineal

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ a_1(x_2-x_1)+b_1x_1^2(x_2-x_1)+c_1x_1x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_1^2 \end{bmatrix} u \quad (5.18)$$

con a_1 , b_1 y c_1 parámetros desconocidos. Los valores de estos parámetros son positivos. La gráfica 4 muestra a x_2 vs t para diferentes combinaciones de los valores de los parámetros, para los cuales (5.18) es inestable. En esa gráfica $x_1(0)=x_2(0)=1$ [1: $a_1=b_1=c_1=1$; 2: $a_1=c_1=1$, $b_1=-5$; 3: $a_1=1$, $b_1=c_1=-5$; 4: $a_1=b_1=1$, $c_1=-5$]. Se aplica el método de diseño al sistema (5.18) para estabilizarlo.



Gráfica no. 4

PASO 1:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ \hat{a}_1(x_2-x_1)+\hat{b}_1x_1^2(x_2-x_1)+\hat{c}_1x_1x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_1^2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2-x_1 & x_1^2(x_2-x_1) & x_1x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

PASO 2: Se proponen, por inspección, los siguientes campos:

$$F(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 - x_2x_1^2 \end{bmatrix}; \quad h(x) = x_2; \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

El sistema: $\dot{x}=F(x)+v$; $y=h(x)$, define un operador $v \rightarrow y$ estrictamente pasivo en la salida. Con la función de almacenamiento $\phi(x)=\frac{1}{2}x^T x$, se tiene

$$\nabla\phi(x)F(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_1^2 x_2^2. \quad (5.19)$$

PASO 3: $V(x, \tilde{p}) = \phi(x) + \frac{1}{2}\tilde{p}^T \tilde{p}.$

PASO 4:
$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \tilde{p}) = & -x_1^2 + \hat{a}x_2(x_2 - x_1) + \hat{b}x_2x_1^2(x_2 - x_1) + \hat{c}x_1x_2^3 + x_2(1+x_1^2)u + \\ & + \tilde{a}x_2(x_2 - x_1) + \tilde{b}x_2x_1^2(x_2 - x_1) + \tilde{c}x_1x_2^3 + \tilde{p}^T \tilde{p}. \end{aligned}$$

PASO 5: Con u y \tilde{p} elegidos de la siguiente manera

$$u = (1+x_1^2)^{-1}[-x_2 - x_1^2x_2 - \hat{a}(x_2 - x_1) - \hat{b}x_1^2(x_2 - x_1) - \hat{c}x_1x_2^3]$$

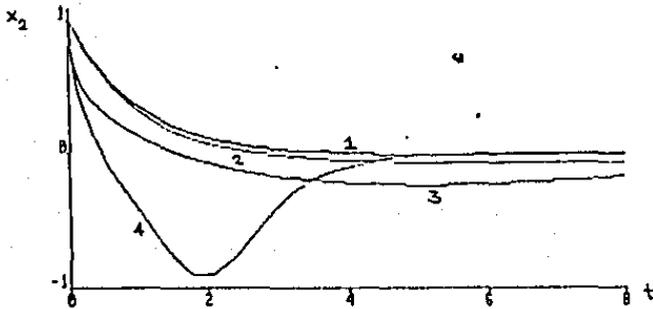
$$\dot{\tilde{p}} = - \begin{bmatrix} x_2(x_2 - x_1) \\ x_2x_1^2(x_2 - x_1) \\ x_1x_2^3 \end{bmatrix}$$

se obtiene (5.19). El sistema adaptable está dado por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 - x_2x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 - x_1 & x_1^2(x_2 - x_1) & x_1x_2^2 \end{bmatrix} \tilde{p}$$

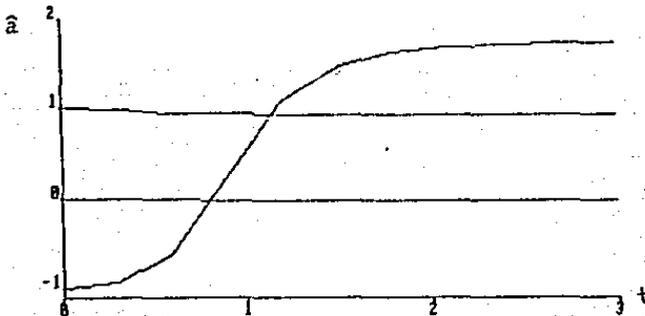
$$\dot{\tilde{p}} = - \begin{bmatrix} x_2(x_2 - x_1) \\ x_2x_1^2(x_2 - x_1) \\ x_1x_2^3 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

La gráfica 5 muestra a x_2 vs t del sistema adaptable (5.20), para las mismas combinaciones de los parámetros de la gráfica 4. Se observa que el objetivo de control se verifica. Las condiciones iniciales son: $x_1(0)=x_2(0)=1$, $\hat{a}(0)=\hat{b}(0)=\hat{c}(0)=0$.

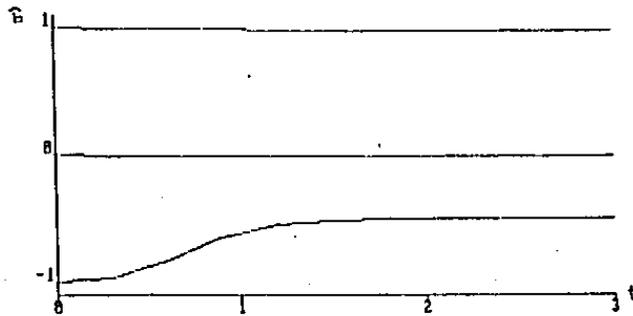


Gráfica no. 5

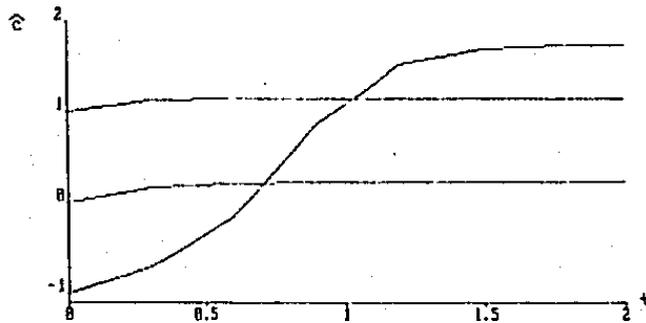
Las gráficas 6, 7 y 8, muestran a \hat{a} , \hat{b} y \hat{c} vs t , respectivamente, para las condiciones iniciales siguientes: $x_1(0)=x_2(0)=1$; $a_0=b_0=c_0=1$. En estas gráficas se variaron las condiciones iniciales para los estimados.



Gráfica no. 6



Gráfica no. 7



Gráfica no. 8

Ejemplo 5.3. El siguiente sistema no lineal, con parámetro desconocido $a_1 > 0$, es linealizable,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ a_1 x_2 - x_2 x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (5.21)$$

Siguiendo el método de diseño, se tiene que, con $F(\cdot)$, $h(\cdot)$ y $\phi(\cdot)$ del ejemplo 2, un control u y una ley de adaptación para (5.21) son las expresiones (5.11), con $a=1$, y $\dot{\hat{a}} = -x_2^2$, respectivamente. El sistema adaptable

está dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ -x_2 - x_2 x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \tilde{a}, \quad \dot{\tilde{a}} = -x_2^2.$$

Los ejemplos que se han presentado en esta sección, muestran la existencia de una clase de sistemas no lineales que, pueden ser o no linealizables. Para estos es posible diseñar un controlador adaptable estabilizante. Una parte del sistema adaptable en malla cerrada tiene la propiedad de ser estrictamente pasivo para una elección conveniente de la salida.

6. CONCLUSIONES.

Se presentan dos secciones en este capítulo. En la primera se discuten los resultados obtenidos y, en la última, se enuncian algunos problemas de interés, relacionados con este trabajo, para investigaciones futuras.

6.1 DISCUSION.

El resultado principal de este trabajo es la determinación de un controlador y una ley de adaptación paramétrica que permiten garantizar la estabilidad del equilibrio x_e , para una familia de sistemas no lineales que incluye, sistemas no linealizables y, en algún sentido conveniente, a todos los sistemas linealizables. En particular, se mostró que para los sistemas linealizables existe una salida para la cual, la función de transferencia del sistema linealizado en malla cerrada, $K(s)$, es SPR. Entonces, con esta $K(s)$ y un estimador en el lazo de realimentación se puede probar estabilidad del modelo del error usando métodos conocidos [36].

Como parte del procedimiento de diseño del controlador adaptable estabilizante, se ha utilizado una versión no lineal del lema de Kalman-Yacubovich-Popov obtenida en [7].

El autor desconoce, por el momento, qué tan grande es la familia de sistemas no lineales a la cual se aplica el resultado obtenido en la tesis. Sin embargo, mediante algunos ejemplos se muestra que esta familia es no vacía.

Por otro lado, dado que disipatividad es una propiedad del sistema descrito en la representación de entrada-salida, el difeomorfismo de estado que se incluye en la definición de la clase \mathcal{D} , no es esencial en el sentido de que determine o no la existencia de dicha propiedad. Se ha incluido porque puede ser más conveniente trabajar en un sistema de coordenadas en el cual las

6. Conclusiones

funciones que describen a los sistemas sean más simples. Los lemas y las proposiciones demostrados en el capítulo 4 no se alteran si, como caso particular del difeomorfismo Φ , se elige el difeomorfismo identidad.

El método de diseño presentado en el capítulo 5 se puede aplicar a sistemas no lineales que pueden ser tanto linealizables como no linealizables. Los pasos que los forman son, con excepción del segundo, relativamente fáciles y directos de seguir. El inconveniente de dicho paso es que, en general, es difícil determinar una función de almacenamiento para asegurar que un sistema no lineal, como los descritos en este trabajo, tenga la propiedad de disipatividad deseada. Este problema es análogo al de elegir una función de Lyapunov para estudiar la estabilidad de un punto de equilibrio del sistema. Por el momento no se tiene un método para especificar a los campos $F(\cdot)$ y $h(\cdot)$. Estos se escogen por inspección del sistema a estabilizar. Además, este procedimiento de diseño incluye implícitamente al control pseudoinverso descrito en el capítulo 4.

Las simulaciones de los ejemplos que se presentan en el capítulo 5, muestran el efecto del controlador adaptable estabilizante en los sistemas originalmente inestables. Se observa que \hat{p} no converge a p_* , pero permanece acotado. De hecho, \hat{p} converge a algún valor de manera tal que el objetivo de control se cumple.

En el trabajo de simulación se observó que, para diferentes sistemas analizados, la regulación del estado sólo se conseguía en una vecindad del punto de equilibrio, $x_0 = 0$. Y que, ésta, dependía de las condiciones iniciales tanto del estado del sistema como del vector de parámetros estimados.

6.2 DIRECCIONES FUTURAS DE INVESTIGACION.

Quedan varios problemas y preguntas para resolver en el futuro, relacionados con este trabajo. Sólo se mencionan algunos de los que se consideran

importantes.

1. Un problema no trivial que queda por resolver, es la caracterización de la familia de sistemas no lineales para la cual existe un control u tal que el sistema, en malla cerrada, sea estrictamente pasivo para una salida convenientemente elegida. En términos de la definición 4.1, lo anterior se puede plantear de la siguiente manera: Qué condiciones deben satisfacer los campos $f(\cdot)$ y $G(\cdot)$, que definen al sistema no lineal, para garantizar la existencia de un control u que lleve al sistema, en malla cerrada, a uno estrictamente pasivo en la salida?

2. Relajar la hipótesis de estructura semejante. Lo que implica caracterizar de otra forma la incertidumbre paramétrica de manera tal que al objetivo de control todavía se verifique.

3. Estudiar la robustez del esquema de control propuesto cuando están presentes dinámicas no modeladas. En otras palabras, caracterizar las dinámicas no modeladas para las cuales se verifica el objetivo de control aún en presencia de éstas.

4. Vincular este trabajo con otras áreas en las que se está explotando la propiedad de pasividad de los sistemas no lineales en estudio, por ejemplo, los sistemas Hamiltonianos.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] V.I. Arnold, "*Mathematical Methods of Classical Mechanics*", Springer - Verlag, 1980.
- [2] J.C. Willems, "The generation of Lyapunov functions for input-output stable systems", *SIAM J. Control* vol. 9 no. 1, 105-134, 1971.
- [3] J.C. Willems, "Dissipative dynamical systems, part I: General theory; part II: Linear systems with quadratic supply rates", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. 45, no. 5, 321-193, 1972.
- [4] D. Hill & P.J. Moylan, "Dissipative dynamical systems: basic input-output and state properties", *J. Franklin Inst.*, vol. 309, no. 5, 327-357, 1980.
- [5] C.A. Desoer & M. Vidyasagar, "*Feedback Systems: Input-Output Properties*", Academic Press, 1975.
- [6] D.J. Hill & P.J. Moylan, "Stability results for nonlinear feedback systems", *Automatica* vol. 13, 377-382, 1977.
- [7] D. Hill & P.J. Moylan, "The stability of nonlinear dissipative systems", *IEEE TAC*, AC-21, 708-711, 1976.
- [8] B.D.O. Anderson & S. Vongpanitlerd, "*Network Analysis and Synthesis*", Prentice Hall, 1973.
- [9] K.S. Narendra & J.H. Taylor, "*Frequency Domain Criteria for Absolute Stability*", Academic Press N.Y., 1973.

Bibliografia

- [10] G. Tao & P.A. Ioannou, "Strictly positive real matrices and the Lefschetz-Kalman-Yakubovich lemma", IEEE TAC AC-33 no. 12, 1183-1185, 1988.
- [11] P.A. Ioannou & G. Tao, "Frequency domain conditions for strictly positive real functions", IEEE TAC AC-32 no. 1, 53-54, Jan. 1987.
- [12] J.T. Wen, "Time domain and frequency domain conditions for strict positive realness", IEEE TAC AC-33 no. 10, 988-992, Oct. 1988.
- [13] W. Boothby, "*An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*", Academic Press, 1975.
- [14] R. Su, "On the linear equivalents of nonlinear systems", Syst. Contr. Lett., vol. 2, no. 1, 48-52, 1982.
- [15] A. Isidori, "*Nonlinear Control Systems: An Introduction*", Lecture Notes in Control and Information Sciences no. 72, Springer-Verlag, 1985.
- [16] K.S. Narendra & A.M. Annaswamy, "*Stable Adaptive Systems*", Prentice Hall, 1989.
- [17] K.J. Astrom, "Theory and applications of adaptive control -a survey", Automatica vol. 19 no. 5, 471-486, 1983.
- [18] K.J. Astrom, "Adaptive feedback control", Proc. IEEE vol. 75 no. 2, 185-217, 1987.
- [19] K. Nam & A. Arapostathis, "A model reference adaptive control scheme for pure-feedback nonlinear systems", IEEE TAC AC-33 no. 9, 803-811, 1988.
- [20] S.S. Sastry & A. Isidori, "Adaptive control of linearizable systems", Univ. of Cal. Berkeley, Ca., Memo. UCB/ERL M87/53, 1987

Bibliografía

- [21] S.S. Sastry & P.V. Kokotovic, "Feedback linearization in the presence of uncertainties", *Int. J. Adapt. Cont. & Sign. Proc.*, Dec. 1988.
- [22] D.G. Taylor, P.V. Kokotovic, R. Marino & I. Kanellakopoulos, "Adaptive regulation of nonlinear systems with unmodeled dynamics", *IEEE TAC AC-34* no. 4, pp. 405-411, April 1989.
- [23] G. Meyer & L. Cicolani, "Application of nonlinear system inverses to automatic flight control design-systems concepts and flight evaluations", *AGARDograph 251 on Theory and Applications of Optimal Control in Aerospace Systems*, P. Kent Ed. reprinted by NATO, 1980.
- [24] G. Meyer, R. Su & L.R. Hunt, "Application to nonlinear transformations to automatic Flight control", *Automatica* vol. 20, 103-107, 1984.
- [25] J.J. Craig, P. Hsu & S. Sastry, "Adaptive control of mechanical manipulators", *Int. J. Robotics Res.*, vol. 6, 15-28, summer 1987.
- [26] R. Su & L.R. Hunt, "A canonical expansion for nonlinear systems", *IEEE TAC AC-31*, 670-673, July 1986.
- [27] R. Marino & P.V. Kokotovic, "A geometric approach to nonlinear singularly perturbed control systems", *Automatica* vol. 1, 31-42, 1988.
- [28] J.J. Slotine & W. Li, "On the adaptive control of robot manipulators", *Int. J. of Rob. Res.*, vol. 6 no.3, 1987.
- [29] R. Ortega & M.W. Spong, "Adaptive motion control of rigid robots: a tutorial", 27th IEEE CDC, 1989. (Para ser publicado en: *Automatica*, Dec. 1989).

- [30] J.D. Charlton & J.J. Brickley, "Passive control of a hydraulic valve", American Control Conference, June 21-23, Pittsburgh, Penn., USA, 1989.
- [31] J.T. Wen, "Controller synthesis for infinite dimensional systems based on passivity approach", American Control Conference, June 21-23, Pittsburgh, Penn., USA, 1989.
- [32] J. van de Vegte, "Design of passive beam vibration controls by multi-variable frequency domain control techniques", American Control Conference, June 21-23, Pittsburgh, Penn., USA, 1989.
- [33] J.J. Slotine, "Adaptive control of space-based manipulators", American Control Conference, June 21-23, Pittsburgh, Penn., USA, 1989.
- [34] S. Sastry & M. Bodson, "*Adaptive Control*", Prentice-Hall, 1989.
- [35] R. Kelly, R. Ortega & R. Carelli, "Adaptive motion control design of robot manipulators: an input-output approach", Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation, Philadelphia, USA, 1988.
- [36] B.D.O. Anderson, R.R. Bitmead, C.R. Johnson, Jr., P.V. Kokotovic, R.L. Kosut, I.M.Y. Mareels, L. Praly & B.D. Riedle, "*Stability of Adaptive Systems: Passivity and Averaging Analysis*", The MIT Press, 1986.

APENDICE

ADAPTIVE STABILIZATION OF NONLINEAR SYSTEMS: THE NON-FEEDBACK LINEARIZABLE CASE

Alejandro Rodriguez and Romeo Ortega
National University of Mexico
DEPFI-UNAM
P.O. Box 70-256
04510, Mexico, D.F.
MEXICO

Abstract. In this paper we show that the recent results of Taylor, et al, [1] on adaptive regulation of nonlinear feedback linearizable systems can be extended to handle also a class of non-feedback linearizable systems. This class, which is shown to contain all feedback linearizable plants, consists of systems for which there exists a state feedback control such that the closed loop system defines a strictly passive map.

I. INTRODUCTION

Adaptive control of nonlinear systems has been the object of a fair amount of study recently. Two different avenues of research have been pursued for this problem. The first one is motivated by the concern of "robustifying" feedback linearization techniques that rely on exact cancellation of nonlinear terms. The authors consider parametric uncertainty on the plant and, assuming it is feedback linearizable and the uncertain parameters enter linearly, design a "certainty equivalent" adaptive controller. In [1] the case of plants with singular perturbations is studied under the assumptions that the reduced plant is full state linearizable and satisfies a "matching condition". The latter assumption insures that the state transformation, to the set where feedback linearization is attained, is independent of parametric uncertainty. An adaptive control law with the standard gradient update law is shown to provide state regulation for a specified range of parasitics and a set of initial conditions. The result is global if there are no unmodelled dynamics. In [2] full state linearizable systems in block triangular form are considered. In [3] the more general case of adaptive tracking for input-output linearizable systems is addressed. The stability results do not rely on the matching condition mentioned above. A complete answer is given for systems with relative degree one. However, for the general case some fairly restrictive assumptions on the regressors dependence on the state are needed to complete the stability proof. A similar analysis is used in [4] to consider the case of fast parasitics. Other results concerning nonlinear singularly perturbed systems may be found in [5].

The second avenue of research, mostly motivated by the robotics problem, exploits the energy dissipation (passivity) properties of the system to devise a suitable controller which does not attempt to linearize the equations but preserve its passivity. This approach was first advocated in [6] and later exploited by several authors to solve various robotic problems.

In this paper we follow the second approach to extend the results of [1] to the case of plants which are not necessarily feedback linearizable but possess some passivity properties. Specifically, we replace the assumption of

feedback linearization in [1] for the existence of a change of coordinates, an output and a state feedback control such that the closed loop system defines a strictly passive map [7]. It is shown in the paper that this class strictly contains the class of feedback linearizable systems. The key technical device to establish the stability proof is the generalized Kalman-Yakubovich-Popov lemma of [8]. We restrict our attention to the case where no dynamic uncertainty is present and consider only global properties.

II. NOTATION AND DEFINITIONS

The following notation will be used throughout the paper. Given vector functions of time, e.g. $v, y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, we define the inner product

$$\langle v | y \rangle_T \triangleq \int_0^T v^T(\tau) y(\tau) d\tau$$

and the truncated \mathcal{L}_2 norm

$$\|v\|_{2,T}^2 = \langle v | v \rangle_T$$

The Jacobian of a vector function $\phi(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is denoted by

$$\phi_x(x) \triangleq \frac{\partial \phi}{\partial x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

and the gradient of a scalar function $V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is

$$\nabla_x V(x) \triangleq \frac{\partial V(x)}{\partial x} \in \mathbb{R}^n$$

In the paper we consider functions $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ of state $x \in \mathbb{R}^n$ and a parameter vector. The latter may be fixed $P_*, P_0 \in \mathbb{R}^q$, (the true plant parameters and an a priori estimate respectively), or time varying $\hat{P}(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^q$ (the current on line estimate). We will denote

$$f_*(x) \triangleq f(x, P_*), \quad G_*(x) \triangleq G(x, P_*)$$

$$f_0(x) \triangleq f(x, P_0), \quad G_0(x) \triangleq G(x, P_0)$$

$$\hat{f}(x) \triangleq f(x, \hat{P}(t)), \quad \hat{G}(x) \triangleq G(x, \hat{P}(t))$$

$$\tilde{f}(x) \triangleq f_*(x) - \hat{f}(x), \quad \tilde{G}(x) \triangleq G_*(x) - \hat{G}(x)$$

$$\bar{f}_0(x) \triangleq f_0(x) - \hat{f}(x), \quad \bar{G}_0(x) \triangleq G_0(x) - \hat{G}(x)$$

The parameter error is denoted as usual by

$$\bar{p} \triangleq p - \hat{p}$$

The definition below determines the class of systems that we consider in the paper.

Definition 2.1. Consider the dynamic system

$$\dot{x} = f_*(x) + G_*(x)u \quad (2.1)$$

where the functions f_* and G_* are bounded and differentiable with respect to its arguments. Furthermore, we assume the system to be reachable from the origin and

$$f_*(0) = 0, \quad \forall p_* \in \mathbb{R}^q$$

that is, $x=0$ is an equilibrium for all parametrizations of the plant.

We say $y=h(z): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a class \mathcal{D} output for system (2.1) if it has the following properties:

- i) $h(0)=0$ and h is smooth (i.e. of class C^∞)
- ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall p_* \in \mathbb{R}^q$ there exists a state diffeomorphism

$$z = \phi(x, p_*), \quad \phi(0, p_*) = 0$$

and a smooth state feedback control

$$u = \alpha(x, p_*), \quad \alpha(0, p_*) = 0$$

such that, the dynamic system

$$\dot{z} = F(z) + v \quad (2.2a)$$

$$y = h(z) \quad (2.2b)$$

$$F[\phi(x, p_*)] = \phi_x(x, p_*) [f(x, p_*) + G(x, p_*)\alpha(x, p_*)] \quad (2.2c)$$

defines an output strictly passive operator $v \rightarrow y$. That is, along the trajectories of (2.2) with $z(0)=0$

$$\langle v | y \rangle_T \geq K \|y\|_{2,T}^2, \quad \forall T \in \mathbb{R}_+, \quad \forall v \in \mathcal{L}_{2e}^n$$

for some $K > 0$.

iii) The system (2.2) is uniformly zero state detectable. That is, for all solutions of

$$\dot{z} = F(z), \quad z(0) = z_0$$

there exists a class K function $\beta(\cdot)$ and a constant t_1 such that

$$\|y\|_{2,t_1} \geq \beta(\|z\|)$$

Remark 2.1. The class of systems that admit class \mathcal{D} outputs can be roughly defined as those for which there exists a control such that the closed loop system is (output strictly) passive. Proposition 2.1 below shows that it strictly contains all feedback linearizable systems. For this case it is sufficient to show that the corresponding transfer function is strictly positive real. Further comments on the remaining conditions may be found in Remark 2.3.

Remark 2.2. Even though passivity is an input-output property independent of the state coordinates, we include in the definition above a state diffeomorphism to facilitate the construction of the functions required to establish passivity. See [8,9] and Proposition 2.2 below for further details.

Proposition 2.1. All feedback linearizable systems admit an output y such that the operator $v \rightarrow y$ is strictly positive real.

Proof. For feedback linearizable systems (2.2c) reduces to

$$\dot{F}(z) = Az$$

for some Hurwitz matrix A . Now, solve the Lyapunov equation

$$A^T P + PA = -Q, \quad Q = Q^T > 0$$

and set

$$y = Pz$$

The proof is completed invoking the KYP lemma for strictly positive real transfer functions and noting that the input matrix of (2.2a) is the identity.

The key technical device for our work is the generalized KYP lemma established in [9], see also [8]. A particular version, suitable for our purposes, is stated below.

Proposition 2.2. Assume $y=h(z)$ is a class \mathcal{D} output for system (2.1). Then, for all $z \in \mathbb{R}^n$ there exist real functions $V_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ and $\ell: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ (for some $p \in \mathbb{Z}^+$) satisfying

$$V_1(z) > 0, \forall z \neq 0, V_1(0) = 0 \quad (2.3a)$$

$$\nabla_z^T V_1(z) F(z) = -K \|h(z)\|^2 - \|\ell(z)\|^2 \quad (2.3b)$$

$$\nabla_z V_1(z) = h(z) \quad (2.3c)$$

Remark 2.3. The condition of zero state detectability of (2.2) is needed to insure that the function V_1 , which will be used as a term of a Lyapunov function candidate, is positive definite, in the sense (2.3a). See Lemma 1 of [9]. As will become clear below, the uniform qualifier is essential to establish asymptotic regulation of the plant state.

III. MAIN RESULT

Our main stability result is presented in the form of a proposition below.

Proposition 3.1. Consider the system

$$\dot{x} = f_0(x) + G_0(x)u \quad (3.1)$$

which satisfies the conditions given in Definition 2.1. Assume

A.1 $\exists y=h(z): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ of class \mathcal{D} for system (3.1)

A.2 For every $P_0, \hat{P} \in \mathbb{R}^q$ and $x \in \mathbb{R}^n$ the vector \tilde{f} and the columns \tilde{g}_i of \tilde{G} satisfy

$$\tilde{f}(x), \tilde{g}_i(x) \in \text{span}(\hat{g}_1(x), \hat{g}_2(x), \dots, \hat{g}_m(x)), \quad i=1, 2, \dots, m$$

A.3 For all $x \in \mathbb{R}^n$ and every $P_0, \hat{P} \in \mathbb{R}^q$ there exists $n \times q$ matrices $\phi_i(x)$ such that

$$\tilde{f}(x) = \phi_0(x) \hat{P} \quad (3.2a)$$

$$\tilde{g}_i(x) = \phi_i(x) \hat{P}, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (3.2b)$$

Under these conditions the control law

$$u = \alpha(x, P_0) + (G_0^T G_0)^{-1} G_0^T(x) [\tilde{f}_0(x) + \tilde{G}_0(x) \alpha(x, P_0)] \quad (3.3a)$$

$$\alpha(x, P_0) = (G_0^T G_0)^{-1} G_0^T(x) (\phi_x^{-1}(x, P_0) F[\phi(x, P_0) - f_0(x)]) \quad (3.3b)$$

with parameter update

$$\dot{\hat{P}} = \Gamma \Omega^T(x) h[\phi(x, P_0)], \quad \Gamma = \Gamma^T > 0, \quad \hat{P}(0) = P_0 \quad (3.4a)$$

$$\Omega(x) \triangleq \phi_x(x, P_0) [\varphi_0(x) + \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) u_i] \quad (3.4b)$$

yields a globally convergent adaptive system, that is

$$x \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty, \quad x \in \mathcal{X}_{\infty}^n, \quad \hat{P} \in \mathcal{Y}_{\infty}^q$$

Furthermore, the equilibrium $x=0, \hat{P}=P^*$ is stable (in the sense of Lyapunov).

Proof. Using the notation of Section II in (3.1)

$$\dot{z} = \phi_x(x) [\tilde{f}(x) + \hat{F}(x) + \tilde{G}(x)u + \hat{G}(x)u]$$

which after replacement of (3.3) and using assumption A.1 yields

$$\dot{z} = F(z) + \phi_x(x) \{-\tilde{f}_0(x) - \tilde{G}_0(x)\alpha(x, P_0) + \hat{G}(x)[u - \alpha(x, P_0)] + \tilde{f}(x) + \tilde{G}(x)u\} \quad (3.5)$$

As shown in Proposition 5 of [1] the matching condition A.2 insures

$$\tilde{f}_0(x) + \tilde{G}_0(x)\alpha(x, P_0) = \hat{G}(x)[u - \alpha(x, P_0)] \quad (3.6)$$

Thus, (3.5) reduces to

$$\dot{x} = \phi_x^{-1}(x) \{F[\phi(x, P_0)] + \Omega(x)\hat{P}\} \quad (3.7)$$

where we have used the linear parametrization assumption A.3 and (3.6). On the other hand, from (3.4a) we see that the parameter error satisfies

$$\dot{\tilde{P}} = -\Gamma \Omega^T(x) h[\phi(x, P_0)] \quad (3.8)$$

The error equations (3.7), (3.8) fully describe the adaptive system. To study its stability consider the Lyapunov function candidate

$$V = V_1 + \frac{1}{2} \tilde{P}^T \Gamma^{-1} \tilde{P} \geq 0, \quad V(0) = 0$$

with V_1 as in Proposition 2.2. Taking its time derivative along the solutions of (3.7), (3.8) gives

$$\dot{V} = -K \|h(z)\|^2 - \|\ell(z)\|^2$$

where we have used (2.3) to obtain the last expression. Observing that V is positive definite and \dot{V} is negative semidefinite establishes stability of the trivial equilibrium. Further, since V is radially unbounded, it also shows the boundedness of the full state. To prove asymptotic regulation of the plant state, notice that (3.7), (3.8) is autonomous and, if we can show that $V=\text{constant}$ implies $z=0$, LaSalle's invariance principle can be invoked to show that $x \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$. To this end, notice that the trajectories along which V is constant must satisfy $\dot{h}=0$. From (2.3c) this implies that $\forall V_1=0$ and consequently V_1 attains a minimum. On the other hand, it can be shown [8] that the assumption of uniform zero state detectability of (2.2) implies

$$V_1(z) \geq \beta(\|z\|)$$

for all solutions V_1 of (2.3). Thus, V_1 has a unique minimum at $z=0$, since $\beta(\cdot)$ is strictly monotone increasing. This completes the proof. ■ ■ ■

Remark 3.1. In the discussion above we have considered the general case where parametric uncertainty is present in all the components of f^* and G^* , see (3.2). This leads us to impose the passivity property between the n -dimensional vectors v and y . In the case when uncertainty enters only in some rows of f^* and G^* , lower dimensional vectors v and y may be defined increasing the chances to insure the required input-output property.

IV. CONCLUDING REMARKS

We have shown that the feedback control design methodology of [1] can be extended to a class that includes plants which are not feedback linearizable. The class, which with an obvious abuse of language may be referred as "passivizable", contains all feedback linearizable systems. Therefore, it defines a broader family than the ones considered in [1] and contains plants disallowed in the existing literature [2]-[5]. Similarly to [1], the main drawback of our approach is the requirement of the overly restrictive matching conditions. It is argued in [1] that treating parts of the plant as fast parasitics, makes such an assumption more realistic. It is our belief that this additional ingredient can be incorporated in the present formulation.

REFERENCES

- [1] D. Taylor, P. Kokotovic, R. Marino and I. Kanellakopoulos, "Adaptive Regulation of Nonlinear Systems with Unmodeled Dynamics", *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol. AC-34, No. 4, April 1989.
- [2] K. Nam and A. Arapostathis, "A model reference adaptive control for pure feedback nonlinear systems", *IEEE Trans. Aut. Cont.*, Vol. AC-33, Sept. 1988.
- [3] S. Sastry and A. Isidori, "Adaptive control of linearizable systems", Univ. of Cal. Berkeley, CA, Memo. UCB/ERL m87/53, March 1988.
- [4] S. Sastry and P. Kokotovic, "Feedback linearization in the presence of uncertainties", *Int. J. Adapt. Cont. & Sign. Proc.*, Dec. 1988.
- [5] A. Fradkov, "Synthesizing adaptive control systems for nonlinear singularly perturbed objects", *Aut. & Rem. Cont.*, No. 6, 1987.
- [6] J. J. Slotine and W. Li, "On the adaptive control of robot manipulators", *Int. J. of Rob. Res.*, Vol. 6, No. 3, 1987.
- [7] J. C. Willems, "The analysis of feedback systems", MIT Press, 1970.
- [8] P. Moylan, "Implications of passivity in a class of nonlinear systems", *IEEE Trans. Aut. Cont.*, Vol. AC-19, No. 4, Aug. 1974.
- [9] D. Hill and P. Moylan, "The stability of nonlinear dissipative systems", *IEEE Trans. Aut. Cont.*, Vol. AC-21, No. 5, Oct. 1976.