

37  
37

# Universidad Nacional Autónoma de México

---

FACULTAD DE CIENCIAS



ESTUDIO DE LA DENSIDAD PROYECTADA LOCAL EN  
CUMULOS DE GALAXIAS

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
**F I S I C O**  
P R E S E N T A  
PRIMITIVO PIMENTEL OROZCO

MEXICO, D. F.

1989

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

Resumen -----	1
Capítulo I. Cúmulos de Galaxias -----	5
I.1 Catálogos de cúmulos de galaxias -----	6
I.2 Propiedades de los cúmulos de galaxias -----	10
I.2.1 Grado de riqueza -----	10
I.2.2 Clasificación -----	11
I.2.3 Contenido galáctico -----	21
I.2.4 Galaxias cD -----	21
I.2.5 Perfiles de densidad -----	22
I.2.6 Tamaños -----	23
I.2.7 La función de luminosidad -----	24
I.3 Propiedades dinámicas de los cúmulos de galaxias -	28
I.3.1 Tiempos característicos -----	28
I.3.2 Masas y Cociente Masa-Luminosidad -----	30
Capítulo II. Densidad de galaxias -----	33
II.1 Morfología de las galaxias en los cúmulos -----	34
II.2 Relación entre la densidad local y la población -	35
II.3 Coma -----	41
II.4 Virgo -----	43
Capítulo III. Densidad proyectada Local -----	46
III.1 Cálculo de la densidad proyectada local -----	47
III.2 Relación entre $r_0$ , $M_v$ , $\mu_0$ y $\rho$ -----	78
Capítulo IV. Una Estimación de la Densidad Volumétrica en el Cúmulo de Coma -----	98
IV.1 Cálculo de la Masa del Cúmulo de Coma -----	99
IV.2 Cálculo de la Densidad Volumétrica en el Cúmulo de Coma -----	104
Conclusiones -----	108
Apéndice A. Tiempo de Relajamiento -----	112
Apéndice B. Desviación de una galaxia de su plano orbital de acuerdo al problema de los dos cuerpos -----	129
Apéndice C. Radio efectivo medio para un cúmulo de galaxias --	136
Apéndice D. Cálculo de Área $\Delta A$ -----	139
Bibliografía -----	144

## INTRODUCCION.

Mediante la observación de placas fotográficas tomadas del cielo, se encuentra que las galaxias no están distribuidas en todo el espacio de una manera estadísticamente uniforme, sino que se encuentran en grupos o cúmulos que van desde dos, algunas decenas y hasta miles de miembros. El estudio de los cúmulos de galaxias es importante para la determinación de la estructura del Universo a gran escala y para tratar de entender a los cúmulos mismos como sistemas fundamentales.

Debido a su alta densidad superficial y gran número de galaxias muy luminosas, los cúmulos ricos se pueden identificar a distancias comparables al presente horizonte del Universo, siendo así una importante herramienta en el estudio de la cosmología.

En los años 70's se reconoció que ciertos cúmulos contienen "supergalaxias", objetos diferentes a todos los demás vistos en el campo general. La población general de galaxias en los cúmulos es principalmente de elípticas y SO's, una población sin formación estelar contrariamente a la del campo general que consiste principalmente de espirales, las cuales se encuentran activamente formando nuevas estrellas.

Virgo, el cúmulo más cercano a nuestra galaxia, es un ejemplo

estudian 96 galaxias elípticas y S0's confirmando una relación ya establecida por Kormendy (1977) entre el radio efectivo,  $r_e$ , y la luminosidad; de tal manera que las galaxias más brillantes tienen radios mayores. Recillas-Cruz y Serrano (1986) encontraron una relación entre los radios, la luminosidad, el brillo superficial y la densidad superficial local de galaxias elípticas. Ellos encontraron:

$$r_e \approx \rho_{\text{proj}}^{-0.14} L^{0.445} I^{-0.413}$$

Cabe hacer notar que en el trabajo de Recillas y Serrano, los datos para la densidad superficial fueron tomados de la literatura (Dressler 1980b, Strom y Strom (1978a)). De aquí que es necesario tener un método para encontrar dicha densidad superficial.

Motivado por lo anterior, el presente es un trabajo donde se describen algunos resultados sobre cúmulos de galaxias y el medio ambiente y se calcula la densidad proyectada local de galaxias para los cúmulos de Coma, Virgo, Hércules y el supercúmulo de Hidra-Centauro cuyas densidades locales son diversas.

Con la densidad calculada en este estudio se encuentra, para los cúmulos de Coma y Virgo una relación entre el radio efectivo  $r_e$ , la densidad proyectada local  $\rho_{\text{proj}}$ , el brillo superficial  $\mu_e$  y la magnitud, para galaxias elípticas y S0's, encontrando que los parámetros anteriores están correlacionados.

CAPITULO I  
CUMULOS DE GALAXIAS

## I.1.- CATALOGOS DE CUMULOS DE GALAXIAS

La forma de seleccionar los cúmulos, para incluirlos en un catálogo, es, observando el aumento en la densidad superficial,  $\sigma$ , en una cierta región de la esfera celeste, sobre la densidad de fondo  $\sigma_{bg}$ ; es decir :  $\langle \sigma / \sigma_{bg} \rangle \geq N$  donde  $N$  es dada. Por ejemplo, si  $N \approx 1$ , (Bahcall, 1977) entonces todas las galaxias pertenecerían a unos cuantos grupos de gran tamaño; mientras que, si  $N$  es muy grande, entonces la mayoría de las galaxias pertenecen al campo general. Para que una región se pueda incluir en un catálogo de cúmulos de galaxias es necesario que exista una densidad creciente, ya sea en una extensión lineal fija y una densidad mínima (como en el catálogo de Abell, 1957) o para una extensión variable, determinada directamente por la densidad superficial observada en sus bordes (como en el catálogo de Zwicky, 1961-1968). Los tamaños y poblaciones dependen de las definiciones usadas en el proceso de identificación, por lo que, tales parámetros, deben tomarse sólo como recetas operacionales que intentan describir la extensión especificada por el catálogo. Así, si un cúmulo se define como un sistema que contiene todas las galaxias con velocidades en un cierto intervalo y en la dirección general del cúmulo, entonces, su extensión y población se determinará sólo por el estudio de las velocidades de todas las galaxias en esa dirección.

coordenadas de 1950; la magnitud fotográfica en el rojo de la décima galaxia más brillante, la distancia y su clasificación en grado de riqueza.

El criterio de Zwicky es el siguiente:

1.- El cúmulo debe contener al menos 50 galaxias entre  $m_1$  y  $m_1+3$ , donde  $m_1$  es la magnitud de la galaxia más brillante del cúmulo.

2.- Las galaxias deben estar dentro del contorno definido por la isofota donde la densidad proyectada es alrededor de dos veces la del campo general.

3.- No pone límite en el corrimiento al rojo de los cúmulos, pero agregados tales como Virgo no los incluye.

4.- Los cúmulos se deberán encontrar al norte de la declinación  $-3^\circ$ .

El catálogo comprende 6 volúmenes y para cada cúmulo se listan: el centro estimado en coordenadas de 1950; la clasificación del cúmulo; población; diámetro y la distancia ( $0.2 < z \leq 0.5$ ). También contiene las magnitudes fotográficas estimadas para todas las galaxias más brillantes que  $m_p = 15.7^m$ .



## I.2.- PROPIEDADES DE LOS CÚMULOS DE GALAXIAS.

I.2.1.- *Grado de Riqueza.* - El grado de riqueza es el número de galaxias contenidas en un círculo de un cierto radio referido al centro del cúmulo. El grado de riqueza describe a cúmulos muy densos que contienen miles de miembros, o bien grupos de baja densidad tales como el Grupo Local, hasta galaxias dobles.

El número total de galaxias de un cúmulo depende de la definición misma de cúmulo. Así como se mencionó en la sección I.1, Zwicky define la población, como el número de galaxias visibles en el rojo en las placas de Monte Palomar, que se encuentran localizadas dentro de la isofota de dos veces la densidad del campo.

La definición de Abell (1965) para el grado de riqueza de un cúmulo es : el número de galaxias más brillantes que  $m_3+2$ , en donde  $m_3$  es la magnitud fotográfica en el rojo del tercer miembro más brillante, contenidas en un círculo de radio:

$$R_A = 4.6 \times 10^5 / (c z) \text{ mm}$$

donde  $z$  es el corrimiento al rojo del cúmulo.

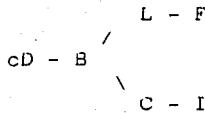
De la magnitud del décimo miembro más brillante en cada

regulares e irregulares. Aquí, BM denota la clasificación de Bautz Morgan(1970) y RS a Rood y Sastry, (1971) que se describen más adelante.

TABLA I.1

Propiedad Clase	Regular (Temprana)	(Intermedia)	Irregular (Tardia)
Tipo Zwicky.....	Compacto .....	Medio-Compacto.....	Abierto.....
Tipo BM.....	I, I-II, II.....	II, II-III.....	II-III, III.....
Tipo RS.....	cD, B, L-C.....	L, F, C.....	F, I.....
Contenido.....	Ricos en.....	Pobres en.....	Ricos en.....
	Elípticas	Espirales	Espirales
Simetría.....	Esférica.....	Intermedia.....	Forma Irregular
Concentración			
Central.....	Alta.....	Moderada.....	Muy pequeña....
Ejemplos.....	A2199, Coma...	A194, A539.....	Virgo, A1228....

Rood y Sastry desarrollaron un refinamiento del esquema regular e irregular. El Sistema Rood-Sastry (RS) se representa en un diagrama de diapasón:



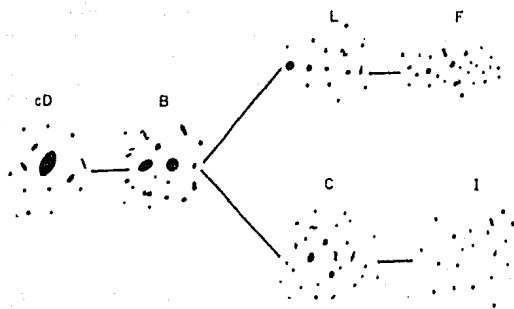


FIGURA I.1. - CLASIFICACION RS (TOMADA DE ROOD Y SASTRY, 1974)

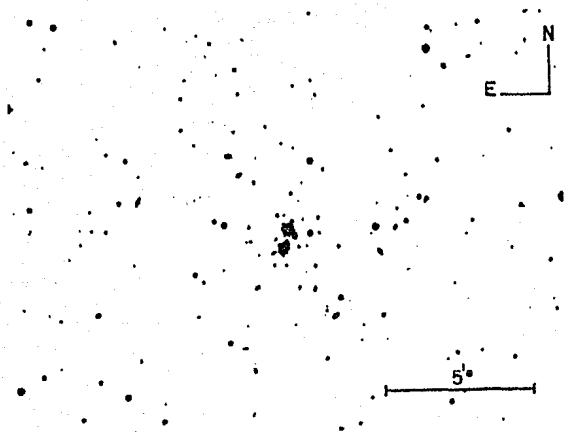


FIGURA 1.3. - CUMULO TIPO B (ABELL 154) (TOMADA DE ROOD Y SASTRY, 1971)

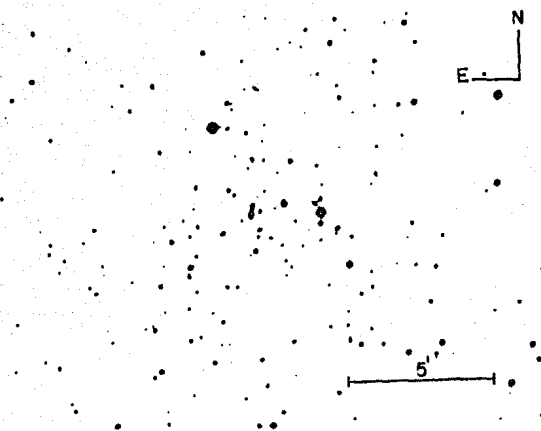


FIGURA 1.5. - CUMULO TIPO C (ABELL 2065)  
(TOMADA DE ROOD Y SASTRY, 1971)

Bautz y Morgan (1970) clasifican a los cúmulos de galaxias de la siguiente forma:

- I.....El cúmulo se encuentra dominado por una sola galaxia cD localizada en el centro (A2199).
- II.....Las galaxias más brillantes se encuentran entre galaxias cD y elíptica gigantes (Coma).
- III.....No contienen galaxias dominantes (Virgo y Hércules).

Las características de los cúmulos se pueden resumir dividiéndolas en los siguientes grupos:

1.- CUMULOS RICOS EN ESPIRALES.- Tienen una composición similar a la del campo general, que es típicamente de  $8 \pm 3$  galaxias por grado cuadrado (Dressler, 1980c) con una gran proporción de espirales. Existen también irregulares con bajas densidades, baja concentración central, no existe segregación por tipo morfológico y no están relajados.

2.- CUMULOS cD.- Se encuentran dominados por una galaxia supergigante cD y no tiene espirales en su centro. Contienen más elípticas y S0's en las regiones centrales que otros cúmulos y son muy densos, además son esféricos y se encuentran relajados.

3.- CUMULOS POBRES EN ESPIRALES.- Son intermedios entre 1 y 2, con una composición dominada por galaxias S0's, mostrando, además segregación por el tipo morfológico.

Los porcentajes típicos de elípticas, S0's y espirales se resumen en la tabla I-2.

TABLA I.2

	E	S0	S	
Cúmulos <i>cd</i>	35%	45%	20%	<i>Coma, A2199</i>
Pobres en espirales	15%	55%	30%	<i>A194, A400, A539</i>
Ricos en espirales	15%	35%	50%	<i>Hércules, A1228 A1367, A2197</i>
<i>Campo General</i>	15%	25%	60%	

De la tabla I.2 se puede ver que los cúmulos *cd* son más densos en galaxias elípticas y S0's ya que E+S0=70% mientras que en los pobres en espirales E+S0=70% y en los ricos en espirales E+S0=50%. Se puede ver entonces que esta clasificación se hace únicamente con respecto al contenido de espirales siendo muy pequeña la diferencia de los *cd*'s a los ricos en espirales.

I.2.3.- *Contenido Galáctico.* - Un estudio hecho por Oemler (1974) sobre los perfiles de densidad de galaxias E, S0's y S en los cúmulos, muestra que en los del tipo cD y pobres en espirales, las espirales disminuyen en la dirección del centro y no se encuentran en el núcleo. Estudios hechos por Rood y Sastry (1972) sobre el cúmulo de Coma, muestran también que el número de espirales disminuye en la dirección del centro del cúmulo.

I.2.4.- *Galaxias cD.* - El estudio de las galaxias cD empezó en los años 60's con los trabajos de W. W. Morgan y colaboradores (1964). Llamando la atención sobre la existencia de galaxias elípticas brillantes rodeadas por una extensa envolvente estelar difusa, las nombraron galaxias D. Aquellas con una extensión 3 a 4 veces más grandes que las lenticulares fueron llamadas galaxias supergigantes o cD's.

Las galaxias cD usualmente se encuentran en el núcleo de los cúmulos densos y cúmulos regulares, sin embargo, a veces se encuentran galaxias D en los irregulares coincidentes con los picos de densidad. Es importante destacar el hecho de que las galaxias cD se encuentran sólo en regiones densas o en los núcleos de cúmulos densos y que esto podría implicar un efecto comparable al de la segregación de tipos morfológicos con la densidad (Dressler, 1980b).



A veces, las galaxias cD's tienen envolventes estelares difusas muy extensas ( $\approx 1$  Mpc) y de bajo brillo superficial. Son galaxias aplanadas, sin embargo su aplanamiento no es principalmente debido a rotación. Alrededor del 25 al 50 por ciento tienen núcleos múltiples, posiblemente galaxias satélites más pequeñas que se encuentran en el campo gravitacional de las cD's.

I.2.5.- *Perfiles de Densidad.*- El perfil de densidad de los cúmulos de galaxias se describe por:

$$\rho(r) = \rho_0 f_1(r, R_c, R_h) \quad (I.1)$$

$$\sigma(r) = \sigma_0 f_2(r, R_c, R_h) \quad (I.2)$$

en donde  $\rho(r)$  y  $\sigma(r)$  son las densidades espacial y proyectada, respectivamente  $R_c$  es el radio del núcleo definido de tal manera que  $\sigma(R_c) = \sigma_0/2$ ,  $R_h$  es el halo o radio de corte y  $f_1$  y  $f_2$  son las funciones que mejor se ajustan a los perfiles observados y  $\rho_0$ ,  $\sigma_0$  son la densidad central espacial y proyectada, respectivamente.

King (1966), dió una representación analítica del perfil de distribución de galaxias de un cúmulo. La distribución para la densidad en las regiones centrales puede aproximarse por:

$$\rho(r) = \rho_0 ( 1 + r^2/R_c^2 )^{-3/2} \quad (I.3)$$

$$\sigma(r) = \sigma_0 ( 1 + r^2/R_c^2 )^{-1} \quad (I.4)$$

en donde los parámetros son los mismos que en la ecuación anterior. Las densidades espaciales y proyectada se encuentran relacionadas mediante  $\sigma_0 = 2R_c \rho_0$ . La ley de de Vaucouleurs se puede generalizar para cúmulos de galaxias. de Vaucouleurs mismo (1960) encontró para el cúmulo de Coma:

$$\log \sigma(r)/\sigma(r_0) = -3.33 [ (r/r_0)^{1/4} - 1 ] \quad (I.5)$$

en donde  $r_0$  es el radio efectivo definido como el radio a la mitad de la luz en el perfil de luminosidad.

I.2.6.- *Tamaños*.- Algunas de las definiciones más comunes de tamaño de un cúmulo incluye los siguientes parámetros: un radio gravitacional  $R_g$ , el radio del núcleo  $R_c$ , un tamaño medio o efectivo  $R_0$  determinado por la distribución de las galaxias, un tamaño del halo,  $R_h$  determinado por el perfil de densidad al aproximarse al valor de fondo y un tamaño dinámico determinado a partir de la inclusión de todas las galaxias dentro del intervalo de velocidades típicas del cúmulo.

El radio gravitacional del cúmulo se define como:

$$R_g = \frac{2GM}{3v_r^2} \quad (I.6)$$

donde M es la masa del cúmulo y  $v_r$  representa la dispersión de velocidades en la dirección radial observada. El radio  $R_g$ , definido de esta manera, es el radio para el cual la energía gravitacional es aproximadamente igual a la energía cinética de una galaxia moviéndose en el cúmulo.

Para Coma, el cuerpo principal se encuentra dentro de un radio de alrededor de 100'.

1.2.7.- *La función de Luminosidad.* - La función de luminosidad se define como el número de galaxias  $N(\leq m)$  más brillantes que la magnitud  $m$ . Se han propuesto varias representaciones analíticas para la función de luminosidad del cúmulo. Algunas de ellas son la de Zwicky (1957), Abell (1976) y Schechter (1976), mostradas en la figura I.6, tomada de Abell (1976).

*Función de Luminosidad de Zwicky.* - La función de luminosidad propuesta por Zwicky es:

$$N(\leq m) = k (10^{0.2m} - 1) \quad (I.7)$$

donde  $k$  es una constante. La función de Zwicky se ajusta bien para luminosidades débiles, pero no se ajusta para las más brillantes.

*Función de luminosidad de Abell.* - Abell representó el logaritmo de la función de luminosidad compuesta por dos líneas rectas que se intersectan en un punto tal que la magnitud es  $m^*$ . La función de luminosidad de Abell se representa por:

$$\log N(\leq m) = k_1 + s_1 m \quad (m \leq m^*) \quad (I.8)$$

$$\log N(\leq m) = k_2 + s_2 m \quad (m > m^*) \quad (I.9)$$

donde  $s_1 = 0.75$  y  $s_2 = 0.25$ ,  $k_1$  y  $k_2$  son constantes.

*Función de luminosidad de Schechter.* - La expresión analítica para el número de galaxias en un cúmulo en el intervalo de luminosidad  $L$  a  $L + dL$ ,  $dN$  dada por Schechter (1976) es:

$$dN = N^* (L/L^*)^{-5/4} \exp(-L/L^*) d(L/L^*) \quad (I.10)$$

en donde  $L^*$  es una luminosidad característica (con una magnitud absoluta equivalente  $M^*$ ) para la cual la función de luminosidad

exhibe un cambio rápido en la pendiente en el plano  $\log N - \log L$ .

$N^*$  es una medida de la riqueza del cúmulo.

En la figura I.6 se muestra la función de luminosidad donde se pueden apreciar las representaciones de Zwicky, Abell y Schechter. En el eje horizontal se muestra la magnitud y en el vertical el logaritmo del número de galaxias más brillantes que la magnitud  $m$ .

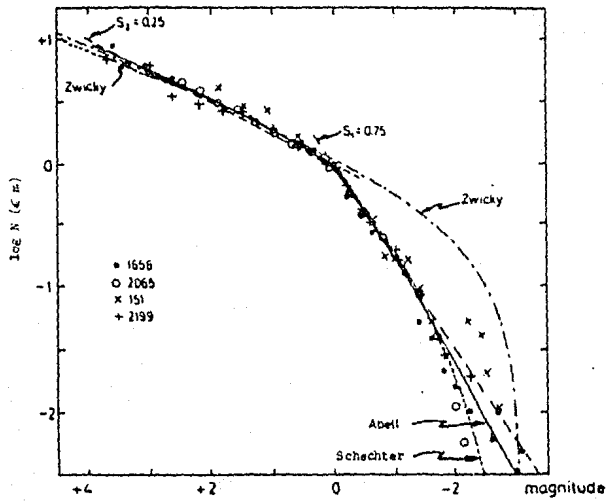


FIGURA I.6 LOGARITMO DE LA FUNCION DE LUMINOSIDAD INTEGRADA MOSTRANDO LAS REPRESENTACIONES DE ZWICKY, ABELL Y SCHECHTER. (TOMADA DE ABELL, 1976)

### I.3.- PROPIEDADES DINAMICAS DE LOS CUMULOS DE GALAXIAS.

I.3.1.- *Tiempos característicos.* - Una galaxia que viaja a través de un cúmulo con una velocidad  $v_r$  recorrerá una distancia  $R$  en un tiempo:

$$T_{CR} = R/v_r \quad (I.11)$$

donde  $v_r$  es la velocidad radial observada. El tiempo para una distancia típica de 10 Mpc es  $\approx 6 \times 10^8$  años ligeramente más corto que la edad estimada del Universo (este es el llamado tiempo de Hubble y es del orden de  $2 \times 10^{10}$  años). Las galaxias de las regiones exteriores de los grandes supercúmulos ( $R > 35$  Mpc) tienen un tiempo de cruce mayor que  $2 \times 10^{10}$  años por lo tanto, no han cruzado todavía el centro del cúmulo.

El tiempo de relajamiento para galaxias es el tiempo para el cual pueden existir choques entre ellas y está dado por (Apéndice A):

$$T = \frac{v_2^3}{32\pi N G^2 m_1 \Phi(x_0) \ln \frac{D_0 v_2^2}{G(m_1 + m_2)}} \quad (I.12)$$

en donde

$$x_0 = jv_2 \quad \text{y} \quad \Phi(x_0) = \frac{1}{2x_0^2} \left[ E_{\text{ref}}(x_0) - x_0 E'_{\text{ref}}(x_0) \right]$$

$E_{\text{ref}}(x_0)$  y  $E'_{\text{ref}}(x_0)$  son la función error y su derivada definida por:  $E_{\text{ref}}(x_0) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^{x_0} \exp(-t^2) dt$ .  $j$  es la amplitud en la distribución de velocidades (En este caso es una distribución gaussiana).  $m_1$  es la masa de una galaxia del campo y  $m_2$  es la masa de una galaxia que se mueve inicialmente con una velocidad  $v_2$  a través del cúmulo.  $N$  es el número de galaxias por unidad de volumen y  $D_0$  es el parametro de impacto.

De la ecuación anterior se puede ver que las galaxias se relajaran más rápidamente si su masa es grande y si su densidad ambiental es mayor, esto es, ya que en el denominador de la ecuación I.12 se encuentra la masa  $m_1$  de las galaxias del campo y  $N$ , la densidad de galaxias del cúmulo.

En la mayoría de los cúmulos irregulares (Bancall, 1977) el tiempo de relajamiento es grande (mayor que  $2 \times 10^{10}$  años) por lo que no se espera que haya ocurrido relajamiento en esos cúmulos.



I.3.2.-*Masas y cociente Masa-Luminosidad.* - La masa total de un cúmulo se expresa, con ayuda del teorema virial, (Apéndice C) en términos de las propiedades observadas :  $R_0$  y  $v^2$ :

$$M = v^2 R_0 / G \quad (I.13)$$

donde  $R_0$  es el radio efectivo medio. En la ecuación I.13 se supone que la dispersión de velocidades  $v^2$  observada se aplica a todas las masas del cúmulo y que toda la masa se encuentra distribuída de la misma manera que las galaxias cuya distribución determina la energía potencial. El radio efectivo medio  $R_0$  está dado por (Apéndice C):

$$R_0 \equiv GM^2/E_0 = 2 \left[ \int_0^R s \langle q \rangle dq \right]^2 \left[ \int_0^R s^2 \langle q \rangle dq \right]^{-1} \quad (I.14)$$

donde  $E_0$  es la energía gravitacional del cúmulo,  $s \langle q \rangle$  es el número de galaxias en una banda de ancho unidad a la distancia perpendicular a  $q$  del centro del cúmulo y  $R$  es el radio límite del cúmulo.

El cociente masa-luminosidad en el centro del cúmulo está dado por:

$$\begin{aligned}
 (M/L)_c &= 2\rho_o R_c / \sigma_{o,L} \\
 &= 9 v_{r,c}^2 / 2\pi G \sigma_{o,L} R_c
 \end{aligned}
 \tag{I.15}$$

Esta última relación se deduce de la siguiente manera: ya que  $v_{r,c}^2 = (1/3)rd\phi/dr = (1/3)|F| = (1/3)GM(r)/r$ , entonces para  $R_c$  se tiene:  $\rho_o = M/[(4/3)\pi R_c^3] = 9v_{r,c}^2/(4\pi G R_c^2)$  y ya que  $L = \sigma_{o,L}/(2R_c)$ , entonces es el cociente de M sobre L es el dado por la ecuación 1.15. Donde  $\sigma_{o,L}$  es la densidad de luminosidad superficial central (la densidad de luminosidad espacial es  $\sigma_{o,L}/(2R_c)$ ). La razón central masa-luminosidad de un cúmulo se puede determinar por 1.15 usando la dispersión de velocidades radiales observadas en el núcleo y el producto:  $\sigma_{o,L} R_c$  obtenido de la distribución superficial central.

Se han hecho estimaciones de la masa de Coma, con los métodos anteriores. Usando la ecuación 1.14 se obtiene  $R_o = 3.68'' = 9.15$  Mpc para Coma. De la dispersión de velocidades observada  $v_r = 861$  km seg<sup>-1</sup> la masa de Coma calculada con el teorema virial es:

$$M(\text{Coma}) = 4.7 \times 10^{15} M_\odot
 \tag{I.16}$$

Si llamamos  $\phi(L)$  al número de galaxias contenidas en el volumen  $dV$  y con luminosidad entre  $L$  y  $L+dL$ , entonces se define la luminosidad total como  $\int_0^\infty \phi(L)dL$ . La luminosidad total del

cúmulo de Coma es:  $L(\text{Coma}) = 3 \times 10^{13} L_{\odot}$ . La razón masa-luminosidad de Coma, es entonces:

$$M/L(\text{Coma}) \approx 150 M_{\odot}/L_{\odot} \quad (\text{I.17})$$

Las masas, luminosidades y la razón  $M/L$  de cúmulos densos se encuentran, típicamente en los siguientes intervalos:

$$\begin{aligned} M &\approx 10^{15 \pm 1} M_{\odot} \\ L &\approx 10^{12} - 10^{13} L_{\odot} \\ M/L &\approx 50 - 500 M_{\odot}/L_{\odot} \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

con un promedio:  $\langle M/L \rangle \approx 200 M_{\odot}/L_{\odot}$ .

## CAPITULO II

### DENSIDAD DE GALAXIAS

## II.1.- MORFOLOGIA DE LAS GALAXIAS EN LOS CUMULOS.

Los sistemas más comunes para clasificar a las galaxias reconocen dos componentes: una componente de estrellas mas o menos aplanada o de disco (y a veces de gas y polvo) y una componente esferoidal. La mayoría de las galaxias poseen ambos tipos de estructura, pero existen muchos ejemplos sin componente de disco (las elípticas). Suponiendo que estas dos componentes reflejen diferentes mecanismos de formación, su importancia debe ser fundamental. Dentro de las galaxias en forma de disco es posible identificar a aquellas que contienen gas y polvo en abundancia y estrellas en formación y aquellas en que esta actividad podría no estar ocurriendo (galaxias S0). Se conocía desde los primeros trabajos de Hubble, Morgan y otros autores, el contraste entre las regiones de baja densidad en el campo general, compuesta principalmente de galaxias espirales y de las regiones densas de los cúmulos, poblados en su mayoría de galaxias S0's y elípticas. Esto ha sido interpretado como una evidencia del origen común de todas las galaxias, con la evolución subsecuente de un tipo a otro, como por ejemplo, la formación de galaxias S0's a partir de galaxias espirales. Sin embargo, Dressler (1980b) ha demostrado que este mecanismo de remoción de gas en espirales no produce galaxias S0's.

## II.2.- RELACION ENTRE LA DENSIDAD LOCAL Y LA POBLACION.

El primer intento para cuantificar el contenido morfológico de los cúmulos de galaxias fué hecho por Oemler (1974). Dressler (1980b) sistematizó el cambio en las poblaciones en los cúmulos, utilizando un criterio en el cual la densidad local se define como un parámetro independiente. Si bien, estudios anteriores habían establecido los gradientes de población respecto del radio de los cúmulos, este tratamiento es aplicable sólo para cúmulos regulares y simétricos ricos en galaxias E y S0's en los cuales el centro del cúmulo está bien definido y la densidad varía en forma continua. Por el contrario, los irregulares, ricos en galaxias espirales presentan variaciones de densidad (picos de densidad local) no siempre ubicados centralmente. Al introducir la densidad como un parámetro independiente se encuentra que los gradientes de población muestran incrementos que representan verdaderas asociaciones de galaxias.

Dressler (1980b) desarrolló un programa de cómputo con el cual encontró las 10 vecinas más cercanas a cada una de las  $\approx 6000$  galaxias de su muestra de 55 cúmulos, y después de calcular el área involucrada y tomando la correspondiente corrección para el campo general ( $8 \pm 3$  galaxias por grado cuadrado), calculó la densidad superficial local en galaxias por  $\text{Mpc}^2$ . Esta densidad es representativa del número de galaxias más brillantes que  $M_V = -20$  y

para, un valor de la constante de Hubble:  $H_0 = 75 \text{ km/seg.Mpc}$ .

En la figura 11.1 se muestra la relación que resulta cuando se combinan los datos para todas las galaxias en los 55 cúmulos. Se ve que existe una correlación entre la densidad superficial local ( número de galaxias por  $\text{Mpc}^2$ ) y los diferentes tipos de galaxias. La proporción relativa de S+I disminuye monótonicamente con el aumento de la densidad mientras que la proporción de SO's y E aumenta. Spitzer y Baade (Citado por Dressler 1980b) han sugerido que las galaxias SO's de los cúmulos resultan cuando el gas del disco se desprende de galaxias espirales por colisiones entre ellas, otros estudios consideran otros mecanismos de remoción del gas en los brazos espirales como son el de la evaporación del gas y choques por marea. Dressler (1980b) seleccionó los 10 cúmulos más concentrados y los 10 menos concentrados de su muestra de 55 cúmulos. En las figuras 11.2 y 11.3 se grafican las relaciones entre las poblaciones y la densidad para esos dos subgrupos, observándose que no existe diferencia significativa entre las relaciones definidas en los dos grupos y los datos de la figura 11.1, por lo que la relación entre la población y la densidad local se cumple independientemente del cúmulo involucrado sea este de baja o de alta densidad. Este resultado contradice la interpretación de que las espirales han sido despojadas de su gas para formar SO's en los cúmulos de alta concentración. Existe un gran número de

galaxias SO's y en particular es en el campo general donde la población de espirales es más alta o la fracción de SO's y E es más baja. El hecho de que la relación Población vs. Densidad sea similar en esos diferentes tipos de cúmulos indicaría ( Dressler, 1980b) que las poblaciones de los cúmulos son independientes de la evolución dinámica global del cúmulo.

Por lo anterior, Dressler concluye que existe una relación bien definida entre la densidad local de galaxias en una región del espacio y los diferentes tipos morfológicos. Esta relación se extiende desde el campo general de baja densidad hasta los núcleos de cúmulos de galaxias de muy alta densidad. Por lo anterior, Dressler concluye que, la existencia de galaxias SO's en regiones donde la densidad del gas y la temperatura son bajas, indica que la mayoría de las galaxias SO's no son creadas por procesos de remoción de gas y/o desprendimiento por marea en galaxias espirales. Lo anterior es también una motivación para hallar un método que permita calcular la densidad proyectada local en los cúmulos de galaxias de una manera sistemática, que es uno de los propósitos de este trabajo.



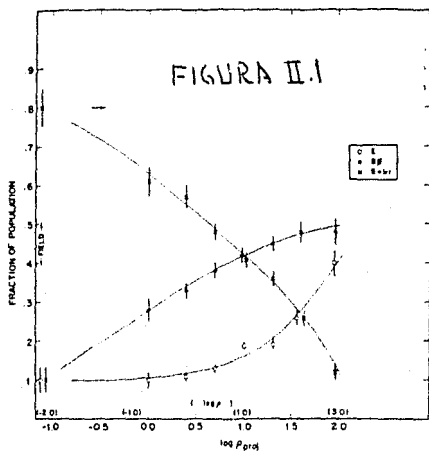


FIGURA II.1. - FRACCION DE GALAXIAS E, S0 Y S+I COMO FUNCION DEL LOGARITMO DE LA DENSIDAD PROYECTADA DE GALAXIAS POR  $Mpc^2$ . (TOMADA DE DRESSLER, 1980b)

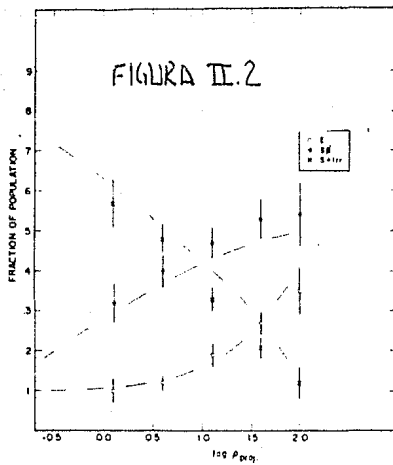


FIGURA II.2. - CUMULOS DE ALTA CONCENTRACION ,  
(TOMADA DE DRESSLER, 1980b)

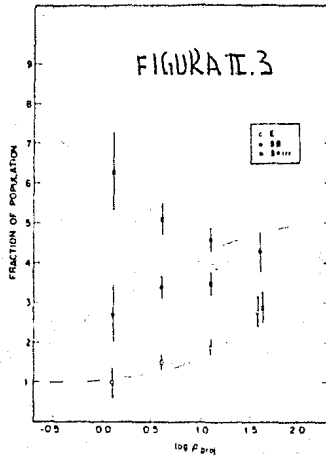


FIGURA II.3. - CUMULOS DE BAJA CONCENTRACION  
(TOMADA DE DRESSLER, 1980b)

### II.3.- COMA.

El cúmulo regular mejor estudiado es Coma, el cual es uno de los cúmulos esféricos más cercano. Sus coordenadas, según Abell (1965) son:  $\alpha = 12^{\text{h}}57^{\text{m}}.3$ ,  $\delta = + 28^{\circ}14'$ . Tiene un corrimiento al rojo aproximadamente de 6850 km/seg. Suponiendo una constante de Hubble de  $H_0 = 75$  km/seg.Mpc entonces, se encuentra a una distancia de 90 Mpc y tiene un módulo de distancia de  $m - M = 34.8$ . Su diámetro angular es de alrededor de  $100'$  y contiene alrededor de 900 miembros. (Godwin et. al. ,1977 estudian 923 galaxias en este cúmulo) Muchos investigadores han hecho estudios relacionados al tamaño, distribución y estructura de este cúmulo, por ejemplo, Bahcall (1973), haciendo un conteo de galaxias encuentra el centro del cúmulo y calcula la densidad proyectada como función del radio. Los resultados de las densidades como función de la distancia en ambas direcciones: Este-Oeste y Norte-Sur se muestran en la figura II.4. Las curvas dibujadas a "ojo" muestran un pico de densidad con una distribución simétrica alrededor del pico. Bahcall localiza la posición del centro del cúmulo por el pico de densidad y la simetría alrededor de él y encuentra:  $\alpha(1950) = 12^{\text{h}}57^{\text{m}}21^{\text{s}}$  y  $\delta(1950) = 28^{\circ}15'$ . Este centro se encuentra localizado, aproximadamente a lo largo de la línea que une a las dos galaxias supergigantes NGC4874 y NGC4889.

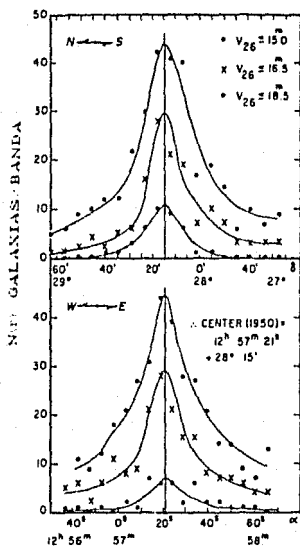
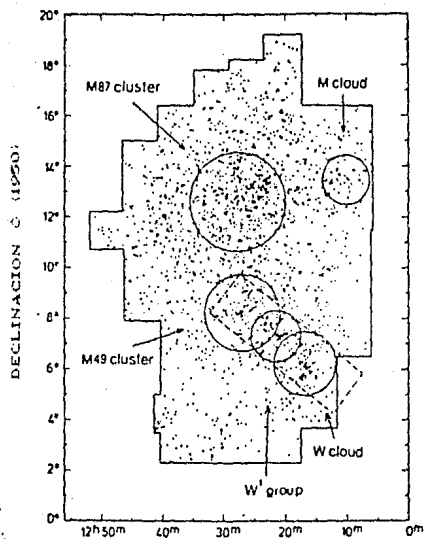


FIGURA II. 4. - DENSIDAD DE GALAXIAS ENCONTRADA POR BANCALL (1973), EN FUNCION DE LA DISTANCIA EN LAS DIRECCIONES E-W Y N-S. EL CENTRO DEL CUMULO LO DETERMINA POR EL PICO DE DENSIDAD Y LA SIMETRIA ALREDEDOR DE EL.

### II.3.- VIRGO.

Virgo es el cúmulo más cercano a nuestra galaxia. Este es un ejemplo de cúmulo irregular. La parte principal se encuentra centrada en  $\alpha = 12^{\text{h}}28^{\text{m}}$ ,  $\delta = + 11^{\circ}$  en coordenadas de 1950. El módulo de distancia es aproximadamente de  $m - M = 30.7$  con lo cual se encuentra a una distancia de aproximadamente 14 Mpc. Binggeli, Tamman y Sandage (1987) analizaron este cúmulo basándose en las posiciones, tipos de Hubble y velocidades radiales de 1277 galaxias del cúmulo que se encuentran listadas en Binggeli, Sandage y Tammann (1985). Se considera la distribución de galaxias de acuerdo al tipo morfológico y se estudian mapas, poblaciones y distribuciones radiales y concluyen que: El cúmulo de Virgo presenta una estructura doble (Figura II.5). La concentración principal, el cúmulo A que contiene a M87, se encuentra poblada predominantemente de galaxias de tipo temprano y su dispersión de velocidades es grande, ( $\sigma \sim 750$  km/seg). El cúmulo B, una segunda y pobre concentración, cerca de M49, contiene principalmente galaxias de tipo tardío y muestra una dispersión de velocidades de  $\sigma \sim 400$  km/seg. La velocidad radial media de B es menos que la de A por  $\Delta v \sim 100$  km/seg. Binggeli, et. al. (1987), argumenta que el cúmulo B se encuentra "cavendo" en la dirección del cúmulo A. Existe una fuerte segregación espacial de los tipos de Hubble. Las galaxias tipo temprano (E, S0, dE y dS0) se encuentran más concentradas en la dirección del centro del cúmulo que las de tipo

tardío (S e I). La relación morfología-densidad se encuentra que está de acuerdo con Dressler (1980b). La población en el cúmulo A se ajusta bien ya sea mediante una exponencial o por un perfil de King (1966), dando un radio del cúmulo de  $1.7^\circ$  (0.65 Mpc). El cúmulo A sugiere dos subcúmulos: uno centrado en M87, y el otro en M84, ambos dentro de una alargada nube de galaxias enanas elípticas. La mejor estimación de la velocidad heliocéntrica del cúmulo es  $\langle v \rangle = 1094 \pm 42 \text{ km/seg}$ . Ya que en el núcleo del cúmulo, existe una subestructura importante, tanto espacial como en velocidades, se cree (Binggeli, et. al., 1987) que el núcleo del cúmulo no se encuentra relajado dinámicamente.



A. R. 2 (1950)

FIGURA II. 5. - MAPA DE TODOS LOS MIEMBROS Y  
 POSIBLES MIEMBROS LISTADOS EN BINGELLI  
 ET. AL. (1987). LOS CIRCULOS INDICAN LAS  
 CONCENTRACIONES PRINCIPALES. LAS DOS  
 ESTRUCTURAS PROMINENTES SE ENCUENTRAN  
 CENTRADAS EN M87 Y M49.



**CAPITULO III**  
**DENSIDAD PROYECTADA LOCAL**

### III.1.- CALCULO DE LA DENSIDAD PROYECTADA LOCAL DE GALAXIAS

Para calcular la densidad proyectada local en un punto  $(x_0, y_0)$ , se siguió el procedimiento que a continuación se describe:

Suponiendo a las galaxias (miembros del cúmulo) como masas puntuales, se encuentran las coordenadas del centroide  $(x_c, y_c)$  del cúmulo en cuestión:

$$x_c \approx (1/n) \sum x_j \quad (III.1)$$

$$y_c \approx (1/n) \sum y_j$$

en donde  $n$  representa el número de galaxias del cúmulo, y  $(x_j, y_j)$  ( $j = 1, n$ ) son las coordenadas de cada uno de los miembros del cúmulo.

Se simula entonces el cúmulo por una circunferencia de radio igual a la distancia de  $(x_c, y_c)$  a la galaxia mas alejada del centro del cúmulo.

Se trazan  $N$  circunferencias con centro en  $(x_0, y_0)$  de radios

$R_1 = R_{\min}$ ,  $R_2 = R_1 + \Delta R$ , ...,  $R_i = R_{i-1} + \Delta R$ ,  $R_N = R_{\max}$  en donde  $R_{\min}$  y  $R_{\max}$  representan la distancia a la galaxia mas cercana y a la mas alejada a  $(x_0, y_0)$ , respectivamente. Se está suponiendo que el punto  $(x_0, y_0)$  en donde se desea calcular la densidad proyectada local no necesariamente se encuentra dentro del cúmulo; es decir, en este caso es una densidad asociada al punto  $(x_0, y_0)$  debida a la presencia del cúmulo.

Se encuentran entonces los radios y las densidades correspondientes,  $R_i$ ,  $\rho_i$  dados por:

$$\rho_i = \Delta N_i / \Delta A_i \quad (\text{III.2})$$

$$R_i = (R_i + R_{i+1}) / 2 \quad (\text{III.3})$$

en donde  $\Delta N_i$  representa el número de galaxias en la región de área  $\Delta A_i$  (Calculada en el apéndice D), y es el área comprendida entre la intersección del  $i$ -ésimo aro con centro en  $(x_0, y_0)$  y la circunferencia con centro en  $(x_0, y_0)$ . Lo anterior se muestra en la figura III.1.

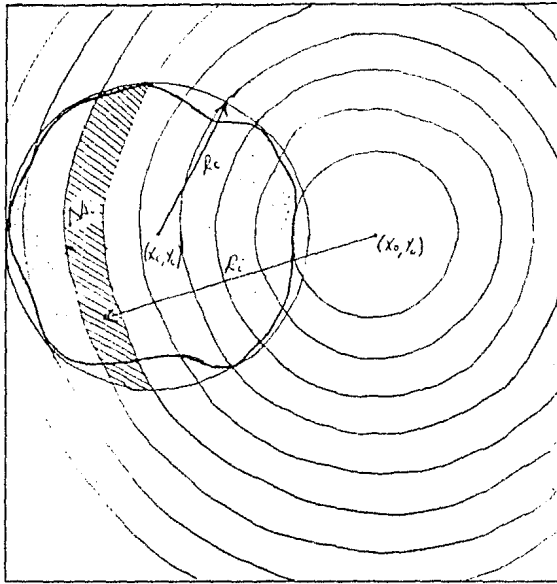


FIGURA III.1

$(x_0, y_0)$  ES EL PUNTO EN DONDE SE QUIERE ENCONTRAR LA DENSIDAD PROYECTADA LOCAL.  $r_c$  ES EL RADIO APROXIMADO DEL CUMULO.  $(x_c, y_c)$  SON LAS COORDENADAS DEL CENTROIDE DEL CUMULO. Y LA DENSIDAD PROYECTADA LOCAL SE DEFINE COMO:

$$\rho_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \rho(r)$$

De esta manera, para cada radio  $R_i$  se encuentra una densidad promedio  $\rho_i$ , permitiendo hacer una gráfica de  $R_i$  vs.  $\rho_i$ , y si existe una correlación entre las dos variables alrededor de  $(x_0, y_0)$ , (por ejemplo, tomando únicamente los primeros 5 puntos:  $i=1.5$ ) entonces se ajusta una función de la forma:  $\rho = \rho(R)$  en torno al punto  $(x_0, y_0)$ . En este trabajo se ajustó muy bien una función exponencial de la forma:  $\rho(r) = A \exp(B r)$ .

A continuación, se define la densidad proyectada local en  $(x_0, y_0)$  como:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \lim_{r \rightarrow 0} \rho(r) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} A \exp(B r) \end{aligned} \tag{III.4}$$

Es decir:

$$\rho_0 = A$$

Vemos que si  $(x_0, y_0)$  coincide con  $(x_c, y_c)$  entonces los  $\Delta A_i$ 's son anillos con centro en  $(x_c, y_c)$ .

Para todo lo anterior se creó una serie de programas en lenguaje Fortran-77 en la Computadora Prime del CRADA del Instituto de Astronomía. Y para la representación gráfica, existen en este centro de cómputo, programas que permiten mapear por impresora un conjunto de puntos, así como también encontrar curvas de nivel, si es que se trata por ejemplo de una función de dos variables.

El método descrito anteriormente, se aplicó a los cúmulos de Virgo, Coma, Hércules y el supercúmulo de Hidra-Centauro. En las figuras III.2 y III.3 se muestran gráficamente como se encuentra la densidad proyectada local en dos puntos para el cúmulo de Virgo, se hace lo mismo para el cúmulo de Coma lo cual se muestra en las figuras III.4 y III.5, y las cuales, a continuación se describen.

En la figura III.2 se representan gráficamente los diferentes radios  $r_i$  y el logaritmo de las correspondientes densidades  $\rho_i$  en torno al punto  $(x_0, y_0)$  que se encuentra en las orillas del cúmulo de Virgo y que en coordenadas en ascensión recta ( $\alpha$ ) y declinación ( $\delta$ ) corresponden al punto:  $\alpha = 11^h 22^m 12.55$ ,  $\delta = 14^\circ 33' 31.12''$ . En esta gráfica se puede observar como en este punto la densidad es muy baja comparada con la de las regiones centrales en donde claramente se aprecian picos de densidad. Al tomar los 5 primeros puntos se hace un ajuste por mínimos cuadrados para una función de

la forma:  $\rho(r) = A \exp ( B r )$  y su gráfica está representada por la recta mostrada en la figura, esto es, ya que el eje vertical es logarítmico. Claramente la densidad  $\rho_0$ , asociada al punto dado es la intersección de la recta con la distancia cero que corresponde al eje de la densidad. Además podemos observar que en este caso, alrededor del punto en cuestión la densidad aumenta, esto es ya que  $B > 0$ .

En la figura III.3 se muestra como se encuentra la densidad proyectada local en un punto situado en una región central densa del cúmulo de Virgo, tal punto corresponde a las coordenadas:  $\alpha = 11^h 18^m 34.935$ ,  $\delta = 2^\circ 00' 0''$ . Vemos que en este punto, al ajustar una función de la forma:  $\rho(r) = A \exp ( B r )$  para los 10 primeros puntos alrededor del punto considerado, se tiene:  $B < 0$ ; es decir se está en un pico de densidad. Alrededor de este punto la densidad disminuye y la densidad proyectada local asociada a este punto es la intersección de la recta mostrada en la figura con el eje del logaritmo de la densidad (El eje vertical).

Análogamente que en las dos figuras descritas anteriormente, la figura III.4 muestra las diferentes densidades promedio  $\rho_i$  alrededor del punto  $(x_0, y_0)$  correspondiente a las coordenadas  $\alpha = 12^h 58^m 5.975$ ,  $\delta = 27^\circ 34' 59.8''$  para el cúmulo de Coma, observándose que éste es un punto de baja densidad y que la constante  $B$  para la función exponencial ajustada (La recta

mostrada en la figura) es positiva. Claramente se observan picos de densidad al cruzar el cúmulo.

La figura III.5 representa también gráficamente como se encuentra la densidad proyectada local. En este caso es para una región central densa del cúmulo de Coma y corresponde a las coordenadas:  $\alpha = 12^{\text{h}}58^{\text{m}}17.^{\text{s}}45$ ,  $\delta = 27^{\circ}32'35.5''$ . Nuevamente se toman los 5 primeros puntos para el ajuste de una función exponencial, viéndose claramente que la constante  $B$ , de  $\exp( B r )$  es negativa.

Se tiene que aclarar que la densidad proyectada local calculada con el método mencionado en este trabajo es debida únicamente a la presencia del cúmulo; es decir, se supone que el cúmulo es lo único que existe en el espacio. Pero si se considera la existencia de otros objetos fuera del cúmulo (otras galaxias u otros cúmulos de galaxias) entonces el alcance del método es a lo más desde el centro del cúmulo a las orillas de éste.



Log( $\rho$ ) (Gal/Grado<sup>2</sup>)

FIGURA III.2

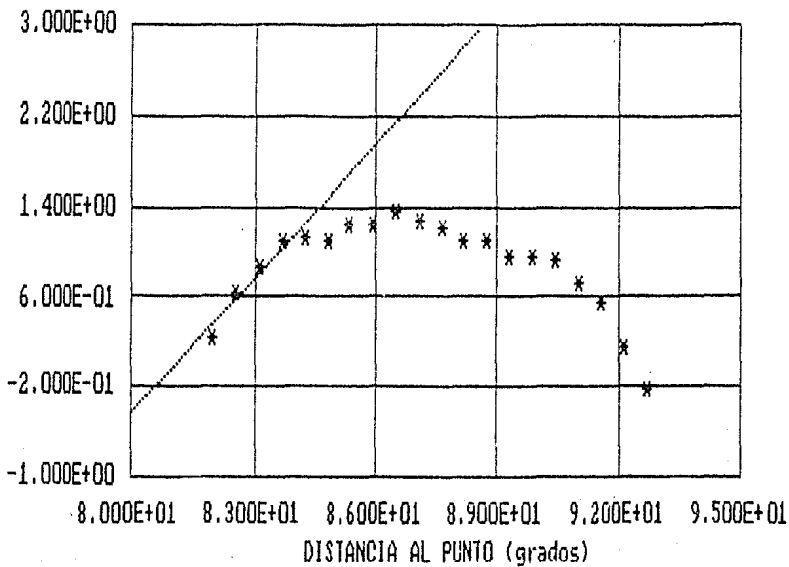


FIGURA III.2

LA INTERSECCION DE LA RECTA CON LA DISTANCIA CERO MOSTRADA EN LA FIGURA REPRESENTA LA DENSIDAD PROYECTADA LOCAL EN EL PUNTO  $\alpha = 11^{\text{h}} 22^{\text{m}} 12.55^{\text{s}}$ ,  $\delta = 2^{\circ} 0' 0''$ , EN LAS ORILLAS DEL CUMULO DE VIRGO.

Log( $\rho$ ) (Gal/Grado<sup>2</sup>)

FIGURA III.3

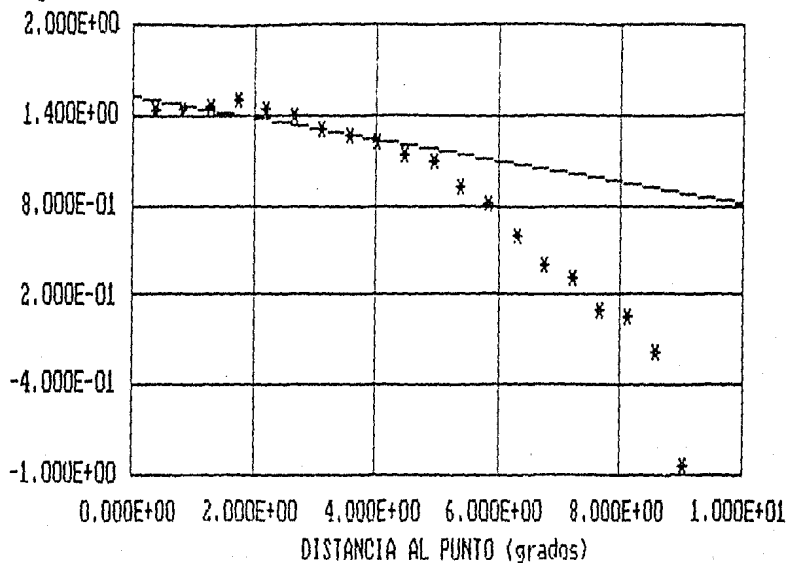


FIGURA III.3. - LA INTERSECCION DE LA RECTA CON EL EJE VERTICAL REPRESENTA LA DENSIDAD PROYECTADA LOCAL EN EL PUNTO:  $\alpha=14^{\circ}18'34.35''$ ,  $\delta=14^{\circ}39'31.2''$ , EN LA REGION CENTRAL DEL CUMULO DE VIRGO.

Log( $\rho$ ) (Gal/Grado<sup>2</sup>)

FIGURA III.4

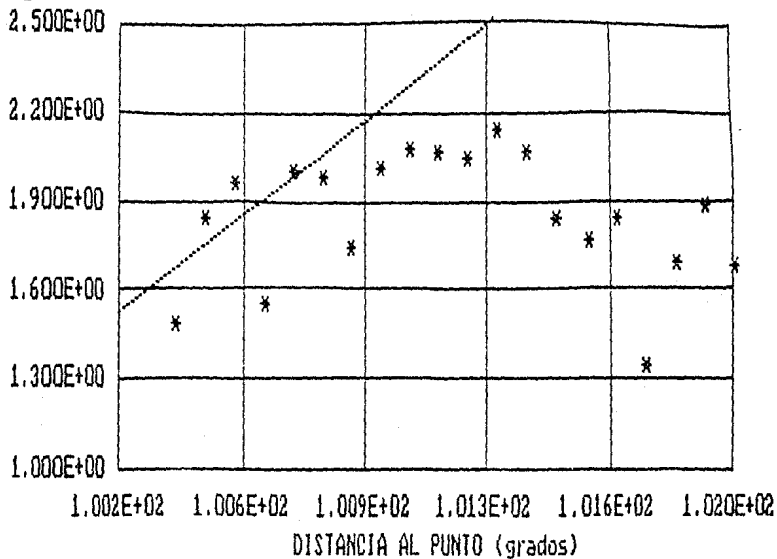


FIGURA III.4

LA INTERSECCION DE LA RECTA CON LA DISTANCIA CERO MOSTRADA EN LA FIGURA REPRESENTA LA DENSIDAD PROYECTADA LOCAL EN EL PUNTO  $\alpha=12^{\circ}58'5.75''$ ,  $\delta=27^{\circ}34'59.8''$ , EN LAS ORILLAS DEL CUMULO DE COMA.

Log( $\rho$ ) (Gal/Grado<sup>2</sup>)

FIGURA III.5

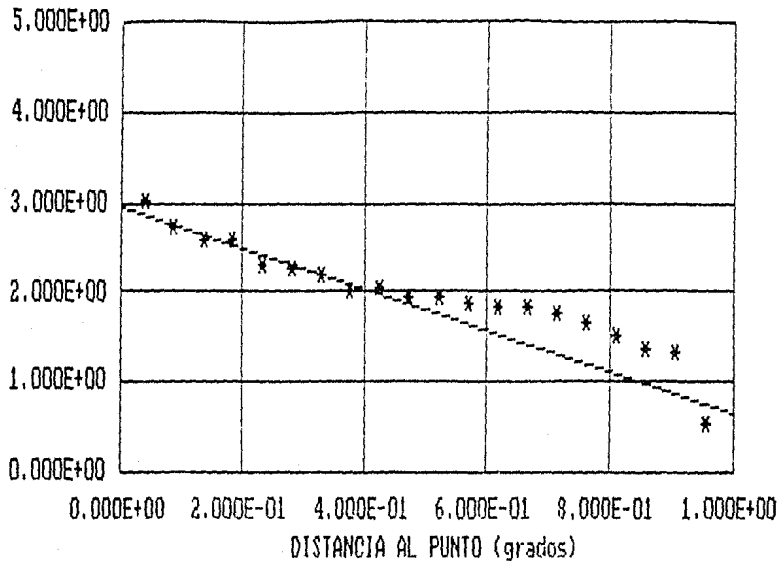


FIGURA III.5

LA INTERSECCION DE LA RECTA CON EL EJE VERTICAL REPRESENTA LA DENSIDAD PROYECTADA LOCAL EN EL PUNTO  $\sigma = 12^{\circ} 58' 17.45''$ , EN LA REGION CENTRAL DEL CUMULO DE COMA.

El método anterior se puede aplicar ahora sistemáticamente para encontrar la densidad en un número determinado de puntos dentro del cúmulo en cuestión y así obtener curvas de igual densidad como se muestra en las figuras III.6, III.7, III.8 y III.9 para los cúmulos Virgo, Coma, Hércules y el supercúmulo de Hidra-Centauro. A continuación se describen tales figuras.

La figura III.6 (arriba) muestra el mapa de los miembros estudiados del cúmulo de Coma, tal y como se dan las coordenadas en el catálogo de Dressler (1980c). Abajo, en la figura III.6, se muestran algunas curvas de igual densidad para este cúmulo. Para encontrar tales curvas lo que se hizo fue construir una malla a lo largo y a lo ancho del cúmulo, y aplicando el método descrito anteriormente se encuentra la densidad proyectada en cada uno de los nodos de la malla; es decir, a cada nodo corresponde una gráfica análoga a las figuras III.2 a la III.5. De esta manera se tienen una serie de valores sobre toda la región del cúmulo que corresponden a las diferentes densidades proyectadas en cada uno de los puntos dados, de tal manera que con estos datos es posible construir ya sea una superficie o una serie de curvas de nivel correspondientes a valores constantes en la densidad proyectada local,  $\rho_{proj}$ . En la figura se pueden apreciar dos picos de densidad que en este caso corresponden a las galaxias supergigantes NGC4874 y NGC4889.

La figura III.7 (arriba) muestra el mapa del total de miembros listados en Dressler (1980c) para el cúmulo de Hércules. En correspondencia, se muestran, abajo, en la misma figura las curvas de igual densidad proyectada local en donde claramente se pueden observar tres picos de densidad alineados aproximadamente horizontalmente, además, se pueden observar otros dos, menos pronunciados, uno arriba de los tres alineados y el otro abajo.

En analogía con las dos figuras descritas anteriormente, la III.8 muestra el mapa con todas las galaxias miembros del cúmulo de Virgo listadas en Binggeli, Sandage y Tarenghi (1984), así como las curvas de igual densidad proyectada local. Claramente se pueden observar subcondensaciones, los cuales corresponden a los subcúmulos M.M49, M87, W y W' descritos por Binggeli, Tammann y Sandage (1987), que se muestran en la figura II.5. Es notable además la aparición de nuevas subcondensaciones, uno en la parte izquierda de la figura y el otro en la parte superior derecha.

En la figura III.9 (arriba) se mapean las coordenadas del supercúmulo de Hidra-Centauro, tales coordenadas se tomaron de la cinta proporcionada por el Dr. Jorge Meinick. Abajo, en la misma figura se grafican las curvas de igual densidad para este supercúmulo, pudiéndose observar un pico de densidad muy pronunciado, aproximadamente en el centro.

Las gráficas anteriores fueron logradas gracias a los programas que se han desarrollado en el centro de cómputo del Instituto de Astronomía.

Las unidades se dan en coordenadas de las placas, es decir el eje horizontal representa la ascensión recta ( $\alpha$ ) y el vertical, la declinación ( $\delta$ ).

Cabe hacer mención, además, que el método descrito anteriormente para calcular la densidad proyectada local, no surgió de una manera espontánea, sino que fué producto de un constante trabajo. Por ejemplo, inicialmente se trabajó con una serie de discos en lugar de anillos, y en torno al punto en consideración se ajustaba una relación lineal, de la forma:  $\rho = A + Br$ . El problema que se tenía es que cuando se tendía  $r$  a cero, a veces, las densidades resultaban ser negativas.

Otra alternativa fué proponer una relación de la forma:  $\rho = A + B \exp(-r)$ . De esta manera cuando  $r$  tendiera a infinito la densidad sería igual al coeficiente  $A$ , y cuando  $r$  tendiera a cero la densidad sería igual a  $A + B$ . Esto tiene sentido físico, pero el problema que se encontró es que en el ajuste se tenía un coeficiente de correlación, en valor absoluto, mucho menor que la unidad.

Se probó después la relación:  $\rho = A \exp(Br)$ . Cualitativamente esta relación dió algunos resultados, pero en ese momento se entendió que como se trataba de discos esta relación no era local, además, en las orillas del cúmulo los discos abarcaban una gran área en donde prácticamente no había miembros del cúmulo, por lo que se concluyó que este método no era general. Finalmente se optó por el método descrito en este trabajo.



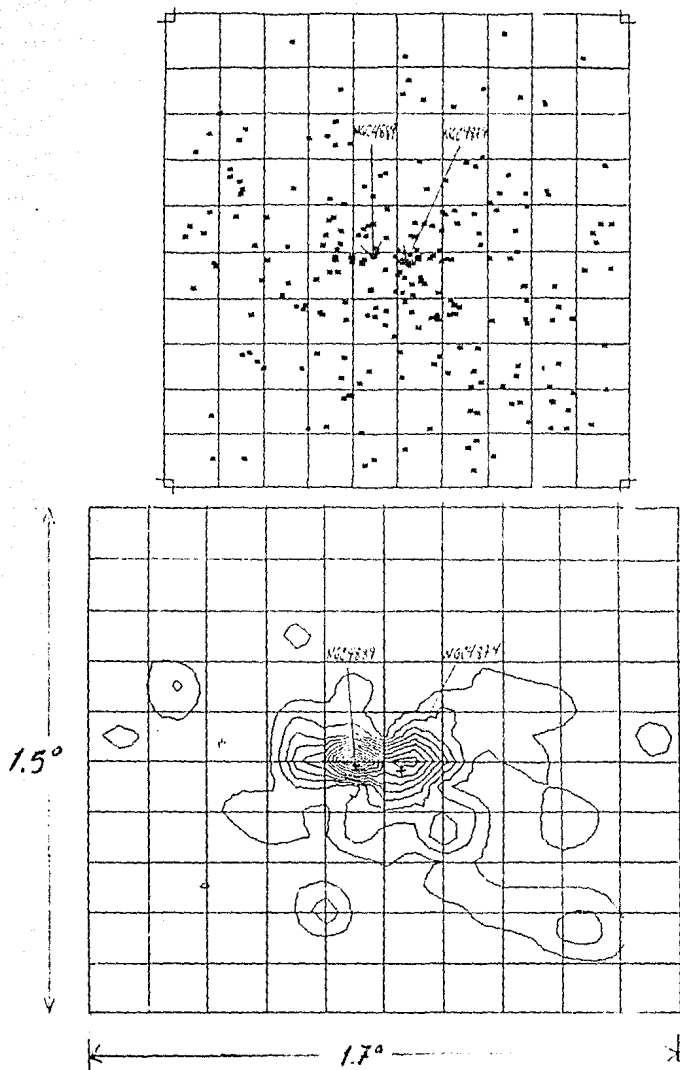


FIGURA III. 6

ARRIBA: DISTRIBUCION DE GALAXIAS ESTUDIADAS EN EL CUMULO DE COMA (TOMADAS DEL CATALOGO DE ABELL, 1965).

ABAJO: CURVAS DE IGUAL DENSIDAD PROYECTADA LOCAL AL APLICAR EL METODO DESCRITO EN ESTE TRABAJO.

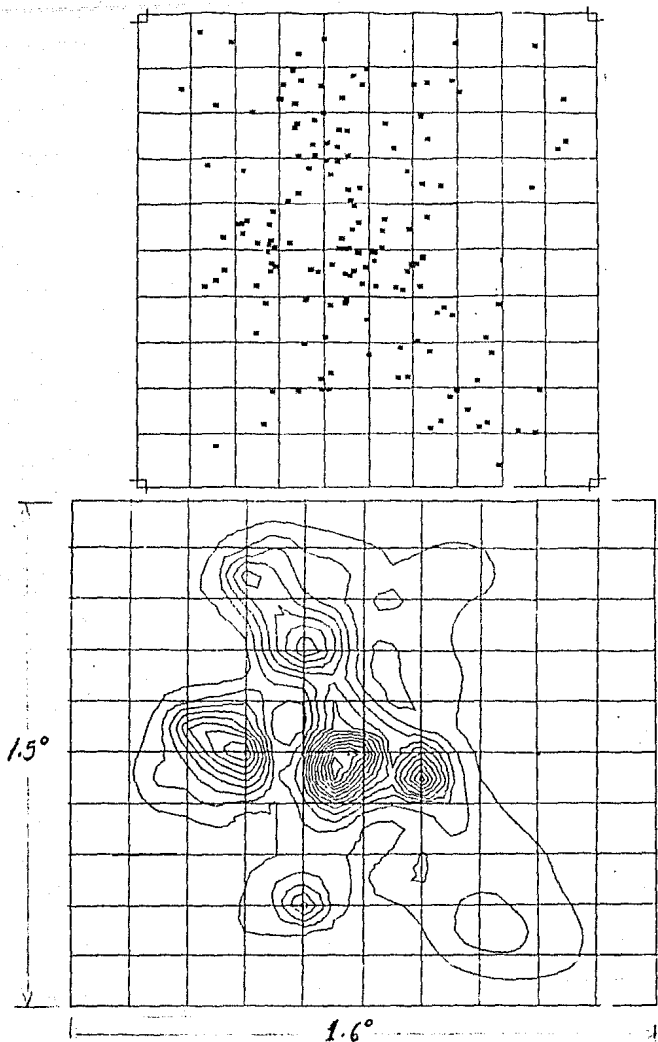


FIGURA III. 7

ARRIBA: DISTRIBUCION DE GALAXIAS ESTUDIADAS EN EL CUMULO DE HERCULES (TOMADAS DEL CATALOGO DE ABELL, 1965).

ABAJO: CURVAS DE IGUAL DENSIDAD RESULTANTES AL APLICAR EL METODO DESCRITO EN ESTE TRABAJO.

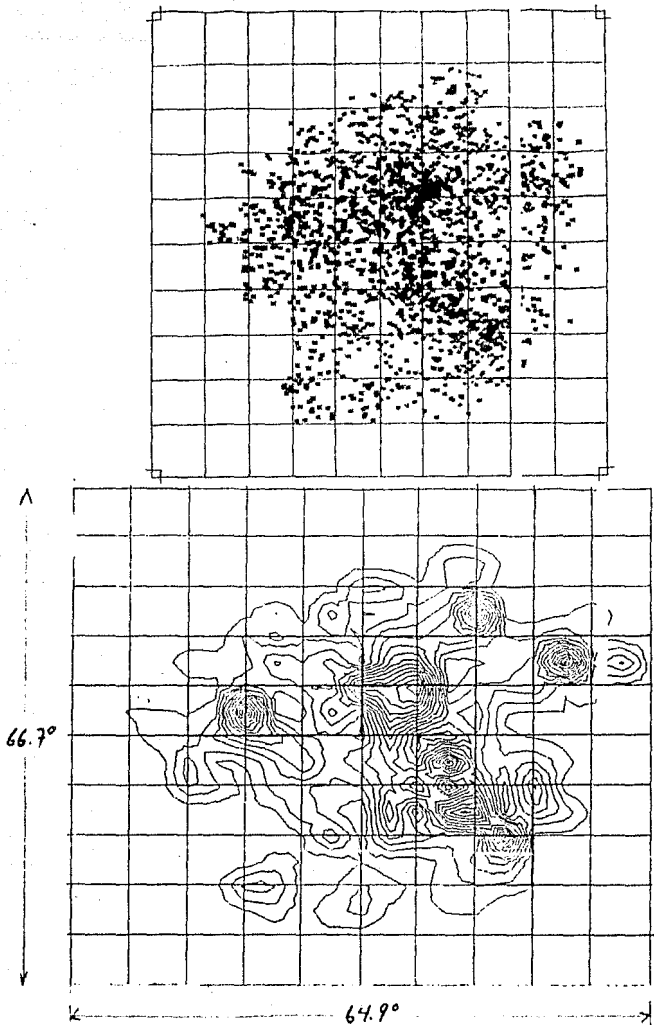


FIGURA III. 8

ARRIBA: MAPA DE LAS GALAXIAS ESTUDIADAS EN EL CUMULO DE VIRGO (TOMADAS DEL CATALOGO DE BINGGELI, SANDAGE Y TARENCHI, 1984).  
 ABAJO: CURVAS DE IGUAL DENSIDAD PROYECTADA LOCAL QUE RESULTAN AL APLICAR EL METODO DESCRITO EN ESTE TRABAJO.

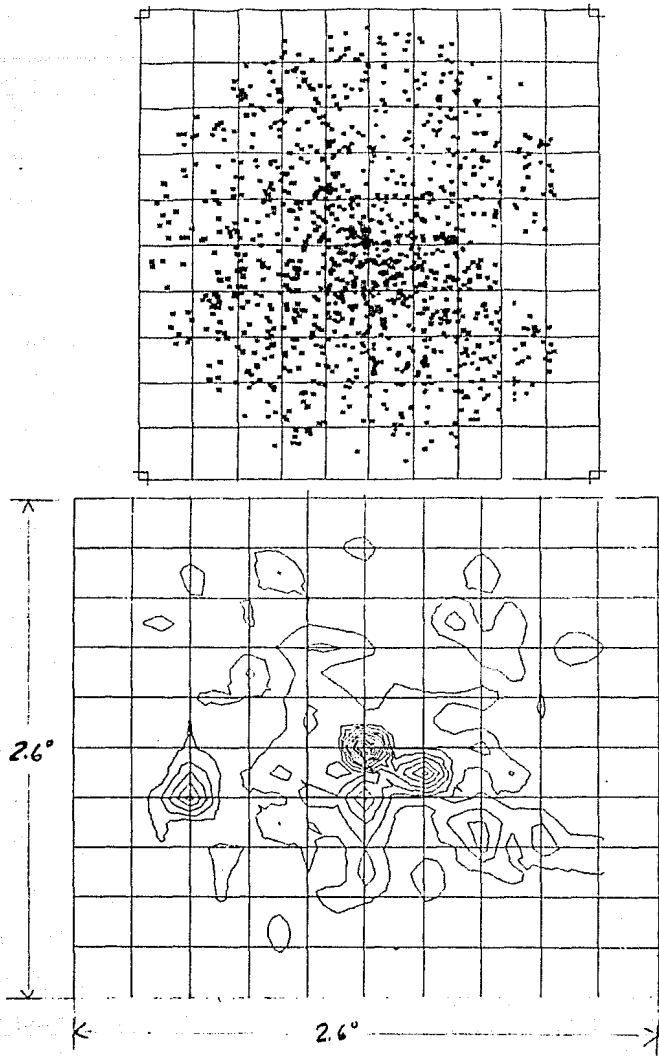


FIGURA III.  $\triangleright$

ARRIBA: DISTRIBUCION DE GALAXIAS EN EL SUPERCUMULO DE HIDRA Y CENTAURO.  
 ABAJO: CURVAS DE IGUAL DENSIDAD PROYECTADA LOCAL QUE RESULTAN AL APLICAR EL METODO DESCRITO EN EL PRESENTE TRABAJO.

Al analizar las figuras III.6, III.7, III.8 y III.9 correspondientes a las curvas de igual densidad de los cúmulos de Coma, Virgo, Hércules y el supercúmulo de Hidra-Centauro, claramente se observan marcadas subcondensaciones. Por ejemplo, en el cúmulo de Coma (figura III.6) se muestran dos subcondensaciones centradas cada una, aproximadamente en las galaxias elípticas gigantes: NGC4874 y NGC4889. En el cúmulo de Virgo (figura III.8) se observan varias de esas subcondensaciones centradas, aproximadamente en M87 y M89, pudiéndose observar varias condensaciones más. También se encuentran estos tipos de agrupaciones en el cúmulo de Hércules y el supercúmulo de Hidra-Centauro (figuras III.7 y III.9, respectivamente).

El resultado para el cúmulo de Coma es análogo al encontrado por Mellier et. al. (1980), quien calculó curvas de igual densidad de una muestra de 1630 miembros y llega a la conclusión de que la presencia de subcondensaciones es una evidencia de que el cúmulo no ha llegado a la etapa de virialización. Las curvas de igual densidad calculadas por Mellier et. al. se muestran en la figura III.9a. Sin embargo, vemos que las curvas de igual densidad encontradas en esta tesis tienen una mayor resolución, pudiéndose observar claramente dos picos de densidad bien definidos muy cerca de las dos galaxias supergigantes.

Por lo tanto, es un hecho que los cúmulos de galaxias se encuentran formados por subcondensaciones, las cuales podrían ser muy importantes para la comprensión de la formación de un cúmulo. Por ejemplo, White (1976), partiendo de una distribución esférica uniforme de galaxias expandiéndose con la ley de Hubble, hace una simulación de N-cuerpos y su resultado es que el conjunto evoluciona de tal manera que, efectivamente antes de llegar a una configuración de relajamiento, se forman claros subsistemas o subcondensaciones. Tal evolución se muestra en la figura III.9b. El resultado anterior se podría interpretar como una muestra de que las subcondensaciones en los cúmulos de galaxias son características de juventud del sistema, por ejemplo, en la etapa (a) de la figura mencionada anteriormente, muestra la configuración inicial, en la etapa (b) se han formado varias subcondensaciones, en la etapa (c) se ha formado una configuración en donde predominan dos subcondensaciones centrales y finalmente, en la etapa (d) el cúmulo se encuentra relajado.

Se han hecho estadísticas para detectar y medir subcondensaciones en los cúmulos de galaxias, por ejemplo para detectar doble subestructura. Fitchett y Webster (1987) reportan un método basado en la máxima verosimilitud y consiste en lo siguiente: dado un conjunto de puntos  $(x,y)$  estos se proyectan en una recta calculando entonces la medida de doble agrupamiento  $\lambda$ , dada por:

$$\mathcal{L} = \max_{\text{part}} [ \sigma_T / ( \sigma_l + \sigma_r ) - 1 ]$$

en donde, si los puntos proyectados son  $(x_1, \dots, x_n)$ , entonces  $\sigma = \sum [x_j - \mu]^2$  siendo  $\mu = \sum x_j / n$ . Si la recta es cortada en algún punto entonces,  $\sigma_l$  y  $\sigma_r$  se evalúan a la izquierda y a la derecha, respectivamente y  $\sigma_T$  se evalúa en el total de puntos de la recta. Se ve claramente que  $\sigma_l$  y  $\sigma_r$  son mínimos cuando la línea de las proyecciones de los puntos se corta en medio de dos subcondensaciones, que corresponde al valor de  $\mathcal{L}$ .

Rotando ahora la recta de las proyecciones en el sentido contrario de las manecillas del reloj se tendrá una función  $\mathcal{L}(\phi)$ , en donde  $\phi$  es el ángulo entre la línea de las proyecciones y una recta de referencia, digamos  $\phi=0$ , esta es la llamada función de Lee. Claramente para una distribución circular simétrica, la función de Lee será constante para todo  $\phi$ , pero si existe subestructura, esta función tendrá un máximo y un mínimo. Por ejemplo, si dos subcondensaciones se encuentran alineadas a un ángulo  $\phi_1$ , entonces para ese ángulo  $\mathcal{L}(\phi)$  será máxima.

Fitchett y Webster (1987) analizaron el cúmulo de Coma usando el procedimiento anterior y graficaron la función de Lee para tres casos que se muestran en las figuras III.9c, III.9d y III.9e que a continuación se detallan:

Figura III.9c.- Corresponde a 54 miembros del cúmulo de Coma más brillantes que  $m_v=15.7$ . A la izquierda se mapean las curvas de igual densidad y a la derecha la función de Lee.

Figura III.9d.- Corresponde a 923 galaxias dentro de una región de 1.22 grados cuadrados centrada en el cúmulo de Coma. Se muestran las curvas de igual densidad y la función de Lee.

Figura III.9e.- En esta figura se mapea un subconjunto de la figura III.9d y también se grafica la función de Lee.

De lo anterior, Fitchett y Webster concluyen que el cúmulo de Coma tiene una subestructura central. Y para estudiar la dinámica de esta subestructura central de Coma, Fitchett y Webster la consideran como dos masas puntuales moviéndose en una órbita radial, llegando a la ecuaciones paramétricas:

$$R = R_m ( 1 - \cos \chi ) / 2$$

$$t = \left[ R_m^3 / ( 8GM_T ) \right]^{1/2} ( \chi - \text{sen } \chi )$$

$$v = \left[ 2GM_T / R_m \right]^{1/2} \text{sen } \chi / ( 1 - \cos \chi )$$

en donde R es la separación de las subagrupaciones al tiempo t,  $v$



es la velocidad relativa.  $M_T$  es la masa total del sistema y  $R_m$  es el radio de máximo alejamiento.

Tomando la proyección del radio:  $R_p = R \cos \alpha = 0.14$  Mpc, en donde  $\alpha$  representa el ángulo entre el plano del cielo y el vector que une a los dos grupos y la velocidad radial como  $v_{rel} = v \sin \alpha = 604$  km/seg y tomando la masa del sistema igual a  $7.2 \times 10^{14} M_\odot$  queda entonces una ecuación en  $v_{rel}$  y  $\alpha$  de la forma  $\alpha(v_{rel})$ . Con esto, Fitchett y Webster encuentran que la probabilidad de que el sistema se encuentre ligado es de 0.984.

Sin embargo mediante un cálculo sencillo se encuentra para los tiempos de cruce y de relajamiento, respectivamente para el cúmulo de Coma:

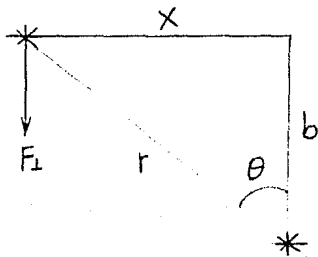
$$t_{CR} = 1.7 \times 10^9 \text{ años}$$

$$T_R = 2.4 \times 10^{10} \text{ años}$$

Para  $t_{CR}$  se ha usado la ecuación I.11 y para  $T_R$  en vez de la ecuación I.12 se ha tomado el sencillo desarrollo dado por Binney y Tremaine (1987) y que consiste en lo siguiente:

Supóngase que una galaxia del campo general se aproxima a otra del cúmulo en cuestión con una velocidad  $v$  y con parámetro de impacto  $b$ , según se muestra en la figura siguiente:

Suponiendo que el cambio en la velocidad  $\delta v$  es tal que  $|\delta v| \ll 1$  se tendrá lo siguiente: si  $F_{\perp}$  representa la componente de la fuerza perpendicular a  $v$ , entonces:



$$\begin{aligned}
 F_{\perp} &= Gm^2 / (x^2 + b^2) \cos \theta \\
 &= Gm^2 / b^2 \left[ 1 + (x/b)^2 \right]^{-3/2} \\
 &\approx Gm^2/b^2 \left[ 1 + (\nu t/b)^2 \right]^{-3/2}
 \end{aligned}$$

De acuerdo a la segunda ley de Newton:  $F_{\perp} = m \cdot dv/dt$ , se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
 |\delta v_{\perp}| &\approx Gm / (b\nu) \int_{-\infty}^{\infty} (1 + y^2)^{-3/2} dy \\
 &= 2Gm / (b\nu)
 \end{aligned}$$

Por otra parte, la densidad promedio de galaxias es del orden de  $N/(\pi R^2)$ , en donde  $R$  es el radio efectivo medio del cúmulo y  $N$  es el número de galaxias del cúmulo. Entonces, el número de encuentros que sufre la galaxias entre  $b$  y  $b+db$  está dado por:

$$\delta n = N/(\pi R^2) 2\pi b db = 2N/R^2 b db$$

Cada encuentro produce una pequeña desviación  $\delta v_{\perp}$ , pero ya que estas desviaciones son completamente aleatorias, entonces  $\delta v_{\perp} = 0$ . pero la suma de los cuadrados será diferente de cero:

$$\delta v_{\perp}^2 \approx \left[ 2GM/(bv) \right]^2 2N/R^2 b db$$

Integrando entre  $b_{\min}$  = distancia promedio entre galaxias y  $b = R$  se tiene:

$$\Delta v_{\perp}^2 \equiv \int_{b_{\min}}^R \delta v_{\perp}^2 = 8N \left[ Gm/(Rv) \right]^2 \ln ( R/b_{\min} )$$

Por otra parte, de acuerdo al teorema del Virial (apéndice C), se tiene que:

$$M_c = v^2 R/G$$

$M_c$  es la masa total del cúmulo y  $M_c = Nm$ , entonces:

$$\Delta v_{\perp}^2 = 8Nv^2/N^2 \ln ( R/b_{\min} )$$

y por lo tanto:

$$\Delta v_{\perp}^2 / v^2 = 8/N \ln ( R/b_{\min} )$$

Cada vez que la galaxia cruza el cúmulo con velocidad  $v_{\perp}^2$  cambiará del orden de  $\Delta v_{\perp}^2$ , por lo tanto, el número de veces que la galaxia cruce el cúmulo para cambiar su velocidad en una cantidad igual a sí misma será:

$$n_r = N / ( 8 \ln R/b_{\min} )$$

Entonces se define el tiempo de relajamiento como:

$$T_R = n_r t_{CR}$$

en donde  $t_{CR}$  está dado por la ecuación 1.11, es decir:

$$T_R = N t_{CR} / ( 8 \ln R/b_{\min} )$$

Vemos que para el cúmulo de Coma, el tiempo de relajamiento es del orden del tiempo de Hubble, con lo cual lo podemos suponer, aproximadamente, como un cúmulo relajado y así poder usar el teorema del virial para calcular la masa total del sistema y en consecuencia la densidad volumétrica en las inmediaciones de este cúmulo (se han tomado los valores  $N \approx 900$ ,  $R \approx 2.5$  Mpc y  $b_{\min} \approx 1992$  pc, este último corresponde a la distancia media entre galaxias).

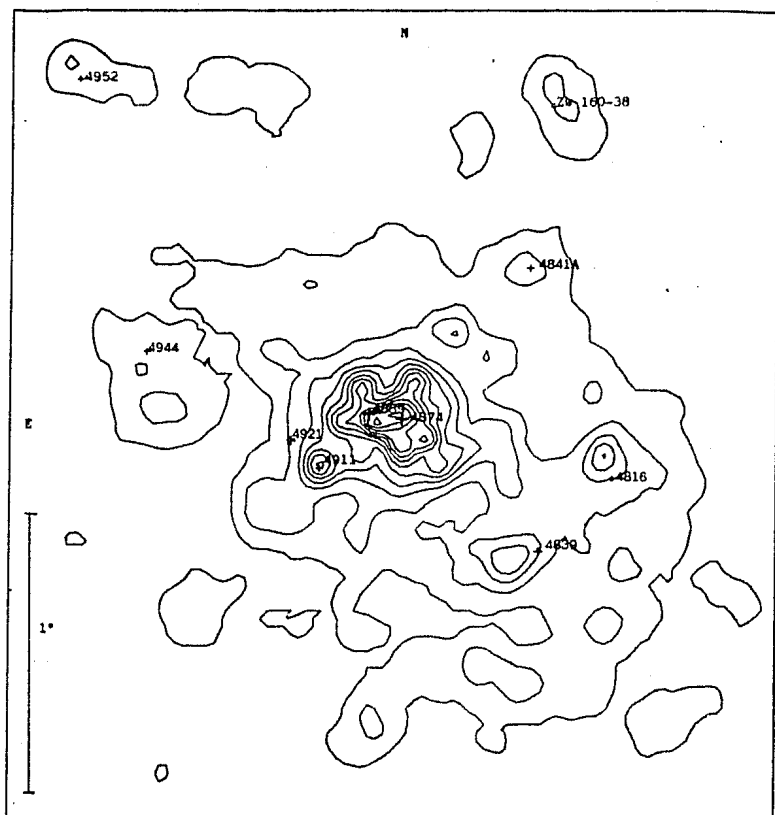


FIGURA III. 9a

SE MUESTRAN CURVAS DE IGUAL DENSIDAD DE 1630 GALAXIAS DE LA REGION DEL CUMULO DE COMA (TOMADA DE MELLIER et. al., 1988). LAS  $\circ$  GALAXIAS MAS BRILLANTES SE ENCUENTRAN EN LAS REGIONES DE ALTA DENSIDAD.

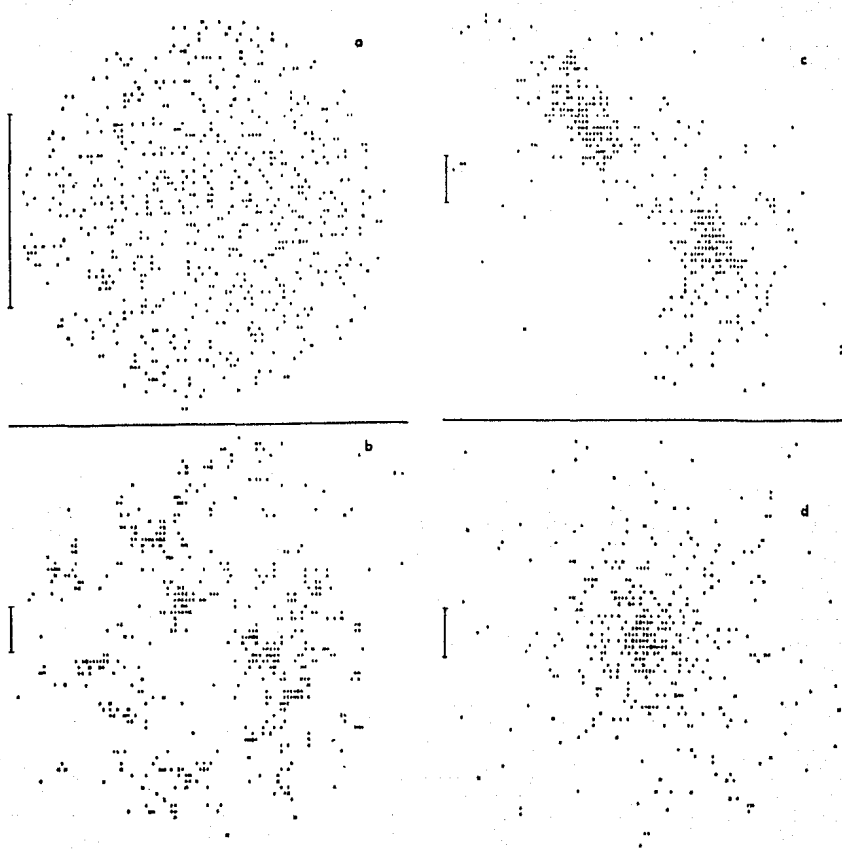


FIGURA III. 9b  
 DISTRIBUCION PROYECTADA DE PARTICULAS EN EL  
 MODELO DE UN CUMULO PARA CUATRO TIEMPOS  
 (TOMADA DE WHITE, 1970): (a)  $t=0$ , (b)  $t=0.06$ ,  
 (c)  $t=0.30$  Y (d)  $t=0.925$ .

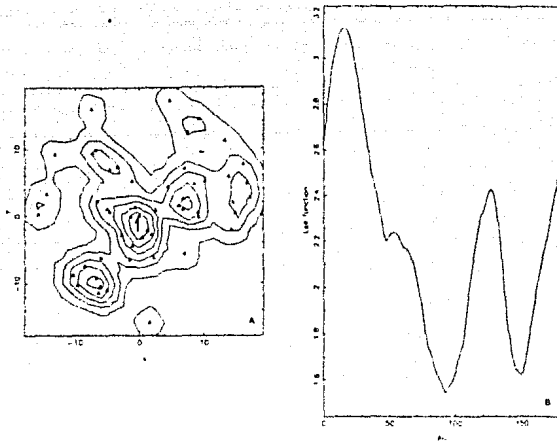


FIGURA III. 9c  
 54 MIEMBROS DEL CUMULO DE COMA MAS BRILLANTES  
 QUE  $m_V = -15.7$  Y LAS CORRESPONDIENTES CURVAS DE  
 IGUAL DENSIDAD (TOMADA DE FITCHETT Y WEBSTER,  
 1987). A LA DERECHA SE MUESTRA LA FUNCION DE  
 LEE.

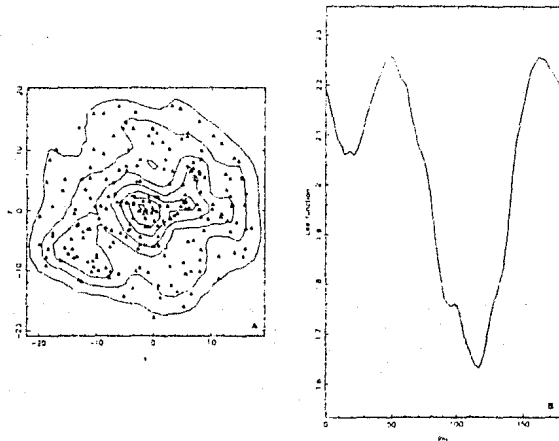


FIGURA III. 9d  
 928 GALAXIAS DENTRO DE UN RADIO DE 1.22 GRADOS  
 CUADRADOS CENTRADO EN EL CUMULO DE COMA. A LA  
 DERECHA SE MUESTRA LA FUNCION DE LEE. (TOMADA  
 DE FITCHETT Y WEBSTER, 1987).

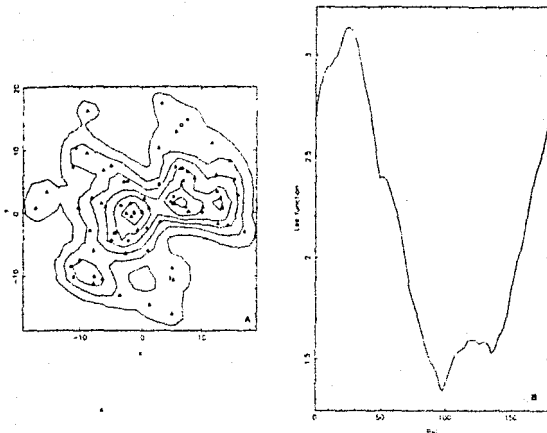


FIGURA III.9c  
 SUBCONJUNTO DE LA FIGURA III.9d (TOMADA DE  
 FITCHETT Y WEBSTER, 1967). SE MUESTRA TAMBIEN  
 LA CORRESPONDIENTE FUNCION DE LEE.



### III.2.- REALACION ENTRE $r_0$ , $M_V$ , $\mu_0$ y $\rho$ .

Ya en trabajos anteriores se han hecho estudios en donde se correlacionan los radios efectivos ( $r_0$ ), la magnitud absoluta ( $M_V$ ), el brillo superficial ( $\mu_0$ ) y la densidad proyectada local en cúmulos de galaxias. Por ejemplo, Recillas-Cruz (1988) encuentra para los cúmulos de Coma, Perseo, Abell 212199, Abell 1367, Abell 1228 y Hércules correlaciones de la forma:

$$\log r_0 = a + b M_V \quad (\text{III.5})$$

$$\log r_0 = A + B M_V + C \mu_0 \quad (\text{III.6})$$

En la tabla III.0 (tomada de Recillas-Cruz, 1988) se muestran las correlaciones bien establecidas entre  $r_0$ ,  $M_V$  y  $\mu_0$ . En todos los cúmulos estudiados se observa que los coeficientes A, B y C de las relaciones III.6 varían sistemáticamente del centro a las afueras del centro de cada cúmulo, esto hace suponer que el radio efectivo  $r_0$  depende también de la densidad proyectada local. Proponiéndose una relación de la forma:

$$\log r_0 = A + B M_V + C \mu_0 + D \log \rho_{\text{proj}} \quad (\text{III.7})$$

En este trabajo se encuentran correlaciones análogas a las anteriores, la diferencia es que aquí se calcula la densidad con el método descrito. Por ejemplo para la ecuación III.6, haciendo uso de la paquetería IMSL del Centro de Cálculo del IAUNAM, en este trabajo se encuentra que el valor para los coeficientes A, B y C para los cúmulos de Coma y Virgo son, para el cúmulo de Coma:

$$A = -7.32964$$

$$B = 0.203422$$

$$C = 0.179212$$

y para el cúmulo de Virgo:

$$A = -6.310730$$

$$B = 0.189784$$

$$C = 0.188509$$

Usando ahora los programas de cómputo desarrollados en este trabajo para calcular la densidad, se encuentra una correlación de la forma de la ecuación III.7, en donde se encontró para los coeficientes A, B, C y D los siguientes valores, para el cúmulo de Coma:

$$A = -7.28509$$

$$B = 0.202449$$

$$C = 0.178916$$

$$D = -7.636567 \times 10^{-3}$$

y para el cúmulo de Virgo:

$$A = -6.35351$$

$$B = 0.190582$$

$$C = 0.188893$$

$$D = 1.288509 \times 10^{-2}$$

Se muestran los resultados en la tablas III.1 y III.2, que se describen a continuación.

La tabla III.1 muestra para el cúmulo de Coma: i) En la columna 1 los nombres de cada galaxia estudiada (tomados de Dressler, 1980c), ii) Las columnas 2 y 3 muestran las coordenadas ascensión recta ( $\alpha$ ) en horas, minutos y segundos y declinación ( $\delta$ ) en grados, minutos y segundos del año de 1950 (tomadas de Dressler, 1980c), iii) En la columna 4 se encuentra la Magnitud absoluta en el rojo ( $M_V$ ) (tomada de Strom y Strom, 1978a), iv) La columna 5 contiene el brillo superficial ( $\mu_0$ ) en magnitud / segundo de arco cuadrado (tomado de Strom y Strom, 1978a), v) La columna 6 muestra la densidad proyectada local calculada en este

trabajo en galaxias / grado cuadrado , vi) En la columna 7 se encuentran los logaritmos de los radios efectivos, en segundos de arco, dados por Strom y Strom (1978a) y por último, en la columna 8 se encuentran los radios efectivos calculados con la relación III.7, dados también en segundos de arco.

En la tabla III.2 se muestran los mismos parámetros que se dan en la tabla II.1 pero para el cúmulo de Virgo. En donde los radios efectivos se han calculado de los perfiles de luminosidad dados por Binggeli, et. al. (1984) definidos como los radios a la mitad de la luz de los perfiles de luminosidad. Y la magnitud se ha tomado en el azul.

TABLA III. O

Ajuste de  $\log r_e$  como función de  $M_V$  y  $\mu_e$ .

CUMULO	$\log r_e =$	A	+	B	$M_V$	+	C	$\mu_e$	
		(error A)		(error B)			(error C)		
Coma Centro	$\log r_e =$	-7.346	-	0.201	$M_V$	+	0.173	$\mu_e$	$\sigma=0.06$
		(±0.138)		(±0.006)			(±0.003)		
Coma West y Far West	$\log r_e =$	-7.039	-	0.178	$M_V$	+	0.184	$\mu_e$	$\sigma=0.05$
		(±0.123)		(±0.005)			(±0.004)		
Perseo Centro	$\log r_e =$	-6.873	-	0.180	$M_V$	+	0.173	$\mu_e$	$\sigma=0.02$
		(±0.083)		(±0.003)			(±0.003)		
Perseo Fuera	$\log r_e =$	-6.627	-	0.171	$M_V$	+	0.170	$\mu_e$	$\sigma=0.04$
		(±0.087)		(±0.004)			(±0.002)		
Perseo LSB	$\log r_e =$	-7.716	-	0.187	$M_V$	+	0.207	$\mu_e$	$\sigma=0.07$
		(±0.233)		(±0.008)			(±0.007)		
Abell 2199 Centro	$\log r_e =$	-6.384	-	0.163	$M_V$	+	0.169	$\mu_e$	$\sigma=0.03$
		(±0.120)		(±0.005)			(±0.003)		
Abell 2199 Fuera	$\log r_e =$	-6.376	-	0.173	$M_V$	+	0.159	$\mu_e$	$\sigma=0.04$
		(±0.066)		(±0.003)			(±0.002)		
Abell 1367	$\log r_e =$	-6.864	-	0.190	$M_V$	+	0.167	$\mu_e$	$\sigma=0.06$
		(±0.090)		(±0.004)			(±0.003)		
Abell 1228	$\log r_e =$	-6.509	-	0.185	$M_V$	+	0.154	$\mu_e$	$\sigma=0.07$
		(±0.168)		(±0.009)			(±0.005)		
Hércules	$\log r_e =$	-6.316	-	0.176	$M_V$	+	0.156	$\mu_e$	$\sigma=0.06$
		(±0.075)		(±0.004)			(±0.004)		

SE MUESTRAN LOS AJUSTES DE  $\log r_e$  COMO FUNCION DE  $M_V$  Y  $\mu_e$  PARA LOS CUMULOS DE COMA, PERSEO, A2199, A1967, A1228 Y HERCULES (TOMADA DE RECILLAS-CRUZ, 1988). SE MUESTRA COMO VARIAN LOS COEFICIENTES A, B, Y C AL PASAR DEL CENTRO A LAS AFUERAS DEL CENTRO DE CADA CUMULO, LO CUAL HACE SUPONER QUE LA RELACION DEPENDE TAMBIEN DE LA DENSIDAD PROYECTADA LOCAL DE LA FORMA:  $\log r_e = A + B M_V + C \mu_e + D \rho_{proj}$ .

TABLA III.1

Densidad proyectada y radios efectivos para galaxias del cúmulo Coma

GALAXIA	$\alpha$	$\delta$	$-M_v$	$\mu_0$	$\log \rho$	$\log r_0$	$\log r_0$
		(1950)		[mag/arcsec <sup>2</sup> ]	[gal/arcsec <sup>2</sup> ]	[arcsec]	calculado
RB133	12 <sup>h</sup> 59 <sup>m</sup> 0.9 <sup>s</sup>	28°16'21.7''	20.3	16.16	2.32	-0.27	-0.302
RB261	12 56 39.0	28 13 37.5	20.1	16.86	2.19	-0.19	-0.216
I4012	12 57 42.1	28 20 55.2	21.0	16.16	2.72	-0.07	-0.163
RB257	12 56 29.9	28 13 59.4	20.6	17.29	2.15	-0.06	-0.038
RB139	12 56 59.4	28 33 19.3	20.4	17.73	2.05	-0.04	0.001
I4021	12 57 48.7	28 18 43.9	21.0	16.80	2.89	0.03	-0.050
RB262	12 56 41.4	28 11 4.3	20.8	17.76	2.22	0.06	0.086
RB8	12 56 57.0	28 9 47.7	20.6	17.94	2.29	0.07	0.078
N4876	12 57 19.1	28 10 53.4	21.5	16.41	2.63	0.08	-0.016
I3960	12 56 42.2	28 7 25.5	21.2	16.68	2.26	0.08	-0.026
RB58	12 57 24.0	28 22 0.9	19.5	19.42	2.53	0.13	0.118
RB234	12 57 5.2	28 3 35.7	21.8	18.79	2.32	0.15	0.472
RB155	12 57 29.0	28 23 50.3	20.7	18.08	2.46	0.15	0.122
RB66	12 57 29.8	28 20 0.5	19.6	19.35	2.64	0.16	0.125
RB85	12 57 47.0	28 20 44.3	19.3	19.98	2.67	0.18	0.177
RB167	12 57 42.1	28 26 23.5	21.1	18.01	2.25	0.20	0.192
I3976	12 57 4.3	28 7 3.6	21.7	18.15	2.49	0.23	0.336
RB128	12 58 42.0	28 18 0.1	20.1	19.81	2.59	0.25	0.309

TABLA III.1 (Continuación)

Densidad proyectada y radios efectivos para galaxias del cúmulo Coma

GALAXIA	$\alpha$ (1950)	$\delta$	$-M_V$	$\mu_0$ [mag/arcsec <sup>2</sup> ]	$\log \rho$ [gal/arcsec <sup>2</sup> ]	$\log r_0$ [arcsec]	$\log r_e$ calculado
I3947	12 56 26.6	28 3 13.8	21.2	18.31	2.17	0.25	0.266
R2560	12 56 34.8	28 14 10.4	20.2	19.51	2.14	0.27	0.279
RB119	12 58 21.5	28 11 37.2	20.8	18.92	2.92	0.27	0.289
RB224	12 56 47.9	27 53 55.7	20.6	19.41	2.35	0.30	0.340
RB6	12 56 54.5	28 9 14.9	20.9	19.19	2.36	0.32	0.361
I3998	12 57 21.6	28 14 32.2	21.1	18.46	2.60	0.35	0.270
I3946	12 56 23.3	28 4 30.4	21.9	18.24	2.13	0.36	0.396
RB91	12 57 51.1	28 20 0.5	20.6	19.96	2.80	0.39	0.435
RB55	12 57 30.6	28 11 59.0	20.1	20.59	2.80	0.40	0.447
N4883	12 57 29.8	28 18 11.1	21.6	18.41	2.73	0.40	0.361
RB171	12 57 54.4	28 22 0.9	19.1	21.62	2.73	0.43	0.429
RB136	12 56 52.8	28 28 2.0	20.5	20.40	2.26	0.45	0.498
A4	12 55 38.1	28 5 3.2	21.3	19.64	1.75	0.46	0.528
I4041	12 58 38.1	28 15 59.8	21.2	19.31	2.94	0.46	0.439
N4867	12 56 49.6	28 14 21.3	21.5	19.56	2.21	0.49	0.550
N4896	12 58 3.4	28 36 58.1	22.0	18.50	2.10	0.51	0.463
N4906	12 58 14.1	28 11 37.1	21.5	19.38	2.88	0.55	0.513
RB59	12 57 24.0	28 20 55.2	19.5	21.34	2.63	0.55	0.461

TABLA III.1 (Continuación)

Densidad proyectada y radios efectivos para galaxias del cúmulo Coma

GALAXIA	$\alpha$			$\delta$			$-M_V$	$\mu_0$	$\log \rho$	$\log r_0$	$\log r_e$
	(1950)						[mag/arcsec <sup>2</sup> ]	[mag/arcsec <sup>2</sup> ]	[gal/arcsec <sup>2</sup> ]	[arcsec]	calculado
I3957	12 56 41.3	28 02 08.2		21.1	20.16	2.17	0.55	0.577			
RB113	12 58 16.6	28 14 32.2		21.1	20.05	2.89	0.56	0.552			
I4026	12 57 56.1	28 18 54.9		21.3	19.78	2.98	0.56	0.543			
I4045	12 58 22.3	28 21 39.0		21.9	19.43	2.67	0.56	0.604			
N4865	12 56 54.5	28 21 06.2		22.4	19.04	2.38	0.58	0.638			
A2	12 58 16.6	28 36 36.3		21.8	20.22	2.08	0.60	0.73			
I3959	12 56 43.0	28 03 02.9		21.5	19.86	2.14	0.62	0.605			
O-48	12 57 42.9	27 57 45.5		20.5	21.42	2.36	0.66	0.679			
N4869	12 56 57.8	28 10 42.4		22.0	19.62	2.32	0.67	0.661			
N4908	12 58 25.6	28 18 43.9		22.1	19.89	2.80	0.71	0.723			
RB129	12 58 48.6	28 11 04.3		20.4	21.88	2.57	0.72	0.74			
I3973	12 57 05.2	28 09 04.0		21.8	20.84	2.66	0.76	0.837			
I4042	12 58 16.6	28 14 32.2		21.6	20.62	2.89	0.78	0.755			
N4850	12 54 27.5	28 11 48.1		21.3	21.22	1.44	0.81	0.813			
N4840	12 55 07.8	27 52 28.2		22.0	20.32	1.08	0.83	0.796			
N4860	12 56 38.1	28 23 28.4		21.5	20.43	2.25	0.86	0.706			
A3	12 58 55.2	28 28 02.0		21.1	21.95	2.08	0.88	0.898			



TABLA III.1 (Continuación)

Densidad proyectada y radios efectivos para galaxias del cumulo Coma

GALAXIA	$\alpha$ (1950)	$\delta$	$-M_V$	$\mu_0$ [mag/arcsec <sup>2</sup> ]	$\log \rho$ [gal/arcsec <sup>3</sup> ]	$\log r_0$ [arcsec]	$\log r_e$ calculado
RB241	12 56 04.4	28 16 54.5	22.1	20.94	1.92	0.90	0.921
14051	12 58 28.1	28 16 43.5	22.4	20.52	2.89	0.94	0.899
N4828	12 54 16.9	28 17 16.4	21.6	21.65	1.24	1.02	0.952
N4881	12 57 30.6	28 30 57.0	22.1	21.39	2.12	1.05	1.000
N4854	12 56 40.5	27 54 39.5	22.4	22.12	2.23	1.12	1.19
N4864	12 56 49.6	28 14 21.3	21.9	22.02	2.21	1.13	1.071
RB268	12 56 47.9	28 20 44.3	21.5	23.16	2.26	1.28	1.194
N4816	12 53 46.5	28 01 02.5	23.5	23.61	1.50	1.80	1.685

TABLA III.2

Densidad proyectada y radios efectivos para galaxias del cúmulo de Virgo

GALAXIA	$\alpha$ (1950)	$\delta$	$-M_V$	$H_0$ [mag/arcsec <sup>2</sup> ]	$\log \rho$ [gal/arcsec <sup>2</sup> ]	$\log r_e$ [']	$\log r_e$ calculado
R47	12 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup> 38.2 <sup>a</sup>	13° 4'48.0''	12.49	24.35	1.93	0.63	0.65
R7	12 24 39.0	12 19 12.0	13.81	23.06	1.72	0.63	0.66
R10	12 24 17.1	12 40 48.0	11.93	25.01	1.92	0.65	0.67
R4	12 23 55.3	13 11 60.0	12.79	24.28	1.95	0.67	0.70
R25	12 27 27.3	13 23 12.0	11.89	25.23	1.79	0.68	0.70
R16	12 25 7.0	12 45 36.0	12.08	25.06	1.94	0.69	0.71
X11	12 32 26.5	11 36 48.0	12.97	24.19	1.37	0.69	0.70
R23	12 27 11.7	13 4 48.0	13.49	23.76	1.77	0.71	0.73
R5	12 23 49.1	12 47 12.0	13.38	23.87	1.93	0.71	0.73
R13	12 25 41.3	12 14 24.0	12.65	24.81	1.85	0.77	0.77
R40	12 25 38.2	13 4 48.0	12.29	25.39	1.92	0.80	0.81
R39	12 28 17.1	12 42 24.0	13.72	24.05	1.80	0.81	0.83
R31	12 28 42.1	13 23 60.0	13.46	24.31	1.70	0.81	0.83
13° 69	12 26 24.9	12 59 12.0	12.99	24.81	1.87	0.82	0.83
R21	12 26 34.3	12 18 24.0	12.67	24.28	1.81	0.85	0.67
13° 60	12 24 48.3	13 23 12.0	13.29	24.75	1.89	0.87	0.88
R8	12 24 51.4	12 20 48.0	13.98	24.05	1.84	0.87	0.88
X6	12 31 24.1	10 51 12.0	14.30	23.81	1.25	0.88	0.88
R19	12 25 35.1	13 10 24.0	15.26	22.85	1.91	0.88	0.90

TABLA III.2 (Continuación)

Densidad proyectada y radios efectivos para galaxias del cúmulo de Virgo

GALAXIA	$\alpha$ (1950)	$\delta$	$-M_V$	$\mu_0$ [mag/arcsec <sup>2</sup> ]	$\log \rho$ [gal/arcsec <sup>2</sup> ]	$\log r_0$ [']	$\log r_e$ calculado
12° 46	12 <sup>h</sup> 24 <sup>m</sup> 51.4 <sup>s</sup>	12°35'60.0''	13.54	24.58	1.92	0.90	0.89
12° 62	12 28 48.3	13 0 48.0	15.21	22.88	1.72	0.90	0.89
12° 57	12 27 33.5	12 39 12.0	12.76	24.74	1.86	0.90	0.77
13° 71	12 26 43.6	13 15 12.0	15.64	22.59	1.79	0.91	0.92
12° 42	12 24 7.8	12 47 12.0	15.59	22.69	1.93	0.92	0.93
R33	12 28 38.9	13 22 24.0	13.44	24.89	1.69	0.93	0.93
R32	12 28 38.9	13 23 12.0	13.46	24.89	1.70	0.93	0.93
R2	12 23 11.7	13 17 36.0	14.22	24.14	1.92	0.93	0.94
10° 48	12 32 1.5	10 49 36.0	15.13	23.34	1.28	0.93	0.96
13° 50	12 23 33.5	13 7 60.0	14.70	23.66	1.94	0.94	0.94
12° 53	12 26 56.1	12 46 24.0	14.28	24.22	1.88	0.96	0.97
11° 38	12 30 21.8	11 27 60.0	13.98	24.55	1.56	0.97	0.97
13° 74	12 28 1.5	13 10 24.0	13.76	24.88	1.68	0.99	0.99
I3510	12 31 46.0	11 20 48.0	16.83	21.98	1.49	1.02	1.02
I3490	12 30 40.5	11 11 60.0	15.81	23.03	1.49	1.03	1.03
11° 42	12 32 48.3	11 54 24.0	14.33	24.64	1.48	1.05	1.05
12° 77	12 31 58.4	12 0 48.0	14.79	24.49	1.50	1.12	1.11
12° 48	12 26 9.3	12 49 36.0	15.05	24.26	1.89	1.12	1.12

TABLA III.2 (Continuación)  
 Densidad proyectada y radios efectivos para galaxias del cúmulo de Virgo

GALAXIA	$\alpha$		$\delta$			$-M_V$	$\mu_0$	$\log \rho$	$\log r_0$	$\log r_e$
	(1950)						[mag/arcsec <sup>2</sup> ]	[gal/arcsec <sup>2</sup> ]	[']	calculado
13° 66	12 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup> 53.8 <sup>s</sup>	13°27'60.0''	15.76	23.53	1.76	1.12	1.12			
N4322	12 20 29.6	16 11 12.0	16.82	22.50	1.25	1.12	1.12			
I3363	12 24 32.7	12 50 24.0	16.30	23.08	1.95	1.14	1.14			
12° 52	12 26 53.0	12 43 12.0	16.14	23.34	1.85	1.16	1.15			
I3349	12 24 14.0	12 43 60.0	16.77	22.79	1.91	1.17	1.17			
I794	12 25 38.2	12 21 36.0	17.58	22.24	1.86	1.23	1.22			
N4328	12 20 48.3	16 5 36.0	17.66	22.43	1.26	1.28	1.26			
N4458	12 26 24.9	13 31 12.0	18.77	21.32	1.73	1.28	1.27			
N4564	12 33 53.8	11 43 12.0	19.59	20.65	1.38	1.31	1.30			

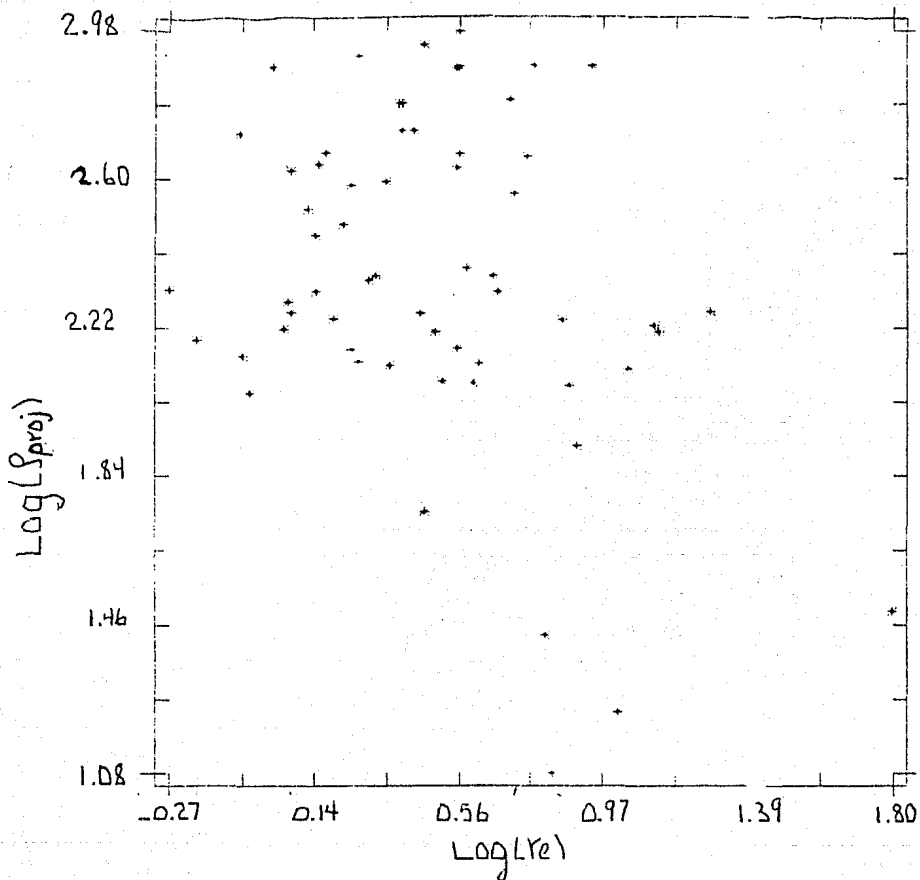
Se muestran también las figuras III.10, III.11, III.12 y III.13, que se describen a continuación:

En la figura III.10 se encuentran graficados, en el eje horizontal, los radios efectivos y en el eje vertical, el logaritmo de la densidad calculada en este trabajo, para cada una de las galaxias estudiadas del cúmulo de Coma que se encuentran listadas en Dressler (1980c). En esta gráfica no es necesario dar las cantidades de los ejes ya que el único fin que se pretende para esta gráfica, es ver si existe una tendencia lineal entre los dos parámetros, aún cuando se puede observar de la tabla III.1 que el logaritmo de los radios efectivos se encuentra entre 0.25 y 1.80 en segundos de arco, mientras que el logaritmo de la densidad se encuentra entre los valores 1.08 y 2.98 galaxias por grado cuadrado.

La figura III.11 muestra la gráfica entre el logaritmo de la densidad proyectada local que se calculó en este trabajo vs. los residuos, es decir, contra la diferencia entre los datos de las dos últimas columnas de la tabla III.1, que corresponden a los logaritmos de los radios efectivos observados (Datos por Strom y Strom, 1978a) y los calculados por la ecuación III.6.

Las figuras III.12 y III.13 son análogas que las III.10 y III.11, pero se refieren al cúmulo de Virgo.

Al comparar los radios efectivos dados por Strom y Strom (1980a) para el cúmulo de Coma y Binggeli, et. al. para el cúmulo de Virgo, con los calculados con la ecuación III.7 se encuentran las gráficas III.14a y III.14b en las cuales se observan claramente la perfecta correlación entre los radios efectivos, las magnitudes, los brillos superficiales y la densidad proyectada local.



FUGURA III. 10

LOGARITMO DE LOS RADIOS EFECTIVOS,  $r_e$  (EJE HORIZONTAL) VS. LOGARITMO DE LA DENSIDAD PROYECTADA LOCAL  $\rho_{proj}$  (EJE VERTICAL), PARA EL CUMULO DE COMA.

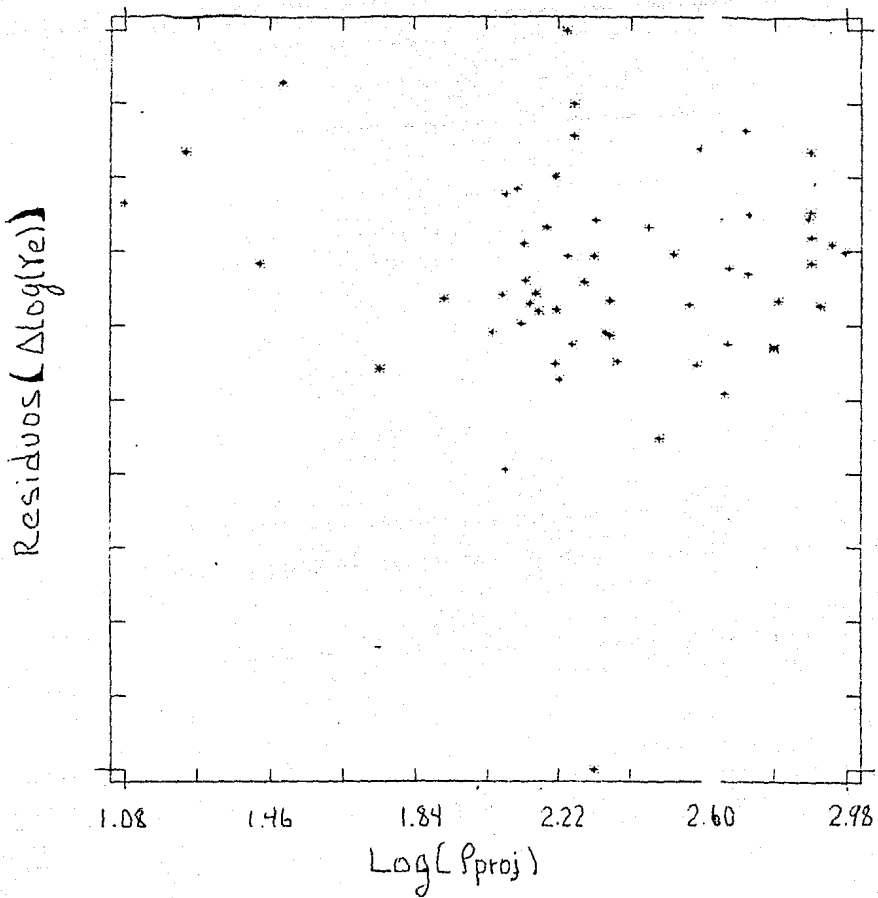


FIGURA III. 11

LOGARITMO DE LA DENSIDAD PROYECTADA LOCAL  
 $\rho_{proj}$  (EJE HORIZONTAL) VS. RESIDUOS: LOG  
 $r_{e-A-BM} - \mu_v$  (EJE VERTICAL) PARA EL CUMULO DE  
 COMA.



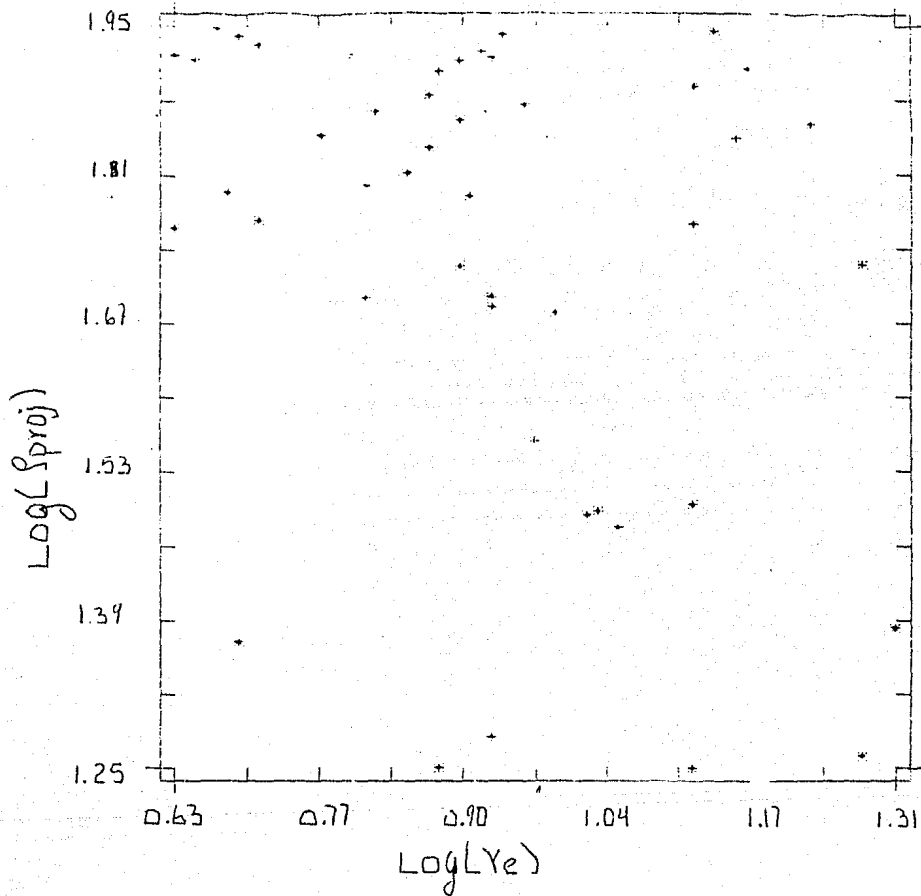


FIGURA III. 12

LOGARITMO DE LOS RADIOS EFECTIVOS  $r_e$  (EJE HORIZONTAL) VS. LOGARITMO DE LA DENSIDAD PROYECTADA LOCAL  $\rho_{\text{proj}}$  (EJE VERTICAL), PARA EL CUMULO DE VIRGO.

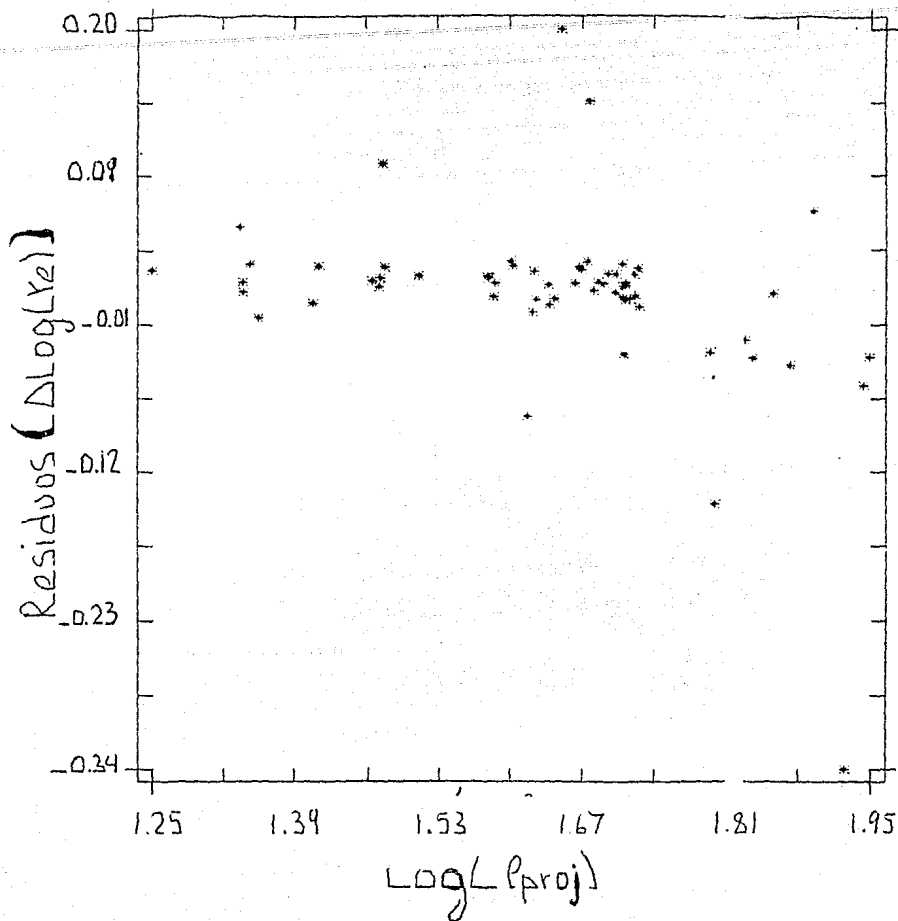
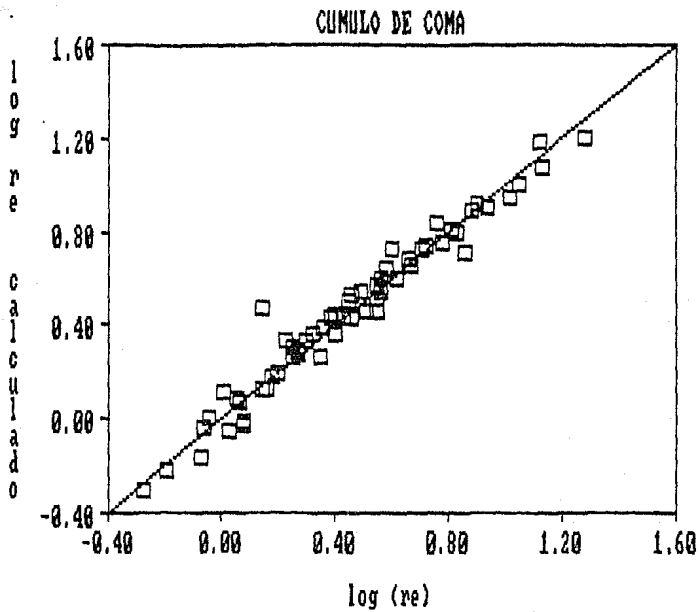
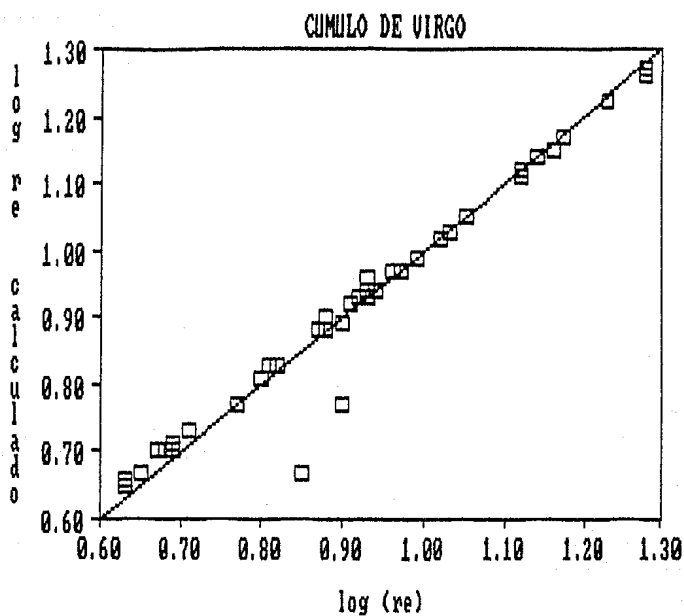


FIGURA III. 13

LOGARITMO DE LA DENSIDAD PROYECTADA LOCAL  
 $P_{proj}$  (EJE HORIZONTAL) VS. RESIDUOS: LOG  
 $r_{A-BM_V-CU}$  (EJE VERTICAL), PARA EL CUMULO DE  
 VIRGO.



**FIGURA III.14a (CUMULO DE COMA)**  
 EL EJE VERTICAL MUESTRA LOS RADIOS EFECTIVOS  
 OBSERVADOS (STROM Y STROM,1978a) Y EL EJE  
 HORIZONTAL MUESTRA LOS RADIOS EFECTIVOS  
 CALCULADOS CON LA RELACION :  
 $\log r_e = A + B M_v + C \mu_e + D \rho_{proj}$  ENCONTRADA  
 EN ESTE TRABAJO.



**FIGURA III. 146 (CUMULO DE VIRGO)**

EL EJE VERTICAL	MUESTRA LOS RADIOS	EFECTIVOS
OBSERVADOS	(BINGGELI, et. al., 1984) Y	EL EJE
HORIZONTAL	MUESTRA LOS RADIOS	EFECTIVOS
CALCULADOS	CON LA	RELACION:
$\log r_e = A + B M_v + C \mu_e + D \rho_{proj}$		
EN ESTE TRABAJO.		

## CAPITULO IV

### UNA ESTIMACION DE LA DENSIDAD VOLUMETRICA EN EL CUMULO DE COMA

#### IV.1- CALCULO DE LA MASA DEL CUMULO DE COMA.

La densidad encontrada en el capítulo III es un parametro útil para calcular, con ayuda del teorema del virial, la masa del cúmulo, así como la masa promedio de sus miembros. esto se hace usando las relaciones del apéndice C. Por ejemplo, como se vió en el capítulo III, la densidad se puede representar por una función exponencial a partir del centro aproximado del cúmulo, para Coma. se encuentra que la densidad proyectada está dada por:

$$\rho_{\text{proj}}(r) = \alpha \exp ( b r ) \quad (\text{IV.1})$$

en donde:

$$\alpha = 662.257 \text{ gal/grad}^2$$

$$b = -1.64234 (\text{°})^{-1}$$

La relación se encuentra graficada en la figura IV.1, en donde el eje horizontal representa aproximadamente 100' de arco y el eje vertical representa la densidad proyectada en galaxias / grado cuadrado.

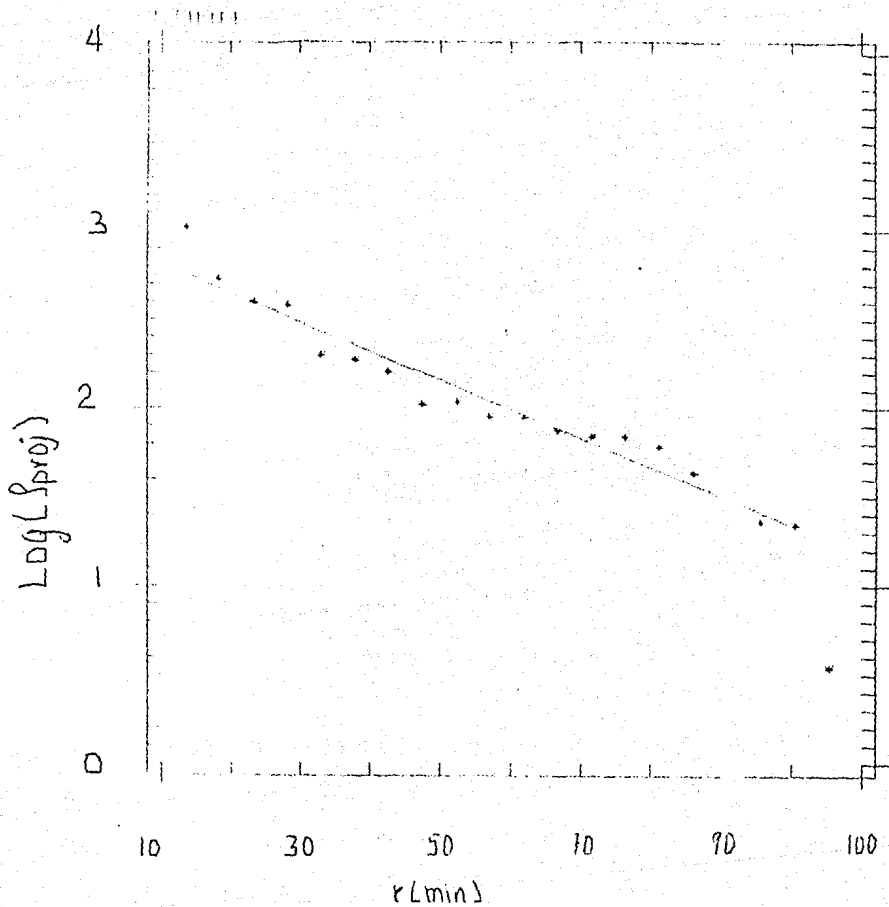


FIGURA IV. 1

DENSIDAD PROYECTADA EN FUNCION DEL RADIO A PARTIR DE CENTRO APROXIMADO DEL CUMULO DE COMA (EL EJE Y ES LOGARITMICO).

Por otra parte, según el apéndice C, (Schwarzschild, 1954) el radio efectivo medio, suponiendo una distribución esférica de galaxias, está dado por:

$$r_e = \frac{\left[ \int_0^R S \, dq \right]^2}{\int_0^R S^2 \, dq} \quad (\text{IV.2})$$

En donde:

$$S(q) = 2 \int_q^R \rho_{\text{proj}}(r) \, d \sqrt{r^2 - q^2} \quad (\text{IV.3})$$

y donde los parámetros de estas ecuaciones se explican en el apéndice C.

Ahora no es difícil hacer un programa de cómputo para calcular las integrales, numéricamente de la ecuación IV.2. En este trabajo para tales cálculos se usó la regla de Simpson y se encontró para Coma:



$$\left[ \int_0^R S(q) dq \right]^2 = 123239.67$$

$$\int_0^R S^2(q) dq = 152971.41$$

De aquí que si suponemos una distancia de 90 Mpc al cúmulo se tiene:

$$\begin{aligned} r_e &= 1.6^\circ \\ &= 96.7' \\ &= 2.5 \text{ Mpc} \end{aligned}$$

Si ahora, tomamos (Schwarzschild, 1954) la velocidad cuadrática media como:

$$(\frac{1}{2} \bar{v}^2)^{1/2} = 825 \text{ km/seg}$$

entonces, del teorema Virial (Apéndice C), se tiene:

$$M_c = \frac{\bar{v}^2 r_e}{G}$$

Por lo tanto, se obtiene la masa del cúmulo  $M_c$ :

$$M_c = 1.19 \times 10^{15} M_{\odot}$$

Suponiendo  $\approx 800$  miembros, la masa de cada galaxia será del orden de  $1.3 \times 10^{12} M_{\odot}$ .

Este método fué usado por Schwarzschild, 1954. Aquí se ha usado la distribución de densidad proyectada en esta tesis.

#### IV.2.- CALCULO DE LA DENSIDAD VOLUMETRICA EN EL CUMULO DE COMA.

Ya que se está suponiendo que las galaxias del cumulo se encuentran en una distribución esférica entonces, nuevamente del apéndice C, la densidad estará dada por:

$$\rho(r) = \frac{\alpha}{\pi r^2} \frac{d}{dr} \left\{ \int_0^r \int_q^r \frac{r \exp(b \xi)}{\sqrt{r^2 - q^2}} dr dq \right\} \quad (IV.4)$$

Esta ecuación se resolvió numéricamente de la siguiente manera:

Como lo que necesitamos es un conjunto de puntos  $(r_i, \rho_i)$ , que nos muestren como varía la densidad volumétrica con respecto al centro del cúmulo entonces, haciendo:

$$f(r) = \int_{\zeta=0}^{\zeta=r} \int_{\xi=q}^{\xi=\zeta} \frac{\zeta \exp(b \xi) d\xi d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \xi^2}} \quad (IV.5)$$

entonces, la ecuación IV.4 queda:

$$\rho(r) = \frac{\alpha}{2\pi r^2} \frac{df(r)}{dr}$$

o bien:

$$\rho(r) = \frac{\alpha}{2\pi r^2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h}$$

Entonces solo necesitamos dar una serie de valores a  $r$  para obtener los correspondientes de  $\rho$  haciendo  $h$  suficientemente pequeña, es decir, se aproxima la tangente a la gráfica de  $f$  por una recta secante. Por otra parte, las integrales de la ecuación IV.5 se resolvieron usando la regla de Simpson. La primera integral se tiene que calcular tantas veces como el número de puntos se tengan para la segunda (Se trata de una integral doble). Lo anterior se hace para cada  $r$  en donde se quiera calcular la densidad.

Hecho el cálculo anterior se graficaron los puntos obtenidos dando como resultado la gráfica de la figura IV.2, en donde el eje horizontal se encuentra en grados y el vertical en gramos /  $\text{cm}^3$ .

Ya que la densidad en la región central debe ser finita, entonces se hizo un ajuste de la forma:

$$\rho(r) = \rho_{\infty} + \rho_0 \left( 1 + r^2 / R_c^2 \right)^n$$

en donde:

$$\rho_{\infty} = 1.51 \times 10^{-29} \text{ gr/cm}^3$$

$$\rho_0 = 2.5 \times 10^{-25} \text{ gr/cm}^3$$

$$n = -4.46682116$$

$$R_c = 1.5^{\circ}$$

de aquí se puede concluir que la densidad cae aproximadamente como  $r^{-5}$ . En la figura IV.2 se grafica el ajuste.

### PERFIL DE DENSIDAD EN COMA

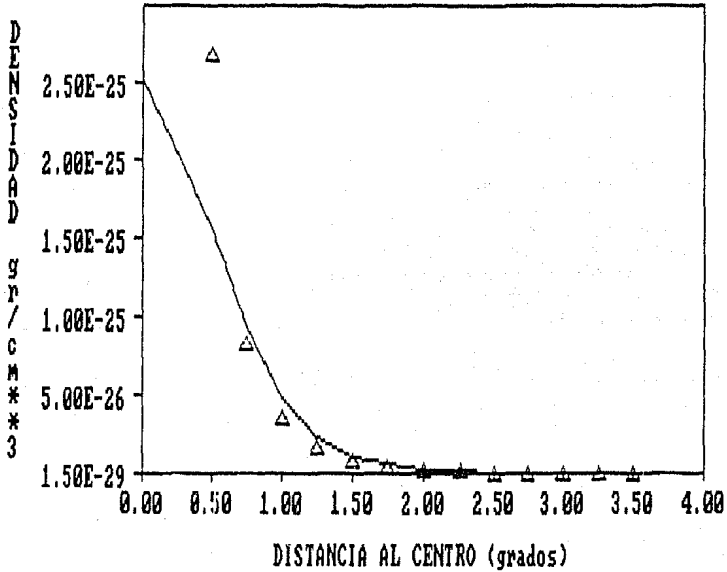


FIGURA IV. 2

DISTRIBUCION DE LA DENSIDAD VOLUMETRICA ENCONTRADA EN EL PRESENTE TRABAJO EN EL CUMULO DE COMA A PARTIR DEL CENTRO APROXIMADO. (EL EJE HORIZONTAL SE ENCUENTRA EN GRADOS Y EL EJE VERTICAL EN  $\text{gr/cm}^3$ ). LA CURVA CONTINUA REPRESENTA EL AJUSTE:  $\rho(r) = \rho_{\infty} + \rho_0 \left(1 + r^2/R_c^2\right)^{-n}$  Y LOS TRIANGULOS REPRESENTAN LA DENSIDAD ENCONTRADA CON LA ECUACION IV. 4.

## CONCLUSIONES

1.- Se desarrolló un método para encontrar la densidad proyectada local en cúmulos de galaxias, el cual puede aplicarse a cualquier cúmulo, ya sea regular o irregular. En el presente trabajo se aplicó a los cúmulos de Coma, Virgo, Hércules y el supercúmulo de Hydra y Centauro. El método se puede aplicar a cualquier otro cúmulo, conociendo las coordenadas de las galaxias individuales. De esta manera es posible correlacionar los parámetros fundamentales de cada galaxia con su densidad local en el cúmulo. Esto podría ayudar a entender el proceso de formación de las galaxias en el sentido en que en las condiciones iniciales de formación, la densidad ambiental local pudo ser un parámetro importante para determinar su morfología actual.

2.- Se calcularon y construyeron mapas de igual densidad proyectada para los cúmulos de Coma, Virgo, Hércules y el supercúmulo de Hydra- Centauro, de los cuales los tres últimos muestran subcondensaciones. Esto podría indicar que tales cúmulos son jóvenes si se adoptan los resultados de las simulaciones numéricas de n-cuerpos, que muestran subcondensaciones en las fases iniciales de su evolución. En el caso del cúmulo de Coma éste presenta una subcondensación doble lo cual podría indicar que este cúmulo se encuentra casi virializado. Estos mapas se encuentran en las figuras III.6, III.7, III.8 y III.9.

3.- Se buscó una relación, ya establecida anteriormente (Recillas-Cruz y Serrano, 1986), entre los radios efectivos, la luminosidad, la magnitud absoluta y la densidad proyectada local de los miembros del cúmulo, confirmándose que tales parámetros se encuentran correlacionados mediante la relación:

$$\log r_{\bullet} = A + B M_{\nu} + C \mu_{\bullet} + D \log \rho_{\text{proj}}$$

Para el cúmulo de Coma los valores correspondientes son:

$$A = -7.28509$$

$$B = 0.202449$$

$$C = 0.178916$$

$$D = -7.636567 \times 10^{-9}$$

y para el cúmulo de Virgo:

$$A = -6.35351$$

$$B = 0.190582$$

$$C = 0.188893$$

$$D = 1.288509 \times 10^{-2}$$

Los valores de los radios efectivos se encuentran graficados en las figuras III.14a para Coma y III.14b para Virgo; las cuales muestran que los radios efectivos estimados en este trabajo están



de acuerdo con los valores observados con lo cual es una indicación de que la relación anterior es correcta. Sin embargo, ya que los coeficientes de los términos de  $\rho_{proj}$  son pequeños, podría ser que la forma funcional con respecto a  $\rho_{proj}$  fuese diferente.

4.- Por otra parte, para cúmulos regulares fué posible dar una estimación, con ayuda del teorema del virial, de la variación de la densidad volumétrica con respecto al centro estimado del cúmulo. En este trabajo se hizo una estimación de tal densidad volumétrica para el cúmulo de Coma. Se hizo un ajuste de la forma:

$$\rho(r) = \rho_{\infty} + \rho_0 \left( 1 + r^2 / R_c^2 \right)^n$$

en donde  $n=-4.5$ , por lo que dicha densidad cae aproximadamente como  $r^{-9}$ .

## APENDICES

## APENDICE A

TIEMPO DE RELAJAMIENTO.- Consideremos una galaxia que se encuentra en el punto  $(x,y,z)$  al tiempo  $t=0$ . Supongamos que en este tiempo la galaxia no experimenta el efecto de un choque con otra galaxia. La fuerza instantánea que actúa sobre la galaxia estará dada por:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = - \nabla \mathcal{E} \quad (A.1)$$

en donde  $\mathcal{E}$  representa el potencial gravitacional debido a la distribución de las demás galaxias. La integración de la ecuación anterior nos dará la órbita de la galaxia al tiempo  $t=0$  y ésta seguirá su órbita mientras no experimente choques con las demás galaxias del campo. Si integramos la ecuación (A.1) tenemos:

$$\frac{1}{2} \left[ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right] + \mathcal{E}(x,y,z) = \int \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dt + c \quad (A.2).$$

Claro está que esta integral dará la trayectoria de la galaxia siempre y cuando se considere a cada galaxia como un sistema dinámico conservativo independiente. Pero esto es cierto sólo si se supone que no hay choques galácticos. El tiempo que pasa antes de que la suma de los efectos de los choques entre las demás galaxias impidan considerar a las galaxias como sistemas dinámicos

conservativos independientes es el llamado tiempo de relajamiento,  $t_E$ .

Supóngase que cada choque se puede tratar independientemente como un choque entre dos cuerpos, entonces en cada choque habrá una desviación  $\pi - 2\Psi$  de la galaxia original y un intercambio de energía  $\Delta E$  entre las dos galaxias que toman parte en el choque. Cuando  $t_E$  es el tiempo requerido para que  $\sqrt{\Sigma E^2}$  sea igual a la energía cinética inicial, entonces, en promedio, la galaxia alterará su energía en una cantidad igual.

Sea una galaxia de masa  $m_2$  con velocidad inicial  $v_2$  moviéndose entre las demás galaxias, sea, además  $m_1$  y  $v_1$  la masa y la velocidad de una galaxia del campo. Los parámetros que definen el choque serán los siguientes: i) la magnitud  $v_1$  de  $v_1$ , ii) el ángulo  $\vartheta$  entre  $v_1$  y  $v_2$ , iii) el ángulo  $\phi$  azimutal con respecto a un sistema de coordenadas, iv) el parámetro de impacto  $D$  y v) el ángulo  $\Theta$  entre el plano orbital y el plano formado por  $v_1$  y  $v_2$ .

Al final del choque, la dirección de la velocidad relativa  $v = v_2 - v_1$  es desviada un ángulo  $\pi - 2\Psi$  (Apéndice B) dado por:

$$\cos \Psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{D^2 v^4}{G^2 (m_1 + m_2)^2}}} \quad (\text{A.3})$$

Consideraremos ahora el intercambio de energía  $\Delta E$  entre las dos galaxias. Por definición de velocidad del centro de gravedad  $v_g$  y velocidad relativa  $v$  se tiene:

$$v_g = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v = v_2 - v_1 \quad (\text{A.4})$$

combinando estas dos ecuaciones se tiene:

$$v_2 = v_g + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v \quad (\text{A.5})$$

y elevando al cuadrado:

$$v_2^2 = v_g^2 + 2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_g v \cos \Phi + \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v^2 \quad (\text{A.6})$$

en donde  $\Phi$  es el ángulo entre  $v_g$  y  $v$ . De la misma manera, después del choque:

$$v_2'^2 = v_g'^2 + 2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_g' v' \cos \Phi' + \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v'^2 \quad (\text{A.7})$$

en donde  $\Phi'$  es el ángulo entre  $v_g'$  y  $v'$  al final del choque. El

cambio de energía,  $\Delta E$ , que sufre la galaxia como resultado del choque es:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2} m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_g v (\cos \Phi' - \cos \Phi) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Sea ahora  $i$  el ángulo que hace la proyección de  $v_g$  y el plano orbital con  $v_g$ , y sean  $\phi$  y  $\phi'$  los ángulos entre  $v$  y  $v'$  y la proyección de  $v_g$ , entonces:

$$\cos \Phi = \cos \phi \cos i, \quad \cos \Phi' = \cos \phi' \cos i \quad (\text{A.9})$$

Entonces, la ecuación (A.8) queda:

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_g v (\cos \phi' - \cos \phi) \quad (\text{A.10})$$

ó

$$\Delta E = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_g v \sin \frac{\phi + \phi'}{2} \sin \frac{\phi - \phi'}{2} \cos i \quad (\text{A.11})$$

Por otra parte, según la figura A.1 tenemos :

$$\phi' - \phi = \pi - 2\Psi \quad (\text{A.12})$$

por lo que:

$$\frac{1}{2} (\phi + \phi') = \frac{\pi}{2} - \Psi + \phi \quad ; \quad \frac{1}{2} (\phi' - \phi) = \frac{\pi}{2} - \Psi \quad (\text{A.13})$$

Entonces, la ecuación (A.11) queda como:

$$\Delta E = - 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_g v \cos(\phi - \Psi) \cos \Psi \cos i \quad (\text{A.14})$$

Obtendremos ahora el número de choques que tienen lugar en el tiempo  $dt$ . Sea  $N(v_1, \vartheta, \varphi) dv_1 d\vartheta d\varphi$  el número de galaxias del campo por unidad de volumen con velocidades en el rango  $(v_1, v_1 + dv_1)$  y velocidades confinadas en el ángulo sólido  $\sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ . El número de choques que ocurren en el tiempo  $dt$  será:

$$N(v_1, \vartheta, \varphi) dv_1 d\vartheta d\varphi \frac{d\Omega}{2\pi} 2\pi D dD v dt \quad (\text{A.15})$$

entonces, la contribución de todos los choques a la suma

$\Sigma \Delta E^2$  es:

$$\Sigma \Delta E^2_{(v_1, \vartheta, \varphi, D, \Theta)} = 2\pi N(v_1, \vartheta, \varphi) \Delta E^2 v D dD \frac{d\Theta}{2\pi} dv_1 d\vartheta d\varphi dt \quad (A.16)$$

Sustituyendo la ecuación (A.14) en la anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta E^2_{(v_1, \vartheta, \varphi, D, \Theta)} &= 8\pi N(v_1, \vartheta, \varphi) v_g^2 v^3 \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \\ &\quad \cos^2 i \cos(\phi - \Psi) \cos^2 \Psi D dD \\ &\quad \frac{d\Theta}{2\pi} dv_1 d\vartheta d\varphi dt \end{aligned} \quad (A.17)$$

El problema es ahora integrar sobre todos los parámetros  $D$ ,  $\Theta$ ,  $\varphi$ ,  $\vartheta$  y  $v_1$ .

Para integrar sobre  $D$  diferenciamos la ecuación (A.3):

$$D dD = \frac{G^2 (m_1 + m_2)^2}{v^4} \frac{\sin \Psi}{\cos^3 \Psi} d\Psi \quad (A.18)$$

entonces, la ecuación (A.17) queda:

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta E^2_{(v_1, \vartheta, \varphi, \Theta)} &= 8\pi N(v_1, \vartheta, \varphi) G^2 m_1^2 m_2^2 v_g^2 / v \\ &\quad \cos^2 i \int \frac{\cos^2(\phi - \Psi)}{\cos \Psi} \frac{d\Psi}{2\pi} \frac{d\Theta}{2\pi} dv_1 d\vartheta dt \end{aligned} \quad (A.19)$$



Integrando:

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta E^2_{(v_1, \vartheta, \rho, \Theta)} &= 8\pi N(v_1, \vartheta, \rho) G^2 m_1^2 m_2^2 v_g^2 \cos^2 i / v \\ &\left[ \frac{1}{2} \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \left( -\log \cos \Psi_0 - \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} \sin 2\phi \right] \frac{d\Theta}{2\pi} dv_1 d\vartheta d\rho dt \quad (A.20) \end{aligned}$$

Usando nuevamente la figura A.1 vemos que:

$$\cos \phi \cos i = \cos \bar{\phi} \quad , \quad \sin \phi \cos i = \sin \bar{\phi} \cos \Theta \quad (A.21)$$

de esta manera podemos escribir la ecuación como:

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta E^2_{(v_1, \vartheta, \rho, \Theta)} &= 8\pi N(v_1, \vartheta, \rho) G^2 m_1^2 m_2^2 v_g^2 / v \\ &\left[ \frac{1}{2} \cos^2 \bar{\phi} + \frac{1}{2} \left\{ \log \left( 1 + \frac{D_0^2 v^4}{G^2 (m_1 + m_2)^2} \right) - 1 \right\} \right. \\ &\left. \sin^2 \bar{\phi} \cos^2 \Theta + \frac{\pi}{4} \sin 2\bar{\phi} \cos \Theta \right] \frac{d\Theta}{2\pi} dv_1 d\vartheta d\rho dt \quad (A.22) \end{aligned}$$

ya que  $D_0 v^4 / G^2 (m_1 + m_2)^2$  es generalmente del orden de  $10^9 - 10^{10}$ , entonces término que contiene el logaritmo es 10-20 veces mayor que los demás términos, por lo que despreciando todos los demás, tenemos:

$$\Sigma \Delta E^2_{(v_1, \vartheta, \varphi, \Theta)} = 4\pi N(v_1, \vartheta, \varphi) G^2 m_1^2 m_2^2 v_g^2 / v$$

$$\log \left[ 1 + \frac{D^2 v^4}{G^2 (m_1 + m_2)^2} \right] \sin^2 \vartheta \cos^2 \Theta \frac{d\Theta}{2\pi} dv_1 d\vartheta d\varphi dt \quad (\text{A.23})$$

Integrando sobre  $\Theta$  se tiene:

$$\Sigma \Delta E^2_{(v_1, \vartheta, \varphi)} = 2\pi N(v_1, \vartheta, \varphi) G^2 m_1^2 m_2^2 v_g^2 / v$$

$$\log \left[ 1 + \frac{D_0 v^4}{G^2 (m_1 + m_2)^2} \right] \sin^2 \vartheta dv_1 d\vartheta d\varphi dt \quad (\text{A.24})$$

Por otra parte, de la definición de  $v_g$  y  $v$ , tenemos:

$$v_g^2 = \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos \vartheta}{m_1 + m_2} \quad (\text{A.25})$$

y

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \vartheta \quad (\text{A.26})$$

Además, de la ecuación (A.5) tenemos:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_g - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \quad (\text{A.27})$$

$$v_1^2 = v_2^2 - 2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_g v \cos \Phi + \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 v^2 \quad (\text{A.28})$$

Usando las ecuaciones A.25 y A.26 obtenemos:

$$2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_g v \cos \Phi = 2 \frac{m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left[ m_2 v_2^2 - m_1 v_1^2 + v_1 v_2 (m_1 - m_2) \cos \vartheta \right] \quad (\text{A.29})$$

Por lo tanto:

(A.30)

$$\cos \Phi = \frac{m_2 v_2^2 - m_1 v_1^2 + v_1 v_2 (m_1 - m_2) \cos \vartheta}{\sqrt{(m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 \cos \vartheta) (v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos \vartheta)}}$$

y

(A.31)

$$\sin \Phi = \frac{v_1 v_2 (m_1 + m_2) \sin \vartheta}{\sqrt{(m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 \cos \vartheta) (v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos \vartheta)}}$$

Combinando ahora las ecuaciones A.25 , A.26 y A.31 se tiene:

$$v_g^2 / v \sin^2 \Phi = v_1^2 v_2^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{(v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \vartheta)^{3/2}} \quad (\text{A.32})$$

Podemos entonces escribir la ecuación A.24 como:

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta E^2 (v_1, \vartheta, \varphi) &= 2\pi N(v_1, \vartheta, \varphi) G^2 m_1^2 m_2^2 v_1^2 v_2^2 \\ &\frac{\sin^2 \vartheta}{(v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \vartheta)^{3/2}} \\ &\log \left[ 1 + \frac{D_o^2 (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \vartheta)^2}{G^2 (m_1 + m_2)^2} \right] dv_1 d\vartheta d\varphi dt \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

y podemos integrar sobre  $\vartheta$  y  $\varphi$  para una distribución esférica de velocidades en el campo de las galaxias:

$$N(v_1, \vartheta, \varphi) dv_1 d\vartheta d\varphi = 4\pi N f(v_1) v_1^2 dv_1 \frac{1}{4\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (\text{A.34})$$

donde  $f(v_1)$  es la función de frecuencia que define la distribución de velocidades  $v_1$ .

Escribiendo:

$$N(v_1, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} N(v_1) \sin \vartheta \quad (\text{A.35})$$

con

$$N(v_1) = 4\pi Nf(v_1) v_1^2 \quad (\text{A.36})$$

e integrando sobre  $\varphi$  se tiene:

$$\Delta E^2_{(v_1, \vartheta)} = \pi N(v_1) G^2 m_1^2 m_2^2 v_1^2 v_2^2 \frac{\sin^3 \vartheta}{(v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \vartheta)^{3/2}} \log \left[ 1 + \frac{D_0^2 (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \vartheta)^2}{G^2 (m_1 + m_2)^2} \right] dv_1 d\vartheta dt \quad (\text{A.37})$$

Escribiendo ahora:

$$\Delta E^2_{v_1} = 8\pi N(v_1) G^2 m_1^2 m_2^2 J dv_1 dt \quad (\text{A.38})$$

con:

$$J = \frac{1}{8} v_1^2 v_2^2 \int_0^\pi \frac{\sin^3 \vartheta}{(v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \vartheta)^{3/2}} \log \left[ 1 + \frac{D_0^2 (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \vartheta)^2}{G^2 (m_1 + m_2)^2} \right] d\vartheta \quad (\text{A.39})$$

Para evaluar J hacemos el cambio de variable:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \vartheta \quad (\text{Ecuación A.26})$$

y la integral queda:

$$J = \frac{1}{32v_1 v_2} \int_{b^{1/2}}^{a^{1/2}} \frac{(a-v^2)(v^2-b)}{v^2} \log(1+q^2 v^4) dv \quad (\text{A.40})$$

en donde:

$$q = \frac{D_0}{G(m_1 + m_2)} \quad (\text{A.41})$$

$$a = (v_2 + v_1)^2 \quad b = (v_2 - v_1)^2 \quad (\text{A.42})$$

Integrando por partes se tiene:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{32v_1 v_2} \int_{b^{1/2}}^{a^{1/2}} \frac{d}{dv} \left[ \frac{ab}{v} + (a+b)v - \frac{1}{3} v^3 \right] \log(1+q^2 v^4) dv \quad (\text{A.43}) \\ &= \frac{1}{32v_1 v_2} \left[ \frac{ab}{v} + (a+b)v - \frac{1}{3} v^3 \right] \log(1+q^2 v^4) \Big|_{b^{1/2}}^{a^{1/2}} \end{aligned}$$

$$- \frac{q^2}{8v_1 v_2} \int_{b^{1/2}}^{a^{1/2}} \left[ abv^2 + (a+b)v^4 - \frac{1}{3} v^6 \right] \frac{1}{1 + q^2 v^4} dv \quad (A.44)$$

Nuevamente, tomando en cuenta que  $q \approx 10^9 - 10^{10}$  y despreciando el segundo término tenemos:

$$J = \frac{1}{16v_1 v_2} \left[ a^{1/2} \left( b + \frac{1}{3} a \right) \log (1+q^2 a^2) - b^{1/2} \left( a + \frac{1}{3} b \right) \log (1+q^2 b^2) \right] \quad (A.46)$$

Además,  $qa$  y  $qb$  son del orden de  $10^4 - 10^5$ , entonces:

$$\begin{aligned} \log (1+q^2) &\approx 2 \log qa \\ \log (1+q^2) &\approx 2 \log qb \end{aligned} \quad (A.46)$$

se tiene entonces:

$$J = \frac{1}{8v_1 v_2} \left[ a^{1/2} \left( b + \frac{1}{3} a \right) \log qa - b^{1/2} \left( a + \frac{1}{3} b \right) \log qb \right] \quad (A.47)$$

Sustituyendo A.42:

$$J = \frac{1}{6v_1 v_2} \left[ (v_2^3 + v_1^3) \log q(v_1 + v_2)^2 - (v_2^3 - v_1^3) \log q(v_2 - v_1)^2 \right] \quad (v_2 \geq v_1) \quad (\text{A.48})$$

$$J = \frac{1}{6v_1 v_2} \left[ (v_2^3 + v_1^3) \log q(v_1 + v_2)^2 - (v_1^3 - v_2^3) \log q(v_1 - v_2)^2 \right] \quad (v_2 \leq v_1)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir como:

$$J = \frac{v_1^2}{3v_2} \log qv_2^2 + \frac{v_1^2}{3v_2} \log \left[ 1 - \frac{v_1^2}{v_2^2} \right] + \frac{v_2^2}{3v_1} \log \frac{v_2 + v_1}{v_2 - v_1} \quad (v_2 \geq v_1) \quad (\text{A.49})$$

$$J = \frac{v_2^2}{3v_1} \log qv_2^2 + \frac{v_2^2}{3v_1} \log \left[ \frac{v_1^2}{v_2^2} - 1 \right] + \frac{v_1^2}{3v_2} \log \frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2} \quad (v_1 \geq v_2)$$

Dejando nuevamente sólo términos dominantes, tenemos:

$$J = \frac{v_1^2}{3v_2} \log qv_2^2 \quad (v_2 \geq v_1) \quad (\text{A.50})$$

$$J = \frac{v_2^2}{3v_1} \log qv_2^2 \quad (v_2 \leq v_1) \quad (\text{A.51})$$



Sustituyendo J en A.38 tenemos:

$$\Sigma \Delta E_{v_1}^2 = 8\pi N(v_1) G^2 m_1^2 m_2^2 v_2 \log qv_2^2 dv_1 dt$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_1^2 / 3v_2^2 & (v_2 \geq v_1) \\ v_2^2 / 3v_1^2 & (v_2 \leq v_1) \end{array} \right. \quad (A.51)$$

Suponiendo ahora una distribución gaussiana de velocidades para las galaxias del campo, es decir:

$$N(v_1) dv_1 = \frac{4j^3}{\pi^{1/2}} N e^{-j^2 v_1^2} v_1^2 dv_1 \quad (A.52)$$

en donde N es el número de galaxias por unidad de volumen,

tenemos:

$$\Sigma \Delta E^2 = 8\pi N G^2 m_1^2 m_2^2 v_2 \log qv_2^2 dt \quad (A.53)$$

$$\frac{4j^3}{3\pi^{1/2}} \left[ \frac{1}{v_2^2} \int_0^{v_2} e^{-j^2 v_1^2} v_1^4 dv_1 + v_2 \int_{v_2}^{\infty} e^{-j^2 v_1^2} v_1 dv_1 \right]$$

estas integrales se pueden expresar en términos de la función de error y su derivada (nuevamente se dejaron unicamente los términos dominantes), es decir:

$$\Sigma \Delta E^2 = 8\pi NG^2 m_1^2 m_2^2 v_2^2 \mathcal{G}(x_0) \log qv_2^2 \quad (\text{A.54})$$

en donde

$$x_0 = jv_2 \quad \text{y} \quad \mathcal{G}(x_0) = \frac{1}{2x_0^2} \left[ E_{\text{ref}}(x_0) - x_0 E'_{\text{ref}}(x_0) \right] \quad (\text{A.55})$$

Escribiendo ahora la ecuación A.54 en la forma:

$$\frac{\Sigma \Delta E^2}{\Delta E} = \frac{32\pi NG^2 m_1^2 m_2^2 \mathcal{G}(x_0) \log qv_2^2}{v_2^3} dt \quad (\text{A.56})$$

o bien:

$$\frac{\Sigma \Delta E^2}{\Delta E} = \frac{dt}{t_E} \quad (\text{A.57})$$

en donde:

$$t_E = \frac{v_2^3}{\frac{D_0 v_2^2}{32\pi NG^2 m_1^2 m_2^2 \mathcal{G}(x_0) \ln \frac{D_0 v_2^2}{G(m_1 + m_2)}}} \quad (\text{A.58})$$

este es el tiempo de relajamiento, es la escala de tiempo para la cual pueden existir choques galácticos.

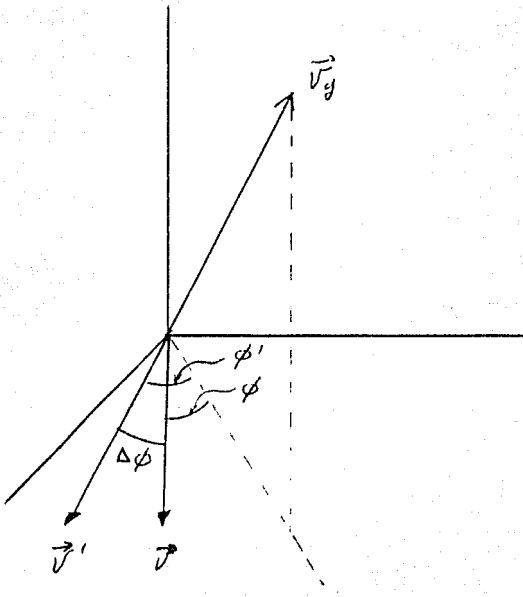


FIGURA A.1

## APENDICE B

DESVIACION DE UNA GALAXIA DE SU PLANO ORBITAL DE ACUERDO AL PROBLEMA DE DOS CUERPOS.- Sean  $r_1$  y  $r_2$  la posición de dos galaxias de masas  $m_1$  y  $m_2$  en un cierto sistema de referencia inercial. Las ecuaciones de movimiento de Newton son:

$$\ddot{r}_1 = - Gm_2 \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|^3}, \quad \ddot{r}_2 = - Gm_1 \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3} \quad (B.1)$$

Multiplicando por  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente y sumando ambas ecuaciones se tiene:

$$m_1 \ddot{r}_1 + m_2 \ddot{r}_2 = 0 \quad (B.2)$$

ó restándolas:

$$\frac{d^2}{dt^2} (r_1 - r_2) = - G(m_1 + m_2) \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|^3} \quad (B.3)$$

Integrando la ecuación B.2 :

$$R = R_o + v_g t \quad (B.5)$$

en donde:

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$

y  $v_g$  es la velocidad del centro de gravedad; es decir:  $v_g = dR/dt$  y  $R_0$  es la posición al tiempo  $t=0$ .

La ecuación B.3 se puede escribir como:

$$\ddot{r} = -\lambda \frac{r}{|r|^3} = \lambda \nabla \frac{1}{r} \quad (B.5)$$

en donde  $r = r_1 - r_2$  y  $\lambda = G(m_1 + m_2)$ . Multiplicando vectorialmente por  $r$  la ecuación B.5 se tiene:

$$r \times \ddot{r} = 0 \quad (B.7)$$

pero:

$$\frac{d}{dt} (r \times \dot{r}) = \dot{r} \times \dot{r} + r \times \ddot{r} \\ = r \times \ddot{r}$$

de donde:

$$\frac{d}{dt} (r \times \dot{r}) = 0 \quad (B.8)$$

y por lo tanto:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{constante} = \mathbf{h}$$

es decir, el momento angular se conserva.

Multiplicando ahora la ecuación B.9 escalarmente por  $\mathbf{r}$  se tiene:

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (\text{B.10})$$

lo que significa que la órbita se encuentra en un plano fijo.

De la ecuación B.5 vemos que el potencial está dado por:

$$\mathcal{B} = - \frac{\lambda}{r} \quad (\text{B.11})$$

por lo que la órbita relativa puede especificarse en términos de la lagrangiana:

$$L = T + \frac{\lambda}{r} \quad (\text{B.12})$$

y la ecuación de energía:

$$T - \frac{\lambda}{r} = \frac{1}{2} v^2 \quad (\text{B.13})$$

en donde T es la energía cinética por unidad de masa y v es la velocidad a una distancia infinita del movimiento relativo.

Tomando coordenadas polares (r,  $\vartheta$ ) en el plano de la órbita, la lagrangiana queda:

$$L = \frac{1}{2} ( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 ) + \frac{\lambda}{r} \quad (\text{B.14})$$

y las ecuaciones de Lagrange serán:

$$\ddot{r} = r \dot{\vartheta}^2 - \frac{\lambda}{r^2} \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{d}{dt} \left[ r^2 \dot{\vartheta} \right] = 0 \quad (\text{B.16})$$

Nuevamente de la ecuación B.16 se tiene:

$$r^2 \dot{\vartheta} = h = \text{constante} \quad (\text{B.17})$$

y de esta manera escribimos la ecuación B.15 como:

$$\dots \quad r = \frac{h^2}{r^3} - \frac{\lambda}{r^2} \quad (\text{B.18})$$

Haciendo ahora el cambio de variable  $u=r^{-1}$  y tomado en cuenta la ecuación B.17 se tiene:

$$\dots \quad u = -u + \frac{\lambda}{h^2} \quad (\text{B.19})$$

Resolviendo esta ecuación se encuentra:

$$u = u_0 \cos (\vartheta + \vartheta_0) + \frac{\lambda}{h^2} \quad (\text{B.20})$$

en donde  $u_0$  y  $\vartheta_0$  son las constantes de integración. Escogiéndolo la dirección del máximo  $u$  (ó mínima  $r$ ) como el origen de  $\vartheta$  entonces la ecuación anterior se escribe como:

$$r = \frac{1}{u} = \frac{h^2}{\lambda} \frac{1}{1 + e \cos \vartheta} \quad (\text{B.21})$$

en donde "e" representa la excentricidad de la órbita.

Según la ecuación B.21 vemos que  $r$  es mínima cuando  $\cos \vartheta = 1$ , es decir cuando:



$$r_o = \frac{h^2}{\lambda} \frac{1}{1+e} \quad (\text{B.22})$$

Por otra parte, de la ecuación B.13:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{r_o^2} \left[ r_o^2 \dot{\theta} \right]^2 - \frac{\lambda}{r_o} = \frac{1}{2} u^2 \quad (\text{B.23})$$

Combinado ésta última con las B.17 y B.22 tenemos:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda^2}{h^4} (1+e)^2 \right] h^2 - \lambda \left[ \frac{\lambda}{h^2} (1+e) \right] = \frac{1}{2} v^2 \quad (\text{B.24})$$

y haciendo algunas reducciones se tiene:

$$e^2 = 1 + \frac{v^2 h^2}{\lambda^2} \quad (\text{B.25})$$

Por otra parte el parámetro de impacto está relacionado a  $v$  por:

$$h = D v \quad (\text{B.26})$$

por lo que:

$$e^2 = 1 + \frac{D^2 v^4}{G^2 (m_1 + m_2)^2} \quad (\text{B.27})$$

en donde se ha sustituido  $\lambda = G(m_1 + m_2)$ . De la ecuación B.21, si  $r \rightarrow \alpha$

$$\vartheta = \cos^{-1} - \frac{1}{e} \quad (\text{B.28})$$

y ya que este ángulo es  $\pi - \Psi$  entonces:

$$\cos \Psi = \frac{1}{e} \quad (\text{B.29})$$

y por lo tanto:

$$\cos \Psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{D^2 v^4}{G^2 (m_1 + m_2)^2}}} \quad (\text{B.30})$$

## APENDICE C

RADIO EFECTIVO MEDIO PARA UN CUMULO DE GALAXIAS.- Suponiendo que el cúmulo tiene simetría esférica, si  $\rho(r)$  representa la densidad de masa, entonces  $S(q,r)$  representa la masa por unidad de longitud,  $q$ , dado por:

$$S(q,r) = \int_q^r \rho(r) 2\pi r dr \quad (C.1)$$

en donde  $q$  es la distancia perpendicular desde el centro del cúmulo (figura C.1). Entonces, la masa total del cúmulo estará dado por:

$$M_c = 2 \int_0^R S(q,R) dq \quad (C.2)$$

Por otra parte, si a una esfera de radio  $r$  y masa  $M(r)$  se le agrega una cáscara de masa  $dM$ , entonces la ganancia en energía potencial gravitacional será  $dE_p = -GM(r)dM/r$ . Integrando esta ecuación y tomando en cuenta que  $dM = \rho(r)dV = \rho(r)4\pi r^2 dr$  se tiene:

$$E_p = - \int_0^R \frac{GM}{r} 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

$$= - 2G \int_0^R S^2(q,R) dq \quad (C.3)$$

Usando el teorema virial :

$$\frac{1}{2} M_c \bar{v}^2 = - \frac{1}{2} E_p \quad (C.4)$$

se tiene:

$$\bar{v}^2 \left[ \int_0^R S(q,R) dq \right]^2 = G \left[ \int_0^R S^2(q,R) dq \right] M_c \quad (C.6)$$

entonces:

$$M_c = \frac{\bar{v}^2 G}{\bar{r}} \quad (C.7)$$

en donde se ha definido el radio efectivo medio,  $\bar{r}$  por:

$$\bar{r} = 2 \frac{\left[ \int_0^R S dq \right]^2}{\int_0^R S^2 dq} \quad (C.8)$$

En particular, si se tiene la densidad proyectada en función de  $r$ , entonces:

$$S(q,r) = 2 \int_q^r \rho(r)_{\text{proj}} d\sqrt{r^2 - q^2} \quad (\text{C.9})$$

Por ejemplo,  $\rho_{\text{proj}}(r)$  puede estar en galaxias/ $^{\circ}$ .

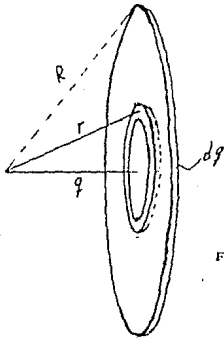


FIGURA C.1

II.-  $\text{Cos } \alpha < 0$  y  $\text{Cos } \beta > 0$  (Figura D.3).- Aquí tenemos:

$$A = 2 \left[ \int_0^{y_i} \int_{x_{ri}}^{-x_i} \sqrt{R_c^2 - y^2} \, dx \, dy + \int_{-x_i}^0 \sqrt{R_c^2 - x^2} \, dx \right] + \pi R_c^2 / 2$$

Integrando obtenemos:

$$A = \pi R_c^2 / 2 - x_{ri} y_i + R_c^2 \arcsen(x_i/R_c) + R_i^2 \arcsen(y_i/R_i)$$

III.-  $\text{Cos } \alpha > 0$  y  $\text{Cos } \beta < 0$  (Figura D.4).- En este caso:

$$A = 2 \left[ \int_0^{y_i} \int_x^{\sqrt{R_c^2 - y^2}} dx \, dy + \int_{x_{ri}}^{x_i} \int_0^{\sqrt{R_i^2 - (x-x_{ri})^2}} dx \, dy \right] + \pi R_c^2 / 2$$

Integrando:

$$A = \pi R_c^2 / 2 + R_i^2 \arcsen((x_i - x_{ri})/R_i) + R_c^2 \arcsen(y_i/R_c)$$

IV.-  $\varphi_2 < \varphi_1$ .- En este caso:  $A = \pi R_i^2$

Además sabemos que:

$$\cos \alpha = ( R_c^2 + x_{ri}^2 - R_i^2 ) / ( 2 R_c x_{ri} )$$

$$\cos \beta = ( x_{ri}^2 + R_i^2 - R_c^2 ) / ( 2 x_{ri} R_i )$$

$$x_i = | ( R_c^2 + x_{ri}^2 - R_i^2 ) / ( 2 x_{ri} ) |$$

$$y_i = \sqrt{R_c^2 - x_i^2} ; R_c^2 - x_i^2 \geq 0$$

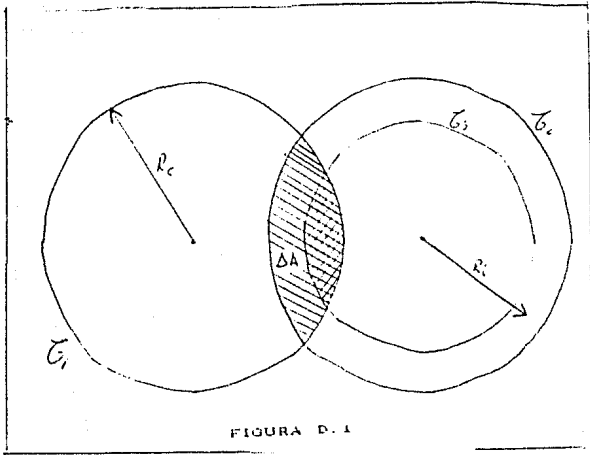


FIGURA D. 1

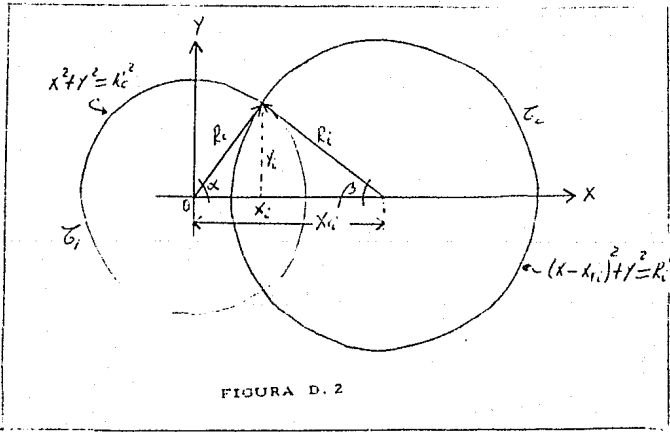


FIGURA D. 2



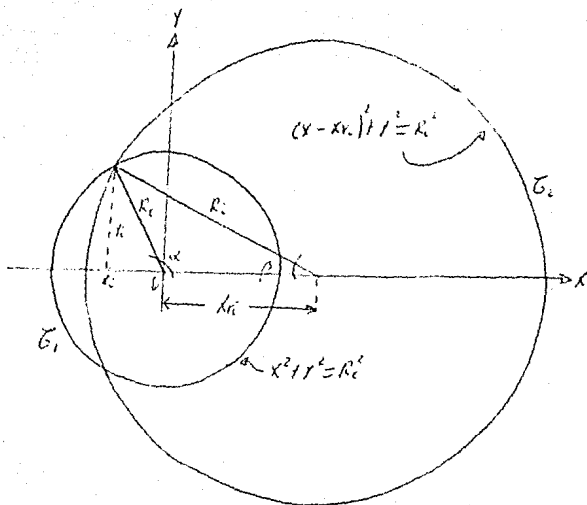


FIGURA D.3

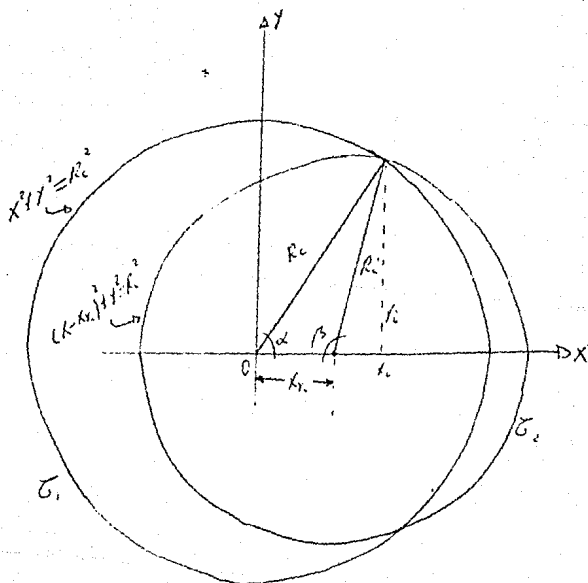


FIGURA D.4

## BIBLIOGRAFIA

- Abell, G. O. (1965). *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 3:1.
- Abell, G. O. (1957). *Ap. J. Supp.* 3:211.
- Abell, G. O. (1976). "In galaxies and the Universe". Eds. A. M. Sandage, J. Kristian. Chicago Press Univ.
- Bahcall, N. A. (1973). *Ap. J.* 183:783.
- Bahcall, N. A. (1977). *Ann. Rev. Astrophys* 15:505.
- Bautz, L. P., Morgan W. W. (1970). *Ap. J. Lett.* 162:L149.
- Binney James y Tremaine Scott (1987). "Galactic Dynamics", Princeton University Press.
- Binggeli, B., Sandage, A., Tarengni, M. (1984). *Ap. J.* 89:64.
- Binggeli, B., Sandage, A., Tammann, G. A. (1985). *Ap. J.* 90:1681.
- Binggeli, B., Tamman, G. A., Sandage, A. (1987). *Ap. J.* 94:251.
- Chandrasekhar, S. (1942). "Principles of Stellar Dynamics", The University of Chicago Press.
- Chincarini, G. (1987). *Astron. J.* 93:1338.
- de Vaucouleurs (1960). *Ap. J.*, 131:585.
- Dressler, A. (1980a). *Ap. J.* 236:351.
- Dressler, A. (1980b). *Ap. J.* 236:1055.
- Dressler, A. (1980c). *Ap. J. Suppl.*, 42:565.
- Dressler, A. (1984). *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 22:185.
- Fitchett, Michael J.
- Fitchett, Michael J. y Webster, Rachel (1987). *Ap. J.* 317:653.
- Geller, M. J., Beers, T. C. (1982). *Publ. Astron. Soc. Pac.*, 94:421.
- Gunn, J. E., Gott, J. R. (1972). *Ap. J.* 176:1.
- King, I. R. (1966). *Astron. J.* 71:64.
- King, I. R. (1972). *Ap. J. Lett.*, 174:L123.
- Kormendy (1977). *Ap. J.* 218:333.
- Krupp, E. C. (1974). *Publ. Astron. Soc. Pac.*, 86:385.
- Landau y Lifshitz (1973). "Teoría Clásica de los Campos". Ed. Reverté.
- Matthews, T. A., Morgan, W. W., Schmidt, M. (1964). *Ap. J.* 140:35.
- Melnick, J., Quintana, H. (1981). *Astron. Astrophys.* 44:87.
- Mellier, Y., Mathez, G., Mazure, A., Chauvineau B. y Proust, D. (1988). *Astron. Astrophys.* 199:67.
- Oemler, A. (1973). *Ap. J.*, 180:11.
- Oemler, A. (1974). *Ap. J.* 194:1.
- Peebles, P. J. E. (1970). *Astron. J.* 75:13.

- Poveda A., Iturriaga R. y Orozco I. (1958,1960). Boletín de los Observatorios de Tonanzintla y Tacubaya.
- Recillas-Cruz, E.(1988). "Parámetros Dinámicos de Galaxias Elípticas", I.A. UNAM, Tesis Doctoral
- Recillas-Cruz, E., Serrano, P.G.A. (1986). Contribución No. 212, IAUNAM.
- Rood, H. J., Sastry, G. N. (1971). Astron. Soc. Pacific. 83:313.
- Rood, H. J., Sastry, G. N. (1972). Astron. J. 77:451.
- Schechter, P. (1976). Ap. J. 203:297.
- Schwarzschild, M. (1954). Ap. J. 59:273.
- Sinclair, Smith (1936). Ap. J. 23:29.
- Spitzer, L., Baade, W. (1951). Ap. J. 113:413.
- Steven Weinberg (1972). "Gravitation and Cosmology, Principles and Applications of the General Theory of Relativity". John Wiley & Sons.
- Strom, K. M., Strom, S. E. (1978a). Astron. J., 83:73.
- Strom, S. E., Strom, K. M. (1978b). Ap. J. 225:L93.
- Unsöld A. (1974). "El Nuevo Cosmos". Ed. Siglo XXI.
- White, Simon D. (1976). Mon. Not. R. astr. Soc.
- Zwicky, F. (1937). Ap. J. 86:217.
- Zwicky, F. (1957). "Morphological Astronomy". Berlin, Springer-Verlag.
- Zwicky, F., Karpowicz, M. (1966). Ap. J. 146:43.
- Zwicky, F., E. Herzog, P. Wild (1961-1968). "Catalogue of Galaxies and Clusters of Galaxies". Institute of Technology (6 Vol)