2379

"EFECTOS DE ACOTACION Y CURVATURA ESPACIO-TEMPORAL
EN EL VACIO CUANTICO"

FACULTAD DE CIENCIAS
FISICO

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Fernando A. Curiel Villasana

1989

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

** INTRODUCCION **

Desde el nacimiento de la teoría especial de la Relatividad y de la teoría cuántica, muchos de nuestros conceptos mas básicos acerca de la realidad han tenido que ser revisados, y en muchos casos cambiado drásticamente, a la luz de las teorías físicas de este siglo. El concepto de vacío es uno de ellos.

Alrededor de los años '30, estaba totalmente entendido que cuando la teoría cuántica es combinada con la teoría de la relatividad, un número de hechos totalmente nuevos pueden ser deducidos. Uno de los más fundamentales, es el de que cada partícula está asociada con un tipo de campo y cada campo está asociado con una clase de partículas. Consecuentemente, los campos electromagnético y gravitacional ya no podían ser considerados como los únicos campos básicos.

En la física clásica, al espacio plano en donde no se encuentra ninguna partícula ò cuerpo se le llama vacío. Es decir, el vacío clásico carece de propiedades. En la física cuántica, la entidad que lleva el nombre de *vacío* tiene una rica y complicada estructura, que surge de la existencia de campos libres que no se anulan. Dependiendo del punto de vista que uno quiera adoptar, el campo puede considerarse real o virtual.

Un campo electromagnético en el espacio de Minkowski es matemáticamente equivalente a una colección infinita de osciladores armónicos. En el estado base de un oscilador cuántico, ni la posición ni el momento están precisamente determinados; ambos están sujetos a fluctuaciones aleatorias. En el vacío cuántico, es el campo electromagnético (y todos los otros campos) los que fluctúan.

Aunque las fluctuaciones de los campos son aleatorias, también son de un tipo especial. Satisfacen el principio de la relatividad, ya que se presentan con la misma apariencia para todos los observadores no acelerados sin importar su velocidad. Puede mostrarse que esta propiedad implica que el campo es cero en promedio, y que la magnitud de las fluctuaciones se incrementa para las longitudes de onda cortas. El resultado neto, es que un observador no puede hacer uso de las fluctuaciones para determinar su velocidad.

Las fluctuaciones sin embargo, sí pueden ser usadas para determinar la aceleración. En 1976, W.G. Unruh demostró que un detector de partículas hipotético[1] en aceleración uniforme, reaccionará a las fluctuaciones del vacío como si se encontrara en reposo en un campo de radiación térmica (y por lo tanto ya no en el vacío) con una temperatura proporcional a la aceleración. Un detector no acelerado, no reaccionaría ante dichas fluctuaciones.

La idea de que la temperatura y la aceleración pueden ser relacionadas de esta forma, ha llevado a modificar lo que queremos decir cuando hablamos de "*vacío*", y a reconocer que existen diferentes tipos de vacío. Más aún, frecuentemente el propio concepto no tiene un significado bien definido.

---

[1] Ver capítulo 2.

El vacío se torna todavía más complejo cuando se introduce un espacio-tiempo curvo. La curvatura influye sobre la distribución espacial de las fluctuaciones del campo cuántico y, como la aceleración, pueden inducir una energía de vacío no nula.

Algunas de las consecuencias del tan peculiar comportamiento del vacío, son el objeto del presente trabajo. Más en particular, se estudian los efectos térmicos en el vacío producidos en diversas situaciones: confinamiento espacial, acelaración, y curvatura gravitacional. Consideramos que tales efectos, aunque bastante estudiados por la teoría cuántica de campos en la mayoría de los casos, *físicamente* no están del todo entendidos. Es pues, el principal objetivo en este estudio, el tratar de entender físicamente los mencionados efectos y sus consecuencias.

En el primer capítulo se introducen las ideas fundamentales de la teoría cuántica de campos convencional para el espacio de Minkowski primero, y posteriormente se generaliza para espacios curvos. No obstante ser sólo una revisión nada detallada, nos servirá entre otras cosas para introducir notación, y es por otro lado un reflejo de lo que tuve que tragarme antes de poder entender nada sobre el vacío (si es que entendí algo). El segundo capítulo es bastante más relevante porque introce los conceptos de vacío y partícula como los ve la teoría cuántica de campos (TCC) usando un modelo idealizado de detector; plantea los problemas que existen con esta interpretación y propone una alternativa al vacío virtual con el campo *real* de punto cero. Finalmente, se establece un nuevo formalismo Lagrangiano matemáticamente simple con el cual es posible analizar de una manera transparente, desde el punto de vista físico, los efectos de tipo térmico en el vacío. El capítulo 3 trata algunos ejemplos simples para ilustrar el formalismo desarrollado y compara los resultados con los de la TCC original. El clímax del trabajo lo constituye el capítulo 4, en donde se discuten casos más avanzados e interesantes que se pueden estudiar con el nuevo formalismo. El estudio del efecto Hawking en los agujeros negros y su comparación con lo que obtiene el formalismo modificado y algunos otros ejemplos en espacio plano y curvo, permiten hacer uso de todas las ideas físicas y filosóficas que se habían introducido con anterioridad, dándoles un carácter más completo.

Esta tesis está basada en los esfuerzos de un grupo encabezado por S. Hacyan, G. Cocho y F. Soto, que en los últimos años han tenido como objetivo el entender mejor el comportamiento térmico de sistemas cuánticos en espacios curvos, así como generar modelos donde la teoría pueda ser verificada experimentalmente; cosa nada fácil debido a lo pequeño de los efectos involucrados.

** CAPITULO 1 **

FORMALISMO LAGRANGIANO EN LA TEORIA CUANTICA DE CAMPO

En la primera parte de este capítulo se hace una revisión de los conceptos más relevantes de la teoría cuántica de campos en el espacio de Minkowski. Como veremos, la generalización a espacios curvos se lleva a cabo con pocas modificaciones.

El tratamiento aquí se centrará casi exclusivamente en el campo escalar, sin embargo los resultados más importantes para espín $\frac{1}{2}$ se discutirán también ya que posteriormente nos serán de utilidad.

El núcleo de este capítulo, y sobre el cual debemos concentrar nuestra atención lo constituyen:

(i) la energía del punto cero del campo (que resulta ser divergente) y

(ii) el tratamiento del campo mediante funciones de Green, que será la piedra angular del formalismo en espacio-tiempo curvo y en los sistemas no inerciales.

§ 1.1 CAMPO ESCALAR

Sea $\varphi(t,\vec{x})$ un campo escalar definido para todo punto $(t,\vec{x})$ en el espacio de Minkowski de dimensión n, y que satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\varphi = 0 \tag{1.1}$$

donde $\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ y $\eta^{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Minkowski. (De aquí en adelante abreviaremos $(t,\vec{x})=(x^0,\vec{x})$ como x).

Ahora bien, la ecuación (1.1) puede ser obtenida de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - m^2\varphi^2) \tag{1.2}$$

construyendo la acción

$$S = \int \mathcal{L}(x)\, d^n x$$

y pidiendo que[1]

$$\delta S = 0.$$

Esto es, si tenemos una densidad $\mathcal{L}(\varphi,\varphi_{,\mu})$ pedimos que la acción sea estacionaria para los campos que son soluciones de las ecuaciones de movimiento (en nuestro caso la ec. (1.3)); así:

$$\delta \int \mathcal{L}(\varphi,\varphi_{,\mu})\, d^4x = 0$$

y por lo tanto

$$\int_{t_1}^{t_2}\int d^3x\left(\mathcal{L}(\varphi+\delta\varphi,\varphi_{,\mu}+\delta\varphi_{,\mu})-\mathcal{L}(\varphi,\varphi_{,\mu})\right)=\int d^4x\,\delta\varphi\left(\partial_\mu\mathcal{L}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu(\varphi)}\right)\right)=0$$

Integrando por partes, y usando

$$\delta(\varphi_{,\mu})=\partial_\mu(\varphi+\delta\varphi)-\partial_\mu\varphi=\partial_\mu(\delta\varphi)$$

obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} d^4x\,\delta\varphi\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial x^\mu)}\right]$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\varphi_{,\mu})}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=0 \qquad (1.8)$$

Finalmente, sustituyendo (1.2) en esta ecuación obtenemos (1.3) como deseábamos.

Es fácil ver que un conjunto de soluciones para (1.3) es

$$u_k(t,x) \propto e^{ik\cdot x-i\omega t} \qquad (1.4)$$

donde

$$\omega=(k^2+m^2)^{1/2} \quad ; \quad k\equiv|k|=\left(\sum_{i=1}^{n-1}k_i^2\right)^{1/2}$$

---

[1] Esto es en analogía con la mecánica clásica. Ver por ejemplo, Goldstein,(1950).

y $\qquad -\infty < k_i < \infty \;,\quad i=1,\dots,n-1$

A los modos con el signo de ω como en (1.4) se les llama de *frecuencia positiva.*

Definamos ahora el producto escalar

$$\left.\begin{aligned}(\varphi_1,\varphi_2) &= -i\int\left\{\varphi_1(x)\partial_t\varphi_2^*(x)-[\partial_t\varphi_1(x)]\varphi_2^*(x)\right\} d^{n-1}x \\ &= -i\int_t \varphi_1(x)\overleftrightarrow{\partial_t}\varphi_2^*(x)d^{n-1}x\end{aligned}\right\} \tag{1.4a}$$

donde t denota el hiperplano de simultaneidad en el instante t,[2] y la doble flecha indica diferenciación a la derecha menos diferenciación a la izquierda:

$$a\overleftrightarrow{\partial_t}b = a\partial_t b - b\partial_t a \tag{1.4b}$$

Con el producto escalar (1.4a) los modos (1.4) son ortogonales

$$(u_k, u_{k'})=0, \quad k\neq k'$$

y si escogemos en (1.4) una constante de proporcionalidad tal que

$$(u_k, u_{k'})=\delta^{n-1}(k-k') \tag{1.5}$$

tenemos

$$u_k=[2\omega(2\pi)^{n-1}]^{-\frac{1}{2}}\, e^{ik\cdot x-i\omega t} \tag{1.6}$$

Si en vez de (1.5) se necesitaran condiciones de frontera periódicas, escogeríamos

$$u_k=(2L^{n-1}\omega)^{-\frac{1}{2}}\, e^{ik\cdot x-i\omega t} \tag{1.7}$$

donde

$$k_i=(2\pi j_i/L), \quad j_i=0,\pm1,\dots, \quad i=1,\dots,n-1$$

con lo que la normalización quedaría ahora:

---

[2] (Spacelike hyperplane of simultaneity). Ver por ejemplo Bjorken and Drell, (1965b), pag 12.

$$(u_k, u_{k'}) = \delta_{kk'} \tag{1.8}$$

Finalmente, recordemos que para pasar de la representación continua a la discreta sólo hay que remplazar

$$\int d^{n-1}k \longrightarrow (2\pi/L)^{n-1}\Sigma_k. \tag{1.8a}$$

§ I2 CUANTIZACION

En la teoría de campos, una manera (de tantas) de llevar a cabo el proceso de cuantización, es considerar al campo φ como un operador e imponiendo las relaciones de conmutación:

$$\left.\begin{array}{l} [\varphi(t,x),\varphi(t,x')]=0 \\ [\pi(t,x),\pi(t,x')]=0 \\ [\varphi(t,x),\pi(t,x')]=i\delta^{n-1}(x-x') \end{array}\right\} \tag{1.9}$$

en donde

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t\varphi)} = \partial_t\varphi \tag{1.10}$$

es la variable canónica conjugada de φ (también un operador).

Por otro lado, se puede demostrar que los modos del campo u_k (en su representación discreta ó continua) y sus respectivos complejos conjugados forman una base ortonormal completa bajo el producto escalar antes definido, así que podemos escribir a φ como

$$\varphi(t,x)=\sum_k [a_k u_k(t,x)+a_k^\dagger u_k^*(t,x)] \tag{1.11}$$

donde a_k y $a_k^\dagger$ son operadores (para que φ lo sea también).
Si sustituimos esta expresión en las relaciones (1.9) nos queda

$$\left.\begin{array}{l} [a_k, a_{k'}] = 0 \\ [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \\ [a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \end{array}\right\} \tag{1.12}$$

que son equivalentes a (1.9).

De aquí en adelante usaremos la llamada *representación de*

Fock, en la que los estados se representan por vectores normalizados en el espacio de Hilbert $|\,\rangle$, llamados *kets*.

En esta representacion, todos los kets pueden ser construidos a partir dol vector $|0\rangle$, llamado estado de vacío (cero particulas) y cuyo significado se dicutirá cuando definamos el operador de numero en la seccion §1.4.

El estado $|0\rangle$ se define por la propiedad

$$a_k|0\rangle=0, \quad \forall\ k. \tag{1.12a}$$

mientras que al estado que resulta de operar $a_k^\dagger$ sobre $|0\rangle$ se le denomina *estado de una particula*, y se denota por $|1_k\rangle$

i.e. $$|1_k\rangle=a_k^\dagger|0\rangle$$

De esta manera se pueden construir los estados de muchas particulas

$$|1_{k1},1_{k2},\ldots,1_{kj}\rangle= a_{k1}^\dagger a_{k2}^\dagger\ldots a_{kj}^\dagger\,|0\rangle$$

si todas las k_n son diferentes y

$$|{}^1n_{k1},{}^2n_{k2},\ldots,{}^jn_{kj}\rangle = ({}^1n!\,{}^2n!\ldots{}^jn!)^{-\frac{1}{2}}\,(a_{k1}^\dagger)^{1n}\ldots(a_{kj}^\dagger)^{jn}\,|0\rangle$$

si alguna $a_k^\dagger$ se repite.

De lo anterior se siguen las útiles relaciones:[3]

$$\left.\begin{array}{l} a_k^\dagger|n_k\rangle=(n+1)^{\frac{1}{2}}\,|(n+1)_k\rangle \\ a_k|n_k\rangle=n^{\frac{1}{2}}\,|(n-1)_k\rangle \end{array}\right\} \tag{1.13}$$

§ 1.3 SIMETRIAS y LEYES DE CONSERVACION

Una de las ventajas de usar el formalismo lagrangiano en la

---

[3] Nótese la analogía con los operadores de ascenso y descenso del oscilador armónico; aunque en realidad es más que una analogía como veremos más adelante.

teoría cuántica de campos, es que al igual que en la mecánica clásica, este nos provee de una forma sistemática de identificar constantes de movimiento. Uno puede mostrar quo partiendo de un lagrangiano escalar, existe un teorema de conservación y una constante de movimiento asociada a cada transformación continua de simetría, que deja invariantes de forma tanto a la densidad lagrangiana $\mathscr{L}$ como a las ecuaciones de movimiento. Este teorema. es concecido como el teorema de Noether[4].

Dicutiremos a continuación la ley de conservación que se obtiene de la invariancia translacional en las ecuaciones de movimiento. Bajo un desplazamiento infinitesimal de la forma

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_\mu$$

el lagrangiano $\mathscr{L}$ cambia como

$$\delta\mathscr{L} = \mathscr{L}' - \mathscr{L} = \varepsilon_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_\mu} \tag{1.14}$$

Por otro lado, como $\mathscr{L}$ es invariante translacional

$$\delta\mathscr{L} = \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial x^\mu)}\delta(\varphi_{,\mu})\right] \tag{1.15}$$

Igualando estas dos expresiones y tomando en cuenta que

$$\delta\varphi = \varphi(x-\varepsilon) - \varphi(x) = \varepsilon_\mu(\varphi_{,\mu}) \; ,$$

obtenemos:

$$\varepsilon_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\varepsilon_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right] . \tag{1.15a}$$

Lo anterior implica que

$$T_{\mu\nu,\mu} = 0 \tag{1.16}$$

con $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento definido como:

---

[4] Ver por ej. Bogoliubov (1967), Cap. 1.

$$T_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\nu}\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \tag{1.17}$$

De esta expresión se derivan también las cantidades conservadas

$$P_\nu = \int d^3x \, T_{0\nu} = \int d^3x \, (\pi \, \partial_\nu \varphi - \eta_{0\nu} \mathcal{L}), \tag{1.18}$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial t}(P_\nu) = 0 \tag{1.18a}$$

y por lo cual a P_ν lo identificamos con el cuadrivector de energía-momento.

En forma similar:

$$T_{00} = \pi\dot{\varphi} - \mathcal{L} \equiv \mathcal{H} \tag{1.19}$$

y

$$\int d^{n-1}x \, T_{00} = H \tag{1.20}$$

con $\mathcal{H}$ y H la densidad hamiltoniana y el Hamiltoniano respectivamente.

Procediendo de la misma forma se obtienen otras cantidades conservadas si tenemos r lagrangianos independientes con *simetrías internas*. Esto es, si bajo las transformaciones locales

$$\varphi_r(x) \longrightarrow \varphi_r(x) - \varepsilon\lambda_{rs}\varphi_s(x) \tag{1.20a}$$

la densidad lagrangiana permanece invariante (ε es un parámetro infinitesimal y λ_{rs} es independiente de x_μ).

De suceder esto podemos imitar los pasos de (1.14) a (1.15a) y encontrar

$$0 = \delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} \delta\varphi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x_\mu)} \delta \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_\mu} \tag{1.20b}$$

$$= -i\varepsilon \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)} \lambda_{rs}\varphi_s \right]$$

de donde se sigue que

$$\frac{\partial J^\mu(x,\lambda)}{\partial x^\mu} = 0 \tag{1.20c}$$

con J^μ definida como:

$$J^\mu(x,\lambda) = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_r)} \lambda_{rs} \varphi_s \qquad (1.20d)$$

Existen por supuesto otras cantidades conservadas aparte de las ya encontradas, e incluso se pueden hallar desde un punto de vista alternativo usando el concepto de derivada de Lie y vectores de Killing. Sin embargo, para propósitos de este capítulo, nos basta con lo anterior.

§ 1.4 ENERGIA-MOMENTO Y OPERADOR DE NUMERO

Si sustituimos el Lagrangiano de la ecuación de Klein-Gordon (ec. 1.2) en la expresión para $T_{\mu\nu}$ obtenemos:

$$T_{\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\lambda\varepsilon}\varphi_{,\lambda}\varphi_{,\varepsilon} - m^2\varphi^2) \qquad (1.21)$$

de donde la densidad Hamiltoniana resulta

$$T_{00} = \frac{1}{2}\left[(\partial_t\varphi)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(\partial_i\varphi)^2 + m^2\varphi^2 \right] \qquad (1.22)$$

y la densidad de momento

$$T_{0i} = \partial_0\varphi\, \partial_i\varphi \qquad (1.23)$$

Sustituyendo la expansión de φ de la ec.(1.11) en las últimas dos expresiones e integrando en todo el espacio nos queda que:

$$H \equiv \int_t T_{00}\, d^{n-1}x = \frac{1}{2}\sum_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger)\omega \qquad (1.24)$$

y

$$P_i \equiv \int_t T_{0i}\, d^{n-1}x = \sum_k a_k^\dagger a_k k_i \qquad (1.25)$$

Usando las relaciones de conmutación de a_k y su respectivo conjugado ponemos finalmente a (1.24) de la forma

$$H = \sum_k (a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2})\omega \qquad (1.26)$$

Definamos ahora los operadores N_k y N como

$$\left.\begin{array}{r} N_k \equiv a_k^\dagger a_k \\ N = \sum N_k \end{array}\right\} \qquad (1.27)$$

Para entender el significado de N, tomemos sus valores esperados con los estados de Fock. De (1.12a) y (1.13) se sige que:

$$\langle 0|N_k|0\rangle = 0, \ \forall \ k \qquad (1.28)$$

$$\langle {}^1n_{k1}, \ldots, {}^jn_{kj}|N_k|{}^1n_{k1}, \ldots, {}^jn_{kj}\rangle = {}^in. \qquad (1.28a)$$

De las expresiones anteriores, vemos que el valor esperado del operador N_{ki} es la entrada del ket en el lugar de k_i, es decir, ${}^in$. Además, si sumamos (1.28a) sobre todos los valores de i obtendremos:

$$\langle|N|\rangle = \Sigma_i \, {}^in. \qquad (1.29)$$

Lo anterior nos sugiere el nombre de *operador de número del modo* k, para N_k, y *operador de número total* para N.

Ahora bien, observemos que por cada incremento unitario en ${}^in$, $\langle|H|\rangle$ y $\langle|P|\rangle$ se incrementan por ω_i y k_i respectivamente, por lo que podemos interpretar a ${}^in$ como *el número de cuanto*, cada uno de energía ω_i y momento k_i, en el modo con etiqueta k_i. En otras palabras: el estado $|{}^1n_{k1}, {}^2n_{k2}, \ldots, {}^jn_{kj}\rangle$ es un estado que tiene ${}^1n$ cuantos en el modo con momento k_1, ${}^2n$ cuantos en el modo con momento k_2, etc.

Con estas consideraciones, es posible entender mejor el significado de la interpretación para $a_k^\dagger$ y a_k. Lo que físicamente nos representan, o más propiamente dicho, lo que físicamente hacen $a_k^\dagger$ y a_k, es aumentar o reducir el número de cuantos en el modo k. Esto se infiere directamente de las ecuaciones (1.13), que reproducimos aquí para referencia

$$\left. \begin{aligned} a_k^\dagger |n_k\rangle &= (n+1)^{\frac{1}{2}} \, |(n+1)_k\rangle \\ a_k |n_k\rangle &= n^{\frac{1}{2}} \, |(n-1)_k\rangle \end{aligned} \right\} \tag{1.30}$$

Por esta razón, $a_k^\dagger$ se denomina *operador de creación* (de cuantos) en el modo k, mientras que a_k se identifica como el *operador de aniquilación* (de cuantos) en el modo k.

§ 1.5 DIVERGENCIA DE LA ENERGIA DEL VACIO

Con el formalismo desarrollado hasta ahora, podemos ya empezar a estudiar algunos de los aspectos más relevantes del vacío cuántico. El estado $|0\rangle$ o *estado de vacío*, tiene asociado un momento cero como se sige de (1.25)

$$\langle 0|\mathbb{P}|0\rangle = 0 \tag{1.31}$$

Dado que no hay ningún cuanto presente, esperaríamos que la energía fuese también nula, pero una simple inspección de la ec. (1.26) nos revela que esto no es así:

$$\langle 0|H|0\rangle = \langle 0|0\rangle \Sigma_k \tfrac{1}{2} \omega = \sum_k \tfrac{1}{2} \omega \tag{1.32}$$

Resulta entonces que la energía del vacío no sólo no es cero, sino que además es infinita. El problema viene de hecho del termino $(\frac{1}{2}\omega)$, que es la energía asociada con cada modo de oscilador armónico del campo escalar. Como ω no tiene una cota mayor, la energía puede ser entonces arbitrariamente grande. La energía divergente es un problema serio dentro de la teoria de campos, pero al cual se le puede dar la vuelta (por lo menos en espacio plano) ya que en el espacio de Minkowski no tiene sentido hablar de una energía absoluta. Esto implica que podemos *renormalizar* la energía de punto cero incluso por una cantidad infinita sin afectar las cantidades observables.[5] Lo anterior se logra definiendo una operación de *ordenación normal* denotada por ::, en la cual uno pide que en cualquier producto de operadores de creación y aniquilación, todos los operadores de aniquilación deben colocarse siempre a la derecha de los de creación. De la ec. (1.20) observamos que

$$:a_k a_k^\dagger: = a_k^\dagger a_k \tag{1.33}$$

y por lo tanto

$$:H: = \sum_k a_k^\dagger a_k \omega \tag{1.34}$$

con lo que el término divergente desaparece.

Para concluir la presente sección, algunas observaciones sobre la divergencia del campo de vacío parecen pertinentes. En primer lugar, debemos hacer notar que la energía divergente del vacío es todavía un punto de controversia en el actual estado de la teoría. Aunque en sistemas inerciales y espacio plano se deshace uno fácilmente de esta divergencia, lo mismo ya no se aplica en espacios curvos, porque como sabemos, en relatividad general una energía por encima de cierto valor implica curvatura y por lo tanto efectos gravitacionales. Así, la energía infinita del vacío implicaría efectos gravitacionales que no se observan.[6]

Si bien es cierto que tal resultado de la teoría no se presenta como algo satisfactorio ni matemática ni filosóficamente,

---

[5] Boyer 1970.

[6] Boyer 1970 y 1980.

tampoco debemos olvidar que este tipo de divergencias no empiezan con la teoría cuántica de campo, dado que problemas similares se presentan desde la electrodinámica clásica, en donde tendemos a ignorarlos[7]. Esto no quiere decir que por eso vamos a aceptar sin más las implicaciones de estas divergencias, sino por el contrario, tal vez esto mismo constituya un indicio de que nuestras teorías físicas <u>en general</u> deberían de ser replanteadas, incluso filosóficamente, a un nivel más fundamental.

Por otro lado, es importante decir que los resultados teóricos predichos por la existencia del campo de vacío se han verificado experimentalmente en diversos casos, como en el efecto Casimir. En dicho efecto se observa una fuerza de atracción entre dos placas conductoras colocadas muy de cerca, la cual es solamente resultado de la interacción de las placas con el vacío (para una discusión detallada sobre este efecto ver el Apéndice 1).

§ 1.6 ESPIN 1/2.

La cuantización para campos con espín diferente de cero se lleva a cabo de forma muy similar a la del caso escalar, así que en la presente sección sólo se desarrollarán las partes más

---

[7] Nos referimos aquí a que la energía del campo eléctrico está dada por $\mathcal{E} = 1/8\pi(\int E^2 dV)$; y como para una carga puntual $E=q*(r)^{-2}$, la integral para $\mathcal{E}$ diverge al tomarla sobre todo el espacio. Purcell(1985).

importantes del formalismo en el caso de espín $\frac{1}{2}$. Para una discusión detallada sobre lo tratado a continuación, hacemos referencia a Bjorken y Drell, (1964) y (1965).

La densidad Lagrangiana asociada a un campo fermiónico (espín $\frac{1}{2}$) es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}i(\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\psi_{,\alpha} - \bar{\psi}_{,\alpha}\gamma^{\alpha}\psi) - m\bar{\psi}\psi \qquad (1.35)$$

donde $\bar{\psi}$ es la *adjunta de Dirac* de ψ (i.e. $\psi^{\dagger}\gamma^{0}$), y γ^{μ} son las matrices de Dirac que satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\{\gamma^{\alpha},\gamma^{\beta}\}=2\eta^{\alpha\beta} \qquad (1.36)$$

La variación de $\bar{\psi}$ en la acción nos lleva a la ecuación matricial de Dirac[8]

$$i\gamma^{\alpha}\psi_{,\alpha} - m\psi = 0 \qquad (1.37)$$

para una partícula con masa m.

En el caso discreto, un conjunto completo de soluciones en modos para la ecuación de Dirac esta dado por

$$\left.\begin{aligned} u_{k,s}(t,x) &= N\ u(k,s)\exp(ik\cdot x-i\omega t) \\ v_{k,s}(t,x) &= N\ v(k,s)\exp(-ik\cdot x+i\omega t) \end{aligned}\right\} \qquad (1.38)$$

en donde

$$N=\begin{cases} (m/\omega L^{n-1})^{\frac{1}{2}}, & m \neq 0 \\ (2\omega L^{n-1})^{\frac{1}{2}}, & m = 0. \end{cases} \qquad (1.39)$$

Los espinores de energía positiva y negativa, $u(k,s)$ y $v(k,s)$, están normalizados de acuerdo a las relaciones

$$u^{\dagger}(k,s)u(k,s')=v^{\dagger}(k,s)v(k,s')=\begin{cases} (\omega/m)\delta_{ss'}, & m \neq 0 \\ 2\omega\delta_{ss'}, & m = 0. \end{cases} \qquad (1.40)$$

---

[8] ψ es en realidad un vector (ψ^{a}), y γ es una matriz (γ_{ab}).

así que podemos expander a ψ de la forma

$$\psi(t,x)=\sum_{\pm s}\sum_{k}\left[b_k(s)u_{k,s}(t,x)+d_k^{\dagger}(s)v_{k,s}(t,x)\right] \tag{1.41}$$

en donde los operadores $b_k(s)$, $d_k(s)$ y sus respectivos conjugados se definen por las propiedades

$$\left\{b_k(s),b_{k'}^{\dagger}(s')\right\}=\left\{d_k(s),d_{k'}^{\dagger}(s')\right\}=\delta_{ss'}\,\delta_{kk'} \tag{1.42}$$

y ψ está normalizada respecto al producto escalar

$$(\psi,\phi)=\int_{t}d^{n-1}x\ \bar{\psi}(t,x)\gamma_0\phi(t,x). \tag{1.43}$$

A partir de lo anterior, uno puede construir el Hamiltoniano y los operadores de momento de una manera similar a la del caso escalar. Al considerar sus valores de espectación en una base de Fock, se encuentra que $b_k^{\dagger}(s)$ es el operador de creación para cuantos en el modo con momento k, energía ω y espín s, mientras que $d_k^{\dagger}(s)$ aniqila cuantos en el modo de momento $(-k)$, energía $(-\omega)$, y espín s. Físicamente entonces, $b_k^{\dagger}(s)$ y $d_k^{\dagger}(s)$ representan operadores de creación para electrones y positrones respectivamente, mientras que $b_k(s)$, $d_k(s)$ son los correspondientes operadores de aniquilación.

§ 1.7 FUNCIONES DE GREEN EN TEORIA DE CAMPO

Pasemos ahora al estudio de las funciones de Green de la ecuación de onda, las cuales se pueden identificar con los valores esperados de algunos productos de operadores de campo.

De especial importancia son los valores esperados del conmutador y el anticonmutador, a los cuales identificamos con las funciones de Green:

$$iG(x,x')=\langle 0|\,[\varphi(x),\varphi(x')]\,|0\rangle \tag{1.44}$$

$$G^{(1)}(x,x')=\langle 0|\,\{\varphi(x),\varphi(x')\}\,|0\rangle \tag{1.45}$$

en donde a G es conocida como *función de Schwinger* o *función de Pauli-Jordan*, mientras que a $G^{(1)}$ se le llama *función elemental de Hadamard*. En ambos casos podemos dividir a las funciones en sus partes negativa y positiva como

$$\left.\begin{aligned} iG(x,x') &= G^{+}(x,x')-G^{-}(x,x') \\ G^{(1)}(x,x') &= G^{+}(x,x')+G^{-}(x,x') \end{aligned}\right\} \qquad (1.46)$$

en donde $G^{\pm}$ son conocidas como *funciones de Wightman* y están dadas por

$$\left.\begin{aligned} G^{+}(x,x') &= \langle 0|\varphi(x)\varphi(x')|0\rangle \\ G^{-}(x,x') &= \langle 0|\varphi(x')\varphi(x)|0\rangle . \end{aligned}\right\} \qquad (1.47)$$

De manera análoga está definido el propagador de Feynman:

$$\left.\begin{aligned} iG_{F}(x,x') &= \langle 0|T(\varphi(x)\varphi(x')|0\rangle \\ &\equiv \theta(t-t')G^{+}(x,x') + \theta(t'-t)G^{-}(x,x') \end{aligned}\right\} \qquad (1.48)$$

con

$$\theta(t)\begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

Y por último, las funciones de Green avanzada y retardada se definen como a continuación:

$$\left.\begin{aligned} G_{R}(x,x') &= -\theta(t-t')G(x,x') \\ G_{A}(x,x') &= \theta(t'-t)G(x,x') \end{aligned}\right\} \qquad (1.49)$$

Si sustituimos estas definiciones en la ec.(1.1) observamos que $G, G^{(1)}, G^{\pm}$ cumplen la relacion:

$$(\Box_{x} + m^{2})\mathcal{G}(x,x') = 0 \qquad (1.50)$$

mientras que las $G_{F,R,A}$ cumplen:

$$\left.\begin{aligned} (\Box_{x} + m^{2})G_{F} &= -\delta^{n}(x-x') \\ (\Box_{x} +m^{2})G_{R,A} &= \delta^{n}(x-x') \end{aligned}\right\} . \qquad (1.51)$$

Es precisamente en virtud de las últimas dos expresiones que hemos podido identificar ciertos valores esperados de productos de operadores con las funciones de Green; como sabemos, tales funciones nos expresan la propagación de perturbaciones del campo sujetas a ciertas condiciones de frontera.

No obstante la gran utilidad de estas definiciones para las diferentes funciones de Green, en muchas ocaciones es conveniente tenerlas en cierto tipo de representación. Se puede probar que todas las funciones de Green anteriormente definidas, pueden escribirse en la forma

$$\mathcal{G}(x,x') = (2\pi)^{-n}\int \frac{\exp[ik\cdot(x-x')-ik^{0}(t-t')]}{(k^{0})^{2}-|k|^{2}-m^{2}}\, d^{n}x. \qquad (1.52)$$

Esta integral tiene polos en $k^{0}=\pm(|k|^{2}+m^{2})^{\frac{1}{2}}$; si la consideramos como una integral de contorno, la forma en que integremos sobre los polos nos dará las diferentes funciones de Green (ver la Figura 1).

Las funciones de Green consideradas hasta el momento se han calculado como los valores esperados de productos de operadores del campo en un estado puro: el estado de vacío. Esto tiene como consecuencia que tales funciones sólo puedan describir sistemas a temperatura cero. Sin embargo, es posible definir funciones de Green para sistemas a temperatura diferente de cero utilizando los resultados de la mecánica estadística (ME).

Como sabemos la temperatura es un concepto estadístico. Por lo tanto, para poder describir un sistema a una cierta temperatura es necesario considerar al sistema como distribuido estadísticamente sobre todos los estados puros posibles. De esta manera, las funciones de Green para sistemas a temperatura diferente de cero estarán dadas por el promedio sobre todos los estados puros, de los valores esperados de productos de las φ's que se encuentren en dichos estados.

Consideremos ahora un estado puro $|\psi_i\rangle$ que sea eigenestado del hamiltoniano $H=\Sigma_k a_k^\dagger a_k \omega$ con valor propio E_i y del operador de número N con eigenvalor n_i. Debido a que en general tanto la energía como el número de partículas (cuantos) varía, un sistema en equilibrio a temperatura T debe ser descrito por el ensamble Gran Canónico[9]. En este ensamble, la probabilidad de que el sistema esté en el estado $|\psi_i\rangle$ es

$$\rho_i = [e^{-\beta(E_i-\mu n_i)}]Z^{-1} \tag{1.53}$$

en donde

$$Z = \sum_j e^{-\beta(E_j-\mu n_j)} = e^{-\beta\Omega} \tag{1.54}$$

es la gran función de partición, Ω el potencial termodinámico y $\beta=1/k_B T$; con k_B la constante de Boltzman.

Por lo tanto, el promedio sobre el ensamble de un operador $\mathcal{A}$ cualquiera a temperatura T es:

$$\langle \mathcal{A} \rangle_\beta = \sum_i \rho_i \langle\psi_i|\mathcal{A}|\psi_i\rangle. \tag{1.55}$$

Esta expresión se puede simplificar si introducimos el *operador de densidad*

$$\rho = \exp[\beta\,(\Omega + \mu N - H)] \tag{1.56}$$

con lo que

$$\rho_i = \langle\psi_i|\rho|\psi_i\rangle. \tag{1.57}$$

Finalmente el pedir que la probabilidad total sea uno es equivalente a

$$\mathrm{tr}\ \rho \equiv \sum_i \langle\psi_i|\rho|\psi_i\rangle = 1 \tag{1.58}$$

---

[9] Ver Huang(1963), o bien Kestin and Dorfman(1971).

y la expresión (1.55) para el valor esperado de $\mathscr{A}$ se reduce a

$$\langle \mathscr{A} \rangle_\beta = \mathrm{tr}\, \rho\mathscr{A} \tag{1.59}$$

Con esto, ya podemos definir las funciones de Green *térmicas*, simplemente remplazando los valores de expectación de vacío por los promedios sobre el ensamble $\langle\ \rangle_\beta$. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} G^+_\beta(x,x') &= \langle \phi(x)\phi(x')\rangle_\beta \\ G^-_\beta(x,x') &= \langle \phi(x')\phi(x)\rangle_\beta \end{aligned}\right\} \tag{1.60}$$

de donde se obtienen las demás funciones de Green. Al igual que en el caso de temperatura cero, las funciones anteriores pueden expresarse en una forma integral:[10]

$$G^\pm_\beta(x,x') = \pm\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \frac{c(\omega)}{1-e^{\mp\beta\omega}}\, e^{-i\omega(t-t')}. \tag{1.61}$$

donde

$$c(\omega) \equiv c(\omega;x,x') = (2\pi)^{1-n}\int d^{n-1}k\ \delta(\omega^2-|k|^2-m^2)[\theta(\omega)-\theta(-\omega)]e^{ik\cdot(x-x')}.$$

§ 1.8 GENERALIZACION A ESPACIOS CURVOS

En la presente sección se generaliza el formalismo básico desarrollado hasta ahora en el espacio de Minkowski, para el caso de espacios curvos. No obstante esta geralización es inmediata, la interpretación del formalismo resultante no lo es. Como veremos en lo que sigue, el concepto de partícula no siempre está bien definido para espacios curvos, y en algunos casos ni siquiera tiene sentido hablar de ellas.

La generalización de la que estamos hablando no es exactamente lo que uno quisiera, ya que hasta la fecha no existe

---

[10] Ver Birrel y Davies (1982), pag. 27-28.

una teoría cuántica de la gravitación; así que tendremos que limitarnos a un tratamiento semiclásico donde la gravedad juega el papel de un campo clásico de fondo. Esto significa que el campo cuántico se acopla con la curvatura de fondo por medio de un término lineal, de manera que aunque la métrica pueda afectar al campo, el campo no afecta a la métrica. Una teoría completa, debería de tomar en cuenta estos efectos no lineales. A pesar de ello se puede mostrar que la teoría es aplicable en la gran mayoría de los casos mientras que se excluyan singularidades en el espacio-tiempo[11].

Formalmente la cuantización del campo en espacio-tiempo curvo es enteramente análoga a la que hemos hecho para el espacio de Minkowski. Definamos la densidad lagrangiana[12]

$$\mathcal{L}(x) = \tfrac{1}{2}[-g(x)]^{1/2}\left\{g^{\mu\nu}(x)\phi(x)_{,\mu}\ \phi(x)_{,\nu} - [m^2+\xi R(x)]\phi^2(x)\right\} \quad (1.61)$$

donde $g(x)$ es el determinante del tensor métrico y m la masa de los cuantos del campo ϕ. El "acoplamiento" entre el campo escalar y el campo gravitacional representado por el término $\xi R\phi^2$, donde ξ es un factor numérico y $R(x)$ es el escalar de curvatura de Ricci. Como resultado de variar la acción con este lagrangiano en la forma usual obtenemos la ecuación de campo

$$[\Box_x + m^2 + \xi R(x)]\phi(x) = 0 \quad (1.62)$$

---

[11] Hawking (1975).

[12] Para una justificación de este lagrangiano ver Birrel y Davies (1982), pag. 43 y 81.

con $\Box$ dado por

$$\Box\phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = (-g)^{-1/2}\partial_\mu[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] \qquad (1.63)$$

Dos valores de ξ resultarán ser de especial interés: el llamado caso de mínimo acoplamiento, $\xi=0$, y el caso de acoplamiento conforme

$$\xi = \tfrac{1}{4}[(n-2)/(n-1)] \qquad (1.64)$$

En este último caso, si $m=0$ la acción y por lo tanto las ecuaciones de campo son invariantes bajo transformaciones conformes, i.e., bajo transformaciones

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x). \qquad (1.65)$$

El producto escalar se generaliza a

$$(\phi_1,\phi_2) = -i\int_\Sigma \phi_1(x)\overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi_2^*(x)[-g_\Sigma(x)]^{1/2}d\Sigma^\mu \qquad (1.66)$$

donde $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$, con n^μ un vector unitario ortogonal a la hipersuperficie temporaloide Σ.

La ecuación (1.62) tiene un conjunto completo de soluciones que son ortonormales bajo el producto (1.66), es decir:

$$(u_i,u_j)=\delta_{ij}, \quad (u_i^*,u_j^*)=-\delta_{ij}, \quad (u_i,u_j)=0. \qquad (1.67)$$

El campo ϕ puede ser entonces expandido en la forma

$$\phi(x) = \sum_i [a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)] \qquad (1.68)$$

y la cuantización en la teoría se implementa adoptando las relaciones de conmutación:

$$[a_i,a_j] = \delta_{ij}, \text{ etc.} \qquad (1.69)$$

De esta forma, la construcción de un estado de vacío, el espacio de Fock y demás, puede hacerse exactamente como lo hicimos para el espacio de Minkowski. No obstante, en esta ocasión existe una ambiguedad en el formalismo. En el espacio de Minkowski hay un conjunto natural de modos (1.6), que están asociados con el sistema rectangular de coordenadas (t,x,y,z). A su vez, este sistema coordenado natural está asociado con el grupo de Poincaré, cuya acción deja invariante el elemento de línea de Minkowski. En particular, el vector $\partial/\partial t$ es un vector de Killing del espacio de Minkowski ortogonal a las hipersuperficies temporaloides t=cte., y los modos u_ω son eigenfunciones de este vector de Killing con eigenvalores $-i\omega$ para frecuencias positivas$(\omega>0)$. Así, el vacío es invariante bajo la acción del grupo de Poincaré.

Como es lógico, el grupo de Poincaré ya no es un grupo de simetría en el espacio curvo. De hecho, en general no habrá ningún vector de Killing a travez del cual podamos definir modos de frecuencia positiva, ni tampoco un sistema de coordenadas 'natural'. Esto nos sugiere entonces que para espacios curvos sí importa el sistema de coordenadas que estemos considerando, por lo que no existe un conjunto de modos con el cual definir de manera única el estado de vacío.

Para visualizar lo anterior, consideremos un segundo conjunto ortonormal de modos $\bar{u}_j(x)$, y desarrollemos con él al campo ϕ.

$$\phi(x)= \sum_j [\bar{a}_j\bar{u}_j(\bar{x})+\bar{a}^\dagger_j u_{*j}(x)]. \tag{1.70}$$

Esta descomposición de ϕ define un nuevo espacio de Fock así como un nuevo estado de vacío $|\bar{0}>$:

$$\bar{a}_j|\bar{0}>= 0, \ \forall j. \tag{1.71}$$

Ya que ambos conjuntos son completos, los nuevos modos pueden ser desarrollados en términos de los viejos y viceversa:

$$\bar{u}_j= \sum_i (\alpha_{ji} u_i+\beta_{ji} u_{*i}) \tag{1.72}$$

o bien

$$u_i= \sum_j (\alpha_{*ji}\bar{u}_j-\beta_{ji}\bar{u}_{*j}). \tag{1.73}$$

Las matrices α_{ji}, β_{ji} son conocidas como *coeficientes de Bogoliubov*, y pueden ser evaluados como

$$\alpha_{ji}= (\bar{u}_i,u_j), \quad \beta_{ji}= -(\bar{u}_i,u_j^*). \tag{1.74}$$

A su vez, los operadores de creación/aniquilación están relacionados por

$$a_i= \sum_j (\alpha_{ji}\bar{a}_j+\beta^*_{ji}\bar{a}^\dagger_j) \tag{1.75}$$

$$\bar{a}_j= \sum_i (\alpha^*_{ji}a_i-\beta^*_{ji}a^\dagger_i) \tag{1.76}$$

Se sigue inmediatamente de (1.75) que los dos espacios de Fock basados en las dos elecciones de los modos $\bar{u}_j$ y u_i son diferentes en tanto $\beta_{ji}\neq 0$. Por ejemplo, $|\bar{0}\rangle$ no será aniquilado por a_i:

$$a_i|\bar{0}\rangle= \sum_j \beta^*_{ji}|\bar{1}_j\rangle\neq 0 \tag{1.77}$$

De hecho, el valor esperado del operador de número $N_i=a_i^\dagger a_i$ para el número de partículas del modo u_i en el estado $|\bar{0}\rangle$ es

$$\langle\bar{0}|N_i|\bar{0}\rangle= \sum_j |\beta_{ji}|^2, \tag{1.78}$$

lo cual nos dice que el «vacío» de los modos $\bar{u}_j$ contiene $\Sigma_j|\beta_{ji}|^2$ partículas en el modo u_i. Esto muestra que el concepto de vacío depende en general del observador.

Las funciones de Green para espacios curvos son las mismas que hemos definido con anterioridad, excepto que ahora $\phi(x)$ satisface la ecuación de campo para espacio-tiempo curvo (1.62). Cuando tratemos ejemplos específicos en espacios curvos profundizaremos más en esto.

Hasta aquí nos hemos concretado a exponer las ideas de la TCC ortodoxa tal y como se encuentran en los textos. A pesar de ser las más difundidas entre los físicos modernos, presentan ciertas dificultades conceptuales. Por ello, a partir de los próximos capítulos empezaremos a analizar las ideas fundamentales del formalismo ortodoxo más detenidamente y a compararlas con otros puntos de vista alternativos que acaso puedan salvar algunas de estas dificultades.

REFERENCIAS

H.Goldstein, 'Clasical Mechanics', Aguilar 1950.

J.D. Bjorken y S.D. Drell, 'Relativistic Quantum Fields', McGraw-Hill 1965.

J.D. Bjorken y S.D. Drell, 'Relativistic Quantum Mechanics', McGraw-Hill 1965.

N.N. Bogoliubov, 'Introduction to the theory of quantized fields', John Wiley and Sons 1980.

E.M. Purcell, 'Electricity and Magnetism', 2nd. ed., McGraw-Hill 1985.

H. Huang, 'Statistical Mechanics' Addison-Wesley 1963.

N.D. Birrel y P.C.W. Davies, 'Quantum Fields in Curved Space', Cambridge University Press, 1982.

T.H. Boyer, Annals of Physics 56, 474-503, 1970.

T.H. Boyer, Physical Review D, 21,No. 8, abril 1980.

S.W. Hawking, Commun. math. Phys. 43, 199-220, 1975.

** CAPÍTULO 2 **

EL CAMPO DE PUNTO CERO Y EL CONCEPTO DE VACIO

La idea central de este capítulo es introducir un nuevo formalismo Lagrangiano, mediante el cual los efectos térmicos que se producen en el vacío en ciertas situaciones se podrán analizar en una forma más transparente de como lo hace la TCC tradicional. Sin embargo, ya que los conceptos de partícula y vacío juegan un papel clave para la interpretación física de tal formalismo, antes de introducirlo se dedicarán dos secciones para una discusión más detallada sobre los mismos.

§ 2.1 EL CONCEPTO DE PARTICULA

Según lo que hemos estudiado en el capítulo anterior acerca de la interpretación de los modos del campo como partículas, resulta claro que en general no hay un vacío único al cual todos los observadores, independientemente de su estado de movimiento, puedan hacer referencia. Entonces...¿Cuál es el conjunto de modos que describe "mejor" el vacío físico? La respuesta es que no existe, al menos no si no se especifica el estado de movimiento del observador y los detalles del proceso de detección. Por ejemplo, un detector en caída libre no siempre registrará la misma densidad de partículas que un detector acelerado. Esto es cierto incluso en el espacio de Minkowski: un detector acelerado registrará partículas incluso para el estado de vacío.

Posiblemente la lección más importante que haya surgido del estudio de la TCC en espacios curvos, es el habernos dado cuenta de que el concepto de partícula no tiene en general un significado universal. Las partículas pueden ser registradas en unos detectores mientras que en otros no, de manera que parece haber una cualidad en ellas que dependonde del observador.

En este punto me gustaría hacer notar lo siguiente. Cuando Dirac formalizó el concepto de fotón en la Electrodinámica Cuántica, lo hizo basado en que se podía formular una descripción estadística de los bosones que era formalmente análoga a un campo cuántico de osciladores en el espacio de Minkowski. Sin embargo, el que haya sido posible identificar a estos modos con bosones en estas circunstancias no quiere decir que en general y bajo cualesquiera condiciones de frontera, los modos, diferentes para cada caso en particular, tengan que ser identificados como partículas; en especial en sistemas no inerciales. Así, debemos aceptar que el concepto cuántico tradicional de partícula sólo puede aplicarse en un ámbito muy restringido, cosa que por cierto no se hace con frecuencia.

Junto con el nebuloso concepto de partícula de la teoría de campo existe otro muy relacionado: el de «creación» de partículas, que discutimos a continuación.

En una gran variedad de problemas de interés, el espacio-tiempo curvo puede ser visto como asintóticamente de Minkowski en el remoto pasado o futuro (e.g. un Universo estático de Einstein). En tales condiciones, la selección de un vacío «natural»[1], tiene un significado bien definido, i.e., existe un estado de ausencia de partículas para todos los observadores inerciales en la misma región asintótica. Nos referiremos desde

---

[1] El de Minkovski por supuesto.

ahora a las regiones de remoto pasado y remoto futuro como las regiones *in* y *out*[2] respectivamente.

Dado que estamos trabajando en la representación de Heisenberg, si escogemos el estado del campo en la región *in* como el estado de vacío, entonces permanecerá en ese etado durante toda su evolución. Sin embargo, como pronto mostraremos, para tiempos poteriores fuera de la región *in*, detectores en caída libre pueden aún detectar partículas en este supuesto estado de vacío. Más especificamente, si existe además una región *out*, el vacío (el valor esperado del operador de número) de la región *out* puede no coincidir con el vacío de la región *in*. En tal caso, un observador inercial en la región *out* detectará la presencia de partículas en el estado de vacío de la región *in*. Es precisamente por esta razón, por lo demás sin fundamento físico, que en espacios curvos frecuentemente se habla de "*creación*" de partículas como consecuencia de los cambios en el campo gravitacional externo durante la evolución del sistema.

Para ilustrar las anteriores consideraciones usaremos un modelo de detector de partículas propuesto por Unruh y DeWitt[3], que consiste en una partícula puntual idealizada con sus niveles de energía interna etiquetados con la energía E, acoplada por

---

[2] Las traducciones literales al castellano no son satisfactorias en este caso sobre el significado de los conceptos, así que se dejarán las expresiones en el original del inglés.

[3] Unruh (1976) y DeWitt (1979).

medio de una interacción de monopolo con un campo escalar ϕ. Supongamos que el detector se mueve a lo largo de una línea de mundo descrita por las funciones $x^{\mu}(\tau)$, con τ el tiempo propio del detector. La interacción del detector con la partícula está dada por el Lagrangiano de interacción $cm(\tau)\phi[x(\tau)]$, donde c es una constante pequeña de acoplamiento y m es el operador de momento monopolar del detector. Pensemos que ϕ se encuentra en el estado de vacío $|0_M\rangle$,i.e., vacío de Minkowski. En una trayectoria general, el detector no permanecerá en su estado base que llamaremos E_o, sino que hará una transición a un estado excitado $|\psi\rangle$. Si c es lo suficientemente pequeña, la amplitud de probabilidad de transición estará dada por la teoría de perturbaciones a primer orden como

$$ic\langle E,\Psi|\int_{-\infty}^{\infty} m(\tau)\phi[x(\tau)]d\tau\,|0_M,E_o\rangle \qquad (2.1)$$

Usando la ecuación de evolución para $m(\tau)$

$$m(\tau)= e^{iH_o\tau}\ m(o)\ e^{-iH_o\tau}, \qquad (2.2)$$

donde $H_o|E\rangle=E|E\rangle$, la anterior amplitud de transición se puede factorizar de la forma

$$ic\langle E|m(o)|E_o\rangle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E-E_o)\tau}\ \langle\psi|\phi(x)|0_M\rangle d\tau. \qquad (2.3)$$

Si ϕ es desarrollada en términos de los modos de ondas planas de Minkowski usuales (1.11), a este orden las transiciones sólo pueden ocurrir al estado $|\psi\rangle=|1_k\rangle$, que contiene un cuanto de frecuencia $\omega=(|\mathbf{k}|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}$ para algún k. Por lo tanto, en la normalización continua:

$$\langle 1_k|\phi(0)|0_M\rangle = \int d^3k'(16\pi^3\omega')^{-\frac{1}{2}}\langle 1_k|a^\dagger_{k'}|0_M\rangle e^{-ik'.x+i\omega' t} \qquad (2.4)$$

$$= (16\pi^3\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-ik.x+i\omega t} .$$

En este último resultado debemos recordar que x no es una variable independiente, y está determinada por la trayectoria del detector. Por ejemplo, si el detector sigue una línea de mundo inercial:

$$x = x_o + vt = x_o + v\tau(1-v^2)^{-\frac{1}{2}} . \qquad (2.5)$$

Sustituyendo lo anterior en (2.3) con $\psi=1_k$ nos da

$$(16\pi^3\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-ik.x_o} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E-E_o)\tau} e^{i\tau(\omega-k.v)(1-v^2)^{-1/2}} d\tau$$

$$=(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-ik.x_o} \delta(E-E_o+(\omega-k.v)(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}) \qquad (2.6)$$

No obstante, $k\cdot v\leq|k||v|<\omega$ y $E>E_o$, por lo cual el argumento de la función δ es siempre mayor que cero y la amplitud de transición se anula (no se detectan partículas).

Es claro que *si* en vez de una trayectoria inercial hubiéramos escogido otra más complicada, la integral de (2.3) no hubiera dado una δ y el resultado sería distinto de cero. En este caso estaríamos interesados en calcular la probabilidad de transición para todas las posibles E y ψ, que se obtienen elevando al cuadrado el módulo de (2.3), y sumando sobre E y el conjunto completo de ψ. Así,

$$c^2\sum_E |\langle E|m(o)|E_o\rangle|^2 \mathcal{F}(E-E_o), \qquad (2.7)$$

donde

$$\mathcal{F}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \, e^{-iE(\tau-\tau')} G^+(x(\tau),x(\tau')). \qquad (2.8)$$

En los casos de trayectorias del detector en el espacio de Minkowski para los cuales

$$G^{+}(x(\tau),x(\tau'))= g(\Delta\tau) \tag{2.9}$$

$$\Delta\tau\equiv \tau-\tau' \tag{2.10}$$

para alguna función g, el sistema será invariante ante transformaciones temporales en el sistema de referencia del detector, es decir $\tau\rightarrow\tau+\text{cte}$. Si la tasa de absorción de partículas por el detector es diferente de cero, la probabilidad de transición será divergente. Esto se sigue de (2.8), ya que la función de Wightman será sólo función de $\tau-\tau'$. De esta manera la integral doble se reduce a una transformada de Fourier de la función de dos puntos multiplicada por una integral temporal infinita. Este tipo de circunstancias a menudo se presentan en la TCC, y se les puede atacar eliminando de forma adiabática el acoplamiento a medida que $\tau\rightarrow\pm\infty$, o bien considerando la probabilidad de transición por unidad de tiempo propio:

$$c^2\sum_E |\langle E|m(0)|E_0\rangle|^2\int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\tau)e^{-i(E-E_0)\Delta\tau}\, G^{+}(\Delta\tau). \tag{2.11}$$

Para el caso escalar, la función de Wightman de frecuencia positiva se evalúa fácilmente de (1.52), de donde obtenemos:

$$D^{+}(x,x')= -\tfrac{1}{4}\pi^2[(t-t'-i\varepsilon)^2-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2]. \tag{2.12}$$

Escojamos ahora una trayectoria inercial, con lo que (2.12) se convierte en

$$D^{+}(\Delta\tau)= -\tfrac{1}{4}\pi^2(\Delta\tau-i\varepsilon)^{-2}, \tag{2.13}$$

y la integral en (2.11) puede ser ya calculada como una integral de contorno. Debemos cerrar el contorno por el semicírculo infinito inferior del plano complejo en $\Delta\tau$, ya que $E-E_0>0$. Sin embargo, el polo se encuentra en $i\varepsilon$ en el semiplano superior, de tal suerte que el resultado es cero y no se detectan partículas como era de esperarse.

Consideremos otro importante caso de este tipo. Imaginemos ahora que el detector se acelera en la dirección z con una aceleración instantánea α. La correspondiente línea de mundo se describe por las ecuaciones paramétricas

$$t = \alpha^{-1} \sinh(\alpha\tau), \qquad (2.14)$$

$$x = \alpha^{-1} \cosh(\alpha\tau).$$

Esto, introducido en (2.12) da

$$D^{+}(\Delta\tau) = -\left[16\pi^2\alpha^2 \sinh^2\left(\frac{\tau-\tau'}{2\alpha} - \frac{i\varepsilon}{\alpha}\right)\right]^{-1}. \qquad (2.15)$$

Usando la identidad

$$\operatorname{cosec}^2 \pi x = \pi^{-2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x-k)^{-2} \qquad (2.16)$$

podemos escribir

$$D^{+}(\Delta\tau) = -(4\pi^2)^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Delta\tau - 2\pi i\varepsilon + 2\pi i\alpha k)^{-2}. \qquad (2.17)$$

Finalmente, al sustituir lo anterior en (2.11) y evaluar la transformada de Fourier correspondiente, encontramos que la probabilidad de transición para el presente caso es:

$$c^2/2\pi \sum_{E} \frac{(E-Eo)\,|\langle E|m(o)|Eo\rangle|^2}{e^{2\pi(E-E_o)\alpha} - 1} \qquad (2.18)$$

El resultado expresado en (2.18) es sin duda de gran relevancia, ya que la aparición del factor de tipo Planckiano $[e^{2\pi\Delta E\alpha}-1]^{-1}$, "sugiere" que el equilibrio entre el detector acelerado y el campo ϕ en el estado $|0_M\rangle$, es el mismo que se alcanzaría si el detector hubiera permanecido en reposo pero sumergido en un baño térmico a una temperatura

$$T = \alpha/(2\pi k_B) \qquad (2.19)$$

donde k_B es la constante de Boltzman. El *sugiere* anterior está entre comillas porque debemos darnos cuenta de que para que en efecto $[e^{2\pi\Delta E\alpha}-1]^{-1}$ sea una Planckiana, la fórmula (2.10) debe suponerse, y no es un resultado de la teoría.

Es tiempo para nuestra pregunta favorita: ¿Qué significado físico tiene lo anterior? Frecuentemente se dice que un observador uniformemente acelerado "ve" radiación térmica, incluso cuando el campo ϕ se encuentra en el estado de vacío $|0_M\rangle$ y aunque todos los observadores inerciales juren que no detectan partículas. Lo anterior ha provocado que se apliquen adjetivos como *cuasi* o *ficticios* al hacer referencia a los cuantos que excitan al detector acelerado, pero en realidad el fenómeno es más una indicación (nuevamente) de que el concepto cuántico de partícula es aplicable sólo en circunstancias muy restringidas (sorry).

Una de las cosas que precisamente se tratan de evitar en el formalismo que propondremos, son estos conceptos poco entendidos de cuasi-partículas y similares. Pero para evitarlos, es necesario hechar mano de otro concepto menos exótico: el del campo real de punto cero.

§ 2.2 UNA ALTERNATIVA PARA EL VACIO: EL CAMPO REAL DE PUNTO CERO

En todo el tratamieto hasta ahora desarrollado se han considerado solamente las ideas de la TCC en su forma convencional. En la presente sección nos apartaremos de esta tendencia.

Para la TCC el vacío involucra sólo cuantos virtuales y la energía total es infinita, pero se supone que no tienen una realidad física. Por el contrario, en teorías como la Electrodinámica Estocástica(EDE) por ejemplo, el vacío está formado por un campo electromagnético clásico de naturaleza aleatoria que sí tiene un significado físico real; es decir, el campo interactúa con la materia del universo. Este es el punto de vista que preferiremos desde ahora, por ser a nuestro gusto más adecuado para llegar a una comprensión física de los extravagantes fenómenos que se dan en el vacío. Consistentes con esto, lo que resta de la sección lo dedicaremos a argumentar en base a un modelo para el campo *real* de punto cero.

Pero...¿En qué estamos pensando cuando hablamos de un campo *real* del vacío? Bien; un cierto número de fenómenos asociados con el vacío en la teoría cuántica del campo electromagnético pueden ser entendidos en un contexto puramente clásico con la teoría clásica del electrón[4], siempre y cuando cambiemos las condiciones de frontera de las ecuaciones de Maxwell para que puedan incluir radiación clásica aleatoria con un espectro invariante de Lorentz. En tal teoría, esta radiación electromagnética aleatoria se encuentra siempre presente sin importar la situación física. La radiación electromagnética aleatoria forma el estado de "vacío". Hay que notar que la radiación no está conectada con la temperatura , sino que existe en el vacío a la temperatura de cero absoluto. Por ello, se le llama *radiación clásica de punto cero.*

La radiación de punto cero es tratada como cualquier

---

[4] Ver Boyer(1980).

radiación clásica aleatoria, y las fluctuaciones del campo de punto cero se consideran tan reales como las fluctuaciones térmicas clásicas. El único aspecto especial de ésta radiación es su espectro, qué debe ser invariante de Lorentz. Al cumplir lo anterior, cualquier observador inercial, no importa su velocidad, encontrará el mismo espectro de radiación clásica aleatoria.

Finalmente la constante de Planck aparece como el factor de escala en el espectro, no como resultado de ninguna cuantización. En este sentido, es una *medida* de las fluctuaciones del campo de punto cero.

Pasemos de las palabras a las más convincentes matemáticas. A continuación formalizamos la teoría que hemos descrito, y mostramos que efectivamente reproduce el espectro ω^3 del vacío de la teoría cuántica. Por simplicidad haremos el desarrollo con el campo escalar.

Una distribución espacialmente homogénea e isortópica en el espacio vacío puede ser escrita como una expansión en ondas planas con fases aleatorias:

$$\phi(\mathbf{r},t)= \int d^3k\ f(\omega)\cos[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} -\omega t-\theta(\mathbf{k})], \qquad (2.20)$$

donde $\theta(\mathbf{k})$ son las fases aleatorias distribuídas uniformemente en el intervalo $(0,2\pi)$ e independientes para cada vector de onda $\mathbf{k}$.

La invariancia de Lorentz en el espectro se introduce pidiendo que el valor medio del cuadrado del campo $\langle\phi(\mathbf{r},t)\phi(\mathbf{r},t)\rangle$, tome la misma forma espectral para todos los sistemas inerciales. El valor medio se calcula de (2.20) como

$$\langle\phi(\mathbf{r},t)\phi(\mathbf{r},t)\rangle = \int d^3k_1\int d^3k_2 f(\omega_1)f(\omega_2) \tag{2.21}$$
$$* \langle\cos[\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}-\omega_1 t-\theta(\mathbf{k}_1)]$$
$$* \cos[\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}-\omega_2 t-\theta(\mathbf{k}_2)]\rangle$$
$$= \tfrac{1}{2}\int d^3k f^2(\omega),$$

donde los valores esperados de las fases aleatorias se pueden escribir

$$\langle\cos\theta(\mathbf{k})\cos\theta(\mathbf{k}')\rangle = \langle\mathrm{sen}\,\theta(\mathbf{k})\mathrm{sen}\,\theta(\mathbf{k}')\rangle = \tfrac{1}{2}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \tag{2.22}$$

$$\langle\cos\theta(\mathbf{k})\mathrm{sen}\,\theta(\mathbf{k}')\rangle = 0, \tag{2.23}$$

y uno integra sobre la función δ. El campo escalar observado por otro sistema inercial no debe cambiar, de manera que

$$\phi'(\mathbf{r}',t') = \phi(\mathbf{r},t) \tag{2.24}$$
$$= \int d^3k f(\omega)\cos[\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega' t'-\theta(\mathbf{k})],$$

donde la última igualdad se sigue de la invariancia de Lorentz de la fase de la onda plana.

Los vectores de onda $(\omega,\mathbf{k}),(\omega',\mathbf{k}')$ vistos por dos distintos sistemas inerciales con velocidad relativa v a lo largo del eje x, están relacionados por las transformaciones de Lorentz

$$\omega = \gamma(\omega'+vk'_x), \tag{2.25}$$

$$k_x = \gamma(k'_x+v\omega'/c^2), \tag{2.26}$$

$$k_y = k'_y \quad , \quad k_z = k'_z \ , \tag{2.27}$$

y con el Jacobiano de la transformación dado por

$$d^3k = d^3k'\gamma(1+vk'_x/\omega'). \tag{2.28}$$

Por lo tanto, de (2.24) tenemos

$$\langle\phi'(\mathbf{r}',t')\phi'(\mathbf{r}',t')\rangle = \int d^3k f^2(\omega) \tag{2.29}$$

$$= \int d^3k'\gamma(1+vk'_x/\omega')f^2(\gamma\omega'+\gamma vk'_x).$$

Podemos apreciar que la última expresión es exactamente $\int d^3k' f^2(\omega')$ si suponemos que la función f^2 es lineal en el inverso de su argumento

$$f^2(\omega)= cte./\omega. \tag{2.30}$$

De esta manera hemos obtenido ya un único espectro invariante de Lorentz para el campo escalar. Para hacer la conexión con la teoría cuántica de campo, escogemos la cte. en (2.30) de manera que la función espectral de punto cero $f_0(\omega)$ sea

$$f_0(\omega)= \tfrac{1}{2}\hbar c^2/\omega\pi^2. \tag{2.31}$$

En efecto, con base en una teoría puramente clásica, acabamos de reproducir el espectro correcto del vacío. La diferencia, es que con esta teoría no tenemos que acudir a fantasmagóricos y poco entendidos conceptos de la física cuántica como las partículas virtuales. Me refiero en particular a la idea de que de alguna forma el detector acelerado "provoca" que las partículas virtuales se conviertan en reales. En vez de eso, en nuestra teoría clásica los efectos térmicos se pueden entender como una distorsión Doppler del campo real de fondo debido a la aceleración del detector[5].

La información relevante sobre un campo clásico aleatorio en un punto $\mathbf{r}$ del espacio se puede obtener evaluando las correlaciones en las fluctuaciones. Así, para el campo escalar $\phi(\mathbf{r},t)$ de radiación clásica aleatoria, quisiéramos evaluar el valor medio $\langle\phi(\mathbf{r},s-t/2)\phi(\mathbf{r},s+t/2)\rangle$ que involucra el producto de los campos en el punto $\mathbf{r}$ a los tiempos $s-t/2$ y $s+t/2$.

---

[5] Boyer(1980). Ahondaremos en esto mas adelante.

Por otro lado, el campo fluctuante φ en un detector puntual en movimiento uniformemente acelerado debe ser evaluado como $\langle\varphi(o,\sigma-\tau/2)\varphi(o,\sigma+\tau/2)\rangle$, donde se ha escogido el detector en el origen del sistema acelerado, y $\varphi(o,\sigma\pm\tau/2)$ es el campo sobre el detector en el sistema inercial en reposo instantáneo con respecto al detector en el tiempo propio $\sigma\pm\tau/2$. De esta forma y usando las propiedades de transformación del campo (2.24) encontramos

$$\varphi(o,\sigma\pm\tau/2)= \phi\left[\frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a(\sigma\pm\tau/2)}{c}\right),0,0,\frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a(\sigma\pm\tau/2)}{c}\right)\right] \qquad (2.32)$$

con ϕ el campo en el sistema del laboratorio.

Si introducimos esto en la función de correlación, y con ayuda de la función espectral $f_o(\omega)$ de (2.31) obtenemos

$$\langle\varphi_o(o,\sigma-\tau/2)\varphi_o(o,\sigma+\tau/2)\rangle=\int d^3k\frac{\hbar c^2}{4\omega\pi^2}\cosh\left[2\omega\frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a\tau}{2c}\right)\right] \qquad (2.33)$$

que no depende de σ.

La función de correlación puede ser evaluada integrando primero sobre los ángulos para dar un factor de 4π y después integrando sobre las frecuencias. Como la integral es infinita, hacemos uso temporal de una función de corte:

$$\int_0^\infty d\omega\ \omega\cos b\omega= \lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty d\omega\ \omega\exp[(ib-\lambda)\omega] \qquad (2.34)$$

$$= -b^{-2}.$$

De esta manera encontramos que la función de correlación para un detector uniformemente acelerado en un campo clásico aleatorio es

$$\langle\varphi_o(o,\sigma-\tau/2)\varphi_o(o,\sigma+\tau/2)\rangle= -\frac{\hbar}{\pi c}\left(\frac{a}{2c}\right)^2\operatorname{csch}^2\left(\frac{a\tau}{2c}\right). \qquad (2.35)$$

Calculemos a continuación la función de correlación

$\langle\phi_T(o,s-t/2)\phi_T(o,s+t/2)\rangle$ para una partícula que se encuentra en un baño de radiación térmica aleatoria. La función espectral estará dada por:

$$\pi^2 f_T(\omega)= \frac{\hbar}{\omega}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{exp(\hbar\omega/kT)-1}\right] \tag{2.36}$$

$$= \frac{\hbar c^2}{2\omega}\, coth(\hbar\omega/2kT).$$

Empleando la expresión (2.20) para los campos escalares junto con el espectro térmico (2.36) la función de correlación térmica se expresa

$$\langle\phi_T(o,s-t/2)\phi_T(o,s+t/2)\rangle= \frac{\hbar}{\pi c}\int_0^\infty d\omega\omega coth\left[\frac{\hbar\omega}{2kT}\right]cos\omega t. \tag{2.37}$$

La integral puede descomponerse como

$$\int_0^\infty d\omega\omega coth\left[\frac{\hbar\omega}{2kT}\right]cos\omega t \tag{2.38}$$

$$= \int_0^\infty d\omega\omega cos\omega t + \int_0^\infty d\omega\,\frac{2\omega\ cos\omega t}{exp(\hbar\omega/kT)-1}$$

$$= -1/t^2+\left[1/t^2-\left[\frac{\pi kT}{\hbar}\right]^2 csch^2\left[\frac{\pi kTt}{\hbar}\right]\right],$$

donde se ha usado (2.34) para la parte singular y una tabla de integrales[6] para el resto. Por lo tanto

$$\langle\phi_T(o,s-t/2)\phi_T(o,s+t/2)\rangle= \frac{-\hbar}{\pi c}\left[\frac{\pi kT}{\hbar}\right]^2 csch\left[\frac{\pi kTt}{\hbar}\right]. \tag{2.39}$$

Podemos observar que la función de correlación térmica (2.39) y la obtenida anteriormente para un observador uniformemente acelerado en el vacío, ec. (2.35), son idénticas si suponemos que

$$T= \hbar a/(2\pi kc)\ . \tag{2.39a}$$

Es precisamente en este sentido que uno habla de que un observador

----

[6] Ver por ejemplo Gradshtein (1965).

acelerado en el vacío se halla en un baño de radiación térmica.

La teoría clásica del campo de punto cero explica más cosas de las que se han presentado hasta aquí, pero no es el propósito en ésta sección hacer una descripción detallada del modelo. Sin embargo, era importante revisar algunos de sus resultados para compararlos con los cuánticos, así como para poner de relieve la forma en que se pensará sobre el vacío dentro del formalismo que desarrollamos ahora.

§ 2.3 FORMALISMO PARA EL CAMPO DE PUNTO CERO

En el marco de la TCC se han desarrollado una serie de técnicas complicadas y poco rigurosas para tratar de extraer información física de cantidades formalmente infinitas. Por esto, para tratar los efectos térmicos en el vacío producidos por diversas situaciones como aceleración, curvatura, acotación etc., se ha optado un camino diferente que es relativamente sencillo desde el punto de vista matemático, y más transparente desde el punto de vista físico.

La idea central es que cualquier espectro de energía observado desde un sistema en movimiento aparece distorsionado por efecto Doppler. Ahora bien, como sabemos, el campo de punto cero es invariante de Lorentz, sin embargo no tiene por que ser invariante bajo transformaciones no inerciales. Boyer probó (dentro del marco de la EDE[7]) que la función de correlación del campo en un sistema uniformemente acelerado es exactamente la

---

[7] Boyer (1980).

misma que se encuentra para un sistema inercial en un baño térmico. De ésta forma, el espectro Planckiano detectado por un observador uniformemente acelerado sería debido a una distorsión del campo real de punto cero, y no a la creación de partículas como se interpreta tradicionalmente.

El formalismo que estamos por desarrollar[8] sigue siendo Lagrangiano, lo que nos ubica dentro de la TCC. Pero por otro lado y de acuerdo a las ideas expuestas con anterioridad, trataremos consistentemente al vacío como un campo real. El hecho de que sigamos dentro del marco matemático de la TCC sosteniendo un punto de vista físico inherente a la EDE no es en sí una contradicción. En primer lugar nos mantenemos dentro de la TCC sólo por ser una teoría más conocida; y en segundo, debemos tener siempre en mente que existe una analogía formal entre la EDE y la TCC para los campos bosónicos: las funciones de correlación del campo en una teoría están directamente relacionadas con las funciones de Wightman de la otra[9].

ESPIN CERO

Consideremos un sistema de partículas sin carga de espín cero con masa m en un espacio-tiempo arbitrario caracterizado por el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$. Las partículas están descritas por el campo

---

[8] Originalmente desarrollado por Shahen et. al. (1985)

[9] Esto se trata con detalle en el apéndice del capítulo.

escalar que cumple la ecuación de Klein-Gordon[10]

$$(\Box+m^2+\zeta R)\ \phi(x)=0 \tag{2.40}$$

donde R es el escalar de Ricci y ζ es la constante de acoplamiento (lineal) entre el campo gravitacional de fondo y el campo escalar. El operador $\Box$ está ahora dado por

$$\Box\phi=(-g)^{-\frac{1}{2}}\partial_{\mu}[(-g)^{\frac{1}{2}}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\phi]. \tag{2.41}$$

Si definimos la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}=-\tfrac{1}{2}(-g)^{\frac{1}{2}}\phi(\Box+m^2+\zeta R)\phi\ , \tag{2.42}$$

es fácil demostrar que la ecuación (2.40) puede ser obtenida de la forma usual de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Como podemos apreciar, el Lagrangiano que aquí usamos difiere del que comunmente se usa en la teoría de campo, ec.(1.2), por el término

$$\tfrac{1}{2}(-g)^{\frac{1}{2}}\partial_{\mu}(g^{\mu\nu}\phi\phi_{,\nu})\ , \tag{2.43}$$

que por ser una divergencia total no contribuye al variar la acción para obtener las ecuaciones de campo.

Consideremos ahora una densidad Lagrangiana general $\mathcal{L}(x)$ que depende de $\phi(x)$ y sus primeras dos derivadas. Si la métrica de fondo permanece fija, la variación de $\mathcal{L}(x)$ estará dada por

---

[10] Recordemos que trabajamos en un sistema de unidades tal que $\hbar=c=1$.

$$\delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}} + \partial_\mu\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu,\nu}} \right]\delta\phi \tag{2.44}$$

$$+\partial_\mu\left[\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu,\nu}} \overleftrightarrow{\partial}_\nu \right]\delta\phi\right] ,$$

en la notación ya introducida con anterioridad.

Si ahora suponemos que la métrica admite un vector de Killing[11] ξ^α, entonces bajo una transformacion infinitesimal

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \tag{2.45}$$

$g_{\alpha\beta}$ permanecrá invariante, mientras que a su vez ϕ y $\mathcal{L}$ variarán de acuerdo a las fórmulas

$$\delta\phi = \xi^\mu\phi_{,\mu} , \tag{2.46}$$

$$\delta\mathcal{L} = \xi^\mu\mathcal{L}_{,\mu}. \tag{2.47}$$

Introduciendo estas dos últimas expresiones en (2.44), y usando el hecho de que $\xi^\alpha{}_{;\alpha}=0$, obtenemos una ley de conservación:

$$J^\mu{}_{;\mu} \equiv (-g)^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu[(-g)^{\frac{1}{2}}J^\mu] = 0, \tag{2.48}$$

donde la corriente conservada es

$$J^\alpha = -2(-g)^{\frac{1}{2}}\left[\mathcal{L}\xi^\alpha - \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\alpha}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\alpha,\beta}} \overleftrightarrow{\partial}_\beta \right](\xi^\gamma\phi_{,\gamma})\right] \tag{2.49}$$

y el punto y coma denota la derivada covariante.

Si en particular escogemos la densidad Lagrangiana (2.42), la corriente se expresa como

$$J_\alpha = -\phi\overleftrightarrow{\partial}_\alpha(\xi^\beta\phi_{,\beta}). \tag{2.50}$$

---

[11] Recordemos que un vector de Killing satisface $\xi_{\alpha;\beta}+\xi_{\beta;\alpha}=0$.

Como sabemos, el espacio de Minkowski admite cuatro vectores de Killing linealmente independientes asociados al grupo de Poincaré. Consecuentemente, un tensor $T^{\alpha\beta}$ puede ser *definido* por la ecuación

$$J^{\alpha} = T^{\alpha\beta}\xi_{\beta} \ . \tag{2.51}$$

Como las ξ_{α}'s son linealmente independientes, la fórmula anterior implica que $T^{\alpha\beta}{}_{;\alpha}=0$, ya que la corriente J^{α} se conserva. De las ecuaciones (2.50) y (2.51) se sigue que, en coordenadas cartesianas

$$T_{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2}\phi\overleftrightarrow{\partial}_{\alpha}\overleftrightarrow{\partial}_{\beta}\phi \ . \tag{2.52}$$

Desafortunadamente esta expresión no tiene un equivalente en espacio curvo. Es posible tratar de definir

$$T'_{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2}\phi\overleftrightarrow{\nabla}_{\alpha}\overleftrightarrow{\nabla}_{\beta}\phi \ , \tag{2.53}$$

pero la divergencia de este tensor es

$$T'_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = R_{\alpha}{}^{\beta}\phi_{;\beta} \tag{2.54}$$

que no es cero en general. Lo que es más, podemos darnos cuenta de que la traza de $T'_{\alpha\beta}$ no se anula para un campo escalar sin masa, cosa que descarta a $T'_{\alpha\beta}$ como tensor de energía-momento.

Aún así, mientras que exista un vector de Killing temporaloide, J_{α} dado por (2.50) constituye una definición para el cuadrivector de energía-momento que es útil para agunos propósitos prácticos.

La línea de mundo $x^{\alpha} = x^{\alpha}(\tau)$ de un observador con velocidad U^{α} puede ser identificada con un vector de Killing temporaloide como

$$\frac{dx^{\alpha}}{d\tau} = U^{\alpha} = (\xi^{\mu}\xi_{\mu})^{-\frac{1}{2}}\xi^{\alpha} \ , \tag{2.55}$$

donde τ es el tiempo propio. De tal forma que la densidad de energía puede ser definida

$$e= U^{\alpha}J_{\alpha}\ , \tag{2.56}$$

y de (2.47)

$$e= (\xi^{\mu}\xi_{\mu})^{\frac{1}{2}} \left[-\phi \frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \left[\frac{d\phi}{d\tau} \right]^2\right] \tag{2.57}$$

en donde $U^{\rho}\nabla_{\rho}= d/d\tau$.

Procedemos ahora a cuantizar el campo ϕ de la manera usual. Comenzando con la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$ de la ec. (2.42) e interpretando a ϕ como un operador, llegamos a la definición

$$J_{\alpha}= -\langle\phi\overleftrightarrow{\partial}_{\alpha}(\xi^{\beta}\phi_{,\beta})\rangle \tag{2.58}$$

para el valor esperado del cuadrivector de energía-momento, y

$$e= \tfrac{1}{2}(\xi^{\mu}\xi_{\mu})^{\frac{1}{2}} \left\langle -\phi \frac{d^2\phi}{d\tau^2} - \frac{d^2\phi}{d\tau^2} + 2\frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} \right\rangle \tag{2.59}$$

para la densidad de energía.

En la mecánica cuántica también es usual definir una corriente con divergencia cero:

$$\begin{aligned} n &\equiv U^{\alpha}n_{\alpha} \\ &= -i\left\langle \phi \frac{d\phi}{d\tau} - \frac{d\phi}{d\tau}\phi \right\rangle \end{aligned} \tag{2.60}$$

que se interpreta como la *densidad de número de partículas*.

Tomando como base lo anterior, desarrollamos ahora un formalismo que nos permitirá evaluar de manera directa tanto la densidad de energía, como la densidad de número de partículas para un detector moviéndose a lo largo de una órbita de Killing.

Primero escribamos el promedio en (2.60) como

$$\begin{aligned} n= -i\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma\ \delta(\sigma)\Big\langle&\phi(\tau+\tfrac{1}{2}\sigma)\frac{d\phi}{d\tau}(\tau-\tfrac{1}{2}\sigma)- \\ &- \frac{d\phi}{d\tau}(\tau+\tfrac{1}{2}\sigma)\phi(\tau-\tfrac{1}{2}\sigma)\Big\rangle \end{aligned} \tag{2.61}$$

Después de efectuar una integración por partes lo anterior se convierte en

$$n= -2i\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \frac{d\delta}{d\sigma}(\sigma) \ \langle\phi(\tau+\tfrac{1}{2}\sigma)\phi(\tau-\tfrac{1}{2}\sigma)\rangle. \tag{2.62}$$

Además, como es lógico,

$$\phi(\tau\pm\tfrac{1}{2}\sigma)\equiv \phi[x^{\mu}(\tau\pm\tfrac{1}{2}\sigma)]. \tag{2.63}$$

En este punto hacemos uso de las definiciones de las funciones de Wightman evaluadas en los puntos $x^{\mu}=x^{\mu}(\tau\pm\frac{1}{2}\sigma)$, a lo largo de la línea de mundo dada:

$$D^{\pm}(\tau+\tfrac{1}{2}\sigma,\tau-\tfrac{1}{2}\sigma)= \langle\phi(\tau\pm\tfrac{1}{2}\sigma)\phi(\tau\mp\tfrac{1}{2}\sigma)\rangle. \tag{2.64}$$

Usando la representación

$$\delta(\sigma)= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \ e^{i\omega\sigma} \tag{2.65}$$

para la función delta, y definiendo la transformada de Fourier de las funciones de Wightman como

$$D^{\pm}(\omega,\tau)= \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \ e^{i\omega\sigma} D^{\pm}(\tau+\tfrac{1}{2}\sigma,\tau-\tfrac{1}{2}\sigma) \ , \tag{2.66}$$

finalmente obtenemos la expresión para la densidad de número de partículas:

$$n= \pi^{-1} \int_{0}^{\infty} d\omega \ \omega \ [\tilde{D}^{+}(\omega,\tau)+\tilde{D}^{-}(\omega,\tau)]. \tag{2.67}$$

Una manipulación similar con la ec. (2.51) nos da como resultado, para la densidad de energía:

$$e= \pi^{-1}(\xi^{\mu}\xi_{\mu})^{\frac{1}{2}} \int_{0}^{\infty} d\omega \ \omega^{2}[\tilde{D}^{+}(\omega,\tau)-\tilde{D}^{-}(\omega,\tau)]. \tag{2.68}$$

Ya que ω es la frecuencia medida por un detector con tiempo propio τ y cuadrivelocidad U^{μ}, la ec. (2.64) implica que la densidad de partículas $f(\omega,\tau)$ está dada por

$$f(\omega,\tau)=\frac{1}{(2\pi)^2\omega}[\tilde{D}^+(\omega,\tau)-\tilde{D}^-(\omega,\tau)]. \qquad (2.69)$$

Por su parte, la ec. (2.69) implica que la densidad de energía por *modo* es

$$de=(\xi^{\mu}\xi_{\mu})^{\frac{1}{2}}\ \frac{\omega^2}{\pi}\ [\tilde{D}^+(\omega,\tau)+\tilde{D}^-(\omega,\tau)]. \qquad (2.70)$$

Así, la densidad de partículas debe ser evaluada con el valor esperado de vacío del conmutador del campo (función de Schwinger) mientras que la densidad de energía involucra al anticonmutador (función de Hadamard).

Hasta aquí con el caso escalar; a continuación se presenta una generalización del formalismo para el campo electromagnético (espín 1).

ESPIN UNO

En esta sección tratamos el campo de espín uno para el caso más simple, es decir, sin condiciones de frontera. El tensor electromagnético de energía-momento está definido como

$$T_{\mu\nu}=1/16\pi\ (4F_{\mu\alpha}F^{\alpha}{}_{\nu}+\eta_{\mu\nu}F_{\lambda\beta}F^{\lambda\beta}), \qquad (2.71)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Minkowski, y $F_{\mu\nu}$ es el tensor del campo electromagnético que satisface las ecuaciones de Maxwell:

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu}=0 \qquad (2.72a)$$

$$\partial_{[\mu}F_{\nu\lambda]}=0 \qquad (2.72b)$$

La forma del tensor de energía-momento (2.71) sugiere la definición para los tensores de dos puntos

$$D^+_{\mu\nu}(x,x')\equiv\tfrac{1}{4}\ (4F^{\alpha}{}_{(\mu}(x)F_{\nu)\alpha}(x')+\eta_{\mu\nu}F_{\lambda\beta}(x)F^{\lambda\beta}(x')) \qquad (2.73a)$$

$$D^-_{\mu\nu}(x,x')\equiv D^+_{\mu\nu}(x',x), \qquad (2.73b)$$

como generalización de las funciones de Wightman usadas en el caso escalar.

Siguiendo el enfoque usado para el caso escalar escribimos al tensor de energía-momento detectado localmente por un observador como

$$T_{\mu\nu}[x^{\alpha}(\tau)] = 1/16\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\sigma) \tag{2.76}$$

$$* \langle 4F^{\alpha}_{(\mu}(\tau+\sigma/2)F_{\nu)\alpha}(\tau-\sigma/2)+\eta_{\mu\nu}F_{\lambda\beta}(\tau+\sigma/2)F^{\lambda\beta}(\tau-\sigma/2)\rangle d\sigma$$

en donde se entiende que todas las cantidades mesurables están referidas a un observador con una línea de mundo $x^{\alpha}=x^{\alpha}(\tau)$ y cuadrivelocidad $u^{\alpha}=dx^{\alpha}/d\tau$.

Usando la representación (2.65) para la función δ, la ecuación (2.76) se puede escribir:

$$T_{\mu\nu}[x^{\alpha}(\tau)] = \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{i\omega\sigma}[D^{+}_{\mu\nu}(\tau+\sigma/2,\tau-\sigma/2)+D^{-}_{\mu\nu}(\tau+\sigma/2,\tau-\sigma/2)]d\omega d\sigma \tag{2.77}$$

Finalmente, introduciendo las transformadas de Fourier

$$\tilde{D}^{\pm}_{\mu\nu}(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma} D^{\pm}_{\mu\nu}(\tau+\sigma/2,\tau-\sigma/2)d\sigma, \tag{2.78}$$

el tensor de energía-momento toma la forma:

$$T_{\mu\nu}[x^{\alpha}] = 1/8\pi^2 \int_{0}^{\infty} [\tilde{D}^{+}_{\mu\nu}(\tau,\omega)+\tilde{D}^{-}_{\mu\nu}(\tau,\omega)]d\omega. \tag{2.79}$$

Las siguientes identidades, que se siguen de las ecuaciones de Maxwell y de (2.9) nos serán de utilidad:

$$\eta^{\mu\nu}D^{\pm}_{\mu\nu} = 0, \tag{2.80a}$$

$$D^{\pm}_{\mu\nu} = D^{\pm}_{\nu\mu}, \tag{2.80b}$$

$$\partial_{\nu}D^{\pm\nu}_{\mu} = 0. \tag{2.80c}$$

Las ecuaciones (2.80) implican que

$$D^{\pm}_{\mu\nu}(x,x') = n\partial^2_{\mu\nu} D^{\pm}(x,x'), \tag{2.81}$$

con $D^{\pm}(x,x')$ las funciones de Wightman para un campo escalar de masa cero y n una constante aún por determinar.

Ahora bien, sabemos que las funciones de Wightman para el espacio de Minkowski sin condiciones de frontera son proporcionales a

$$[(t-t'\mp i\varepsilon)^2 - |x-x'|^2]^{-1}, \tag{2.82}$$

con lo que, de acuerdo a (2.81)

$$D^{\pm}_{\mu\nu}(x,x') = \frac{4}{\pi}\,\frac{4(x_\mu - x_{\mu'})(x_\nu - x_{\nu'}) - \eta_{\mu\nu}(x_\alpha - x_{\alpha'})(x^\alpha - x^{\alpha'})}{[(t-t'\mp i\varepsilon)^2 - |x-x'|^2]^3} \tag{2.83}$$

Es importante darse cuenta de que las funciones $D^{\pm}_{\mu\nu}$ tienen en general la forma

$$D^{\pm}_{\mu\nu}(\tau+\sigma/2,\tau-\sigma/2) = \frac{A_{\mu\nu}}{(\sigma-i\varepsilon)^4} - \frac{B_{\mu\nu}}{(\sigma-i\varepsilon)^2} + D_{\mu\nu}(\tau,\sigma) \tag{2.84}$$

donde $A_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ dependen solamente de τ, y $D_{\mu\nu}(\tau,\sigma)$ por definición no tiene polos en $\sigma=\pm i\omega$.

Para obtener el tensor de energía-momento completo, debemos ahora integrar sobre todas las frecuencias ω; el resultado final es:

$$T_{\mu\nu}[u^\alpha(\tau)] = 1/8\pi\int_0^\infty \left(\frac{A_{\mu\nu}}{3}\,\omega^3 + 2B_{\mu\nu}\,\omega\right)d\omega + 1/4\pi D_{\mu\nu}(\tau,0). \tag{2.85}$$

Como podemos ver la integral divergente corresponde a la energía de punto cero, mientras que el último término nos representa la parte físicamente observable del tensor.

Antes de concluir el capítulo es conveniente aclarar algunos puntos con respecto al formalismo. En primer lugar, y que ya mencionamos, está el hecho de que no ha sido posible generalizar una definición natural de $T_{\alpha\beta}$ para espacios curvos similar a la que usamos en espacio plano. Esto tiene como consecuencia que en espacio curvo sólo podamos hablar de una de las componentes del tensor de energía-momento: la densidad de energía. En espacio plano conservamos la generalidad. Por otro lado, y más importante, es que como el formalismo implica explícitamente la existencia de por lo menos un vector de Killing, las situaciones que se pueden analizar con él se limitan a casos estáticos con un alto grado de simetría. Situaciones en las que intervienen elementos dinámicos o radiación quedan totalmente excluidos. Aún así, podemos ver claramente que lo que perdimos en generalidad lo ganamos en simplicidad matemática, haciendo más fácil la interpretación del formalismo. No obstante, muchas situaciones físicas de gran relevancia cumplen las condiciones necesarias para ser analizados de esta forma, y es a lo que se dedican los dos siguientes capítulos.

APENDICE

(EQUIVALENCIA DE LAS FUNCIONES DE CORRELACION CLASICAS Y LOS VALORES ESPERADOS CUANTICOS)

Para el caso de los campos libres existe una conexión directa entre la TCC y la teoría clásica de campos aleatorios. Específicamente, podemos escribir el campo aleatorio clásico de la ec. (2.20) de la forma

$$\phi(\mathbf{r},t)= \int d^3k\ \tfrac{1}{2} f(\omega)[a(\mathbf{k})e^{-iK\cdot x}+a^*(\mathbf{k})e^{iK\cdot x}], \tag{1}$$

donde $K\cdot x=\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ y los símbolos $a(\mathbf{k})$ y $a^*(\mathbf{k})$ se expresan en términos de las fases aleatorias:

$$a(\mathbf{k})= exp[-i\theta(\mathbf{k})],\quad a^*(\mathbf{k})= exp[i\theta(\mathbf{k})]. \tag{2}$$

El valor de $f^2(\omega)$ se fija de acuerdo a (2.31) o (2.30) dependiendo de si la tenperatura es igual o diferente de cero. Los promedios sobre las fases aleatorias dan

$$\langle a(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')\rangle= \langle a^*(\mathbf{k})a^*(\mathbf{k}')\rangle= 0, \tag{3}$$

$$\langle a(\mathbf{k})a^*(\mathbf{k}')\rangle= \langle a^*(\mathbf{k}')a(\mathbf{k})\rangle= \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{4}$$

Escrito de esta manera el campo clásico aleatorio tiene una similitud con el campo cuántico escalar:

$$\hat{\phi}(\mathbf{r},t)= \int \frac{d^3k}{2\pi} \left(\frac{\hbar c^2}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}[\bar{a}(\mathbf{k})e^{-iK\cdot x}+\bar{a}^*(\mathbf{k})e^{iK\cdot x}], \tag{5}$$

donde $\bar{a}(\mathbf{k})$ y $\bar{a}^*(\mathbf{k})$ son los operadores de creación y aniquilación usuales que cumplen con

$$[\bar{a}(\mathbf{k}),\bar{a}(\mathbf{k}')]= [\bar{a}^\dagger(\mathbf{k}),\bar{a}^\dagger(\mathbf{k}')]= 0, \tag{6}$$

$$[\bar{a}(\mathbf{k}),\bar{a}^\dagger(\mathbf{k}')]= -[\bar{a}^\dagger(\mathbf{k}'),\bar{a}(\mathbf{k})]= \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{7}$$

Usando las relaciones (1)-(4) por un lado, y las (5)-(7) por el otro encontramos

$$\langle\phi_0(\mathbf{r},t)\phi_0(\mathbf{r}',t')\rangle=\tfrac{1}{2}\langle 0|\{\bar{\phi}(\mathbf{r},t)\bar{\phi}(\mathbf{r}',t')\}|0\rangle \tag{8}$$

$$=\int \frac{d^3k}{4\pi^2}\,\frac{\hbar c^2}{\omega}\cos[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega(t-t')]$$

que es lo que queríamos mostrar. De manera similar se puede demostrar que

$$\langle\phi_T(\mathbf{r},t)\phi_T(\mathbf{r}',t')\rangle= \tfrac{1}{2}\langle|\{\bar{\phi}(\mathbf{r},t),\bar{\phi}(\mathbf{r}',t')\}|\rangle \tag{9}$$

La similitud puede hacerse también para el caso electromagnético[12], pero para propósitos del apéndice con lo anterior basta.

---

[12] Boyer(1980).

REFERENCIAS

W.G Unruh, Physical Review D, 29, No. 6, 1984.

W.G Unruh, Physical Review D, 14, 870 (1975).

T.H. Boyer, Physical Review D, 21, No. 8, 1980.

S. Hacyan, A. Sarmiento, G. Cocho y F. Soto, Physical Review D, 32, No. 4, 1985.

B.S. DeWitt, Physics Reportrs (Section C of Physics letters), 19, No. 6, (1975), 295-357.

L. de la Peña, 'Stochastic Processes Applied to Physics and other related Fields, (World Scientific, Singapore, 1983).

I.S. Gradshtein y I.M. Ryzhik, 'Table of Integrals Series and Products', Academic Press, 1965.

** CAPÍTULO 3 **

APLICACIONES BASICAS

Existen varios ejemplo de interés en donde el formalismo que acabamos de desarrollar resulta de utilidad. En el presente capítulo se presentan algunas aplicaciones básicas que permitirán ilustrar las consecuencias más relevantes del formalismo. Esto es importante, porque como veremos, algunos resultados difieren de los de la TCC convencional. Lo que es más, tales resultados son consistentes en su interpretación con los que se obtienen en el marco de la EDE[1], no obstante que nuestra teoría es formalmente cuántica.

En espacio plano se estudian los casos de un observador inercial en el campo escalar y en el electromagnético; así mismo, se trata un observador uniformemente acelerado para el campo escalar. En espacios curvos se analiza el caso de un universo de Einstein y, finalmente, se trata como ilustración simple el caso térmico un observador en reposo sometido a un campo de radiación a temperatura distinta de cero.

D. ESPACIO PLANO

Comenzaremos las aplicaciones con el caso más simple que existe: el de un observador en movimiento uniforme en espacio plano. Las funciones de Wightman en el espacio plano son, como ya habíamos visto:

$$D^{\pm}(x,x')= -1/4\pi \left[(t-t'\mp i\epsilon)^2- |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2\right]^{-1}. \tag{B.1}$$

En este espacio-tiempo, $\xi^{\alpha}=(1,0)$ es un vector de Killing. Así

----

[1] Boyer(1980).

mismo, es la cuadrivelocidad de un observador en reposo con una línea de mundo $t=\tau$ y $x=0$. Por lo tanto la función de dos puntos queda

$$D^{\pm}(\tau+\tfrac{1}{2}\sigma,\tau-\tfrac{1}{2}\sigma)= -1/4\pi\ [\sigma\mp i\varepsilon]^{-2}. \tag{3.2}$$

Las transformadas de Fourier se evalúan directamente usando los métodos conocidos de la variable compleja:

$$\tilde{D}^{+}(\omega,\tau)= \omega/2\pi, \tag{3.3}$$

$$\tilde{D}^{-}(\omega,\tau)= 0, \tag{3.4}$$

para $\omega>0$.

Para obtener la densidad de energía y de número de partículas, usamos las ecuaciones (2.67) y (2.68), que reproducimos aquí para referencia:

$$n= \pi^{-1} \int_0^{\infty} d\omega\ \omega\ [\tilde{D}^{+}(\omega,\tau)+\tilde{D}^{-}(\omega,\tau)]. \tag{2.67}$$

$$e= \pi^{-1}(\xi^{\mu}\xi_{\mu})^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} d\omega\ \omega^2[\tilde{D}^{+}(\omega,\tau)-\tilde{D}^{-}(\omega,\tau)]. \tag{2.68}$$

De acuerdo con esto, en el presente caso obtenemos

$$f(\omega,\tau)= (2\pi)^{-3}, \tag{3.5}$$

$$de= \frac{\omega^3}{2\pi^2}\ d\omega. \tag{3.6}$$

La primera de las ecuaciones expresa simplemente que existe una partícula por cada celda del espacio fase, lo cual es tan sólo una consecuencia de la normalización usada, carente de significado físico. La segunda fórmula, es por supuesto la familiar energía de punto cero.

Concentrémonos ahora en un oservador con aceleración instantánea constante α y tiempo propio τ que está descrito por la línea de mundo

$$t= \alpha^{-1} senh(\alpha\tau), \tag{3.7}$$

$$x= \alpha^{-1} cosh(\alpha\tau). \tag{3.8}$$

La cuadrivelocidad del observador es en este caso

$$U^{\alpha}= \alpha(x,t,o,o), \tag{3.9}$$

que también es un vector de Killing en este espacio. Sustituyendo (3.7) y (3.8) en (3.1) se sigue que

$$D^{\pm}(\tau+\tfrac{1}{2}\sigma,\tau-\tfrac{1}{2}\sigma)= -\frac{\alpha^2}{16\pi^2}\, csch^2[\tfrac{1}{2}\alpha(\sigma\mp i\varepsilon)]. \tag{3.10}$$

Con la fórmula

$$csc^2(\pi x)= 1/\pi^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x-k)^{-2} \tag{3.11}$$

y haciendo uso del cálculo de residuos para evaluar las integrales correspondientes, obtenemos para las transformadas de Fourier:

$$\tilde{D}^{+}(\omega,\tau)= \frac{\omega}{2\pi}\,\frac{e^{2\pi\omega/\alpha}}{e^{2\pi\omega/\alpha}-1}\,, \tag{3.12}$$

$$\tilde{D}^{-}(\omega,\tau)= \frac{\omega}{2\pi}\,\frac{1}{e^{2\pi\omega/\alpha}-1}\,. \tag{3.13}$$

Así, de acuerdo a (2.67) y (2.68),

$$f(\omega,\tau)= (2\pi)^{-3}, \tag{3.14}$$

$$de= (\xi^{\mu}\xi_{\mu})^{\frac{1}{2}}\,\frac{\omega}{\pi^2}\left[\,\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2\pi\omega/\alpha}-1}\,\right]d\omega. \tag{3.15}$$

Nuevamente sólo hay una partícula en cada celda del espacio fase, pero podemos apreciar que ahora la energía del campo de punto cero presenta un término extra de tipo Planckiano. Esto sugiere que un observador acelerado *no detecta creación de nuevas partículas*; lo que parece mas bien, es que detecta al campo de punto cero que por efecto de la aceleración se manifiesta como un espectro Planckiano. Lo anterior es consistente con nuestra visión del campo real de vacío. Nótese también (y será el caso en todos los ejemplos que analicemos) que con el formalismo obtenemos el espectro *completo* para la densidad de energía, a diferencia de la TCC convencional que obtiene únicamente la parte no divergente del mismo.

Como una aplicación simple del formalismo para el caso de espín uno en espacio plano, calcularemos el tensor de energía-momento detectado localmente por un observador uniformemente acelerado. La línea de mundo del observador es

$$x^{\alpha}(\tau)= a^{-1}[\,senh(a\tau),\ cosh(a\tau),\ 0,\ 0\,], \tag{3.16a}$$

y su cuadrivelocidad

$$u^{\alpha}(\tau)= [\,cosh(a\tau),\ senh(a\tau),\ 0,\ 0\,], \tag{3.16b}$$

donde a es la aceleración lineal instantánea. De aquí que

$$x^{\alpha}(\tau+\sigma/2)-\ x^{\alpha}(\tau-\sigma/2)=\ 2a^{-1}senh(a\sigma/2)\ u^{\alpha}(\tau) \tag{3.17}$$

y, al introducir lo anterior en la ec.(2.85) encontramos que

$$D^{\pm}(\tau+\sigma/2,\tau-\sigma/2)=\ \frac{a^{4}csch^{4}[a(\sigma\mp i\varepsilon)/2]}{4\pi}\ [\,4u_{\mu}(\tau)u_{\nu}(\tau)-\eta_{\mu\nu}\,] \tag{3.18}$$

Procedemos ahora a evaluar las transformadas de Fourier e introducirlas en la ecuación para $T_{\mu\nu}$. El resultado final es:

$$T_{\mu\nu}=\ 1/3\pi^{2}(4u_{\mu}u_{\nu}-\eta_{\mu\nu})\int_{0}^{\infty}\omega(\omega^{2}+a^{2})\left[\tfrac{1}{2}\ +\ \frac{1}{e^{2\pi\omega/\alpha}-1}\right]d\omega. \tag{3.19}$$

Podemos darnos cuenta de que $T_{\mu\nu}$ es proporcional a $(4u_{\mu}u_{\nu}-\eta_{\mu\nu})$, el único tensor disponible con traza cero. Por lo demás, la integral nos muestra el conocido espectro de energía de punto cero y una distribución Planckiana adicional combinada con una densidad de estados modificada[2] $(\omega^2+a^2)d\omega$.

El cuadrivector de energía-momento puede ser evaluado con la fórmula

$$J_\mu = T_{\mu\nu}u^\nu. \qquad (3.20)$$

A continuación, discutimos las aplicaciones básicas en espacio-tiempos curvos.

ω. ESPACIO CURVO

Como ejemplo en espacio curvo, consideremos un universo de Einstein. La métrica de este espacio es

$$ds^2 = R^2[d\eta^2 - d\chi^2 - sen^2\chi(d\theta + sen^2\theta d\phi^2)] \qquad (3.21)$$

donde R es el radio (constante) del universo. Aquí, usaremos el vector de Killing $\xi^\mu=\delta^\alpha_0$ con magnitud $(\xi^\mu\xi_\mu)=R^2$. En las coordenadas que estamos trabajando, $x^0=\eta$.

Las funciones de Wightman para el presente caso han sido calculadas[3] y son:

$$D^\pm(x^\mu,x'^\mu) = 1/8\pi^2R^2\ [cos(\eta-\eta'\mp i\varepsilon) - cos(\chi-\chi')]^{-1} \qquad (3.22)$$

que se reduce a la forma (3.1) para $R\to\infty$.

Un detector en reposo sigue una órbita de Killing con un tiempo propio $\tau=R\eta$, de manera que

$$D^\pm(\tau+\sigma/2,\tau-\sigma/2) = -1/16\pi^2R^2\ csc^2\left[\frac{\sigma\mp i\varepsilon}{2R}\right]. \qquad (3.23)$$

Usando nuevamente la fórmula (3.11) calculamos las transformadas

---

[2] S. Hacyan (1985).

[3] Birrel and Davies (1982), pág. 123.

de Fourier en la forma usual. El resultado es

$$\tilde{D}^{+}(\omega,\tau)= \omega/2\pi \ [1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2\pi k R\omega)], \qquad (3.24a)$$

$$\tilde{D}^{-}(\omega,\tau)= 0, \qquad (3.24b)$$

para $\omega > 0$. Aunque la introducción de las anteriores ecuaciones en (2.67) y (2.68) no da de forma trivial el resultado deseado como en los casos anteriores, usando la teoría de distribuciones es posible escribir el producto final en la forma

$$f= (2\pi)^{-3} \qquad (3.25a)$$

$$e= \int_0^{\infty} \frac{\omega^3}{2\pi^2}\, d\omega + \frac{1}{240\pi^2 R^3} . \qquad (3.25b)$$

El segundo término de la ecuación (3.25b) coincide con el resultado que se obtiene en la TCC excepto por un factor de 2. Lo anterior es consecuencia de que en el formalismo aquí usado se utilizan las funciones de Wightman, que tienen el doble de polos (en todo el semiplano imaginario) que los propagadores de Feynman usadas tradicionalmente para calcular el tensor de energía-momento (con polos solo en el semiplano positivo).

iv) CASO TERMICO

A manera de ejemplo final estudiaremos un caso algo más sutil que los anteriores: un observador en reposo en un baño térmico de fondo.

Las funciones de Wightman en el campo escalar se expresan en términos de las funciones de temperatura cero como[4]

---

[4] Ver Birrel(1982) ref. 4 sección 2.7.

$$D_{\beta}^{\pm}(x,x')= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x-x'|^2-(t-t'+im\beta\mp i\varepsilon)} \tag{3.26}$$

con $\beta=1/(k_B T)$. Si tomamos a x y a x' sobre la línea de mundo de un observador en reposo y evalualuamos su transformada de Fourier encontramos:

$$\tilde{D}_{\beta}^{\pm}(\omega)= - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\sigma}\, d\sigma}{(\sigma-im\beta\mp i\varepsilon)^2} \equiv - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} I^{\pm} \tag{3.27}$$

Las transformadas $I^{\pm}$ se evalúan elementalmente:

$$I^{+}= \begin{cases} 0 \text{ si } m<0 \\ -2\pi\omega e^{-m\beta\omega} \text{ si } m\geq 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

$$I^{-}= \begin{cases} 0 \text{ si } m\leq 0 \\ -2\pi\omega e^{-m\beta\omega} \text{ si } m>0 \end{cases} . \tag{3.29}$$

Por lo tanto, según el formalismo, la densidad de energía es

$$\frac{de}{d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi} \frac{\omega}{2\pi} \left[\frac{1+e^{-\beta\omega}}{1-e^{-\beta\omega}} \right] = \frac{\omega^3}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\omega}-1} \right]. \tag{3.30}$$

Para el cálculo de la energía total extraemos la parte divergente de punto cero e integramos sobre todas las frecuencias. El resultado es la conocida fórmula:

$$e= 1/\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta\omega}-1} = \frac{\pi^2 k_B^4}{15} T^4= aT^4 \tag{3.31}$$

con a la constante de Stefan.

Recapitulemos un poco sobre las implicaciones de lo que hemos analizado. En la actualidad es generalmente aceptado que las fluctuaciones de punto cero de un campo cuántico producen efectos de tipo térmico en presencia de campos gravitacionales, sistemas acelerados y, en general, en una variedad de situaciones en donde están involucrados sistemas no inerciales. Pero mientras que los aspectos teóricos de las fluctuaciones cuánticas en campos gravitacionales o en sistemas acelerados están ya bien establecidos, *la evidencia experimental a favor o en contra* de estos interesantísimos fenómenos es aún desconocida. La razón por supuesto, es que cualquier efecto de polarización en el vacío es extremadamente pequeño para ser detectado con facilidad en las condiciones usuales de laboratorio. No obstante, si experimentalmente logramos averiguar que los efectos existen realmente, y si estos involucran creación de partículas o tan sólo una distorsión Doppler como lo implican los casos recién analizados con nuestro formalismo, sin duda alguna conseguiremos una buena pista sobre el tan intrigante significado del vacío físico.

REFERENCIAS

P.C.W. Davies, J. Phys. A, 8 (1975) 609.

W.G. Unruh, Phys. Rev D, 14 (1975) 870.

N.D. Birrel and P.C.W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1982).

T.W. Marshall, Proc. R. Soc. London A, 276 (1963) 475.

L. de la Peña, *Stochastic Processes Applied to Physics and Other Related Fields* (World Scientific, Singapore, 1983), and references therein.

T.H. Boyer, Phys. Rev. D, 21 (1980) 2137.

D.W. Sciama, P. Candelas, and D. Deutsch, Adv. Phys., 30 (1981) 327.

Ş. Hacyan, A. Sarmiento, G. Cocho, and F. Soto, Phys. Rev. D, 32 (1985) 914.

S. Hacyan, Phys. Rev. D32 (1985) 3216.

S. Hacyan y A. Sarmiento, Phys. Letts. B179 (1986) 287.

F. Soto, G. Cocho, S. Hacyan, and A. Sarmiento, preprint 87-No, IFUNAM.

F. Soto, G. Cocho, C. Villarreal, S. Hacyan, and A. Sarmiento, Rev. Mexicana de Física 33 (1987) 389.

T.H. Boyer, Phys. Rev., 174 (1968) 1764.

I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, U.S.A., 4th. ed., 1965).

I.M. Gelfand and G.E. Shilov. *Generalized Functions*, Vol. 1. (Academic Press, New York, U.S.A., 1964).

** CAPÍTULO 4 **

APLICACIONES AVANZADAS

Los ejemplos que acabamos de presentar son todos idealizaciones simples aunque con bastante contenido físico; la idea era ilustrar las consecuencias básicas de usar el nuevo formalismo en vez del de la TCC ortodoxa. Ahora ha llegado el momento de utilizar esta herramienta para analizar casos más interesantes como lo son los agujeros negros (tan de moda) y varios ejemplos relacionados con el efecto Casimir que incluso nos permitirán estudiar en forma parcial un modelo sobre el espectro de tipo térmico generado en algunas colisiones hadrónicas. Empezamos nuestro estudio con los agujeros negros.

§ 4.1 AGUJERO NEGRO DE SCHWARZCHILD

Como primer ejemplo se estudiará un agujero negro de Schwartzchild, que probablemente constituye el caso más interesante para la aplicación de la TCC en espacios curvos. El caso no sólo es relevante por sus sorprendentes resultados, sino porque los conceptos de vacío y creación de partículas en espacios generalizados tienen mucho de su origen aquí. Se analiza entonces un agujero negro bidimensional desde el punto de vista tradicional de Hawking y también desde el punto de vista de nuestro formalismo. El que en este caso también se haga el análisis del agujero negro con los métodos tradicionales, en vez de sólo compararlos con los de nuestro formalismo como hasta ahora lo hemos hecho, es un reflejo del interés por entender de donde y porqué surgen determinados conceptos *físicos* sobre el vacío en ambos formalismos. Las diferencias, son bastante marcadas desde el punto de vista conceptual.

— LA VISION DE HAWKING—

Antes de entrar de lleno al caso que nos interesa, vamos primero a hacer una breve exposición de un caso simple que usaremos para ilustrar el porqué debería existir creación de partículas (para la TCC convencional por supuesto) cuando la métrica de fondo varía con el tiempo. Lo anterior nos permitirá extrapolar fácilmente la idea en nuestro estudio del agujero negro.

Consideremos un universo bidimensional con la métrica

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 \tag{4.1}$$

en donde la sección espacial se expande o se contrae uniformemente de acuerdo a la función $a(t)$. Si definimos un nuevo parámetro de tiempo $\eta = dt/a$ de manera que

$$t = \int^{t} dt' = \int^{\eta} a(\eta')d\eta', \tag{4.2}$$

entonces podemos expresar (4.1) como

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2) = C(\eta)(d\eta^2 - dx^2), \tag{4.3}$$

donde $C(\eta) \equiv a^2(\eta)$. Podemos ver que esta forma del elemento de línea es conforme con el espacio de Minkowski.

Supongamos ahora que escogemos $C(\eta)$ como

$$C(\eta) = A + B\ \tanh(\rho\eta), \tag{4.4}$$

con A, B, ρ constantes. De esta forma, en el lejano pasado y en el lejano futuro el espacio-tiempo se vuelve asintóticamente de Minkowski ($C(\eta) \longrightarrow A \pm B$ si $\eta \longrightarrow \pm\infty$).

Si suponemos una solución por separación de variables para los modos normales de la forma

$$u_k(\eta, x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\, e^{ikx}\chi_k(\eta), \tag{4.5}$$

y sustituimos la expresión en la ec. $(\Box + m^2 + \xi R) = 0$ con $\xi = 0$[1], obtenemos la ecuación diferencial para χ_k:

$$\frac{d^2}{d\eta^2}\chi_k(\eta) + (k^2 + C(\eta)m^2)\chi_k(\eta) = 0. \tag{4.6}$$

La ecuación anterior admite soluciones en términos de las funciones hipergeométricas[2]. Las soluciones normalizadas (los modos) de (4.6) que se comportan como los modos de frecuencia positiva en el espacio de Minkowski en el remoto pasado $(\eta, t \to \infty)$ y en el remoto futuro $(\eta, t \to \infty)$ son

$$u_k^{in}(\eta, x) = (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} \exp[ikx - i\omega_+\eta - (i\omega_-/\rho)\ln(2\cosh(\rho\eta))] \\ \times {}_2F_1(1 + (i\omega_-/\rho),\ i\omega_-/\rho;\ 1 - (i\omega_{in}/\rho);\ \tfrac{1}{2}(1 + \tanh\rho\eta)) \tag{4.7}$$

y

$$u_k^{out}(\eta, x) = (4\pi\omega_{out})^{-\frac{1}{2}} \exp[ikx - i\omega_+\eta - (i\omega_-/\rho)\ln(2\cosh(\rho\eta))] \\ \times {}_2F_1(1 + (i\omega_-/\rho), i\omega_-/\rho; 1 - (i\omega_{out}/\rho); \tfrac{1}{2}(1 - \tanh\rho\eta)) \tag{4.8}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} \omega_{in} &= [k^2 + m^2(A - B)]^{\frac{1}{2}} \\ \omega_{out} &= [k^2 + m^2(A + B)]^{\frac{1}{2}} \\ \omega_\pm &= \tfrac{1}{2}[\omega_{out} \pm \omega_{in}]. \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Ya que u_k^{in} y u_k^{out} son diferentes, los coeficientes de Bogolubov también son diferentes de cero. Usando las propiedades

---

[1] Esto es porque en el caso conforme $\xi = \frac{1}{4}((n-2)/(n-1))$ y para dos dimensiones $(n=2)$ $\xi = 0$. Ver § 1.8.

[2] Ver por ejemplo Arfken (1970).

de transformación lineal de las funciones hipergeométricas podemos relacionar los modos de las regiones *in* y *out* como

$$u_k^{in}(\eta,x)= \alpha_k u_k^{out}(\eta,x)+\beta_k u_{-k}^{out}(\eta,x) \tag{4.10}$$

con

$$\alpha_k= \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1-(i\omega_{in}/\rho))\ \Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\ \Gamma(1-(i\omega_+/\rho))} \tag{4.11}$$

$$\beta_k= \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1-(i\omega_{in}/\rho))\ \Gamma(\ i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(\ i\omega_-/\rho)\ \Gamma(1+(i\omega_-/\rho))}\ . \tag{4.12}$$

Si comparamos (4.10) con (1.78) encontraremos que los coeficientes de Bogolubov para este caso están dados por

$$\alpha_{kk'}= \alpha_k\delta_{kk'}\ ;\ \beta_{kk'}= \beta_k\delta_{-kk'}. \tag{4.13}$$

Analicemos ahora la situación desde el punto de vista físico. Imaginemos que el campo cuántico se encuentra en el estado $|0,in\rangle$ en términos de los modos de la región *in* u_k^{in}. En el pasado remoto donde el espacio es de Minkowski, todos los detectores inerciales observarán una ausencia de partículas. En la región *out*, el espacio también es de Minkowski y el campo se encuentra en el estado $|0.in\rangle$, pero a diferencia de la región *in*, $|0,in\rangle$ ya no aparece como el estado de vacío físico para todos los observadores inerciales. Para ellos, el vacío estaría dado por el estado $|0,out\rangle$ definido en términos de los modos u_k^{out}, y observarían la presencia de un cierto número de partículas en el modo k dado por el cuadrado de (4.11).

Con estas ideas en mente, procedemos a estudiar el colapso gravitacional de un cuerpo esférico que se convierte en un agujero negro y examinamos sus consecuencias[3].

Consideremos un volumen de materia esféricamente simétrico rodeado por espacio vacío, de manera que en la región exterior la solución de las ecuaciones de Einstein se el espacio-tiempo de Schwarzschild. La métrica es entonces:

$$ds^2 = -(1-2M/r)dt^2+(1-2M/r)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+sen^2\theta d\phi). \qquad (4.14)$$

Es actualmente aceptado que si dicho volumen es lo suficientemente masivo, la esfera eventualmente implotará para formar un agujero negro de Schwarzschild. Si suponemos que en el remoto pasado la esfera estaba tan distendida que el espacio-tiempo era aproximadamente plano, entonces uno puede construir aquí el estado cuántico de vacío como en el espacio de Minkowski. Después del colapso, el espacio tendrá la forma de Schwarzschild (4.14) y el vacío (en la región *out*) ya no corresponderá al vacío del espacio de Minkowski construido en la región *in*. Por tanto, de la teoría que acabamos de exponer se sigue que la TCC esperaría una producción de partículas.

La situación física se ilustra en la figura 4.1; las letras cursivas $\mathscr{I}^+$ y $\mathscr{I}^-$ se refieren a las regiones de un diagrama de Penrose en donde $t+r\longrightarrow\infty$ con $t-r$ finita en el primer caso y $t-r\longrightarrow-\infty$ con $t+r$ finita en el segundo caso[4]. En este espacio, consideremos

---

[3] El tratamiento está basado en Hawking (1975) y Birrel (1982).

[4] Para nuestro tratamiento no será necesario profundizar sobre los diagramas de Penrose, pero para un estudio sobre ellos el lector puede consultar por ejemplo Birrel (1982) Cap. 3.

el operador Hermitiano escalar de campo ϕ que obedece la ecuación de onda

$$\phi_{;\alpha\beta}g^{\alpha\beta}=0. \tag{4.15}$$

La razón por la que se usa (4.15) en vez de

$$\phi_{;\alpha\beta}g^{\alpha\beta}+\tfrac{1}{6}R\phi=0$$

es que en el espacio-tiempo de Schwarzschild R=0.

El operador ϕ puede ser expresado como

$$\phi=\sum_i [f_i a_i+\bar{f} a_i^{\dagger}]. \tag{4.16}$$

El conjunto de soluciones f_i de la ecuación de onda (4.15) se puede escoger de manera que en la región $\mathscr{I}^-$ formen una familia completa que satisfaga las condiciones de ortonormalización

$$\tfrac{1}{2}i\int_S (f_i\bar{f}_{j;\alpha} - \bar{f}_j f_{i;\alpha})d\Sigma^{\alpha} = \delta_{ij} \tag{4.17}$$

donde la superficie S sea la región $\mathscr{I}^-$, y que contenga sólo frecuencias positivas con respecto al vacío de Minkowski. Los operadores $a_i^{\dagger}$ y a_i se interpretan entonces como los operadores de creación y aniquilación para las partículas que provienen del pasado remoto $\mathscr{I}^-$.

Ya que el campo sin masa está totalmente determinado por los datos iniciales sobre $\mathscr{I}^-$, el operador ϕ puede ser expresado como [illegible] en todas las regiones del espacio. En la región fuera del horizonte de eventos del agujero uno también puede determinar el campo por los datos iniciales en el horizonte y el la región de futuro remoto $\mathscr{I}^+$. Por lo tanto, ϕ puede ser expresada también en términos de soluciones que representan ondas salientes (retardadas) y ondas que cruzan el horizonte de eventos:

$$\phi = \sum_i [p_i b_i + \bar{p}_i b_i^\dagger + q_i c_i + \bar{q}_i c_i^\dagger]. \qquad (4.18)$$

Aquí las $\{p_i\}$ son las soluciones de la ecuación de onda que se anulan en el horizonte de eventos y que son ondas asintóticamente retardadas de frecuencia positiva en $\mathcal{I}^+$. Las $\{q_i\}$ por su parte, son soluciones que no contienen componentes que se alejen hacia el remoto futuro (son cero en $\mathcal{I}^+$). Como los campos están totalmente determinados por sus valores en $\mathcal{I}^-$, las p_i y las q_i pueden expresarse como combinaciones lineales de f_i y $\bar{f}_i$:

$$p_i = \sum_i (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} \bar{f}_j), \qquad (4.19)$$

y algo similar para q_i.

Ahora, las β_{ij} no serán cero debido a que la dependencia temporal de la métrica durante el colapso causará una cierta mezcla de frecuencias positivas y negativas como en el caso de creación cosmológica de partículas. Igualando las dos expresiones para ϕ (4.16) y (4.18), uno encuentra que b_i, que son los operadores de aniquilación para las partículas escalares salientes, pueden ser expresadas como una combinación de los operadores de aniquilación y creación a_i y $a_i^\dagger$:

$$b_i = \sum_i (\bar{\alpha}_{ij} a_j - \bar{\beta}_{ij} a_j^\dagger). \qquad (4.20)$$

Como consecuencia, cuando no hay partículas que llegan del pasado remoto (el estado de vacío) el valor esperado del operador de número $b_i^\dagger b_i$ del i-ésimo estado en la región $\mathcal{I}^+$ será, por los mismos argumentos que en la creación cosmológica de partículas

$$\langle 0_- | b_i^\dagger b_i | 0_- \rangle = \sum_i |\beta_{ij}|^2. \qquad (4.21)$$

Así, para poder calcular el número de partículas creado por el campo gravitacional y emitidas al infinito uno simplemente tiene que calcular los coeficientes β_{ij}. Uno podría pensar que este cálculo dependería fuertemente de la naturaleza detallada del colapso, pero Hawking[5] mostró que se puede derivar una forma asintótica para los β_{ij} que sólo depende de la gravedad superficial del agujero negro resultante; esto nos permite pensar en el agujero ya formado y emitiendo partículas sin tener que preocuparnos en como se formó ni cuando.

No se desarrollará aquí el cálculo detallado de los coeficientes β_{ij} dedido a que involucra un tedioso proceso matemático que no viene al caso[6], de manera que sólo se usarán los resultados finales. En dos dimensiones, en la normalización continua (i.e. donde $p_{\omega} = \int(\alpha_{\omega\omega'} f_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} \bar{f}_{\omega'})d\omega'$) se encuentra que

$$\left.\begin{matrix}\alpha_{\omega\omega'}\\ \beta_{\omega\omega'}\end{matrix}\right\} \approx C\, exp[\, i(\omega\mp\omega')v_0](\omega'/\omega)^{\frac{1}{2}}\ \Gamma(1-i\omega/\varkappa)[-i(\omega\mp\omega')]^{-1+i\omega/\varkappa} \tag{4.22}$$

donde $\varkappa$ es la gravedad superficial del agujero negro y C y v_0 son constantes. En este caso se puede expresar la relación entre los coeficientes de Bogolubov (ver §1.B) como

$$\int [\,|\alpha_{\omega\omega'}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}|^2]d\omega = 1 \ , \tag{4.23}$$

y de (4.22) notamos que

$$|\alpha_{\omega\omega'}| = exp(\pi\omega/\varkappa)\ |\beta_{\omega\omega'}|. \tag{4.24}$$

---

[5] Hawking (1975) y (1974).

[6] Sin embargo el cálculo en detalle se podrá encontrar en las referencias ya citadas.

Combinando (4.23) y (4.24) obtenemos finalmente el número de partículas por modo

$$N_{\omega}= (\exp(2\pi\omega/\varkappa)-1)^{-1}. \qquad (4.25)$$

Esto representa un espectro Planckiano de cuerpo negro con una temperatura dada por $\varkappa/2\pi$.

Podemos ver pues, que hay dos resultados importantes que se siguen del formalismo ortodoxo. Uno es que la curvatura generada por el agujero negro distorsiona los modos del campo creando partículas que se desplazan hacia el infinito; por otro lado, esta misma creación de partículas implica que hay un flujo neto de energía del agujero negro al exterior, con lo cual un agujero negro eventualmente perderá toda su energía desapareciendo[7] en medio de una gigantesca explosión.

Todo lo anterior resulta muy interesante. ¿Pero que tiene que decir el nuevo formalismo al respecto?..

— LA VISION DEL NUEVO FORMALISMO: ¿REALMENTE EXPLOTAN LOS AGUJEROS NEGROS? —

Uno de los ejemplos más interesantes que se pueden estudiar con el nuevo formalismo, es el de un observador en presencia de un agujero negro de Schwarzschild bidimensional. El objetivo de

---

[7] Es cierto que los tiempos característicos de este proceso, en la mayoría de los casos, es mayor que la edad del Universo, pero esto no nos preocupará por el momento.

estudiarlo, es que los dos resultados importantes que mencionamos en relación al tratamiento de Hawking no se aplican aquí. De hecho, el formalismo modificado predice que el efecto Hawking es inexistente. Veamos.

La métrica del problema es

$$ds^2 = \frac{2M}{r}\, e^{-r/2M} du dv, \tag{4.26}$$

donde M es la masa del agujero negro, r es la coordenada radial y u y v son las coordenadas de Kruskal definidas por la ecuación

$$uv = -(4M)^2 \left[r/2M - 1\right] exp[r/2M]. \tag{4.27}$$

La métrica (4.26) admite un vector de Killing ξ^{α} con magnitud $(\xi^{\mu}\xi_{\mu})^{\frac{1}{2}} = (1-2M/r)^{\frac{1}{2}}$. En estas coordenadas, la línea de mundo del detector en reposo en $r=r_o$ está dado por las ecuaciones

$$u = e^{a\tau}, \tag{4.28}$$
$$v = -be^{a\tau},$$

con τ el tiempo propio y a, b definidos por

$$a \equiv (1-2M/r_o)^{-\frac{1}{2}}/4M,$$
$$b \equiv 16M^2(r_o/2M-1)exp(r_o/2M).$$

Las correspondientes funciones de Wightman están dadas por[8]

$$D^{\pm}(u,v,u',v') = -\frac{1}{8\pi}\, ln[(u'-u\mp i\varepsilon)(v'-v\mp i\varepsilon)], \tag{4.29}$$

e introduciendo las ecuaciones (4.28) encontramos que

$$D^{\pm}(\tau+\sigma/2, \tau-\sigma/2) = -1/4\pi\; ln[2b\; senh(\tfrac{1}{2}a\sigma \mp i\varepsilon)]. \tag{4.30}$$

Usando la fórmula

---

[8] Birrel and Davies (1982), pág. 281.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma e^{i\omega\sigma} \ln|\mathrm{senh}(\tfrac{1}{2}\alpha\sigma \mp i\varepsilon)| = \mp 2\pi/\omega \,(e^{\mp 2\pi\omega/\alpha}-1)^{-1}, \tag{4.31}$$

las transformadas de Fourier de las funciones de Wightman quedan finalmente:

$$\tilde{D}^{+}(\omega,\tau) = 1/2\omega \; \frac{e^{2\pi\omega/\alpha}}{e^{2\pi\omega/\alpha}-1}, \tag{4.32a}$$

$$\tilde{D}^{-}(\omega,\tau) = 1/2\omega \; \frac{1}{e^{2\pi\omega/\alpha}-1}, \tag{4.32b}$$

para $\omega>0$. De aquí que, de acuerdo a las ecuaciones (2.67) y (2.68),

$$n = 1/2\pi \int_0^{\infty} d\omega \tag{4.33a}$$

$$e = \left[1-\frac{2M}{r_0}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega\, \omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2\pi\omega/\alpha}-1}\right]. \tag{4.33b}$$

El factor extra $(1-2M/r_0)^{\frac{1}{2}}$ proviene del término $(\xi^{\mu}\xi_{\mu})^{\frac{1}{2}}$ y garantiza que $de/d\omega$ sea finita en el horizonte del agujero.

Al igual que en el caso de aceleración uniforme en el espacio de Minkowski (ver cap. 3) encontramos una partícula por cada celda del espacio fase (consecuencia de la normalización). Así mismo, encontramos que le energía total está dada por la del campo de punto cero más un término Planckiano. Por lo tanto, un observador en reposo detectará un baño térmico (en el sentido que explicamos en la sección §2.2) con una temperatura:

$$k_B T = (8\pi M)^{-1}(1-2M/r_0)^{-\frac{1}{2}} ; \tag{4.34}$$

que es un resultado análogo al obtenido por Hawking.

Podemos darnos cuenta de la total analogía entre este caso y el de aceleración uniforme (ver cap. 3), así que sería natural pensar que los campos gravitacionales también deforman el espectro de energía de punto cero (por efecto Doppler gravitacional) y lo hacen aparecer como un espectro térmico. De tal suerte, aquí tenemos nuevamente dos resultados importantes. El primero es que en virtud de (4.33a), no parece haber ningún proceso de creación de partículas. El segundo, es que como de entrada el formalismo supone una situación estática, no puede haber un flujo de energía hacia el infinito. Esto implica por supuesto que no hay efecto Hawking y que los agujeros negros no se desvanecen (o explotan, si nos queremos poner dramáticos).

Tal vez lo más interesante de los resultados anteriores es que uno puede incluso pensar ortodoxamente y decir que el campo de punto cero es virtual. ¡Y no importa! El efecto Hawking sigue sin aparecer matemáticamente, lo cual es de cierto peso en contra de dicho efecto, porque como el mismo Hawking admite en su celebrado artículo de 1975, la única justificación *real* para pensar en la creación de partículas térmicas en un agujero negro es la derivación matemática que se hace. Vale la pena reproducir el párrafo original de Hawking[9]:

> "...this particle creation is directly analogous to that caused by a deep potential well in flat spacetime. The real justification of the thermal emission is the mathematical derivation given..."

Por otro lado, en el mismo artículo también se afirma:

---

[9] Hawking (1975).

"Perhaps the strongest reason for believing that black holes can create and emit particles at a steady rate is that the predicted rate is just that of the thermal emission of a body with temperature $\varkappa/2\pi$."

Es fácil ver que este último argumento tampoco se aplica en nuestro caso, ya que existe otra forma (la que acabamos de ver) de reproducir el espectro térmico sin que implique la creación de cuantos.

Con todo lo anterior, no quiero decir que los resultados de Hawking no sean válidos, sino que no son la única alternativa a la situación física real[1]. Como siempre, es posible que la situación sólo pueda ser resuelta experimentalmente (si es que alguna vez se logra realizar por supuesto).

Sin embargo, el que a partir de una base matemática similar y de una física totalmente idéntica se llege a dos resultados aparentemente incompatibles sobre una misma situación (y aún dentro de la posición filosófica ortodoxa), me hace pensar que un concepto tan cotidiano en la física de hoy como lo es el de creación de partículas, debería de ser aplicado con más cuidado, y no sólo en el caso del agujero negro. Lo anterior es doblemente válido, ya que el resultado original de Hawking motivó gran parte de los trabajos que hasta ahora se conocen sobre creación de

---

[1] De hecho, Unruh (1976) sugiere una cuantización consistente del campo escalar en donde no se obtiene creación de partículas en un agujero negro.

partículas en diversas situaciones.

Hay una observación final que me gustaría hacer para terminar la sección. Uno podría pensar que el hecho de que se obtengan resultados tan distintos en los dos formalismos, se debe en realidad a que no se está tratando la misma situación física. De hecho esto es parcialmente cierto ya que en un caso analizamos el problema considerándolo estático desde el principio y en el otro lo analizamos desde la creación del agujero negro, una situación obviamente dinámica. Pero recordemos que al final el resultado de Hawking no dependía de la dinámica del colapso y que únicamente importaban parámetros del agujero negro ya formado. En todo caso, siempre podemos pensar que el resultado del nuevo formalismo es un caso asintótico del tratado por Hawking, i.e., podemos pensar que el agujero se formó en la región del pasado remoto $\mathscr{I}^-$ y entonces la la situación se reduce al mismo caso en ambos formalismos.

§ 4.2 SISTEMAS ACOTADOS: CONFINAMIENTO ENTRE PLACAS

Otro de los interesantes efectos de tipo térmico que se presentan en el vacío, es el que se produce como consecuencia del confinamiento espacial de una determinada región por una frontera a la que se le imponen ciertas condiciones. Un ejemplo bien conocido es el efecto Casimir, que ya mencionamos en el Capítulo 1 y que se estudia en el apéndice de la tesis. Ahora trataremos con el efecto Casimir y variaciones del mismo en el resto de la sección, pero desde el punto de vista del formalismo que hemos venido desarrollando. Los casos que se analizan son el de dos placas paralelas conductoras[11] vistas por un observador en reposo (que es el efecto Casimir convencional) ; dos placas paralelas con un observador uniformemente acelerado entre ellas; el de cuatro placas formando un prisma rectangular con observadores en reposo o acelerados entre las mismas y finalmente el caso de un observador en reposo dentro de un cilindro conductor. Aquí, los resultados coinciden con los de la TCC convencional, aunque como en los ejemplos tratados en el Capítulo 3, los espectros aparecen completos con la contribución de punto cero. Por otro lado, para los ejemplos del prisma rectangular y el cilindro se sugiere una aplicación a la física de partículas[12] que podría ser de interés experimental.

4.2.1 ESPECTRO DEL VACIO ENTRE DOS PLACAS PARALELAS.

a) OBSERVADOR EN REPOSO.

Las funciones de Wightman para el campo escalar entre dos placas paralelas se calcula directamente con el método de imágenes y está dado por[13]

---

[11] En todo lo que sigue, cuando hablemos de conductoras nos referiremos a que el campo ϕ se anula en las placas o en la frontera en cuestión.

[12] A. Sarmiento et al. (1988).

[13] Ver Birrel y Davies (1982) pág 100, y referencias allí mencionadas.

$$D^{\pm}(x,x') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(x_1-x^2)+(x_2-x'_2)^2+(x_3-x'_3-an)^2-(t-t'\mp i\varepsilon)^2} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(x_1-x'_1)^2+(x_2-x'_2)^2+(x_3+x'_3-an)^2-(t-t'\mp i\varepsilon)^2} \right] \qquad (4.95)$$

en donde a representa la distancia entre las placas.

Para un observador inercial, podemos escoger x and x' como $(x_0=\tau-\sigma/2,\ x_1,\ x_2,\ x_3=z)$ y $(x'_0=\tau+\sigma/2,\ x_1,\ x_2,\ x'_3=z)$ respectivamente, con lo que las funciones de Wightman se convierten entonces en

$$D^{\pm}(\sigma) = -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(\sigma\mp i\varepsilon)^2-a^2n^2} - \frac{1}{(\sigma\mp i\varepsilon)^2-(2z-an)^2} \right]. \qquad (4.96)$$

Debido a que para $\omega > 0$, $\tilde{D}^{-}(\omega) = 0$ y como .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\sigma}d\sigma}{\sigma^2-A^2} = -\frac{2\pi}{A}\sin(\omega A) \qquad (4.97)$$

obtenemos para la transformada de Fourier de la función de Wightman positiva:

$$\tilde{D}^{+}(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin(\omega an)}{an} - \frac{\sin\omega(2z-an)}{2z-an} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\omega + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega an)}{n} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega(2z-an)}{2z-an} \right] \qquad (4.98)$$

De aquí que, según el formalismo desarrollado en el Capítulo 2, la densidad de energía por modo es

$$\frac{de}{d\omega} = \frac{1}{2\pi}\,\omega^2\,[\tilde{D}^{+}(\omega) + \tilde{D}^{-}(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\,\omega^2\,\tilde{D}^{+}(\omega) \qquad (4.99)$$

Como estamos en un sistema confinado, nos interesa calcular la densidad de energía por unidad de área entre las placas $dE/d\omega$, lo cual se obtiene integrando $de/d\omega$ de $z=0$ a $z=a$.

Las integrales $\int_0^a \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2x-an)dx$ no contribuyen a la energía por unidad de área entre las placas ya que

$$\int_0^a \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2x-an)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-an}^{a(n-1)} f(2x)dx = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-2an}^{-2a(n-1)} f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{-2a(n-1)} f(x)dx - \int_0^{-2an} f(x)dx \right] = 0$$

por lo que la integral queda finalmente[14]

$$\frac{dE}{d\omega} = \int_0^a \frac{de}{d\omega}\, dz = \frac{a\omega^3}{2\pi^2} + \frac{\omega^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega a n)}{n} \tag{4.40}$$

Ahora, usando el hecho de que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega a n)}{n} = \frac{\pi-\omega a}{2} \equiv f(a\omega)$ para $0<\omega a<2\pi$, entonces

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{\omega^3}{2\pi^2} \left[a + 2\omega^{-1} f(a\omega) \right] \ . \tag{4.41}$$

La gráfica de este espectro se ilustra en la figura 4.2.

Es interesante notar como el confinamiento produce un efecto sobre campo de punto cero modificándolo como observamos en (4.41).

Si descartamos la parte divergente del espectro en (4.41) e integramos sobre todas las frecuencias obtenemos la energía total por unidad de área entre las placas[15]:

---

[14] A. Sarmiento et. al.(1988).

[15] I. M. Gelfand and G. E. Shilov (1964).

FIGURA 42

$$E = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega a n)}{n}\, d\omega = -\frac{2}{\pi^2 a^3}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = -\frac{2\pi^2}{90 a^3} \tag{4.42}$$

que es la bien conocida fórmula de la energía de Casimir.

b) OBSERVADOR ACELERADO.

Para el cálculo de un observador acelerado entre las placas tomamos las funciones de Wightman (4.35) y los puntos x y x' sobre las líneas de mundo de un observador acelerado, i.e.

$$(\alpha^{-1}\mathrm{sh}[\alpha(\tau\pm\sigma/2)],\ \alpha^{-1}\mathrm{ch}[\alpha(\tau\pm\sigma/2)],\ k,\ z) \tag{4.43a}$$

donde k es una cte. El resultado es:

$$D^{\pm}(\sigma) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{a^2 n^2 - 4\alpha^{-2}\mathrm{sh}^2(\alpha\sigma/2\mp i\varepsilon)} - \frac{1}{(2z-an)^2 - 4\alpha^{-2}\mathrm{sh}^2(\alpha\sigma/2\mp i\varepsilon)}\right] . \tag{4.43}$$

Siguiendo el formalismo como hasta ahora, obtenemos las transformadas de Fourier de las funciones de Wightman:

$$\tilde{D}^{\pm}(\omega) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[I_1^{\pm} - I_2^{\pm}\right], \tag{4.44}$$

en donde

$$I_i^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\sigma}\, d\sigma}{z_i^2 - \gamma^2\mathrm{sh}^2(\alpha\sigma/2\mp i\varepsilon)}$$

con $z_1 = an$, $z_2 = 2z-an$, y $\gamma^2 = 4\alpha^{-2}$. Por la misma razón que en el caso anterior, I_2 no contribuye a la densidad de energía, así que sustituyendo en (4.44) la I_1 e integrando de $z=0$ a $z=a$ obtenemos[16]:

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{\omega^3}{\pi^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2\pi\omega/\alpha}-1}\right)\left\{a + \frac{2}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[2\omega\alpha^{-1}\operatorname{arcsh}(\alpha a n/2)]}{n[1+(\alpha a n/2)^2]^{1/2}}\right\} \qquad (4.45)$$

En la figura 4.2 también se reproduce el espectro (4.45) como función de ω. Podemos distinguir la contribución térmica debida a la aceleración en el primer paréntesis de (4.45), mientras que en el segundo reconocemos la contribución de punto cero más un término híbrido debido a la presencia de las placas y a la aceleración.

Si descartamos nuevamente el término correspondiente a la energía de punto cero e integramos sobre las ω obtenemos la densidad de energía entre las placas:

$$\frac{a}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{\omega^3 d\omega}{e^{\pi y\omega}-1} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{(1+u^2)^{1/2}}\int_0^{\infty}\omega^2\sin[y\omega\operatorname{arcsh}(u)]\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\pi y\omega}-1}\right)d\omega$$

donde $y=2/\alpha$ y $u=\alpha a n/2$. Esta última expresión puede reducirse para dar[17]

$$E = -\frac{2\pi^2}{90a^3} + \frac{a\alpha^4}{240\pi^2} \qquad (4.46)$$

Notemos que esta última expresión es la energía de Casimir mas un término que varía linealmente con la distancia entre las placas y como la cuarta potencia con la aceleración. Como el segundo

---

[16] A. Sarmiento et. al. (1980).

[17] Gradshteyn and Ryzhik, Ref. 14, formula 3.411.1 y 3.951.12; Gelfand and Shilov, Ref. 17.

término tiene signo contrario al de la energía de Casimir, la energía puede resultar positiva o cero como resultado de la aceleración. De hecho, el derivar la expresión (4.46) con respecto a α nos da la "presion"(fuerza por unidad de área) que observaría el detector acelerado; en este caso la presion resulta ser siempre positiva.

4.2.2. ESPECTRO DE VACIO DENTRO DE UNA CAVIDAD PRISMATICA.

A) OBSERVADOR EN REPOSO

Las funciones de Wightman para el campo escalar dentro de la cavidad prismática han sido calculadas[18] y son:

$$D^{\pm}(x,x')=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2'-bm)^2+(x_3-x_3'-an)^2-(t-t'\mp i\varepsilon)^2}\right.$$

$$-\frac{1}{(x_1-x_1')^2+(x_2+x_2'-bm)^2+(x_3-x_3'-an)^2-(t-t'\mp i\varepsilon)^2}-$$

$$-\frac{1}{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2'-bm)^2+(x_3+x_3'-an)^2-(t-t'\mp i\varepsilon)^2}+$$

$$\left.+\frac{1}{(x_1-x_1')^2+(x_2+x_2'-bm)^2+(x_3+x_3'-an)^2-(t-t'\mp i\varepsilon)^2}\right\} \qquad (4.47)$$

Al igual que con las placas paralelas escogemos x y x' como $(x_0=\tau-\sigma/2, x_1, x_2, x_3=z)$ y $(x_0'=\tau+\sigma/2, x_1, x_2, x_3'=z)$. Las funciones de Wightman toman entonces la forma

---

[18] Birrell y Davies, Ref. 4, pag. 100.

$$D^{\pm}(\sigma)=-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{(\sigma\mp i\varepsilon)^2-a^2n^2-b^2m^2}-\frac{1}{(\sigma\mp i\varepsilon)^2-a^2n^2-(2z-bm)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(\sigma\mp i\varepsilon)^2-b^2m^2-(2z-an)^2}+\frac{1}{(\sigma\mp i\varepsilon)^2-(2z-bm)^2-(2z-an)^2}\right] \quad (4.48)$$

y las transformadas de Fourier:

$$\tilde{D}^{\pm}(\omega) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[I_1^{\pm} - I_2^{\pm} - I_3^{\pm} + I_4^{\pm}\right] \quad (4.49)$$

donde, como en el caso de placas paralelas:

$$I_i^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\sigma}\,d\sigma}{(\sigma\mp i\varepsilon)^2-B_i^2} \quad (4.50)$$

y

$$B_1^2 = a^2n^2+b^2m^2,$$
$$B_2^2 = a^2n^2+(2z-bm)^2,$$
$$B_3^2 = b^2m^2+(2z-an)^2,$$
$$B_4^2 = (2z-bm)^2+(2z-an)^2.$$

Nuevamente, las integrales I_2, I_3 y I_4 no contribuyen a la densidad de energía por unidad de área dentro del prisma; la integral I_1 está dada por[10]

$$I_1^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\sigma}\,d\sigma}{(\sigma\mp i\varepsilon)^2-B_1^2} = -\frac{2\pi}{B_1}\sin(\omega B_1)$$

La densidad de energía total en el prisma queda entonces

----

[10] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik (1965)., I. M. Gelfand and G. E. Shilov (1964).

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{\omega^3}{2\pi^2}\left[ab + \frac{2b}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[\omega a n]}{n} + \frac{2a}{\omega}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin[\omega b m]}{m} + \right.$$

$$\left. + \frac{4ab}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin[\omega(a^2n^2+b^2m^2)^{\frac{1}{2}}]}{(a^2n^2+b^2m^2)^{\frac{1}{2}}}\right] \qquad (4.51)$$

Reconocemos el primer término de esta última expresión como la energía del campo de punto cero, mientras que al segundo y tercero los reconocemos como el término correspondiente a un observador en reposo entre dos placas paralelas. Como era de esperarse, hay un último término de interferencia por la presencia de ambos pares de placas.

Usando que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[\Delta n]}{n} = \frac{\pi-\Delta}{2} \equiv f(\Delta) \quad \text{for} \quad 0 < \Delta < 2\pi$$

es posible escribir (4.51) en la forma más compacta:

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{\omega^3}{2\pi^2}\left[ab + \frac{2b}{\omega}\,f(\omega a) + \frac{2a}{\omega}\,f(\omega b) + \right.$$

$$\left. + \frac{4ab}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin[\omega(a^2n^2+b^2m^2)^{\frac{1}{2}}]}{(a^2n^2+b^2m^2)^{\frac{1}{2}}}\right] . \qquad (4.52)$$

En la figura 4.3 se grafica $dE/d\omega$ como función de ω.

Finalmente, obtenemos la energía total por unidad de longitud descartando de (4.51) la contribución divergente de punto cero e integrando sobre ω:

$$E = -\frac{\pi^2(a^4+b^4)}{45\ a^3 b^3} - \frac{4ab}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(a^2n^2+b^2m^2)^2} \tag{4.59}$$

B) OBSERVADOR ACELERADO.

Sustituyendo la expresión para x y x' de (4.49a) en (4.47), las funciones de Wightman quedan en este caso de la forma

$$D^{\pm}(x,x') = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a^2n^2+b^2m^2-4\alpha^{-2}sh^2(\alpha\sigma/2\mp i\varepsilon)} - \right.$$

$$- \frac{1}{a^2n^2+(2k_2-bm)^2+4\alpha^{-2}sh^2(\alpha\sigma/2\mp i\varepsilon)} -$$

$$- \frac{1}{(2k_3-an)^2+b^2m^2-4\alpha^{-2}sh^2(\alpha\sigma/2\mp i\varepsilon)} +$$

$$\left. + \frac{1}{(2k_3-an)^2+(2k_2-bm)^2-4\alpha^{-2}sh^2(\alpha\sigma/2\mp i\varepsilon)} \right\} \quad (4.54)$$

Los últimos tres términos no contribuyen a la densidad de energía por unidad de longitud (ver casos anteriores) por lo que las transformadas de Fourier de (4.54) contienen únicamente integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\sigma}\, d\sigma}{sh^2(\alpha\sigma/2)-(\alpha\rho/2)^2} ,$$

donde $\rho = (a^2n^2+b^2m^2)^{1/2}$. Los polos de esta función están en $P_{\frac{1}{2}} = 2\alpha^{-1}[\pm(-1)^k \mathrm{arcsh}(\alpha\rho/2)+i\pi k]$ con k un número natural. Por lo tanto las contribuciones no nulas dan lugar a:

$$\tilde{D}^{+}(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1-e^{-2\pi\omega/\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin[2\omega\alpha^{-1}\mathrm{arcsh}(\alpha\rho/2)]}{\rho[1+(\alpha\rho/2)^2]^{1/2}} \quad (4.55)$$

$$\tilde{D}^{-}(\omega)=\frac{2}{\pi}\,\frac{e^{-2\pi\omega/\alpha}}{1-e^{-2\pi\omega/\alpha}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\;\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\sin[2\omega\alpha^{-1}\operatorname{arcsh}(\alpha\rho/2)]}{\rho[1+(\alpha\rho/2)^{2}]^{1/2}} \tag{4.56}$$

de donde la densidad de energía por unidad de longitud en la cavidad es

$$\frac{dE}{d\omega}=\frac{\omega^{3}}{\pi^{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{2\pi\omega/\alpha}-1}\right)\left[ab+\frac{2b}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[2\omega\alpha^{-1}\operatorname{arcsh}(\alpha an/2)]}{n[1+(\alpha an/2)^{2}]^{1/2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2a}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[2\omega\alpha^{-1}\operatorname{arcsh}(\alpha bm/2)]}{m[1+(\alpha bm/2)^{2}]^{1/2}}+\frac{4ab}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin[2\omega\alpha^{-1}\operatorname{arcsh}(\alpha\rho/2)]}{\rho[1+(\alpha\rho/2)^{2}]^{1/2}}\right] \tag{4.57}$$

con $\rho = (a^2n^2 + b^2m^2)^{1/2}$. De manera análoga al caso del observador en reposo, en el primer paréntesis se identifica la contribución térmica debida a la aceleración; en el segundo paréntesis identificamos tanto el término de vacío y los dos términos debidos a los dos pares de placas por separado, así como el término de interferencia de los dos pares de placas y la aceleración. En la figura 4.3 se grafica la parte no divergente de este espectro.

La energía total por unidad de longitud dentro del prisma la obtenemos integrando (4.57) sobre todas las frecuencias:

$$E = -\frac{\pi^2(a^4+b^4)}{45\, a^3b^3}+\frac{ab\alpha^4}{240\pi^2}-\frac{4ab}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(a^2n^2+b^2m^2)^2} \tag{4.58}$$

REFERENCIAS

G. Arfken, 'Mathematical Methods for Physicists', 2nd. ed., Academic Press, 1970.

N.D. Birrel and P.C.W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1982).

I.M. Gelfand and G.E. Shilov. *Generalized Functions*, Vol. 1. (Academic Press, New York, U.S.A., 1964).

I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, U.S.A., 4th. ed., 1965).

F. Soto, G. Cocho, C. Villarreal, Ş. Hacyan, and A. Sarmiento, Rev. Mexicana de Física 33 (1987) 389.

L. de la Peña, *Stochastic Processes Applied to Physics and Other Related Fields* (World Scientific, Singapore, 1983), and references therein.

S.W. Hawking, Nature 248, 30 (1974).

S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975).

W.G. Unruh, Phys. Rev. D, 14 (1976) 870.

APENDICE 1

(EFECTO CASIMIR)

En este apéndice se hace una descripción del efecto Casimir para el caso de placas conductoras paralelas a temperatura cero.

El efecto Casimir es de gran importancia dentro de la teoría cuántica de campo, ya que constituye uno de los pocos efectos observables del campo de vacío a un nivel macroscópico.

Como estamos por mostrar, al colocarse dos placas perfectamente conductoras en el vacío[2], éstas sienten una fuerza atractiva entre sí como simple consecuencia de colocarlas en el vacío. Es decir, *reaccionan* al campo de punto cero.

Consideremos dos placas paralelas situadas en un paralelepípedo rectangular de paredes conductoras, de manera que las placas sean paralelas a las caras cuadradas de la caja como se muestra en la figura.

Lo que queremos, es derivar un potencial para la energía del sistema dependiente de la posición de una de las placas, para después sustraer la energía de una configuración diferente donde

---

[2] Nos referimos aquí al campo de vacío electromagnético.

la placa está ahora a una fracción $1/\eta$ de la distancia al extremo de la caja. Con las convenciones de la figura el potencial es

$$U(d,R,A) = (E_{I}+E_{II})-(E_{III}+E_{IV}), \tag{A.1}$$

donde E_i, i=I, II, III, IV representa la energía de punto cero del campo electromagnético en la región correspondiente. Finalmente para obtener la energía llevaremos las paredes a infinito

$$U(d,A) = \lim_{R\to\infty} U(d,R,A). \tag{A.2}$$

Cada término $E_i=\sum\frac{1}{2}\hbar\omega$ es formalmente divergente, ya que hay un número infinito de modos normales con frecuencia cada vez mayor. Sin embargo, en este caso la situación física sugiere el uso de una frecuencia de corte, ya que un objeto físico que es buen conductor a longitudes de onda largas se convierte en un mal conductor a longitudes de onda suficientemente pequeñas. Usaremos aquí la función de corte $\exp[-\lambda(\omega/c)]$, con lo que la expresión de las energías queda

$$E_i = \sum \tfrac{1}{2}\hbar\omega \, exp[\, -\lambda(\omega/c)], \tag{A.3}$$

donde el corte se quita haciendo $\lambda\to0$.

Las frecuencias de los modos normales electromagnéticos en una cavidad rectangular con paredes conductoras $d \times L \times L$ están dadas por

$$\omega_{lmn}= ck_{lmn}(d,L,L) = c\left[\left(\frac{l\pi}{d}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{A.4}$$

donde l, m, n son enteros no negativos, y hay dos modos normales si ninguno de los enteros es cero, un modo si uno de los enteros es cero, y ninguno si más de uno es cero. En su forma final la energía potencial de los dos placas paralelas debidas a la energía de punto cero es entonces:

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

$$U(d,L)=\lim_{R\to\infty}\lim_{\lambda\to 0}\tfrac{1}{2}\hbar c\left\{\left[2\sum_{lmn}k_{lmn}(d,L,L)\exp[-\lambda k_{lmn}(d,L,L)]+(d\to R-d)\right]\right.$$

$$\left.-\left[(d\to R/\eta)+(d\to R-R/\eta)\right]\right\}. \qquad (A.5)$$

Asumiendo que el área $A=L^2$ de las placas es mucho mayor que la separación d, podemos entonces remplazar las sumas sobre m y n por integrales y aún obtener la contribución principal del potencial $U(d,A)$. Se encuentra que[8]

$$\hbar c\sum_{l=1}^{\infty}\int_0^{\infty}dm\int_0^{\infty}dn\; k_{lmn}(d,L,L)\exp[(-\alpha/\pi)k_{lmn}(d,L,L)]$$

$$=\frac{\pi^2\hbar c}{2d}\,\frac{d^2}{d\alpha^2}\,\frac{d/\alpha}{\exp[\alpha/d]-1}=\frac{\pi^2}{2d}\,\hbar cL^2\frac{d^2}{d\alpha^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\,(\alpha/d)^{n-2} \qquad (A.6)$$

donde $\alpha=\pi\lambda$ y B_n son los números de Bernoulli. Así de (A.5),

$$U(d,A)=\lim_{R\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\pi^2}{2}\hbar cA\,\frac{d^2}{d\alpha^2}\left\{\left[\left[\frac{d}{\alpha^2}-\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{12d}-\frac{\alpha^2}{720d^3}+\ldots\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.+(d\to R-d)\right]-\left[(d\to R/\eta)-(d\to R-R/\eta)\right]\right\}$$

$$=\lim_{R\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{-\pi^2}{720}\hbar cA\left(\frac{1}{d^3}+\frac{1}{(R-d)^3}-\frac{1}{(R/\eta)^3}-\frac{1}{(R-R/\eta)^3}\right)\right.$$

$$\left.+\ \textit{términos de potencias de }\alpha\right]=\frac{-\pi^2}{720}\,\frac{\hbar cA}{d^3}. \qquad (A.7)$$

Se puede ver que éste cálculo depende de la conductividad de las placas sólo para longitudes de onda del orden de d. Así, el resultado de (A.7) es válido mientras que los términos que contienen potencias de α sean pequeños. Esto indica que una fuerza

---

[8] M. Fierz, Helv. Phys. Acta 33 (1960), 855.

$$F = \frac{-\partial}{\partial d} U(d, A) = \frac{-\pi^2}{240} \hbar c \frac{A}{d^4}, \qquad \text{(A. 8)}$$

se hace presente sobre cualesquiera dos placas conductoras para longitudes de onda mucho menores que la separación de las placas. Esta fuerza es muy pequeña; por ejemplo, para un área de $1 cm^2$ y una separación de 0.5μ, es de 0.2 dinas; sin embargo Sparnaay (1958) y otros han medido el efecto y confirmado la teoría.