UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN MODELO DEL CICLO ECONOMICO BASADO EN EL METODO INSUMO-PRODUCTO. ALGUNAS OBSERVACIONES CRITICAS.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA

SALVADOR FERRER RAMIREZ

1989

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

UN MODELO DEL CICLO ECONOMICO BASADO EN EL METODO INSUMO-PRODUCTO. ALGUNAS OBSERVACIONES CRITICAS.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA

SALVADOR FERRER RAMIREZ

1989

PROLOGO

Con el resurgimiento de la teoría marginalista neoclásica en las dos últimas décadas, el proceso de formulación matemática de las doctrinas económicas de las clases dominantes se ha acelerado notablemente. Este proceso también incluye a las teorías keynesianas.

La matemática se ha convertido en un poderoso instrumento de estas teorias para hacer una apología del sistema capitalista como "el mejor de los mundos posibles". Todo el ocultamiento, en su cuerpo teórico, de la contradicción entre las diferentes clases sociales, lo han llevado al terreno de la matemática. La complejidad y sofisticación de su teoría ha alcanzado niveles elevados. Han hecho uso del Cálculo Diferencial e Integral, del Algebra Lineal, de la Investigación de Operaciones, de la Programación Lineal, de la Teoría de Juegos hasta de la Topología Diferencial. Pero esta complejidad y sofisticación no siempre han ido acompañadas de profundidad y rigor matemático. En muchos casos, lo que ha sucedido es que han hecho generalizaciones de datos empiricos superficialmente obtenidos a fin de hacer previsiones que suelen entrar en crisis en un plazo más corto que aquel en el que se pretende que sean válidas; en otros casos, han tenido poco que ver con dar una explicación de las causas de fondo de fenómenos como las crisis periódicas del capitalismo.

En el contexto anterior, este trabajo es producto de una labor colectiva del Seminario de Economía Matemática de la Facultad de Ciencias (UNAM), coordinado por los profesores Paloma Zapata Lillo y Sergio Hernández Castañeda. Dentro de los objetivos del seminario, pretendemos la comprensión, discusión y cuestionamiento de las teorías económicas de las clases dominantes que hacen uso de la matemática para justificar su visión de la sociedad.

Un primer aspecto dentro de los objetivos del seminario ha sido la comprensión de estas teorías en sus justos términos. Posteriormente, nos planteamos evidenciar que, detrás de su "fundamentación matemática", hay una concepción de la sociedad de acuerdo a los intereses de las clases dominantes. Dentro de nuestros objetivos, también nos planteamos que estudiantes y profesores que sólo tienen una formación en economía puedan comprender las teorías englobadas en lo que se ha llamado la **Economía Matemática.** Por tal razón, nos planteamos "hacer más accesible" estas teorías a un público más amplio para que éste pueda elaborar una visión critica de ellas.

Un segundo aspecto que nos proponemos desarrollar, en la medida de nuestras posibilidades -que por ahora son muy limitadas-, es contribuir a que las clases trabajadoras y los sectores cultos que se identifican con ellas tengan a su alcance la posibilidad de dominar la matemática en cuanto a la utilización de esta ciencia en el estudio de la **Economía Política**. Entendiendo por ésto, la capacidad crítica para desentrañar los falsos supuestos en las distintas construcciones de la **Economía Matemática**; la capacidad de abordar directa y certeramente al mundo económico; de captar la esencia de las principales contradicciones de las diferentes clases sociales que están encaminadas hacia la transformación de la sociedad actual.

En estas condiciones, el trabajo realizado "**El Modelo del Ciclo Económico basado en el Método Insumo-producto. Algunas observaciones críticas**" está enmarcado dentro de los objetivos del seminario señalados anteriormente. El trabajo, en gran parte, se centra en hacer una exposición crítica del modelo del ciclo económico desarrollado por Jacob T. Schwartz en su obra "**Lectures on the Mathematical Methods in Analytical Economics**". En esta exposición, hacemos abstracción de las aplicaciones particulares que hace el autor de su modelo.

Como el modelo de Schwartz está inmerso en la discusión del ciclo económico entre los neoclásicos y Keynes y como el autor, en su modelo, intenta recoger algunas definiciones y conceptos de Keynes, nosotros introducimos en el capítulo I una visión general del surgimiento de la teoría general de J.M. Keynes y de sus principales definiciones. Al final contrastaremos la visión de Schwartz y de Keynes con respecto al ciclo. En la segunda parte del capítulo I, recogemos una idea del autor en la que plantea el aspecto de "crisis de confianza" del ciclo económico. Esta idea está recogida en el juego de la "mayoría". Nosotros demostramos algunos resultados del juego de la "mayoría" que el autor sólo enuncia.

En los capítulos 2 - 7, desarrollamos el modelo del ciclo económico de Schwartz. La labor que realizamos consistió en poner de manera explícita, los resultados matemáticos que el autor maneja en forma implícita.

Finalmente, se incluye un capítulo 8 a manera de conclusiones. En él damos una opinión con respecto a las hipótesis manejadas por Schwartz en su modelo, discutimos la interpretación que hace Schwartz de Keynes y por último, nuestra opinión en la polémica entre neoclásicos y Keynes. Pensamos que el carácter de las conclusiones es todavía general y por tanto limitado, pero aún así nos parece importante hacerlas y que éstas puedan servir como un primer avance encaminado a la crítica de las teorías económicas que han tenido su expresión en lo que se ha llamado la **Economía Matemática**.

o

Los resultados matemáticos que se utilizan en el modelo, en su mayoria conciernen al Algebra Lineal. Muchos de ellos tienen que ver con Espacios Vectoriales, con Transformaciones Lineales y con el álgebra de matrices. El tema de vectores y valores propios juega un papel importante en el modelo por lo cual lo desarrollamos con mayor amplitud en el apéndice. También desarrollamos en el apéndice los principales resultados de la teoría de matrices no negativas, particularmente los que conciernen a matrices conectadas y a las matrices prooductivas.

INDICE

CAPITULO I:

INTRODUCCION GENERAL A KEYNES Y EL CICLO ECONOMICO.

Una teoría económica no se puede entender sin tomar en cuenta las condiciones económicas, políticas y sociales del momento en que se desarrolla. Toda teoría económica obedece a necesidades concretas de ese momento y en algunos casos pueden ser de enorme trascendencia para el sistema en cuestión. Este es el caso del surgimiento de **La Teoria General de la Ocupación, el Interés y del Dinero**, elaborada por el economista inglés John Maynard Keynes.

Para ubicar la "Teoria General" es importante tener presente la situación que vivia Europa después de la primera guerra mundial. La consecuencia inmediata de la guerra fue una inmensa destrucción de capital y de fuerza de trabajo. Con el desenlace de la guerra y la consecuente derrota para Alemania, hubo una redistribución de los dominios y colonias de las potencias europeas. "Estados Unidos, una nación deudora, en ese momento, encontró la posibilidad (durante la guerra) de comprar grandes inversiones de capital extranjero en el pais y además, logró invertir como nación acreedora, grandes sumas en el Canadá, Sudamérica, Europa y el oriente, asi como en su rival Gran Bretaña."(1)

La reconstrucción después de la guerra trajo como consecuencia un auge por casi diez años, que dio una estabilidad y crecimiento a casi todos los paises europeos.

"El periodo de 1920-1930 se caracterizó por una prosperidad prolongada al menos en la industria. Esta prosperidad (prolongada) había sido particularmente notable en el campo de la construcción y de la producción de bienes de capital y había durado con sólo pequeñas interrupciones por cerca de 7 años... Durante este periodo había habido la expansión usual del crédito en una escala mayor que la usual, con aumento resultante de ganancias; aún cuando ese aumento de ganancias había ocurrido a pesar del aumento en el nivel de precios, debió haber seguido, por lo tanto, de cambios rápidos en los costos".(2)

Esta situación de auge durante casi 10 años, terminó en la crisis más profunda y duradera de la historia del capitalismo y a partir de la misma se generalizaron y profundizaron una serie de caracteristicas de la producción capitalista a las cuáles Keynes, les dará una singular

---

(1) J.A. Estey. Tratado de Ciclos Económicos. p.219. F.C.E. México 1979.
(2) Ibidem. p.32.

importancia: el surgimiento del exceso de potencial en la industria, la incompleta utilización crónica del equipo de las empresas, el desempleo permanente en masa y el aumento del número de ocupados en ramas improductivas.

Otra caracteristica que se presentaba en los primeros años del siglo XX es que el Estado no intervenía directamente en la economía. "Con excepción de los arsenales, los bosques, los ferrocarriles, el Estado no tenía otros bienes de producción, percibía impuestos y emitía papel moneda, pero no regulaba la producción ni los medios".(3)

En estas condiciones llegamos al famoso viernes negro (24 de octubre de 1929), la crisis estalla en la bolsa de Estados Unidos y se extiende en seguida a los demás paises capitalistas del mundo lo que se prolongará hasta 1933.

"En este año la producción industrial de Estados Unidos descendió al 64% del nivel de 1929, en Inglaterra, al 88%; en Alemania, al 65%; en Francia, al 81%. El comercio mundial se redujo en un 65%. La crisis provocó una gran desocupación. En Estados Unidos el número de desempleados se elevó a 13.7 millones; en Alemania, a unos 5 millones; en Inglaterra, a 2 millones. En todo el mundo capitalista, la cifra de trabajadores sin empleo llegó a ser de 30 millones"(4)

La crisis económica de los años 1929-1933, puso brutalmente al desnudo las contradicciones del sistema capitalista mundial. Todas las esperanzas de una prosperidad "eterna" para el capitalismo fueron barridas. Y, por supuesto, el gran capital tenia que estar dispuesto a aferrarse de cualquier receta salvadora.

En este contexto, la teoría neoclásica o marginalista no podía explicar, dentro de sus postulados, la situación de crisis mundial. Para sus seguidores, basados en la ley de Say, la sociedad siempre tiende al "equilibrio", siempre hay una tendencia de que el "libre juego de las fuerzas en el mercado", hace que todo lo que se produce se consuma. Es decir, la oferta iguala a la demanda. Para ellos, no hay clases sociales, todos los miembros de la sociedad son "agentes económicos" (productores o consumidores) sujetos a la disciplina del mercado. Para los economistas neoclásicos, las crisis no podrian presentarse, salvo pequeños desequilibrios, el desempleo se daba porque los trabajadores no aceptaban salarios "ligeramente menores"; para ellos la sociedad siempre tendía al pleno empleo.

---

(3) Ernesto Molina Molina, La "Teoría General" de Keynes. p.10. Editorial de Ciencias Sociales, La Habana, 1979.
(4) Ibidem. p.8.

Toda la teoría neoclásica o marginalista se veía derrumbada por la contundencia de los hechos. El propio John M. Keynes, formado en esta escuela, tuvo que cuestionar y rechazar algunos postulados de la teoría neoclásica para poder analizar los problemas del Capitalismo. Keynes difundió y enseñó los "principios" de Marshall "en el cual aprobaba la exposición de John Stuart Mill sobre la ley de Say". La situación de crisis mundial orilló a Keynes a poner los pies sobre la tierra, a poner en primer lugar la salvación del capitalismo. El creciente desempleo se colocaba como el problema que amenazaba al sistema, cada vez más, se convertía en un detonador social que ponía en duda la existencia misma del capitalismo. De aquí que la finalidad primordial de Keynes en la "Teoría General" sea la de explicar qué es lo que determina el volumen del empleo en un momento dado.

John Maynard Keynes, desde antes de la crisis de 1929-1933, ya había dado muestras de su capacidad para entender los problemas centrales que aquejaban al Capitalismo. En 1919, renunció a su puesto de delegado económico del gobierno Inglés, en el tratado de Versalles y publicó "Consecuencias económicas de la paz", trabajo en el que analizaba la imposibilidad de Alemania para pagar los costos de la guerra. Cuestionó la política seguida por los gobiernos de Inglaterra, E. U. y Francia y anunció que, de seguir con esta política, se llevaría a la quiebra al sistema económico europeo, trayendo consigo una crisis que podría ser de consecuencias muy graves para el capitalismo. Poco después, tuvieron que reconocer los gobiernos en cuestión que era mejor condonarle una parte de su deuda a Alemania para poder reactivar el sistema económico mundial, a tener situaciones de grandes conflictos sociales que podrían desembocar en revoluciones sociales en algunos países. Keynes no sólo sabía reconocer los problemas del capitalismo, también supo reconocer las medidas aplicadas en algunos países que en muchos casos fueron espontáneas, e iban encaminadas a atacar el problema del desempleo.

"La lucha contra el paro se convirtió en el orden del día. En la mayoría de los casos, las medidas que el Estado tomaba resultaban paliativos menores. Se intentó reabsorber el paro mediante los trabajos públicos. En todos los países del mundo se iniciaron gigantescas obras de construcción de carreteras, autopistas, puertos, presas, diques y bloque de viviendas. En 1933-1934, en Estados Unidos estos gastos se elevaron al 60 % del presupuesto estatal, en Alemania, en 1937, al 72.6 % de las obras se efectuó a cargo del Estado' e Inglaterra dedicó 115 millones de libras a la construcción de viviendas"(5).

---

(5) Ibidem. p.12.

En estas condiciones no es casual que John M. Keynes inicie en la "Teoria General" una discusión con lo que él llama "Economía clásica", en la cual enmarca "aquellos que adoptaron y perfeccionaron la teoria económica Ricardiana, incluyendo por ejemplo a John S. Mill, Marshall, Edgeworth y el profesor Pigou"(6).

Aqui haremos una precisión con respecto al término "Economia clásica". El concepto de clásicos (o economia clásica), ha tenido diferentes interpretaciones: Marx hacía la clasificación de las diferentes escuelas del pensamiento económico, tomando en cuenta el método de investigación utilizada por ellos. Marx consideraba economía clásica a William Petty, fisiócratas, Adam Smith y David Ricardo, por la investigación que realizaron sobre las relaciones internas del capitalismo en torno al estudio en la esfera de la producción. Por otra parte, Marx consideraba a la escuela que sólo se limitaba a estudiar los fenómenos visibles, como economía vulgar; su método se limitaba a describir, clasificar, informar y esquematizar las manifestaciones externas de la vida económica. Dentro de esta escuela Marx incluía a J. Bautista Say y Robert Malthus (curiosamente Keynes consideraba a este último como el primer economista de Cambrigde).

Al llamar clásicos a los continuadores de Ricardo, Keynes mezcla las corrientes más vulgares del pensamiento económico con el más alto exponente de la economia burguesa clásica, David Ricardo.

Regresando a la discusión de lo que Keynes llama la "economía clásica" (para nosotros serán los neoclásicos), él resume esta teoría en 3 postulados:

1.- "Que el salario real es igual a la desutilidad marginal de la ocupación existente.

2.- "Que no existe eso que llama desocupación involuntaria en sentido riguroso.

3.- "Que la oferta crea su propia demanda, en el sentido [21] de que el precio de la demanda global es igual al precio de la oferta global para cualquier nivel de producción y de ocupación.

"Estos tres supuestos, no obstante, quieren decir lo mismo en el sentido de que todos subsisten o se desplomen juntos, pues cualquiera de ellos supone lógicamente a los otros dos."(7)

---

(6) John Maynard Keynes. Teoría General de la Ocupación, el Interés y el dinero. p.15. Ed. Fondo de Cultura Económica, México, 1986.
(7) Ibidem. p.31.

El primer postulado se basa en la teoría de los rendimientos decrecientes de los factores de la producción y en este caso, en especial se refiere al factor trabajo. Según este postulado, mientras la productividad marginal de cada inversión adicional del factor trabajo sea mayor que el salario, el empresario seguirá realizando inversiones adicionales.

El segundo postulado de la "economía clásica" plantea que no hay "desocupación involuntaria". Para los "economistas clásicos", cualquier desequilibrio en el empleo, es decir, cuando la oferta de trabajo supera la demanda, se solucionaba bajando los salarios hasta llegar a igualar la oferta con la demanda. En consecuencia, el desempleo de millones de trabajadores se debía a que éstos no "aceptaban salarios ligeramente inferiores".

El tercer postulado establece que todo productor que trae mercancías al mercado, las trae sólo para cambiarlas por otras mercancías. Esta es la ley de Say. El supone que la única razón por la que la gente trabaja y produce es por disfrutar de la satisfacción del consumo. En una economía de libre cambio, todo lo que se produce representa la demanda de otro producto. La oferta adicional es demanda adicional.

Pasemos ahora a dar un resumen de las ideas básicas de la teoría general basado en el libro "La Teoría Económica de John Maynard Keynes" de Dudley Dillard. [Aguilar, España, 1980].

El punto de partida lógico de la teoría del empleo de Keynes es el principio de la demanda efectiva. Antes de explicar este concepto daremos algunas definiciones. Los conceptos básicos de la Teoría general de Keynes son los volúmenes totales de empleo, de renta nacional, de producción nacional, de oferta total, demanda total, consumo social, inversión social. Es decir, los conceptos se refieren a la sociedad en su conjunto y no a empresas particulares.

El término demanda, tal como lo usa Keynes, designa la demanda total del conjunto del sistema económico. Por otra parte el volumen de producción se cuantifica en unidades de trabajo empleado. El precio de demanda total del volumen de producción de una cantidad dada de empleo, es la suma total del dinero o ingresos que se espera de la venta del volumen de producción alcanzada, cuando se ha empleado esa cantidad de trabajo.

La curva de la demanda total o función de la demanda total, como Keynes la llama, es una curva de ingresos esperados de la venta de la producción resultante de diversas cantidades de empleo. A medida que se emplea más trabajo, se realiza mayor volumen de producción y los ingresos totales son mayores. En otras palabras, el precio de la demanda total aumenta a medida que aumenta la cantidad de empleo y disminuye a medida que disminuye la cantidad de empleo.

Por otra parte, para inducir a todos los empresarios a ofrecer una cantidad total dada de empleos, será necesaria cierta cantidad mínima de rendimiento. Este precio mínimo o rendimiento, que bastará para dar lugar al empleo de una escala dada, se llama **el precio de la oferta total de dicha cantidad de empleo.** La función de la oferta total es una curva que representa las cantidades mínimas de rendimientos requeridos para inducir a las diversas cantidades de empleo. A medida que aumenta la cuantía del rendimiento será mayor la cantidad de empleo que se ofrezca a los obreros por parte de los empresarios. Por consiguiente, la curva de la oferta total (zz en la fig.1), lo mismo que la curva de la demanda total, se eleva inclinándose hacia la derecha a medida que aumenta la cantidad de empleo (N). Sin embargo, no seguirá la misma trayectoria. Habrá cantidades de empleo para las que los rendimientos esperados sobrepasarán el rendimiento necesario para inducir un volumen dado de empleo y viceversa. En el punto donde se verifica la intersección de la función demanda total con la función de la oferta total, será el punto que determina la cantidad efectiva de empleo en cualquier momento. Este es el punto crucial de la teoría del empleo de Keynes, la curva de la demanda total (DD) y la curva de la oferta total (zz), tal como se representa en la fig.1, se cortan en el punto E, correspondiente a la cantidad de empleo N. El punto de intersección E, representa la demanda efectiva. En este punto, los empresarios obtienen el máximo de beneficios esperados. Si se ofreciera más o menos empleos, los beneficios serían menores. Así pues, en cada momento hay, según la teoria de Keynes, una cantidad de empleo determinada con toda precisión, que será la más lucrativa para ser ofrecida a los obreros por los empresarios

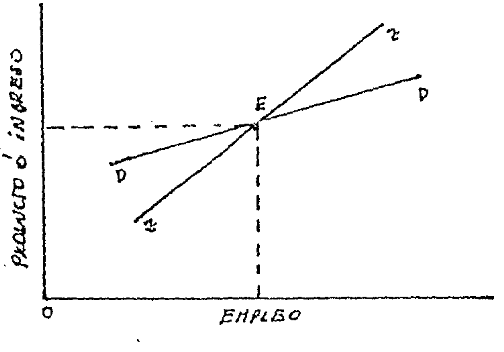

Fig.1 Demanda total y oferta total.

Si como Keynes, suponemos que la función de la oferta total está dada, la tesis de su Teoría General es que el **empleo está determinado por la demanda total que, a su vez, depende de la propensión al consumo y de la cantidad de inversión en un momento dado.**

Con respecto al consumo, podemos decir que aumentará a medida que aumente la renta y disminuirá a medida que disminuya la renta. Una curva que muestre las distintas cuantías del consumo, que se corresponden con los diferentes niveles de renta, constituye la curva de la propensión al consumo que por motivos de brevedad se designará simplemente como **propensión al consumo.** Es una relación funcional que indica cómo varía el consumo cuando varía la renta (Pc=c/y).

El supuesto de Keynes de que la propensión al consumo es relativamente estable a corto plazo, es una generalización de la experiencia real y constituye una parte esencial de la estructura de su teoría.

El único supuesto que es vital para la teoría de Keynes es que la cantidad absoluta de consumo aumenta menos que la cantidad absoluta de la renta, siempre que ésta aumenta. Si definimos la **propensión marginal al consumo** como la relación que hay entre el incremento del consumo (Δc) y el incremento de la renta (Δy) Pc $=\Delta c/\Delta y$ ésta será siempre menor que la unidad.

La distinción entre consumo e inversión, es fundamental para el análisis de Keynes. Su teoría reducida a sus términos más simples, afirma que el empleo depende de la cantidad de inversión o bien que el paro es originado por una insuficiencia de inversión. Si la inversión puede ser sometida a intervención, también puede serlo el empleo total. Un nivel elevado de empleo depende de un nivel elevado de inversión. Esto hace a la inversión la variable estratégica de la teoría general del empleo. **La importante proposición de que el empleo puede aumentar únicamnete si aumenta la inversión, presupone una propensión al consumo estable.**

Si la propensión al consumo está dada, existirá una razón definida entre todo aumento de (Δy) y todo aumento (ΔI)dado de la inversión . Esta razón (k) **la llamaremos multiplicador de la inversión** $k = \Delta y/\Delta I$ y podemos encontrar la relación entre el multiplicador y la propensión marginal al consumo (Pc) de la siguiente forma:

En el equilibrio

$$Y = C + I \tag{1.1}$$

en donde Y es la renta, I es la inversión que consideramos dada y C, el consumo, es función de la renta.

Entonces, en una primera aproximación, se supone que

(1.2) $$C = PcY.$$

Por tanto, volviendo a (1.1), tenemos

$$Y = PcY + I$$

Por tanto

(1.3) $$Y = \frac{1}{1 - Pc} I$$

Esta fórmula nos da la renta de equilibrio en función de la inversión y, llevando a cabo el análisis de estática comparativa, obtenemos que, si la inversión se incrementa en ΔI, la renta se incrementará en Δy. De modo que, volviendo a (1.3),

(1.4) $$Y + \Delta Y = \frac{1}{1 - Pc} (I + \Delta I)$$

Y, restando (1.3) de (1.4),

(1.5) $$\Delta Y = \frac{1}{1 - Pc} \Delta I.$$

Entonces

(1.6) $$k = \frac{1}{1 - Pc}$$

Ahora veremos qué es lo que determina el nivel de inversión. La demanda efectiva para la inversión es más completa y más inestable que la demanda efectiva para el consumo. La propensión de los hombres de negocios a construir fábricas y a invertir de otras formas, surge de la previsión de que dicha inversión resultará lucrativa. Como estas previsiones se basan en rendimientos futuros, el volumen de la inversión está sujeto a amplias fluctuaciones. El aliciente para la inversión está determinado, en el análisis de Keynes, por las estimaciones de los empresarios acerca de la lucratividad de la inversión en relación con el tipo de interés del dinero para la inversión. La lucratividad prevista de la nueva inversión se llama **eficacia marginal del capital.**

La eficacia marginal de un bien de capital es el tipo de rendimiento más elevado sobre el costo previsto para producir una unidad más (una unidad marginal) de un tipo particular de bien de capital.

Aquí, es conveniente mencionar dos puntos para comprender esta cuestión. Primero, que la eficacia marginal del capital se refiere a rendimientos futuros y no a rendimientos presentes; segundo, que tales rendimientos son motivo de estimaciones conjeturales que están sujetas a grandes alteraciones. En la eficacia marginal del capital ocurren violentas fluctuaciones que, como se verá después, constituyen la explicación del ciclo económico.

Para aliviar las consecuencias de la inestabilidad de la eficacia marginal del capital, Keynes plantea la dirección estatal de la inversión, particularmente la inversión pública. Este planteamiento, Keynes no lo ve como una virtud, sino como un mal necesario, ya que la dirección estatal en ningún momento debe coartar la "iniciativa privada".

El tipo de interés es vital en relación con la inversión y ésta es la determinate del volumen del empleo, puesto que, según el principio de la demanda efectiva, el empleo no puede aumentar a no ser que haya un aumento en la inversión.

Mientras la eficacia marginal del capital exceda el tipo de interés, continuará la inversión ,y cuando no haya más inversiones en donde la eficacia marginal exceda al tipo de interés, la inversión se detendrá.

Podemos resumir la teoria del empleo de Keynes así: "El empleo depende de la demanda efectiva, la cuál está determinada por la propensión al consumo y por el aliciente para la inversión. Si la propensión al consumo permanece inalterada, el empleo variará en la misma dirección que el volumen de la inversión. La inversión tiende a aumentar, ya sea por un descenso del tipo de interés, ya sea por una elevación de la eficacia marginal del capital".

Hasta aqui dejamos la exposición de la "teoria General" del empleo.
En el próximo capítulo daremos un panorama general del juego de la "mayoría". Schwartz plantea que las reglas que norman el funcionamiento de este juego, recogen el aspecto "psicológico" de inestabilidad que reina en el ciclo de los negocios. También pensamos que este juego recoge la inestabilidad que Keynes le atribuye al ciclo económico, debido a la inestabilidad de la eficacia marginal del capital.

CAPITULO 2

EL CICLO ECONOMICO (INTRODUCCION).

2.1 Algunas nociones sobre la Teoria de Juegos.

Como una motivación para la teoría matemática de los ciclos económicos, presentaremos una breve discusión de algunos aspectos de la Teoria de Juegos; especialmente una aplicación de un juego particular, llamado el juego de la "mayoria". Ciertos fenómenos, que se presentan en este juego son sugestivos de la "crisis de confianza", que para muchos economistas, es el mayor factor en la explicación del "ciclo economico".

La palabra **juego** se refiere, en general a cualquier actividad en la que distintas personas o equipos deben elegir, de una lista finita de posibles alternativas, una particular. Esta elección se hace en base a ciertas reglas establecidas que regulan las acciones permisibles para cada jugador en cada etapa del juego. Cada elección de una alternativa particular será llamada un **movimiento o jugada.**

El juego de dos o más equipos consiste en la aplicación sucesiva de estas reglas por parte de los jugadores y cada movimiento o jugada dependerá de los movimientos previos de los otros jugadores. Dentro de las reglas, hay una que establece la terminación del juego después de un número finito de movimientos, dependiendo de la información de los movimientos previos y la situacion de los otros jugadores. Finalmente, hay una regla que establece que al término del juego hay un cierto pago para cada uno de los jugadores. Una realizacion particular de estas reglas la llamaremos **partida.** Así, diremos: "el ajedrez es un juego más dificil que las damas" y "anoche gané tres partidas de ajedrez".

Uno de los conceptos fundamentales de la Teoría de Juegos es el de **estrategia.** Por estrategia de un jugador se entiende un conjunto completo de las reglas que determinan sus elecciones para todas las situaciones que se presentan en el curso de una partida. Examinemos este concepto con más detenimiento. Comúnmente un jugador elige sus jugadas una a la vez, teniendo en cuenta el estado del juego en cada etapa. Sin embargo, nada cambia realmente si hace todas las elecciones de antemano. Para hacerlo, debe determinar con anticipación todas las situaciones posibles que puedan surgir y después elegir una jugada para cada una de esas situaciones. En principio, esto es posible para cualquier juego. Si el jugador ha construido tal sistema de elecciones puede decirse que ha elegido una estrategia.

Una vez que el jugador ha elegido su estrategia, ya no necesita participar personalmente en el juego. En lugar de ello, puede entregar su lista de jugadas a alguna persona imparcial (árbitro) quien las aplicará por él. De esta manera, podemos considerar que en todos los juegos sólo se permite un "movimiento" a cada jugador que, en este caso, será su estrategia.

La Teoría de Juegos prueba -sin embargo- que, en cierto tipo de situaciones, es más ventajosos para los jugadores utilizar ciertos recursos aleatorios.Es decir, asignar una probabilidad a cada uno de los movimientos permisibles. En otras palabras, la aparición de un movimiento ó no en la partida dependerá de su probabilidad estadística. Estas estrategias serán llamadas **estrategias mixtas.** Una estrategia mixta se reduce a sólo un movimiento; cuando éste tenga asociada la probabilidad uno y los demás movimientos tengan asignada probabilidad cero, a estas últimas las llamaremos **estrategias puras.** El espacio de todas las distribuciones de probabilidad entre todos los posibles movimientos abiertos del j-ésimo jugador es llamado el espacio de estrategias mixtas para dicho jugador.

La discusión anterior se puede resumir con las siguientes definiciones formales:

Definición 1: Un juego n-personal rectangular es una n-ada de funciones reales $f_1(k_1,k_2,...,k_n)$, $f_2(k_1,k_2,...,k_n)$,..., $f_n(k_1,k_2,...,k_n)$ donde $k_i \in \{1,2,...,m_i\}$ y m_i es el número de movimientos posibles para el jugador i.

Definición 2: Una estrategia mixta para el jugador i es una m_i-ada $X = (x_1,x_2,...,x_m)$ tal que

i) $x_j \geq 0$ para $j=1,2,...,m_i$ y

ii) $\sum_{j=1}^{m_i} x_j = 1$

Definición 3: Un sistema de estrategias mixtas para el juego n-personal de la definición 1, es una n-ada de vectores $\alpha^{(1)},\alpha^{(2)},...,\alpha^{(n)}$, en donde cada $\alpha^{(i)}$ es una estrategia mixta para el jugador i

1) $\alpha^{(j)} = [\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)},...,\alpha_{m}^{(j)}]$

2) Las componentes de $\alpha^{(j)}$ son no negativas y

$$\sum_{k_j=1}^{m_j} \alpha_{k_j}^{(j)} = 1 \ , \quad j = 1,2,....n.$$

Definición 4: Sea $\alpha = (\alpha^{(1)},\alpha^{(2)},\ldots,\alpha^{(n)})$ un sistema de estrategias mixtas para el juego n-personal de la definición 1. La función de pago para el i-ésimo jugador $E^{(i)}(\alpha)=E^{(i)}(\alpha^{(1)},\alpha^{(2)},\ldots,\alpha^{(n)})$ evaluada en el sistema α está dada del siguiente modo:

$$E^{(i)}(\alpha) = \sum_{k_1=1}^{m_1} \sum_{k_2=1}^{m_2} \ldots \sum_{k_n=1}^{m_n} \alpha_{k_1}^{(1)} \alpha_{k_2}^{(2)} \ldots \alpha_{k_n}^{(n)} f^{(i)}(K_1,K_2,\ldots,K_n)$$

Definición 5: Sea $\alpha^* = (\alpha^{*(1)},\alpha^{*(2)},\ldots,\alpha^{*(n)})$ un sistema de estrategias mixtas para el juego n-personal de la definición 1, éste sistema recibe el nombre de **punto de equilibrio** para el juego n-personal si para toda $s=1,\ldots,n$ se tiene que:

$$E^{(s)}(\alpha^{*(1)},\alpha^{*(2)},\ldots,\alpha^{*(s)},\ldots,\alpha^{*(n)}) \geq$$

$$E^{(s)}(\alpha^{*(1)},\alpha^{*(2)},\ldots,\alpha^{*(s-1)},\alpha^{(s)},\alpha^{*(s+1)}\ldots,\alpha^{*(n)})$$

para toda estrategia mixta $\alpha^{(s)}$ para el jugador s.

Con otra notación, la definición anterior quedaría así:

Hagamos

$$(\alpha^*|\alpha^{(s)}) = (\alpha^{*(1)},\alpha^{*(2)},\ldots,\alpha^{*(s-1)},\alpha^{(s)},\alpha^{*(s+1)}\ldots,\alpha^{*(n)})$$

Entonces $E^{(s)}(\alpha^*) \geq E^{(s)}(\alpha^*|\alpha^{(s)})$.

Si la desigualdad anterior se da en sentido estricto, para cada $s = 1,\ldots,n$ y para cada estrategia mixta $\alpha^{(s)}$ de s distinta de $\alpha^{*(s)}$, entonces diremos que α^* es un punto de equilibrio estable. Todo α^* que no sea estable la llamaremos inestable.

2.2 El juego de la mayoría.

El juego de la "mayoría" está definido para un número impar de jugadores $n \geq 3$. Cada jugador tiene dos posibles movimientos "quedarse" o "avanzar". La función de pago es como sigue. Si un jugador elige "quedarse" su pago será cero, prescindiendo de las acciones de los otros jugadores. Si un jugador elige "avanzar" y la mayoría de los jugadores elige "avanzar" su pago será $P > 0$; pero si la mayoría de todos los jugadores ha elegido "quedarse", su pago será $Q<0$. No es difícil darse cuenta de que el juego de la mayoría tiene exactamente dos puntos de equilibrio estables. El primero es aquel en el cual todos los jugadores eligen "quedarse", y el segundo es aquel en el que todos los jugadores eligen "avanzar".

Ahora, formalizaremos el juego de la mayoria y comprobaremos la existencia de los dos puntos de equilibrio mencionados anteriormente:

$n \geq 3$ (número de jugadores), n impar. ($n = 2m + 1$ con $m = 1,2,...$)

m_j : (número de movimientos para el j-ésimo jugador)
$m_j = 2$ para toda $j = 1,2,...,n$.
1: "quedarse"
2: "avanzar"

Sea $k = (k_1,k_2,...,k_n)$ y $J(k) = \{i = 1,2,...,n \mid k_i = 1\}$ .Es decir, el conjunto de los jugadores que eligen "quedarse". La función de pago para el j-ésimo jugador quedara:

$$f_j(k)=f_j(k_1,k_2,...,k_n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k_j = 1 \\ P > 0 & k_j = 2 \text{ y } \#J(k) < m+1 \\ Q < 0 & k_j = 2 \text{ y } \#J(k) \geq m+1 \end{cases}$$

Teorema 1: El sistema de estrategias mixtas $\alpha=(1,1,...,1)$ es un punto de equilibrio estable para el juego de la mayoría.

Demostración:

Para cada $s = 1,...,n$

P.D. $E^{(s)}(1,1,...,1) > E^{(s)}(1,1,...,1,\alpha^{(s)},1,...,1)$ con (I)
$\alpha^{(s)} = (\alpha_1^{s},\alpha_2^{s})$ una estrategia mixta para s distinta de (1,0) ("quedarse")

La función de pago para el s-ésimo jugador evaluada en el sistema $\alpha = (\alpha^{(1)},\alpha^{(2)},...,\alpha^{(n)})$, está dada del siguiente modo.

$$E^{(s)}(\alpha) = \sum_{k_1=1}^{m_1} \sum_{k_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{k_n=1}^{m_n} \alpha_{k_1}^{(1)} \cdots \alpha_{k_s}^{(s)} \cdots \alpha_{k_n}^{(n)} f_s(k_1,k_2,...,k_n)$$

Si la estrategia que han elegido todos los jugadores es "quedarse", entonces $\alpha = ((1,0),(1,0),...,(1,0))$ y $E^{(s)}(\alpha) = 0$. Ahora analizaremos el lado derecho de (I). Como, excepto el jugador s, todos los jugadores eligieron "quedarse", entonces, estamos ante el caso

$$\alpha = [(1,0), (1,0),...,(1,0), (\alpha_1^{(s)},\alpha_2^{(s)}), (1,0)...,(1,0)]$$

0

y tenemos que la función de pago para el jugador s-ésimo quedará:

$$E^{(s)}(\alpha) = \sum_{k_s=1}^{2} \alpha_1^{(1)} \ldots \alpha_{k_s}^{(s)} \ldots \alpha_1^{(n)} f_s(1,\ldots,k_s,1)$$

$$= \sum_{k_s=1}^{2} \alpha_{k_s}^{(s)} f_s(1,1,\ldots,k_s,1,\ldots,1)$$

$$= \alpha_1^{(s)} f_s(1,1,\ldots,1) + \alpha_2^{(s)} f_s(1,1,\ldots,2,\ldots 1,)$$

$$= \alpha_2^{(s)} f_s(1,1,\ldots,2,\ldots 1,)$$

$$= \alpha_2^{(s)} Q < 0$$

$$\therefore E^{(s)}(1,1,\ldots,1) > E^{(s)}(1,1,\ldots,\alpha^{(s)},1,\ldots,1)$$

Por lo tanto $\alpha(1,1,\ldots,1)$ es un punto de equilibrio estable del juego de la mayoría.

De la misma forma se puede demostrar que $\alpha=(2,2,\ldots,2)$ es un punto de equilibrio estable para el juego de la mayoría.

Ya hemos demostrado que el juego de la mayoría tiene dos puntos de equilibrio estables, ahora veremos que el juego de la mayoría tiene un punto de equilibrio adicional que es inestable. Para ver esto, empecemos por considerar la ecuación

$$f(\beta) = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{k} \beta^k (1-\beta)^{2m-k} = \frac{Q}{P+Q} \quad \text{con } m \geq 1 \qquad \text{(II)}$$

Demostraremos que tiene una única solución en el intervalo $[0,1]$.

En primer lugar

$$f(\beta) = \beta^0 (1-\beta)^{2m} + \binom{2m}{1} \beta (1-\beta)^{2m-1} + \ldots$$

$$+ \binom{2m}{m} \beta^m (1-\beta)^{2m-(m)}$$

es tal que $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$ por tanto, por continuidad, existe al menos una solución ya que

$$0 < \frac{Q}{P+Q} < 1$$

Al mismo tiempo, para $\beta \in (0,1)$

$$f'(\beta) = \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} 2m \\ k \end{bmatrix} [k\, \beta^{k-1}\, (1-\beta)^{2m-k} - (2m-k)\, \beta^{k}\, (1-\beta)^{2m-k-1}]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \begin{bmatrix} 2m \\ k \end{bmatrix} k\, \beta^{k-1}\, (1-\beta)^{2m-k} - \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} 2m \\ k \end{bmatrix} (2m-k)\, \beta^{k}\, (1-\beta)^{2m-k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} [\begin{bmatrix} 2m \\ k+1 \end{bmatrix} (k+1) - \begin{bmatrix} 2m \\ k \end{bmatrix} (2m-k)] \beta^{k} (1-\beta)^{2m-k-1} - \begin{bmatrix} 2m \\ m \end{bmatrix} m\beta^{m} (1-\beta)^{m-1}$$

$$= - \begin{bmatrix} 2m \\ m \end{bmatrix} m\, \beta^{m}\, (1-\beta)^{m-1} < 0$$

luego, la función $f(\beta)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[0,1]$ y la ecuación II tiene una única solución.

Definamos ahora, para el jugador j, la estrategia mixta, $\alpha^{*(j)} = (\beta, 1-\beta)$ que asigna probabilidad β a la alternativa "quedarse" y probabilidad $1-\beta$ a la alternativa "avanzar"

Sea $\alpha^* = (\alpha^{*(1)}, \alpha^{*(2)}, \ldots, \alpha^{*(n)})$

¿Cómo es el pago para cada jugador j cuando se juega con el sistema de estrategias α^*?

En vista de la definición 4, tenemos que

$$E^{(j)}(\alpha^*) = \sum_{i_k} \alpha^{*}{}_{i_1}^{(1)} \alpha^{*}{}_{i_2}^{(2)} \ldots \alpha^{*}{}_{i_n}^{(n)} f^{j} (i_1, i_2, \ldots, i_n)$$

donde $i_k \in \{1,2\}^n$ para $k = 1, \ldots, n$

$$= \sum_{i_k} \alpha^{*}{}_{i}^{(1)} \alpha^{*}{}_{i}^{(2)} \ldots \alpha^{*}{}_{i}^{(n)} f^{j} (i_1, i_2, \ldots, i_n) +$$

donde $i_k \in \{1,2\}^n$ para $k \neq j$, n y $i_j = 1$

$$+ \sum_{i_k} \alpha^{*}{}_{i}^{(1)} \alpha^{*}{}_{i}^{(2)} \ldots \alpha^{*}{}_{i}^{(n)} f^{j} (i_1, i_2, \ldots, i_n)$$

donde $i_k \in \{1,2\}^n$ para $k \neq j$, n y $i_j = 2$

$$= \sum_{i_k} \alpha^{*}{}_{i}^{(1)} \alpha^{*}{}_{i}^{(2)} \ldots \alpha^{*}{}_{i}^{(n)} f^{j} (i_1, i_2, ..2.., i_n) \qquad \text{(III)}$$

donde $i_k \in \{1,2\}^n$ para $k \neq j$, n y $i_j = 2$

Sea $\mathcal{A} = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \{1,2\}^n$ y definamos

$$J(\mathcal{A}) = \{ k = 1, 2, \ldots, n \mid i_k = 1 \}$$

$$= (1-\beta)\left[\frac{PQ}{P+Q} - \frac{QP}{P+Q}\right] = 0$$

Definamos ahora $\alpha^{j} = (\tau, 1-\tau)$ en donde τ es la probabilidad asignada ahora a "quedarse" y, naturalmente, es tal que $0 \leq \tau \leq 1$.

¿Qué pago obtiene el jugador j cuando él cambia a la estrategia mixta α^{j} y el resto de los jugadores continúan jugando con las estrategias $\alpha^{*(1)}$, $\alpha^{*(2)}$, etc.?

En este caso

$$E^{(j)}(\alpha^{*(1)},\ldots,\alpha^{*(j-1)},\alpha^{j},\alpha^{*(j+1)},\ldots,\alpha^{*(n)}) = \qquad E^{(j)}(\alpha^{*} / \alpha^{j})$$

$$= \sum_{i_k} \alpha^{*}{}_{i_1}^{(1)} \ldots \alpha^{*}{}_{i_{j-1}}^{(j-1)} \tau \alpha^{*}{}_{i_{j+1}}^{(j+1)} \ldots \alpha^{*}{}_{i_n}^{(n)} f^{j}(i_1,\ldots,1,\ldots,i_n)$$

$i_j = 1$

con $i_k \in \{1,2\}^n$, $k = 1,2, ,n$

$$+\sum_{i_k} \alpha^{*}{}_{i_1}^{(1)} \ldots \alpha^{*}{}_{i_{j-1}}^{(j-1)} (1-\tau) \alpha^{*}{}_{i_{j+1}}^{(j+1)} \ldots \alpha^{*}{}_{i_n}^{(n)} f^{j}(i_1,\ldots,2,\ldots,i_n)$$

$i_j = 2$

con $i_k \in \{1,2\}^n$, $k = 1,2, ,n$

y, procediendo como en el caso anterior, se obtiene que

$$E^{(j)}(\alpha^{*}/\alpha^{j}) = (1-\tau)\cdot 0 = 0$$

Luego, $E^{(j)}(\alpha^{*}/\alpha^{j}) = E^{(j)}(\alpha^{*j})$ y, por tanto, el sistema α^{*} es un punto de equilibrio inestable.

La relevancia de este punto de equilibrio adicional, reside precisamente en su inestabilidad, manifiesta en el hecho, de que cualquier jugador puede cambiar de estrategia sin que su pago se empeore ni mejore. La importancia de los puntos de equilibrio estables inicialmente citados, consiste en que para todo jugador su pago puede empeorar al desviarse de estos puntos de equilibrio.

Para completar la descripción estática de los puntos de equilibrio estables, veremos qué pasa alrededor de éstos cuando toman lugar movimientos repetidos en el juego. Supongamos que en jugadas repetidas del juego, cada jugador adopta la política: "si en la jugada anterior la mayoría ha elegido "avanzar", yo elijo "avanzar" durante la presente jugada; pero si la mayoría elige "permanecer", entonces yo "permanezco" durante la presente jugada. Si esta política es seguida en general, no es difícil ver que el conjunto de estrategias realizadas convergen más rápidamente a uno u otro punto de equilibrio estable.

Por otra parte, observamos que no es necesario que cualquiera de los jugadores individuales conozca explícitamente lo que otros han jugado, o que sea explícitamente consciente de la conexión entre su pago individual y las acciones de la mayoría. Es suficiente que un árbitro o algún otro mecanismo neutral, enuncie repetidamente los pagos de los jugadores individualmente. De este modo, cada uno sabrá si cambia de estrategia y observa las diferencias entre una acción benéfica o no.

Regresando al punto anterior, suponemos ahora, que cada jugador modifica su política en la repetición de las jugadas como sigue: si en el juego anterior la mayoría escogió "avanzar", entonces yo elijo "avanzar" en esta jugada con probabilidad 1-v, en donde $0 \leq v \leq 1$ Pero si la mayoría escogió "permanecer", entonces elijo "permanecer" con probabilidad 1-v. Si v toma el valor cero, estamos en la situación anterior. Pero, si v toma valores positivos pequeños, la situación es diferente. En las jugadas sucesivas veremos que la mayoría "brinca", de "quedarse", a "avanzar", en un tiempo inversamente proporcional a 1-v y "brinca" de nuevo hacia atrás.

Consideremos ahora una de las anteriores políticas que los jugadores pueden adoptar. Supongamos que la probabilidad v no es elegida como una constante, sino como una función creciente del número de jugadores que se desvía de la mayoría en la jugada anterior. Los jugadores pueden justificar esta política como sigue: aunque la mayoría haya elegido "permanecer" la existencia de pocos jugadores que se desviaron de la mayoría, hace aparecer que debieron escoger "hacia adelante". Si los jugadores adoptan tal política, la existencia de pocos disidentes de la mayoría en las próximas jugadas podrá generar una mayor distensión. En el caso anterior, cuando se fijaba v, se brincaba de un nivel de actividad a otro, la dinámica aquí, está mejor descrita como la pérdida de un nivel de actividad a otro y retroceder.

Es sorprendente cómo el aspecto psicológico del ciclo económico, tanto en observaciones como en estadísticas es recogido en este modelo del juego de la mayoría. Un aspecto sumamente paradójico acerca del estancamiento del equilibrio en el juego de la mayoría es que cada jugador deplora la situación que él mismo ayudó a crear. Aquí, optimización individual y optimización colectiva tienden a diverger.

Otro aspecto que observamos en el juego de la mayoría es, que si hay 2m + 1 jugadores, al menos m + 1 jugadores tienden a cooperar libremente para un equilibrio estable.

2.3 Introducción al modelo.

En este parágrafo haremos la presentación del modelo de J.B. Schwartz del ciclo económico en su forma más simple. En dicho modelo se utiliza el método insumo-producto de Leontief. En él, la mercancía "trabajo" se le considera simplemente como trabajo, y se le trata como una mercancía más dentro de la Economía. Por nuestra parte, pensamos que la mercancía fuerza de trabajo no es una mercancía como cualquier otra. En el capítulo de conclusiones discutimos las implicaciones que tiene la hipótesis anterior.

Pasaremos ahora a exponer las definiciones básicas del modelo del ciclo económico desarrollado por J.B. Schwartz.

Por una economía, entenderemos un complejo de actividades en el que varias mercancías son producidas y subsecuentemente consumidas o utilizadas en la producción de otras mercancías. Si la economía absorbe la producción de mercancías de fuera, u ofrece, la llamaremos **abierta.** En consecuencia, si la economía está completamente contenida en sí misma, se llamará **cerrada.** Con respecto al modelo de una economía, le diremos **abierto** si el "trabajo" es ofrecido por un sector familiar y al mismo tiempo varias productos serán ofrecidos al "sector familiar". El modelo será **cerrado** si introducimos el trabajo como una mercancía adicional que es usada "completamente" en la producción de otras mercancías, y para la producción de esta mercancía (trabajo) serán requeridas otras mercancías.

Dentro del proceso de producción de cualquier mercancía se requieren dos tipos de capital: El capital circulante y el capital fijo. El primero se consume integramente en la producción de nuevas mercancías, y el segundo está en las mercancías que son **utilizadas,** pero no consumidas completamente. Por ejemplo, para producir una tonelada de hierro, se requieren, en primer lugar, ciertas cantidades de carbón y de mineral bruto, que serán consumidas completamente en el proceso de producción; además, se requiere de un alto horno que será utilizado, por ejemplo, un día. El alto horno es utilizado pero no consumido completamente y aquí es reconocido únicamente como capital fijo, no como capital circulante.

Estos dos aspectos de la producción serán descritos en el modelo general como sigue:

Sean $C_1, C_2, \ldots, C_n$ una lista del total del las mercancías producidas en la economía. En seguida, daremos algunas definiciones.

b_{ij}: la cantidad de mercancía C_i **utilizada** en la producción de una unidad de la mercancía C_j.

0

a_{ij}: la cantidad de la mercancia C_i consumida en la producción de una unidad de la mercancía C_j.

Como una mercancia que es consumida, tambien es utilizada, supondremos

(2.1) $\qquad b_{ij} \geq a_{ij} \qquad$ con $i,j = 1,2,\ldots,n$

De esta forma, para producir una unidad de cualquier C_j, se requiere (hablando tecnológicamente) la cantidad a_{ij} de la mercancia C_i que será usada completamente. Adicionalmente, se requieren (tecnológicamente) b_{ij} unidades de C_i disponibles para un periodo de producción estandard. Observemos que si la unidad estandard de C_i es un litro, y que las unidades de C_j son toneladas, entonces a_{ij} tendrá las dimensiones litro i/tonelada j-día.

El modelo, tal como se ha definido es llamado el **modelo abierto de Leontief.** La matriz (a_{ij}) será llamada la matriz de **insumo-producto** y el análisis del modelo será llamado **análisis insumo-producto.** La matriz (b_{ij}) será llamada la **matriz de capital fijo.** Aquí, el modelo insumo-producto será considerado en un análisis económico abstracto, es decir, todas las mercancías serán producidas y consumidas. Según el autor, el "trabajo" será considerado como una mercancía más. Por esta razón se procederá a una descripción correspondiente a un modelo cerrado.

Para cerrar el modelo, el autor introduce el trabajo como un insumo y como un producto. Sea a_{0j} la cantidad de trabajo (medida en horas-hombre) requerido para la producción de una unidad de la mercancia C_j que será consumida para producir una hora-hombre trabajo. Por la introducción de estos elementos matriciales, el modelo económico es cerrado, es decir, el conjunto de mercancías producidas es el mismo que el conjunto de mercancías utilizadas en la produccion.

2.4 Un modelo dinámico de una economía.

En esta sección haremos la presentación del modelo del ciclo económico de J.B.Schwartz, en su forma más simple, conforme avancemos en el desarrollo del trabajo, se irán incorporando nuevas hipótesis en el modelo.

Consideremos una economía en donde son producidas las mercancías $C_1, C_2, \ldots, C_n$ a través de las mercancias trabajo $C_0, C_{-1}, \ldots, C_{-L}$. El modelo económico que se desarrollará, funciona sobre una base de día-día, basándonos en lo siguiente:

Todas las mañanas, el productor de cada mercancía (por simplificación supondremos que hay una única empresa en cada sector) considera su inventario de las materias primas presentes: stocks. La empresa tratará de llevar este inventario a un cierto nivel (que por otras razones considera como óptimo). Schwartz toma como inventario óptimo, al que viene dado por la siguiente fórmula:

inventario óptimo = inventario básico + c(ventas esperadas)

En este orden, calcularemos los planes de producción para cada empresa. Esta usa su estimación de inventario óptimo, calculando las ventas esperadas del día, como iguales a las ventas del día anterior, y su objetivo será producir una cantidad que además de cubrir ventas esperadas lleve al inventario a su nivel óptimo. De este modo, tendríamos determinados los planes de producción deseados para el día y las cantidades apropiadas de las mercancías $C_1, C_2, \dots, C_n$ requeridas para que este esquema se pueda realizar. Puesto que el modelo se refiere con mayor énfasis a las mercancías materiales y a los stocks involucrados, el pago de salarios se absorbe en la formulación del modelo. Por otra parte, eliminaremos la competencia explícita de mercancías-trabajo.

La eliminación de la mercancía trabajo puede ser como sigue:

Sean $x_n, \dots, x_{-L}$ la producción total de las diversas mercancías, incluyendo las mercancías-trabajo $C_0, C_{-1}, \dots, C_{-L}$ en un periodo dado. Sea (a_{ij}) la matriz completa de insumo-producto incluyendo los insumos para las mercancías-trabajo determinados por las distintas tasas de salario; sea A_{ij} tal que $i,j = N, N-1, \dots, -L$. Entonces la producción neta de la mercancía C_i para el consumo es

$$(2.2) \qquad x_i - \sum_{j=-L}^{N} a_{ij} x_j \qquad i = -L, \dots, N$$

Ya que las mercancías-trabajo no pueden ser consideradas en los inventarios, porque son consumidas en el momento de la producción, tenemos

$$(2.3) \qquad x_i - \sum_{j=-L}^{0} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \qquad i = 0, \dots, -L$$

(2.3) lo podemos expresar en forma vectorial como sigue

$$(2.4) \qquad (I - A_{ij})(x_0, x_{-1}, \dots, x_{-L})^T = A_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_N)^T$$

haciendo ceros en aquellas columnas y renglones donde aparezcan las mercancías-trabajo, tenemos

$$(2.5)\quad (I-A)(x_0,x_{-1},\ldots,x_{-L})^T = A(x_1,x_2,\ldots,x_N)^T$$

Si consideramos que A es una matriz productiva, entonces existe $(I-A)^{-1}\geq 0$

$$(2.6)\quad (x_0,x_{-1},\ldots,x_{-L})^T = (I-A)^{-1}A(x_1,x_2,\ldots,x_N)^T$$

esto es,

$$(2.7)\quad x_i = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{-L} a_{lk}x_k(I-A)_{ik}^{-1} \qquad i=0,\ldots,-L$$

Substituyendo (2.7) en (2.3) tenemos

$$(2.8)\quad x_i - \sum_{j=-L}^{0}\left[\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{-L} a_{lk}x_k(I-A)_{lj}\right]a_{ij} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j$$

$$x_i - \sum_{k=1}^{N} x_k\left(\sum_{j=0}^{-L}\sum_{l=0}^{-L} a_{lk}(I-A)^{-1}a_{ij} + a_{jk}\right) =$$

$$(2.9)\quad x_i - \sum_{k=1}^{N}\tilde{a}_{ik}x_k \qquad i=1,2,\ldots,N.$$

donde la matriz $\tilde{a}_{ij}$ está definida por

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \sum_{k=0}^{-L}\sum_{l=0}^{-L} a_{jk}(I-A)_{kl}^{-1}a_{ij} \qquad k,i=1,2,\ldots,N$$

Se observa que esta matriz insumo-producto, con el trabajo eliminado, es una generalización directa de la matriz definida en el caso que únicamente hay un sólo sector de trabajo. Podemos ignorar los sectores de trabajo y considerar que la producción tiene lugar en una economía cerrada de mercancías materiales con matriz de insumo-producto $\tilde{A}_{ij}$. Con la eliminación de la mercancía-trabajo se involucra una considerable distorsión de la forma sociológica de la economía. Las implicaciones de esta suposición en el modelo, las discutiremos en el capítulo de conclusiones.

Una gran parte de lo que ordinariamente podría ser clasificado como "consumo personal" por ahora es dejado fuera del modelo por la reducción matemática que hemos descrito. En una subsecuente mejoría del modelo, agregaremos el consumo no productivo o de lujo en forma explícita en nuestras ecuaciones. No debemos confundir esta contribución explícita al consumo personal con contribuciones adicionales al consumo personal, las cuales, como hemos explicado son implícitas. El tratamiento que se ha seguido involucra la hipótesis de que los salarios son gastados totalmente en alguna fracción fija de consumo personal. La hipótesis de que el trabajo nunca es escaso tambien está involucrada.

Para cualquier tasa, un conjunto de pedidos para factores de insumos se transmiten como se explicó: cada fabricante establece una oferta (fuera de su inventario) de ciertas cantidades de sus mercancías que él produce; en general sólo será posible que él ofrezca una cierta cantidad de la demanda total. Si suponemos que la demanda no puede ser satisfecha, la misma fracción de cada pedido recibido debe ser confirmada.

Finalmente, cada fabricante, sobre notificación de que fracciones de sus varios pedidos pueden ser satisfechos, selecciona las más pequeñas de estas fracciones y cancela pedidos de mercancías que son más grandes que la fracción de su oferta inicial. El envío tiene lugar instantáneamente y el nuevo día de producción empieza.

El esquema que ha sido descrito verbalmente en el parágrafo anterior puede darse en una formulación matemática precisa como sigue. Sea c_i el número de ventas diarias estimadas como el nivel de inventario óptimo para la mercancía C_i. Supondremos que para el tiempo que se desea el inventario es simplemente c_i para las ventas estimadas; usaremos una formulación más general que la descrita anteriormente, que será definida por un tiempo.

Sea $x_i(t)$ la cantidad de C_i producida en el día t, y sea $\tilde{A}_{ij}$ como antes en el sentido indicado anteriormente. El capital fijo se ignora en el presente modelo; las ventas de C_i en el día (t-1) están dadas por la fórmula

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j(t-1)$$

Sea $y_i(t)$ el inventario actual de c_i en la mañana del día t. Entonces $x_i(t)$, $y_i(t)$ están en la relación

$$(2.10) \qquad y_i(t) = y_i(t-1) + x_i(t-1) - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j(t-1)$$

La producción deseada $z_i(t)$ para el t-ésimo día está dada por

$$(2.11) \qquad z_i(t) = (c_i \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j(t-1) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j(t-1)$$

$$- y_i(t-1) - x_i(t-1) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j(t-1)\}^+$$

(Recordemos que una asignación para las ventas esperadas se hace usando (2.10)). Aquí la notación x^+ es definida por $x^+=0$, si $x < 0$; $x^+ = x$, si $x \geq 0$. Es necesario definir la producción deseada como la parte positiva en el sentido de la expresión entre llaves del lado derecho de (2.11) ya que la producción deseada no puede ser menor que cero. La ecuación (2.11) puede ser simplificada como

$$(2.12) \qquad z_i(t) = \{(c_i+2) \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j(t-1) - y_i(t-1) - x_i(t-1)\}^+$$

Los niveles de producción deseada serán calculados por la fórmula (2.12); el siguiente paso, de acuerdo con el sentido del modelo dado anteriormente, para los productores de las mercancías c_i, es hacer pedidos de mercancías C_k en cantidades $\tilde{a}_{ki} z_i(t)$ de esta manera los fabricantes de la mercancía C_k reciben por todas partes pedidos por un total de

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki} z_i(t)$$

unidades de C_k. Podemos calcular la fracción $\mu_k(t)$ de pedidos recibidos que pueden satisfacerse por las empresas de C_k, cantidad puede llamarse el **"k-ésimo coeficiente de tensión del mercado"** y está dado por la razón de inventario de C_k entre el total de pedidos.

$$(2.13) \qquad \mu_k(t) = \frac{y_k(t)}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ki} z_i(t)}$$

Sea K_j el conjunto de índices k para el cual $a_{kj} > 0$. Entonces, las severas restricciones sobre la producción de C_j debido a las dificultades de abastecimiento, están medidas por el índice k en el conjunto K_j para el cual $\mu_k(t)$ es más chico. De acuerdo con la idea del modelo, tenemos que los fabricantes cancelan todos los pedidos que exceden esta pequeña fracción de sus pedidos iniciales. Este procedimiento puede describirse matemáticamente como sigue:

$$(2.14) \qquad \sigma_i(t) = \min_{k \in K_j} (1, \mu_k(t))$$

. Este número será llamado **"factor de tensión de oferta"** para el i-ésimo productor. La producción del i-ésimo productor está dada finalmente por la fórmula$_0$

$$(2.15) \quad x_i(t) = z_i(t)\sigma_i(t)$$

Tenemos ahora un modelo dinámico de una economía cerrada. Las ecuaciones (2.10)-(2.15) determinan $x_i(t)$ y $y_i(t)$ en términos de $x_i(t-1)$ y $y_i(t-1)$, con esto determinamos el presente día de producción y los niveles de inventario en función de los días anteriores de producción e inventario.

Así, el modelo describe una economía dinámica en la cual con especificaciones iniciales se determinan todos los movimientos subsecuentes de la economía. Ahora ¿cómo son los movimientos del modelo económico analizado? En los capítulos siguientes responderemos esta pregunta. Veremos que los intentos por describir este movimiento nos conducen a descubrimientos importantes, sobre todo en el ciclo inventario-producción, el cual es considerado en el ciclo económico como un aspecto importante.

CAPITULO 3

ANALISIS MATEMATICO DEL MODELO DE LA TEORIA DEL CICLO CASO EXPANSIVO Y DEPRESIVO.

3.1. Agregado para el modelo del capitulo II.

Las ecuaciones (2.10)-(2.15) definen un modelo dinámico, en el cual, la especificación del estado inicial de todo el inventario y los niveles de producción están determinados por el subsecuente movimiento de la economia. Si hay N mercancias, el estado de la economia para cualquier tiempo t está determinado por 2N parámetros, N para el nivel de producción y N para el nivel de inventario. Por tanto, el movimiento economico es matemáticamente un movimiento en un espacio de 2N dimensiones. El movimiento general del modelo, se hace complicado. En este capitulo empezaremos por demostrar que el modelo general definido por las ecuaciones (2.10)-(2.15) siempre admite un movimiento especial, el cual puede ser descrito por dos parámetros en vez de 2N.

En el análisis que haremos de este movimiento especial, haremos una importante distinción; en el modelo separaremos los casos expansivos de los depresivos. En el capitulo VII retornaremos al estudio del movimiento general del modelo, indicando el significado de la distinción que se ha introducido.

Sea $\tilde{A}$ la matriz de insumo producto y (2.10)-(2.15) con los elementos $\tilde{a}_{ij}$. Supondremos que $\tilde{A}$ es conectada y productiva; por tanto, el dom(A) < 1. Como $\tilde{A}$ es conectada, por el teorema de Ferron-Frobenuis, existe un valor propio $r>0$ y un vector propio asociado, $V > 0$, tal que

$$(3.1) \qquad \tilde{A}v = rv;$$

Para obtener una simplificación radical del modelo, Schwartz hace una suposición fuerte, que consiste en introducir lo que él llama "producción e inventario inicial balanceados", es decir, hay que suponer que la producción e inventarios iniciales balanceados, son proporcionales a las componentes del vector v (El vector v representa una "lista balanceada" de mercancias en el sentido heuristico, es decir, que si es usado como insumo para la economía, los productos obtenidos por (3.1) serán proporcionales a v. Supondremos inicialmente que producción e inventario están en proporciones balanceadas

$$(3.2a) \qquad x_i(t-1) = x(t-1)v_i$$
$$(3.2b) \qquad y_i(t-1) = y(t-1)v_i$$

donde X y Y denotan en general una "producción balanceada" y un "inventario balanceado" respectivamente.

Supondremos también que los coeficientes, que expresan el inventario óptimo nivelado en términos de los días de ventas, son iguales para todas las lineas de industria

$c_1 = c_2 = \ldots = c.$

Con estas suposiciones la expresión $\quad c_i \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j(t-1),$

para objeto de inventario sobre el t-ésimo día, se reduce a $c\tau x(t-1)v_i$; la expresión (2.10) para inventarios sobre la mañana del t-ésimo día se reduce

(3.3) $\quad y_i(t) = [y(t-1) + (1-\tau)x(t-1)]v_i$

y la expresión (2.11), para la producción deseada sobre el t-ésimo día, se reduce a

(3.4) $\quad z_i(t) = \{[(c+2)\tau - 1]x(t-1) - y(t-1)\}^+ v_i$

de (3.3) y haciendo $\varepsilon=(1-\tau)$ tenemos

(3.5) $\quad y_i(t) = [y(t-1) + \varepsilon x(t-1)]v_i$

Esto demuestra que si nosotros definimos $y(t)$ por la expresión

(3.6) $\quad y(t) = y(t-1) + \varepsilon x(t-1)$

tendremos

(3.7) $\quad y_i(t) = y(t)v_i$

El coeficiente forzado del mercado $\mu_k(t)$ dado por (2.13) es plenamente independiente de la mercancía k, por (3.7) y (3.4) tenemos

$$\mu(t) = \frac{y(t)v_i}{\tau\{[(c+2)\tau - 1]x(t-1) - y(t-1)\}^+ v_i}$$

(3.8)

$$\mu(t) = \frac{y(t)\tau^{-1}}{\{[(c+2)\tau - 1]x(t-1) - y(t-1)\}^+} = \frac{y(t)\tau^{-1}}{\{\bar{\tau}x(t-1) - y(t-1)\}^+}$$

donde $\bar{\tau} = [(c+2)\tau-1]$

0

El "factor de tensión de oferta" (2.14) es plenamente independiente de la mercancía c_i y está dado por

$$\sigma(t) = \min(1, \mu(t)).$$

La producción nivelada sobre el t-ésimo día dada por (2.15) como

$$x_i(t) = z_i(t)\sigma(t)$$

$$= \min(1, \mu(t))z_i(t)$$

utilizando (3.8) podemos escribirla como

$$x_i(t)=\min\left[1, \frac{y(t)\tau^{-1}}{\{\bar{\tau}x(t-1) - y(t-1)\}^{+}}\right] . z_i(t)$$

$$x_i(t)=\min\left(z_i(t), \frac{y(t)\tau^{-1}z_i(t)}{\{\bar{\tau}x(t-1) - y(t-1)\}^{+}}\right)$$

con la ayuda de (3.4) podemos escribir la producción nivelada como

(3.9) $\quad x_i(t) = \min(\{\bar{\tau}x(t-1)-y(t-1)\}^{+}, y(t)\tau^{-1})v_i$

Si definimos $x(t)$ como el valor de los coeficientes de v_i, en (3.9) tenemos

(3.10) $\quad x_i(t) = x(t)v_i$

De las ecuaciones (3.7) y (3.10) podemos ahora concluir por inducción que la suposición ((3.2a) y (3.2b) (inventario y producción inicial balanceados) se conservan a través de las ecuaciones (2.10)-(2.15). Podemos decir que producción e inventario total $x(t)$ y $y(t)$, permanecen como múltiplos escalares de v, para toda t. El "equilibrio" de producción e inventario inicial se conservan en todo momento.

El problema de calcular 2N números $x_i(t)$, $y_i(t)$ para cada t, queda reducido al problema de calcular dos números $x(t)$ y $y(t)$ para cada t.

Las ecuaciones (3.6) y (3.10) demuestran que las relaciones recursivas que se satisfacen por el inventario y la producción balanceada $x(t)$ y $y(t)$ son

(3.11a) $\quad y(t) = y(t-1) + \xi x(t-1)$

(3.11b) $\quad x(t) = \min[\{\bar{\tau}x(t-1) - y(t-1)\}^{+}, y(t)\tau^{-1}]$

0

Con esto queda demostrado que el modelo general, definido por (2.10)-(2.15), tiene un movimiento particular descrito por ecuaciones mucho más simples.

El paso que daremos a continuación va dirigido al estudio de estas recursiones.

Aquí Schwartz hace una observación general de un modelo y visión que tienen los economistas (según la clasificación de Keynes, se trata de los economistas clásicos). Schwartz establece una discrepancia con la visión del ciclo que tienen los "clásicos". Para éstos, el ciclo es sólo un desequilibrio en las líneas de producción, cuando una recesión se presenta, se puede corregir haciendo un arreglo en las proporciones de los diferentes sectores de la economía. El modelo de Schwartz plantea que aun partiendo de un equilibrio inicial en las líneas de producción, es posible que las recesiones se presenten. La visión de que el ciclo económico simplemente revela "anarquía de la producción", es algo que el modelo de Schwartz rechaza.

Las ecuaciones agregadas según Schwartz, tienen mucho en común con la literatura Keynesiana, y el "aprovechamiento agregado" es tomado como algo característico en la concepción Keynesiana de la economía.

Una advertencia que hace Schwartz es que en su modelo hay una limitación con cualquier consumo excepto el que automáticamente es generado por salarios.

3.2. Propiedades de las ecuaciones agregadas.

Las ecuaciones (3.11a)-(3.11b) podemos verlas como una transformación, es decir:

$\bar{\Lambda}: R^2 \to R^2$

$\bar{\Lambda}[x(t-1), y(t-1)] = [x(t), y(t)]$, donde,

$x(t) = \min[\{\bar{\tau}x(t-1) - y(t-1)\}^+, y(t)\tau^{-1}]$

y

$y(t) = y(t-1) + \varepsilon x(t-1)$.

Un primer aspecto que nos interesa saber de $\bar{\Lambda}$, es su imagen. Para ello analizaremos el comportamiento de $x(t)$. Sabemos que

$x(t) = \min[\{\bar{\tau}x(t-1) - y(t-1)\}^+, y(t)\tau^{-1}]$

entonces

$$\frac{y(t)}{\gamma} \geq x(t), \quad \text{para toda } t,$$

entonces $y(t) \geq \gamma x(t)$ para todo t.

$$\therefore \quad Im(\tilde{\Lambda}) = \{ [x(t), y(t)] \mid y(t) \geq \gamma x(t) \}$$

De aquí podemos deducir que las ecuaciones (3.11a)-(3.11b) están limitadas por las rectas $x=0$ y, $y=\gamma x$. Estas rectas las llamaremos **"línea de producción suspendida"** y "línea de escasez" respectivamente. La región comprendida entre las rectas anteriores la llamaremos región accesible Ω

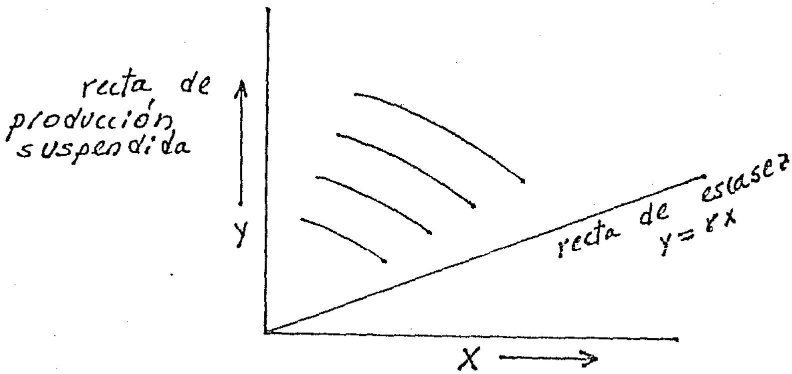

fig.2 la región accesible para $\bar{\Lambda}$

Si el punto $[x(t), y(t)]$ pertenece al interior de la región Ω entonces $y(t)\gamma^{-1} > x(t)$, esto implica que $y(t)\gamma^{-1}$ no es el mínimo entre

$$\{\bar{\gamma}x(t-1) - y(t-1)\}^{+} \quad \text{y} \quad y(t)\gamma^{-1}$$

por tanto,

$$x(t) = \{\bar{\gamma}x(t-1) - y(t-1)\}^{+}$$

como $x(t)$ no pertenece a la frontera de Ω, entonces, $x(t) > 0$ por lo tanto $x(t) = \bar{\gamma}x(t-1) - y(t-1)$.

Podemos decir ahora que si $[x(t), y(t)]$ pertenecen al interior de Ω, las ecuaciones recursivas quedarán

(3.12a) $\quad y(t) = y(t-1) + \varepsilon x(t-1)$

(3.12b) $\quad x(t) = \bar{\gamma}x(t-1) - y(t-1)$

donde $\varepsilon = (1-\gamma)$ y $\bar{\gamma} = [(c+2)\gamma - 1]$

0

Este par de ecuaciones define una transformación auxiliar $\Lambda : \mathring{\Omega} \longrightarrow R^2$ que aplica $[x(t-1),y(t-1)]$ en $[x(t),y(t)]$, es decir,

$$(3.13) \qquad \Lambda[x(t-1),y(t-1)] = [x(t),y(t)]$$

La transformación estará representada por la matriz

$$(3.14) \qquad L = \begin{bmatrix} \tau & -\Gamma \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

Tomando en cuenta que nuestras ecuaciones recursivas están limitadas por la región $x = 0$ y $y = \tau x$; tenemos que garantizar que la transformación Λ, aplicada a los periodos subsiguientes, también estén dentro de la región accesible. Para realizar este propósito retomaremos la transformación $\bar{\Lambda}$ de la siguiente forma:

Sabemos que $\Lambda[x(t-1),y(t-1)] = [\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)]$. Este punto puede ó no estar en la región accesible. Para garantizar que el punto $[x(t),y(t)]$ pertenezca a la región accesible; definiremos una nueva función $S: R^2 \rightarrow \Omega$ tal que

$$S = \begin{cases} [x(t),y(t)] & \text{si } [\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)] \in \Omega \\ [0,\tilde{y}(t)] & \text{si } \tilde{x}(t) < 0 \\ [\tau\tilde{y}(t),\tilde{y}(t)] & \text{si } \tilde{y}(t) < \tau\tilde{x}(t) \end{cases}$$

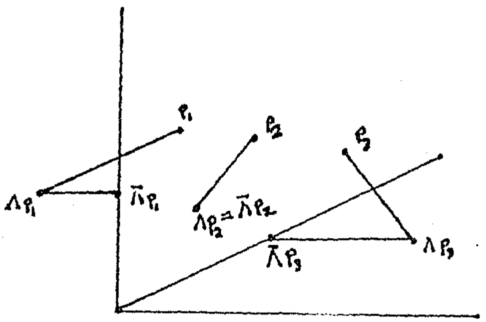

Fig.3. Relación entre $\bar{\Lambda}$ y la transformación lineal Λ

La relación entre la transformación $\bar{\Lambda}$ y la transformación lineal Λ está descrita como $\bar{\Lambda} = S \circ \Lambda$

Ahora el problema que queremos analizar es el siguiente: si tomamos un punto p_0 interior de la región accesible, queremos estudiar la sucesión de puntos

$$p_j = \bar{\Lambda}^j(p_0),$$

tales que para un cierto valor k y para toda j $0 \le j \le k$ se cumple la siguiente igualdad

$$p_j = \Lambda^j(p_0) = \bar{\Lambda}^j(p_0)$$

En vista de que trabajaremos con potencias de Λ, nuestro análisis se simplificará si podemos encontrar una matriz P invertible que haga que L sea semejante a una matriz diagonal $(P^{-1}LP)$ donde L es la matriz asociada a Λ y con cuyas potencias será más fácil trabajar. Para encontrar la matriz P, es necesario plantear nuestro problema como un problema típico de vectores y valores propios. De hecho la matriz P, tendrá como columnas a los vectores propios en cuestión (ver apéndice).

Para encontrar esa base de vectores $\{w_1, w_2\}$ que haga a L equivalente a una matriz diagonal, deben existir constantes que deben cumplir la siguiente condición

$$\Lambda w_1 = \lambda_1 w_1 \ , \qquad \Lambda w_2 = \lambda_2 w_2$$

esto es, los vectores w_1 y w_2 son los vectores propios de Λ y los correspondientes números λ_1, λ_2 son los llamados valores propios. Para que existan λ_1 y λ_2 la siguiente ecuación debe tener una solución no trivial, es decir

$$\Lambda w = \lambda w \quad \text{si y sólo si} \quad |L - \lambda I| = 0$$

donde L es al matriz que representa a la transformación lineal Λ. De esta forma tenemos la siguiente ecuación

$$\lambda^2 - \lambda(\bar{\tau}+1) + (\bar{\tau}+\varepsilon) = 0$$

de lo cual deducimos que

$$\text{(3.15a)} \qquad \lambda_1 = \left[\frac{\bar{\tau}+1}{2}\right] + \left[\frac{\bar{\tau}-1}{2}\right] \left[1 - \frac{4\varepsilon}{(\bar{\tau}-1)^2}\right]^{1/2}$$

$$\text{(3.15b)} \qquad \lambda_2 = \left[\frac{\bar{\tau}+1}{2}\right] - \left[\frac{\bar{\tau}-1}{2}\right] \left[1 - \frac{4\varepsilon}{(\bar{\tau}-1)^2}\right]^{1/2}$$

tal que para ε pequeña, λ_1 y λ_2 son reales y diferentes. En vista de que dificilmente habrá una buena práctica para un productor, si tiene menos de las ventas diarias como inventario; podemos suponer $c \ge 1$. Tomaremos ε pequeño, tal que τ es ligeramente menor que 1 y $\bar{\tau} = [(c+2)r - 1]$ tiene una cota inferior, la cual es ligeramente menor que 2.

En vista de que ε es pequeño, la aproximación

$$\left[1 - \frac{4\varepsilon}{(\bar{\tau}-1)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \sim \left[1 - \frac{2\varepsilon}{(\bar{\tau}-1)^2}\right]$$

podemos verla dando a los valores propios los valores aproximados

(3.16a) $\lambda_1 \sim \bar{\tau} - \varepsilon(\bar{\tau}-1)^{-1}$

(3.16b) $\lambda_2 \sim 1 + \varepsilon(\bar{\tau}-1)^{-1}$

Entonces el valor propio λ_1 es el mayor y es poco menor que $\bar{\tau}$, que no es mucho menor que 2; el valor propio λ_2 es un poco mayor que 1.

Los vectores propios w_1 y w_2 correspondientes a estos valores propios satisfacen

$$\lambda_i x_i = \bar{\tau} x_i - y_i$$

$$\lambda_i y_i = y_i + \varepsilon x_i \qquad i = 1,2.$$

tenemos que escribir x_i y y_i para las componentes de w_i; resolviendo el sistema anterior podemos expresar y_i en términos de x_i

$$y_i = (\bar{\tau} - {}_i)x_i \qquad i=1,2$$

y también

$$y_i = \varepsilon(\lambda_i - 1)^{-1} x_i \qquad i=1,2$$

El vector propio w_1 correspondiente al valor propio λ_1 será

$$w_1 = [x, \varepsilon x/(\lambda_1 - 1)]$$

el vector propio w_2 correspondiente al valor propio λ_2 es

$$w_2 = [x, (\bar{\tau} - \lambda_2)x]$$

Ya que hemos encontrado los vectores y valores propios respectivos, es fácil mostrar que (ver apéndice)

(3.17) $$P^{-1}LP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

donde P es una matriz invertible cuyas columnas son los vectores propios. De esta forma hemos encontrado P que hace a L equivalente a una matriz diagonal y con cuyas potencias es mucho más fácil trabajar. Esto es

$$(3.18) \quad (P^{-1}LP)^{\alpha} = P^{-1}L^{\alpha}P = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\alpha} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\alpha} \end{bmatrix}$$

El efecto geométrico de $(P^{-1}LP)$ cuya transformación lineal es $T^{-1}\Lambda T$, es fácilmente comprendido si reconocemos el siguiente hecho. Tenemos:

$[x_j, y_j] = [\lambda_1^j x_0, \ \lambda_2^j y_0]$, si tomamos $\alpha = j$, obtenemos

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \qquad x = \lambda_1^{\alpha} x_0$

$\qquad\qquad\qquad y = \lambda_2^{\alpha} y_0$

como λ_1 y λ_2 son positivos, tomamos logaritmos

$$\log x = \log x_0 + \alpha \log \lambda_1$$

$$\log y = \log y_0 + \alpha \log \lambda_2$$

multiplicamos por $\log \lambda_2$ y $\log \lambda_1$ respectivamente. obtenemos;

$$(\log \lambda_2)(\log x) = (\log \lambda_2)(\log x_0) + \alpha \log \lambda_1 \log \lambda_2$$

$$(\log \lambda_1)(\log y) = (\log \lambda_1)(\log y_0) + \alpha \log \lambda_1 \log \lambda_2$$

restando nos queda

$$(\log \lambda_2)(\log x) - (\log \lambda_1)(\log y) = (\log \lambda_2)(\log x_0) - (\log \lambda_1)(\log y_0)$$

$$(\log \lambda_2)(\log x) - (\log \lambda_2)(\log x_0) = (\log \lambda_1)(\log y) - (\log \lambda_1)(\log y_0)$$

$$(\log \lambda_2)(\log[x/x_0]) = (\log \lambda_1)(\log[y/y_0])$$

$$\frac{\log \lambda_2}{\log \lambda_1} \log\left[\frac{x}{x_0}\right] = \log\left[\frac{y}{y_0}\right]$$

si

$$\theta = \frac{\log \lambda_2}{\log \lambda_1} \qquad \text{y como } \lambda_1 \geq \lambda_2 \text{ entonces } 0 < \theta < 1$$

tendríamos $\theta \log[x/x_0] = \log[y/y_0]$

sacando exponencial

$$\left|\frac{x}{x_0}\right|^{\theta} = \left|\frac{y}{y_0}\right| \qquad \therefore \qquad \boxed{\frac{y_0}{(x_0)^{\theta}} x^{\theta} = y}$$

haciendo

$$k_o = \frac{y_o}{(x_o)^\theta} \qquad \text{tenemos} \qquad \boxed{y = k_o x^\theta}$$

En nuestro nuevo sistema de coordenadas x_o, y_o pueden ser números negativos y por tanto x, y pueden ser negativos. Por consiguiente tomaremos como la ecuación donde están contenidas las curvas como

$$|y| = k_o|x|^\theta$$

Los puntos $[x_o\lambda_1^t, y_o\lambda_2^t]$ se sitúan a lo largo de la curva cuya ecuación es $y = k_o|x|^\theta$, donde $\theta = \log _2/\log _1$. Como λ_2 y λ_1 son mayores que 1 y además $\lambda_1 \geq \lambda_2$, tenemos $0<\theta<1$. Entonces las curvas de la familia $y = k_o|x|^\theta$ y $0 < k_o < \infty$, tienen la configuración siguiente en el plano $[x,y]$ (fig.4)

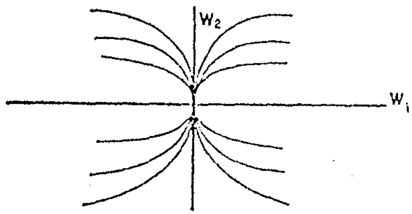

Fig.4. La familia de curvas $|y| = k_o|x|^\theta$

La configuración es comúnmente llamada un nudo (las curvas apropiadas en 2°, 3er y 4° cuadrante tienen una construcción a partir del primer cuadrante por reflexión). El efecto de la transformación lineal $T^{-1}\Lambda T$, [donde T es la transformación asociada,] es empujar los puntos a lo largo de las curvas de la fig.4, expandiéndose en el eje x-coordenado de un punto por el factor λ_2. Como $T^{-1}\Lambda T$ tiene el mismo efecto relativo para los ejes w_1, w_2, entonces $T^{-1}\Lambda T$ empuja a los puntos a lo largo de la familia de curvas obteneidas de la familia de la fig.4, por la transformación T, como en la fig.5.

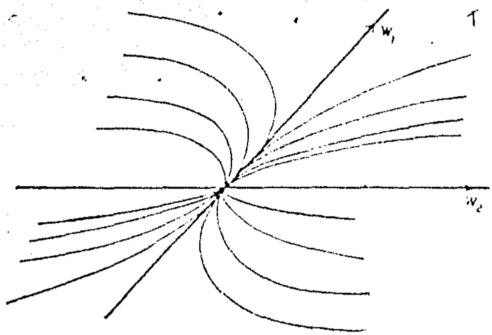

FIG 5 EL NUDO OBLICUO

Los puntos a lo largo de la familia de curvas obtenida de la familia de la fig.4 por la transformación T, como en la fig.5.

Este modelo de curvas es ordinariamente conocido como un nudo oblicuo. Haremos más completo el análisis, si sobreponemos el nudo oblicuo de la fig.5 bajo la región accesible de la fig.2. esto es, conoceremos cómo los vectores propios w_1 y w_2 son orientados relativamente en la frontera de la región.

Entonces w_1, es el vector $[1, \varepsilon/(\lambda_1-1)]$, ε pequeño y λ_1 no es mayor que 2, por tanto w_1 queda abajo de la línea de escasez (es decir, mas abajo de la frontera de la región accesible). De esta manera w_2 es el vector $[1,[(c+2)\tau - 1 - \lambda_2]]$, w_2 puede colocarse dentro de la región accesible o abajo de la frontera dependiendo de que

(3.19a) $\quad (c+2)\tau - 1 - \lambda_2 > \tau$

ó

(3.19b) $\quad (c+2)\tau - 1 - \lambda_2 < \tau$

estas desigualdades pueden ser escritas como

(3.20a) $\quad (c+1)\tau > 1 + \lambda_2$

(3.20b) $\quad (c+1)\tau < 1 + \lambda_2$

Podemos hacer esta distinción más transparente, si procedemos de una manera menos geométrica, veamos: el modelo será expansivo o depresivo de acuerdo al nivel de inventario y producción ubicados a lo largo de la línea de escasez. Esto es, nuestro modelo es expansivo o depresivo

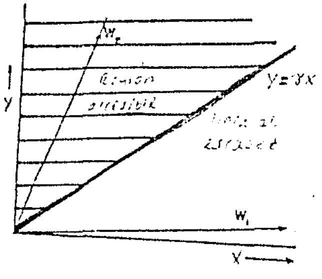

fig.6. Los eigen vectores y la región accesible en el caso expansivo.

de acuerdo a que [(λ̄−ν) [illegible]] es positivo o negativo, cuando $y = rx$, es decir, de acuerdo con

$$[(c+1)r - 1]\, r - 1 = (c+1)r - 2$$

es positivo o negativo. De esta forma, r es un poco menor que 1, donde $c > 1$; una u otra desigualdad dependen de la medida de c. Veremos el primer caso (3.20a) en el cual los puntos del vector propio w_2 se encuentran en la región accesible, este el **caso expansivo**, y el segundo caso (3.20b) en el cual los puntos del vector propio w_2 se encuentran abajo de la línea de escasez, el **caso depresivo**. Ahora estudiaremos primero el caso expansivo. Aquí la configuración de los vectores propios y la región accesible es como en la fig.6.

La región accesible incluye la porción de las curvas de la fig.5, indicados en la siguiente fig.7.

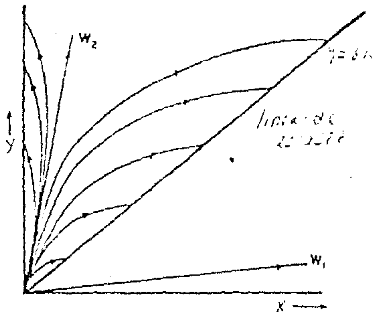

Fig.7. Las curvas de movimiento en el caso expansivo.

Es fácil discutir ahora, los efectos de la transformación $\bar{\Lambda}$. Empezaremos con un punto interior en la región accesible y aplicando $\bar{\Lambda}$ veremos, de la fig.3 y del texto que ilustra la figura que los puntos $\bar{\Lambda}^{-1}(p_o)$ pueden coincidir con los puntos $\Lambda^{-1}(p_o)$ hasta llegar a la frontera de la región accesible. Entonces $\bar{\Lambda}$, análogamente que Λ empuja los puntos en forma ascendente a lo largo de las curvas indicadas en la fig.7. El efecto de $\bar{\Lambda}$ a lo largo de la frontera se sigue en la misma dirección de la fig.3, de acuerdo con el texto. Los puntos a lo largo de la línea de escasez de la fig.2 son mapeados a una posición superior a lo largo de la línea de escasez (ver fig.3). Los puntos sobre la línea de producción suspendida corresponden a niveles de producción $x = 0$, de acuerdo con (3.11), cualquier punto es mapeado por $\bar{\Lambda}$ en sí mismo.

El resultado de aplicaciones sucesivas de $\bar{\Lambda}$ para un punto p_0 es como en la fig.8

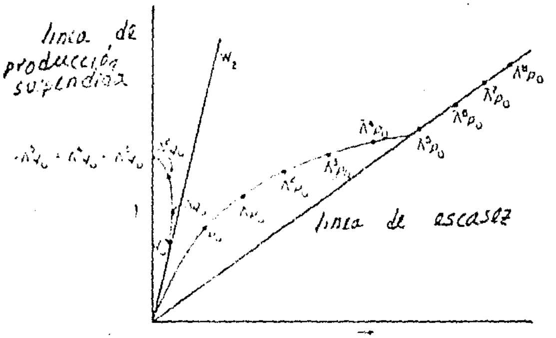

Fig.8 Estados sucesivos de un modelo económico en expansión.

Si el punto inicial p_0 está a la derecha de w_2 la aplicación sucesiva de $\bar{\Lambda}$ lleva al punto rápidamente hasta la línea de escasez, después, de acuerdo a nuestras previas explicaciones, la sucesión de puntos sobre la línea de escasez sube en orden ascendente hacia la derecha. Esto corresponde a una situación feliz de prosperidad estable, en la cual la producción está limitada únicamente por las ofertas que pueden hacer otros productores y que posiblemente no puedan cumplir. Por otra parte, si el punto inicial q_0 está a la izquierda de w_2, las aplicaciones sucesivas de $\bar{\Lambda}$, llevan el punto a la línea de producción suspendida y ahí se para. Esto corresponde a una situación de "absoluta depresión" donde la producción y el trabajo se paran completamente, ningún pedido se obtiene para mercancías y entonces ningún plan de producción se cumple.

El movimiento hacia la derecha de w_2, corresponde a una situación en la cual, cada productor inicialmente encuentra que sus ventas son mayores comparadas con su inventario y sus planes de producción. Si todo productor está en tal situación, las ventas subirán y cada productor tendrá un mejor inventario y mejores planes de producción. El movimiento hacia la izquierda de w_2, describe la situación en la que cada productor inicialmente encuentra su nivel de inventario relativamente más alto que las ventas, de tal forma que poco a poco se va acabando el respaldo de la producción. Inmediatamente todos los otros productores seguirán y las ventas caerán y estarán cada vez más fuera de la línea de inventario. Entonces, esta producción será cortada más y más hasta pararla por completo.

Un hecho paradójico del movimiento descrito anteriormente (sin mucha importancia), es el siguiente: si nosotros inicialmente estamos sobre la izquierda de w_2, de modo que hay paro de producción; es posible un desarrollo si se presenta algún desastre "externo" y destruye una parte suficientemente grande del inventario (pero no por otros efectos), este desastre tiene el buen efecto de transferirnos a la región que está a la derecha de w_2 y de aquí en adelante iremos hacia la prosperidad.

En el modelo que hemos estudiado, las órbitas son un conjunto de puntos discretos representados en las fig.8, las curvas continuas de las figuras 7 y 8 son llamadas curvas convenientes de interpolación. El uso de curvas continuas en el modelo, no involucra un cambio esencial en el mismo, salvo pequeños desajustes.

En las figs.7 y 8 se describe el movimiento del modelo en el caso expansivo. Las ecuaciones (3.20) demuestran que el modelo es expansivo para c suficientemente grande. Para c suficientemente menor que 1, tenemos que λ_2 es ligeramente mayor que 1 y que $r < 1$ esto implica que (3.20b) se satisface, además encontraremos la solución en el caso depresivo.

Ahora examinaremos el caso en que el vector propio w_2 está abajo de la línea de escasez; la configuración de vectores propios, la región accesible y curvas nodales aparecen en la fig.9.

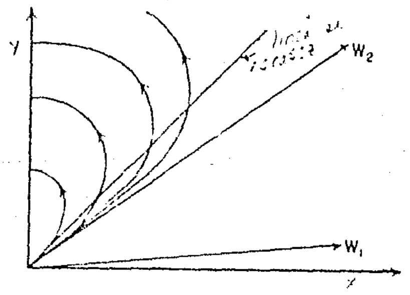

fig.9. El caso depresivo.

Ahora, la región accesible está a la izquierda del vector propio w_2, y todas las órbitas empiezan en el origen, se desarrollan y permanecen en la línea de producción suspendida. En estos casos el modelo muestra una economía en donde la depresión permanente es inevitable.

En el modelo económico los casos expansivos o depresivos dependen de la medida de la constante c: el número de ventas diarias tomadas como inventario. El "día" en el modelo es bien visto como el periodo definido por la propiedad asumida en el modelo tal que la cima del inventario en la prosperidad pico puede cambiarse sobre el "día", pero no sobre una longitud pequeña de tiempo. Esto es, nuestro "día" es el mínimo periodo de cambio para la economía.

Dado que los inventarios se seguirán acumulando y estarán en una situación improductiva, la depresión será permanente. Este eterno estancamiento es consecuencia de la ausencia de cualquier consumo no generado por la producción en el modelo. En el siguiente capítulo introduciremos el consumo y notaremos también que los inventarios deseados son análogos por contener alrededor un término constante proporcional para ventas (inventario básico), independiente de las ventas.

CAPITULO 4

EL CONSUMO EN LA TEORIA DEL MODELO DEL CICLO.

4.1 Análisis matemático del consumo como un hecho adicional.

En el capitulo anterior no se había considerado el consumo dentro de los inventarios. Ahora hacemos una modificación al modelo; supondremos que en cada dia de producción una cierta cantidad fija e_i de la mercancia C_i es consumida por los fabricantes, quiénes colectivamente constituyen el modelo. También haremos una descripción de la político del inventario un poco más realista; añadiendo una cantidad h_i de la mercancia C_i como el inventario básico, para los inventarios deseados de los fabricantes en la mercancia C_i. Así, con esto tenemos:

Inventario deseado = inventario básico + c_i(ventas diarias)

Supondremos que e_i y h_i son proporcionales al vector propio "balanceado" v de la ecuación (3.1) y, procediendo de igual forma que en el principio del capitulo anterior, obtendremos las siguientes modificaciones de las ecuaciones (3.11a) y (3.11b).

$$z_i(t) = \{(c_i+2)\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}x_j(t-1) - x_i(t-1) - y_i(t-1)\}^+$$

$$= \{(c+2)[\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}x_j(t-1)+e_i]-x_i(t-1)-y_i(t-1)+h_i\}^+$$

$$= \{(c+2)\tau x(t-1)v_i + (c+2)ev_i - x(t-1)v_i - y_i(t-1)v_i+hv_i\}^+$$

$$= \{((c+2)\tau x(t-1) + (c+2)e - x(t-1) - y(t-1)+h\}^+v_i$$

$$=\{[(c+2)\tau-1]x(t-1)-y(t-1)+(c+2)e+h\}^+$$

donde $e_i = ev_i$, $h_i = hv_i$, $x_i(t-1) = x(t-1)v_i$, $y_i(t-1) = y(t-1)v_i$.

De esta manera, las ecuaciones, incluyendo el consumo y el inventario quedarán

$$(4.1a)\quad y(t) = y(t-1) + (1-\tau)x(t-1) - e$$

$$(4.1b)\quad x(t) = \min[\{((c+2)\tau - 1)x(t-1) - y(t-1) + (c+2)e + h\}^+, y(t)\tau^{-1}]$$

Como hemos explicado anteriormente, lo escrito al final del término (4.1b) es asumir que todo el inventario en el principio de la mañana de un "día" está disponible para la producción; el consumo tendrá lugar en la "noche", una vez que el día de producción haya tomado lugar. Supondremos en la ecuación (4.1a) que $(1-\gamma)x(t) + y(t) \geq e$ de tal forma que la economía no es devorada por los consumidores. Será necesario para estas suposiciones checar las correcciones cuando examinemos los detalles de la órbita del modelo.

El análisis seguirá ahora, la ruta marcada en el capítulo anterior. Como antes, esta transformación está acotada por la recta de "producción suspendida" $x = 0$, y la recta "de escasez" $y = \gamma x$ del capítulo anterior (ver fig.2); las ecuaciones definidas por (4.1a-b) nos ofrecen iteraciones del mapeo lineal no homogéneo definido por

$$(4.2a) \qquad y(t) = y(t-1) + \xi x(t-1) - e$$

$$(4.2b) \qquad x(t) = \bar{\gamma} x(t-1) - y(t-1) + \tilde{h}$$

donde, $\xi = (1-\gamma)$, $\bar{\gamma} = [(c+2)\gamma - 1]$, $\tilde{h} = (c+2)e + h$

Como hemos supuesto que $y(t) \geq 0$ y haciendo un análisis análogo al del capitulo pasado, podemos retomar la misma región del capítulo 3

También podemos hacer uso de un hecho muy simple que dice: una transformación lineal no homogénea es una transformación lineal referida a un centro desplazado. A este punto se le conoce como punto fijo de la transformación no homogénea.

Para encontrar el punto fijo de la transformación (4.2a-b) basta resolver las siguientes ecuaciones

$$(4.3a) \qquad y_K = y_K + x_K - e$$

$$(4.3b) \qquad x_K = \bar{\gamma} x_K - y_K + \tilde{h}$$

resolviendo tenemos:

$$(4.4a) \qquad x_K = e/\xi$$

$$(4.4b) \qquad y_K = (\bar{\gamma}-1)e/\xi + \tilde{h}$$

Veremos ahora, en dónde queda situado el punto fijo de la transformación (4.2a-b) con respecto a la región accesible.

Sabemos que $c \geq 1$, entonces

$$(4.5) \qquad \gamma e/\xi + 2e \leq c(\gamma e/\xi) + 2e \leq c(\gamma e/\xi) + 2e + ce$$

$$
\begin{aligned}
\gamma e/\xi &\le c(\gamma e/\xi) - 2e + (c+2)e \\
&\le c(\gamma e/\xi) - 2e + (c+2)e + h \\
&\le c(\gamma e/\xi) - 2(1-\gamma)e/\xi + (c+2)e + h \\
&\le c(\gamma e/\xi) + (2\gamma-2)e/\xi + (c+2)e + h
\end{aligned}
$$

$$\gamma e/\xi \ge ([(c+2)\gamma - 1] - 1)e/\xi + h$$

por lo tanto, $\gamma x_k \le y_k$, entonces, $y_k \ge \gamma x_k$

Podemos concluir que el punto fijo $[x_k, y_k]$ se encuentra arriba de la linea de "escasez" $y = \gamma x$ siempre que $c \ge 1$. Al punto $[x_k, y_k]$ lo llamaremos el punto de Keynes y lo definiremos como el punto en donde, el nivel de inventario y de producción hacen que la producción sea igual al consumo. También lo consideraremos como el punto en donde el inventario actual coincide con el inventario deseado.

Si ahora hacemos una traslacion de nuestro sistema de coordenadas de tal manera que tenga como origen el punto de Keynes tendremos:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - x_k$$

$$\tilde{y}(t) = y(t) - y_k$$

Substituyendo en (4.3a-b)

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}(t) + y_k &= \tilde{y}(t-1) + y_k + \xi[\tilde{x}(t-1) + x_k] - e \\
&= \tilde{y}(t-1) + \xi\tilde{x}(t-1) + \xi x_k - e \\
&= \tilde{y}(t-1) + \xi\tilde{x}(t-1) + \xi(e/\xi) - e
\end{aligned}
$$

$$(4.6a) \quad \tilde{y}(t) = \tilde{y}(t-1) + \xi\tilde{x}(t-1)$$

siguiendo con (4.3b) tenemos

$$\tilde{x}(t) + x_k = \tilde{\gamma}[\tilde{x}(t-1) + x_k] - [\tilde{y}(t-1) + y_k] + (c+2)e + h$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}(t) &= \tilde{\gamma}\tilde{x}(t-1) + \tilde{\gamma}x_k - \tilde{y}(t-1) - y_k + \tilde{h} - x_k \\
&= \tilde{\gamma}\tilde{x}(t-1) - \tilde{y}(t-1) + [(\tilde{\gamma}-1)x_k + \tilde{h}] - y_k
\end{aligned}
$$

$$(4.6b) \quad \tilde{x}(t) = \tilde{\gamma}\tilde{x}(t-1) - \tilde{y}(t-1)$$

Esto es, las ecuaciones (4.6a-b) son exactamente las recursiones presentes en el capítulo anterior; tenemos en consecuencia que el patrón de órbitas de nuestro nuevo modelo es exactamente igual al patrón de las órbitas del capítulo anterior, excepto que el centro del nodo oblicuo de la fig.5 es trasladado del origen al punto de Keynes. Las consecuencias por examinar son muy similares al nodo de las secciones que fueron dadas por las figuras 5, 6 y 9. ¡Pero debemos tener presente que esta gráfica tiene diferentes secciones! Tenemos otra vez una dicotomía de un caso "expansivo" y un caso "depresivo" como en el capítulo anterior. El caso correspondiente al caso expansivo proyectado en la fig.7, definido por la propiedad de que el vector propio w_2 se encuentra dentro del ángulo formado por la línea de "producción suspendida" y la línea de escasez aparece en la fig.10.

El punto de "recuperación" marcado en la fig.10 es el nivel de inventario donde las ventas para el propósito del consumo se van aproximando a una producción de nivel cero. De acuerdo con la ecuación (4.20) este nivel de inventario es $y = (c + 2)e + h$.

Ahora, demostraremos que este punto es el único en donde la órbita que va hacia abajo del punto de Keynes es tangente al eje Y.

La ecuación que genera las órbitas del modelo en el sistema X,Y es:

$$(1) \qquad y = k_o|x|^\theta \qquad \text{donde } \theta = \frac{\log \lambda_2}{\log \lambda_1} \qquad \Rightarrow \quad 0 < \theta < 1$$

y

$$k_o = \frac{y_o}{(x_o)^\theta}$$

Aquí θ es un número fijo y para cada k_o tendremos las órbitas del modelo.

El proceso de cambio de coordenadas que hicimos fue el siguiente: En primer lugar, hicimos un cambio de coordenadas $\{e_1, e_2\} \rightarrow \{w_1, w_2\}$; donde w_1 y w_2 son los vectores propios de la transformación Λ . Y además forman una base del espacio W.

Tenemos que

$$w_1 = (1, \gamma/[\lambda_1 - 1])$$

$$w_2 = (1, \bar{\tau} - \lambda_2)$$

son los vectores propios de Λ . Si hacemos que

$$\alpha = \gamma/[\lambda_1 - 1] \qquad \text{y} \qquad \beta = \bar{\tau} - \lambda_2$$

tendremos

$$w_1 = (1, \alpha)$$
$$w_2 = (1, \beta)$$

[illegible] quedará expresado en términos de la base $\{w_1, w_2\}$ de la siguiente forma

$$(x,y) = x'w_1 + y'w_2$$

$$= x'(1,\alpha) + y'(1,\beta)$$

$$= (x'+y', x'\alpha+y'\beta)$$

así

$$x = x' + y' \qquad (1)$$

$$y = x'\alpha + y'\beta \qquad (2)$$

multiplicando por α a (1) y restando (2) obtenemos:

$$\alpha x - y = (\alpha - \beta)y'$$

por tanto

$$y' = \frac{\alpha x - y}{\alpha - \beta} \qquad \text{con} \quad \alpha \neq \beta$$

multiplicando (1) por β y restando a (2)

$$\beta x - y = (\beta - \alpha)x'$$

por tanto

$$x' = \frac{\beta x - y}{\beta - \alpha} \qquad \text{con} \quad \beta \neq \alpha$$

como x', y' cumplen con la ecuación

$$y = k_0 |x|^\theta \, ;$$

se tiene:

$$\left| \frac{\alpha x - y}{\alpha - \beta} \right| = k_0 \left| \frac{\beta x - y}{\beta - \alpha} \right|^\theta$$

si hacemos que $\qquad w = k_0 \dfrac{|\alpha - \beta|}{|\alpha - \beta|^\theta}$

Por lo tanto:

$$\text{(II)} \quad |\alpha x - y| = w|\beta x - y|^{\theta}$$

La ecuación II representa a la ecuación I en el sistema (x', y').

Posteriormente hicimos un segundo cambio de coordenadas. Realizamos una traslación, desplazando el origen hacia el punto de Keynes $[x_k, y_k]$.

$$x'' - x_k = x'$$

$$y'' - y_k = y'$$

Substituyendo en II obtenemos:

$$\text{(III)} \quad |\alpha(x'' - x_k) - (y'' - y_k)| = w|\beta(x'' - x_k) - (y'' - y_k)|^{\theta}$$

Las órbitas que describe (III) pasan por el punto de Keynes. Como queremos encontrar la órbita que es tangente al eje Y, hacemos un cambio de notación en (III).

$$\text{(IV)} \quad |\alpha(x - x_k) - (y - y_k)| = w|\beta(x - x_k) - (y - y_k)|^{\theta}$$

Aquí hay varios casos a considerar. Pero, como buscamos la órbita que es tangente al eje Y sólo consideraremos el caso en que

$$\beta(x - x_k) - (y - y_k) \geq 0$$

y

$$\alpha(x - x_k) - (y - y_k) \leq 0.$$

Finalmente obtenemos:

$$F(x,y) = w = \frac{(y-y_k) - \alpha(x-x_k)}{[\beta(x-x_k) - (y-y_k)]^{\theta}} \qquad \text{(V)}$$

Ahora, nuestro problema se traduce en

maximizar $F(x,y)$ sujeto a $x = 0$.

Basta encontrar para qué 'y' sucede que $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$,

ya que $x = 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{[\beta(x-x_k) - (y-y_k)]^{\theta}}{[\beta(x-x_k) - (y-y_k)]^{\theta}}$$

$$+ \frac{[(y-y_k) - \alpha(x-x_k)]\theta[\beta(x-x_k) - (y-y_k)]^{\theta-1}}{[\beta(x-x_k) - (y-y_k)]^{\theta}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \text{si y sólo si} \tag{VI}$$

$$[\beta(x-x_k)-(y-y_k)]^{\theta} + [(y-y_k)-\alpha(x-x_k)]\theta[\beta(x-x_k)-(y-y_k)]^{\theta-1} = 0$$

dividiendo entre $[\beta(x-x_k) - (y-y_k)]^{\theta-1}$, tenemos:

$$\beta(x-x_k) - (y-y_k) + [(y-y_k) - \alpha(x-x_k)]\theta = 0$$

Si y sólo si

$$(\theta - 1)(y-y_k) = (\alpha\theta - \beta)(x-x_k)$$

Como $x = 0$, tenemos:

$$y = \frac{(x-x_k)(\alpha x - \beta)}{\theta - 1} + y_k$$

Ya encontramos la 'y' que hace $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$

Ahora encontraremos la w que me da la órbita que es tangente al eje Y.

Dividiendo la ecuación (VI) entre

$$[\beta(x - x_k) - (y - y_k)]^{\theta}$$

y utilizando la ecuación (V) obtenemos

$$1 + w\theta[\beta(x - x_k) - (y - y_k)]^{\theta-1} = 0$$

como $x = 0$

$$w = - \frac{1}{\theta[-\beta x_k - (y-y_k)]^{\theta-1}}$$

Otro punto importante dentro del modelo es el **"punto de peligro"** marcado en la fig.10. A este punto lo definiremos como el punto en el cual se tiene un empleo completo del inventario en existencia para la producción. En este punto necesitamos un nivel de producción que me garantice un excedente mínimo e, para realizar el siguiente periodo de producción. Este nivel es $x = e/\xi$ (dado que $x - \gamma x = e$), así tendríamos que, si los inventarios siempre caen abajo de los niveles de peligro, serán inevitablemente reducidos -sin límite–, por el consumo persistente, conduciéndonos a una economía que es devorada por los propios consumidores (en un modelo más realista esta situación conduce a la inflación y a la restricción del consumo). Puntos arriba del "punto de peligro" que están sobre la "línea de escasez" proceden hacia arriba en periodos sucesivos de tiempo. Dentro del modelo, donde hay un consumo fijo (no productivo) en el sentido que se ha supuesto, es razonable y una necesidad que $(c + 2)e + h$ exceda claramente e/ξ, de no ser así, nunca habría recuperación dentro del modelo.

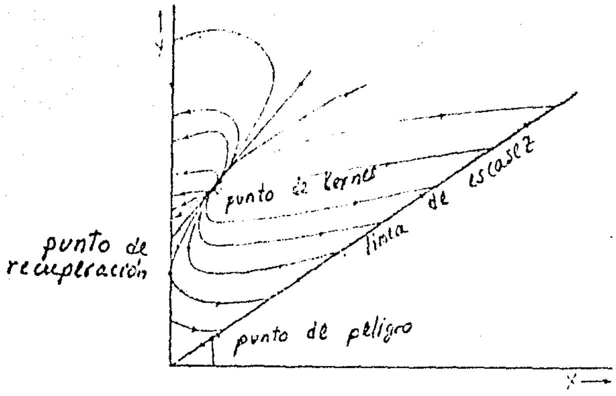

fig.10 Consumo en el caso expansivo.

Ahora veremos qué pasa con el punto de peligro, bajo nuestra transformación (4.1a-b).

Las coordenadas de nuestro punto de peligro son

$P_{-}(e/\xi, \gamma e/\xi)$.

La transformación (4.1a-b) es

$$y(t) = y(t-1) + \xi x(t-1) - e$$

$$x(t) = \min [\{\bar{\gamma} x(t-1) - y(t-1) + (c+2)e + h\}^{+}, y(t)/\gamma]$$

tomaremos

$$x(t-1) = e/\xi$$

$$y(t-1) = \gamma(e/\xi).$$

Entonces:

$$\tau(e/\varepsilon) + \varepsilon(e/\varepsilon) - e = y(t) = \tau(e/\varepsilon).$$

Ahora tenemos que:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \min\,[\{\bar{\tau}(e/\varepsilon) - \tau(e/\varepsilon) + (c+2)e + h\}^{+},\ \tau(e/\varepsilon)/\tau]\\
&= \min\,[\{[(c+2)\tau - 1]e/\varepsilon - \tau(e/\varepsilon) + (c+2)e + h\}^{+},\ e/\varepsilon]\\
&= \min\,[\{(c+2)e[\tau\varepsilon^{-1}+1] - e/\varepsilon(1+\tau) + h\}^{+},\ e/\varepsilon]\\
&= \min\,[\{[(c+2) - (1+\tau)]\, e/\varepsilon + h\}^{+},\ e/\varepsilon]\\
&= \min\,[\{[c + (1-\zeta)]e/\varepsilon + h\}^{+},\ e/\varepsilon]\\
&= \min\,[\{(c+\varepsilon)e/\varepsilon + h\}^{+},\ e/\varepsilon]\\
&= \min\,[[(c+\varepsilon)e/\varepsilon + h],\ e/\varepsilon]\\
&= e/\varepsilon
\end{aligned}$$

$$\therefore\ x(t) = e/\varepsilon$$

Por lo tanto, el punto de peligro bajo la transformación (4.1a-b), permanece estable. Tomando en cuenta nuestra argumentación anterior:

$$[x(t-1)\cdot y(t-1)] = [x(t), y(t)] = p_{\infty}(e/\varepsilon\ , \tau e/\varepsilon)\cdot$$

Podemos concluir que el punto de peligro es un punto de equilibrio inestable del modelo.

Regresando a la fig.10, observamos una órbita típica, donde se muestra el principio de la recesión. La producción llega a cero, para permitir la declinación de inventarios para niveles de recuperación y de acuerdo con la naturaleza básica "expansiva" -del caso que estamos examinando- proseguirá la prosperidad permanente con la ocupación de inventarios en una carrera perpetua, en donde el consumo para la recuperación tendrá un papel menor. Esto ilustra el mecanismo de recuperación, pero evidentemente no de la recesión. Para estudiar este mecanismo, examinaremos el caso correspondiente al caso depresivo descrito en la fig.9, en el cual el vector propio w_2 de la transformación definida por (4.6a-b) cae fuera del ángulo entre la línea "producción suspendida" y la línea de "escasez". Esto lo observamos en la fig.11 (ver fig.9).

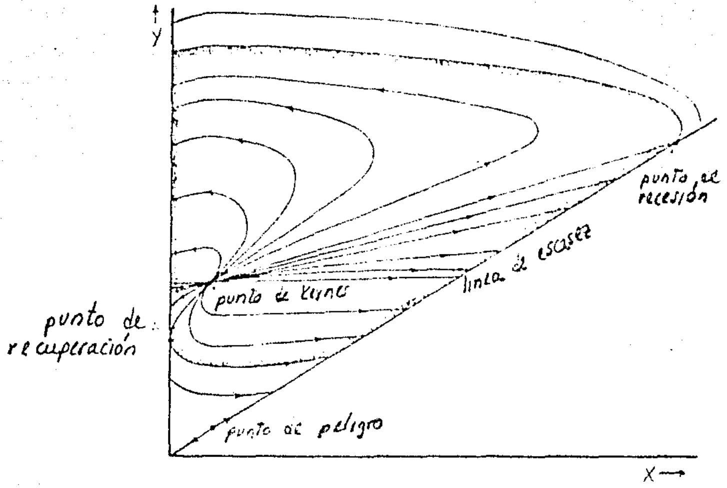

FIG 11. CONSUMO EN EL CASO DEPRESIVO.

Las indicaciones del "punto de recuperación" y el "punto de peligro" tienen el mismo significado anterior. El nuevo rasgo distintivo es lo que ocurre en el "punto de recesión" y lo definiremos como el punto donde el nivel de prosperidad de la producción y la existencia del inventario son justamente los deseados.

Para encontrar las coordenadas del "punto de recesión", recordaremos que la producción deseada está dado por

$$\{\tilde{\tau}x(t-1) - y(t-1) + \tilde{h}\}^{+}$$

y la "línea de escasez" tiene como ecuación $y = \tau x$. Entonces

$$x(t) = z(t), \qquad \text{para toda}$$

$$Y/\tau = \{\tilde{\tau}(y/\tau) - y + \tilde{h}\}^{+}$$

$$= \{(\tilde{\tau}/\tau - 1)y + \tilde{h}\}^{+}$$

$$y/\tau = \{(\tilde{\tau}/\tau - 1)y + \tilde{h}\}^{+} \qquad \text{supongamos } \tilde{\tau}/\tau > 1$$

$$(1/\tau + \tau/\tau - \tilde{\tau}/\tau)y = \tilde{h}$$

$$[1+\tau-((c+2)\tau-1)]y = \tau\tilde{h}$$

$$[2 - (c+1)\tau]y = \tau\tilde{h}$$

$$y = \tau\tilde{h}[2 - (c+1)]^{-1}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de recesión son:

$$P_r = \left|\frac{\tilde{h}}{2 - (c+1)\tau}, \frac{\tau\tilde{h}}{2 - (c+1)\tau}\right|$$

En la fig.11 tenemos marcada una órbita significativa. Esto muestra la recesión, reducción de inventario, recuperación, inventario reforzado y nuevamente recesión. Examinando la configuración de las órbitas de la fig.11, vemos que (excepto para las órbitas que comienzan en niveles de inventarios peligrosamente bajos) cualquier movimiento inicial, después de la primera recesión, sale fuera del movimiento cíclico que ha sido marcado. En la terminología de Teoría de Órbitas, la órbita marcada es un límite cíclico estable. Esta conclusión es verdadera hasta la extensión de inexactitudes pequeñas en los movimientos de la línea "producción suspendida" y "línea de escasez" ocasionada por el uso de curva continuas en vez de sucesiones discretas de puntos en la fig.11.

En la teoria del modelo del ciclo, desarrollado por Schwartz hay una simplificación de los factores complejos que juegan un papel importante en el ciclo de la economia actual. Schwartz mismo, establece que es un grave error el que se suponga que las reacciones repentinas e instantáneas en todas las secciones de la economia cumplen con la hipótesis de transmisión instantánea de pedidos y envios de un punto de la economía a otro. Una limitación más del modelo es, suponer que todos los sectores de la produccion tienen el mismo periodo de producción, de tal forma que hay una perfecta coordinación que le cierra el paso a ciertas industrias en el modelo recesivo. No obstante -según el autor- el modelo muestra una dinámica que es admitida en general.

4.2 El teorema de Keynes.

El ciclo, según Schwartz, considerado como una entidad, es un mecanismo para prevenir las restricciones de los inventarios, y plantea que en promedio la producción se ajusta al consumo. Para obtener una visión más satisfactoria sobre el significado de este principio, haremos uso de la relación tautológica entre los niveles de inventario y producción incorporados en el modelo, pero con relativa independencia de los rasgos especiales.

Retomando las ecuaciones, tenemos de (2.10) que el inventario está definido por

$$y_i(t) = y_i(t-1) + x_i(t-1) - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}x_j(t-1) - e_i$$

Haciendo un promedio de los inventarios tenemos:

$$y_i(1) - y_i(0) = x_i(0) - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}x_j(0) - e_i$$

$$y_i(2) - y_i(1) = x_i(1) - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j(1) - e_i$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y_i(k) - y_i(k-1) = x_i(k-1) - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j(k-1) - e_i$$

sumando y dividiendo entre k, tenemos:

$$h_i(k) = \frac{y_i(k) - y_i(0)}{k}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \frac{x_i(l)}{k} - \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{a}_{ij} x_j(l)}{k} - \frac{e_i}{k}$$

haciendo

$$\bar{x}_i^k = k^{-1} \sum_{l=0}^{k-1} x_i(l)$$

tenemos

$$\bar{x}_i^k - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \bar{x}_j^k = e_i + k^{-1}[y_i(k) - y_i(1)] = h_i(k)$$

donde $\bar{x}^k$ denota el promedio de las cantidades $x(n)$ sobre el periodo de $n=1,\ldots,k$. En el paso siguiente hay una dificultad con el crecimiento ilimitado de los inventarios. Solow supone que están acotados o que crecen muy lentamente para periodos grandes de tiempo. De las relaciones anteriores podemos concluir el teorema de Keynes, haciendo $k \to \infty$ y escribiendo $\bar{x}_i$ para el promedio de tiempo (grande)

$$h(k) = (I-\tilde{A})\bar{x}^k - e$$ como $(I-\tilde{A})$ es productiva, Existe $(I-\tilde{A})^{-1} \geq 0$

$$(h(k) + e)(I-\tilde{A})^{-1} = \bar{x}^k$$

Finalmente tenemos $\bar{x}^k \to e(I-\tilde{A})^{-1}$ cuando $k \to \infty$.
siempre que $|h(k)| \le M$ $\forall k$.

Así, el teorema de Keynes está dado por

$$(4.10) \quad \bar{x}_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \bar{x}_j = \bar{e}_i$$

expresado matricialmente

(4.11) $(I-\hat{A})\bar{x} = \bar{e}$.

Esto es, hay una tendencia de que el consumo determina la producción.

Hemos probado abstrayéndonos de la dinámica de los detalles del ciclo económico, que el consumo determina la producción. En un modelo en el cual el consumo e no es fijo, sino variable y en el cual también tenemos inversiones f, las relaciones bajo la misma suposición de inventarios limitados y haciendo algunas modificaciones tenemos:

(4.12) $(I-\hat{A})\bar{x} = \bar{e} + \bar{f}$

Si resolvemos la ecuación para $\bar{x}$ tenemos

(4.13) $\bar{x} = (I-\tilde{A})^{-1}(\bar{e} + \bar{f})$.

Esta es la primera de una serie de relaciones multiplicadoras, las que discutiremos posteriormente.

4.3 Reflexiones generales sobre la teoría de los ciclos. La ley de Say.

En esta sección estableceremos algunas observaciones que el propio Schwartz hace a su modelo.

En primer lugar, señala que todas las industrias están en todo momento perfectamente balanceadas. De esta forma, el ciclo no es un ciclo de desproporciones, sino de sobreproducción general. El autor se muestra escéptico con respecto a las decisiones que señalan que el ciclo es un problema de desequilibrio en la línea de producción. Las desproporciones en el modelo de Schwartz se van corrigiendo, no obstante el movimiento básico ue una producción agregada y generalizada. Es más, las correcciones caracterizan más a las recesiones que a los períodos de boom.

Otra observación que hace el autor, es el hecho de que el modelo se desarrolla fuera de los términos "reales", es decir, la cuestión de los precios no entra en el modelo. Esta idea está en discusión con las visiones que establecen que el fenómeno del ciclo es puramente "monetario". Observaremos que los montos del material de las mercancías que caracterizan al punto de Keynes, reúnen las condiciones fiscales del modelo. Para ello tomaremos el consumo total cuyos componentes son e_j. Tomaremos el vector que describe el consumo del j-ésimo

productor cuyas componentes en un [illegible]
Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} e^{(j)} = e_i .$$

Sean $\bar{x}_i$ los niveles de producción tal que (4.10) cumple la diferencia entre los valores [illegible] para el j-ésimo productor:

$$(4.14) \qquad \sum_{j=1}^{n} p_i^{*}\tilde{a}_{ij}\bar{x}_j + p_i^{*}e_i - \sum_{j=1}^{n} p_j^{*}a_{ji}\bar{x}_i$$

por la relación de Keynes (4.10) tenemos

$$(4.15) \qquad p_i^{*}x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i^{*}\tilde{a}_{ij}\bar{x}_j$$

el cual, por la ecuación de precios,

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i^{*}\tilde{a}_{ij} + \sum_{i=1}^{n} p_i^{*}\tilde{b}_{ij} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

es igual

$$(4.16) \qquad \rho \sum_{i=1}^{n} p_i^{*}\tilde{b}_{ij}\bar{x}_j .$$

Claramente, si el i-ésimo productor consume, automáticamente los desembolsos están restringidos por la condición presupuestal ordinaria.

$$(4.17) \qquad \sum_{j=1}^{n} p_j^{*}e^{(i)} = \rho \sum_{i=1}^{n} p_j^{*}\tilde{b}_{ij}\bar{x}_j .$$

Todas las condiciones de intercambio se cumplen: los ingresos balanceados salen fuera y la tasa de ganancia es uniforme. Si interpretamos la cantidades $\bar{x}_i$, no como niveles invariables de Keynes de la producción, sino como el promedio de los niveles de producción sobre el ciclo económico, observamos por este cálculo, que uniformemente, la dinámica de movimientos en cada ingreso empresarial y los gastos estarán balanceados en el ciclo económico. Así, el obstáculo del no financiamiento queda de lado el modelo.

La identidad de las expresiones [illegible] la ecuación

(4.18)

dinero efectivo de las = dinero efectivo de las
ventas industriales   compras industriales

que puede ser llamada la **ley de Say**. El principio, un tanto extrapolado, de esta identidad casi trivial es el principio que se expresó tentativamente con anterioridad: que el ciclo económico es un fenómeno real y no un fenómeno monetario.

El modelo del ciclo desarrollado por Schwartz, en donde la prosperidad y recesión toman lugar de tiempo en tiempo es considerado por el autor como un argumento contra la ley de Say. Esta ley niega la existencia de la sobreproducción general que es justamente lo que muestra el modelo. Dicha ley aparece por primera vez en 1800 en la obra "Tratado sobre Economía Política" de J.B. Say. En un principio, esta "ley" apareció como algo evidente, poco después se convirtió en un fundamento preconcebido de la economía. Algunas obras clásicas donde se cita esta ley son las siguientes: "Defensa del Comercio" (1808), James Mill; "Principios de Economía Política" (1848), John Stuart Mill.

Para Schwartz la confusión central que hay en las fuentes citadas con respecto a la ley de Say, es que confunden el deseo con sus posibilidades reales de compra.

El autor del modelo establece que el derrumbamiento decisivo de la ley de Say empezó con la "Teoría General" de John Maynard Keynes publicada en 1936; más en particular en la sección donde cuestiona los mecanismos financieros (basados en las tasa de interés y la preferencia por la liquidez).

CAPITULO 5

REFLEXIONES GENERALES SOBRE ECONOMIA KEYNESIANA. EL VALOR NUMERICO DEL MULTIPLICADOR.

Por ahora interrumpiremos el desarrollo matemático del modelo y centraremos nuestra atención en algunas consideraciones del ciclo que hace la teoría keynesiana.

Escribamos:

Producción total - Consumo industrial de elementos de producción = Consumo personal + Consumo colectivo + Inventario ejecutado y deseado + Crecimiento de inventarios.

Lo escrito anteriormente es una tautología que se sigue de las definiciones de los términos involucrados. Para suplir esta tautologia, supondremos que existen obstáculos para el crecimiento de inventarios. Esto es una idea básica de las teorías keynesianas.

Una formulación sucinta de la "economía clásica" (en el sentido de Keynes), puede ser que el consumo se ajusta a los límites impuestos por la producción; los economistas keynesianos por el contrario insisten que la producción se ajusta a los límites impuestos por el consumo (y, por supuesto a la inversión). A los "economistas clásicos" se les considera los economistas de la escasez (no es posible una sobreproducción de mercancias); y a los keynesianos, economistas de la abundancia (la sobreproducción de mercancias es un fenómeno recurrente). Hay algunos hechos paradójicos que son descritos como depresión o recesión, los cuales, son un periodo difícil para la economía. En este caso la producción es insuficiente para la satisfacción de las necesidades generales. En el modelo estos periodos estan considerados como "sobreproducción".

Las recursiones en el modelo del ciclo vienen de la circunstancia de eliminar el trabajo, es decir, el modelo involucra únicamente mercancias materiales. Para reconstruir el efecto de pago de salarios, desciframos esta simplificación matemática. Supongamos para efectos de simplicidad, que tenemos únicamente un sólo sector de trabajo. Sea A_{ij} la matriz de insumo-producto aumentada, incluyendo el renglón y la columna de insumo-trabajo. Sea $\bar{A}_{ij}$ la matriz de la cual estos renglones y columnas están excluidos. $\hat{A}_{ij}$ es la matriz

$$\hat{A}_{ij} = (1-a_{00})^{-1} a_{0i} a_{j0} ;$$

entonces usando la matriz $\hat{a}_{ij}$ las mercancias consumidas por los trabajadores están fuera del pago de salarios acumulados. El trabajo requerido para producir una unidad de la mercancía Ci, es por ahora considerado directamente como una mercancía-insumo requerida para producir una unidad de la mercancía Ci. El consumo en el modelo está considerado como consumo de las empresas más el consumos del gobierno (no esta considerado el consumo generado por los asalariados). El consumo personal como aparece en las gráficas de producto bruto, será el consumo autonomo fijo e_i más el salario generado por el consumo

$$x(n) \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i a_{0i} a_{i0}}{(1 - a_{00})} \qquad a_0 \neq 1$$

llamaremos u_i a la suma anterior ; encontraremos el consumo personal como el calculo ordinario representado en el modelo por la expresión $e_i + x(n)u_i$. Las fluctuaciones de consumo durante el ciclo vienen de las fluctuaciones de $x(n)$. El aspecto de "abundancia" de una recesion es visible cuando el consumo es relativamente independiente de la producción y forma parte de los términos e. Sin embargo, el consumo es directamente dependiente de la producción y en el modelo gruesamente simplificado forma parte de los términos $x(n)u$.

Con esto haremos frente al significado de los términos involucrados, ahora podemos establecer la relación keynesiana (4.11) como sigue

$$(5.1) \qquad \bar{x}_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\bar{x}_j = \bar{e}_i$$

y, con la inclusión de la inversión promedio

$$(5.2) \qquad \bar{x}_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\bar{x}_i = \bar{e}_i + \bar{f}_i$$

Ahora citaremos algunas recomendaciones de política económica keynesiana para atenuar la fuerza de la recesión.

1. Incrementar e , a través de exhortaciones al "consumo al instante", programas civiles, militares y ayuda para el desempleo.

2. Incremento de la inversión, por eliminación rápida del impuesto, garantía contra pérdidas y programas de trabajo público.

3. Incremento de los elementos de $\tilde{a}_{ij}$, a través de incremento de salarios.

La diferencia entre la visión keynesiana y la "neoclásica" es evidente por la fuerte disputa sobre el

[illegible]

$$(5.3a) \quad X = (I-A)^{-1}(e + f)$$

suponiendo que A es productiva, tenemos

$$(5.3b) \quad (I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots$$

Podemos ver facilmente que un incremento en e, conduce a un aumento en el salario real. Este resultado es una contradiccion directa para las teorías económicas no keynesianas, las cuales en tiempos de depresion reducen el salario.

5.1 La matriz multiplicadora, el vector multiplicador y el multiplicador.

La relacion lineal (5.3.a) tiene evidentemente la forma de un multipilicador matricial y es una de las numerosas relaciones de este tipo las cuales conocemos como "multiplicador" o "acelerador". Notemos por ejemplo que el ingreso nacional real es por definición: producción total menos consumo industrial, es decir

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

podemos deducir de (5.3) que

$$(5.4) \quad IN = (I-A)X$$

$$= (I-A)(I-A)^{-1}(\bar{e} + \bar{f})$$

Es una ecuacion en términos reales, válida en el caso de un único sector de trabajo, el cual proviene de una relación keynesiana, para determinar los componentes del ingreso nacional. en términos de un producto final. Podemos hacer notar que cada una de las matrices en esta ecuación es de una "característica institucional" de la economía: esto lo hace más sencillo "porque el multiplicador es constante".

La ecuación (5.4) simplificada para una ecuación numérica, relaciona valor monetario total del producto final con el valor monetario total del ingreso nacional por conversión a términos monetarios. Esta es llamada la **ecuación multiplicadora de Keynes.** Por supuesto, esta drástica simplificación descuida la variación en porcentajes de la contribución de pesos para el ingreso nacional de las distintas mercancías, las cuales constiyen el producto final.

Para aplicar una ecuación análoga a (5.4) (o una forma agregada de ésta ecuación) para los datos tomados de una economía actual, necesitamos una generalización de (5.4): debemos tener presente que hay más de una mercancía trabajo y que ciertas mercancías trabajo son incluidas en el producto final. Si escribimos una generalización, usaremos la matriz insumo producto original, en vez de la forma de trabajo eliminado, la cual fue conveniente en los tres capítulos anteriores. Entonces, sea A_{ij} la matriz de insumo-producto incluyendo los sectores de trabajo, tal que i,j varían de N a -L, A_{ij} denota la matriz insumo para sectores materiales (consumo industrial tal que $A_{ij} = A_{ij}$ si j=1,2,...,N donde $A_{ij} = 0$ si j=0,...,-L . Entonces, si $w^T=(w_N,...,w_{-L})$ es el vector de producto final (componentes reales de dividendo nacional), $X^T=(x_N,...,x_{-L})$ es el vector de producción total de las mercancías $C_N,...,C_{-L}$ obtenemos fácilmente

$$(5.5) \qquad w_i = x_i - \sum_{j=-L}^{N} a_{ij}x_j \qquad\qquad i = -L,...,N$$

tal que

$$(5.6) \qquad (I-A)^{-1}w = X$$

Esto evidentemente es una generalización de la ecuación (5.3). Conociendo los componentes de producto total X^T, esto aparece en (5.6), ahora haremos una substracción para el consumo industrial sobrepedido para obtener el ingreso. Así, la producción total menos consumo industrial es $(I-A)X$ y tenemos

$$(5.7) \qquad IN = (I-A)(I-A)^{-1}w$$

para los componentes totales del ingreso nacional. Esto es una generalización apropiada de la ecuación (5.4). Ahora discutiremos la agregación de la ecuación (5.7). Sea P el vector de precios, incluyendo el precio de la mercancía trabajo. Entonces de (5.7) el valor del ingreso nacional está dado por

$$(5.8) \qquad IN = p^T IN = p^T(1-A)(I-A)^{-1}w$$

Sea $R^T = p^T(I-A)(I-A)^{-1}$ con componentes $(R_N,...,R_{-L})$ entonces (5.8) puede ser escrita

$$(5.9) \quad IN = \sum_{k=1}^{N} R_k w_k$$

[illegible] el camino en el cual el producto final determina [illegible] nacional para el equilibrio keynesiano.

El vector R' puede ser llamado **el vector multiplicador** de Keynes para convertir el producto final (en términos [illegible]) dentro del ingreso nacional.

Si escribimos $k_j = R_j/p_j$, tal que

$$(5.10) \quad IN = \sum_{j=1}^{N} k_j(w_j p_j) \quad ,$$

tenemos un correspondiente vector multiplicador de Keynes para convertir las componentes del producto final (expresado en términos monetarios) dentro del ingreso nacional. Si descuidamos la variación de una mercancía a otra, los coeficientes K_j, -más *precisamente*- si reemplazamos los coeficientes K_j por su promedio K de acuerdo con el valor proporcional de cada mercancía en el producto final, podemos escribir (5.10) como

$$(5.11) \quad IN = KP^{T}w$$

ó

(5.12) Ingreso nacional = multiplicador de Keynes ·producto nacional

La derivación demuestra que los componentes K_j son definidos por las condiciones tecnológicas de producción y la tasa de salario. El *multiplicador promedio* K, sin embargo puede tener algunas variaciones en la composición del producto final.

CAPITULO 6

UNA MODIFICACION AL MODELO DE LA TEORIA DEL CICLO.

En el modelo de los capitulos anteriores (3 y 4) las fluctuaciones del ciclo se exageraron. Es decir, el nivel de producción e inventario aún en las peores recesiones nunca es cero. La idea de este capitulo será la de incluir algunos elementos que hagan más realista al modelo y que al mismo tiempo tenga ciertos grados de predicción.

En este capitulo, Schwartz hace algunas consideraciones con respecto al ciclo y al papel que juegan las actividades comerciales e industriales en el ciclo económico. Schwartz señala que el modelo del ciclo desarrollado en los capitulos 3 y 4 es un modelo que se apega más a la esfera comercial que a la industrial; dado que las actividades industriales se desarrollan con una "intensidad dada", momento a momento, pero no se relacionan directamente con su destino; mientras que, las actividades comerciales se ajustan momento a momento a los requerimientos del mercado. Con respecto a sus inversiones (de las empresas comerciales) éstas se hacen en base a períodos de ventas anteriores; permitiendo con esto que las actividades comerciales -según Schwartz- desalienten las oscilaciones de la recesión de la producción general en la esfera industrial.

Observando más de cerca el comportamiento de las actividades comerciales veremos que éstas no se ajustan inmediatamente a la situación de las ventas diarias, sino a una situación promedio de las ventas calculadas sobre distintos procedimientos económicos, ya sea "días" o "planes periódicos". Si pronosticamos la manera de reemplazar "ventas anteriores" diarias en la formula básica (2.12) de la producción deseada, en la esfera de la i-ésima mercancía por la expresión "promedio anterior de ventas sobre días" es decir el reemplazamiento de la expresión

$$(6.1) \qquad c_i \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j(t-1)$$

por la expresión

$$(6.2) \qquad c_i \Delta^{i} \sum_{\delta=1}^{\Delta_i} \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j(t-\delta).$$

El entero Δ_i es una caracteristica de la i-ésima industria; heurísticamente hablando es un indice de las "tasas de respuesta "de los consumidores. El conjunto completo de las recursiones de la sección final del capitulo

2, con las modificaciones [illegible] de la manera siguiente (aqui incluiremos el consumo y el inventario básico desde el principio [illegible]

$$(6.3) \qquad v_i(t) = v_i(t-1) + [illegible]$$

$$(6.4) \qquad z_i(t) = \{(c_i+2)\Delta_i^{-1} \sum [illegible]$$

$$- x_i(t-1) - v_i(t-1) + \tilde{h}\}^{+}$$

donde $\tilde{h} = (c_i+2)e_i + h_i$

Esta es la ecuación para la producción deseada, e_i es el consumo autónomo y h_i es el inventario básico.

$$(6.5) \qquad \mu_k(t) = \frac{v_k(t)}{\sum_{i=1}^{n} a_{ki} z_i(t)}$$

(coeficiente de tension del mercado de la k-ésima mercancia).

$$(6.6) \qquad \sigma_i(t) = \min\left(\min_{a_{ik}>0} \mu_k(t),\ 1 \right)$$

(factor de oferta, de tensión de la i-ésima mercancia producida)

$$(6.7) \qquad x_i(t) = z_i(t)\cdot\sigma_i(t).$$

produccion actual de la i-ésima mercáncia.

Estas recursiones nos dan un modelo cerrado; ahora retornaremos al análisis de este caso especial del modelo.

6.1 Estabilidad del punto de Keynes para grandes Δ

Es evidente -hablando heurísticamente- que cuando las constantes Δ_i son incrementadas, el modelo economico contiene menos inclinaciones ó cambios amplios ó inesperados en los niveles de produccion. Para Δ_i grandes, en promedio esperamos que los niveles de inventorio y producción que inicialmente se encuentran en una vecindad del punto de Keynes, vuelvan a caer en la vecindad bajo la aplicacion sucesiva de nuestras transformaciones (6.3)-(6.7). En esta sección justificaremos esta conclusión y supondremos tentativamente que $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = \Delta$ y $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = c$. Así, deseamos calcular el punto fijo de la transformación definida por (6.3)-(6.7) y hacer el estudio de la transformación en la vecindad de este punto. Esto lo haremos como sigue. En primer lugar, concluimos de (6.3) que los niveles de producción del punto fijo están dados por

$$(6.8) \qquad x_i^k - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j^k = e_i$$

de esta manera (6.8) es solamente nuestra vieja relación de Keynes. Los niveles de inventario del punto fijo están dados por

$$(6.9) \qquad y_i^k = (c_i+2) \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j^k - 2x_i^k + (c_i+2)e_i + h_i$$

dado que, si

$$(c_i+2) \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j - x_i^k - y_i^k + (c_i+2)e_i + h_i < 0$$

entonces $z_i(t) = 0$ y de (6.3) y de (6.7) tendríamos que $e_i=0$ que es una contradicción en el modelo. Por lo tanto:

$$x_i^k = (c_i+2) \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j - x_i^k - y_i^k + (c_i+2)e_i + h_i$$

Usando (6.8) y (6.9) tendremos

$$(6.10) \qquad y_i^k = c_i x_i^k + h_i$$

Para los niveles de inventario en equilibrio, observamos que de estos niveles de inventario y de producción tenemos que $z_i = x_i^k$ por (6.8) tendremos

$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j^k = x_i^k - e_i$ de modo que

$$(6.11) \qquad \mu_k = \frac{c_k x_k^k + h_k}{x_k^k - e_k} > 1$$

dado que siempre hemos supuesto que $c_k \geq 1$, por tanto $\sigma_i=1$ para toda i. Así, de (6.7) obtenemos $z_i = x^k$ y de nuevo confirma el hecho que (6.8) y (6.10) definen el punto fijo x_i^k, y_i^k dentro de la vecindad de este punto . La transformación definida por (6.3)-(6.7) se reduce a la [illegible] definidos por las dos ecuaciones siguientes:

$$(6.12)\qquad y_i(t) = y_i(t-1) + x_i(t-1) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t-1) - e_i$$

$$(6.13)\qquad x_i(t) = (c+2)\Delta^{-1}\sum_{\delta=1}^{\Delta}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t-\delta) - x_i(t-1)$$

$$- y_i(t-1) + (c+2)e_i + h_i$$

Podemos en este momento adoptar las técnicas empleadas en el capítulo 4 para el estudio de estas recursiones no homogéneas. En primer lugar si escribimos $\tilde{y}_i(t) = y_i(t)-y_i^*$ y $\tilde{x}_i(t) = x_i(t) - x_i^*$ para las desviaciones de los inventarios y los niveles de producción. Entonces $\tilde{x}_i$ y $\tilde{y}_i$ cumplen con las recursiones lineales no homogéneas.

$$(6.14)\qquad \tilde{y}_i(t) = \tilde{y}_i(t-1) + \tilde{x}_i(t-1) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j(t-1)$$

$$(6.15)\qquad \tilde{x}_i(t) = (c+2)\Delta^{-1}\sum_{\delta=1}^{\Delta}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j(t-\delta)$$

$$- \tilde{x}_i(t-1) - \tilde{y}_i(t-1)$$

Estas recursiones son de orden Δ en el sentido de la teoría de las ecuaciones en diferencias, es decir, ellas relacionan los valores de ciertas variables en un tiempo dado con los de la variable en periodos precedentes. Como tal sistema de recursiones puede ser reducido a un sistema de recursiones de primer orden (es decir, definen los valores de sus variables en un tiempo dado en términos de sus valores de un periodo inmediatamente anterior) por el uso de un artificio enteramente análogo al artificio familiar de la teoría de las ecuaciones diferenciales. Es decir, introduciendo

$$\tilde{y}_{i,u}(t) = \tilde{y}_i(t-u+1) \qquad \text{donde} \qquad u = 1,\ldots,\Delta$$

$$\tilde{x}_{i,u}(t) = \tilde{x}_i(t-u+1) \qquad \text{donde} \qquad u = 1,\ldots,\Delta$$

como un nuevo conjunto de variables. Se observa inmediatamente que las recursiones (6.14)-(6.15) son equivalentes a las siguientes recursiones, introduciendo nuestras nuevas variables

$$(6.16)\qquad \tilde{y}_{i,u}(t) = \tilde{y}_{i,u-1}(t-1)\ ,\quad u = 2,\ldots,\Delta$$

$$\tilde{y}_{i,1}(t) = \tilde{y}_{i,1}(t-1) + \tilde{x}_{i,1}(t-1) - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\tilde{x}_{j,1}(t-1)$$

$$(6.17) \quad \tilde{x}_{i,u}(t) = \tilde{x}_{i,u-1}(t-1) \;, \quad u = 2,\ldots,\Delta$$

$$\tilde{x}_{i,1}(t) = (c+2)\Delta^{-1} \sum_{s=1}^{\Delta} \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\tilde{x}_{j,s}(t-1)$$
$$- \tilde{x}_{i,1}(t-1) - \tilde{y}_{i,1}(t-1)$$

De esta forma hemos logrado establecer el sistema (6.14)-(6.15) en términos de un sistema de recursiones de primer orden, en el sentido de las ecuaciones en diferencias.

Ahora realizaremos el estudio de los resultados aplicando repetidamente la transformación definida por (6.16)-(6.17) con las variables $\tilde{x}_{i,u}$, $\tilde{y}_{i,u}$. El principio del análisis lineal nos dice en sus proposiciones que podemos realizar de manera efectiva los calculos de los valores propios y de los vectores propios de esta transformacion. Nuestra transformación opera en $2n\Delta$ dimensiones, por tanto debemos calcular $2n\Delta$ valores y vectores propios, es decir, un conjunto de $2n\Delta$ variables $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_i$ y λ para las cuales las recursiones (6.16)-(6.17) ó las recursiones equivalentes (6.14)-(6.15) nos conducen de un periodo a otro multiplicando las variables $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_i$ por el factor constante λ. Teniendo presente esto, procederemos como sigue:

$$x_i(t) = x(t)\cdot v_i\lambda^t \;; \quad y_i(t) = y(t)\cdot v_i\lambda^t$$

donde v es un vector propio de la matriz $\tilde{A}$, con el correspondiente valor propio τ de modo que

$$(6.18) \quad \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}v_j = \tau_i \quad i = 1,\ldots,n$$

sustituyendo (6.18) en (6.14)-(6.15) tenemos

$$\tilde{y}v_i\lambda^t = \tilde{y}v_i\lambda^{t-1} + \tilde{x}v_i\lambda^{t-1} - \tilde{x}\tau v_i\lambda^{t-1}$$

$$(6.19a) \quad \tilde{y} = y\lambda^{-1} + \lambda^{-1}(1-\tau)\tilde{x}$$

$$\tilde{x}v_i\lambda^t = (c+2)\Delta^{-1}(\tau v_i\lambda^{t-1}\tilde{x} + \tau v_i\lambda^{t-2}\tilde{x} + \ldots + \tau v_i\lambda^{t-\Delta}\tilde{x})$$
$$- \tilde{x}v_i\lambda^{t-1} - \tilde{y}v_i\lambda^{t-1}$$

(6.19b)

$$\tilde{x} = (c+2)\Delta^{-1}[(\lambda^{-1} + \lambda^{-2} + \ldots + \lambda^{-\Delta})\tau - \lambda^{-1}]\tilde{x} - \tilde{y}\lambda^{-1}$$

y las ecuaciones (6.16) y (6.17) quedan

$$(6.20) \qquad \lambda \tilde{y}_u = y_{u-1} \qquad u = 2,\ldots,\Delta$$

$$\lambda \tilde{y}_1 = \tilde{y}_1 + (1-\tau)\tilde{x}_1$$

$$(6.21) \qquad \lambda \tilde{x}_u = \tilde{x}_{u-1} \qquad u = 2,\ldots,\Delta$$

$$\lambda \tilde{x}_1 = (c+2)\Delta^{-1}\tau \cdot \sum_{s=1}^{\Delta} \tilde{x}_s - \tilde{x}_1 - \tilde{y}_1$$

La matriz $\tilde{A}_{n\times n}$ tiene n valores propios ζ. Para cada ζ, el problema de valores propios de (6.20)-(6.21) tiene 2 variables y $2n\Delta$ soluciones. Entonces nuestro procedimiento barre todas las $2n$ soluciones; no obstante, sabemos que $2n\Delta$ es el número de valores propios de nuestra transformación original (6.16)-(6.17). Podemos concluir en este momento que todos los valores propios λ de la transformación (6.16)-(6.17) satisfacen un par de ecuaciones de la forma (6.19).

Ahora el par de ecuaciones lineales homogéneas (6.19) tienen solución si y solo si su determinante es cero, es decir

$$(6.22) \qquad \lambda^2 + \Delta^{-1}(c+2)\tau(1-\lambda^{1-\Delta}) - \tau = 0$$

Si solucionamos esta ecuación para cada valor propio ζ de la matriz $\tilde{A}$, obtendremos el conjunto completo de valores propios de la transformación lineal (6.16)-(6.17).
Por las propiedades del $\mathrm{dom}(\tilde{A})$ (ver apéndice) tenemos que cada valor propio ζ está acotado por el $\mathrm{dom}(\tilde{A}) = \zeta_0$ además como $\tilde{A}$ es productiva se tiene que $0 < \zeta < 1$. Ahora nos preguntamos si podemos tener una raíz λ tal que $|\lambda| \geq 1$. Si este fuera el caso tendríamos que

$$\lambda^{\Delta} \geq \lambda \Rightarrow \quad \lambda^{1-\Delta} \leq 1$$

$$\Rightarrow |1 - \lambda^{1-\Delta}| \leq 2$$

de modo que de (6.22) se sigue:

$$1 \leq |\lambda|^2 \leq |\tau| + |\Delta^{-1}(c+2)\tau(1-\lambda^{1-\Delta})|$$

$$\leq \tau_0[1 + \Delta^{-1}(c+2)\,|1-\lambda^{1-\Delta}|] \leq \tau_0[1 + 2\Delta^{-1}(c+2)]$$

Por lo tanto tenemos

$$(6.23) \qquad 1 \leq |\lambda|^2 \leq \tau_0[1 + 2\Delta^{-1}(c+2)]$$

el cual para Δ suficientemente grande, es una contradicción. Así, concluimos que cuando Δ es suficientemente grande, todos [illegible] valores propios [illegible] de la transformación (6.16)-(6.17) son menores que 1.

De [illegible] que [illegible] de la [illegible] que se aproxima a [illegible] geométrica. De acuerdo con el álgebra [illegible] una combinación lineal de estos vectores propios; se sigue que la transformación (6.16)-(6.17) aplicada repetidamente a cualquier vector, se mueve en una sucesión de vectores que [illegible] geométrica. Por [illegible] las relaciones entre las recursiones homogéneas (6.16)-(6.17), las recursiones lineales no homogéneas (6.12)-(6.13) y el conjunto de recursiones (6.3)-(6.7) definidas en el modelo dinámico presente el cual ya hemos establecido anteriormente. De aquí podemos concluir que las órbitas del modelo convergen alrededor del punto de Keynes con rapidez geométrica. Así, en el presente modelo las oscilaciones del ciclo económico, oscilan desanimadamente conforme transcurre el tiempo.

6.4 Observaciones Adicionales.

Las oscilaciones cíclicas en el modelo presentado hace un momento son desanimadas y entonces el punto de Keynes es estable; las oscilaciones presentadas en el modelo de los capítulos 3 y 4 son no desanimadas y el punto de Keynes es inestable. Ahora es natural hacernos la siguiente pregunta ¿cuáles son las extensiones persistentes o relevantes de estas dos posibilidades polares en la economía actual? Schwartz responde así; "podemos estar de acuerdo en los establecimientos de la primera sección del presente capítulo, en el sentido de que el desempleo en el sector no industrial de la economía se inclinan a moderar y encerrar las fluctuaciones que toman lugar en el sector industrial. De esta manera las fluctuaciones industriales son casi desanimadas completamente por la estabilidad necesaria del sector no industrial; para esto es necesario que el sector industrial esté suficientemente sensitivo a las fluctuaciones de las ventas generadas por los distintos niveles de actividad que son descritos en el mecanismo cíclico expuesto en la sección 2 del capítulo 4"

En el capítulo de conclusiones discutiremos la idea de Schwartz del ciclo y del papel que le asigna a las actividades comerciales e industriales en tiempos de recesión.

CAPITULO 7:

[illegible] ADICIONAL DE LA TEORIA DEL CICLO.

[illegible] tres fragmentos [illegible] al estudio [illegible] de la teoria del ciclo en la [illegible] la discusion de [illegible] una vision keynesiana.

7.1 Politica contraciclica

Varios sistemas de "estabilizacion automática" han sido propuestos para moderar la amplitud de las fluctuaciones ciclicas de la produccion , Un sistema tipico de "estabilizacion" es el sistema del seguro del desempleo, En este sistema la tasa de ingreso de las personas empleadas se les carga un impuesto y éstos beneficios obtenidos pagados a los desempleados. De esta forma se mantiene el consumo personal en temporadas de un alto desempleo. Usaremos el modelo simple agregado de la lectura 4. (caso depresivo) para dar una descripción aproximada del funcionamiento de tal esquema sobre las fases del ciclo económico.

Decíamos que en el esquema del seguro de desempleo, a los salarios se les carga un impuesto y ésta cantidad es destinada a cubrir una parte del pago a los desempleados. Si $\bar{X}$ es el punto de producción general máxima, en el que el desempleo es cero, entonces los beneficios pagados en cualquier periodo tienen la forma $\beta(\bar{X}-x)$ donde β es el coeficiente que describe la tasa de beneficio y x es el nivel actual de produccion. Podemos suponer que estos beneficios entran inmediatamente en el modelo (particularmente en las ecuaciones (4.1a-b)) como una suma en el consumo autónomo (el término e en la ecuación 4.1b). El efecto de estos impuestos es fácil de describirse. Estos pueden ser tomados como una deducción de los salarios disponibles, es decir como una disminucion de un porcentaje en la tasa salarial. Nosotros observamos que una reducción de la cantidad salarial reduce los elementos de $\tilde{A}$ y por tanto la cantidad $\gamma=\mathrm{dom}(\tilde{A})$, lo que entra como un coeficiente en las recursiones (4.1a-b). Por consiguiente la colección de pagos al seguro del desempleo reducen el coeficiente γ. Así, el esquema completo del efecto del seguro al desempleo es modificar las ecuaciones (4.1a-b) del movimiento agregado en las siguientes ecuaciones

$$(7.1a) \quad y(t) = y(t-1) + (1-\gamma)x(t-1) - e - \beta(\bar{X} - x(t-1))$$

$$(7.1b)\quad x(t) = \min[\{[(c+2)\tau' - 1]x(t-1) - y(t-1) +$$

$$+ (c+2)e + (c+2)\beta(\bar{X} - x(t-1) + h]^{+},\ \frac{y(t)}{\gamma'}\Big] \quad ;\ donde\ 0<\gamma'<\gamma$$

Si definimos $\tau''=\tau'-\beta$; $e'' = e + \beta A$, entonces (7.1a-b) quedarán:

$$(7.2a)\qquad y(t) = y(t-1) + (1-\tau'')x(t-1) + e''$$

$$(7.2b)\qquad x(t) = \min[\{[(c+2)\tau'' - 1]\ x(t-1)$$

$$- y(t-1) + (c+2)e'' + h\}^{+}, y(t)/\tau']$$

La comparación de las ecuaciones (7.2a-b) con las ecuaciones (4.1a-b) revela una gran similitud, de tal manera que hay mucho en común en los movimientos de los dos modelos. Para enfatizar este punto, observamos que como $\tau>\tau'>\tau''$, los cálculos dados en el capítulo 3, especialmente la ecuación (3.16) y las siguientes formulas, demuestran que los dos vectores propios de la transformación lineal cuya matriz es

$$(7.3)\qquad \begin{bmatrix} (c+2)\tau''-1 & -1 \\ 1-\tau'' & 1 \end{bmatrix}$$

se puntea entre los valores propios de la transformación lineal no modificada cuya matriz es

$$(7.4)\qquad \begin{bmatrix} (c+2)\tau-1 & -1 \\ 1-\tau & 1 \end{bmatrix}$$

Como hemos visto antes, los valores propios de la matriz (7.4) están dados aproximadamente por la ecuación (3.16) como

$$(7.5a)\qquad \lambda_1 \approx [(c+2)\tau - 1] - \frac{(1-\tau)}{(c+2)\tau-2}$$

$$(7.5b)\qquad \lambda_2 \approx 1 + \frac{(1-\tau)}{(c+2)\tau-2}$$

lo que muestra que la τ disminuida hace que bajen las raices. No obstante, los vectores propios de (7.4) están dados por la siguiente ecuación del capítulo 3

(7.6a)

$$y_2 = [(c+2)\tau - 1 - \lambda_2]x_2 \approx (c+2)\tau - 2 - \frac{(1-\tau)}{[(c+2)\tau - 2]}$$

(7.6b)

$$y_1 = \left|\frac{(1-\tau)}{_1 - 1}\right| x_1 \approx \frac{(1-\tau)}{[(c+2)\tau - 2] - [(1-\tau) \, . \, [(c+2)\tau - 2]^{-1}]}$$

de modo que es también claro que la τ reducida, disminuye la inclinación de $\psi[x_2, x_2]$ y de $\psi[x_1, x_1]$. Por lo tanto, si el modelo no modificado (4.1a-b) corresponde al caso depresivo, el modelo modificado corresponde mas aún al caso depresivo.

Así el modelo de la Teoria del ciclo modificado, por la introducción del esquema de desempleo, está sometido repetidamente a la misma forma dinámica que la del modelo sin modificar (ver fig. 11). Ahora nos preguntamos ¿cómo hacer la comparación cualitativa de los ciclos modificado y sin modificar?. Esta pregunta tiene dos aspectos importantes: primero ¿dónde esta situado el nuevo punto de Keynes? y segundo ¿cómo son las amplitudes del ciclo modificado y sin modificar comparado uno con otro?

Para localizar el nuevo punto de Keynes, debemos discutir la relación entre los coeficientes β de la tasa de beneficio pagada, la reducción del coeficiente τ y lo que sigue de las deducciones del seguro del desempleo.

Para que el esquema del seguro del desempleo esté balanceado actualmente, los beneficios y deducciones deben mantenerse en una relación que implica una entrada y salida cero de fondos en el ciclo, de modo que, el consumo personal promediado sobre las varias fases del ciclo se mantiene sin cambiar. Ahora, si la matriz insumo-producto para el sector no laboral de una economía es A_{ij} $j=1,2,\ldots,n$, tenemos que $x_i(t)$, $y_i(t)$ y $e_i(t)$ denotan la variacion de los componentes de producción, inventarios y consumo personal respectivamente

$$(7.7) \qquad y_i(t+1) = y_i(t) + x_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i(t) - e_i(t)$$

De aquí podemos deducir como en la sección 3 del capitulo 4. que en un modelo, en el que los inventarios permanecen acotados, el promedio de producción está tecnológicamente determinado por el promedio del consumo. Esto significa -sin embargo- que la manera para que el modelo del seguro del desempleo esté balanceado actualmente, debemos tener el mismo punto de Keynes en los niveles de producción, como antes de la introducción del seguro del desempleo. Pero, como los niveles de producción en el punto de

Keynes no cambian, se sigue que un esquema balanceado debe soportar los mismos niveles de consumo personal en el punto de Keynes, que puede ser logrado con la ausencia del sistema del seguro. Esto es, que el punto de Keynes, balanceado actualmente en un sistema de seguro, debe reducirse a transferencias puras de operaciones: tasas de empleo en ciertas cantidades y tasas de distribuciones per capita para los desempleados. Inversamente, esta condicion de balance en el punto de Keynes puede ser usado para establecer la razón entre la tasa de prima de seguro y la tasa de beneficio, que conducen a un esquema ciclico balanceado.

Dado que en el punto de Keynes el esquema del seguro se reduce a una transferencia de operaciones, se sigue que en el punto de Keynes los inventarios deben ser los mismos para el modelo de la teoria del ciclo, ya sea que este modificado por un balance actual de desempleo ó no. Así el balance actual y la invarianza del punto de Keynes son equivalentes.

Sin embargo, hemos observado arriba que las operaciones del sistema de seguro disminuye el ángulo entre los dos vectores propios de la transformacion lineal (7.4). Así, la construcción geométrica dada en la primera sección del capitulo 4 muestra que el modelo para el ciclo modificado está abajo, soportando la relación del ciclo sin modificar, indicado en la figura 12.

Podemos dar un calculo cualitativo de los resultados representados gráficamente en la fig. 12 como sigue: En las oscilaciones hacia arriba del ciclo, la colección de primas de seguros reducen el ingreso disponible y por tanto las ventas, de modo que los inventarios construidos suben mas rápidamente que en la ausencia de la prima del seguro y de modo que la inestabilidad de la acumulación inventario colapsa la fase de boom anterior. En las oscilaciones hacia abajo, el pago de beneficio mantiene el poder de compra, desarrollándose mas rápidamente el consumo de exceso de inventarios y así una recuperacion rápida toma lugar. El efecto completo es suavizante, recesiones mas frecuentes con una gran tendencia hacia donde el crecimiento económico está afectado relativamente poco.

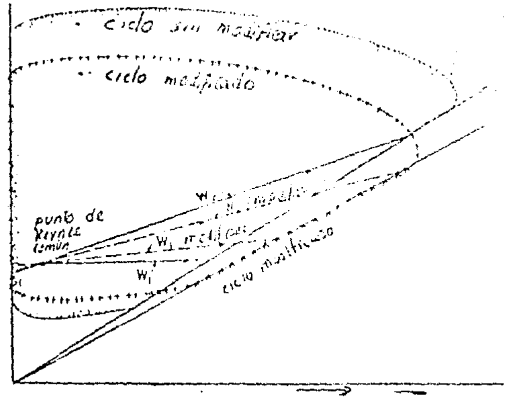

FIG 12 MODELO MODIFICADO DEL CICLO DE ESTABILIZACIÓN CONTRACICLICA.

Empiríсamente es evidente que el análisis de cualquier estabilización automática de la misma naturaleza general del seguro del desempleo- como por ejemplo-, un balanceo cíclico acotado con desembolsos pesados -extras o con disminución temporal-de las fases en periodos de recesión, son muy parecidas al análisis dado arriba con resultados similares.

Podemos observar sobre el tópico presentado que las conclusiones anteriores están sobre la hipótesis de que los esquemas contracíclicos son balanceados. Un desequilibrio fiscal del seguro del desempleo puede funcionar como un método auxiliar para otro aumento o disminución en puerta del promedio de la tasa salarial. En otro caso -no obstante- esto es equivalente en el sentido de análisis anterior para un esquema contracíclico balanceado correspondiente al salario modificado, proporcional al déficit de acumulación.

7.2 Consumo variable

Es enteramente posible que las fluctuaciones cíclicas de la producción, conduzcan a cambios en el consumo personal, independientemente de las fluctuaciones implícitas generadas automáticamente en el modelo de los capítulos 3 y 4, por las fluctuaciones en el pago de salarios. En la presente sección, estudiaremos un modelo agregado general en el cual será introducida esta posibilidad. Esto no afecta ninguna de las conclusiones principales que hemos manejado en el modelo en su forma mas simple.

Generalizaremos el modelo por la introducción de la variable consumo no productivo dentro del modelo, vinculando el consumo no productivo al ingreso previo y por tanto a la producción previa. Escribiremos un esquema agregado directamente. En el modelo agregado anterior (ver lectura 3) el incremento en el inventario total del día (t-1) al día (t) es $(1-\tau)\,x(t-1)$. Ahora haremos la suposición que el consumo no productivo $e(t)$ es igual a una constante e_0 mas alguna fracción constante α (la propensión al consumo) de la cantidad $(1-\tau)\,x(t-1)$. La función $e(t)$ puede ser introducida como una función incógnita del tiempo sobre las bases de los niveles de inventarios y producción y por una apropiada y fácil generalización de los argumentos esbozados en la sección 2, obtenemos la relación de recursiones:

$$(7.8a) \qquad e(t) = \alpha(1-\tau)x(t-1) + e_0$$

[illegible]

(7.8c) $x(t) = \min\{\bar{\tau}x(t-1) + $ [illegible] $(c+2)e(t-1)$ [illegible]

[illegible]

donde [illegible]

Hemos supuesto que la producción es prioritaria sobre el consumo, es decir, tenemos una suposición justamente como en la sección 1 del capítulo 4, en donde la substracción de stocks para el propósito del consumo ocurre "en la noche" después del día de producción. Por simplicidad, supondremos por el momento que $e_0=0$; ésta suposición será removida después.

No trataremos de estudiar los detalles de las órbitas en un sistema de tres dimensiones (7.8). Intentaremos probar que el caso depresivo es parecido al caso depresivo de los capítulos 3 y 4, existiendo para ésto un modelo generalizado también. El caso depresivo está caracterizado por el hecho de que los inventarios permanecen acotados a lo largo de las órbitas del ciclo; por tanto, por los argumentos de la tercera sección del capítulo 4, en el cual tenemos que la relación de Keynes conecta el promedio de producción y el promedio del consumo más estrechamente, y aquí los movimientos involucran una repetición lentamente hacia abajo de la producción durante el cual los inventarios acumulados son consumidos.

De (7.8) tenemos

$$y(t-1) = \tau x(t-1) + y(t) + e(t-1) + e_0$$

$$\therefore \quad \tau x(t) \leq y(t-1)$$

y $$x(t) \leqq \bar{\tau}x(t-1) + (c+2)e(t-1) - y(t-1)$$

de modo que, usando (7.8c)

$$(7.9) \qquad x(t) \leq (\bar{\tau}-\tau)x(t-1) + (c+2)\alpha(1-\tau)x(t-2)$$

una desigualdad recursiva satisfecha por el número $x(t)$, (7.9) es una recursión en la cual $x(t)$ está acotada por una expresión que envuelve $x(t-2)$ así como $x(t-1)$. Aquí podemos hacer uso conveniente de un dispositivo análogo al dispositivo de introducir nuevas incógnitas, que nos permite el reemplazamiento de una ecuación diferencial de segundo orden (compare el procedimiento empleado en la sección 2 de la lectura 6) Introducimos un vector bidimensional $v(t)$ cuyos componentes son $x(t)$ y $x(t-1)$.

Sea M la matriz de 2x2

(7.10) $$M = \begin{bmatrix} (\bar{\tau}-\tau) & (c+2)\alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces (7.9) es equivalente al planteamiento que $v(t)$ satisface

$$v(t) \leq Mv(t-1)$$

como M es conectada, tiene un vector propio positivo m^T correspondiente al valor propio $\mu = \text{dom}(M) > 0$, es decir

$$m^T M = \mu m^T$$

Por tanto

(7.11) $m^T v(t) \leq \mu m^T v(t-1)$

de donde es claro que $m^T v(t) \to 0$ (y por tanto $v(t) \to 0$) si $\mu < 1$; sin embargo $m^T v(t)$ puede aproximarse a infinito si $\mu > 1$.

El caso $\mu < 1$, corresponde a la forma anterior del caso depresivo, centraremos nuestra atención en este caso. Como $v(t)$ está acotado y de la definición de $v(t)$ se sigue que $x(t)$ esta acotado. Por tanto, por (7.8a), $e(t)$ también está acotado.

Podemos ahora establecer el acotamiento de $y(t)$. Como $e(t)$ y $x(t)$ sabemos que son acotados, se sigue que, de (7.8b) y (7.8c) existe una constante β suficientemente grande de modo que

i) $x(t) \leq \beta \quad \forall t$

ii) $y(t) \geq \beta \Rightarrow x(t) = 0 \quad \forall t$

iii) $y(0) \leq 2\beta$

Probaremos por inducción que $y(t) \leq 2\beta$ para toda t. De (7.8b) tenemos que $y(t) \leq y(t-1) + x(t-1)$ (dado que el incremento del inventario no puede exceder la producción). Por tanto si $y(t-1) \leq \beta$, entonces $y(t) \leq 2\beta$, siguiendo de i); si $\beta \leq y(t-1) \leq 2\beta$, entonces $y(t) \leq 2\beta$, siguiendo similarmente de ii). Así $y(t) \leq 2\beta$, se sigue por inducción y por tanto $y(t)$ es acotado. Por consiguiente $\mu = \text{dom}(M) < 1$, implica el acotamiento de producción, el consumo y los niveles de inventario y por consecuencia la relación de Keynes se mantiene.

De la forma (7.10) de la matriz M se observa que el dominante μ es la raíz mas grande de

$$\emptyset(\mu) = \mu^2 - [(c+1)\tau - 1]\mu - (c+2)\alpha(1-\tau) = 0$$

como $\emptyset(0) = -(c+2)\alpha(1-\tau) < 0$

$\emptyset(\mu)$ tiene una raiz negativa y una raiz positiva. La raiz positiva $\mu < 1 \iff \emptyset(1) \geq 0$, es decir

$$\mu < 1 \iff 1 - [(c+1)\tau - 1] - (c+2)\alpha(1-\tau) > 0$$

ó

$$(7.12) \qquad \mu < 1 \iff (c+1)[\tau + \alpha(1-\tau)] + \alpha(1-\tau) < 2$$

Si $c=1$, esta condición es equivalente a la condición $\alpha<2/3$. Por tanto si c está suficientemente cercano a 1, y α está suficientemente lejos del nivel critico $\alpha=2/3$ tenemos que dom$M<1$ y se sigue que los inventarios y la producción en la economia permanecen acotados y por tanto, la relación de Keynes entre producción y el consumo promedio es válida.

Es claro observar que la introducción del término no homogéneo es representando al consumo constante autónomo, no afecta las conclusiones. La misma afirmación puede hacerse por la introducción de una constante que representa el inventario básico como en la primera sección del capitulo 4.

Podemos afirmar, en suma que el modelo presentado posee un caso depresivo, mostrando los mismos rasgos cualitativos como el modelo simple del capitulo 4.

7.3 El caso depresivo en el modelo desagregado

El modelo precedente y especialmente la estática Keynesiana desarrollada en el capitulo 5, ha servido para enfatizar el significado central de la relación de Keynes. De la relación de Keynes veremos la importancia para la teoría dinámica de la siguiente pregunta ¿hacer que los inventarios se mantengan acotados a lo largo de la dinámica de las órbitas o no hacerlo? En la presenta sección intentaremos estudiar esta cuestión en el contexto del modelo dinámico desagregado, introducido en la sección final del capitulo 2, pero introduciendo el consumo autónomo. De este modo, esperamos ganar una cierta visión adicional dentro del mecanismo de la recesión, haciendo a un lado la fuerte hipótesis simplificadora sobre la cual está basado el análisis de los capitulos (3-4).

Si re-examinamos la descripción del modelo sin consumo autónomo introducido al final del capitulo 2, observamos que el modelo correspondiente con el consumo autónomo fue introducido de la manera siguiente:

Nosotros supondremos, primero, que la política del inventario óptimo seguido por el productor de la mercancía c_i; está descrito por la fórmula

$$(7.13) \quad \text{inventario deseado} = c_i s_i(t-1)+h_i$$

para el inventario esperado, establecido para la noche del t-ésimo día. Aquí h_i es el inventario básico justamente requerido y c_i es la cantidad incrementada para el cual los inventarios deben ser incrementados debido al incremento por unidad en las ventas sobre los días previos; $s_i(t-1)$ es el volumen de ventas actuales sobre el día previo. Observamos que la ecuación (7.13) es la relación lineal mas general entre el inventario deseado y los días anteriores de ventas.

La producción deseada en el t-ésimo día es entonces la cantidad de producción requerida para producir inventarios arriba de los niveles deseados, estableciéndose por anticipado las ventas del día presente (lo cual es estimado por igual a los días previos de ventas). Si $x_i(t)$ es la cantidad actual de producción en el día t-ésimo, entonces como solo vendemos en una economía cerrada, $x_i(t)$ está relacionada con $s_i(t)$ por

$$(7.14) \quad s_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_i(t) + e_i$$

donde e_i denota la cantidad de la mercancía C_i vendida para propósitos de consumo (autónomo). Suponemos que los inventarios nunca tienden hacia abajo, lo que hace este consumo imposible. Por tanto podemos escribir la formula siguiente para la producción deseada $z_i(t)$

$$(7.15) \quad z_i(t) = \{c_i[\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j(t-1) + e_i] + h_i$$

$$+ [\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j(t-1) + e_i] - y_i(t)\}^+$$

donde la suma de los dos paréntesis cuadrados, es el inventario deseado y el tercer término en el volumen estimado de ventas y el término posterior es el inventario en la mañana del t-ésimo día. Sea

$$(7.16) \quad \check{a}_{ij} = c_i \tilde{a}_{ij} \qquad i,j = 1,2,\ldots,n$$

y notamos que

$$y_i(t) = y_i(t-1) + x_i(t-1) - s_i(t-1) - e_i$$

es decir

$$y_i(t) = y_i(t-1) + x_i(t-1) - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}x_j(t-1) - e_i$$

Podemos también introducir los factores de tensión del mercado y oferta $\mu_k(t)$ y $\sigma_i(t)$, ver formulas (2.13)-(2.14). Entonces en términos de vectores la ecuación (7.15) se convierte en

(7.17) $\quad z(t) = \{[\check{A} + 2\tilde{A} - I]\bar{X}(t-1) - \bar{Y}(t-1) + g\}^+$

donde g es el vector con componentes $(c_i+2)e_i+h_i$. Como los factores $\sigma_i(t)$ son acotados por 1, tenemos

(7.18a) $\quad \tilde{A}X \leqq \bar{X}$

(7.18b) $\quad \bar{X} \leqq z(t)$

lo cual completa el modelo. No repetiremos la definición precisa del factor $\sigma_i(t)$, dado que únicamente llevaremos a cabo una investigación cualitativa de las órbitas; para este propósito las desigualdades anteriormente escritas son suficientes.

Ahora supondremos que no existen componentes del vector $x(t)$, que sean cero. Entonces

$$z(t) = [\check{A} + 2\tilde{A} - I]\bar{X}(t-1) - \bar{Y}(t-1) + \bar{g}$$

y por tanto

$$X(t) \leqq \{[\check{A} + 2\tilde{A} - I]\bar{X}(t-1) - \bar{Y}(t-1) + \bar{g}$$

usando (7.18a) con argumento (t-1) tenemos

(7.19) $\quad \bar{X}(t) \leqq \{[\check{A} + \tilde{A} - I]\bar{X}(t-1) + \bar{g}$

Nuestra tarea es ahora analizar estas desigualdades recursivas $x(t)$; siendo nuestro objetivo descubrir las condiciones bajo las cuales $\bar{X}$ permanece acotado en todas sus componentes.

Tomemos $(\check{A}+\tilde{A})$ como una matriz conectada y sea $\bar{v}$ el vector propio correspondiente al dominante k de $(\check{A}+\tilde{A})$, es decir

(7.20) $\quad (\check{A} + \tilde{A})\bar{v} = k\bar{v}$

como $\bar{v}>0$

(7.21) $\bar{v}\, x(t) \leq (k-1)\bar{v}\cdot x(t) + \bar{v}g$

Podemos ahora hacer uso del siguiente lema simple:

Lema: Sea $a_n \leq \gamma a_{n-1} + \varphi$

desigualdades recursivas satisfechas por una sucesión $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ donde γ y φ son constantes. Entonces si $\gamma < 1$, entonces a_n está acotada.

Demostración:

Sea ξ un número tal que

i) $\xi > a_1$

ii) $\xi > \varphi(1-\gamma)^{-1}$

Entonces se sigue que

$a_{n-1} < \xi \Rightarrow a_n < \gamma\xi + \varphi$

y de aqui $a_n < \xi$

Por tanto, por inducción ξ es una cota para a_n.

Si en la ecuación (7.21) el coeficiente $(k-1)$ es menor que 1 (lo que corresponde a lo que hemos llamado el caso depresivo en nuestras discusiones), la sucesión de productos escalares $vX(t)$ está acotado, y esto significa que la sucesión $X(t)$ es acotada en si misma, como v no depende de t, todos los componentes de v son positivos. Así se sigue, de nuestros supuestos, que todos los niveles de producción permanecen acotados. Queremos probar en seguida que el acotamiento de la producción implica el acotamiento de cada nivel del inventario.

Para probar que los inventarios permanecen acotados podemos adoptar un argumento usado en la sección precedente. De las ecuaciones (7.17)-(7.18) y del acotamiento de $X(t)$ se sigue fácilmente que existe un número β suficientemente grande de modo que

i) $x_i(t) \leq \beta \qquad i = 1,2,\ldots,n \quad \forall t.$

ii) $y_i(t) \geq \beta \Rightarrow x_i(t) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n \quad t.$

iii) $y_i(0) \leq 2\beta \qquad i = 1,2,\ldots,n.$

Probaremos por inducción que $y_i(t) \leq 2\beta$. De las ecuaciones (7.17), nosotros tenemos

(7.22) $y_i(t+1) \leq y_i(t) + x_i(t)$

Esto simplemente nos dice que el incremento en inventarios no puede ser más grande que la producción (la igualdad únicamente puede ocurrir cuando no existan ventas de la mercancía i en el periodo t). Tomaremos como hipótesis de inducción, la proposición $y_i(t) \leq 2\beta$. Entonces si $y_i(t) \geq \beta$ se sigue de ii) y (7.22) que:

$$(7.23) \qquad y_i(t+1) \leq 2\beta$$

Si $y_i(t) < \beta$, la relación (7.23) se sigue de i) y de (7.22). Por tanto 2β es una cota, para el nivel de inventario $y_i(t)$.

Así, en un modelo económico depresivo, es decir, en un modelo económico en el cual los incrementos en las ventas genera incrementos suficientemente pequeños, para los inventarios deseados; cualquier órbita a lo largo de cada componente de la producción permanece distinta de cero, estándo siempre limitada por una región acotada del espacio inventario-producción. Esta conclusión es completamente válida si quitamos le hipotesis, como la de proporciones iniciales de inventario y producción a lo largo de la órbita; esto es, independientemente de cualquier inicio ó continuidad y ajuste reiterado desproporcionado de la producción a lo largo de la órbita. Se sigue que a lo largo de ésta, las condiciones del capitulo 7 son suficientes para la validez de la relación de Keynes (4.11) que continúa manteniéndose.

Podemos resumir lo anterior en:

TEOREMA: Sea $\mathrm{dom}(\check{A} + \tilde{A}) < 2$. Entonces en cada órbita donde $X(t)$ tiene alguna componente que se anula una infinidad de veces, o la producción y los inventarios están acotados de modo que la relación de Keynes (4.11) se sigue manteniendo (o los inventarios eventualmente disminuyen de manera que el consumo autónomo debe bajar debiéndose reducir su nivel establecido).

El análisis del capitulo 4, de la pasada sección y todos los puntos de la presente sección están en la misma dirección; hay una tendencia para la cual los inventarios están acotados. El acotamiento de la producción e inventario en un modelo con un punto estable de Keynes, es semejante al del capítulo 6, siendo igualmente más obvio.

Así, una inferencia general para los efectos es:

a) dependiendo de la medida de un cierto valor propio clave, un modelo económico puede distinguirse de un caso expansivo o depresivo.

b) en una economía depresiva los inventarios permanecen acotados y consecuentemente, una versión conveniente generalizada de la relación de Keynes (4.11) es válida.

7.4 Retrasos en la producción y envíos.

Nuestro modelo anterior tiene el supuesto de que los envíos se realizan instantáneamente, de modo que es importante preguntar si cualquier cambio fundamental en los resultados puede ocurrir, si las ecuaciones son reformuladas al incluir retrasos en los envíos y variando los retrasos en la producción.

¿El modelo de los capítulos 3 y 4 cambia si estos efectos adicionales son considerados? Por el momento supóngase que los retrasos en los envíos o en la producción, son incluidos aproximadamente dentro del modelo por los requerimientos que cada productor, sólo se ha permitido vender cierta fracción q de su inventario. En este caso es fácil observar que las ecuaciones agregadas sin consumo están dadas como

$$y(t) = y(t-1) + \xi x(t-1)$$

$$x(t) = \min [\{\bar{\tau} x(t-1) - y(t-1)\}^{+}, q\tau^{-1} y(t)]$$

la que se reduce -por supuesto- cuando q = 1 en nuestras ecuaciones formales (3.11). Refiriéndonos a la teoría anterior, encontramos que la naturaleza de las órbitas está gobernada por la posición de los vectores propios w_1, w_2 de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & \xi \\ -1 & \tau \end{bmatrix}$$

correspondiendo a los valores propios más grande y más pequeño de esta matriz. Comparando con nuestro caso anterior, el cambio únicamente será en la inclinación de la línea de escasez. Cuando q sea más pequeño de la inclinación de la recta de escasez, la aumentaremos lo suficiente, hasta que algún valor q entre en la región accesible, estando a la izquierda de la recta generada por w_2. Esta configuración describe una economía completamente depresiva. Para compensar este aumento de q, haremos un aumento en el número de ventas diarias (c) tomadas como inventario; la producción y el retraso en los envíos hace que cada productor establezca una c más alta, lo que vuelve a aumentar la inclinación del vector propio w_2. En resumen, el modelo puede ser tanto expansivo como depresivo.

Para enfatizar este punto tenemos: la relación decisiva de la inestabilidad de estos modelos de la Teoria del ciclo es semejante a la de los capitulos 3 y 4, entre el inventario que debe ser conducido en orden para evitar retrasos en los envios y los inventarios que seran conducidos como protección extra.

CAPITULO 8

CONCLUSIONES

En este capitulo desarrollaremos una discusión con el modelo de Schwartz en dos niveles: El primero será en cuanto a las hipotesis utilizadas por el autor en su modelo y el segundo se refiere a la interpretación que hace de Keynes. Finalmente daremos nuestra modesta opinión de la discusión entre los neoclasicos y Keynes.

En cuanto a las hipotesis manejadas por el autor, un aspecto que nos parece importante poner a discusión es el tratamiento que hace con respecto a la "mercancia trabajo". Schwartz hace referencia en su modelo a "la mercancía trabajo" como una lista de salario real, de esta forma la "mercancía trabajo" entra como una mercancia cualquiera en el modelo. Otra consideración que hace el autor es que "las mercancías trabajo" no entran en el inventario "porque son consumidas en el proceso de producción".

En primer lugar, queremos decir que los trabajadores no venden "trabajo", sino venden **su fuerza de trabajo**. Si bien es una mercancia, no es una mercancia cualquiera. A los trabajadores les pagan un salario por una jornada de trabajo, pero de lo producido durante dicha jornada, una parte es para retribuir el pago de salario, y el resto se la apropia el empresario. Es decir, los trabajadores durante su jornada, producen mercancias equivalentes a su salario y otra parte se la expropia el capitalista. Precisamente de esta mercancia (fuerza de trabajo), los empresarios obtienen su ganancia. Los empresarios tratarán de obtener cada vez más ganancias; es decir, tratarán de explotar más a los trabajadores. En esta forma lo que hace Schwartz con su modelo, en aras de una "formulación matemática" más precisa, esconde nada menos que la ausencia del sistema capitalista: una producción colectiva social y una apropiación privada. Pensamos que no se puede hacer abstracción de la realidad, con el afán de ganar en formalidades matemáticas.

Otro aspecto, que el propio Schwartz señala, es que el salario no puede ser determinado "tecnológicamente", éste se determina socialmente. Por su parte los trabajadores se organizar n para obtener mejores salarios; los empresarios, por el contrario, en reducir el salario y obtener mayor plusvalía.

Sin duda alguna, el modelo de Schwartz es un intento serio por representar "matematicamente" algunos aspectos de la teoría económica de Keynes. Algunos de ellos son la característica de "agregado" de las ecuaciones recursivas, la inclusión del consumo no productivo y la inversión en las ecuaciones agregadas, el teorema de Keynes (el consumo determina la producción), el multiplicador, el seguro del desempleo, su visión del ciclo económico en donde los ajustes y recesiones son recurrentes; finalmente su identificación con Keynes; su desacuerdo con los neoclásicos y su concepción del ciclo económico como un ciclo de desproporciones.

Sin embargo, hay dos aspectos que señalaremos del modelo de Schwartz que pensamos no van de acuerdo con la Teoría de Keynes. Uno de ellos es el siguiente: En el capítulo 4, para fundamentar la relación de Keynes (I-A)X=e (el consumo determina la producción), Schwartz utiliza una hipótesis en la cual plantea que hay una tendencia a que los inventarios permanezcan acotados o "crezcan muy lentamente", es decir, manteniendo acotados los inventarios hay una tendencia a largo plazo de que el consumo determina la producción. En este punto, la observación es que Keynes nunca habla de medidas a largo plazo, sino de medidas prácticas a corto plazo, no sólo eso, Keynes se sentía impotente ante cuestiones de largo plazo, citemos un ejemplo: "Se necesita más inteligencia para derrotar las fuerzas del tiempo y de nuestra ignorancia respecto al futuro para ganar la delantera. La vida no es bastante larga, la naturaleza humana desea resultados inmediatos, hay un deleite particular: hacer dinero pronto. (1)

En el capítulo 6, Schwartz señala que su modelo del ciclo se apoya más a la "esfera comercial" que a la industria. , dice que en la depresión, el sector más castigado con respecto al desempleo es la esfera de la "actividad industrial". También plantea que las actividades comerciales en la recesión modulan el ciclo de la esfera industrial. Pensamos que la idea de Schwartz con respecto a la estructura comercial y con respecto a la esfera industrial, es distinta a la de Keynes. Para Keynes la inversión es la variable estratégica para garantizar un volumen dado de empleo. De hecho Keynes apoya y respalda la "esfera industrial" para aminorar las fluctuaciones del ciclo económico. La idea de Schwartz respecto a Keynes es al revés, él hace muchas recomendaciones para fortalecer la "esfera industrial" y poder disminuir las fluctuaciones de la "esfera comercial".

Ahora pasemos a discutir propiamente lo que es el ciclo.

Schwartz toma dos variables de la economía para hacer su análisis: Los inventarios $y_i(t)$ y la producción $x_i(t)$. El modelo tiene una base de día-día. La producción e inventario están dados en base al comportamiento del día anterior. Un elemento que aparece tanto en la producción como en los

---

(1) John Maynard Keynes. Teoría General de la Ocupación, el Interés y el Dinero. p.156.

inventarios con las ventas de las mercancías. Para cada mercancía hay una constante c, que es considerada como [illegible] promedio. Para Schwartz, el valor de esta [illegible] si la economía está en una situación de auge o depresión. Es decir, dependiendo de la medida de un cierto valor propio clave, un modelo económico puede distinguirse de un caso expansivo o depresivo.

En seguida veremos lo que dice Keynes del ciclo económico:

"En particular, encontraremos que las fluctuaciones de la propensión a consumir, en estado de preferencia por la liquidez y en la eficiencia marginal del capital han desempeñado su parte. Pero, sugiero que el carácter esencial del ciclo económico y, especialmente, la regularidad de la secuencia y de la duración que justifica el que lo llamemos ciclo, se debe sobre todo a cómo fluctúa la eficacia marginal del capital. Para nosotros, lo mejor es considerar que el ciclo económico se debe a un cambio cíclico en la eficiencia marginal del capital, aunque complicado y frecuentemente agravado por cambios asociados a las otras variables importantes en un período del sistema económico". (2)

Como vemos, el ciclo para Keynes resulta ser una fluctuación de la eficiencia marginal del capital en la medida en que las previsiones de los empresarios suben y bajan. Son las variaciones de la inversión esencialmente las que causan y constituyen el ciclo; imponen una variación correspondiente en el ingreso y la ocupación de la población.

Podemos decir que la idea de ciclo en Keynes está fuertemente influenciada por el aspecto "psicológico" que predomina en el ambiente de los "negocios". Es pues, la expectativa, ese ambiente de contienda, la incertidumbre de los rendimientos futuros en las inversiones, lo que determina el ciclo en Keynes. Pensamos que la idea de ciclo en Keynes, tendría más que ver con el "juego de la mayoría". Aquí el juego es dominado por una "Ley psicológica". Si un jugador se aparta de la "mayoría" deja de ganar una cierta cantidad o puede ser "castigado" a pagar una cierta cantidad.

Con respecto a la discusión entre neoclásicos y Keynes, nosotros planteamos lo siguiente:

Las dos teorías económicas las han desarrollado economistas al servicio de los grandes terratenientes, empresarios, banqueros, especuladores que constituyen la Burguesía. Ellos parten de que el capitalismo con algunos

---

(2) ibidem p.279.

ajustes puede seguir funcionando "como el mejor de los mundos posibles". La discusión entre ellos se da entre sectores del capital financiero y sectores del capital Industrial, es decir, entre la misma burguesía, cuya discusión es cómo pueden explotar más a las clases trabajadoras, sin que pongan en riesgo sus intereses como clase.

Hemos visto cómo el "liberalismo económico" propugnado por los neoclásicos, ha sido "libertad" para una mayor explotación de los trabajadores. La política Keynesiana, con su teoría económica, si bien logró disminuir el desempleo por algún tiempo, ahora la situación de los trabajadores ha vuelto a ser la de antes, sigue existiendo el desempleo y la miseria aumenta cada día. También hemos visto que toda la política Keynesiana, en esencia, ha sido para favorecer a la burguesía industrial.

Nosotros planteamos que la única forma de acabar con las crisis, es acabar con el capitalismo, las crisis son inherentes al propio sistema. Las medidas que han planteado las teorías económicas burguesas para acabar con la crisis, sólo han sido paliativos (que en algunos casos han funcionado) que se han quedado con los aspectos más visibles del sistema y que no atacan el problema de fondo. Ninguna política económica burguesa ha acabado con las crisis, lo único que han hecho es preparar crisis más profundas que amenazan al capitalismo.

Pensamos que el problema de fondo es quién detenta los medios de producción. Mientras estén en manos de la burguesía, la miseria, la explotación y las crisis seguirán existiendo. Las crisis dejarán de existir cuando los trabajadores tomen en sus manos el control de la producción y la sociedad.

TEOREMAS SOBRE MATRICES CONECTADAS NO NEGATIVAS.

A denota la matriz de insumo producto, cuyas entradas son a_{ij}, donde $i,j = 1,\ldots,n$. Análogamente B denota la matriz de capital fijo cuyas entradas son b_{ij}, análogamente $i,j = 1,\ldots,n$. $P' = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ denota el vector de precios de la economía. r es la tasa de ganancia de la i-ésima mercancía. Se considera que A y B son iguales.

La ecuación de precios que se obtiene del modelo cerrado es

$$P = PA+rPB$$

El problema a tratar será: ¿bajo que condiciones sobre A, b y r podemos garantizar que la P que cumple la ecuación anterior es positiva y ademas única?.

Observemos un primer caso, el cual nos dice cuando no existe solución única para el sistema de precios.

Supongamos que existe una economía E dividida en dos subeconomías E_1 y E_2, tal que las mercancías de E_1 nunca se utilicen para la producción de las mercancías de E_2, y Las mercancías de E_2, nunca son usadas para la producción de E_1. Eneste caso se pueden establecer dos tasas de ganancias r_1 y r_2 para E_1 y E_2 respectivamente con $r_1=r_2$. Aqui no se puede asegurar la existencia de un único P que cumpla la ecuación de precios. Estos casos no serán considerados. Se anula la situación anterior si pedimos que la economía sea conectada.

Definición 1. Decimos que la mercancía C_j es directamente requerida para la producción de la mercancía C_i si $a_{ij} > 0$.

Definición 2. C_i es indirectamente requerida para la producción de C_i si existe una sucesión C_i, C_{j1}, $C_{j2}, \ldots, C_{jt}$, C_i, tal que cada miembro de la sucesión es directamente requerido para la producción del próximo miembro.

Definición 3. A es conectada (indescomponible, irreducible) si

(i) $a_{ii} > 0$

(ii) para todo (i,j) existe J_1, $J_2, \ldots,$ Jn tal que

$a_{ij1}a_{j1j2}\ldots a_{jli} > 0$.

Una matriz conectada nunca puede ser llevada a una matriz de la forma $\begin{vmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{vmatrix}$ mediante permutaciones de renglones y sus respectivas columnas, donde X y Z son matrices cuadradas.

Es decir que la matriz A es descomponible si existe una matriz de permutaciones P tal que

$$P-1AP = \begin{vmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{vmatrix}$$

Donde X,Y,Z son matrices como antes. Teniendo como base estas definiciones contestaremos a la pregunta realizada anteriormente por medio de una serie de resultados matemáticos.

Lema 1. Sea A una matriz cuadrada, no negativa, conectada. Y sea X>0 tal que AX>0. Entonces X=0

Demostración: Por inducción es fácil ver que para todo N entero positivo, tenemos que $A^nX=0$. Análogamente, por inducción podemos probar que la entrada (i,j) de la matriz A^l (con $l \in N$) se denota como

$$A^l = \left(\sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \sum \ldots \sum_{j_{l-1}=1}^{n} a_{ij1}a_{j1j2}a_{j2j3}\ldots a_{jl-1j}\right)$$

Para l=2 tenemos

$$A^2 = \left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{ij1}a_{j1j}\right)$$

Por lo cual la expresión es válida para n=2.

Supongamos que el argumento es válido para l-1

$$A^{l-1} = \left(\sum_{j_1} \sum_{j_2} \sum \ldots \sum_{j_{l-2}} a_{ij1}a_{j1j2}\ldots a_{jl-2j}\right)$$

Denotemos a esta matriz por (C_{ij})

Multiplicando a la matriz A^{l-1} por A tenemos

$$A^{l} = (\sum C_{i j_{l-1}} a_{j_{l-1} j})$$

Substituyendo los valores C_{ij} en los lugares correspondientes

$$A^{l} = \left(\sum_{j_1}^{n} \sum_{j_2}^{n} \ldots \sum_{j_{l-2}} \sum_{j_{l-1}}^{n} a_{i j_1} a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_{l-2} j_{l-1}} a_{j_{l-1} j}\right)$$

de aqui podemos concluir que los términos (i,j) de A_l es precisamente el término dado anteriormente.

Como la matriz A es conectada, para todo (i,j) existe una sucesión $j_1, j_2, \ldots, j_{l-1}$ tal que

$a_{i j_1} a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_{l-1} j} > 0$

En términos de las potencias de a, quiere decir que existe un l_i natural tal que A^{l_i} tiene la entrada (i,j) positiva. Llamemos la longitud (i,j) al número lij tal que

$a_{i j_1} \ldots a_{j_{l-1} j} > 0$

Tomamos el máximo de esas longitudes y denotémosla como L. La matriz A^L es tal que tiene todas sus entradas positivas. Apliquemos X a la matriz A^L. Entonces tenemos que

$$A^L X = 0$$

donde la entrada k-ésima es

$$\sum_{j_1} \sum_{j_2} \sum \ldots \sum_{j_{L-1}} a_{k j_1} a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_{L-1} i} X_i = 0$$

Como $\sum \sum \ldots \sum a_{k j_1} a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_{L-1} i} > 0$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

Y como X es mayor o igual que cero se tiene que

$X_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Q.E.D

Definición. Sea A una matriz cuadrada de nxn y X un vector columna tal que $AX = \alpha X$ en donde α es un escalar, Entonces se dice que X es un vector propio de la matriz A con valor propio α.

Lema 2. Sea A una matriz cuadrada, conectada, no negativa. Entonces existe un número positivo L tal que $AX = LX$, se cumple con $X \geq 0$.

Demostración. Sea $S_n = \{X \in R \mid X \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} X_i = 1\}$

Si $X \in S_n$, entonces $AX \geq 0$; ya que si $AX = 0$ por el lema 1 (A conectada, no negativa y $X \geq 0$) tenemos que $X = 0$ lo cual no es posible, ya que $X \in S_n$. $AX < 0$ nunca puede ocurrir, porque $A \geq 0$ y $X \geq 0$.

Sea T transformación lineal tal que

$T: S_n \longrightarrow S_n$

$T(X) = (\Phi \circ A)(X)$ donde

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma a_{1i} X_i \\ \cdot \\ \Sigma a_{ni} X_i \end{bmatrix}$$

y

$$\Phi(Y) = \begin{bmatrix} (y_1 / \sum_{i=1}^{n} y_i) \\ \dots \\ (y_n / \sum_{i=1}^{n} y_i) \end{bmatrix}$$

En efecto, todo elemento de Sn es enviado a Sn

$$T(x) = \emptyset(AX) = \emptyset \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} X_i \\ \cdot \quad \cdot \cdot \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^{n} a_{1i} / \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} X_i) \\ \cdot \\ (\sum_{i=1}^{n} a_{ni} / \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} X_i) \end{bmatrix}$$

Obsérvese que

$$(\sum_{i=1}^{n} a_{1i} X_i / \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} X_i) + \dots + (\sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i / \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} X_i) = 1$$

los cocientes anteriores tienen sentido. Como $AX \geq 0$ existe j tal que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} X_i$$

y por tanto

$\sum\sum a_{ij}X_j > 0$

T envía al primer ortante de R^n en S_n, en particular envía a S_n en S_n.

T es composición de funciones lineales continúas: A es continúa y $\bar{g}$ es continúa, por tanto p es continúa, en particular mapea a S_n de manera continua en S_n.

T es sobre: T es composición de transformaciones lineales inyectivas, en consecuencia T es inyectiva, pero la inyectividad en este caso implica la sobreyectividad.

Por otro lado S_n es compacto y convexo.

Como T es una función lineal continúa y sobre, definida sobre un conjunto compacto y convexo, entonces T tiene un punto fijo i.e. existe $X^* \in S_n$ tal que $T(X^*) = X^*$.

Pero observemos que

$$T(X') = \begin{bmatrix} (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}X_j / \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j) \\ \\ (\sum_{j=1}^{n} a_{nj}X_j / \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j) \end{bmatrix} = (1/\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j) \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}X_j \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}X_j \end{bmatrix}$$

$$= (1/\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j)AX'$$

Si hacemos $L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j$ tenemos que

$$AX = LX$$

Como $X \in S_n$ se tiene que $X \geq 0$, y es claro que $L > 0$. Q.U.D.

Lema 3. Sea A matriz cuadrada, conectada, no negativa. Supongamos que X y L son los del Lema 2. Entonces $X > 0$.

Demostración. En el lema anterior teníamos que

$$AX = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j)X$$

o escrito en forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j\right) \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix}$$

En un k arbitrario entre cero y n, tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}X_i = 0$$

y como $A > 0$ y $X \geq 0$, tenemos que

$a_{ki}x_i = 0$ para $i = 1,\ldots,n$

el renglón k-ésimo de A es diferente de cero
por tanto $X_i = 0$ para $i = 1,\ldots,n$

pero en el lema 2 habíamos probado que $X \geq 0$ por tanto tenemos una contradicción.

Es decir, si suponemos que tenemos una entrada de $X = 0$, el vector X' será el vector 0. QED

Lema 4. Sea A matriz de nxn, conectada no negativa.

Supongamos que $AX = LX$ con $L > 0$ y X positivo entonces L y X son únicos.

Demostración.

Unicidad de L.

Sea $B = A'$ donde A^t es la transpuesta de A. Si A es conectada, B lo es, por tanto existen τ y Y tales que

$BY = \tau Y$

transponiendo tenemos

$Y'A = \tau Y'X$

de aqui tenemos

$LY'X' = \tau Y'X$

por tanto, $(Y'X > 0)$

$L = r$

con esto tenemos las ecuaciones

$AX' = LX'$ y $A^tY = LY$

Supongamos que existe α número real tal que

$AX' = \alpha X'$

probaremos que $\alpha = L$

transponiendo la última ecuación

$X'^t A^t = \alpha X'^t$

multiplicando por Y de ambos lados tenemos

$X'^t A^t Y = \alpha X'^t Y$

de donde

$L X'^t Y = \alpha X'^t Y$

por tanto

$L = \alpha$

de donde concluimos la unicidad de L
Unicidad de X'

Supongamos que existe $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n' \end{bmatrix} > 0$ y tal que

$AX = LX$

n } Sea $S = \{ s = 1,\dots,n \mid (X_s/X_s') \leq (X_j/X_j')$ $j = 1,\dots,$

para $s \in S$ llamemos

$t = (X_s/X_s')$

para $s \in S$ tenemos $(x_s/X_s') \leq (X_j/X_j')$ para $j =$
$1,\dots,n$

multiplicando por X_j' de ambos lados obtenemos

$(X_s/X_s')X_j' \le X_j$ para $j = 1,\ldots,n$

por tanto $tX' \le X$

es decir $X-tX' \ge 0$

si $s \in S$ las entradas del vector $X-tX'$ son cero

apliquemos A a $X-tX'$

$A(X-tX') = AX-tAX' = LX-tLX' = L(X-tX')$

con lo cual $X-tX'$ es vector propio de A con valor propio L. En el lema 3, hemos probado que si tenemos una matriz A cuadrada, no negativa, conectada, que tenga un vector propio con alguna entrada nula, entonces A manda a ese vector en el vector 0.

$A(X-tX') = 0$

por tanto $L(X-tX') = 0$

por tanto $X = tX'$

i.e. el vector propio es único salvo múltiplos.
QED

Los anteriores resultados se pueden resumir

Teorema 1. Sea A matriz cuadrada, no negativa y conectada. Entonces existe un único vector $X>0$ y un único escalar $L>0$ tal que satisfacen la ecuación

$AX = LX$

la demostración se desprende de los lemas 2, 3 y 4.
QED

Definición. Sea $A \ge 0$ matriz cuadrada, conectada. El valor único L que se obtiene del teorema 1 será llamado el valor propio dominante de A y se denotará como $L(A)$. El vector X único que afirma el mismo teorema, será llamado el vector propio dominante de A.

Corolario. A y A^t tienen el mismo valor propio dominante.

Lema 5. Sea $A \geq 0$ matriz cuadrada, conectada

(i) Si existe $Z \geq 0$ tal que $AZ \geq kZ$ p.a. k entonces $L(A) > k$

(ii) Si existe $Z \geq 0$ tal que $AZ \leq kZ$ p.a. k entonces $L(A) < k$

(iii) Si existe $Z \geq 0$ tal que $AZ \geq kZ$ p.a. k entonces $L(A) \geq k$

(iv) Si existe $z \geq 0$ tal que $AZ \leq kZ$ p.a. k entonces $L(A) \leq k$

Demostración.

(i) Sea $X > 0$ t.q. $AX = L(A)X$ se cumple y tomemos $Y > 0$ tal que $A^tY = L(A)Y$

se ha supuesto que

$AZ \geq kZ$ multiplicando por Y^t de ambos lados

$Y^tAZ > kY^tZ$

por tanto $Z^tA^tY > kZ^tY$
utilizando que

$A^tY = L(A)Y$

$Z^tL(A)Y > kZ^tY$

por tanto $L(A) > k$.

(ii) Es análogo a (i), sólo se remplaza $>$ por $<$.

(iii) Partamos de $AZ \geq kZ$ multiplicando por Y^t de ambos lados

$Y^tAZ \geq kY^tZ$

transponiendo

$Z^tA^tY \geq kZ^tY$

nuevamente utilizando $A^tY = L(A)Y$

$L(A)Z^tY \geq kZ^tY$

por tanto

$L(A) > k$

(iv) La prueba es exactamente igual que (iii) únicamente cambiando la desigualdad correspondiente QED

Lema 6. Sea $A \geq 0$ conectada

Si $AZ = \beta Z$ p.a. $Z \neq 0$ entonces $|\beta| < L(A)$

Demostración. Como $AZ = \beta Z$ tenemos

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = \beta Z_i \quad i = 1, \ldots, n$$

tomando el valor absoluto de ambos lados

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j\right| = |\beta Z_i| \quad i = 1, \ldots, n$$

aplicando la desigualdad del triángulo y que $A \geq 0$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j\right| < \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} z_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |z_j|$$

por tanto tenemos

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} |z_j| > |\beta|\,|z_i| \text{ para } i = 1, \ldots, n$$

y esto puede ser escrito en forma matricial

$AY \geq |\beta| Y$

donde $Y^t = (y_1, \ldots, y_n) = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$

el vector $Y \geq 0$ por ser $Z \neq 0$. Aplicando el lema 5 (iii) tenemos que

$L(A) \geq |\beta|$ QED

Es decir $L(A)$ es el valor propio positivo más grande que tiene A

Teorema 2.

Sea $L : \{A \in M_{n \times n} \mid A \geq 0 \text{ irreducible}\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$A \longrightarrow L(A)$

es una función estrictamente creciente

Demostración. Sean A y B matrices tales que A y B son conectadas y $A \geq B \geq 0$. Probaremos que $L(A) > L(B)$

como $A > 0$ conectada entonces existe $X > 0$ y $L(A) > 0$ tal que se cumple la ecuación

$AX = L(A)X$

suponiendo que $A \geq B$ multiplicando por X de ambos lados

$AX > BX$ por tanto tenemos $L(A)X > BX$

aplicando 5 (ii) concluimos que $L(A) > L(B)$ QED

Teorema 3. La función dominante es continua

Demostración. Sea $A > 0$ conectada fija y X y $L(A)$ tales que $AX = L(A)X$. Aqui $L(A)$ y X son positivos.

Probaremos que para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 \leq |A-B| < \delta$ entonces $|L(A)-L(B)| < \epsilon$, en donde $B > 0$ conectada

Sea $\epsilon > 0$

$M = \max(\sum_{i=1}^{n} x_i)/x_i$, x_i es la entrada i-ésima de X

proponemos a $\delta = \epsilon/M$

denotaremos a $J = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}$ matriz cuadrada donde en cada entrada está la unidad.

Sólo basta probar que si $|A-B| < \delta$ entonces $|L(A)-L(B)| < \epsilon$

Si $|A-B| < \delta$ entonces $A-\delta J < B < A+\delta J$ multiplicando por X la última expresión

$AX-\delta JX < BX < AX+\delta JX$

lo cual es equivalente a

$$L(A)X - \delta \begin{bmatrix} \sum x_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum x_i \end{bmatrix} \leq BX \leq L(A)X + \delta \begin{bmatrix} \sum x_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum x_i \end{bmatrix}$$

multiplicando por 1 al vector renglón de J_i tenemos

$$L(A)X - \delta \begin{bmatrix} ((\sum x_i)/x_1)x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ ((\sum x_i)/x_n)x_n \end{bmatrix} \leq BX \leq L(A)X + \delta \begin{bmatrix} ((\sum x_i)/x_1)x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ ((\sum x_i)/x_n)x_n \end{bmatrix}$$

y por la expresión dada para M tenemos

$L(A)X - \epsilon X \leq BX \leq L(A)X + \epsilon X.$

o lo que es lo mismo

$(L(A) - \epsilon)X \leq BX \leq (L(A) + \epsilon)X$

pero aplicando el lema 5 (i) y (ii) tenemos

$L(A) - \epsilon \leq L(B) \leq L(A) + \epsilon$

por tanto $|L(A) - L(B)| \leq \epsilon$ QED

Los resultados anterirres servirán para decir cuando existe un P y un r positivos para que sean solución de la ecuación

$P = AP + rBP$

bajo ciertas condiciones sobre A y B.

Teorema 4. Supongamos $A \geq 0$ conectada y que tenemos la ecuación

$P = AP + rBP \qquad (1)$

Si existe $P > 0$ y $r \geq 0$ que cumplan (1) si y sólo si $L(A) < 1$

Demostración. ==>) Supongamos que existe $P > 0$ y $r > 0$ tal que

$P = AP + rBP$

se satisface, entonces tenemos $L(A+rB) = 1$

por otro lado sabemos

$A \leq A + rB$ para $r > 0$

como la función dominante es creciente

$L(A) \leq L(A+rB)$

por lo que concluimos

$L(A) \leq 1$

$\Longleftarrow$) Supongamos que $L(A) \leq 1$

observemos que la función

$L(A+rB)$

toma valores menores o iguales a 1 y no es acotada superiormente

$L(A+rB) \leq 1$ si $r=0$

y $L(A+rB) \longrightarrow \infty$ cuando $r \longrightarrow \infty$

para verificar esto veamos lo siguiente

$rB \leq A + rB$ para $r > 0$

por lo tanto $L(rB) \leq L(A+rB)$

por otro lado $rL(B) \leq L(rB)$

por tanto $rL(B) \leq L(A+rB)$

si $r \longrightarrow \infty$ entonces $rL(B) \longrightarrow \infty$

por tanto $L(A+rB) \longrightarrow \infty$ cuando $r \longrightarrow \infty$

como la función L es continua y creciente, entonces existe

$r_o > 0$

para el cual

$L(A+rB) = 1$

llamemos P al vector propio asociado a r_o

por lo que tenemos $(A+r_oB)P = P$

sólo nos falta decir porqué $P > 0$

como $A \geq 0$ es conectada, entonces

$A + rB$ es conectada para $r \geq 0$

para el caso en que $r = r_0$ se obtiene

$A+r_0B$ conectada

por tanto existe

$P_0 > 0$ tal que

$(A+rB)P_0 = L(A+rB)P_0$

pero como $L(A+rB) = 1$ y por el teorema de la unicidad

$(A+r_0B)P_0 = P_0$

por tanto, existe un $P_0 > 0$ y $r_0 \geq 0$ para el cual la ecuación

$AP_0 + r_0BP_0 = P_0$

se cumple. QED

Corolario. La cantidad r del teorema 4 es positiva si y sólo si $L(A) < 1$.

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos $r>0$ y tal que se cumple

$(A+rB)P=P$ con $P>0$

entonces $L(A+rB) = 1$

y como $A < A + rB$

tenemos entonces $L(A) < 1$

$\Longleftarrow$) La función

$L(A+rB)$

es menor que 1 para $r = 0$ y no es acotada cuando $r \longrightarrow \infty$.

Por tanto existe un $r_0 > 0$ para el cual

$L(A+r_0B) = 1$

ya que la función dominante es continua.

Aqui existe un $P_0 > 0$ para el cual

$(A+rB)P_0 = P_0$ con lo que hemos acabado. QED

MATRICES PRODUCTIVAS

Definición 1: A_{nxn}, $A \geqq \bar{0}$ es productiva si y sólo si para toda $C \geqq \bar{0}$, existe $\bar{x} \geqq \bar{0}$ tal que $(I-A)\bar{x} = C$.

Teorema 1: A_{nxn}, $A \geqq 0$. A es productiva si y sólo si $(I-A)^{-1}$ existe y se tiene que $(I-A)^{-1} \geqq 0$.

Demostración:

=>) Si A es productiva, por la definicion 1, para $i=1,2,\ldots,m$ existe $x^i \geqq 0$ tal que

$$(I-A)x^i = e_i$$

Hagamos $B = [x^1, x^2, \ldots, x^n]$, entonces $B \geqq 0$ y ocurre que

$$(I-A)B = I$$

luego, $B = (I-A)^{-1}$ y además $B \geqq 0$.

<=) Si $C \gg \bar{0}$ y hacemos $x = (I-A)^{-1}C$, tendremos $x \geqq 0$ y $(I-A)x = C \gg \bar{0}$.

Teorema 2: $A_{nxn} \geqq 0$ es productiva si y sólo si $I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots$ converge.

Demostración:

=>) Sea $A \geqq 0$ productiva.

Definamos $T_n = I + A + A^2 + \ldots + A^n$

Entonces $(I-A)T_n = I - A^{n+1} \leqq I$

Como $(I-A)^{-1} \geqq 0$, tenemos que $T_n \leqq (I-A)^{-1}$.

Puesto que T_n es una sucesión creciente y acotada superiormente, entonces T_n converge a un límite T.

.: $T \leqq (I-A)^{-1}$

Además $\lim_{n \to \infty} A^n \to 0$

Pero, dado que $(I-A)T_n = I - A^{n+1}$

Tenemos que $(I-A)T = I$, es decir, $T = (I-A)^{-1}$

$\Leftarrow$) Si $I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots$ converge, entonces $(I-A)^{-1}$ existe y, además

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots$$

luego $(I-A)^{-1} \geq 0$.

Por el teorema 1, A es productiva.

Corolario: Si $A \geqslant \bar{0}$, es productiva, entonces
$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots$$

Teorema 3: Si $A \geqslant 0$, productiva y conectada, entonces $(I-A)^{-1} > 0$.

Demostración:

Como A es productiva, tenemos que $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ y puesto que A es conectada, se desprende que para toda (i,j) existe r tal que el término (i,j) de A^r es positivo.

$$\therefore \ (I-A)^{-1} > 0.$$

VECTORES Y VALORES PROPIOS.

Definición: Sea A una matriz de $n \times n$. Un escalar es llamado valor propio de A si existe $x \in R^n$, con $x \neq \bar{0}$ y tal que $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

El vector $\bar{x}$ es llamado vector propio o vector característico asociado a λ.

La ecuación $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, puede ser escrita en la forma

$$(A - \lambda I)\bar{x} = 0 \qquad (1)$$

Entonces, λ es un valor propio de A si y sólo si, (1) tiene una solución no trivial. En consecuencia $(A - \lambda I)$ es una matriz singular ó equivalentemente:

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad (2)$$

Si el determinante de (2) es desarrollado obtendremos un polinomio de grado n, en la variable λ.

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

Este polinomio es llamado el **polinomio característico** y la ecuación (2) es llamada la **ecuación característica** para la matriz A. Las raíces del polinomio característico son los valores propios de A. Si contamos las raíces de acuerdo a su multiplicidad, el polinomio característico tiene exactamente n raíces. Entonces A tendrá n valores propios, algunos se pueden repetir y algunos pueden ser números complejos.

Ahora estableceremos un número de condiciones equivalentes para que λ sea un valor propio de A.

Sea A una matriz de nxn y λ un escalar. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) λ es un valor propio de A.

b) $(A - \lambda I)\bar{x} = 0$ tiene una solución no trivial.

c) $(A - \lambda I)$ es singular.

d) $|A - \lambda I| = 0$.

Propiedades:

a) Si $\bar{x}$ es un vector propio de A, entonces para cualquier escalar c no nulo, $c\bar{x}$ también es un vector propio de A con el mismo valor propio.

$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$.
$A(c\bar{x}) = cA\bar{x} = c(\lambda\bar{x}) = \lambda(cx)$.

b) Si x_1 y x_2 son valores propios de A asociados a λ, entonces $(x_1 + x_2)$ es un valor propio asociado a λ.

Tenemos $A\bar{x}_1 = \lambda\bar{x}_1$; $A\bar{x}_2 = \lambda\bar{x}_2$,

entonces $A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = A\bar{x}_1 + A\bar{x}_2 = \lambda\bar{x}_1 + \lambda\bar{x}_2 = \lambda(x_1 + x_2)$.

c) Si λ es valor propio de A, λ^n lo es de A^n. Los vectores propios coinciden.

Demostración: (por inducción)

$n = 1 \qquad A\bar{x} = \lambda\bar{x}$

suponemos para n: $A^n\bar{x} = \lambda^n\bar{x}$

P.D. para n+1
$A^{n+1}\bar{x} = A(A^n\bar{x}) = A(\lambda^n\bar{x}) = \lambda^n(A\bar{x}) = \lambda^n(\lambda\bar{x}) = \lambda^{n+1}\bar{x}.$

$$\therefore\ A^{n+1}\bar{x} = \lambda^{n+1}\bar{x}.$$

d) Si λ es valor propio de A, $(1-\lambda)$ lo es de $(I-A)$.

Demostración: $A\bar{x} = \lambda\bar{x} \Rightarrow \bar{x} - A\bar{x} = \bar{x} - \lambda\bar{x}$
$$(I-A)\bar{x} = (1-\lambda)\bar{x}.$$

e) Si λ es valor propio de A y es productiva, entonces $1/(1-\lambda)$ es valor propio de $(I-A)^{-1}$. Los vectores propios coinciden.

Demostración:
$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$$
$$(I-A)\bar{x} = (1-\lambda)\bar{x}$$
$$\frac{\bar{x}}{1-\lambda} = (I-A)^{-1}x.$$

f) Si λ valor propio de A. El valor propio de αA es $\alpha\lambda$. Los vectores propios coinciden.

Demostración:
$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$$
$$\alpha A\bar{x} = \alpha(\lambda\bar{x}) = (\alpha\lambda)\bar{x}$$

g) Si λ valor propio de A. Si $B = (A-\alpha I)$ entonces el valor propio de B es $(\lambda - \alpha$. Los vectores propios coinciden.

Demostración: $(A-\alpha I)\bar{x} = A\bar{x} - \alpha\bar{x} = \lambda x - \alpha\bar{x} = (\lambda - \alpha)\bar{x}.$

DIAGONALIZACION.

En esta sección consideraremos el problema de factorizar una matriz $A_{n\times n}$, como un producto de la forma SDS^{-1} donde S es diagonal. Daremos una condición necesaria y suficiente para la existencia de tal factorización. Empezaremos por demostrar que vectores propios asociados a distintos valores propios son linealmente independientes.

Teorema: Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, son valores propios distintos de la matriz A, con los vectores propios correspondientes $x_1, x_2, \ldots, x_k$, entonces $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son linealmente independientes.

Demostración:

Sea r la dimensión del subespacio de R^n, generado por $x_1, x_2, \ldots, x_k$ y supongamos que $r < k$.

Podemos suponer que $x_1, x_2, \ldots, x_r$ son linealmente independientes. Sin embargo, $x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}$, son linealmente dependientes, entonces existen escalares no todos cero tales que:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_r x_r + c_{r+1} x_{r+1} = 0 \quad (1)$$

Note que $c_{r+1} \neq 0$; de otra forma $x_1, x_2, \ldots, x_r$ serían linealmente dependientes. Tenemos que $c_{r+1} x_{r+1} \neq 0$ y aquí $c_1, c_2, \ldots, c_r$ no pueden ser todos cero. Multiplicamos la ecuación (1) por A

$$c_1 A x_1 + c_2 A x_2 + \ldots + c_r A x_r + c_{r+1} A x_{r+1} = 0$$

o bien

$$c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + c_r \lambda_r x_r + c_{r+1} \lambda_{r+1} x_{r+1} = 0 \quad (2)$$

Si a (2) le restamos $\lambda_{r+1}(1)$, tendremos:

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) x_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1}) x_2 + \ldots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) x_r = 0$$

Esto contradice la independencia de $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

$$\therefore r = k$$

Definición: Una matriz $A_{n \times n}$ será llamada **diagonalizable**, si existe una matriz no singular S y una matriz diagonal D tal que

$$S^{-1} A S = D$$

Nosotros diremos que S diagonaliza A.

Definición: A y B matrices de $n \times n$. A es **semejante** a B si existe una matriz R invertible tal que

$$B = R^{-1} A R.$$

Teorema: Una matriz $A_{n \times n}$ es diagonalizable si y sólo si A tiene n vectores propios linealmente independientes.

Demostración:

Supongamos que A tiene n vectores propios linealmente independientes $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$. Sea λ_i valores propios de A correspondientes a x_i para cada i (algunas λ_i pueden ser iguales). Sea S la matriz donde el j-ésimo vector columna es x_j para $j = 1,2,\ldots,n$. Se sigue que $A\bar{x}_j = \lambda_j\bar{x}_j$ es el j-ésimo vector columna de AS. Entonces

$$
\begin{aligned}
AS &= (A\bar{x}_1, A\bar{x}_2, \ldots, A\bar{x}_n) \\
&= (\lambda_1\bar{x}_1, \lambda_2\bar{x}_2, \ldots, \lambda_n\bar{x}_n) \\
&= (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & & \lambda_n \end{vmatrix} \\
&= SD
\end{aligned}
$$

Como S tiene n vectores columnas linealmente independientes, entonces S es no singular

$$D = S^{-1}AS$$

Inversamente, supongamos que A es diagonalizable. Entonces existe una matriz no singular S tal que AS = SD. Si $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ son los vectores columna de S, entonces

$$A\bar{x}_j = \lambda_j x_j \qquad (\lambda_j = d_{jj})$$

Para cada j. Entonces, λ_j es un valor propio de A, para cada j, y x_j es un vector propio asociado a λ_j. Así, los vectores columna de S son linealmente independientes, ellos se sigue de que A tiene n vectores propios linealmente independientes.

OBSERVACIONES:

1. Si A es diagonalizable, entonces los vectores columna de la matriz diagonalizadora S son los vectores propios de A y los elementos diagonales de D son los valores propios correspondientes de A.

2. Si A tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.

3. La matriz diagonalizadora S no es única. Reordenando las columnas de una matriz diagonalizadora S o multiplicando a S por un escalar diferente de cero producimos una nueva matriz diagonalizadora.

4. Si A es diagonalizable, entonces A puede ser factorizada como un producto SDS^{-1}.

Se sigue de la observación (4) que

$$A^2 = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) = SD^2S^{-1}$$

en general

$$A^k = SD^kS^{-1}$$

$$= S\begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & & \\ & \lambda_{2k} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \lambda_2^k \end{bmatrix}S^{-1}$$

Teorema: Si A y B son semejantes, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico. Tenemos que

$$B = R^{-1}AR.$$

Demostración:

$$|B - \lambda I| = |R^{-1}AS - \lambda I|$$

$$= |S^{-1}(A - \lambda I)S|$$

$$= |S^{-1}||A - \lambda I||S|$$

$$= |S^{-1}||S||A - \lambda I|$$

$$= |S^{-1}S||A - \lambda I|$$

$$= |A - \lambda I|.$$

Bibliografía

(1) Schwartz T. Jacob. Lectures on the Mathematical in Analytical Economics, Gordon and Breach, New York. E.U.A 1964.

(2). Keynes, John Maynard, Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero, Fondo de Cultura Económica, México. 1986

(3) Dillard Dudley, La Teoría económica de John Maynard Keynes, Aguilar, España 1980.

(4) Molina Molina Ernesto, La "Teoría General" de Keynes Editorial de Ciencias Sociales, La Habana, 1979.

(5) Besada Ramos Benito, estudio crítico de "teoría general" de Keynes, Editorial de Ciencias Sociales, La Habana 1985

(6) Hansen H. Alvin, Guía de Keynes, Fondo de Cultura Económica, México 1978.

(7) Prebisch Raúl,. Introducción a Keynes, Fondo de Cultura Económica, México, 1977.

(8) A. Estey J. TRATADO, SOBRE LOS CICLOS ECONOMICOS, Fondo de Cultura Económica, México, 1983

(9) Gamble Andrew, Pe Walton Paul, EL capitalismo en crisis. La inflación y el Edo, Siglo veintiuno, México 1983

(10) F. Harrod R. La vida de John Maynard Keynes, Fondo de cultura económico, México, 1985.

(11) Vegara María José, Economía Política y modelos multisectoriales Biblioteca Tecnos de Ciencias económicas, España 1978.

(12) Steven J Leon. Linear Algebra with applications

(13) Lang Serge, Algebra lineal. Addison-Wesley Iberoamericana E.U.A. 1986

(14) Noble Ben. James W. Daniel Applied linear E.U.A 1985.

(15) Grossman F. Stanley, Algebra lineal, Fondo de Cultura Iberoamericana, 1986.