



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**EQUILIBRIO ENTRE MATERIA Y RADIACIÓN EN LA
ELECTRODINÁMICA ESTOCÁSTICA**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

REGULES RUÍZ-FUNES, SERGIO DE

ASESOR: CETTO, ANA MARÍA
PEÑA, LUIS DE LA

Ciudad Universitaria, México, D.F

1989



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

f. Equilibrio entre materia y radiación en la electrodinámica estocástica.

Sergio de Regules Ruiz-Funes.

29
41

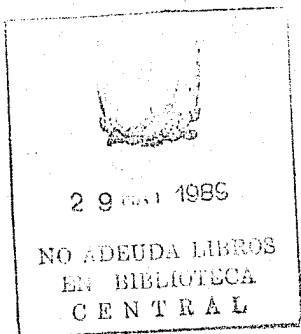
CAPITULO I

ANTECEDENTES HISTORICOS

FISICO

Autor: Regules Ruiz-Funes Sergio de

1989



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1. Introducción.

La mecánica cuántica en su forma primitiva surgió a principios de este siglo como respuesta al fracaso de la física clásica en su intento por explicar algunos fenómenos relacionados con la estructura microscópica de la materia.

Hasta 1925 esta forma incipiente de la mecánica cuántica estaba constituida por un conjunto de reglas *ad hoc* que, sin embargo, habían logrado explicar satisfactoriamente varios aspectos de la emisión y absorción de radiación por los átomos, el espectro del cuerpo negro, el efecto Compton y el efecto fotoeléctrico, entre otras cosas. En este año aparecieron dos trabajos, uno de Heisenberg y otro de él mismo con Born y Jordan, en los que se presentó la mecánica cuántica matricial, que fue la primera teoría en incluir estas reglas empíricas en una estructura lógica y formal.

Un año después, Erwin Schrödinger publicó una versión alternativa, inspirada en la hipótesis de de Broglie, en la que presentaba la mecánica cuántica en términos de una ecuación de onda. Poco después demostró la equivalencia formal entre ambas teorías, pero debido a que la mecánica ondulatoria ofrecía una visión menos abstracta y una mayor simplicidad matemática gozó desde el principio de una mayor popularidad. Schrödinger esperaba que, de acuerdo con el cuadro de de Broglie, la amplitud ψ involucrada en la ecuación de onda describiera oscilaciones reales

en el espacio físico¹. Para él, el fenómeno ondulatorio no era más que la estructura interna de la partícula, que dejaba de ser puntual para convertirse en un objeto extendido, en principio, en todo el espacio. Sin embargo, muy pronto fue claro que ψ no podía representar una onda física, ya que, entre otras cosas, la función de onda asociada a un sistema de N partículas corresponde a oscilaciones en $3N$ dimensiones. La función ψ requería, pues, de otra interpretación.

Esta nueva interpretación apareció poco después en un trabajo de Max Born titulado "Sobre la mecánica cuántica de los procesos de colisión". Según Born la función ψ no representa al sistema físico ni a ninguna de sus características, sino que, más bien, permite calcular la probabilidad de encontrar a la partícula en un elemento de volumen δv por medio de la combinación $\psi^* \delta v$. Born adoptó una interpretación subjetiva del concepto de probabilidad, hecho que resultó crucial en el desarrollo de los fundamentos filosóficos de la nueva teoría. De acuerdo con esta interpretación, la probabilidad mide el grado de conocimiento que un observador tiene acerca de cierto sistema físico, lo que está en contraposición con la interpretación frecuentista de la probabilidad, común en las otras aplicaciones físicas y científicas.

Por otro lado, como teoría probabilista, la mecánica cuántica

¹M. Jammer, "The Philosophy of Quantum Mechanics", John Wiley and Sons, New York; 1974, p. 32.

no permite calcular trayectorias para las partículas, sino solamente la probabilidad de que éstas se encuentren en una posición dada. Entonces, si se asume que la mecánica cuántica describe exhaustivamente al sistema y se adopta una visión subjetiva de la probabilidad, un observador no debería tener acceso al conocimiento de la trayectoria que sigue la partícula.

A raíz de la visita de Schrödinger a Copenhague en septiembre de 1926, Bohr y Heisenberg sintieron la necesidad de esclarecer la relación entre la mecánica cuántica, que interpretaban subjetivamente, y el experimento. En particular, trataron de reconciliar la teoría con el hecho de que se pudiesen observar trayectorias en la cámara de Wilson.

En febrero de 1927, Heisenberg encontró la solución a este problema. Podía reconciliarse el experimento con el hecho de que el formalismo matemático no permitiera definir trayectorias precisas si se notaba que lo que se observa en la cámara de Wilson no es la trayectoria de la partícula, sino una cadena de gotas de agua, cuya extensión permite determinar únicamente una sucesión discreta de posiciones indefinidas. Desarrollando esta idea, Heisenberg obtuvo sus relaciones de indeterminación, que fueron publicadas en un artículo donde las interpretaba desde un punto de vista operacionalista. Para él no tenía sentido hablar de una propiedad física si no se concebía un experimento que permitiese medirla (de hecho, la "necesidad" de reducir la teoría a términos observables había sido ya argumentada por Heisenberg desde su primer trabajo sobre mecánica matricial). En el caso particular de las relaciones de indeterminación, lo anterior significaba que no

era posible definir simultáneamente la posición y la cantidad de movimiento de una partícula (o cualquier pareja de variables canónicamente conjugadas) puesto que no existía un dispositivo experimental que permitiese medirlas a la vez. Según Heisenberg "esta indeterminación es la razón esencial de la aparición de relaciones estadísticas en la mecánica cuántica"². La interpretación de las desigualdades de Heisenberg es uno de los puntos más controvertidos de la mecánica cuántica.

En octubre del mismo año se llevó a cabo en Bruselas el V Congreso Solvay, en el que se trataría el tema "Electrones y Fotones", y que contaría con la participación de los más grandes físicos de la época. Las discusiones se centraron en el significado de la teoría cuántica y, en particular, de las desigualdades de Heisenberg.

En su exposición, Heisenberg y Born presentaron la mecánica matricial y su interpretación probabilista de la función de onda. Al final de su intervención afirmaron que la mecánica cuántica era una teoría completa y que sus fundamentos ya no eran susceptibles de ser modificados.

Por otro lado, Bohr expuso sus ideas sobre la complementariedad que ya había presentado poco antes en una reunión en Como en septiembre de 1927. En esta ocasión Bohr estableció las bases de la llamada interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica. Según Bohr, la propia naturaleza de la

² *Ibid.*, p. 50.

teoría cuántica nos obliga a considerar la descripción espacio-temporal y la descripción causal³ como complementarias y excluyentes.

Einstein, por su parte, hizo notar que el carácter probabilístico de la teoría permitía interpretarla de dos formas distintas: 1) La función ψ describe completamente a un sistema individual; 2) ψ representa un ensemble estadístico de sistemas⁴. La primera interpretación, observó Einstein, implicaba que, mientras la partícula no fuese observada, debería considerarse como potencialmente presente en todo el espacio. Al ser detectada la partícula, el paquete de ondas que la describe debería colapsarse instantáneamente, lo que estaba en contradicción con la teoría especial de la relatividad. Por otro lado, la segunda manera de interpretar la función ψ permitía evitar esta dificultad. En efecto, en este contexto, $\psi \psi^* \delta u$ representa la probabilidad de que algún miembro del ensemble se encuentre en el elemento de volumen δu . De esta forma la localización de un individuo no altera la distribución de probabilidades del ensemble, por lo que no requiere de la "reducción del paquete de

³ En el lenguaje de Bohr 'descripción causal' se refiere a una descripción en términos del intercambio de energía y momento.

⁴ Un ensemble se define como un conjunto, en principio infinito, de copias mentales de un sistema, tales que el valor de algunas de las variables que lo caracterizan es el mismo en todas ellas. La constricción de estos valores define lo que se conoce como 'macroestado' y la libertad de selección del resto de variables realiza todos los posibles 'microestados' compatibles con él.

ondas".

A pesar de las objeciones de Einstein, al finalizar el congreso prácticamente todos los asistentes se habían adherido a la interpretación de Bohr y Heisenberg, que se convirtió así en la interpretación oficial u ortodoxa. Incluso de Broglie, que había presentado su propia interpretación causal (la teoría de las ondas piloto), se apegó a la visión ortodoxa como resultado de la dura crítica que recibió por parte de Pauli.

Einstein, sin embargo, nunca aceptó el punto de vista de Bohr. El debate entre ellos continuó hasta la muerte de Einstein en 1955.

2. La interpretación de Copenhague.

El formalismo de la mecánica cuántica es hoy universalmente aceptado. De hecho, la teoría cuántica es uno de los pilares de la física contemporánea. Sin embargo, a sesenta años de su creación, aun no se ha logrado el consenso en cuanto a la interpretación a que deben someterse los conceptos básicos de esta teoría.

En efecto, existe un gran número de interpretaciones consistentes con el formalismo y con el experimento, que se basan en diferentes posiciones filosóficas, algunas de las cuales se

contradicción mutuamente¹. Ante la diversidad de posibilidades es conveniente adoptar una postura crítica antes que adherirse dogmáticamente a una sola de ellas.

Actualmente la interpretación de Copenhague es, con mucho, la más difundida. Las posiciones filosóficas que han sido aducidas para sustentarla abarcan desde el subjetivismo estricto e incluso el solipsismo hasta el materialismo dialéctico, pasando por el idealismo puro, el neokantianismo y el positivismo. La corriente predominante está basada en el concepto de "complementariedad" que se relaciona con la discontinuidad de los procesos cuánticos y en la doctrina positivista, según la cual la finalidad de la física no es la comprensión del mundo objetivo, sino exclusivamente la descripción de fenómenos observables². La escuela ortodoxa acepta, en particular, una visión instrumentalista del conocimiento científico, que considera a las teorías únicamente como formalismos matemáticos útiles en la predicción de resultados experimentales. Según este punto de vista, la tarea del físico consiste sólo en dominar el formalismo y aprender a aplicarlo, en contraposición con el realismo que busca, más bien, la comprensión de la naturaleza. De hecho, en estas diferencias reside una parte

¹Una relación breve (y no exhaustiva) que permite ver la diversidad de interpretaciones que se han propuesto puede encontrarse en el libro de Jammer 'The Philosophy of Quantum Mechanics'.

²M. Bunge, 'Survey of the interpretations of quantum mechanics', Am. J. Phys. 24,272; (1956).

fundamental del desacuerdo entre Einstein y Bohr (el resto está conectado con el problema del determinismo).

El instrumentalismo es muy popular entre las nuevas generaciones de físicos, que pretenden desvirtuar las discusiones filosóficas dentro de la ciencia. Pese a que esta posición puede parecer muy reciente es, de hecho, una vieja teoría filosófica. A este respecto, Karl Popper escribió: "Durante mucho tiempo la iglesia utilizó la concepción instrumentalista de la ciencia como un arma contra una ciencia naciente. 'Podréis forjar instrumentos, artefactos, pero no podréis, con la luz de vuestra sola razón, descubrir ninguno de los secretos ocultos de este mundo.'; éste es, en breve, el argumento con el que el cardenal Bellarmino se opuso a las enseñanzas de Galileo sobre el sistema copernicano, y con el que el obispo Berkeley se opuso a Newton."³ Por otro lado, el solo hecho de hacer ciencia requiere de la adopción consciente o inconsciente de alguna postura filosófica. Es ésta la que indica el tipo de preguntas que un científico hace a la naturaleza y las respuestas que considera significativas.

El concepto de complementariedad deriva de una posición positivista. Debido a la "indivisibilidad" del cuanto de acción, que produce una discontinuidad en los fenómenos cuánticos, no es posible desprestigiar la interacción entre un sistema microscópico y los instrumentos de medición. De acuerdo con Bohr, entonces, no

³K. Popper, Post Scriptum a la Lógica de la Investigación Científica, Vol. III: Teoría Cuántica y el Clima en Física, Tecnos, Madrid, 1985; p. 122.

puede atribuirse una realidad independiente ni al sistema ni al instrumento. "... todo intento de subdividir al fenómeno exigirá un cambio de dispositivo experimental que introdujera nuevas posibilidades de interacción, no controlables en principio, entre los objetos y los instrumentos de medición: es esta circunstancia la que expresa la individualidad de los efectos cuánticos típicos. En consecuencia, los resultados obtenidos en condiciones experimentales diferentes no pueden ser englobados en una sola representación, sino que deben considerarse como complementarios en el sentido de que sólo la totalidad de los fenómenos agota la información posible sobre los objetos."⁴

La idea de complementariedad se refiere, sobre todo, a la imposibilidad de llevar a cabo una descripción que sea a la vez causal y espacio-temporal de los fenómenos cuánticos. Para Bohr, las desigualdades de Heisenberg son una forma de expresar dicha imposibilidad.

3. El concepto de probabilidad.

Se mencionó antes que la interpretación del formalismo de la mecánica cuántica está estrechamente relacionada con la

⁴ N. Bohr, 'Discussions avec Einstein sur des problèmes épistémologiques de la physique atomique.', contribución a 'Albert Einstein, Philosopher Scientist', Evanston 1949; reeditado en: N. Bohr, 'Physique atomique et connaissance humaine', Gauthier-Villars, 1961, Paris, p. 87.

interpretación adoptada para la noción de probabilidad. Esta puede ser de dos tipos: subjetiva u objetiva.

El punto de vista subjetivo es aquél que interpreta la cantidad $p(A|B)$ (probabilidad de A dado B) como una medida del conocimiento que posee el observador acerca de A, dada la información B.

Dentro de las interpretaciones objetivas podemos mencionar tres:

1) Interpretación clásica. $p(A|B)$ es el cociente del número de casos favorables a los eventos A y B y el número de casos favorables al evento B. Esta interpretación sólo es válida cuando todos los casos favorables al evento B son igualmente probables.

2) Interpretación frecuentista o estadística. $p(A|B)$ es el límite de la frecuencia relativa de los sucesos A en los sucesos B cuando el número de éstos tiende a infinito.

3) Interpretación propensivista. Esta interpretación fue propuesta originalmente por K. Popper y considera a $p(A|B)$ como una medida de la propensión o tendencia que tiene el evento A de ocurrir si ha ocurrido el evento B. Para Popper la propensión es una propiedad objetiva y real de toda la situación física.

La escuela de Copenhague acepta un punto de vista subjetivo de la probabilidad. Esto se refleja en la suposición de que la función de onda describe completamente a un sistema individual. Podemos ilustrar lo anterior por medio de la paradoja de de Broglie: consideremos un electrón en el interior de una caja y supongamos que ésta es dividida en dos partes de igual volumen. De acuerdo con la escuela ortodoxa podemos considerar que el electrón

individual está completamente descrito por una función de onda. Sea A el evento "el electrón está en la caja I", entonces $\neg A$ es el evento "el electrón está en la caja II". Sea finalmente B el condicional "la caja ha sido separada en dos partes". Entonces:

$$p(A|B) = p(\neg A|B) = \frac{1}{2}$$

Supongamos ahora que un observador detecta al electrón en la caja I. Entonces, si la función de onda representa el conocimiento del observador, tendremos que aceptar que las funciones de onda en las cajas I y II se ven modificadas en el instante en que éste se percata de que el electrón está en una de ellas: la función de onda en la caja II se anula, mientras que en la caja I se reduce al estado que describe la presencia del electrón. Este fenómeno se conoce como colapso de la función de onda y es producto exclusivamente de haber adoptado una interpretación subjetiva de las probabilidades, lo que se refleja en la suposición de que la función de onda describe al sistema individual. Como dijo Heisenberg: "Es bien sabido que la reducción de los paquetes de onda siempre aparece en la teoría de Copenhague cuando se completa la transición de lo posible a lo real...", es decir, cuando "se selecciona lo real entre lo posible, selección que realiza el 'observador'...".⁵ Para Heisenberg este fenómeno es similar a un salto cuántico.

Por otro lado, en el razonamiento anterior, nada impide que

⁵ K. Popper; Op. cit., p. 97, ref. 71.

las cajas hayan estado separadas por una distancia arbitraria antes de la observación. Entonces, la medición realizada sobre una de ellas altera instantáneamente la función de onda en la otra caja, lo que constituye una violación del principio de la relatividad.

Este es uno de los problemas más graves que presenta la interpretación ortodoxa. Los partidarios de esta escuela argumentan a su favor que este tipo de acción a distancia no puede utilizarse para transmitir información a otro observador. En efecto, supongamos que dos observadores realizan el experimento anterior y cada uno observa una caja. Si el observador I detecta al electrón en su caja, produce un colapso instantáneo en la función de onda en la caja II. Sin embargo, el observador II no tiene manera de saber lo que ha ocurrido a menos que:

1) abra su propia caja, en cuyo caso se percatará de la ausencia del electrón por sus propios medios, es decir, sin necesidad de recibir información del observador I.

2) el observador I le notifique su hallazgo por algún medio de comunicación (en general, éstos suelen ser más lentos que la luz).

Parecería ser, entonces, que en ninguno de los dos casos se viola el principio de la relatividad, pero este argumento solamente es válido si se interpreta, no sólo la mecánica cuántica, sino también la relatividad especial desde la posición positivista, esto es, si se piensa que la relatividad no se refiere a la propagación de interacciones, sino a la transmisión de información entre observadores. De esta manera, lo que prohíbe

la relatividad es únicamente que la información viaja más rápido que la luz.

Los problemas anteriores no aparecen si se adopta una interpretación objetiva de la probabilidad. Consideremos de nuevo el experimento de la caja y la relación $p(A|B) = p(\sim A|B) = \frac{1}{2}$. En este caso, cuando el observador detecta el electrón en la caja I, la probabilidad $p(A|B)$ no se altera, ya que ésta sólo se refiere a la frecuencia con que se obtendrá este resultado si se repite el experimento muchas veces. El conocimiento del resultado de una realización del experimento no dice nada sobre la frecuencia. Una vez que se ha encontrado la partícula en la caja I, podría decirse que la probabilidad de encontrarla en esa caja se ha "convertido" en 1, pero esto es sólo una forma de hablar, ya que se trata en realidad de dos probabilidades diferentes: la probabilidad $p(A|B)$ de encontrar la partícula en la caja I dado que la caja original se separó en dos, y la probabilidad $p(A|A)$ de encontrar la partícula en la caja I dado que ha sido encontrada en la caja I.

Vemos, pues, que la "reducción del paquete de ondas" en este caso no es más que un cambio en el condicional de la probabilidad, es decir, en la especificación del experimento, y se convierte en el enunciado de un hecho trivial: $p(A|A) = 1$ y $p(\sim A|A) = 0$.

El razonamiento anterior resulta más claro mediante el siguiente ejemplo: se lanza una moneda al aire; la probabilidad de obtener águila o sol es $\frac{1}{2}$ en cada caso. Mientras no se conozca el resultado del experimento, se puede seguir diciendo que la probabilidad es $\frac{1}{2}$. Al observar el resultado, una probabilidad "se hace" 1 y la otra 0. En este caso no se puede considerar que la

observación haya "colapsado la función de onda", pues la moneda es un objeto clásico. Lo que ocurre, una vez más, es que se trata de dos experimentos (dos condicionales) distintos: "lanzar una moneda" y "lanzar una moneda y obtener un resultado específico".

Es interesante notar que la interpretación subjetiva de la teoría de probabilidades ocurre también en la mecánica estadística clásica, en la que, a veces, se interpreta la entropía como una medida de nuestro conocimiento del sistema, en lugar de la interpretación correcta, según la cual esta cantidad representa una medida del desorden en el sistema.

4. El argumento EPR.

En 1935 surgió la que es quizá la más importante objeción a la interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica en un artículo publicado por Einstein, Podolsky y Rosen bajo el título "Can quantum-mechanical description of reality be considered complete?"¹

El objetivo de este trabajo era mostrar que, bajo ciertas circunstancias, es posible considerar que dos variables que no conmutan son simultáneamente elementos de la realidad, en contradicción con la interpretación ortodoxa de las desigualdades

¹ A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen, "Can quantum mechanical description of reality be considered complete?", Phys. Rev. 47, p. 777, 1935.

de Heisenberg. El teorema de Einstein, Podolsky y Rosen (EPR).² Llamado así por ellos mismos, ha sido calificado por los miembros de la escuela ortodoxa como "paradoja", e, incluso, "falacia EPR". Sin embargo, es posible mostrar que se trata, en efecto, de un teorema bien formado, si se aceptan los siguientes postulados:

1D Una condición necesaria para que una teoría sea completa es que por cada elemento relevante de la realidad exista otro en la teoría que le corresponda.

2D Una condición suficiente para identificar un elemento de la realidad puede expresarse como sigue: si podemos, sin perturbar en forma alguna al sistema, predecir con certeza (es decir, con probabilidad igual a 1D) el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de la realidad que corresponde a dicha cantidad física.

Para lograr su objetivo, Einstein, Podolsky y Rosen consideran un experimento pensado en el que dos partículas interactúan durante cierto tiempo y luego se separan. Existen diferentes versiones de este experimento. Consideraremos una de las más sencillas, debida a David Bohm. Dos partículas de spin $\frac{1}{2}$ se preparan en un estado inestable inicial de spin total 0. Cuando se separan debe conservarse el spin total. Entonces, si medimos, por ejemplo, la componente x del spin de la partícula 1, σ_{1x} , podemos inferir el valor de la componente x del spin de la

² L. E. Ballentine, 'The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics', Rev. Mod. Phys. 42,4, Oct. 1970, p. 358.

partícula 2, σ_{2x} , sin perturbarla en forma alguna (ya que esta partícula puede estar arbitrariamente alejada de la otra en el momento de la medición). Podemos, entonces, afirmar que σ_{2x} es un elemento de la realidad. A menos que se acepte la posibilidad de una interacción instantánea entre ambas partículas, podemos afirmar, incluso, que σ_{2x} era un elemento de la realidad aun antes de llevar a cabo la medición de σ_{1x} .

Como, por otro lado, podíamos muy bien haber decidido medir la componente z del spin de la partícula 1, un argumento análogo nos permite considerar a σ_{2z} como un elemento de la realidad. Entonces, σ_{2x} y σ_{2z} son elementos simultáneos de la realidad. Como la mecánica cuántica no permite definir el valor de ambas a la vez (puesto que son variables que no conmutan), debemos concluir que la descripción cuántica de la realidad es incompleta.

Este argumento demuestra, más específicamente, que las siguientes proposiciones son incompatibles:

- 1) El vector de estado provee una descripción completa del sistema individual.
- 2) Las propiedades físicas reales de dos objetos separados espacialmente son independientes³.

La disyuntiva anterior fue planteada por primera vez por Einstein en 1949.

El artículo original fue criticado por Bohr en un trabajo

³ Esta proposición se conoce como principio de localidad.

publicado bajo el mismo título⁴. Bohr aceptó que el razonamiento de EPR era correcto, su crítica estaba dirigida, más bien, hacia las premisas en que este se basaba. Para él, el formalismo de la mecánica cuántica es incompatible con el punto de vista filosófico de EPR y, en particular, con el criterio de realidad que ellos proponen, ya que sólo puede asociársele un elemento de realidad a un acto de observación realizado de una manera concreta. De esta forma, el argumento de EPR pierde por completo su significación: no tiene sentido asociarle simultáneamente elementos de la realidad a variables que no conmutan, puesto que no existe ningún dispositivo experimental que permita medirlas al mismo tiempo. Y si no hay una medida concreta, tampoco algo a lo que se le pueda atribuir un elemento de la realidad.

Es generalmente aceptado que Bohr logró refutar con éxito el resultado de EPR. Sin embargo, su respuesta es válida sólo si se acepta una postura positivista. En el marco filosófico del realismo, las conclusiones de EPR siguen teniendo validez.

Además de la crítica de Bohr, se han presentado muchas otras que atacan, fundamentalmente, el hecho de que en el argumento EPR se asume tácitamente la siguiente hipótesis: si en un sistema S_1 se mide una observable A con el resultado a , tiene sentido especular acerca de cual hubiera sido el resultado si, en vez de A , otra observable B (que puede no conmutar con A) fuera medida en el mismo sistema S_1 , cuando este se encuentra en el mismo estado. Esta hipótesis no está contenida en el formalismo cuántico.

⁴ n. Bohr, "Can quantum mechanical description of reality be considered complete?", Phys. Rev. 48, p. 696, 1935.

Existen, sin embargo, formulaciones alternativas del argumento EPR en las que la hipótesis anterior no es necesaria. En estas formulaciones se han explotado más a fondo las implicaciones físicas y filosóficas y se ha rebasado la conclusión original: la disyuntiva ya no es solo entre la localidad y la completitud de la mecánica cuántica, sino entre la localidad y la mecánica cuántica misma (sea esta completa o no).

5. La interpretación estadística.

Hemos expuesto brevemente las bases de la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica, y algunos de los problemas más graves que presenta. Existe, básicamente, un punto de vista alternativo, propuesto por Einstein desde el Congreso Solvay de 1927, que consiste en suponer que la función de onda no representa a un sistema individual, sino a un ensemble estadístico de sistemas⁵. Este punto de vista es conocido como interpretación estadística de la mecánica cuántica.

Es importante notar que una descripción estadística sólo permite predecir el valor medio de las variables dinámicas de un sistema individual cuando es posible aplicar la hipótesis ergódica, que consiste en suponer que el promedio temporal de una variable dinámica asociada a un sistema es igual al promedio de dicha variable tomado sobre los distintos sistemas que componen el

⁵ Ver nota 4, página 5.

ensamble a un tiempo dado. Esto equivale a suponer que, en un sistema individual evoluciona durante un tiempo suficientemente largo, habra ocupado todos los macroestados compatibles con el macroestado que define al ensamble.

En mecánica cuántica los casos de interes no son necesariamente ergodicos: un sistema ligado en un eigenestado de la energía puede serlo, mientras que una partícula que es dispersada por un centro de fuerzas claramente no lo es. Debido a esto, la mecánica cuántica es, en general, incapaz de hacer predicciones sobre sistemas individuales.

En el marco de la interpretación estadística la probabilidad que predice la teoría cuántica para un valor de cierta variable dinámica se entiende como la proporción relativa de miembros del ensamble para los cuales la variable considerada tiene dicho valor. Entonces, la manera de verificar estas predicciones es repitiendo el experimento muchas veces y construyendo la distribución estadística de los resultados.

En este contexto, las desigualdades de Heisenberg pueden entenderse sin necesidad de suponer que la posición y el momento de una partícula no existen simultáneamente. En efecto, la derivación de estas desigualdades a partir del formalismo involucra únicamente las dispersiones de las variables dinámicas consideradas. De esta manera

$$\Delta q \Delta p \geq \hbar/2,$$

donde q y p son cualquier pareja de variables canónicamente conjugadas, impone una restricción al producto de las dispersiones

estadísticas sobre el ensemble, y no dice nada acerca de las incertidumbres Δq y Δp en la medición simultánea de estas variables en un sistema individual. De hecho, Δq y Δp sólo pueden determinarse experimentalmente si las incertidumbres δq y δp son mucho menores que ellas. Nada impide, incluso, que en ciertas circunstancias se cumpla:⁶

$$\Delta q \Delta p \ll \hbar/2.$$

Un ejemplo muy conocido donde ocurre esto es el siguiente: una partícula con momento inicial conocido \vec{p} pasa a través de una rendija muy angosta. Debido a efectos de difracción, el momento de la partícula cambiará, pero su energía C y por lo mismo $p = \|\vec{p}\|$ se mantendrá constante. Al llegar la partícula a una pantalla que se encuentra a una distancia L de la rendija puede medirse su coordenada z (distancia vertical con respecto a la posición donde hubiera llegado una partícula clásica) con un error δz . Simultáneamente se puede conocer la componente z del momento, puesto que $p_z = p \sin \theta = p z (L^2 + z^2)^{-1/2}$ (con θ el ángulo entre la trayectoria clásica y la línea que une a la rendija con el punto z), con un error δp_z que puede hacerse arbitrariamente pequeño modificando adecuadamente la distancia L entre ambas pantallas. Claramente, el producto $\delta z \delta p_z$ no tiene ninguna cota inferior.

Entonces, desde el punto de vista de la interpretación estadística, las relaciones de Heisenberg no se refieren en

⁶ Ballentine; Op. cit. p. 305.

absoluto a las mediciones Simultáneas.

Otro de los problemas que resuelve la interpretación estadística es el de la supuesta dualidad onda-partícula. El carácter ondulatorio se refiere exclusivamente a la distribución de probabilidades en el ensemble de partículas; estas retienen su carácter corpuscular.

El hecho de que las probabilidades se obtengan a través de una ecuación de onda queda como un problema abierto de gran interés, cuya solución significaría un avance fundamental en la comprensión de los fenómenos cuánticos.

Lo anterior se ilustra claramente por medio del experimento de las dos rendijas: un haz tenue⁷ de partículas monoenergéticas incide sobre una pared con dos rendijas, tras de la cual hay una placa fotográfica. Cada partícula produce una marca casi puntual sobre la placa; después de un tiempo suficientemente largo se observa sobre la placa un patrón de interferencia. Si se cierra una de las rendijas se forma un patrón simple, con un solo máximo. De acuerdo con la escuela de Copenhague el primer patrón resulta del hecho de que la onda que representa a una partícula interfiere consigo misma. Esto equivale a considerar que la partícula pasa por ambas rendijas. Desde el punto de vista estadístico cada partícula posee una trayectoria bien definida y pasa por una sola de las rendijas. Aparentemente no puede explicarse la aparición

⁷Esta condición permite considerar que las partículas pasan de una en una y no interactúan entre sí.

del patrón de interferencia en el primer caso, ya que el hecho de que una de las rendijas esté abierta o cerrada no debería afectar la trayectoria de las partículas que pasan por la otra rendija. Sin embargo la interpretación estadística no niega la posibilidad de que existan ciertos agentes físicos, aun desconocidos, que se vean afectados por la configuración de las rendijas y que alteren las trayectorias. La identificación de tales agentes ofrece nuevas perspectivas a la investigación en una dirección que los miembros de la escuela ortodoxa consideran carente de interés.

En apoyo a la interpretación de este experimento en términos ortodoxos se ha utilizado un argumento basado en la teoría de probabilidades. Sea $p_1(x)$ ($p_2(x)$) la probabilidad de que la partícula incida en la posición x sobre la placa fotográfica dado que la rendija 1 (2) está cerrada, y sea $p_{12}(x)$ la probabilidad de que incida en x dado que ambas rendijas están abiertas. Los eventos "pasar por la rendija 1" y "pasar por la rendija 2" son excluyentes y exhaustivos. Podría esperarse que $p_{12}(x) = p_1(x) + p_2(x)$, sin embargo, esto no ocurre, puesto que p_1 y p_2 son distribuciones gaussianas y, por lo tanto, su suma no produce un patrón de interferencia. Esta aparente contradicción nos llevaría a una (o ambas) de las siguientes conclusiones:

1) La teoría usual de probabilidades no se aplica a los fenómenos cuánticos.

2) Los eventos "pasar por la rendija 1" y "pasar por la rendija 2" no pueden considerarse mutuamente excluyentes (de alguna manera la partícula pasaría por ambas).

Una vez más, el error en el razonamiento radica en la omisión

de los condicionales en las funciones de probabilidad. Estos condicionales serían c_1 : "solo la rendija 1 está abierta", c_2 : "solo la rendija 2 está abierta" y c_3 : "ambas rendijas están abiertas". En este caso el experimento indica únicamente que

$$p(x|c_3) \neq p(x|c_1) + p(x|c_2)$$

lo cual, por otro lado, no tenía por qué ocurrir. De esta manera, no hay necesidad de aceptar ninguna de las conclusiones anteriores. Sin embargo, este tipo de argumentos han sido utilizados incluso por gente como Feynman^B.

6. Variables ocultas.

Como sabemos, de acuerdo con la interpretación estadística, un estado cuántico no describe exhaustivamente a un sistema individual. Podría pensarse, entonces, que la mecánica cuántica se refiere únicamente a los promedios de las variables dinámicas usuales sobre los valores de otros parámetros ajenos a ella. La distribución de estos parámetros estaría regida por leyes propias, distintas de las cuánticas, y no podría ser controlada en principio. El comportamiento cuántico de la materia sería el efecto de la distribución de estas "variables ocultas"; así, los ensembles propiamente cuánticos serían aquellos en donde las

^B R. Feynman, The Feynman Lectures on Physics, tomo III, Fondo Educativo Interamericano, 1971, pp. 1-7.1-8.

variables ocultas están distribuidas en su forma natural o no controlada, esto es, en forma tal que se cumplan las relaciones de Heisenberg.

Con la introducción de las variables ocultas puede concebirse un ensemble en el que estas tengan una distribución que permita la violación de las desigualdades de Heisenberg. Dicho ensemble trascendería claramente el dominio de la teoría cuántica. Sin embargo, el nivel actual de conocimiento hace imposible controlar las variables ocultas y no nos permite realizar experimentalmente un ensemble de este tipo. Esto no excluye, por otro lado, que éstas puedan controlarse en el futuro a través del estudio de las leyes que rigen su comportamiento.

Debido a que la existencia de variables ocultas contradice la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica, se ha generado en torno a ellas una importante polémica. En 1932, John von Neumann desarrolló un teorema por medio del cual pretendía demostrar que ninguna teoría de variables ocultas era capaz de reproducir todos los resultados de la mecánica cuántica. Su razonamiento está basado sobre los siguientes postulados:¹

1) Si se representa una observable por un operador R , entonces cualquier función f de dicho observable está representada por $f(R)$.

2) La suma de varias observables, representadas por R, S, \dots , está representada por el operador $R+S+\dots$, sin importar si

¹Ballentine; op. cit., p. 374.

los operadores conmutan o no.

3) La correspondencia entre operadores hermitianos y observables es uno a uno.

4) Si la observable R es no negativa, entonces $\langle R \rangle \geq 0$.

5) $\forall R, S, \dots$ y $\forall a, b, \dots \in \mathbb{R}$, se debe cumplir

$$\langle aR + bS + \dots \rangle = a\langle R \rangle + b\langle S \rangle + \dots$$

para todos los estados posibles en los que puedan calcularse promedios.

Von Neumann demuestra que no puede existir un ensemble en el que todas las observables tengan valores fijos (sin dispersión). Como una teoría de variables ocultas permite la construcción de ensembles no dispersivos², von Neumann concluye que no hay variables ocultas. Además, von Neumann muestra que existen ensembles cuánticos (es decir, dispersivos) que son homogéneos, esto es, tales que:

$$\langle R \rangle_E = \langle R \rangle_{E'}$$

donde E es el ensemble, $E' \subset E$ es cualquier subensemble y R es cualquier observable. Por otro lado, las teorías de variables ocultas excluyen la posibilidad de que un ensemble dispersivo sea homogéneo³, lo que parece reafirmar la conclusión de von Neumann.

Estos resultados acabaron prácticamente con la polémica por

² Basta con fijar el valor de las variables ocultas para todos los miembros del ensemble.

³ Jammer; Op. cit., pp. 268-270.

cerca de veinte años, hasta que David Bohm publicó, en 1952, una teoría de variable oculta que reproducía exactamente las predicciones estadísticas de la mecánica cuántica. Suponiendo una función de onda de la forma $\psi = R \exp(iS/\hbar)$ y sustituyendo en la ecuación de Schrödinger y tomando $\rho = \psi^* \psi = R^2$ y

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{E} \rho = (\hbar^2 / 2m) (\nabla^2 \psi / \psi - \nabla^2 \psi^* / \psi^*)$$

donde ρ es la densidad de probabilidad y \mathbf{v} es la velocidad de flujo de partículas, Bohm obtuvo dos ecuaciones: una de ellas es la ecuación de continuidad para la probabilidad, y la otra es una ecuación de balance de energía de la forma:

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + V(x) + U(x)$$

con $U(x) = -\hbar^2 \nabla^2 R / 2mR$. En su modelo Bohm asigna a cada partícula una posición perfectamente definida x (variable oculta) y un momento dado por $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \nabla S$, lo que equivale a suponer que cada partícula sigue una trayectoria bien definida. Conociendo las condiciones iniciales de la partícula, el modelo de Bohm permite predecir exactamente el movimiento de la partícula a través de la ley clásica

$$m \ddot{x} = -\nabla (V + U)$$

Bohm llamó a $U(x)$ el potencial cuántico e interpretó la función ψ como un campo físico real y objetivo, que producía una fuerza sobre las partículas dada por $-\nabla U$, y cuya ecuación de

propagación era la ecuación de Schrödinger⁴.

A pesar de que la teoría de Bohm no tuvo gran aceptación, su sola existencia invalida el teorema de von Neumann. Su aparición hizo renacer la polémica y propició el surgimiento de otros modelos de variable oculta. Incluso alentó a de Broglie a retomar las ideas que había abandonado a raíz de la oposición que encontró en el Congreso Solvay de 1927.

La aparición de teorías de variables ocultas compatibles con la mecánica cuántica llevó a John Stewart Bell⁵ a estudiar detenidamente el teorema de von Neumann para detectar sus fallas. Apoyado en una teoría de variables ocultas construida por él mismo, Bell demostró que el postulado de aditividad de los valores esperados (postulado S de von Neumann) no era válido en general. Esto es claro si se consideran las componentes σ_x y σ_y del spin de una partícula. El hecho de que para ensembles cuánticos se cumpla que $\langle \sigma_x + \sigma_y \rangle = \langle \sigma_x \rangle + \langle \sigma_y \rangle$ es una propiedad no trivial de la mecánica cuántica⁶. Sin embargo, en un ensemble no dispersivo, cada observable tendrá un valor fijo, igual a alguno de sus eigenvalores. Entonces, por ejemplo, $\langle \sigma_x \rangle = \pm 1$, $\langle \sigma_y \rangle = \pm 1$, pero $\langle \sigma_x + \sigma_y \rangle = \pm \sqrt{2}$. Vemos, entonces, que este tipo de ensembles no satisfacen el postulado S.

⁴ Jammer; Op. cit., pp. 280-282.

⁵ J. S. Bell, 'On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics', Rev. Mod. Phys. 38, 447, (1966).

⁶ Ballentine; Op. cit., p. 37d.

En un artículo escrito en 1964⁷, Bell analizó detenidamente el argumento de EPR, que había permanecido inalterado por décadas y no había rebasado los límites puramente epistemológicos. En su análisis, utilizó un experimento pensado similar a la versión de Bohm del argumento original e investigó las propiedades que debería tener cualquier teoría de variables ocultas compatible con el principio de localidad. Bell obtuvo como resultado una desigualdad que cualquier teoría de este tipo debe satisfacer, y que la mecánica cuántica viola, lo que lo llevó a la conclusión de que ninguna teoría local de variables ocultas es capaz de reproducir todos los resultados cuánticos con precisión arbitraria. Este resultado constituye el llamado teorema de Bell. La importancia de la desigualdad de Bell radica en el hecho de que es posible, en principio, contrastarla experimentalmente. De esta forma sería posible resolver empíricamente una discusión de carácter filosófico.

Recientemente se han llevado a cabo experimentos de este tipo, y prácticamente en todos ellos se ha encontrado que la desigualdad de Bell se viola, lo que ha llevado a los miembros de la escuela ortodoxa a afirmar que las teorías locales de variables ocultas son incapaces de describir adecuadamente a la naturaleza.

Sin embargo, la conclusión anterior no goza de una aceptación absoluta. Existen diversas posiciones acerca de la validez, tanto de los resultados experimentales, como del propio teorema de Bell. Entre quienes no comparten el punto de vista ortodoxo están los

⁷ J. S. Bell, 'On The Einstein-Podolsky-Rosen Paradox', *Physics* 1, 195, (1964).

que suponen que el teorema de Bell es válido, lo que implica que es la mecánica cuántica, y no las teorías locales de variables ocultas, la que describe incorrectamente a la naturaleza. Este grupo ha mostrado que en los experimentos hasta ahora realizados se incluyen hipótesis ajenas al teorema, y que, por lo tanto, sus resultados no proporcionan información concluyente acerca de si la naturaleza obedece o no la desigualdad de Bell.

Por otro lado, también han sido presentadas críticas al teorema de Bell, que muestran que su dominio de aplicación es mucho más restringido de lo que se cree usualmente. En particular, ha sido posible construir teorías locales de variables ocultas que violan la desigualdad de Bell y que, en sí mismas, constituyen contraejemplos al teorema. Sin embargo, para lograr lo anterior, estas teorías deben sacrificar la existencia de distribuciones de probabilidad conjuntas para observables que son, desde el punto de vista de la mecánica cuántica, incompatibles. Esto parece indicar que no es el principio de localidad lo que entra en juego en la discusión, sino la existencia de este tipo de distribuciones de probabilidad. De esta forma, cualquier teoría, local o no, que contenga en su formalismo estas distribuciones deberá cumplir con la desigualdad de Bell.

De lo anterior podemos concluir que, aun cuando la evidencia experimental mostrara definitivamente que la naturaleza viola la desigualdad de Bell, como parece ser el caso, esto no implicaría que debamos renunciar, ni a la objetividad, ni a la localidad en la descripción física de la naturaleza, sino que, solamente, obligaría a que cualquier intento de fundamentar a la mecánica

cuántica con una teoría de variables ocultas no incluya la posibilidad de calcular distribuciones conjuntas de probabilidad para los resultados de las mediciones de variables incompatibles, lo que representaría un problema de investigación de gran interés.

Desde esta perspectiva, parecería ser que el teorema de Bell no descarta la posibilidad de hacer una descripción de la naturaleza que sea compatible con el principio de localidad y que esté basada en la convicción de que el universo existe independientemente de la presencia de seres inteligentes que lo observen, lo que es, en nuestra opinión, un principio irrenunciable del pensamiento científico.

CAPITULO II
LA ELECTRODINAMICA ESTOCASTICA

1. Introducción a la electrodinámica estocástica.

La interpretación estadística de la mecánica cuántica evita las paradojas inherentes a la visión ortodoxa suponiendo que el vector de estado no describe un sistema individual, sino un ensemble de sistemas preparados de manera similar. En este contexto, no habría objeción de principio para suponer que las variables dinámicas asociadas a partículas individuales tienen valores bien determinados, aun cuando se trate de variables que no conmutan. Las relaciones de indeterminación se refieren, entonces, a dispersiones estadísticas sobre el ensemble.

Dichas dispersiones sugieren la existencia de una fuente de estocasticidad, subyacente a la descripción cuántica, que determina el comportamiento de cada miembro del ensemble. La interpretación estadística deja abierto el problema del origen de este elemento de estocasticidad.

Una vez que se ha adoptado el punto de vista estadístico es, pues, natural, para intentar una descripción causal, buscar una fuente de estocasticidad, que permitirá explicar el comportamiento cuántico de la materia a un nivel más fundamental que el que proporciona la mecánica cuántica usual. De acuerdo con lo dicho en el capítulo anterior, un formalismo que incluye un agente generador de aleatoriedad es una teoría de variables ocultas.

La electrodinámica estocástica (EDED) es un formalismo de este tipo. La fuente de estocasticidad que propone la EDE es un campo electromagnético clásico aleatorio (campo de fondo del vacío) que

ocupa todo el espacio, y cuya interacción con partículas cargadas clásicas daría como resultado el comportamiento cuántico observado.

Para ser físicamente aceptable, el campo de fondo debe satisfacer, entre otras, las condiciones impuestas por la relatividad especial: debe ser homogéneo e isotrópico de modo que no permita definir posiciones ni direcciones privilegiadas; y debe ser invariante de Lorentz para evitar que existan marcos de referencia privilegiados. Se ha demostrado¹ que la última condición se satisface sólo si el espectro del campo es de la forma $S \sim \omega^3$. Más específicamente, el espectro del campo de fondo de la EDE es

$$S_{\omega}(\omega) = \frac{2\hbar}{3\pi c^3} \omega^3 \quad (2.1)$$

que coincide con el espectro del campo del punto cero de la electrodinámica cuántica. A pesar de esta analogía, los campos de la electrodinámica cuántica y de la EDE difieren en un punto fundamental: el primero es cuántico, mientras que el segundo es un campo clásico. Además, la teoría cuántica considera al campo del punto cero como un campo virtual (es decir, sin existencia real), mientras que la EDE postula la realidad del campo de fondo.

El potencial vectorial correspondiente a este campo puede escribirse en términos de ondas planas como^{2,3}

$$A = \sum_{n, \sigma} \left[\frac{2\pi h c^2}{V \omega_n} \right]^{1/2} \hat{\epsilon}_{n\sigma} a_{n\sigma} \exp[-i(\omega_n t - \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x})] + c. c.$$

donde $\omega_n = ck_n$, $\hat{\epsilon}_{n\sigma}$ son los vectores de polarización ($\sigma = 1, 2$), y

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_{n\sigma} \cdot \mathbf{k}_n &= 0 \\ \hat{\epsilon}_{n\sigma} \cdot \hat{\epsilon}_{n\sigma'} &= \delta_{\sigma\sigma'} \\ \sum_{\sigma} \hat{\epsilon}_{n\sigma} \hat{\epsilon}_{n\sigma'} &= \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \end{aligned}$$

es decir, los $\hat{\epsilon}_{n\sigma}$ son vectores transversales y $(\hat{\epsilon}_{n1}, \hat{\epsilon}_{n2}, \mathbf{k})$ forman un sistema ortogonal.

Las amplitudes $a_{n\sigma}$ son variables estocásticas que satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \langle a_{n\sigma} \rangle &= 0 & \langle a_{n\sigma} a_{n'\sigma'} \rangle &= 0 \\ \langle a_{n\sigma} a_{n'\sigma'}^* \rangle &= \frac{1}{2} \delta_{nn'} \delta_{\sigma\sigma'} \end{aligned} \quad (2.2)$$

de modo que $\langle E \rangle = 0$, como corresponde a un campo inobservable.

El hamiltoniano del sistema formado por el campo de radiación y la partícula es

$$H_T = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V(\mathbf{r}) + H_R$$

donde

$$\begin{aligned} H_R &= \frac{1}{2} \sum_{n, \sigma} \left(p_{n\sigma}^2 + \omega_n^2 q_{n\sigma}^2 \right) \\ &= \sum_{n, \sigma} \hbar \omega_n b_{n\sigma}^* b_{n\sigma} \end{aligned}$$

es el hamiltoniano del campo de radiación.

Las amplitudes

$$b_{nr} = (2R\omega_n)^{-1/2} (\rho_{nr} - i\omega_n q_{nr})$$

incluyen la radiación emitida por la propia partícula.

A partir de estos resultados se pueden deducir las ecuaciones de movimiento tanto de la partícula como del campo. Eliminando las variables del campo se obtiene, para la partícula, la ecuación de Abraham-Lorentz para este problema:

$$m \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + m r \ddot{\mathbf{x}} + e \mathbf{E} + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} \quad (2.3)$$

donde \mathbf{F} es la fuerza externa aplicada a la partícula; $m r \ddot{\mathbf{x}}$ es el término de radiación, que representa la fuerza debida a la emisión de radiación por la propia partícula ($r = 2e^2/3mc^3$); y \mathbf{E} y \mathbf{B} son las componentes eléctrica y magnética del campo estocástico de fondo. En este caso, la ecuación (2.3) se llama ecuación de Braffort-Marshall.

Es importante hacer notar que el término de radiación en la ecuación de Abraham-Lorentz se obtiene bajo ciertas aproximaciones que limitan su validez. Esta ecuación se ha obtenido para el caso no relativista y para distancias y tiempos grandes comparados $\frac{2e^2}{3mc^3}$ y r , respectivamente.

Así, pues, es prudente emplear la ecuación de Abraham-Lorentz solo cuando el término de radiación pueda ser considerado como una perturbación que produce cambios lentos o pequeños en el movimiento del sistema.⁴

Para simplificar la resolución de la ecuación (2.2) es usual despreciar el término magnético y la dependencia espacial de E . Esto es legítimo si se supone que las velocidades involucradas son no relativistas y que los modos del campo que más afectan el comportamiento del sistema tienen longitudes de onda que son grandes comparadas con las dimensiones de éste. La ecuación de Braffert-Marshall se convierte entonces en

$$m \ddot{\vec{x}} = F + m c \dot{\vec{x}} + e E \quad (2.4)$$

con $E = E(t)$.

El método más usual para obtener información acerca del sistema descrito por (2.4) consiste en construir la correspondiente ecuación de Fokker-Planck para la distribución en el espacio fase. El problema de la construcción de ecuaciones de Fokker-Planck en la EDE es complicado debido a que el espectro del campo de fondo no corresponde a un ruido blanco. A pesar de esto, existe en la literatura una gran cantidad de referencias a este problema y su posible solución (v. en ref. 2 las referencias citadas en las pp. 495-498).

En el caso de sistemas lineales simples el método de Fokker-Planck ha dado resultados que coinciden con los de la mecánica cuántica. En particular, la EDE ha resuelto con gran éxito el caso del oscilador armónico, cuyo tratamiento incluye las correcciones radiativas de la electrodinámica cuántica^{5,6}. El rotor rígido y el átomo de hidrógeno (con órbitas circulares⁷) han obtenido también un tratamiento satisfactorio en el marco de la EDE.

En consecuencia, el método de ERE es válido, ya, en consecuencia, resulta más interesante en el tratamiento de sistemas no lineales. Contrariamente a lo que ocurre en la teoría cuántica, la ERE parece violar la condición de balance energético detallado, que exige que la cantidad media de energía que un sistema absorbe del campo a una frecuencia dada sea igual a la cantidad media de energía emitida a esa misma frecuencia. El problema del balance detallado en la ERE será discutido más ampliamente en un capítulo posterior.

2. La condición de equilibrio.

En el caso de sistemas complicados (por ejemplo, sistemas no lineales) resulta útil intentar resolver la ec. (2.4) por medio de un método perturbativo, que se desarrolla a continuación³.

Supongamos que la solución puede expresarse como una serie de potencias de ϵ :

$$x = x^{(0)} + \epsilon x^{(1)} + \epsilon^2 x^{(2)} + \dots \quad (2.5)$$

donde el término $x^{(r)}$ es de orden r en ϵ . Desarrollando F en serie de Taylor alrededor de $x^{(0)}$ obtenemos

$$F(x) = F(x_k^{(0)}) \Big|_0 + \frac{\partial F(x_k)}{\partial x_k} \Big|_0 (x_k - x_k^{(0)}) + \frac{\partial^2 F(x_k)}{\partial x_k \partial x_j} \Big|_0 (x_k - x_k^{(0)})(x_j - x_j^{(0)}) + \dots \quad (2.6)$$

donde $X_k = X_k^{(0)} + X_k^{(1)} + \dots$, el subíndice 0 indica que las funciones deben evaluarse en $x = x^{(0)}$, y se adopta la convención de suma sobre índices repetidos. Sustituyendo en (2.4) y agrupando términos del mismo orden en ϵ se obtiene el siguiente sistema:

$$m\ddot{X}_1^{(0)} = F_1(X_1^{(0)}) \quad (2.7a)$$

$$m\ddot{X}_1^{(1)} = \left. \frac{\partial F_1(X_k)}{\partial X_k} \right|_0 X_k^{(1)} + \epsilon E_1 \quad (2.7b)$$

$$m\ddot{X}_1^{(2)} = \left. \frac{\partial F_1(X_k)}{\partial X_k} \right|_0 X_k^{(2)} + \left. \frac{\partial^2 F_1(X_k)}{\partial X_k^2} \right|_0 X_k^{(1)2} + m\ddot{X}_1^{(0)} \quad (2.7c)$$

.....

Vemos que la ecuación (2.7a), que corresponde al movimiento no perturbado, describe un movimiento puramente clásico. Multiplicando la ecuación (2.4) por \dot{x} obtenemos

$$m\ddot{X}_1 \dot{X}_1 = [F_1(X) + m\ddot{X}_1 + \epsilon E_1] \dot{X}_1 \\ \rightarrow m \dot{X}_1 \ddot{X}_1 - F_1 \dot{X}_1 = (m\ddot{X}_1 + \epsilon E_1) \dot{X}_1 \quad (2.8)$$

Por otro lado, observamos que, si $p = m\dot{x}$,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{p^2}{2m} \right] = \frac{1}{2m} \frac{d}{dt} (m\dot{x})^2 = m\dot{x}\ddot{x}$$

$$\gamma \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = -F\dot{x}$$

$$\rightarrow m\dot{X}_1 \ddot{X}_1 - F_1 \dot{X}_1 = \frac{dH}{dt}$$

combinando este resultado con la ecuación (2.9):

$$\frac{dW}{dt} = [\text{tr} \ddot{x} + eE] \cdot \dot{x} \quad (2.9)$$

donde $W = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$ es el hamiltoniano clasico de la partícula. La ecuación (2.9) es una ecuación de balance instantaneo de energia. $\text{tr} \ddot{x} \cdot \dot{x}$ es la energia radiada por la partícula por unidad de tiempo, y $eE \cdot \dot{x}$ es energia absorbida del campo por unidad de tiempo.

La ecuación (2.9) impone una condicion muy restrictiva al comportamiento de los sistemas fisicos en la EDE. Para obtener una condicion mas versatil es conveniente tomar el promedio de (2.9) sobre todas las realizaciones del campo ((2)) y sobre el tiempo (P_t):

$$P_t \frac{dW}{dt} = \text{tr} P_t \langle \ddot{x} \cdot \dot{x} \rangle + e P_t \langle E \cdot \dot{x} \rangle \quad (2.10)$$

En un estado estacionario el miembro izquierdo de la ecuación (2.10) debe anularse. Entonces

$$\text{tr} P_t \langle \ddot{x} \cdot \dot{x} \rangle + e P_t \langle E \cdot \dot{x} \rangle = 0$$

O bien, despreciando términos de orden superior a 2 en e:

$$\text{tr} P_t \langle \ddot{x}^{(0)} \cdot \dot{x}^{(0)} \rangle + e P_t \langle \ddot{x}^{(1)} \cdot E \rangle = 0 \quad (2.11)$$

Esta es la condicion de equilibrio, que expresa el balance entre la potencia media absorbida del campo y la potencia media emitida por el sistema en un estado estacionario.

3. Algunos ejemplos de aplicación.

3.1. El oscilador armónico.

La solución de la ecuación (2.7a), correspondiente al movimiento clásico del oscilador, es

$$x^{(0)} = x_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t$$

$$p^{(0)} = p_0 \cos \omega t - m\omega x_0 \sin \omega t$$

Por otro lado, la ecuación a primer orden es

$$m\dot{x}_i^{(1)} = \left. \frac{\partial F_1(x_k)}{\partial x_k} \right|_0 x_k^{(0)} + \partial E_1$$

que admite una solución retardada de la forma³

$$x_i(t) = \int_{-\infty}^t G_{ij}(t-t') \partial E_j(t') dt'$$

con

$$m G_{ij} = \left. \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \right|_0 G_{kj}$$

$$G_{ij}(t, t) = 0$$

$$m G_{ij}(t, t') \Big|_{t=t'} = \delta_{ij}$$

Haciendo uso de (2.7a) y tomando $p = m\dot{x}$ obtenemos

$$G_{ij}(t, t') = \left. \frac{\partial x_i(t)}{\partial p_j(t')} \right|_0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial \rho_i^{(0)}(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \rho_i^{(0)}(t')}{\partial \rho_j^{(0)}(t')} \right] E(t') dt' \\ \rightarrow \frac{\partial \rho_i^{(0)}(t)}{\partial t} &= \frac{\partial \rho_i^{(0)}}{\partial \rho_j^{(0)}} E \Big|_{t=0} - \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \rho_i^{(0)}(t')}{\partial \rho_j^{(0)}(t')} E(t') dt' \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \rho_i^{(0)}(t')}{\partial \rho_j^{(0)}(t')} E(t') dt' \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en la condición de equilibrio (E.11):

$$m^2 \mathbb{P}_i \left(\dot{X}_i^{(0)} - \dot{X}_i^{(0)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{P}_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \rho_i^{(0)}(t')}{\partial \rho_j^{(0)}(t')} \langle E(t') D E_i(t') \rangle dt' = 0$$

$$\text{Sea } D_{pp} = \mathbb{P}_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \rho_i^{(0)}(t')}{\partial \rho_j^{(0)}(t')} \langle E(t') D E_i(t') \rangle dt'$$

La notación D_{pp} se debe a que este factor aparece como término de difusión en la ecuación de Fokker-Planck correspondiente a este problema.^{2.5}

La condición de equilibrio se convierte en

$$m^2 \mathbb{P}_i \left(\dot{X}_i^{(0)} - \dot{X}_i^{(0)} \right) + D_{pp} = 0$$

Si el promedio temporal involucra un periodo T del movimiento se tiene

$$m^2 r \frac{1}{T} \int_0^T \dot{X}_i^{(0)} - \dot{X}_i^{(0)} dt + D_{pp} = 0$$

Integrando una vez por partes obtenemos:

$$m\tau \frac{1}{P} \left[\frac{e^{i\omega_0 t} \dot{x}_1^{(10)2}}{\dot{x}_1} \right]_0^T - \int_0^T \frac{e^{i\omega_0 t}}{X_1} dt = D_{pp} = 0$$

Para el término integrado se anula debido a la periodicidad del movimiento. Entonces

$$m\tau \frac{1}{P} \frac{e^{i\omega_0 T}}{X_1} + \frac{1}{m} D_{pp} = 0 \quad (2.12)$$

Por otro lado, de la ecuación clásica del oscilador armónico lineal vemos que

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$$

Entonces, de la ecuación (2.11)

$$-m\tau\omega_0^4 \frac{1}{P} \frac{e^{i\omega_0 T}}{X_1} + \frac{1}{m} D_{pp} = 0$$

donde ω_0 es la frecuencia del oscilador.

Se ha demostrado⁵ que, cuando el campo de fondo está a temperatura $T = 0$, el cálculo de D_{pp} da

$$D_{pp} = \frac{1}{2} m\hbar\tau\omega_0^3 \quad (2.13)$$

de donde

$$-m\tau\omega_0^4 \frac{1}{P} \frac{e^{i\omega_0 T}}{X_1} + \frac{1}{2} \hbar\tau\omega_0^3 = 0$$

Finalmente, usando el teorema del virial, podemos escribir

$$E = m\omega_0^2 \frac{1}{2} X_1^{(10)2}$$

por lo que el momento del átomo de hidrógeno en el oscilador tiene una energía media

$$E = \frac{1}{2} h \omega_0 \quad (2.14)$$

lo que coincide con el resultado cuántico bien conocido.

2.2. El estado base del átomo hidrogenado.²

Si consideramos solamente órbitas circulares, podemos describir aproximadamente el estado base de los átomos hidrogenados en términos de la superposición de dos osciladores armónicos perpendiculares, con la misma amplitud y frecuencia. En este caso

$$\begin{aligned} -m r \ddot{x}^{(0)Z} &= -\frac{Z}{m} p_L^2 r^2 \\ &= -\frac{Z}{m} Z^2 e^4 a^{-4} \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde Z es el número de protones en el núcleo y a es el radio (fijo) de la órbita. Entonces, de acuerdo con la ecuación (2.12) para un oscilador armónico,

$$\frac{Z}{m} Z^2 e^4 a^{-4} = \frac{2}{m} D_{sp}$$

donde el factor 2 en el lado derecho de esta ecuación se debe a que el movimiento del electrón se descompone en dos osciladores armónicos. Introduciendo el valor conocido para D_{sp} a $T = 0$, ec. (2.13),

$$Z^2 e^4 = m h^2 a^3 \omega_0^3$$

Por otro lado, la tercera ley de Kepler implica en este caso que

$$\omega_0^2 a^3 = \frac{A}{m}$$

Combinando este resultado con la ecuación anterior obtenemos

$$a = \frac{A}{m\omega_0^2} \quad (2.18)$$

que es el radio de Bohr para la órbita del estado base.

3.3 El rotor rígido.

En este caso también es posible describir el movimiento del sistema como una superposición de dos osciladores armónicos. De acuerdo con esto tenemos

$$mr \ddot{x}^{(D)2} = - \frac{F}{r} x^2$$

con $F = m\omega_0^2 r$. Entonces

$$mr\omega_0^2 r^2 = A r\omega_0^3$$

Sea $l = mr^2\omega_0$ el momento angular del rotor. Tenemos entonces que, para el estado base ($l = 0$)

$$l = A$$

que concuerda con el resultado cuántico para el estado base del rotor.

4. La condición de equilibrio para sistemas multiperiodicos no degenerados.

En el apéndice se demuestra que la ecuación (2.76) admite una solución retardada tal que

$$\hat{X}_i^{(0)} = e \int_{-\infty}^t \frac{\partial \hat{X}_i^{(0)}(t)}{\partial \rho_j^{(0)}(t')} E_i(t) dt' \quad (2.17)$$

Entonces

$$e \mathcal{P}_i \langle \hat{X}_i^{(0)} E_i(t) \rangle = e^2 \mathcal{P}_i \int_{-\infty}^t \frac{\partial \hat{X}_i^{(0)}(t)}{\partial \rho_j^{(0)}(t')} \langle E_i(t) E_i(t') \rangle dt' = I$$

O bien, con $\rho = m\dot{x}$ y

$$\langle E_i(t) E_i(t') \rangle = \delta_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega$$

$$I = \frac{e^2}{m^2 T} \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^t dt' \frac{\partial \rho_i^{(0)}(t)}{\partial \rho_j^{(0)}(t')} \delta_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S(\omega) e^{i\omega(t-t')}$$

Haciendo el cambio de variable $t' \rightarrow t-t'$:

$$I = \frac{e^2}{m^2 T} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S(\omega) \int_{-T}^T dt \int_0^{\infty} dt' e^{i\omega t'} \frac{\partial \rho_i^{(0)}(t)}{\partial \rho_j^{(0)}(t-t')} \quad (2.18)$$

donde el intervalo de integración de ω se ha extendido de $-\infty$ a ∞ . (En este caso se debe usar $S(|\omega|)$).

Calculemos ahora el factor con derivadas parciales de las ρ en la ecuación (2.18), que escribimos como un paréntesis de Poisson:

$$\frac{\partial \rho_i^{(0)}(t)}{\partial \rho_j^{(0)}(t-t')} = \left[X_j^{(0)'}, \rho_i^{(0)} \right]$$

donde $X_k^{(0)} = X_k^{(0)}(t, y)$.

Para un sistema multiperiodico X se puede escribir como una serie multiple de Fourier $^{(10)}$:

$$X_k^{(0)} = \sum_k \tilde{X}_k^{(0)}(a_k) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} k \cdot W}$$

con $\omega_k = \omega_0 \cdot k = \sum H_i \omega_{0i}$, $\omega_0 = (\omega_{01}, \omega_{02}, \dots, \omega_{0n})$ es un vector cuyas componentes son las frecuencias fundamentales del movimiento (n es el numero de grados de libertad cuando no hay degeneracion) y $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, donde los k_i son enteros que van desde $-a_i$ a a_i . Sean W_i , con $i = 1, 2, \dots, n$, las variables angulares tales que

$$2\pi k \cdot W = 2\pi \sum k_i W_i = \omega_k t + \beta_k$$

(ver refs. 8, 9) y

$$X_k^{(0)} = \sum_k \tilde{X}_k^{(0)}(a_k) e^{i 2\pi W \cdot k}$$

donde las \tilde{X}_k difieren de las \tilde{X}_k en las fases arbitrarias β_k , de modo que $|\tilde{X}_k|^2 = |\tilde{X}_k|^2$. Esto nos permite escribir (ignorando los factores de fase):

$$X_k^{(0)} = \sum_k \tilde{X}_k^{(0)}(a_k) e^{i 2\pi W \cdot k} \quad (2.19)$$

de donde, haciendo uso de las relaciones

$$p = m\dot{x} \quad y \quad \frac{\partial}{\partial t}(W \cdot k) = \frac{1}{2\pi} \omega_0 \cdot k,$$

podemos deducir

$$\rho_k^{(0)} = \lim \sum_k \tilde{X}_k^{(0)}(a_k) (\omega_0 \cdot k) e^{i 2\pi W \cdot k} \quad (2.20)$$

LA TRANSFORMACION DE WIGNER para las variables de acción-ángulo es una transformación canónica, por lo que el paréntesis de Poisson permanece invariante:

$$\frac{\partial \rho_V^{(0)}(t)}{\partial \rho_V^{(0)}(t-t')} = \sum_n \left[\frac{\partial \chi_V^{(0)}(t-t')}{\partial y_n} \frac{\partial \rho_V^{(0)}(t)}{\partial J_n} - \frac{\partial \rho_V^{(0)}(t)}{\partial y_n} \frac{\partial \chi_V^{(0)}(t-t')}{\partial J_n} \right] \quad (2.21)$$

donde las J_n son las variables de acción conjugadas de las y_n . Las expresiones (2.19) y (2.20) permiten calcular el paréntesis de Poisson. El promedio temporal involucrado en la ecuación (2.18) solo afecta al paréntesis de Poisson (2.21), ya que éste es el único término que depende de t en esta ecuación. Un cálculo directo de este promedio da

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \frac{\partial \rho_V^{(0)}(t)}{\partial \rho_V^{(0)}(t-t')} = \sum_{\mathbf{k}} 2\pi m e^{i\omega_0 \cdot \mathbf{k}t} \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{J}} (\omega_0 \cdot \mathbf{k} |\tilde{X}_V^{(0)}|^2) \quad (2.22)$$

Introduciendo este resultado en la ecuación (2.18) se obtiene

$$e \mathbb{P}_T \langle \tilde{X}_V^{(0)} E_V(t) \rangle = e^2 \pi \sum_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{J}} (S(\omega) \omega_0 \cdot \mathbf{k} |\tilde{X}_V^{(0)}|^2) \times \int_0^{\infty} dt' e^{-i(\omega_0 \cdot \mathbf{k} - \omega)t'} \quad (2.23)$$

Integrando sobre la función δ resultante:

$$e \mathbb{P}_T \langle \tilde{X}_V^{(0)} E_V(t) \rangle = e^2 \pi^2 \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{J}} (S(\omega_{\mathbf{k}}) \omega_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} |\tilde{X}_V^{(0)}|^2)$$

De manera análoga evaluamos el término de emisión de (2.11), introduciendo la condición de que λ sea real:

$$\text{Im } \mathbb{P}_k(\tilde{X}_k^{(0)}, \tilde{X}_k^{(0)}) = -\text{Im} \sum_k \omega_k^4 |\tilde{X}_k^{(0)}|^2$$

La condición de equilibrio (2.11) se convierte finalmente en

$$\sum_k \left[\omega_k^4 |\tilde{X}_k^{(0)}|^2 - \frac{2}{\pi} \pi^2 c^3 k \cdot \nabla_{\mathbf{x}} (S C \omega_k) \omega_k |\tilde{X}_k^{(0)}|^2 \right] = 0 \quad (2.24)$$

5. La condición de balance detallado.

La ecuación (2.24) expresa la conservación global de la energía en la evolución de un sistema clásico multiperiodico no degenerado en interacción con el campo de fondo. Sin embargo, para que la EDE sea compatible con los resultados de la mecánica cuántica es necesario que se cumpla la condición de balance detallado, mencionada anteriormente.

En términos de la ecuación (2.24) la condición de balance detallado implica que cada término dentro del símbolo de suma debe anularse por separado cuando se introduce el espectro del campo de fondo S_0 , dado por (2.12). Esto no ocurre en general: para sistemas arbitrarios la ecuación (2.24) se satisface término a término solo si $S C \omega > \omega^2$, es decir, si S es el espectro de Rayleigh-Jeans³. Sin embargo, para algunos sistemas simples la ecuación (2.24) sí es compatible con la condición de balance detallado.

3.1. Balance detallado para el oscilador armónico lineal.

Aunque ya se estudio el oscilador armónico en la sección 3.1, parece conveniente mostrar aquí el resultado de la aplicación directa de la ecuación (3.11). Consideremos, entonces, un oscilador armónico lineal unidimensional con

$$x = \tilde{X}_1 e^{i\omega_0 t} + \tilde{X}_{-1} e^{-i\omega_0 t}$$

Entonces la variable de acción es

$$J = \int_0^{2\pi/\omega} p \dot{x} dt = \int_0^{2\pi/\omega} p \dot{x} dt$$

de donde, exigiendo que $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_{-1}^*$ para que x sea real:

$$J = 4\pi m\omega_0 |\tilde{X}_1|^2$$

Para $k = 1$ la condición de balance detallado es:

$$P_1 = \omega_0^4 \tilde{X}_1^2 - \frac{3}{5} \pi^2 c^3 S_0(\omega_0) \frac{\partial}{\partial J} (\omega_0 \tilde{X}_1^2) = 0$$

Introduciendo el espectro del campo de fondo y notando que $\omega_0 \tilde{X}_1^2 = J/4\pi m$ se obtiene

$$P_1 = \frac{\omega_0^3}{4\pi} \left[\frac{J}{\pi} - \hbar \right]$$

Vemos que para este sistema el espectro del campo de fondo es compatible con la condición de balance detallado. Además, esta condición da

$$J = \pi \hbar$$

para el estado base del oscilador armónico,

Por otro lado, la energía del oscilador es

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2$$

$$E = \frac{\hbar \omega_0}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \hbar \omega_0$$

que es el resultado que se había obtenido anteriormente. Lo mismo ocurre, naturalmente, con los otros casos particulares estudiados en la sección 3.

Los resultados no son tan afortunados, como se ha dicho, cuando se consideran sistemas no lineales. Sin embargo, esta dificultad no parece suficientemente grave para descartar una teoría que ha logrado explicar satisfactoriamente el comportamiento de un número apreciable de sistemas físicos (como, por ejemplo, el oscilador armónico y el rotor rígido), además del origen de las fuerzas de Casimir y de Van der Waals, en términos de principios sencillos y transparentes. Entre los éxitos de la EDE se encuentra también una explicación del comportamiento diamagnético de los electrones y del origen de la distribución de Planck.

Así, pues, se antoja más sensato intentar desentrañar el origen de las dificultades a que se enfrenta la EDE a fin de resolverlas, antes que rechazarla prematuramente. Este tema será tratado en los siguientes capítulos. En particular, nos interesa entender por qué la ecuación (2.24) no se cumple para sistemas

sujeitos a fuerzas no lineales y averiguar bajo que circunstancias los sistemas de la EFE pueden llegar a satisfacer una condición de balance detallado.

Apéndice.

Consideremos la ecuación

$$m\ddot{x}_i^{(0)} = \frac{\partial F(x_k)}{\partial x_k} \Big|_0 x_k^{(0)} + eE_i \quad (A.1)$$

y supongamos que la solución es de la forma

$$x_i^{(0)} = e \int_{-\infty}^t \sum_j G_{ij}(t, t') E_j(t') dt' \quad (A.2)$$

donde las G_{ij} son funciones continuas tales que

$$G_{ij}(t, t') = 0 \quad \text{si } t' > t$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{ij} \Big|_{t=t'} = 0 \quad \text{si } t \neq j$$

$$\lim_{t' \rightarrow t} \frac{\partial}{\partial t} G_{ii} = \frac{1}{m}$$

Entonces

$$\dot{x}_i^{(0)} = e \sum_j G_{ij}(t, t) E_j(t) + e \int_{-\infty}^t \sum_j E_j(t') \frac{\partial}{\partial t} G_{ij}(t, t') dt'$$

donde el primer término del lado derecho es cero debido a las propiedades de G_{ij} . Derivando de nuevo respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i^{(0)} &= e \sum_j E_j(t) \frac{\partial}{\partial t} G_{ij}(t, t) + e \int_{-\infty}^t \sum_j E_j(t') \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{ij}(t, t') dt' \\ &= \frac{e}{m} E_i(t) + e \int_{-\infty}^t \sum_j E_j(t') \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{ij}(t, t') dt' \end{aligned}$$

Sustituyendo en (A.1) y notando que

$$\left. \frac{\partial F_i(x_k)}{\partial x_k} \right|_0 = \frac{\partial \dot{p}_i^{(0)}}{\partial x_k^{(0)}}$$

obtenemos

$$eE_i(t) + m \int_{-\infty}^t \sum_j E_j(t') \frac{\partial^2 G_{ij}(t, t')}{\partial t^2} dt' =$$

$$e \frac{\partial \dot{p}_i^{(0)}}{\partial x_k^{(0)}} \int_{-\infty}^t \sum_j G_{kj}(t, t') E_j(t') dt' + eE_i(t)$$

de donde

$$e \sum_j \int_{-\infty}^t \left[m \frac{\partial^2 G_{ij}(t, t')}{\partial t^2} - \frac{\partial \dot{p}_i^{(0)}}{\partial x_k^{(0)}} G_{kj}(t, t') \right] E_j(t') dt$$

Como las E_j son arbitrarias, lo anterior implica que

$$m \frac{\partial^2 G_{ij}(t, t')}{\partial t^2} - \frac{\partial \dot{p}_i^{(0)}}{\partial x_k^{(0)}} G_{kj}(t, t') = 0$$

Por otro lado

$$\dot{p}_i^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} p_i^{(0)} = m \frac{\partial^2}{\partial t^2} x_i^{(0)}$$

de donde

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{ij}(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial x_k} \right] G_{kj}(t, t')$$

La ecuación anterior se satisface si tomamos

$$G_{ij}(t, t') = \frac{\partial x_i^{(0)}(t)}{\partial p_j^{(0)}(t')}$$

Finalmente, la solución de (A.1) es

$$x_i^{(a)} = e \int_{-\infty}^t \frac{\partial x_i^{(a)}(t)}{\partial p_j^{(a)}(t')} E_j^{(a)}(t') dt'$$

Referencias.

1. T.H. Boyer; *Phys. Rev.* 182, 1374, 1969
2. L. de la Peña; en *Stochastic Processes Applied to Physics and Other Related Fields*, editado por B. Gómez et al., World Scientific, Singapur, 1983.
3. L. de la Peña, A.M. Cetto; *New Approach to Stochastic Electrodynamics for the Explanation of Quantum Phenomena*, preprint IFUNAM 87-03.
4. J.D. Jackson; *Classical Electrodynamics*, Wiley, Nueva York, 1982, Cap. 17.
5. L. de la Peña, A.M. Cetto; *J. Math. Phys.* 20, 469, 1979.
6. T.W. Marshall; *Proc. R. Soc. London A* 276, 475, 1963.
7. H.E. Puthoff; *Phys. Rev. D* 35, 3266, 1987.
8. H. Goldstein; *Mecánica Clásica*, Aguilar, Madrid, seg. ed. 1979, Cap. 9.
9. M. Born; *The Mechanics of the Atom*, F. Ungar Publishing Co., Nueva York, 1960, Caps. 1 y 2.

CAPITULO III
EQUILIBRIO ENTRE MATERIA Y
RADIACION EN LA EDE

1. Introducción.

Hemos visto que en los casos particulares tratados en el capítulo anterior el espectro del campo de fondo de la EDE es compatible con la condición de balance detallado, mientras que en otros casos (p. ej. el sistema de Kepler) esta condición no se satisface. En este capítulo nos interesa investigar qué propiedades de los sistemas tratados en la sección 3 del capítulo anterior permiten que se satisfaga la condición de balance detallado.

Un sistema para el cual hay balance detallado absorbe del campo la misma cantidad de energía que la que emite, y esto para cada frecuencia. Esto significa que no hay intercambio de energía entre los diferentes modos normales del campo: la energía asociada a cada frecuencia es constante y, por lo tanto, el espectro del campo es invariante ante la dispersión de radiación por el sistema considerado.

Así, pues, la EDE será compatible con la condición de balance detallado si el espectro del campo de fondo es estable frente a la dispersión por un sistema mecánico cualquiera.

En este capítulo se revisan algunos de los trabajos que se han escrito con relación a este problema y se obtienen resultados análogos a los reportados en la literatura por medio del formalismo desarrollado en el capítulo anterior.

1. Introducción.

Hemos visto que en los casos particulares tratados en el capítulo anterior el espectro del campo de fondo de la EDE es compatible con la condición de balance detallado, mientras que en otros casos (p. ej. el sistema de Kepler) esta condición no se satisface. En este capítulo nos interesa investigar qué propiedades de los sistemas tratados en la sección 3 del capítulo anterior permiten que se satisfaga la condición de balance detallado.

Un sistema para el cual hay balance detallado absorbe del campo la misma cantidad de energía que la que emite, y esto para cada frecuencia. Esto significa que no hay intercambio de energía entre los diferentes modos normales del campo: la energía asociada a cada frecuencia es constante y, por lo tanto, el espectro del campo es invariante ante la dispersión de radiación por el sistema considerado.

Así, pues, la EDE será compatible con la condición de balance detallado si el espectro del campo de fondo es estable frente a la dispersión por un sistema mecánico cualquiera.

En este capítulo se revisan algunos de los trabajos que se han escrito con relación a este problema y se obtienen resultados análogos a los reportados en la literatura por medio del formalismo desarrollado en el capítulo anterior.

2. El equilibrio de la radiación electromagnética emitida con un oscilador dipolar no lineal.

Deyer¹ ha estudiado el problema del equilibrio de la radiación en estadística clásica en presencia de un oscilador dipolar no lineal y no relativista. En su trabajo Deyer obtiene la Distribución de equilibrio para la radiación a partir de las condiciones de movimiento clásico para la dispersión de radiación por el oscilador no lineal.

La ecuación de movimiento para el sistema considerado es

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - \gamma x^2 + mrx''' + eE_{\text{inc}}(0,t) \quad (2.1)$$

donde γ es una constante que supondremos pequeña y E_{inc} es la componente x del campo eléctrico inicial (es decir, el campo sin la contribución de la radiación emitida por el sistema). Además, se ha introducido la aproximación dipolar a fin de simplificar los cálculos.

Sean $p = ex$ el momento dipolar, $\alpha = \gamma/m\omega_0$ y $\tau = 2e^2/mc^3$. De (2.1) se tiene entonces que

$$\ddot{p} + \omega_0^2 p - \alpha p^2 - \tau \dot{p}^2 = \frac{\tau}{2} e^3 r E_{\text{inc}}(0,t) \quad (2.2)$$

Consideremos ahora el campo de radiación inicial homogéneo e isotrópico en una caja; introducimos el oscilador y esperamos a que se establezca un régimen estacionario. Dado que la interacción entre el oscilador y la radiación es conservativa es posible considerar el equilibrio del campo en términos del flujo neto de

radiación a través de una superficie esférica que rodea al oscilador. El $\langle S \rangle$ es el promedio temporal del vector de Poynting en la superficie de la esfera y \mathbf{n} la normal a esta superficie:

$$\mathbf{n} \cdot \langle S \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{n} \cdot \langle S(\omega) \rangle d\Omega \quad (3.3)$$

En general, $\langle S(\omega) \rangle \cdot \mathbf{n}$ es positivo para algunas frecuencias y negativo para otras, pero el campo estará en equilibrio detallado con el sistema dispersor si y solo si, para cada ω , se tiene

$$\mathbf{n} \cdot \langle S(\omega) \rangle = 0$$

Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} totales pueden considerarse como una superposición de los campos iniciales y la radiación emitida por el oscilador:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{in} + \mathbf{E}' \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_{in} + \mathbf{B}' \end{aligned} \quad (3.4)$$

Los campos iniciales se obtienen a partir de la siguiente expresión para el potencial vectorial (se considera $\phi = 0$):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{k}, \lambda) \frac{c}{i\omega} \frac{f(\mathbf{k}, \lambda)}{i\omega} \exp i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \theta(\mathbf{k}, \lambda)]$$

donde los vectores $\hat{\mathbf{e}}$ y \mathbf{k} cumplen las propiedades usuales de ortogonalidad y transversalidad, $\pi^2 \Lambda^2(\mathbf{k}, \lambda)$ es la densidad de energía por modo normal, y θ representa fases al azar, distribuidas uniformemente sobre $[0, 2\pi]$. Esta expresión para \mathbf{A}

constituye una descripción alternativa del campo estocástico de Pondo, distinta a la que hemos introducido en el capítulo anterior. En los apéndices al final de este capítulo se presenta una comparación entre ambas descripciones.

La radiación del dipolo es proporcional a $p = ex$, por lo que puede desarrollarse en potencias de α :

$$\begin{aligned} E' &= E_0 + E_1 + E_2 + \dots \\ B' &= B_0 + B_1 + B_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Entonces el vector de Poynting puede expresarse también como una serie de potencias de α :

$$\begin{aligned} S &= (c/4\pi) (E_{in} + E_0 + E_1 + \dots) \times (B_{in} + B_0 + B_1 + \dots) \\ &= (c/4\pi) [E_{in} \times B_{in} + (E_{in} \times B_0 + E_0 \times B_{in} + E_0 \times B_0) \\ &\quad + (E_{in} \times B_1 + E_1 \times B_{in} + E_0 \times B_1 + E_1 \times B_0) \\ &\quad + (E_{in} \times B_2 + E_2 \times B_{in} + E_0 \times B_2 + E_2 \times B_0 + E_1 \times B_1) \\ &\quad + \dots] \end{aligned}$$

Si la radiación inicial es isotrópica, $\langle E_{in} \times B_{in} \rangle = 0$. El término de orden 0 corresponde a un oscilador lineal, por lo que tampoco contribuye al promedio de S . Se puede mostrar que los términos del parentesis de primer orden se anulan uno a uno al promediar sobre las fases al azar $\theta(k, \lambda)^1$.

Así, pues, los aspectos no lineales del oscilador aparecen por primera vez en el término de orden 2. Si despreciamos los términos

de orden superior tenemos que

$$\langle S \rangle = \langle S_2 \rangle$$

$$\text{con } S_2 = E_{10} \times B_2 + E_2 \times B_{10} + E_0 \times B_2 + E_2 \times B_0 + E_1 \times B_1.$$

Después de un cálculo laborioso, Beyer obtiene una expresión para $\langle S_2(r, t) \rangle$. Integrando sobre todas las frecuencias se obtiene:

$$\langle S_2 \rangle = 0$$

Independientemente de la forma del espectro.

Introduciendo un espectro tal que $A^2(k, \lambda) = A^2 C \omega_3$, que corresponde a radiación inicial homogénea, isotrópica y monocromática con frecuencia ω_3 , se obtiene una expresión de la forma

$$\langle S_2(r, t) \rangle = f(r, \omega_3) \left\{ \left[\frac{(2\omega_3)^4}{|C_{23}|^2} + 0 \right] + \left[\frac{-2(2\omega_3)^3 \omega_3}{|C_{23}|^2} + 0 \right] \right\}$$

$$= 0$$

donde C_{23} es una función de ω_3 y f es una función de r y ω_3 . Vemos que la energía se conserva globalmente ($\langle S_2 \rangle = 0$), pero el término en ω_3^4 corresponde a emisión de energía a la frecuencia $2\omega_3$, mientras que el término en ω_3^3 corresponde a la absorción de la misma cantidad de energía, pero a la frecuencia ω_3 . Por lo tanto, este espectro no está en equilibrio en presencia del oscilador no lineal considerado.

Finalmente, Boyer demuestra que, en general, el espectro de equilibrio obedece la ley de Rayleigh-Jeans, y hace referencia a sus cálculos numéricos, según los cuales el espectro de la radiación del punto cero no está en equilibrio en presencia del oscilador dipolar no lineal. Boyer atribuye esto al hecho de que estos resultados han sido obtenidos por medio de un cálculo no relativista.

3. Absorción de radiación por sistemas multiperiodicos.

Las ideas desarrolladas en la sección anterior pueden ser extendidas al caso de un sistema multiperiodico arbitrario. En un artículo posterior², Boyer estudia el equilibrio entre un sistema multiperiodico y un campo de radiación estocástica clásica haciendo uso de los resultados obtenidos por Van Vleck en 1924³ para la absorción de radiación por una órbita multiperiodica. Estos resultados y una extensión de ellos se reportan en un artículo de Van Vleck y Huber⁴, que revisaremos a continuación.

Como hemos visto, las coordenadas de un sistema multiperiodico separable pueden expresarse como

$$x = \sum_k \tilde{R}_k e^{i2\pi k \cdot W}$$

donde $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ y n es el número de grados de libertad del sistema. Las k_i son enteros que van de $-\infty$ a ∞ y las ω_i son las variables angulares. El hamiltoniano del

sistema puede escribirse como una función de las variables de acción J_i :

$$H = H(J_1, J_2, \dots, J_n)$$

y las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{J}_i = - \frac{\partial H}{\partial w_i} = 0$$

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_i$$

de donde $w_i = \omega_i t + \varepsilon_i$.

Introduzcamos ahora un campo de radiación. Las variables w y J cambiarán debido al trabajo hecho por el campo sobre el sistema. Inicialmente consideraremos un campo consistente en ondas monocromáticas de frecuencia ω a lo largo del eje x . La componente de la fuerza en x es $-\partial V/\partial x = eE_x \cos[2\pi(\omega t + \varepsilon_0)]$ y puede escribirse como el negativo de la derivada con respecto a x de $V + xE_x \cos[2\pi(\omega t + \varepsilon_0)]$. El nuevo hamiltoniano de la partícula es $H' = H + xE_x \cos[2\pi(\omega t + \varepsilon_0)]$, donde H es el hamiltoniano del sistema antes de la interacción con el campo de radiación. Utilizando el nuevo hamiltoniano en términos de las variables de acción y ángulo las ecuaciones de Hamilton se convierten en

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} + \frac{\partial x}{\partial J_i} eE_x \cos[2\pi(\omega t + \varepsilon_0)]$$

$$\dot{J}_i = - \frac{\partial H}{\partial w_i} - \frac{\partial x}{\partial w_i} eE_x \cos[2\pi(\omega t + \varepsilon_0)]$$

Pero sabemos que $H = H(J)$, por lo que $\partial H/\partial w = 0$. Usando la expresión para x y expresando el coseno en términos de

exponenciales

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} + \frac{1}{2} e E_x \sum_k \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial J_i} \left\{ \exp[2\pi i (k \cdot W + \omega t + \varepsilon_0)] \right. \\ \left. + \exp[2\pi i (k \cdot W - \omega t - \varepsilon_0)] \right\} \quad (3.6)$$

$$\dot{J}_i = -i n e E_x \sum_k k_i \tilde{x}_k \left\{ \exp[2\pi i (k \cdot W + \omega t + \varepsilon_0)] \right. \\ \left. + \exp[2\pi i (k \cdot W - \omega t - \varepsilon_0)] \right\} \quad (3.7)$$

Sean J_i^0 los valores no perturbados de las variables de acción y $w_i^0 = \omega_i t + \varepsilon_i$ los de las variables angulares. Nos interesa determinar cómo se desvían w y J de estos valores iniciales al introducir el campo de radiación. Calcularemos estas desviaciones por medio de un desarrollo perturbativo en la amplitud E_x del campo ζ a primer orden para w y a segundo orden para J .

3.1 Perturbación en J a primer orden en E_x

Sean \tilde{x}_k^0 los valores no perturbados de los coeficientes del desarrollo de Fourier de x y

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

Tomando en cuenta que $w_i^0 = \omega_i t + \varepsilon_i$ y sustituyendo en el lado derecho de (3.7)

$$\begin{aligned}
 \dot{J}_i &= -in\omega E_x \sum_k k_i \tilde{x}_k^0 \left\{ \exp[2\pi i(k \cdot (\omega t + \rho) + \omega t + \varepsilon_0)] \right. \\
 &\quad \left. + \exp[2\pi i(k \cdot (\omega t + \rho) - \omega t - \varepsilon_0)] \right\} \\
 &= -in\omega E_x \sum_k k_i \tilde{x}_k^0 \left\{ \exp[2\pi i(k \cdot \rho - \varepsilon_0)] \exp[2\pi i(k \cdot \omega t - \omega t)] \right\}
 \end{aligned}$$

donde el símbolo Σ' indica que la suma debe repetirse sustituyendo $-\omega$ por $+\omega$ y $-\varepsilon_0$ por $+\varepsilon_0$. Integrando la ecuación anterior respecto al tiempo

$$J_i = -\frac{i}{2} \omega E_x \sum_k k_i \tilde{x}_k^0 \left\{ \frac{\exp 2\pi i(k \cdot \rho - \varepsilon_0) \exp 2\pi i(k \cdot \omega t - \omega t)}{(k \cdot \omega - \omega)} \right\}$$

Supongamos que la interacción con el campo empieza a $t = 0$ y que a este tiempo se tiene $J_i = J_i^0$:

$$J_i^0 = -\frac{i}{2} \omega E_x \sum_k k_i \tilde{x}_k^0 \left\{ \frac{\exp 2\pi i(k \cdot \rho - \varepsilon_0)}{(k \cdot \omega - \omega)} \right\}$$

de donde

$$\Delta J_i = J_i - J_i^0 = \frac{f}{2} e E_x \sum_k k_i \tilde{x}_k^0 \exp 2\pi i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} - \varepsilon_0) \times \left\{ \frac{1 - \exp 2\pi i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} - \omega)t}{(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} - \omega)} \right\} \quad (3.7)$$

3.2 Perturbación en ω a primer orden en E .

Debido a las fluctuaciones de las variables de acción los factores $\partial H / \partial J$ en la expresión para ω_i no tendrán su valor no perturbado ω_i^0 . Como las $\partial H / \partial J$ son funciones de las J únicamente pueden expresarse como series de ΔJ_i :

$$\frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_i + \sum_j \frac{\partial \omega_i}{\partial J_j} \Delta J_j$$

donde

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial J_j} = \frac{\partial^2 H}{\partial J_j \partial J_i} \Big|_{J_i = J_i^0}$$

Introduciendo en (3.8) los valores no perturbados $\omega_i^0 = \omega_i t + \varepsilon_i$ y $\partial \tilde{x}_k / \partial J_i = \partial \tilde{x}_k^0 / \partial J_i$ obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = \omega_i + \frac{1}{2} e E_x \sum_k \left\{ \sum_j \frac{\partial \omega_i}{\partial J_j} \tilde{x}_k^0 \exp 2\pi i (k \cdot a - \varepsilon_0) k_i \right. \\ \left. \times \left[\frac{1 - \exp 2\pi i (k \cdot \omega - \omega) t}{(k \cdot \omega - \omega)} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial \tilde{x}_k^0}{\partial J_i} \exp 2\pi i (k \cdot a - \varepsilon_0) \exp 2\pi i (k \cdot \omega - \omega) t \right\} \end{aligned}$$

Integrando respecto al tiempo

$$\begin{aligned} w_i = \omega_i t + e E_x \sum_k \left\{ \sum_j \frac{\partial \omega_i}{\partial J_j} \tilde{x}_k^0 \exp 2\pi i (k \cdot a - \varepsilon_0) k_i \right. \\ \left. \times \left[\frac{2\pi (k \cdot \omega - \omega) t + i \exp 2\pi i (k \cdot \omega - \omega) t}{4\pi (k \cdot \omega - \omega)^2} \right] \right. \\ \left. - i \frac{\partial \tilde{x}_k^0}{\partial J_i} \exp 2\pi i (k \cdot a - \varepsilon_0) \frac{\exp 2\pi i (k \cdot \omega - \omega) t}{4\pi (k \cdot \omega - \omega)} \right\} \end{aligned}$$

Antes de aplicar la perturbación tenemos

$$w_i^0(t) = \omega_i t + \varepsilon_i = \omega_i t + w_i^0(0)$$

y

$$w_i^0(0) = w_i(0) = eE_x \sum_k \left\{ \sum_j \frac{\partial w_i}{\partial J_j} \tilde{x}_k^0 \exp 2\pi i(k \cdot a - \varepsilon_0) \frac{k_i l}{4\pi(k \cdot \omega - \omega)^2} - i \frac{\partial \tilde{x}_k^0}{\partial J_i} \frac{\exp 2\pi i(k \cdot a - \varepsilon_0)}{4\pi(k \cdot \omega - \omega)} \right\}$$

Entonces $\Delta w_i = w_i(t) - w_i^0(t) = w_i(t) - w_i t - w_i^0(t)$, de donde

$$\Delta w_i = eE_x \sum_k \left\{ \sum_j \frac{\partial w_i}{\partial J_j} \tilde{x}_k^0 \exp 2\pi i(k \cdot a - \varepsilon_0) k_i \times \left[\frac{2\pi(k \cdot \omega - \omega)t - i[1 - \exp 2\pi i(k \cdot \omega - \omega)t]}{4\pi(k \cdot \omega - \omega)^2} \right] + \frac{\partial \tilde{x}_k^0}{\partial J_i} \exp 2\pi i(k \cdot a - \varepsilon_0) \left[\frac{1 - \exp 2\pi i(k \cdot \omega - \omega)t}{4\pi(k \cdot \omega - \omega)} \right] \right\} \quad (3.8)$$

3.3 Perturbación en J a segundo orden en E.

De manera análoga podemos obtener ΔJ_i a segundo orden en E_x . Nos interesa además el promedio sobre un ensemble de sistemas con los mismos valores iniciales de las J_i , pero valores de ε_i distribuidos uniformemente sobre $(0, 2\pi)$. El valor final promediado sobre el ensemble resulta ser⁽⁸⁾

$$\overline{\Delta J}_i = \frac{1}{8} \epsilon^2 E_x \sum_k \left\{ k_i \tilde{x}_k^2 \sum_j k_j \frac{\partial \omega_i}{\partial J_j} \right. \\ \times \frac{-2 + 2 \cos 2\pi(k \cdot \omega - \omega)t + 2\pi(k \cdot \omega - \omega)t \operatorname{sen} 2\pi(k \cdot \omega - \omega)t}{(k \cdot \omega - \omega)^3} \\ \left. + k_i \sum_j k_j \frac{\partial \tilde{x}_k^2}{\partial J_j} \frac{1 - \cos 2\pi(k \cdot \omega - \omega)t}{(k \cdot \omega - \omega)^2} \right\} \quad (3.9)$$

donde $\tilde{x}_k = \tilde{x}_k^0 \tilde{x}_{-k}^0$, y en este caso el símbolo Σ' indica suma sobre los términos tales que $k \cdot \omega \geq 0$. Se emplea este significado siempre que aparezca \tilde{x}_k^2 en lugar de \tilde{x}_k^0 .

Hasta aquí se ha supuesto que la radiación incidente es monocromática. Sea $\rho(\omega)$ la densidad de energía por intervalo de frecuencias, de modo que la energía entre las frecuencias ω y $\omega + d\omega$ sea $\rho(\omega)d\omega$. Por otro lado, en un campo de radiación homogénea cada una de las componentes del campo eléctrico y del campo magnético contribuye igual a la energía, de manera que el valor medio de la densidad de energía $(8\pi)^{-1}(\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2)$ es $3\overline{\mathcal{E}_x^2}/4\pi$, por ejemplo. Entonces $\overline{\mathcal{E}_x^2} = \frac{4}{3} \pi \rho(\omega)d\omega$. En el caso que estamos considerando tenemos que $\mathcal{E}_x = E_x \cos 2\pi(\omega t + \epsilon_0)$, de modo que $\overline{\mathcal{E}_x^2} = \frac{1}{2} E_x^2$, es decir, $E_x^2 = \frac{8}{3} \pi \rho(\omega)d\omega$.

Ahora hay que sustituir este resultado en (3,8) e integrar sobre todas las frecuencias de la radiación incidente. Sea $x = (\omega - k \cdot \omega)t$. La contribución a ΔJ del término k de la serie múltiple de Fourier será

$$\Delta J_i = \frac{t}{3} \pi e^2 k_i \tilde{x}_k^0 \sum_j k_j \frac{\partial \omega_i}{\partial J_j} t^2 \int \frac{2 - 2 \cos 2\pi x - 2\pi \sin 2\pi x}{x^3} \rho(\omega) dx$$

$$+ \frac{t}{3} \pi e^2 k_i \sum_j k_j \frac{\partial \tilde{x}_k^2}{\partial J_j} t \int \frac{2 - \cos 2\pi x}{x^2} \rho(\omega) dx \quad (3.10)$$

donde las integrales van de $-k_i \omega t$ a ω , pero si t es suficientemente grande podemos tomarlas de $-\omega$ a ω . De acuerdo con el significado de Σ' en la ecuación (3.10) deberíamos de haber considerado también los términos en los que $-\omega$ es reemplazado por $+\omega$, pero como en este caso $x = (\omega + k_i \omega) t$, estas integrales van de $+k_i \omega t$ a ω , de modo que, para valores grandes de t , la integración se llevaría a cabo sobre valores muy grandes de x y la contribución de estas integrales resultaría despreciable debido a los factores x^{-2} y x^{-3} . La omisión de los términos $k_i \omega + \omega$ equivale a la suposición de que las únicas contribuciones apreciables a la perturbación provienen de términos en que x es cercana a 0, es decir, de términos para los que hay resonancia.

En la segunda integral de (3.10) el factor $\rho(\omega)$ puede sustituirse por $\rho(k_i \omega)$ en el punto de resonancia $\omega = k_i \omega$. Además, como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos 2\pi x}{x^2} dx = 4 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \pi x}{x^2} dx = 2\pi^2$$

la segunda integral resulta ser $2\pi^2 \rho(k_i \omega)$. Integrando por partes la primera integral de (3.10) ésta queda de la misma forma que la

segunda, pero con $\partial\rho/\partial x = t^{-1}\partial\rho/\partial\omega$ en vez de $\rho(k,\omega)$. Entonces la primera integral es $2\pi^2 t^{-1}\partial\rho/\partial\omega|_{\omega=k,\omega}$.

Con estos resultados y sumando sobre todos los términos en el desarrollo de x para obtener la perturbación total obtenemos

$$\overline{\Delta J_i} = \frac{2}{3} \pi^3 e^2 t \sum_k \left\{ k_i D_k^2 \sum_j k_j \frac{\partial \omega_i}{\partial J_j} \frac{\partial \rho}{\partial \omega} \Big|_{k,\omega} + k_i \sum_j k_j \frac{\partial D_k^2}{\partial J_j} \rho(k,\omega) \right\} \quad (3.11)$$

donde $|D_k|^2 = |\tilde{x}_k^{(1)}|^2 + |\tilde{x}_k^{(2)}|^2 + \dots + |\tilde{x}_k^{(n)}|^2$. De esta manera se toma en cuenta la perturbación total.

Ahora, usando la ecuación (3.7) para calcular el producto $\Delta J_i \Delta J_j$ y promediando de manera análoga a como se hizo en la ecuación (3.9) se obtiene

$$\overline{\Delta J_i \Delta J_j} = \frac{1}{4} e^2 E_x^2 \sum_k \left\{ k_i k_j \tilde{x}_k^2 \frac{1 - \cos 2\pi(k \cdot \epsilon - \omega)t}{(k \cdot \epsilon - \omega)^2} \right\} \quad (3.12)$$

El paso a una distribución de radiación continua es análogo al paso de (3.9) a (3.11). Finalmente se obtiene

$$\overline{\Delta J_i \Delta J_j} = \frac{4}{3} \pi^3 e^2 t \sum_k \left\{ k_i k_j D_k^2 \rho(k,\omega) \right\}$$

Sea ahora $E - E_0$ la energía absorbida por el sistema. Se tiene entonces que

$$\Gamma - \Gamma_0 = H(\rho^0 + \Delta J) - H(J^0)$$

Desarrollando esta expresión en serie de las ΔJ y conservando términos hasta orden E_x^2 obtenemos

$$E - E_0 = \sum_i \omega_i \overline{\Delta J_i} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial \omega_i}{\partial J_j} \overline{\Delta J_i \Delta J_j} \quad (3.13)$$

donde, como se hizo anteriormente, $\omega_i = \partial H / \partial J_i|_0$.

Combinando las ecuaciones (3.9), (3.12) y (3.13) y derivando respecto al tiempo obtenemos finalmente la expresión para la potencia media absorbida por el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dE_J}{dt} = \mathcal{P}_{abs} = \frac{4\pi^2 e^2}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{k+} k_i \frac{\partial}{\partial J_i} \left[\omega \cdot k |D_k|^2 \left[\delta(\omega \cdot k - \omega) \right. \right. \\ \left. \left. + \delta(\omega \cdot k + \omega) \right] \rho(\omega) \right] \quad (3.14) \end{aligned}$$

donde $\rho(\omega)$ es la densidad espectral del campo y el símbolo $k+$ en la segunda sumatoria indica suma sobre términos tales que $\omega \cdot k \geq 0$.

Ahora supongamos que los sistemas se distribuyen en el espacio J conforme a las leyes de la mecánica estadística clásica. El número de sistemas en el elemento de volumen d^3J (en el caso tridimensional) es $\rho_J d^3J$, donde

$$\rho_J = N C e^{-H/kT}$$

En esta expresión N es el número de sistemas por unidad de volumen y

$$\frac{f}{\bar{c}} = \int d^3J e^{-H/kT}$$

es la función de partición.

De esta manera, podemos escribir la potencia media absorbida por el ensemble como

$$N \langle \mathcal{P}_{\text{abs}} \rangle = \int d^3J \rho_J \mathcal{P}_{\text{abs}} \quad (3.15)$$

donde \mathcal{P}_{abs} está dado por (3.14). Sustituyendo (3.14) en (3.15) se obtiene⁴

$$\begin{aligned} N \langle \mathcal{P}_{\text{abs}} \rangle &= \frac{4\pi^2 e^2}{3kT} \int d^3J \sum_{k+} \rho_J(\omega, k)^2 |D_k|^2 \\ &\times \left[\delta(\omega, k - \omega) + \delta(\omega, k + \omega) \right] \rho(\omega) \quad (3.16) \end{aligned}$$

4. Equilibrio entre un sistema multiperiodico y la radiación térmica clásica.

Integrando la expresión (3.16) sobre las funciones δ y tomando en cuenta que ω, k y ω son positivas se encuentra finalmente que

$$N \langle \mathcal{P}_{\text{abs}} \rangle = \frac{4\pi^2 e^2}{3kT} \int d^3J \sum_{k+} \rho_J(\omega, k)^2 |D_k|^2 \rho(\omega) \quad (3.17)$$

Por otro lado, la potencia radiada por un electrón acelerado es $\frac{2}{3} c^{-3} e^2 \dot{x}^2$, de manera que la potencia media emitida por el ensemble es

$$\langle N \mathcal{P}_{em} \rangle = \frac{fe^2}{3c^3} \int d^3J \sum_{k^+} (\omega \cdot k)^4 |D_k|^2 \rho_J \quad (3.18)$$

Finalmente, comparando (3.17) con (3.18) vemos que el balance detallado se satisface cuando la densidad de energía de la radiación está dada por

$$\rho(\omega) = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2 \quad (3.19)$$

Esto es válido para sistemas multiperiodicos arbitrarios y coincide con el resultado que reporta Boyer en la ref. 1.

5. Equilibrio de un sistema multiperiodico con el espectro del campo de fondo de la EDE.

Podemos ahora aplicar el formalismo desarrollado en el capítulo anterior para determinar en qué circunstancias se satisface la condición de balance detallado en la EDE.

Sea \mathcal{P}_k la potencia media total que interviene en la interacción entre un sistema multiperiodico y el k -ésimo modo de

un campo de radiación estocástica con espectro $S = S(\omega)$. De la ecuación (2.24) podemos ver que

$$\mathcal{P}_k = k^4 \omega^4 |\tilde{x}_k|^2 - \frac{3}{2} \pi^2 c^3 k \frac{\partial}{\partial J} \left[S(k\omega) k \omega |\tilde{x}_k|^2 \right] \quad (3.20)$$

para un sistema unidimensional con armónicos. Con esta notación la ecuación (2.24) se transforma en

$$\sum_k \mathcal{P}_k = 0$$

y la condición de balance detallado puede escribirse como

$$\mathcal{P}_k = 0 \quad (3.21)$$

para toda k . Supongamos ahora que el espectro es de la forma

$$S(\omega) = K \omega^m \quad (3.22)$$

donde K es una constante. De (3.20)

$$\mathcal{P}_k = k^4 \omega^4 |\tilde{x}_k|^2 - \frac{3}{2} \pi^2 c^3 K k^{m+2} \frac{\partial}{\partial J} \left[\omega^{m+1} |\tilde{x}_k|^2 \right] \quad (3.23)$$

Para tener iguales potencias de k en cada miembro del lado derecho de la ecuación (3.23), de modo que se satisfaga la condición de balance detallado, es necesario que $m = 2$, lo que coincide con los resultados anteriores.

Ahora consideremos un oscilador armónico unidimensional, es

decir, un sistema que interactúa con un solo modo del campo. En este caso la potencia media intercambiada será

$$P = \omega^4 |\tilde{x}_1|^2 - \frac{3}{2} \pi^2 c^3 K \frac{\partial}{\partial J} \left[\omega^{m+1} |\tilde{x}_1|^2 \right] \quad (3.24)$$

De acuerdo con lo dicho anteriormente, la variable de acción para este sistema es de la forma

$$J = \alpha \omega |\tilde{x}_1|^2 \quad (3.25)$$

donde α es una constante. Notemos que en este caso la frecuencia ω no depende de la variable J . El término dentro del paréntesis en (3.24) puede escribirse entonces como

$$\omega^{m+1} |\tilde{x}_1|^2 = \frac{J}{\alpha} \omega^m \quad (3.26)$$

y análogamente

$$\omega^4 |\tilde{x}_1|^2 = \frac{J}{\alpha} \omega^3 \quad (3.27)$$

Sustituyendo (3.26) y (3.27) en (3.24) obtenemos finalmente

$$P = \frac{J}{\alpha} \omega^3 - \frac{3}{2} \pi^2 c^3 K \frac{\omega^m}{\alpha} \quad (3.28)$$

La condición de balance detallado exige entonces que el espectro sea de la forma

$$S(\omega) = K \omega^3 \quad (3.29)$$

que coincide con la forma del espectro del campo de fondo de la EDE. En particular, si $K = 2\pi/3\pi c^3$, recuperamos los resultados obtenidos en el capítulo anterior para el oscilador armónico lineal.

En el caso más general, un sistema unidimensional sin armónicos será tal que $\omega = \omega(J)$. Para sistemas sometidos a potenciales de la forma $V = bx^k$ es fácil encontrar la relación entre ω y J (ref. 7).

Sea T la energía cinética de un sistema periódico con frecuencia ν . El promedio temporal de T está dado por

$$\overline{T} = \nu \int_0^\nu T dt \quad (3.30)$$

Ahora consideremos un sistema multiperiodico con posiciones y momentos generalizado q_k y p_k . Las variables de acción están definidas por

$$J_k = \oint p_k dq_k \quad (3.31)$$

Las variables conjugadas a las J_k son las variables angulares θ_k , que satisfacen

$$\dot{\theta}_k = \frac{\partial H(J)}{\partial J_k} = \nu_k \quad (3.32)$$

donde J representa a todo el conjunto de variables de acción y ν_k es la frecuencia asociada con el movimiento periódico de la coordenada q_k .

Para sistemas con un grado de libertad las ecuaciones (3.30) y (3.31) implican que

$$J = \oint p \, dq = \frac{1}{m} \int_0^{\nu} p^2 \, dt = \frac{2}{\nu} \mathbb{P}_1(T) \quad (3.33)$$

Supongamos ahora que el potencial es de la forma

$$V = bx^k \quad (3.34)$$

Aplicando el teorema del virial obtenemos

$$2 \mathbb{P}_1(T) = \mathbb{P}_1 \left(x \frac{dV}{dx} \right) = k \mathbb{P}_1(V) \quad (3.35)$$

La energía total puede expresarse entonces como

$$E = \mathbb{P}_1(T) + \mathbb{P}_1(V) = \left(1 + \frac{2}{k} \right) \mathbb{P}_1(T) \quad (3.36)$$

o bien, tomando $\eta = k/(k + 2)$,

$$\mathbb{P}_1(T) = \eta E \quad (3.37)$$

Combinando este resultado con la ecuación (3.33) obtenemos

$$\frac{E}{\nu} = \frac{J}{2\eta} \quad (3.38)$$

de donde, tomando en cuenta el resultado (3.32),

$$\frac{dH}{dJ} = 2\eta \frac{H}{J} \quad (3.39)$$

Cuando η es constante esta ecuación puede integrarse de inmediato. Se obtiene finalmente que

$$E = CJ^{2\eta} \quad (3.40)$$

donde C es una constante de integración. Como, por otro lado, $\nu = \partial H / \partial J$, vemos que

$$\nu = 2\eta CJ^{2\eta-1}$$

y, finalmente:

$$\omega = 2\pi\nu = 4\pi\eta CJ^{2\eta-1} \quad (3.41)$$

Ahora apliquemos este resultado, válido para sistemas periódicos unidimensionales sin armónicos para los cuales ω es una función de J , a la ecuación (3.24). En primer lugar, notamos que la potencia \mathcal{P} en este caso es

$$\mathcal{P} = \frac{J}{\alpha} \omega^3(J) - \frac{3}{2} \pi^2 c^3 K \left[\frac{\omega^m(J)}{\alpha} + \frac{J}{\alpha} m \omega^{m-1} \frac{\partial \omega}{\partial J} \right] \quad (3.42)$$

donde se han utilizado los resultados (3.26) y (3.27) y el hecho de que $\omega = \omega(J)$. De (3.41) vemos que

$$\frac{\partial \omega}{\partial J} = 4\pi C \eta (2\eta - 1) J^{2\eta-1} = (2\eta - 1) \frac{\omega}{J} \quad (3.43)$$

de donde

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{J}{\alpha} \omega^3(J) - \frac{3}{2} \pi^2 c^3 K \left[\frac{\omega^m(J)}{\alpha} + (2\eta - 1) m \frac{\omega^m(J)}{\alpha} \right] \\
 &= \frac{J}{\alpha} \omega^3(J) - \frac{3}{2} \pi^2 c^3 K \left[1 + (2\eta - 1)m \right] \frac{1}{\alpha} \omega^m(J) \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

de donde resulta claro, nuevamente, que para satisfacer la condición de balance detallado es necesario que $m = 3$, es decir, que el espectro sea de la forma

$$S \sim \omega^3$$

6. Conclusiones.

Hemos mostrado que la condición de balance detallado en la EDE se satisface únicamente cuando se consideran sistemas con una sola frecuencia. En cualquier otro caso el espectro de equilibrio para la radiación clásica en interacción con sistemas multiperiodicos clásicos es el espectro de Rayleigh-Jeans.

Esto descarta la posibilidad de tratar con éxito el caso de sistemas mecánicos sujetos a fuerzas no lineales por medio del formalismo usual de la EDE. En particular, el tratamiento del átomo de hidrógeno, cuyo comportamiento puede ser descrito con gran precisión por la mecánica cuántica usual, conduce a resultados inaceptables³.

Boyer² ha sugerido la posibilidad de que el empleo de la mecánica relativista en el estudio de la interacción entre radiación y materia en la EDE conduzca a la invariancia del espectro del campo de fondo frente a la dispersión por sistemas arbitrarios. De acuerdo con Boyer, la mecánica relativista debe predecir una tasa de emisión mayor para los armónicos superiores que la que se obtiene por medio de la mecánica clásica. Este efecto tiende a compensar la falta de equilibrio en el tratamiento clásico. Estas consideraciones cualitativas sugieren que, para sistemas relativistas, el equilibrio de la radiación exige un espectro con mayor energía en los armónicos superiores que la que se requiere para sistemas no relativistas.

Además, Boyer¹ observa que el campo del punto cero es el campo de radiación más desordenado posible en un universo relativista, de modo que, consistentemente con las ideas usuales de entropía y desorden, la interacción de la radiación con un sistema relativista debería dejar invariante el espectro del campo.

Marshall⁶ ha sugerido que el origen del problema no está en el empleo de la mecánica no relativista y ha propuesto que el campo de fondo no tiene por qué estar en equilibrio. En efecto, puesto que el campo de fondo está producido por el resto del universo, las variables que lo describen deberían variar más lentamente que las variables que describen al sistema mecánico. Así, pues, sería razonable suponer que el sistema está en equilibrio aunque la radiación no lo esté, estrictamente hablando.

Sin embargo, esta proposición no resuelve otro problema que afronta la EDE: el espectro de equilibrio de la radiación depende

de los detalles de la dinámica del sistema considerado, lo que contradice la ley de Kirchoff.

De estas observaciones se desprende que el formalismo usual de la EDE descrito en el capítulo anterior no proporciona un modelo suficientemente general del mundo microscópico. En el siguiente capítulo se presenta un nuevo formalismo para la EDE que permite resolver el problema del balance detallado.

Apéndice A.

Antes de establecer la comparación entre las dos descripciones alternativas del campo estocástico de fondo es conveniente observar que la expresión de Boyer para el potencial vectorial es incorrecta desde el punto de vista de las dimensiones. Este detalle es de mínima importancia, pero lo introducimos aquí por razones de completéz.

Pasando al caso discreto (V finito) podemos escribir la expresión de Boyer como

$$A = \sum_{n\sigma} K \hat{\sigma}_{n\sigma} A_{n\sigma} \sin(k_n x + \vartheta_{n\sigma})$$

donde K es el coeficiente cuyo valor queremos determinar, $A_{n\sigma}$ es tal que

$$\lim_{V \rightarrow \infty} A_{n\sigma} = A(k, \sigma)$$

$$\text{y } k_n x = k_n \cdot x - \vartheta_n t.$$

Calculando los campos E y B en la norma de Coulomb obtenemos

$$E = \sum_{n\sigma} \frac{K}{c} \hat{\sigma}_{n\sigma} A_{n\sigma} \vartheta_n \cos(k_n x + \vartheta_{n\sigma})$$

$$B = \sum_{n\sigma} K (k_n \times \hat{\sigma}_{n\sigma}) A_{n\sigma} \cos(k_n x + \vartheta_{n\sigma})$$

El promedio sobre fases al azar de la densidad de energía del campo es

$$\langle u \rangle = (\vartheta \pi)^{-1} \langle E^2 + B^2 \rangle$$

Utilizando las expresiones para E y B y notando que

$$\langle \cos(k_n x + \theta_{n\sigma}) \cos(k_{n'\sigma'} x + \theta_{n'\sigma'}) \rangle = \frac{1}{2} \delta_{nn'} \delta_{\sigma\sigma'}$$

se obtiene

$$\langle u \rangle = \sum_{n\sigma} (8\pi)^{-1} k^2 \hbar^2_{n\sigma} k_n^2$$

pero $\pi^2 \hbar^2_{n\sigma} = \frac{1}{2} \hbar \omega_n$ y $k_n^2 = \omega^2/c^2$, de donde

$$\langle u \rangle = \sum_{n\sigma} (16\pi^3 c^2)^{-1} \hbar \omega_n^3 k^2$$

Queremos que la densidad de energía por modo normal sea $(2V)^{-1} \hbar \omega_n$. Esto implica que

$$k = \left(\frac{8\pi^3}{V} \right)^{1/2} c / \omega_n \quad (\text{A. 2})$$

Introduciendo (A. 2) en (A. 1) obtenemos

$$A = \sum_{n\sigma} \left(\frac{8\pi^3}{V} \right)^{1/2} \hat{a}_{n\sigma} \frac{c}{\omega_n} \hbar_{n\sigma} \sin(k_n x + \theta_{n\sigma}) \quad (\text{A. 3})$$

Apéndice B.

En el capítulo II se ha introducido la siguiente expresión para el potencial vectorial del campo estocástico de fondo

$$A = \sum_{n\sigma} \left(\frac{2\pi\hbar c}{V\omega_n} \right)^{1/2} \hat{e}_{n\sigma} \alpha_{n\sigma} \exp[i(k_n \cdot x - \omega_n t)] + c.c. \quad (B.1)$$

donde los $\hat{e}_{n\sigma}$ son vectores de polarización y las $\alpha_{n\sigma}$ son amplitudes complejas estocásticas, que podemos escribir como

$$\alpha_{n\sigma} = r_{n\sigma} e^{i\vartheta_{n\sigma}} \quad (B.2)$$

En esta expresión $r_{n\sigma}$ representa amplitudes reales fluctuantes, y $\vartheta_{n\sigma}$ son fases al azar distribuidas uniformemente sobre $[0, 2\pi]$.

La expresión de Boyer para el potencial vectorial puede escribirse en la forma general de las ecuaciones (B.1) y (B.2), salvo que, en este caso, las $r_{n\sigma}$ de la ec. (B.2) son amplitudes reales fijas (no fluctuantes). La estocasticidad se introduce únicamente a través de las fases al azar $\vartheta_{n\sigma}$.

Es necesario entonces mostrar que ambas descripciones son equivalentes, al menos desde el punto de vista de los resultados promediados, es decir, que ambas generan la misma distribución estadística para las componentes cartesianas del campo en el límite físico $V \rightarrow \infty$.

En la descripción de amplitudes estocásticas cada componente de Fourier del campo del punto cero es un proceso gaussiano estacionario con media nula, estadísticamente independiente de las

demás componentes. Entonces, las componentes cartesianas totales (suma sobre ondas planas) resultan ser también variables aleatorias gaussianas para cada (x, t) , independientes las unas de las otras.

En la descripción de fases al azar las componentes de Fourier del campo electromagnético no son gaussianas. Sin embargo, el teorema del límite central permite mostrar que, cuando V tiende a ∞ , la descripción de fases al azar (y, de hecho, cualquier distribución que permita aplicar el teorema) produce también una distribución gaussiana para las componentes cartesianas totales. La demostración que sigue se debe a G.H. Goedecke⁶.

La forma general de las componentes cartesianas totales

$$A_i(x, t) = \sum_{n\sigma} A_{n\sigma}^i(x, t) \quad (B.3)$$

Sea $P_{n\sigma}^i = P_{n\sigma}^i(A_{n\sigma}^i)$ la distribución de probabilidad de $A_{n\sigma}^i$. Supongamos que $P_{n\sigma}^i$ es homogénea, estacionaria y de media cero. La función característica de esta distribución es

$$\begin{aligned} \phi_{n\sigma}^i(K) &= \int dA_{n\sigma}^i \exp(iKA_{n\sigma}^i) P_{n\sigma}^i(A_{n\sigma}^i) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-K^2)^l}{(2l)!} \langle A_{n\sigma}^i{}^{2l} \rangle \end{aligned}$$

Como las $A_{n\sigma}^i$ son estadísticamente independientes, la función característica $\Phi^i(K)$ de la distribución $P^i(E^i)$ de la componente cartesiana total E^i es el producto de todas las $\phi_{n\sigma}^i$. En el límite $V \rightarrow \infty$ tendremos entonces que

$$\text{Log } \bar{\Phi}^i(K) = \lim_{V \rightarrow \infty} \sum_{n\sigma} \text{Log } \phi_{n\sigma}^i(K)$$

Sabemos, por otro lado, que

$$\langle A_{n\sigma}^{i2} \rangle \sim V^{-1}$$

y que

$$\langle A_{n\sigma}^{i2} \rangle = \left[\frac{2\pi k \omega_n}{V} \right] \hat{a}_{n\sigma}^{i2}$$

de donde

$$\phi_{n\sigma}^i(K) = 1 - \frac{1}{2} K^2 \frac{1}{V} 2\pi k \omega_n \hat{a}_{n\sigma}^{i2} + \mathcal{O}(V^{-2})$$

Conservando términos hasta orden V^{-1} obtenemos

$$\text{Log } \phi_{n\sigma}^i(K) \cong - \frac{1}{2} K^2 \frac{1}{V} 2\pi k \omega_n \hat{a}_{n\sigma}^{i2}$$

de donde

$$\begin{aligned} \text{Log } \bar{\Phi}^i(K) &= \lim_{V \rightarrow \infty} \left[- \frac{1}{2} K^2 \frac{1}{V} 2\pi \sum_{n\sigma} k \omega_n \hat{a}_{n\sigma}^{i2} \right] \\ &= - \frac{1}{2} K^2 \langle E^{i2} \rangle \end{aligned}$$

lo que da una distribución gaussiana estacionaria y con media cero para las componentes cartesianas totales E^i , independientemente de las distribuciones $P_{n\sigma}^i$ de las ondas planas. Esto significa que las dos descripciones del campo estocástico de fondo que se han introducido en este trabajo son equivalentes, al menos en cuanto a valores esperados se refiere.

Existen, sin embargo, diferencias entre ambas descripciones. En la descripción de amplitudes estocásticas la densidad de

energía del campo es una cantidad fluctuante, aun en el límite $V \rightarrow \infty$, mientras que en la de fases al azar la densidad de energía es fija. En este sentido la descripción de amplitudes estocásticas es más completa.

Referencias.

1. T. H. Boyer; Phys. Rev. D 13, 2832, 1978.
2. T. H. Boyer; Phys. Rev. A 18, 1228, 1978.
3. J. H. Van Vleck; Phys. Rev. 24, 330, 1924.
4. J. H. Van Vleck, D. L. Huber; Rev. Mod. Phys. 49, 939, 1977.
5. T. W. Marshall, P. Claverie; J. Math. Phys. 21(7), 1819, 1980.
6. T. W. Marshall, en *Dynamical Systems and Microphysics*, editado por Blaquiére et al., 1980. (ver también ref. 7).
7. A. M. Cetto, L. de la Peña; Am. J. Phys. 52 (6), 539, 1984.
8. G. H. Goedecke; Found. Phys., Vol. 13, No. 11, 1101, 1983.

CAPITULO IV
UNA NUEVA VISION DE LA EDE

1. Introducción.

En los capítulos anteriores hemos podido comprobar que los métodos usuales para describir la evolución de sistemas mecánicos en interacción con el campo estocástico de fondo conducen a resultados insatisfactorios cuando las fuerzas externas son no lineales, obligándonos a descartar la posibilidad de tratar con éxito casos tan importantes como el del átomo de hidrógeno. Esto se debe, como hemos visto, a que, en los casos no lineales, el sistema no interactúa con un solo modo del campo, de manera que es posible el intercambio de energía entre modos distintos, lo que conduce, en general, a la violación de la condición de balance detallado.

Sin embargo, como se ha dicho, ésta no parece una razón suficiente para descartar la teoría, cuyos postulados fundamentales son sencillos y físicamente plausibles. Antes bien se hace necesario buscar una forma de descripción alternativa.

En el tratamiento expuesto en el capítulo II se introduce la hipótesis, ajena a los postulados básicos de la EDE, de que la interacción con el campo estocástico de fondo puede ser considerada como una perturbación. Esta hipótesis también se incluye implícitamente en los tratamientos más usuales que hacen uso de la ecuación de Fokker-Planck. En este capítulo queremos considerar el caso contrario: la interacción con el campo de fondo determina de manera fundamental el comportamiento del sistema mecánico. El nuevo tratamiento que exponemos a continuación se debe a L. de la Peña y A.M. Cetto ¹⁻².

2. Una nueva descripción dinámica de las partículas.

Consideremos el sistema completo formado por la partícula y el campo de fondo descrito por el hamiltoniano

$$H_T = (1/2m)(p - \frac{e}{c}A)^2 + V(x) + H_R \quad (4.1)$$

donde

$$H_R = \frac{1}{2} \sum_n \sum_{\sigma} (\rho_{n\sigma}^2 + \omega_n^2 q_{n\sigma}^2) = \sum_n \sum_{\sigma} \hbar \omega_n b_{n\sigma} b_{n\sigma}^*$$

es el hamiltoniano del campo (incluyendo la radiación de la partícula) y $q_{n\sigma}$, $\rho_{n\sigma}$ son las variables canónicas del campo, relacionadas con las amplitudes $b_{n\sigma}$ y $b_{n\sigma}^*$ por

$$b_{n\sigma} = -(2\hbar\omega_n)^{-1/2} (\rho_{n\sigma} + \omega_n q_{n\sigma}) \exp(i\omega_n t)$$

$$b_{n\sigma}^* = (2\hbar\omega_n)^{-1/2} (\rho_{n\sigma} - \omega_n q_{n\sigma}) \exp(-i\omega_n t)$$

A $t = 0$ las amplitudes del campo son $\alpha_{n\sigma}$ y $\alpha_{n\sigma}^*$.

El paréntesis de Poisson de dos variables dinámicas A y B asociadas al campo es

$$[A, B] = \sum_n \sum_{\sigma} \left\{ \frac{\partial A}{\partial q_{n\sigma}} \frac{\partial B}{\partial \rho_{n\sigma}} - \frac{\partial B}{\partial q_{n\sigma}} \frac{\partial A}{\partial \rho_{n\sigma}} \right\} \quad (4.2)$$

O bien, en términos de las amplitudes b y b^* ,

$$[A, B] = \frac{1}{i\hbar} \sum_n \sum_{\sigma} \left\{ \frac{\partial A}{\partial b_{n\sigma}} \frac{\partial B}{\partial b_{n\sigma}^*} - \frac{\partial B}{\partial b_{n\sigma}} \frac{\partial A}{\partial b_{n\sigma}^*} \right\} \quad (4.3)$$

Llamaremos poissoniano de A y B a la cantidad

$$\langle A; B \rangle \equiv \sum_n \sum_{\sigma} \left\{ \frac{\partial A}{\partial b_{n\sigma}} \frac{\partial B}{\partial b_{n\sigma}^*} - \frac{\partial B}{\partial b_{n\sigma}^*} \frac{\partial A}{\partial b_{n\sigma}} \right\} \quad (4.4)$$

Entonces

$$[A, B] = \frac{i}{\hbar} \langle A; B \rangle \quad (4.5)$$

Para ilustrar el manejo de esta cantidad calculemos el poissoniano de las componentes $E_i(t)$ y $E_j(s)$ del campo eléctrico a tiempos distintos. En términos de ondas planas y en la aproximación dipolar el campo eléctrico libre es

$$E(t) = i \left[\frac{2\pi\hbar}{V} \right]^{1/2} \sum_n \sum_{\sigma} \omega_n^{1/2} \alpha_{n\sigma} \hat{\epsilon}_{n\sigma} \exp(-i\omega_n t) + c.c.$$

de donde

$$E_i(t) = i \left[\frac{2\pi\hbar}{V} \right]^{1/2} \sum_n \sum_{\sigma} \omega_n^{1/2} \alpha_{n\sigma} \epsilon_{n\sigma i} \exp(-i\omega_n t) + c.c.$$

donde $\epsilon_{n\sigma i}$ denota la componente i -ésima del vector de polarización $\hat{\epsilon}_{n\sigma}$. De aquí obtenemos

$$\frac{\partial E_i(t)}{\partial \alpha_{m\lambda}} = i \left[\frac{2\pi\hbar}{V} \right]^{1/2} \omega_m^{1/2} \epsilon_{m\lambda i} \exp(-i\omega_m t)$$

$$\frac{\partial E_i(t)}{\partial \alpha_{m\lambda}^*} = -i \left[\frac{2\pi\hbar}{V} \right]^{1/2} \omega_m^{1/2} \epsilon_{m\lambda i} \exp(i\omega_m t)$$

Combinando estas expresiones con la definición del

poissoniano (ec. (4.4))

$$\langle E_i(t); E_j(s) \rangle = \frac{2\pi\hbar}{V} \sum_m \sum_{\lambda} \omega_m \varepsilon_{m\lambda i} \varepsilon_{m\lambda j} \\ \times \left[\exp(-i\omega_m(t-s)) - \exp(i\omega_m(t-s)) \right]$$

Haciendo la suma sobre polarizaciones y recordando que

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{m\lambda i} \varepsilon_{m\lambda j} = \delta_{ij} - \frac{k_{mi} k_{mj}}{k_m^2}$$

obtenemos

$$\langle E_i(t); E_j(s) \rangle = \frac{2\pi\hbar}{V} \sum_m \omega_m \left[\delta_{ij} - \frac{k_{mi} k_{mj}}{k_m^2} \right] \\ \times \left[\exp(-i\omega_m(t-s)) - \exp(i\omega_m(t-s)) \right]$$

O bien, pasando al límite de volumen infinito, se tendrá

$$\frac{1}{V} \sum_k \longrightarrow \frac{1}{2\pi^3} \int d^3k$$

de donde

$$\langle E_i(t); E_j(s) \rangle = \frac{2k}{8\pi^2} \int d^3k \omega \left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] \times \left[\exp(-i\omega(t-s)) - \exp(i\omega(t-s)) \right] \quad (4.6)$$

La integral sobre k puede separarse en la forma

$$\int d^3k = \int d\Omega \int k^2 dk$$

donde $d\Omega$ es la diferencial de ángulo sólido. En la expresión (4.6) sólo el término primer paréntesis depende del ángulo:

$$\int d\Omega \left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] = 4\pi\delta_{ij} - \frac{1}{k^2} \int d\Omega k_i k_j \quad (4.7)$$

Orientando el eje z a lo largo de una de las componentes involucradas (por ej. $k_i = k_z$, $k_j = k_x$) vemos que, para i distinto de j , la integral debe anularse. Para $i = j = z$

$$\begin{aligned} \int d\Omega k_i^2 &= \int d\theta d\phi \operatorname{sen}\theta k^2 \cos^2\theta \\ &= 2\pi k^2 \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta \\ &= \frac{4}{3} \pi k^2 \end{aligned}$$

por lo que

$$\int d\Omega k_i k_j = \frac{4}{3} \pi k^2 \delta_{ij}$$

Finalmente

$$\int d\Omega \left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] = \frac{8}{3} \pi \delta_{ij}$$

Por otro lado, haciendo el cambio de variable $\omega = ck$:

$$\int dk k^2 \omega \left[\exp(-i\omega(t-s)) - \exp(i\omega(t-s)) \right] =$$

$$\frac{1}{c^3} \int d\omega \omega^3 \left[\exp(-i\omega(t-s)) - \exp(i\omega(t-s)) \right]$$

de donde

$$\langle E_i(t); E_j(s) \rangle = \frac{2\hbar}{3\pi c^3} \delta_{ij}$$

$$\times \int d\omega \omega^3 \left[\exp(-i\omega(t-s)) - \exp(i\omega(t-s)) \right]$$

$$= -\frac{4\hbar}{3\pi c^3} \delta_{ij} \int_0^\omega d\omega \omega^3 \sin \omega(t-s)$$

Introduciendo la expresión para el espectro de potencia del campo de fondo

$$S_0(\omega) = \frac{2\hbar\omega^3}{3\pi c^3}$$

obtenemos finalmente

$$\langle E_i(t); E_j(s) \rangle = -2i \delta_{ij} \int_0^\omega S_0(\omega) \sin \omega(t-s) d\omega \quad (4.8)$$

es decir, el poissoniano de las componentes de E a tiempos distintos no depende ya de las amplitudes estocásticas α y α^* . Además, vemos que este poissoniano es la parte imaginaria de la transformada de Fourier de la densidad espectral del campo.

Ahora consideremos el caso de dos variables dinámicas f y g asociadas tanto a la partícula como al campo. Su paréntesis de Poisson será, en general:

$$\begin{aligned} [f, g] &= \sum_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\} + \sum_{n, \sigma} \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_{n\sigma}} \frac{\partial g}{\partial p_{n\sigma}} - \frac{\partial g}{\partial q_{n\sigma}} \frac{\partial f}{\partial p_{n\sigma}} \right\} \\ &= [f, g]_{x, p} + [f, g]_{q_{n\sigma}, p_{n\sigma}} \\ &= [f, g]_{x, p} - \frac{i}{\hbar} \langle f; g \rangle_{b, b^*} \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde x y p son las variables canónicas asociadas a la partícula.

Supongamos que la interacción con el campo de vacío empieza en $t = t_0$ y sean x_0 y p_0 los valores iniciales de las variables canónicas asociadas a la partícula. Claramente x_0 y p_0 no dependen de las amplitudes del campo, pero, para $t > t_0$, x y p sí dependerán de α y α^* .

Consideremos la transformación canónica que pasa de las variables $(x, p; b, b^*)$ al tiempo t a las variables $(x_0, p_0; \alpha, \alpha^*)$ al tiempo t_0 . El paréntesis de Poisson de $f(x, p)$ y $g(x, p)$ se

transforma en

$$\left[f, g \right]_{x,p} = \left[f, g \right]_{x_0, p_0} - \frac{\hbar}{\hbar} \langle f; g \rangle \quad (4.10)$$

En particular, se tendrá

$$\left[x_i, p_j \right] = \delta_{ij} = \left[x_i, p_j \right]_{x_0, p_0} - \frac{\hbar}{\hbar} \langle x_i; p_j \rangle \quad (4.11)$$

Por otro lado, usando el hamiltoniano H_T de la ecuación (4.1), podemos escribir las ecuaciones de movimiento de la partícula como

$$\dot{x}_i = \left[x_i, H_T \right]_{x,p} = \left[x_i, H \right]_{x,p} - (e/mc)A_i$$

$$\dot{p}_i = \left[p_i, H_T \right]_{x,p} = \left[p_i, H \right]_{x,p} + \frac{e}{c} \dot{x}_k \partial_i A_k$$

donde $H = p^2/2m + V$ es el hamiltoniano clásico de la partícula. De las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\dot{x}_i = \left[x_i, H \right]_{x_0, p_0} - \frac{\hbar}{\hbar} \langle x_i; H \rangle - (e/mc)A_i \quad (4.12a)$$

$$\dot{p}_i = \left[p_i, H \right]_{x_0, p_0} - \frac{\hbar}{\hbar} \langle p_i; H \rangle + \frac{e}{c} \dot{x}_k \partial_i A_k \quad (4.12b)$$

Las ecuaciones (4.12) muestran que en ausencia del campo estocástico de fondo el comportamiento del sistema queda completamente determinado por el paréntesis de Poisson respecto a x_0 y p_0 . Sin embargo, la interacción con el campo estocástico de

vacío y la reacción de radiación hacen que el movimiento de la partícula sea muy complejo. Esto nos permite suponer que, después de cierto tiempo, los valores iniciales de x y p se hacen irrelevantes: el sistema olvida las condiciones iniciales. Podemos entonces introducir la siguiente hipótesis¹⁻²: en el límite asintótico, cuando el sistema ha alcanzado un régimen estacionario o está suficientemente cerca de él, las variables x y p de la partícula han perdido la dependencia en los valores iniciales x_0 y p_0 , de modo que los paréntesis de Poisson respecto a estas variables pueden despreciarse y las ecuaciones (4.11) y (4.12) pueden escribirse como

$$\langle x_i; p_j \rangle = i\hbar \delta_{ij} \quad (4.13)$$

$$i\hbar \dot{x}_i = \langle x_i; H \rangle - \frac{i e \hbar}{m c} A_i \quad (4.14a)$$

$$i\hbar \dot{p}_i = \langle p_i; H \rangle + \frac{i e \hbar}{m c} p_j \partial_i A_j \quad (4.14b)$$

Vemos que estas expresiones dependen sólo del hamiltoniano clásico de la partícula. Cuando t es suficientemente grande y se satisfacen las ecuaciones anteriores decimos que la partícula se encuentra en el régimen cuántico. Los últimos términos en las ecuaciones (4.14) corresponden a correcciones radiativas. Si no se los toma en cuenta, es decir, a orden cero en e , el movimiento del sistema está regido por el hamiltoniano clásico. Los efectos de la interacción con el campo de vacío se introducen a través de los Poissonianos.

3. La hipótesis de respuesta lineal.

Tomando las ecuaciones (4.14) a orden cero en la carga e obtenemos

$$\dot{x}_i^{(0)} = -\frac{i}{\hbar} \langle x_i^{(0)} ; H^{(0)} \rangle$$

$$\dot{p}_i^{(0)} = -\frac{i}{\hbar} \langle p_i^{(0)} ; H^{(0)} \rangle$$

donde $H^{(0)} = H(x^{(0)}, p^{(0)})$. De aquí resulta claro que en el régimen cuántico las variables aproximadas $x^{(0)}$ y $p^{(0)}$ deben depender de las amplitudes del campo α y α^* .

Ahora bien, es claro que, a partir de la ecuación clásica $m\ddot{x}^{(0)} = F(x^{(0)})$ que debe satisfacer $x^{(0)}$ no podemos obtener una dependencia de esta variable en las amplitudes α y α^* . Es necesario entonces modificar la ecuación dinámica para describir adecuadamente el movimiento del sistema en el régimen cuántico.

Para la nueva $x^{(0)} = x^{(0)}(\alpha, \alpha^*)$ se propone un desarrollo en serie de la forma²

$$x^{(0)} = \sum_n \sum_{\sigma} A_{n\sigma} \alpha_{n\sigma} + \sum_n \sum_{\sigma} \sum_{n'} \sum_{\sigma'} B_{nn'\sigma\sigma'} \alpha_{n\sigma} \alpha_{n'\sigma'} + \dots + c.c.$$

(4.15)

donde se ha tomado nuevamente $\langle p_i x^{(0)} \rangle = 0$. Como las α llevan dependencias temporales de la forma $\exp(i\omega_n t)$, los términos no lineales oscilan con sumas o diferencias de frecuencias de la forma $\omega_n + \omega_{n'}$. Esto hace que sea muy difícil separar la interacción del sistema con modos distintos del campo para obtener

el balance detallado. Exigiremos, pues, que en el régimen cuántico los términos de orden superior a uno en las amplitudes se hagan despreciables, es decir, $x^{(0)}$ es lineal en α y α^* .

Podemos argumentar en favor de esta hipótesis que el poissoniano de x_i y p_i (ec. (4.13)) es una constante, y que la operación de tomar el poissoniano implica solamente primeras derivadas respecto a las α de las cantidades involucradas, de modo que x y p deben ser lineales en α .

Así, pues, el desarrollo para $x^{(0)}$ en el régimen cuántico, introduciendo la hipótesis de respuesta lineal, es:

$$x^{(0)} = \sum_n \sum_{\sigma} \tilde{x}_{n\sigma} \alpha_{n\sigma} \exp(-i\omega_n t) + c.c. \quad (4.18)$$

Es importante insistir sobre el hecho de que la nueva $x^{(0)}$, aunque de orden cero en ϵ , no corresponde ya al movimiento clásico de la partícula: en efecto, en esta nueva perspectiva, el sistema interactúa con el campo de fondo aun a este orden de aproximación. La interacción con el campo ya no es una mera perturbación, sino que determina de manera fundamental el comportamiento del sistema.

Los coeficientes $\tilde{x}_{n\sigma}$ están determinados por la fuerza externa, es decir, en esta descripción la fuerza no determina la trayectoria del sistema, sino los modos normales del campo con los que éste interactúa y la intensidad de la interacción.

4. Balance energético detallado.

En esta sección nos proponemos mostrar cómo la condición de balance energético detallado, que ha sido el tema principal de este trabajo, se satisface de manera natural en el marco de la nueva visión de la EDE presentada en la sección anterior.

Para hacer esto recordemos la expresión para la condición de balance energético global obtenida a partir de la ecuación (2.10):

$$m\tau \mathbb{P}_t \langle \ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \rangle + e \mathbb{P}_t \langle \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{x}} \rangle = 0 \quad (4.17)$$

Desarrollando esta expresión a orden dos en e

$$m\tau \langle \dot{\mathbf{x}}^{(0)} \cdot \dot{\mathbf{x}}^{(0)} \rangle + e \langle \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{x}}^{(0)} \rangle + e^2 \langle \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{x}}^{(1)} \rangle = 0$$

Esta expresión es análoga a la ecuación (2.11), excepto porque se ha tomado en cuenta que, de acuerdo con la hipótesis de respuesta lineal, $\mathbf{x}^{(0)}$ sí depende del campo de fondo.

Haciendo uso de la expresión de \mathbf{E} en términos de ondas planas y de la expresión para $\mathbf{x}^{(0)}$ se obtiene

$$\langle \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{x}}^{(0)} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\sigma} \left(\frac{2\pi\hbar}{V} \right)^{1/2} \omega_n^{3/2} \hat{\epsilon}_{n\sigma} \cdot \left[\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{n\sigma}^* + \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{n\sigma} \right]$$

Por otro lado, como podemos esperar que la interacción de partículas sin spin con el campo de fondo no dependa del estado de polarización, tomaremos $\tilde{\mathbf{x}}_{n1} = \tilde{\mathbf{x}}_{n2} = \tilde{\mathbf{x}}_n$, de modo que

$$\langle \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{x}}^{(0)} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}} \left(\frac{2\pi\hbar}{V} \right)^{1/2} \omega_n^{3/2} \left[\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_n^* + \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_n \right] \cdot \sum_{\sigma} \hat{\epsilon}_{n\sigma}$$

La suma sobre polarizaciones se anula, puesto que por cada modo del campo existe otro con la misma frecuencia, que se propaga en la dirección opuesta y cuyas polarizaciones están invertidas respecto al primer modo. Entonces la condición de balance detallado a orden dos en e es

$$m\tau \langle \ddot{x}^{(0)} \cdot \dot{x}^{(0)} \rangle + e^2 \langle E \cdot \dot{x}^{(1)} \rangle = 0 \quad (4.18)$$

donde, como en el capítulo II, $x^{(1)}$ está dada por

$$x_i^{(1)} = \sum_j \int_{-\infty}^t \frac{\partial x_i^{(0)}(t)}{\partial \rho_j^{(0)}(t')} E_j(t') dt' \quad (4.19)$$

Por otro lado, en el régimen cuántico se debe tener

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i^{(0)}(t)}{\partial \rho_j^{(0)}(t')} &= [x_j^{(0)}(t'), x_i^{(0)}(t)] \\ &= -\frac{i}{\hbar} \langle x_j^{(0)}(t'), x_i^{(0)}(t) \rangle \end{aligned} \quad (4.20)$$

Como las amplitudes relacionada con distintas componentes ortogonales de x son independientes, puesto que son producidas por distintos modos del campo, se tendrá en general

$$\langle x_j^{(0)}(t'), x_i^{(0)}(t) \rangle = 2i\delta_{ij} \sum_n \sum_{\sigma} |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \sin \omega_n(t' - t) \quad (4.21)$$

Sustituyendo (4.21) y (4.20) en (4.14) obtenemos

$$x_i^{(1)} = \frac{2}{\hbar} \int_{-\infty}^t \sum_n \sum_{\sigma} |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \sin \omega_n (t' - t) E_i(t') dt' \quad (4.22)$$

Ahora podemos calcular el segundo término de (4.18):

$$\begin{aligned} e^2 \langle E \cdot x^{(1)} \rangle &= \frac{2e^2}{\hbar} \sum_n \sum_{\sigma} |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \omega_n \\ &\times \int_{-\infty}^t \cos \omega_n (t' - t) \langle E_i(t') E_i(t) \rangle dt' dt \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\langle E_i(t') E_i(t) \rangle = \int_0^{\infty} d\omega S(\omega) \cos \omega(t' - t)$$

de donde, haciendo el cambio de variable $u = t - t'$,

$$\begin{aligned} e^2 \langle E \cdot x^{(1)} \rangle &= \frac{2e^2}{\hbar} \sum_n \sum_{\sigma} |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \omega_n \\ &\times \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} du S(\omega) \cos \omega_n u \cos \omega u \\ &= \frac{\pi e^2}{\hbar} \sum_n \sum_{\sigma} |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \omega_n \int_0^{\infty} d\omega S(\omega) \left[\delta(\omega + \omega_n) + \delta(\omega - \omega_n) \right] \\ &= \frac{\pi e^2}{\hbar} \sum_n \sum_{\sigma} |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \omega_n S(\omega_n) \quad (4.23) \end{aligned}$$

De la expresión para $x^{(0)}$ dada por la ecuación (4.16) podemos calcular el primer término de (4.18). Tomando en cuenta las

propiedades estadísticas de las amplitudes α y α^* se obtiene

$$m\tau \langle \ddot{x}^{(0)} \cdot \dot{x}^{(0)} \rangle = -m\tau \sum_{\nu} \sum_{\hbar} \sum_{\sigma} |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \omega_n^4$$

Así, finalmente, la ecuación (4.18) queda como

$$\sum_{\nu} \sum_{\hbar} \sum_{\sigma} \left\{ \frac{\pi e^2}{\hbar} |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \omega_n S(\omega_n) - m\tau |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \omega_n^4 \right\} = 0 \quad (4.24)$$

La condición de balance detallado exige que la ecuación (4.24) se cumpla término a término, es decir³:

$$\begin{aligned} \frac{\pi e^2}{\hbar} \left\{ |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \omega_n S(\omega_n) + |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2 \omega_{-n} S(\omega_{-n}) \right\} \\ - m\tau \left\{ |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 \omega_n^4 + |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2 \omega_{-n}^4 \right\} = 0 \end{aligned}$$

O, tomando en cuenta que $\omega_{-n} = -\omega_n$ y que $S(\omega) = S(-\omega)$,

$$\begin{aligned} \frac{\pi e^2}{\hbar} \omega_n S(\omega_n) \left\{ |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 - |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2 \right\} \\ - m\tau \omega_n^4 \left\{ |\tilde{x}_{n\sigma}|^2 + |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2 \right\} = 0 \end{aligned}$$

es decir,

$$S(\omega_n) = \frac{2\hbar}{3\pi c^3} \omega_n^3 \frac{|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 + |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2}{|\tilde{x}_{n\sigma}|^2 - |\tilde{x}_{-n\sigma}|^2} \quad (4.25)$$

Si ahora tomamos $\omega_n > 0$, entonces $\omega_{-n} < 0$ y los coeficientes

$\tilde{x}_{-n\sigma}$ deben anularse si el sistema está en su estado base. En consecuencia, para sistemas arbitrarios en el estado base, el espectro de equilibrio es

$$S(\omega) = \frac{2\hbar}{3\pi c^3} \omega^3 \quad (4.28)$$

que es el espectro del campo estocástico de fondo de la EDE.

5. Conclusiones.

En este capítulo se ha expuesto un nuevo formalismo para la EDE, que consiste básicamente en la introducción del poissoniano y de la hipótesis de respuesta lineal.

Hemos visto cómo, desde esta nueva perspectiva, el sistema interactúa con el campo estocástico de fondo aun a orden cero en la constante de acoplamiento e . Es importante señalar aquí que, si bien la nueva $x^{(0)}$ ya no describe el movimiento de la partícula en ausencia de campo, los sistemas de la EDE siguen satisfaciendo leyes de movimiento causales.

Haciendo uso de este nuevo formalismo se ha podido establecer finalmente que el espectro de equilibrio para la radiación de fondo es

$$S(\omega) = \frac{2\hbar}{3\pi c^3} \omega^3$$

es decir, que la condición de balance detallado se satisface en la

EDE, aun cuando las fuerzas externas son no lineales. Con este resultado concluimos el tratamiento del tema principal de este trabajo.

La nueva versión de la EDE permite obtener otros resultados importantes que serán mencionados en las conclusiones generales.

Referencias.

1. L. de la Peña, A.M. Cetto; *Nuovo Cim.*, 92 B, 189 (1985).
2. L. de la Peña, A.M. Cetto; *New Approach to Stochastic Electrodynamics for the Explanation of Quantum Phenomena*, preprint IFUNAM, mayo 1988.
3. M. Alcubierre, N.S. Lozano; *Tratamiento de Sistemas Multiperiodicos en la Electrodinámica Estocástica*, tesis profesional, Facultad de Ciencias, UNAM, 1988.

CONCLUSTONES.

En este trabajo se ha expuesto brevemente la historia del debate surgido en torno a las interpretaciones de la mecánica cuántica en las primeras décadas de este siglo, en el que entraron en juego esencialmente dos posturas filosóficas: el positivismo de Bohr y el realismo sin concesiones de Einstein.

En el contexto del debate de la teoría cuántica, la electrodinámica estocástica constituye una respuesta viable a las demandas de causalidad y objetividad, opuestas a la interpretación de Copenhague. Esta teoría se construye de acuerdo con la interpretación estadística de la mecánica cuántica, que minimiza las suposiciones *a priori* y está libre de las paradojas de la interpretación ortodoxa. Además, los postulados de la EDE son sencillos y físicamente plausibles.

En este trabajo se han presentado los fundamentos de la EDE, enfatizando los aspectos de esta teoría que tienen que ver con la condición de balance detallado. Se ha mostrado que el formalismo usual de la EDE no satisface en general esta condición, por lo que debe ser modificado.

La modificación a la EDE, debida a L. de la Peña y A.M. Cetto, se ha expuesto en el último capítulo de este trabajo. Como conclusión natural del mismo se ha mostrado cómo la condición de balance detallado queda satisfecha para el estado base de sistemas arbitrarios en el marco de esta nueva perspectiva.

A partir de la descripción dinámica de las partículas en términos de poissonianos y la hipótesis de respuesta lineal pueden

obtenerse otros resultados importantes, que caen fuera del margen de este trabajo, pero que es conveniente mencionar aquí. Posiblemente los más relevantes son la descripción de las transiciones radiativas, las expresiones para los coeficientes A y B de Einstein, y la derivación de la distribución de Planck. Otros resultados importantes son la derivación de la regla de suma de Thomas-Reiche-Kuhn y la desigualdad de Heisenberg para la posición y el momento. Es particularmente importante observar aquí que el formalismo de la EDE desde esta nueva perspectiva ha permitido incluso desembocar de manera natural en la mecánica matricial. Estos resultados pueden encontrarse en las refs. 2 y 3 del capítulo IV y en Alcubierre, M.; Cetto, A.M.; de la Peña, L.; Lozano, N.S.; *'Detailed Balance and Radiative Transitions in the New Approach to Stochastic Electrodynamics'*, PREPRINT, IFUNAM, 1988.

A pesar de que la interpretación de la hipótesis de respuesta lineal es todavía oscura, el nuevo formalismo sigue permitiendo obtener resultados importantes. Recientemente, L. de la Peña y A.M. Cetto han logrado explicar el efecto Lamb en el marco de la EDE. Sin embargo, hay todavía un largo camino por recorrer en la explotación de la riqueza de esta teoría. La obtención de nuevos resultados, incluyendo la física fuera del régimen cuántico que trascendería a la teoría cuántica usual, así como la elucidación del origen de la respuesta lineal, constituyen un vasto terreno para la investigación futura en el campo del comportamiento microscópico de la materia, cuyo desarrollo permitirá una mejor comprensión de este aspecto fundamental de la física moderna.