UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

ASPECTOS GEOMETRICOS DE LA TEORIA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

PRESENTA:

Diana Maya Padilla

1989

INDICE

CAPITULO I

ALGUNOS ELEMENTOS HISTORICOS E INTUITIVOS DE LA TEORIA.

CAPITULO II

ANALISIS FISICO DE LA TEORIA.

CAPITULO III

ANALISIS GEOMETRICO DE LA TEORIA

CAPITULO IV

UN POCO DE RELATIVIDAD GENERAL

INTRODUCCION

Para entender un poco más el aspecto geométrico de la Relatividad Especial planteado en este trabajo, lo he dividido en cuatro capítulos que hasta cierto grado son independientes entre sí. En los tres primeros, la independencia consiste en partir de hipótesis distintas para llegar a las mismas conclusiones.

En el Capítulo I se dán algunos datos históricos para poder tener una idea de como fué el surgimiento de esta teoría física, los problemas a los que se enfrentó en aquella época, algunas formas distintas de intentar resolver el problema, como es el caso de la suposición del *eter* por un lado y el cuetionamiento de conceptos como el tiempo por otro. Con la intención de familiarizarnos con las ideas poco cotidianas de retraso del tiempo, contracción de longitudes y otras, he desarrollado un poco los razonamientos de estas, valiéndome de esos experimentos mentales con el útil "tren de Einstein". Sin embargo, no pretendo que de ellos se deduzcan estas características físicas, porque descansarían en argumentos muy débiles como nuestra imaginación. La idea de mostrar estos experimentos es como ya dije,la presentación de varios conceptos que romperán con toda seguridad fijaciones hechas anteriormente aceraca del tiempo y la distancia.

Mucho más precisos y fuertes son los argumentos que en el capítulo II se dán al desarrollar de una manera axiomática el aspecto físico de la Teoría Especial de Relatividad. La formalización del sistema de referencia, el establecimiento de las hipótesis físicas a partir de las cuales se deduce la Transformación de Lorentz y con ello el retraso del tiempo, la contracción de longitudes y una nueva suma de velocidades, son muestra de esta aximatización. La comparación con las ecuaciones de Galileo, que surgen de suponer el tiempo absoluto y la recopuración de éstas por medio de un análisis de la Transformación de Lorentz con velocidades bajas, muestran por otro lado como el surgimiento de una teoría como la Relatividad Especial no se contrapone a la física clásica, como pudiera parecer en un principio, sino más bien la generaliza.

Con toda una nueva concepción del espacio-tiempo físico, se pueden responder varias de las interrogantes abiertas que en la historia se presentaron en la física clásica y que se mencionan en el primer capítulo, pero al mismo tiempo, se abren muchas acerca de toda la trascendencia de la nueva concepción sobre muchos conceptos físicos y evidentemente una polémica folosófica con ello. No es la intención de este trabajo desarrollar todo esto, unicamente menciono algunas cosas como el análisis del pasado y el futuro de un suceso, algunas observaciones filosóficas de la Transformación de Lorentz, para contrargumentar la idea de que "todo es relativo", aunque es ya al final del Capítulo III cuando se desarrolla esto, usando usando la herramienta geométrica de ese mismo capítulo.

Como si volviéramos a empezar la tesis y no hubiéramos hablado de física, esta tercera parte es el análisis puramente matemático de dos geometrías en el plano. Definiendo métricas de una u otra forma, se crean planos distintos donde las circunferencias, ángulos, cambios de base y las leyes como la desigualdad del triángulo, resusltan ser algo distinto a lo euclideanamente conocido. En uno de los planos creados, el semieucíeo, las transformaciones de cambio de base, son las ecuaciones de Galileo, cuando el espacio bidimensional es el espacio-tiempo y varias leyes de la mecánica clásica son característica de esta geometría. Así en el plano seudoeuclídeo, los cambios de base son la Transformación de Lorentz, la Relatividad de la Simultancidad, Retraso del tiempo y Contracción de longitudes son consecuencias geométricas de haber definido la distancia de una de las tres posibilidades en el plano. Es decir, geometricamente se obtienen todas las características físicas de la Relatividad Especial independientemente de si el tiempo es relativo o no, de si son correctos o incorrectos los experimentos con el tren de Einstein y de si exite o no el *eter*.

Si bien por un lado en forma independiente la geometría seudoeuclídea explica la nueva teoría, por otro hay una equivalencia muy fuerte entre el aspecto físico y el geométrico y es al establecer las hipótesis geométricas y la equivalencia con las físicas. Así la homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo es linealidad de los cambios de base, la relatividad del tiempo es la invariancia métrica seudoeuclídea y el caracter absoluto de éste, es la invariancia semieuclídea.

Estos tres primeros capítulos no requieren el conocimiento de cosas muy profundas en matemáticas ni física, por lo que creo que pueden ser entendidos por muchos estudiantes de matemáticas o áreas afines. No es muy complicado y sí muy interesante en la línea intredisiplinaria. Para los que como yo estudiamos matemáticas, la dificultad quizás esté en que el material físico es muy nuevo.

Aunque el centro de esta tesis es la Relatividad Especial, el capítulo IV dá un poco de Relatividad General. Un acercamiento al planteamiento de las hipótesis de la teoría que a diferencia de lo anterior, parecen no ser puramente geométricas ni físicas sino mezcladas. El análisis físico de trayectorias de caida libre por un lado y de variación geodésica por otro, la sustitución de unas ecuaciones por otras y no su equivalencia, presuponen esas hipótesis y al parecer ni el método axiomático ni el modelo matemático, perecen ser tan claros y fuertes como lo son en Relatividad Especial.

Esta parte del trabajo, sí presupone un poco más de conocimientos geométricos, en particular de Geometría Riemanniana. Para facilitar un poco esto, un apéndice geométrico ha sido incluido al final y referida bibliografía suficiente.

CAPITULO I

ALGUNOS ELEMENTOS HISTORICOS E INTUITIVOS DE LA TEORIA

1. ¿CUALES FENOMENOS SE LE PRESENTAN A LA MECANICA CLASICA QUE NO PUEDE EXPLICAR Y QUE DAN ORIGEN A LA TEORIA DE LA RELATIVIDAD?.

Para comprender bien por qué la física clásica no pudo resolverlos, mencionaremos algunos experimentos y teorías que sustentaban a la mecánica clásica a finales del siglo XIX (hasta 1880 aproximadamente). En realidad, sólo mencionaremos algunos aspectos de ésta, que hagan comprender cual era la idea que se tenía sobre espacio, tiempo, movimiento, luz, etc.

Desde finales del siglo XVII, el espacio físico fué pensado por Isaac Newton como un recipiente vacío en donde está distribuida toda la materia y aunque esta es movible y siempre cambiante, el espacio físico era inalterable, no acotado, infinito y explicado por la geometría desarrollada hasta entonces, que era la Euclidiana tridimensional.

En el trabajo de Isaac Newton *PRINCIPIA MATEMATICA* de 1687 establece las 3 leyes que rigen el movimiento de todos los cuerpos, las cuales son el sustento de la Mecánica Clásica. Estas leyes son:

> 1^a La ley de Inercia.- todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme mientras no sea perturbado por alguna fuerza externa.
>
> 2^a La aceleración de un objeto es proporcional a la fuerza que actúa sobre éste y está en dirección en la que la fuerza actúa.
>
> 3^a Para cada acción hay una reacción de igual magnitud y en sentido contrario.

Estas leyes, el checar con los experimentos realizados hasta entonces, el confirmar muchos resultados, hizo que aún dos siglos después fuera efectivamente la mecánica clásica la que explicara el mundo físico. No había razones para dudar de esta concepción del mundo newtoniano.

Otros elementos históricos importantes son los referentes a la luz. En 1849, se pudo calcular que la velocidad de la luz en el vacío es de 298,055 km/seg.

En 1864, James C. Maxwell, realiza unos experimentos que muestran que la luz es una onda electromagnética cuya velocidad no depende de la fuente. Luego, en tanto que onda y en consecuencia con las teorías físicas existentes en la época, debiera existir un medio en el cual la luz (la onda electromagnética) se propagase al ir de un punto a otro. Pero no sólo eso, la luz no cumplía con el Principio de la Relatividad del

Movimiento establecido por Galileo Galilei, el cual afirmaba que el movimiento de los cuerpos en todos los sistemas de referencia que se desplazan unos respecto a otros de manera rectilínea y uniforme, está regido por las mismas leyes.

Este principio había sido probado con muchos experimentos y la luz parecía no cumplirlo, porque su velocidad c era constante en ese hipotético medio. Si en un marco de referencia que se movía en línea recta con velocidad constante v, se lanzaba un rayo de luz en la dirección del movimiento de dicho marco, entonces el rayo viajaría a la velocidad $v+c$ y si fuera en sentido contrario a la del marco, viajaría a una velocidad $c-v$, o sea, que tendría distintas velocidades en distintas direcciones, algo que no pasaba en un marco de referencia en reposo. Con lo cual no se cumplía dicho Principio de Relatividad.

El medio necesario para la propagación de la luz se supuso y se le dió el nombre de *eter*. Se definió el reposo absoluto en donde la velocidad de la luz era c en cualquier dirección y movimiento absoluto si no ocurría eso.

Como los experimentos mostraron, la luz parecía viajar en todas partes, el *eter* debía llenar todo el espacio, la materia y el vacío,entonces ese debía ser el espacio físico concebido por Newton, el reposo absoluto e inmutable, provisto de ese modelo mecánico newtoniano que se describía con la geometría Euclidiana y que ahora además debía ser el medio en donde la luz viajara con velocidad constante en cualquier dirección.

La suposición de este gran *eter* y no la prueba de su existencia, el nunca haber percibido nada de él y el no solucionar realmente la contradicción con el Principio de la Relatividad del Movimiento, dejó una sensación de intriga ante si era correcto o no suponerlo. Fué en 1881 (casi veinte años después) cuando Michelson y Morley diseñaron un experimento queriendo probar la existencia del *eter* mediante la detección del movimiento de la Tierra con respecto a él, es decir, si es que existía el *eter* , cómo ésta se movía (de acuerdo a lo mostrado por Kepler), debía detectarse este movimiento con respecto al *eter* .

Antes de poder describir el experimento, veamos los razonamientos que los llevó al diseño de dicho experimento.

Si quisieramos detectar el movimiento de la Tierra con respecto al *eter* , es lo mismo que detectar el movimiento de éste respecto a la Tierra, o sea, se podría detectar un viento de *eter* . En ese caso, podríamos imaginar dicho *eter* en movimiento, como un río con velocidad v y a la Tierra como una estaca fija a su orilla. Observemos que el tiempo que toma remar de ida y vuelta, en cada dirección es distinto. Veamos:

Si una lancha es colocada junto a la estaca, la corriente del río la arrastrará con velocidad v , en la dirección de la corriente. Pero si ahora un hombre que rema con una velocidad w sobre agua en reposo $w > v$, es llevado a ese río para que reme en sentido contrario al de la corriente, hasta que logre recorrer una distancia de un kilómetro, entonces llevará una velocidad de $w - v$ (es decir, la velocidad resultante es la diferencia entre las velocidades, esto era muy claro en la mecánica clásica), así pues el tiempo que tarda en hacer ese recorrido es $\frac{1}{w-v}$.

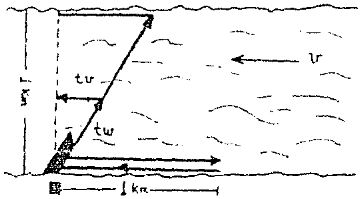
Ahora si de este punto al que llegó, se regresa y continua remando, ahora a la velocidad $w + v$ (pues es la velocidad resultante cuando rema en el sentido de la corriente), el tiempo requerido para llegar nuevamente a la estaca es $\frac{1}{w+v}$ .Entonces el tiempo total de viaje de ida y vuelta, a favor y en contra a la corriente es:

$$t_1 = \frac{1}{w-v} + \frac{1}{w+v}$$

que después de algunas operaciones queda como:

$$\frac{2}{w(1-\frac{v^2}{w^2})}$$

Y si ahora se quiere remar 1 km en una dirección perpendicular a la de la corriente del río, se debe inclinar la lancha para que la dirección resultante con la de la corriente sea efectivamente la perpendicular. Así es que si w es la velocidad con la que puede el hombre remar y v la del río, entonces la velocidad resultante es $\sqrt{w^2 - v^2}$. En efecto, esto es así pues usando el Teorema de Pitágoras y según la nomenclatura de la figura, se tiene que la didtancia resusltante recorrida es $t\sqrt{w^2 - v^2}$. Y por tanto, la velocidad con la que se efectúa el recorrido es $\frac{t\sqrt{w^2-v^2}}{t} = \sqrt{w^2 - v^2}$.



Luego, el tiempo ocupado para viajar 1km. en dirección ortogonal a la del río con esta velocidad es $\frac{1}{\sqrt{w^2-v^2}}$. De regreso el caso es análogo. Habrá que inclinar la lancha un poco contra corriente, de tal forma que la dirección resultante sea la ortogonal a la del río. La velocidad resultante será igual a $\sqrt{w^2 - v^2}$, por las mismas razones, entonces el tiempo requerido será también $\frac{1}{\sqrt{w^2-v^2}}$. Por tanto el tiempo de ida y regreso en dirección ortogonal a la del río será:

$$t_2 = \frac{2}{\sqrt{w^2 - v^2}} = \frac{\frac{2}{w}}{\sqrt{\frac{w^2-v^2}{w^2}}} = \frac{2}{w\sqrt{1 - \frac{v^2}{w^2}}}.$$

Ahora comparemos t_1 y t_2. Como la velocidad del remado w es mayor que la que lleva el río v, entonces $1 > \frac{v}{w}, (w \neq 0)$, de donde $1 > \frac{v^2}{w^2}$. Y como $\frac{v^2}{w^2} > 0$, pues v, w no son cero, entonces $-\frac{v^2}{w^2} < 0$, por tanto $1 - \frac{v^2}{w^2} < 1$. Por otro lado, como $v < w$, entonces $\frac{v^2}{w^2} < 1$ y $\frac{-v^2}{w^2} > 1$, por lo que $\frac{1-v^2}{w^2} > 0$. Por tanto, $0 < 1 - \frac{v^2}{w^2} < 1$.

De aquí tenemos que:

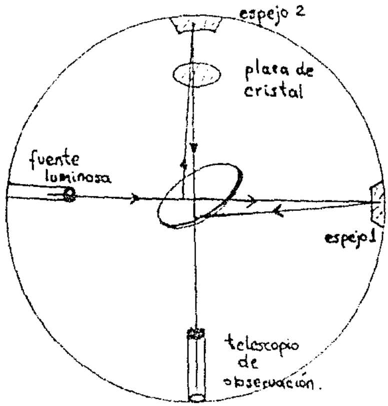
$\sqrt{1 - \frac{v^2}{w^2}} > 1 - \frac{v^2}{w^2}$, entonces

$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{w^2}}} < \frac{1}{1-\frac{v^2}{w^2}}$ y

$\frac{2}{w\sqrt{1-\frac{v^2}{w^2}}} < \frac{2}{1-\frac{v^2}{w^2}}$, de donde resulta que $t_2 < t_1$.

Esto quiere decir que el tiempo requerido para remar de ida y regreso en dirección del río es mayor al requerido en una dirección ortogonal, aún cuando la distancia recorrida sea la misma.

Si el río simula el movimiento de la Tierra en el *eter* y ya que este supuesto *eter* es el medio de propagación de la luz, algo parecido debería pasar si se envía un rayo de luz de ida y de regreso en la dirección del movimiento de la Tierra en el *eter* y otro en una dirección ortogonal. Es decir, debería detectarse una diferencia de tiempo de recorrido. Entonces, Michelson y Morley diseñaron un aparato que llamaron interferómetro y que consistía en una serie de espejos puestos de manera que un rayo emitido de una fuente luminosa se dividía y era enviado en dos direcciones al mismo tiempo. Esto se hizo mediante un espejo cuya cara estaba cubierta de una delgada capa semiplateada, para permitir que parte del rayo lo atravesara y llegara al espejo 1 y el resto se reflejara en ángulo recto hacia el espejo 2. Los espejos 1 y 2 reflejaban luego los rayos de luz al espejo semiplateado y allí nuevamente los rayos eran partidos. Una parte del rayo que llegaba del espejo 1, se reunía con una parte del rayo que llegaba del espejo 2 y se dirigían a un telescopio de observación.



Como el rayo que iba al espejo 1, tenía que atravesar tres veces el espesor del vidrio situado detrás de la cara reflectora del espejo semiplateado, una placa transparente de igual espesor fué colocada entre los espejos semiplateado y el 2 para interceptar el rayo que iba al espejo 2 y compensar así ese retardamiento. Este aparato estaba fijo en un material flotante y todo dentro de un recipiente de mercurio permitiéndole girar.

Si el viento del *eter* es comparable con la corriente del río, debería haber una dirección de dicho viento para el rayo que viaja al espejo 1, de tal forma que el tiempo que tarda en llegar al telescopio desde la fuente luminosa, debería ser mayor al tiempo que tarda en la dirección ortogonal, o sea, para el rayo que viaje al espejo 2. Y debiera crearse un fenómeno de onda conocido con el nombre de interferencia resultante en la pantalla del telescopio, de luz alternante y bandas obscuras.

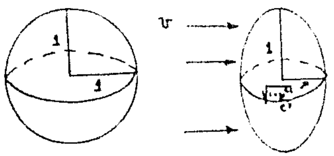
Pero... ¿ cómo saber cual es la dirección del viento de *eter* ?. Como no se sabía, se hizo girar el aparato completo en el mercurio para probar si en alguna dirección había alguna diferencia de tiempos detectable. Según el razonamiento en el río, en la dirección en la que esa diferencia fuera máxima sería la dirección del viento del *eter*, o bien la dirección del movimiento de la tierra con respecto al *eter*. El resultado del experimento fué que no había diferencia de tiempos en ninguna dirección. El experimento fué repetido en diferentes momentos del día y durante diferentes estaciones del año y el resultado fué el mismo.

¿ Qué falló ?, ¿ por qué no hubo diferencia de tiempos detectable ?. ¿ Sería que existe el *eter* y Copérnico se equivocó al decir que la Tierra se mueve ?, ¿ o no existía el *eter* y las ondas electromagnéticas (dentro de éstas se incluye a la luz) pueden propagarse sin un medio ?.

¿ O será acaso que el ejemplo del lanchero en el río no era tan análogo al de la Tierra en el *eter* ?, ¿ Y en qué fueron distintos ?

Muchas explicaciones se intentaron dar al resultado inesperado del experimento de Michelson-Morley tratando de conservar la idea del *eter*, como la que decía que posiblemente la Tierra arrastraba con ella algo de *eter* y por eso estaba localmente en reposo. Sin embargo el fenómeno de aberración, observado en 1725 por James Bradley no podría ocurrir si eso pasara [†].

La explicación más fuerte al experimento, tratando de que aún viviera la idea del *eter* está en el concepto de la Contracción de Lorentz - Fitgerald. En 1892 Fitgerald sugirió que cualquier objeto que se mueve con respecto al *eter* con una velocidad v se contrae en un factor $\sqrt{1-\frac{v^2}{w^2}}$, en la dirección del movimiento dejando invariantes las las distancias en las direcciones ortogonales. Así, una pelota de radio 1, cuando se pone en movimiento se convierte en un elipsoide con semiejes 1 y $\sqrt{1-\frac{v^2}{w^2}}$, este último en dirección del movimiento.



Por otro lado, en 1895 el físico Lorentz planteó una teoría sobre el electrón que decía que la materia está compuesta de cargas eléctricas que generan campos eléctricos. Cuando éstas se mueven se generan campos magnéticos, los cuales se ven afectados por el movimiento en el *eter* con la contracción sugerida por Fitgerald.

Esto parecía explicar perfectamente el resultado del experimento de Michelson-Morley, ya que las distancias del recorrido de la luz en dirección al espejo 1 y al espejo 2 (llamémosle d_1 y d_2 respectivamente), cumplen que $d_2 = d_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Lo que implica que:

$$t_2 = \frac{d_2}{c} = \frac{d_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{c} = t_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

y que es justamente la razón entre $t_1 = \frac{2}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$ y $t_2 = \frac{2}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. O sea que la diferencia de tiempos que teóricamente debía ser detectada, experimentalmente no lo era, ya que t_1 multiplicado por el factor de contracción $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ igualaba a t_2.

Creyendo en esa contracción de Lorentz-Fitgerald, si el aparato de Michelson-Morley tuviera radios distintos, sí habría diferencia en tiempos detectable y podría

[†] para los detalles de esta explicación ver [Fab]. Differencial Goemetry and Theory of Relativity, pág. 108

notarse un cambio en el estampado. Así es que en 1932 Kennedy y Thorndike llevaron a cabo un experimento con radios desiguales y el grado de variación previsto por la contracción no fué observada.

Pero para esas fechas, la teoría de la Relatividad ya tenía mucho camino recorrido y es que paralelamente a esas explicaciones surgieron otras con distinto caracter. Hubo una que decía que era posible que la velocidad de la luz fuera un invariante en cualquier marco de referencia, se moviera o no, ya que se había observado que la velocidad de la luz era la misma, no sólo en cada momento variando la dirección, sino también en cualquier posición de la Tierra con respecto al Sol, pensando en ésta como un marco de referencia móvil. Sólo que algo tan lógico como la invariancia de la velocidad de la luz nunca había pasado con otros movimientos de ondas y esto no dejaba de sonar extraño.

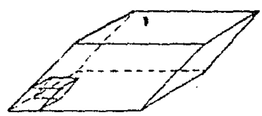
¿ Cómo resolver el conflicto ? ¿ Existía realmente el éter ?. ¿ Qué pasaba con la velocidad de la luz, no era constante en algún medio de propagacíon, era relativa a en donde se midiera o absoluta ?. Algo que quedaba claro del experimento de Michelson-Morley es que la luz cumplía también con el Principio de la Relatividad del movimiento, pero ¿ Qué estuvo mal del razonamiento que hizo parecer contradictorio ?

Para poder analizar las respuestas, en particular la de Albert Einstein, vamos a precisar qué es un marco de referencia, cuyo concepto va a ser muy importante en toda la teoría de la Relatividad Especial. Lo vamos a dar, intentando ver cuales son las características que se presuponen del espacio físico y del tiempo y algunas leyes, con la idea de precisar en la teoría cuáles son los aspectos escenciales que la sustentan, rescatar sus "axiomas" para ir ordenándola con uno de los métodos conocidos en matemáticas, que es el axiomático.

2. SURGIMIENTO DEL PRINCIPIO DE RELATIVIDAD (SISTEMAS INERCIALES)

En la sección anterior se ha manejado de manera un tanto imprecisa el concepto de marco de referencia. En esta se empieza por precisarlo a través de construir lo que se entenderá por ese concepto.

Tomemos primero una varilla rígida como patrón de medida, es decir, nuestra unidad, y vamos construyendo cubos, o sea vamos formando en el espacio físico una especie de esqueleto de un prisma cuyos lados midan lo que mide nuestra unidad. Algo que es importante observar es que no se pide perpendicularidad entre los lados del prisma.



Una vez que está formado el primer cubo, vamos cubriendo todo el espacio con esos cubos, uno seguido de otro, de tal forma que se ha formado una retícula. Ahora, dividiendo nuestra unidad podemos llegar a cubrir cada cubo con pequeños cubitos y cada uno de esos pequeños cubitos a su vez por otros más pequeños y así sucesivamente, hasta llenar todo el espacio de cubitos, de tal forma que cada punto del espacio físico es un vértice de un cubito. Para que realmente podamos construir esta fina retícula, necesitamos tomar varillas sin peso, sin espesor, o sea tan idealizadas como las mismas rectas.

Continuando con la idea de formar nuestro sistema de referencia, colocamos un relojito en cada vértice de la retícula. Ahora, escojemos cualquiera de esos relojitos con su vértice y lo llamamos origen de coordenadas y denotémoslo O. Vamos a sincronizar todos los relojitos, de acuerdo a ese del orígen, de la siguiente forma: tomamos cualquiera otro reloj de la retícula, digamos en el vértice A, enviámos un rayo de luz de O a A. Definimos el tiempo cero cuando se envía el rayo de luz. Y como A está a una cierta distancia de O, digamos distancia d, entonces, ya que la luz viaja a la misma velocidad c en cualquier dirección (por el experimento de Michelson-Morley), el tiempo que tarda el rayo de luz para llegar a A es $\frac{d}{c}$, entonces en el reloj de A se registrará el tiempo $\frac{d}{c}$ y estará sincronizado con el de O, en el que ya habrán transcurrido $\frac{d}{c}$ segundos desde la salida del rayo de luz. Observemos que todos los relojes que estén a una distancia d, también registrarán $\frac{d}{c}$ segundos, ya que la luz viajará a la velocidad c en cualquier dirección. Y así para cada distancia al origen O, todos los relojes a esa distancia registrarán la misma hora, o sea todos los relojes tendrán las manecillas señalando el mismo número, simultaneamente.

Entonces, ya con esta retícula y esos relojes, vamos a poder darle a cada evento (o bien a cada suceso real), unas coordenadas espaciales y un tiempo en el que ocurre, o sea, a cada evento le asociamos cuatro números (3 del vértice de algún cubo y 1 del tiempo) que denotaremos (x, y, z, t). Eventos como choque de canicas, encender lámpara, llegada del rayo de luz a una pared, etc, son sucesos instantáneos. Dicho de otra forma, construimos un sistema de referencia cuyos puntos son eventos. Al conjunto de todos estos eventos le llamaremos espacio-tiempo. Más adelante vamos a dar una mejor formalización, que no damos en este momento, porque falta toda la discusión sobre el concepto de tiempo.

Ahora bien, la construcción de este sistema de referencia, presupone una característica fuerte del espacio físico y del tiempo en el sentido de que ambos son homogéneos, o sea que el espacio físico es homogéneo y el tiempo también, es decir que nuestra vara rígida, medirá lo mismo en un tiempo fijo, independientemente del lugar en el que se encuentre y que un intervalo de tiempo medirá lo mismo, no importando el tiempo a partir del cual se tome. Este supuesto es realmente una hipótesis importante sobre el espacio-tiempo.

Otra propiedad que cumple este sistema es la de ser Galileano o inercial, es decir que cumple con la ley de inercia. Cuando uno de estos sistemas está lejos de toda materia y se suelta dentro de él un cuerpo que estaba sostenido, el cuerpo flotará y permanecerá en reposo respecto a este sistema hasta que reciba una fuerza externa al cuerpo que lo saque de esta posición. Y si ahora el cuerpo es empujado en un momento, se moverá en línea recta y con velocidad constante, indefinidamente hasta que otra fuerza externa a él lo pare.

En realidad, un sistema inercial de referencia es una idealización ya que los efectos de gravedad nunca pueden ser completamente eliminados, ni tampoco los de rozamiento, fricción y resistencia del aire. Pero para la mayoría de los experimentos con luz o con partículas viajando a velocidades cercanas a la de la luz, la Tierra misma podría considerarse como un sistema inercial lo cual nos ayudará a solucionar el problema que hemos planteado anteriormente.

Algo más, a un observador que se encuentre en reposo con respecto a un sistema inercial de referencia lo llamaremos observador inercial. Ahora, si un sistema cualquiera se mueve en línea recta con velocidad constante con respecto a un sistema inercial, entonces éste también será inercial.

Las leyes que rigen a cada sistema inercial, son las de la mecánica clásica y la geometría utilizada para expresar esas leyes es la Euclidiana.

Einstein, se había enfrentado también al problema de suponer que la velocidad de la luz no dependía del lugar en donde se midiera, sólo que él llegó a través de problemas de electrodinámica.

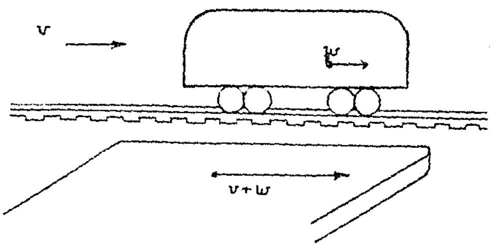
El había abordado el problema, teniendo en mente dos postulados. Estos son:

> 1.- La velocidad de la luz (en el vacío) es la misma en todos los sistemas de referencia, independiente a la fuente de luz.
>
> 2.- Todas las leyes físicas válidas en un sistema de referencia, son igualmente válidas en cualquier otro sistema que se mueve con traslación uniforme (con velocidad y dirección constante) respecto al primero.

La primera afirmación, era cómo creía que se comportaba la velocidad de la luz a partir de muchas investigaciones sobre Electrodinámica y Optica que implicaban la constancia, lo cual coincide con una explicación al resultado del experimento de Michelson-Morley. El segundo, el Principio de la Relatividad, es una importante generalización de un principio establecido anteriormente por Galileo sobre los movimientos:

> *"...los movimientos de los cuerpos incluidos en un espacio dado, son los mismos entre ellos, ya sea que el espacio esté en reposo o se mueva uniformemente en línea recta..."*[†].

Un ejemplo ilustrativo de este principio de Galileo es el siguiente. Pensando en un cuerpo que viaja con velocidad y dirección constante con respecto a un terraplén. Un pasajero de un tren que viaja a velocidad y dirección constante (con respecto al mismo terraplén), también verá al cuerpo viajar con velocidad y dirección constante, aunque no

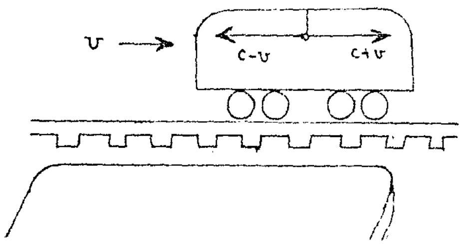


[†] Principia Matematica. Newton

con la misma dirección y velocidad que desde el andén. Además cualquier cambio de velocidad sería detectable tanto en el tren como en el andén.

La generalizacón de Einstein está en que no sólo las leyes del movimiento de los cuerpos es igual en estos sistemas, sino todas las leyes de los fenómenos mecánicos, electromagnéticos, etc., creyendo mucho en la unidad de la naturaleza.

Estos dos postulados eran aparentemente contadictorios porque: si desde el punto medio de un largo tren que viajaba con dirección y velocidad v constantes, se enviaba un rayo de luz, esto era observado de distinta forma desde el andén quedesde el tren. Desde el tren, la velocidad de la luz es la misma en cualquier dirección, en cambio visto desde el andén, el rayo de luz en el sentido del movimiento llevaba además la velocidad del tren, mientras que en el sentido contrario, la velocidad del tren le hacía viajar a menor velocidad.



Dicho en otras palabras, dada la ley de la suma de velocidades conocida en aquél entonces, el rayo de luz viaja a la velocidad $v+c$ en el sentido del movimiento y a $c-v$ en sentido contrario, tal como se ilustra en el dibujo. Entonces, mientras desde el tren se observa que la luz viaja a la misma velocidad en cualquier dirección, desde el andén se observa que no es la misma velocidad. No cumpliéndose así una misma ley en estos sistemas referencia, con lo que parecía contradecir el Principio de Relatividad de Einstein.

Entonces, si creemos que en cualquier sistema de referencias la velocidad de la luz es la misma, como es claro que la ley de suma de velocidades se cumple, sería falso el Principio de la Relatividad. Este razonamiento llevó a muchos teóricos a desechar el Principio de la Relatividad.

¿ Será cierto ese Principio de la Relatividad ? o ¿ no será que lo que está mal es esa muy clara suma de velocidades ?, de ser así, el problema es más profundo de lo que parece, porque nos llevaría a revisar los conceptos de velocidad, distancia, tiempo, y espacio. Efectivamente, tenemos que hacer un nuevo análisis de conceptos considerando sistemas de referencia moviéndose unos con respecto a otros. Todo esto parece ser una contradicción lógica, pero no lo es. Recordemos la actitud del hombre de la Edad Media ante la esfericidad de la Tierra, para él, la forma esférica de la Tierra estaba en contradicción lógica con la fuerza de gravedad, ya que si hubieran gentes viviendo de cabeza caerían hacia "abajo". Y ahora sabemos que en todo esto no hay ninguna contradicción lógica, simplemente que los conceptos de "arriba" y "abajo" son bien relativos y no absolutos. ¿ No estaremos es una situación análoga ?. ¿ Hay realmente una contradicción entre el Principio de la Relatividad y lo absoluto de la velocidad de la luz ?, ¿ No estaremos también suponiendo que algo relativo es absoluto ?. Y si así fuera, ¿ qué es ese algo ?.

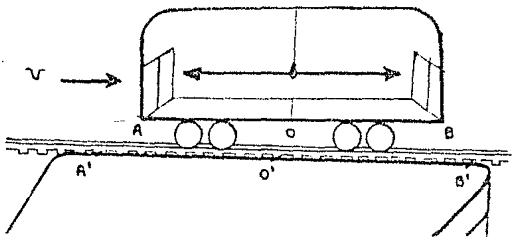
Empezemos a analizar y a preguntarnos :

3. ¿ DOS EVENTOS SIMULTANEOS EN UN SISTEMA INERCIAL DE REFERENCIA, LO SON PARA CUALQUIER OTRO?

RELATIVIDAD DE LA SIMULTANEIDAD.

Para respondernos, imaginemos el siguiente experimento, hasta ahora imposible de realizar. Un tren muy muy largo de varios miles de kilómetros, se mueve en línea recta hacia la derecha, respecto al andén y con velocidad constante muy cercana a $c = 3000,000$ Km/seg (el valor aproximado de la velocidad de la luz que usaremos en nuestros cálculos).

Al principio y final están instaladas unas puertas automáticas que se abrirán en el momento en que la luz incida sobre ellas.



Supongamos que en el punto medio O entre la puerta trasera A y la delantera B, se enciende un foco, ¿se verá lo mismo desde el tren que desde el andén ?.

Desde el punto medio del sistema inercial de referencia fijo al tren, se observará que la luz alcanza simultáneamente las dos puertas y las dos puertas se abrirán al mismo tiempo, ya que de acuerdo al experimento de Michelson-Morley, la luz se propaga a la velocidad c en cualquier dirección y hay la misma distancia de O a A que de$O$ a B.

Ahora, si copiamos los puntos A, B y O sobre el andén en los puntos A' , B' y O' respectivamente, entonces O' es el punto medio entre A' y B', debido a la homogeneidad del espacio. Y dado que la luz también se propaga a la velocidad c, (con el primer postulado de Einstein), desde el punto O' se observará que la puerta trasera ha ido al encuentro del rayo de luz, en cambio la puerta delantera se ha alejado de este. Por tanto el rayo de luz encontrará primero la puerta trasera A que la delantera B y se observará que se abre primero A y luego B. Así desde el sistemA inercial del andén parecerá que las puertas del trén no se han abierto simultáneamente.

De modo que, dos eventos que resultaron ser simultáneos respecto a un sistema inercial, no lo fueron para otro con movimiento rectilíneo y velocidad constante. Esto quiere decir, que la simultaneidad de dos eventos es relativa al sistema inercial desde el que se observa.

Para que pudiera haber una diferencia notoria de tiempos en el abrir de una y otra puerta, vista desde el andén, la velocidad a la que viaje el tren debe ser muy grande (cercana a la de la luz) y el tren verdaderamente grande, para que tenga algún sentido que la puerta trasera alcance al rayo y que la delantera sea no tan rápidamente alcansable. Es esto lo que hace este experimento imaginario, que no es sinónimo de ideal.

En velocidades muy pequeñas en comparación con la velocidad de la luz, esta diferencia de tiempos entre el abrir de una y otra puerta, es bastante pequeña e imperceptible. Como nosotros trabajamos cotidianamente con velocidades pequeñas, algo tiene de habernos pasado como al hombre del Edad Media que aún no viajaba y no podía percatarse de la esfericidad de la Tierra. Y cuando empezó a viajar se dió cuenta no solo que la forma de la Tierra es como una esfera, sino de que sus conceptos de "arriba" y "abajo" resultaban ser relativos. Así como nosotros cuando empezamos a trabajar con velocidades no cotidianas, nos hemos dado cuenta que un concepto que creíamos absoluto, como el de la simultaneidad, es relativo al sistema inercial. Bueno, pero podemos preguntarnos ¿ y en qué cambian las cosas con eso ?, ¿ ya con eso resolvimos la contradicción que hay entre el Principio de la Relatividad y que la luz se propague con velocidad constante c en cualquier sistema inercial de referencia ?. Aún no, faltan analizar varias cosas más. Pero con el simple hecho de haber descubierto la relatividad de la simultaneidad, vamos a descubrir la relatividad de las distancias o longitudes y lo más importante que es la relatividad del tiempo.

Cuando deseamos medir la longitud de algún objeto con nuestra vara rígida, tenemos que ubicar los extremos del objeto al mismo tiempo. No podríamos medir un pez que nada hacia adelante si ubicamos su cola y luego su frente, porque para entonces ya nadó y la medida resultaría mayor. Entonces bien, si queremos medir un objeto en un sistema de referencia, tenemos que ubicar los extremos simultáneamente, pero resulta que lo que es simultáneo para un sistema para otros no lo es, entonces las longitudes en uno y otro sistema serán distintas. Por ejemplo, con el mismo tren con el que analizamos la simultaneidad (llamado por cierto tren de Einstein), si las marcas A,B y O se pasaran al andén en A', B' y O' respectivamente, en el momento en que desde O se vió llegar el rayo de luz a las puertas A y B simultaneamente, desde O se observaría que la distancia de A a B y la de A' a B' son iguales, porque al mismo tiempo (al tiempo de llegada del rayo de luz), se pudieron medir esas distancias. Sin embargo, como desde O' el rayo de luz llegó primero a la puerta trasera A y luego a la B, entonces en el momento en que el rayo llega a A, en ese mismo tiempo B todavía no llega a B', pues B' es la marca de B cuando lo alcance el rayo y aún no llega. Por tanto se observa que la longitud $A'B'$ es mayor que AB que está sobre el tren.

Entonces, si la vara rígida de medir fuera de longitud AB, desde el tren se vería que $A'B'$ mide lo mismo que la vara, en cambio desde el andén $A'B'$ mide más que la vara. En conclusión, $A'B'$ no miden lo mismo desde ambos sistemas de referencia, o sea, que la longitud de intervalos u objetos es relativo al sistema desde el que se mide.

Una observación aquí es que para todo el análisis sobre la simultaneidad y longitudes, no necesitamos decir cual es el conteo del tiempo en el tren o en el andén, si son iguales o no, porque la sola idea de simultaneidad es si se reciben las señales de los sucesos a la vez o no. Más adelante sí veremos como son los conteos del tiempo en cada sistema de referencia.

La relatividad del tiempo es una discusión mucho más profunda por lo que la abordaremos más adelante. Ahora veamos por último que la relatividad de la simultaneidad y de las longitudes no contradicen el Principio de la Relatividad postulado por Einstein. Lo que es simultáneo para el sistema de referencia en el tren que se movía a la derecha del andén, no lo es para el sistema de referencia del mismo andén, pero lo podemos también ver simétricamente; el andén se mueve a la izquierda del tren y lo que es simultáneo para el andén no lo es para el tren. Para ambos sistemas se cumple la ley de no tener los mismos eventos simultáneos. Análogamente con las longitudes, desde el andén no se observan las mismas longitudes que desde el tren, pero desde el tren tampoco se observan las mismas que desde el andén. Entonces ambos sistemas cumplen la misma ley de no medir las longitudes igual que en los otros sistemas. Más adelante veremos por cual factor difieren las longitudes medidas en uno u otro sistema, así como el del tiempo.

Entonces hasta el momento, no hay contradicción de la relatividad de la simultaneidad con el Principio de la Relatividad, aunque está claro que no significa ninguna prueba a dicho principio tomado como hipótesis.

Otra discusión importante que debemos dar, es respecto a la hipótesis en esta teoría de una velocidad máxima en la naturaleza. En ningún experimento físico se había logrado superar la velocidad de la luz y más aún, se llegó a pensar que era ésta una cota máxima. Con el descubrimiento de la relatividad de la simultaneidad, un nuevo razonamiento parecía reafirmar esta idea de velocidad máxima. Si hubiera algo que tuviera velocidad infinita, una señal a esta velocidad haría a cualesquiera dos acontecimientos simultáneos, entonces la simultaneidad sería absoluta, pero el experimento mostrado anteriormente ha mostrado que no lo es, que sí depende del sistema de referencia, por tanto no existen señales instantáneas ni velocidades infinitas.

Realmente este razonamiento no es ninguna prueba de la existencia de la velocidad máxima. En el siguiente capítulo se analizará mucho más esto, cuando se analizen las hipótesis del aspecto físico de la teoría.

Ahora sí, analicemos que consecuencias traerá la relatividad de la simultaneidad, ¿en qué cambia al tiempo, por ejemplo?, ¿es relativo también?. De ser así, ¿cambiará mucho toda la idea que tenemos del universo en el que vivimos y sus leyes?. Pues bien, entrémosle al análisis del tiempo.

4. ¿ ES EL TIEMPO UN CONCEPTO RELATIVO ?

Como ya dijimos hace un momento, cuando afirmamos que algo ocurre en un determinado tiempo, estamos afirmando que ese evento y el que las manecillas indiquen ese tiempo, son eventos simultáneos. Pero como la simultaneidad es relativa al sistema de referencia, entonces si un suceso ocurre en el tiempo t en uno de esos sistemas, para otro que se mueva con velocidad y dirección constante, ocurrirá en otro tiempo $t' \neq t$.

Por lo tanto, cada sistema inercial marca sus tiempos para los eventos, es decir, cada uno de estos sistemas tiene su propio tiempo. El tiempo como consecuencia de la relatividad de la simultaneidad, resulta ser un concepto relativo, contraria a la idea que el hombre prerrelativista tenía de un espacio y un tiempo absolutos, como un flujo constante, invariante, que transcurre desde el pasado infinito hasta el futuro infinito.

Es en esta relatividad del tiempo en donde descansa la gran dificultad para convencerse de la Teoría de la Relatividad y se debe a ese profundo prejuicio que aún se tiene sobre el tiempo, basado en la experiencia cotidiana. Einstein decía:

> " *...las experiencias de un individuo se nos aparecen ordenadas en una serie de sucesos; en esta serie, los sucesos que recordamos están ordenados de acuerdo con el criterio de "antes" o "después". Existe por lo tanto, para el individuo un yo-tiempo o tiempo subjetivo. Este no es mensurable en sí mismo. Yo puedo desde luego, asociar números a los sucesos de tal manera que al último acontecimiento se asocia un número mayor que al inmediatamente anterior. Esta sucesión la podemos definir con un reloj, comparando el orden de los sucesos dados por el reloj con el orden de la serie dada por los sucesos. Entendemos por reloj algo que nos proporciona una serie de sucesos que pueden ser contados...* ".

Nuestra experiencia con el reloj (o calendario), realmente nos hace pensar en el tiempo como algo absoluto. Pero a lo que llamamos una hora, es en realidad una medida del espacio, pues es un arco de 15 grados en la rotación diaria aparente de la esfera celeste y un año es realmente un avance de la Tierra en su órbita alrededor del Sol. En Mercurio las medidas del tiempo son bien distintas, un año es lo mismo que un día, ya que gira alrededor del Sol en 88 días terrestres y en ese mismo período gira una sola vez alrededor de su propio eje y si nos alejamos del Sol, nuestra noción de tiempo pierde realmente sentido, por ejemplo si tratamos de saber lo que pasa "ahora mismo" en la estrella Arturo que está a 33 años luz de distancia, es decir a la distancia recorrida a la velocidad de la luz, durante 33 años.

Para la Teoría de la Relatividad el "ahora", "en este momento", "aquí", no tiene ningún sentido, si no se dice respecto a cual sistema inercial de referencia. El movimiento juega realmente un papel muy importante en esta relatividad de conceptos. En un cuerpo celeste que viaja a una velocidad cercana a la velocidad de la luz, en un sistema inercial fijo a él, sus tiempos, sus longitudes, su simultaneidad, su espacio, son completamente distintos a los nuestros y la dificultad de entenderlo así, es realmente un problema subjetivo por parte nuestra.

Pero, ¿qué tan distintos son los tiempos entre los sistemas inerciales de referencia que se mueven en traslación uniforme unos respecto a otros?, ¿son totalmente independientes o hay alguna relación entre esos tiempos?. En realidad como los sistemas no se mueven arbitrariamente, sino más bien uniformemente, creyendo un poco en la armonía de la naturaleza, podríamos intuir que debe haber una ley que nos diga como son los tiempos en cada sistema, claro está, dependiendo de que velocidad que lleve con respecto a otro. Bueno, para contestar vamos primero a cambiar nuestras medidas de kilómetros, segundos, km/seg por otras mucho más practicas en el sentido en que tanto en el espacio como en el tiempo tendremos la misma unidad, para analizar luego un experimento.

Puede parecer extraño, sugerir distancias y tiempos en las mismas unidades, pero esto se puede hacer gracias a que la velocidad de la luz es c en todos los sistemas de referencia. De hecho cuando en astronomía se habla de un "año luz", se está hablando de la distancia que se recorre a la velocidad c de la luz durante un año. Y con esto se logra poner la distancia en términos de años la cual es una medida del tiempo, donde el valor c lo vamos a aproximar como $300,000\ km/seg$.

Algo como esto vamos a hacer, pero en lugar de poner a la distancia en unidades de tiempo, al tiempo lo pondremos en centímetros.

Como la velocidad c es $300,000\ km/seg$, lo que equivale a $30,000,000,000$ cm/seg. Diremos que un segundo (segundo luz si se quiere) equivale a $30,000,000,000cm$ $= 3 \times 10^{10}cm$ y con esto una unidad de tiempo equivaldrá a 3×10^{10} unidades de espacio. Es lo mismo que decir que un centímetro equivaldrá a $(3 \times 10^{10})^{-1}$ segundos. Así hemos dado la unidad en centímetros tanto para el espacio como para el tiempo. Al espacio-tiempo diremos que le hemos asociado **unidades geométricas**. Como la velocidad c de la luz es constante en todos los sistemas inerciales, esa unidad es válido tomarla.

Ahora bien, para saber cuanto valen las velocidades con esta unidad, veamos: como $1cm = \frac{1}{3\times 10^{10}}seg$ puesto que la velocidad de la luz es de 3×10^{10} cm/seg , eso quiere decir que la luz viaja un centímetro de tiempo. O sea, que en nuestra unidad, la velocidad de la luz vale 1 (sin indicar en que unidades).

Y cualquier otra velocidad v ($v < c$), $v\ cm/seg$ por ejemplo, en estas nuevas unidades vale:

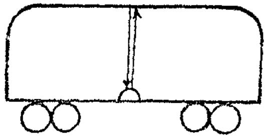
$$vcm/seg = v \cdot cm/seg \cdot \frac{1}{3 \times 10^{10}cm} \cdot seg = \frac{v}{3 \times 10^{10}} = \frac{v}{c} = \beta$$

Aquí β es también una cantidad independiente de las unidades, siempre y cuando v y c sean calculadas en las mismas unidades convencionales.

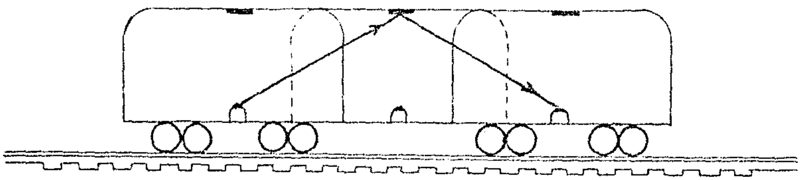
Con estas unidades será mucho más conveniente poder plantear todo el aspecto geométrico de la Teoría de la Relatividad y para empezar a hacer esto, regresemos a ver la relación que hay entre los tiempos de uno y otro sistema inercial de referencia con movimiento de traslación uniforme, de donde se desprenderá la relación que hay también entre las distancias.

Imaginemos el siguiente experimento dentro del tren de Einstein. Supongamos que estando en marcha el tren con velocidad β, se envía un rayo de luz desde una linterna que está colocada en el suelo, hasta el techo del tren en donde está un espejo fijo a éste. Cuando el rayo de luz llega al espejo, es reflejado y regresa a la linterna. Si colocamos un sistema inercial de referencia S' en el tren con coordenadas (x', y', z', t') y otro en el andén, al cual llamaremos S con coordenadas (x, y, z, t), nos preguntamos, ¿se observa lo mismo desde S' que desde S?.

Desde el tren se observa que la trayectoria de la luz ha sido estrictamente una trayectoria vertical, como la del dibujo. En cambio desde el andén o bien desde S, la trayectoria es completamente distinta. En el tiempo en que el rayo de luz llega desde la linterna al espejo, éste se ha movido y mientras regresa el rayo del espejo a la linterna nuevamente, al ser reflejado, la linterna se ha desplazado todavía otro tanto. La trayectoria que se verá desde S (el andén) es como la que se ve en el dibujo de abajo.

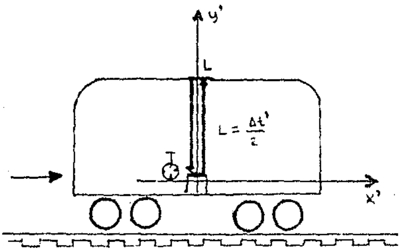


Dado que la velocidad de la luz es constante con valor 1 en todos los sistemas, entonces transcurrió más tiempo desde el evento A (la emisión del rayo) hasta el evento B (la llegada del rayo otra vez a la linterna), desde el sistema S que desde el S', ya que la luz tiene que recorrer una mayor distancia a la misma velocidad siempre.



Vamos a ver que no es difícil encontrar la relación entre los tiempos.

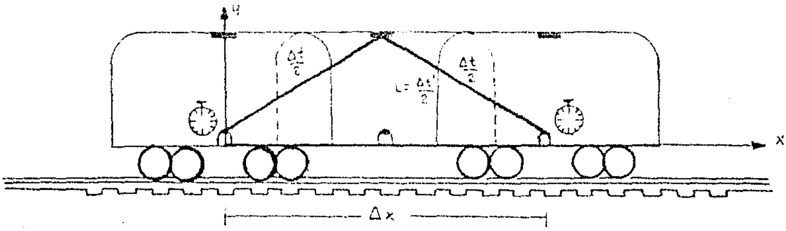
Si colocamos el origen del sistema de referencia de S' en la bombilla y $t' = 0$, cuando el rayo de luz sale de la linterna y además si suponemos que L es la altura del tren, como la recorrió dos veces, entonces el tiempo transcurrido es el doble de esa altura L (ya que la velocidad de la luz es 1, por lo que la distancia recorrida es igual al tiempo recorrido), o sea que si $\Delta t'$ es el tiempo entre el evento A y el B, entonces $\Delta t' = 2L$ o bien $\frac{\Delta t'}{2} = L$. Este intervalo de tiempo es medido por un único reloj, ya que el rayo regresó al mismo lugar de S'.



En cambio desde S, de el evento A al B, la bombilla se ha recorrido, digamos Δx y la trayectoria que la luz ha recorrido son los dos lados de un triángulo isósceles, con base Δx. La longitud de cada uno de estos lados mide $\frac{\Delta t}{2}$, ya que la velocidad de la luz vuelve a valer 1, por lo que la distancia recorrida resulta igual al tiempo transcurrido (ahora que están con las mismas unidades). La altura del triángulo isósceles que se ha formado, es precisamente $L = \frac{\Delta t}{2}$. Una pregunta que habría que hacernos aquí es si L sigue siendo la altura del tren después de haberse desplazado, o sea, la pregunta sería si las longitudes en direcciones ortogonales a la del movimiento se preservan o no. Más adelante veremos que sí, por ahora sólo lo usaremos.

Para hacernos una idea, dibujaremos lo dicho hasta aquí de lo que se observa desde S o bien desde el andén.

También colocando el origen del sistema S, sobre el andén en frente de la linterna cuando el rayo de luz es emitido, a cuyo instante le llamaremos $t = 0$ también.



Entonces, por el Teorema de Pitàgoras:

$$(\frac{\Delta t}{2})^2 = L^2 + (\frac{\Delta x}{2})^2$$

o bien, como $L = \frac{\Delta t'}{2}$:

$$\frac{(\Delta t)^2}{4} = \frac{(\Delta t')^2}{4} + \frac{(\Delta t)^2}{4}$$

o bien:

$$((\Delta t)^2 = (\Delta t')^2 + (\Delta x)^2$$

es decir:

$$(\Delta t')^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

Ahora, ya que la velocidad del tren S' con respecto al andén, es β en unidades geométricas, y $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (la distancia recorrida entre el tiempo trancurrido visto desde el sistema S), entonces, $\Delta x = \beta(\Delta t)$ y sustituyendo tenemos:

$$(\Delta t')^2 = (\Delta t)^2 - \beta^2 \Delta t^2$$

haciendo un poco de álgebra se llega a:

$$\Delta t' = (\Delta t)\sqrt{1 - \beta^2}$$

donde, $\beta = \frac{v}{c}$.
y es esta precisamente la relación que hay entre el tiempo medido desde S' (el trén) con respectro al medido desde S (el andén). La raíz tiene sentido porque $\beta \leq 1$.

Por ejemplo, si el tren de Einstein viaja a una velocidad de $v = 240\,000$ km/s o sea:

$$\beta = \frac{24 \times 10^9 cm/seg}{3 \times 10^{10} cm/seg} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

y hay dos estaciones de tren que están a 864 000 000 km de distancia, o bien a 864×10^6 km, o bien a $864,000 \times 10^{11} cm$. El tren de Einstein necesitaría una hora para llegar de una estación, o sea, $3600 \times 3 \times 10^{10} cm$.

Un pasajero que sube en la primera estación, pone su reloj de acuerdo al de la estación y al llegar a la segunda estación vuelve a comparar su reloj con el de la nueva estación, y se queda asombrado al ver que su reloj se retrasó.

De acuerdo a la relación que acabamos de encontrar, cuando hubieran pasado diez segundos en los relojes sincronizados de las estaciones en el reloj del pasajero sólo habrían transcurrido seis segundos, ya que los diez segundos en unidades geométricas son 3×10^{11} cm, y como:

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} \qquad \text{donde} \quad \beta = \frac{4}{5},$$

entonces,

$$\Delta t' = 3 \times 10^{10} \sqrt{1 - \frac{16}{25}} \quad cm.$$

$$\Delta t' = 3 \times 10^{11} \times \frac{3}{5} \quad cm.$$

y como $1cm = \frac{1}{3 \times 10^{10}}$,
entonces, convirtiendo nuevamente:

$$\Delta t' = \frac{3 \times 10^{11}}{3 \times 10^{10}} \times \frac{3}{5} \quad seg$$

$$\Delta t' = \frac{10 \times 3}{5} \quad seg$$

$$\Delta t' = 6 \quad seg$$

Entonces todo parece indicar que sí, el reloj del pasajero se retrasó en la proporsión 10:6, por lo tanto cuando llegó a la segunda estación, su reloj se había retrasado 24 minutos (pues con 60 minutos marcados en la estación, 36 fueron marcados en su reloj), en general como $0 \leq \beta \leq 1$, entonces $0 \leq 1-\beta^2 \leq 1$, de donde $0 \leq \sqrt{1-\beta^2} \leq 1$, por lo que $\Delta t\sqrt{1-\beta^2} \leq \Delta t$ implica que $\Delta t' \leq \Delta t$. Eso quiere decir, que mientras el tren no vaya a la velocidad cero (o sea, esté en reposo respecto al andén), siempre el reloj del tren se retrasará con respecto al del andén.

¿Fué bastante tiempo 24 minutos o no?. Para lo cotidiano un atraso de 24 minutos en un reloj es mucho y sin embargo puede ser mucho mayor,eso depende de la velocidad del tren con respecto a la de la luz. Si se acerca mucho a ésta, la base del triángulo isósceles estaría también muy cerca de los catetos del triángulo, entonces en la relación $(\Delta t')^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ sería Δt muy pequeño ya que casi Δx y Δt serían iguales, lo cual querría decir que $\Delta t'$ sería bien pequeño, comparado con estos. O sea que mientras en el andén transcurre un cierto tiempo, en el tren ha transcurrido un muy pequeño (y tan pequeño como queramos) tiempo. Por tanto el retraso podría ser casi todo Δt.

Formalmente; si $\beta = \frac{v}{c} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ y

$$\lim_{\Delta x \to \infty} \beta = 1$$

entonces,

$$\lim_{\Delta x \to \infty} \Delta x = \lim_{\Delta x \to \infty} \Delta t$$

entonces,

$$\lim_{\Delta x \to \infty} (\Delta t')^2 = \lim_{\Delta x \to \infty} (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 0$$

y por tanto,

$$\lim_{\Delta x \to \infty} \Delta t - \Delta t' = \Delta t$$

o sea que el retraso del tiempo tendería a ser Δt.

Aquí es preciso hacer varias observacines importantes:

1ª observación.

Para velocidades cotidianas (es decir,pequeñas en comparación con la de la luz), el factor $\beta = \frac{v}{c}$ es casi cero y entonces $\sqrt{1-\beta^2}$ es casi 1, por tanto $\Delta t' = \Delta t$ y más que eso, el error entre $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}$ y $\Delta t' = \Delta t$ es muy muy pequeño, recuperando con esto mucho de las leyes de la mecánica clásica. Pero, sin embargo el caracter absoluto del tiempo se ha roto para todo el mundo de las velocidades. No podemos afirmar que el tiempo es absoluto con velocidades pequeñas, sólo podemos decir que el considerarlo absoluto es una muy buena aproximación.

2ª observación.

El que los relojes en movimiento de traslación uniforme se retrase respecto a los relojes en reposo, ¿no es una contradicción con el Principio de la Relatividad?, ¿no habría con esto una manera de establecer un reposo absoluto, que sería donde los relojes caminan más rápido que los demás?. No, al contrario, se checa bien, pues el Principio de la Relatividad dice que las mismas leyes de la naturaleza rigen entre los sistemas inerciales con movimiento de traslación uniforme unos con respecto a otros. O sea, que si hubiera un reloj en el frente del tren y otro atrás, desde una de las estaciones del ferrocarril se habría observado que el reloj de la estación se retrasaba respecto a los dos relojes del tren (y es que el andén se encuentra en movimiento respecto al tren). La información en general, es que desde cualquier sistema inercial de referencia inmóvil respecto a su reloj, se observará que se adelantan los relojes que se mueven respecto a él y a medida que aumenten su velocidad, más se edelantan.

Y es que no se pudo establecer desde el primer experimento, el reposo absoluto, porque además los sistemas inerciales del tren y el andén eran totalmente inequivalentes, pues había tres relojes en lugar de dos. Un reloj en S' (el tren), con el que midió el evento A y el B y hubo dos relojes más en S (el andén) que se requirieron cada uno para cada evento.

3^a observación.

En la geometría Euclidiana, para obtener la distancia entre un punto $A = (x_A, y_A, z_A, t_A)$ y un punto $B = (x_B, y_B, z_B, t_B)$, encontrábamos la expresión:

$$d_AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - Y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 + (t_A - t_B)^2}$$

cuyas coordenadas estaban dadas respecto a unos ejes coordenados ortogonales.

Cuando se cambiaban esos ejes coordenados por otros, A y B tenían otras coordenadas. Sin embargo, la distancia era algo que se mantenía, en otras palabras, la distancia era un invariante bajo cambios de coordenadas cartesianas (es decir $d_AB = d'_AB'$). También en el análisis del tiempo que acabamos de hacer, hay un invariante métrico. Como desde el tren se observó que el rayo de luz llegó al mismo lugar por donde había salido, eso quiere decir que no hubo desplazamiento sobre el eje x', o sea $\Delta x = 0$ y como teníamos la relación $(\Delta t')^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$, la cual por lo anterior podemos escribir así:

$$(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2.$$

Entonces en cualquier par de sistemas, la cantidad $(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ resulta ser invariante con los cambios de coordenadas (o sea al observar desde otro sistema inercial). A esta cantidad la denotaremos $(\Delta\tau)^2$.

Cuando $(\Delta\tau)^2 = (\Delta t')^2$, o bien $\Delta\tau = \Delta t'$, como es el caso desde el tren, entonces a $\Delta\tau$ se le llama **tiempo propio entre el evento A y el B** y $\Delta t'$ pudo ser medido con un solo reloj.

Ahora bien, como el movimiento de S' (el tren), sólo fué a lo largo del eje x respecto a S, o mejor dicho a lo largo de los ejes x y x' ya que eran paralelos, entonces el rayo de luz no tuvo desplazamientos en los ejes y ni z, ni en y' y z', por tanto $\Delta y = 0 = \Delta z$ y $\Delta y' = 0 = \Delta z'$, entonces podemos decir aún más, decir que:

$$(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - \Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

o sea,

$$(\Delta t')^2 - [(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2] = (\Delta t)^2 - [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]$$

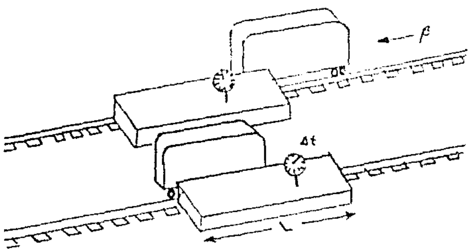
de tal forma que el invariante bajo cambios de coordenadas es: (separación temporal al cuadrado) - (separación espacial al cuadrado) = $(\Delta\tau)^2$.

Hasta aquí queda la observación de que el intervalo $\Delta\tau$ es un invariante bajo cambios de coordenadas que se mueven con traslación uniforme unos de otros. Más adelante veremos que este intervalo es un invariante métrico en una cierta geometría, como la distancia lo es en la geometría euclidiana.

4^a observación.

Veamos como el haber encontrado una relación entre lo tiempos de los distintos sistemas inerciales de referencia, nos ayudará a encontrarla para longitudes o distancias paralelas a la dirección del movimiento. Porque efectivemente el olvidarnos del tiempo absoluto, nos obliga a olvidarnos de longitudes absolutas, a quitar esa vieja idea de que las medidas de un cuerpo son propiedades intrínsecas de este.

Supongamos que el tren de Einstein S' pasa con velocidad $\beta\neg 0$, a lo largo del andén S, el cual tiene por longitud una cantidad L (medido desde S), ¿será la misma longitud que se observa desde el tren S'?.



Desde el andén se observará que el tren necesitará de $\frac{L}{\beta} = \Delta t$ tiempo para que la parte delantera del tren llegue de un extremo del andén al otro (aquí se necesitarán dos relojes de S para poder hacerlo). Pero como ese tiempo Δt, visto desde el tren S' en realidad vale $\Delta t\sqrt{1-\beta^2}$, que es menor que Δt, entonces como recorrerá el andén a la misma velocidad y en menos tiempo, su longitud es menor que la que se observa desde el andén S, a la cual habíamos llamado L. En realidad, desde el tren se observa que es el andén el que pasa por el tren y el tiempo que transcurre en lo que pasa el andén es medido por único reloj, ya que es desde unmismo lugar en el tren S'.

Para ver que tan pequeña es la longitud del andén vista desde el tren (llamémosle L'), en comparación con la vista desde el andén (L), veamos:

$$L = \beta(\Delta t') = \beta(\Delta t)\sqrt{1-\beta^2} = L\sqrt{1-\beta^2}$$

O sea, que las longitudes al igual que el tiempo en un sistema S', que se mueve con respecto a otro sistema S con velocidad β, las longitudes en dirección del movimiento se ven reducidas por el factor $\sqrt{1-\beta^2}$ respecto a las que se ven desde S.

Esta contracción es el mismo factor que la de la "contracción de Lorentz-Fitzgerlad" que habían sugerido, sin embargo todo el fondo de uno y otro concepto es bien distinto. Aquella contracción era explicada desde el mismo sistema del objeto, en cambio la contracción que hemos encontrado es debida a la relatividad del movimiento del objeto y del sistema de referencia, que implica la relatividad de las longitudes.

Ahora bien, si en lugar de haber deducido primero la relatividad del tiempo, hubiéramos deducido la de las longitudes, ¿habría implicado indudablemente la del tiempo?. Si creemos en la muy estrecha relación entre las distancias y el tiempo como características de la materia, responderemos afirmativamente, pero veámos: si ya tuvieramos la relación $L = L'\sqrt{1-\beta^2}$, entonces con:

$$(\Delta t') = \frac{L'}{\beta} = \frac{L}{\beta}\sqrt{1-\beta^2} = (\Delta t)\sqrt{1-\beta^2}$$

podríamos deducir la relación entre los tiempos.

Podríamos decir que la relatividad del tiempo se da *sí y sólo sí* se da la de la distancia y más aún:

$$(\Delta t') = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}$$

sí y sólo sí

$$L' = L\sqrt{1-\beta^2}$$

Con todo lo desarrollado hasta este momento, con el descubrimiento de la relatividad del tiempo y la distancia, nos vamos internando en toda una nueva teoría física. ¿Qué tantas cosas cambia todo esto, qué tantas leyes y conceptos físicos?, ¿qué tanto sí los cambia? y ¿cuánto modifica esto nuestro conocimiento del universo?, ¿están mal todos los conceptos anteriores?. En las próximas secciones trataremos de responder bien estas preguntas. La relatividad del tiempo, que es el punto más importante en todo esto, es algo que revoluciona muchas ideas preestablecidas sobre el universo, que concordaban con todos los sucesos cotidianos. Sin embargo, el sólo hecho de pensar en el tiempo y espacio relativos al sistema de referencia, nos hace buscar nuevas leyes, leyes que valgan para cualquier sistema de referencia sin importar si un evento tiene una posición y un tiempo en un sistema y otros en otro. Y es que esas posiciones y tiempos tanto en un sistema como en el otro, deben tener una cierta relación, pues se mueven y dirección constante entre ellos.

Entonces, quizás no sea imposible empezar a encontrar las nuevas leyes que rigen en todos los sistemas que se mueven con traslación uniforme (contemplando, claro que no se puede volver a hablar de un solo tiempo, sino de una infinidad de ellos), si encontramos esa relación que hay entre la posición y el tiempo en un sistema y en otro cualquiera, o bien, encontramos una manera de transformar las coordenadas (tanto espaciales, como temporales) de un sistema en las coordenadas de otro. Entonces podremos empezar a buscar todas las leyes fśicas que rigen a todos los sistemas de referencia equivalentes.

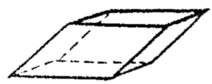
CAPITULO II

ANALISIS FISICO DE LA TEORIA.

1. ¿ COMO HALLAR EL LUGAR Y EL TIEMPO EN EL ANDEN, CONOCIENDOLOS EN EL TREN ?

TRANSFORMACION DE LORENTZ

Para poder entender mejor lo que es un marco o sistema de referencia, contruyámoslo. Tomemos primero una varilla rígida como patrón de medida, es decir, nuestra unidad, y vamos construyendo cubos, o sea vamos formando en el espacio físico una especie de esqueleto de un prisma cuyos lados midan lo que mide nuestra unidad y con diagonal $\sqrt{3}$ veces la unidad. Algo que es importante observar es que no se pide perpendicularidad entre los lados del prisma.



Una vez que está formado el primer cubo, vamos cubriendo todo el espacio con esos cubos, uno seguido de otro, de tal forma que se ha formado una retícula. Ahora, dividiendo nuestra unidad podemos llegar a cubrir cada cubo con pequeños cubitos y cada uno de esos pequeños cubitos a su vez por otros más pequeños y así sucesivamente, hasta llenar todo el espacio de cubitos, de tal forma que cada punto del espacio físico es un vértice de un cubito. Para que realmente podamos construir esta fina retícula, necesitamos tomar varillas sin peso, sin espesor, o sea tan idealizadas como las mismas rectas.

Continuando con la idea de formar nuestro sistema de referencia, colocamos un relojito en cada vértice de la retícula. Ahora, escojemos cualquiera de esos relojitos con su vértice y lo llamamos origen de coordenadas y denotémoslo O. Vamos a sincronizar todos los relojitos, de acuerdo a ese del origen, de la siguiente forma: tomamos cualquiera otro reloj de la retícula, digamos en el vértice A, enviámos un rayo de luz de O a A. Definimos el tiempo cero cuando se envía el rayo de luz. Y como A está a una cierta distancia de O, digamos distancia d, entonces, ya que la luz viaja a la misma velocidad c en cualquier dirección (por el experimento de Michelson-Morley), el tiempo que tarda el rayo de luz para llegar a A es $\frac{d}{c}$ (porque $v = \frac{d}{t}$ donde $v = c$), entonces en el reloj de A se registrará el tiempo $\frac{d}{c}$ y estará sincronizado con el de O, en el que ya habrán transcurrido $\frac{d}{c}$ segundos desde la salida del rayo de luz. Observemos que todos los relojes que estén a una distancia d, también registrarán $\frac{d}{c}$ segundos, ya que la luz viajará a la velocidad c en cualquier dirección. Y así para cada distancia al origen O, todos los relojes a esa distancia registrarán la misma hora, o sea todos los relojes tendrán las manecillas señalando el mismo número, simultaneamente.

Entonces, ya con esta retícula y esos relojes, vamos a poder darle a cada evento (o bien a cada suceso real), unas coordenadas espaciales y un tiempo en el que ocurre, o sea, a cada evento le asociamos cuatro números (3 del vértice de algún cubo y el tiempo) que denotaremos (x, y, z, t). Eventos como choque de canicas, encender lámpara, llegada del rayo de luz a una pared, etc, sucesos instantáneos. Dicho de otra forma, construímos un sistema de referencia cuyos puntos son eventos. Al conjunto de todos estos eventos le llamaremos espacio-tiempo. Más adelante vamos a dar una mejor formalización, que no damos en este momento, porque falta toda la discusión del tiempo.

Ahora bien, la construcción de este sistema de referencia, presupone una característica fuerte del espacio físico y del tiempo y que es, que ambos son homogéneos, o sea que el espacio físico es homogéneo y el tiempo también, es decir que nuestra vara rígida, medirá lo mismo en un tiempo fijo, independientemente de el lugar en el que se encuentre y que un intervalo de tiempo medirá lo mismo, sin importar a partir de que tiempo lo tome. Este supuesto es realmente una hipótesis importante sobre el espacio-tiempo.

Otra propiedad que cumple este sistema es la de ser Galileano o inercial, es decir que cumple con la ley de inercia. Cuando está lejos de toda materia uno de estos sistemas y se suelta dentro de él un cuerpo que estaba sostenido, el cuerpo flotará y permanecerá en reposo respecto a este sistema hasta que reciba una fuerza externa al cuerpo que lo saque de esta posición. Y si ahora el cuerpo es empujado en un momento, se moverá en línea recta y con velocidad constante, indefinidamente hasta que otra fuerza externa a él lo pare.

En realidad, un sistema inercial de referencia es una idealización ya que los efectos de gravedad nunca pueden ser completamente eliminados, ni tampoco los de rozamiento, fricción y resistencia del aire. Pero para la mayoría de los experimentos con luz o con partículas viajando a velocidades cercanas a la de la luz, la Tierra misma podría considerarse como un sistema inercial lo cual nos ayudará a solucionar el problema que hemos planteado anteriormente.

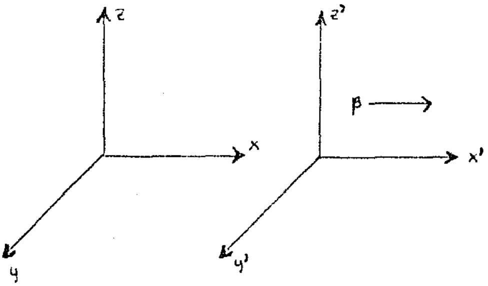
Algo más, a un observador que se encuentre en reposo con respecto a un sistema inercial de referencia lo llamaremos observador inercial. Ahora, si un sistema cualquiera se mueve en línea recta con velocidad constante con respecto a un sistema inercial, entonces este también será inercial.

Las leyes que rigen a cada sistema inercial, son las de la mecánica clásica y la geometría que la explica, la Euclideana.

Ahora sí, una vez formalizado el concepto de sistema de referencia, volvamos a la pregunta del principio. Si un evento tiene ciertas coordenadas especio-temporales en el sistema S,¿ cuáles tiene con respecto a cualquier otro sistema S', con respecto a cuál se mueve S' con velocidad y dirección constante ?.

La idea de este capítulo es formalizar todo el aspecto físico desarrollado intuitivamente hasta aquí. Obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema inercial respecto a otro en la Mecánica Clásica, comparándolas con las relativistas, analizar las hipótesis en cada caso, asi como las consecuencias importantes de las ecuaciones relativistas.

Tomemos dos sistemas inerciales de referencia S y S' cualquiera que se mueva uno con respecto al otro con velocidad β (en coordenadas geométricas). Por como formalizamos anteriormente el concepto de sistema inercial de referencia, sabemos que a cada uno le podemos asociar una retícula fija a él y un sistema de relojes sincronizados al de un origen, de tal forma que todo evento tiene sus coordenadas espacio- temporales en cada sistema. Llamémosle (x,y,z,t) a las coordenadas con respecto a S y (x',y',z',t') respecto a S' de un evento arbitrario. Como el tiempo y el espacio son conceptos que dependen del sistema de referencia, entonces en general $x \neq x'$, $y \neq y'$,$z \neq z'$,$t \neq t'$. Estas retículas las ponemos de tal forma que los ejes coordenados x y x' coincidan en dirección y sentido con el movimiento del sistema S' respecto aS. Los ejes y y y' paralelos, asi como z y z' y además en $t=0=t'$ los origenes coincidentes. Lo haremos así para poder simplificar el análisis sin pérdida de generalidad. Una idea de como han sido colocadas las retículas la dá el dibujo.



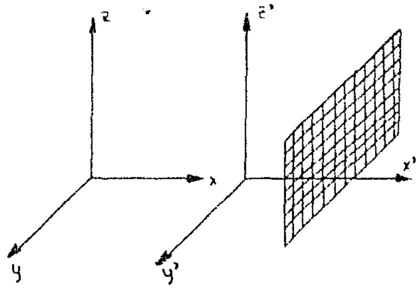
El dibujo tiene elgunos defectos , como que aparecen los ejes coordenados como perpendiculares y aquí no se habla de perpendicularidad pues es algo que no necesitamos hacer en el análisis. Además, en el dibujo no se puede trazar el eje t ni el t'.

Podríamos pensar el sistema S' con coordenadas (x',y',z',t') como el tren que se mueve con velocidad β respecto al andén, pensado como sistema S con coordenadas (x,y,z,t). Y entonces la pregunta hecha al principio se traduce a ¿ qué coordenadas (x,y,z,t) tiene en el andén un evento cuyas coordenadas en el tren son (x',y',z',t') ?.

Como el movimiento es en la dirección y sentido de los ejes x y x', es fácil ver que el evento no cambiará sus coordenadas y' ni z', o bien que las longitudes en las direcciones de los ejes y' y z' no cambiarán. Probémoslo. Si tomamos la unidad en el eje y', apoyada en el origen y supusiéramos que en el eje y esa unidad midiera menos, entonces, dada la homogeneidad del espacio, debiera medir menos esa unidad también en $t'=0$ (donde $t=0$). Ahora por el Principio de la Relatividad, podríamos intercambiar los papeles de S y S' y además intercambiando el sentido de los ejes x y x', entonces S se mueve con velocidad β respecto a S'. Al intercambiar los papeles, entonces en $t=0=t'$ la unidad en el eje y mediría menos que la unidad en el eje y' (visto desde S', y eso no puede ser, pues supusimos que era alrevés. Lo mismo pasaría si hubiéramos supuesto que la unidad en dirección y mide lo mismo respecto a S' y por tanto todas longitudes medidas por esa unidad también.

Análogamente las longitudes en dirección del eje z', se conservan.

Entonces el buscar las coordenadas (x, y, z, t) se reduce a sólo buscar x y t ya que $y = y'$ y $z = z'$. Ahora nos queda preguntarnos ¿ y las coordenadas y' y z tampoco influyen en buscar x o t?. La respuesta es que tampoco, veamos. Consideramos en el sistema S cualquier evento en el espacio que tenga su coordenada x la cual no dependa de y ni z, es decir todos los eventos que estén contenidos en algún plano paralelo al plano $y'z'$, es decir paralelo al eje y' y al z'. Como z' es paralelo al eje z y y' es paralelo al eje y, entonces el plano es paralelo al plano yz y cualquier evento que estaba en el plano con coordenada x constante, sigue teniendo una coordenada x' independiente del valor de y o z, porque sigue estando en un plano paralelo al plano yz.



Análogamente para ver que y' y z' no influyen en t, tomamos un plano paralelo al plano $y'z'$ (con un t constante), que resulta ser paralelo al plano yz (con un t contante también). Entonces sólo hay que buscar las coordenadas x y t en términos de x' y t', es decir sólo como función de x' y t'. Una observación importante es que entonces, debido a el movimiento de traslación uniforme de un sistema S' respecto a otro S, el análisis no necesita hacerse en todo el espacio-tiempo, sino en un plano de éste, a saber el plano xt. Por lo tanto buscamos dos funciones f, g, tales que:

$$x = f(x', t')$$

$$t = g(x', t')$$

porque x va a depender de x', lo mismo que t.

¿ Qué tan complicadas serán f y g ? ¿serán lineales o no? Supongamos que f no lo fuera, más en concreto supongamos que $x = k \cdot x'^2$. Entonces midamos ahora y veamos que pasa:

Si una vara rígida de nuestra unidad en S' la colocamos sobre el eje x', con extremos en $x'_B = 1$ y en $x'_A = 0$, entonces, vista desde S esa vara mide $(k \cdot 1)^2 - k \cdot 0^2 = k = x_B - x_A$.

Ahora si la misma vara la colocamos con extremos $x'_B = 2$ y $x'_A=1$, entonces, esa vara vista desde S mide $x'_B - x_A = k \cdot x'_B - k \cdot {x'_B}^2 = k \cdot 4 - k \cdot 1 = 3k$. O sea que vista desde S, la longitud de la vara depende del lugar donde se coloque a lo largo del eje x'. Esto es algo que no le pasa al espacio físico en el que vivimos, dicho de otra forma el espacio tiene esa propiedad de que la longitud de una vara, vista desde un sólo sistema de referencias no dependa de el lugar donde se coloque. Mejor dicho, la homogeneidad del espacio es la propiedad de no haber puntos preferenciales en éste, de no depender el resultado físico del punto espacial que tomemos. A dicha propiedad la denominamos **homogeneidad del espacio**, la cual hemos usado anteriormente al formar la retícula del espacio-tiempo, al encontrar la relación entre dos tiempos de cada sistema, asi como las longitudes y también al ver que las coordenadas y' y z' no varían al verse desde S. Esta propiedad es realmente más profunda de lo que parece; es en toda la Teoría de la Relatividad un supuesto muy importante y por lo que se refiere a la deducción de las ecuaciones que relacionan las coordenadas de S con las de S', esta propiedad le impide a f no ser lineal en x'.

Una propiedad análoga a la homogeneidad del espacio es la homogeneidad del tiempo la cual dice que tampoco en el tiempo hay un instante preferencial. Que los fenómenos físicos no dependen de cuál instante tomemos, por lo que se afirma que un intervalo de tiempo medido desde un sólo sistema de referencia o reloj, mide lo mismo independientemente de apartir de que segundo empieza a contarse. Y es a partir de esta propiedad de donde también se desprende (con el mismo análisis que el que hicimos en el espacio) que no puede dejar de ser lineal en t'.

Formalizemos mejor toda esta idea de que la homogeneidad del espacio-tiempo implica la linealidad de la transformación buscada.

Si buscamos f_i y g_i $\quad i = 1, ..., 4$ tales que:

$x = f_1(x',y',z',t')x' + f_2(x',y',z',t')y' + f_3(x',y',z',t')z' + f_4(x',y',z',t')t'$

$y = g_1(x',y',z',t')x' + g_2(x',y',z',t')y' + g_3(x',y',z',t')z' + g_4(x',y',z',t')t'$,

debido a la homogeneidad del espacio-tiempo, el no depender del punto (x',y',z',t') la transformación buscada, entonces tanto las f_i como las g_i , $i = 1, ..., 4$ deben ser funciones constantes respecto a x', y', z' y t', es decir

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 t'$$
$$t = \delta_1 x' + \delta_2 t'$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2$ pueden depender de la la velocidad β, pero no de x', y', z' ni de t'.

Hasta aquí el análisis ha servido tanto para las fórmulas de la mecánica clásica como las relativistas, pues en ninguna se necesita a y ni a z y tanto f como g son lineales. Ahora bien, vamos a ver como se llega a unas a diferencia de otras.

a) *DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA MECANICA CLASICA.*

Para esta visión el tiempo era absoluto, $t=t'$ para cualquier par de sistemas que se movieran o no en traslación uniforme uno con respecto al otro. El tiempo era pensado como algo que no dependía del espacio físico . El espaciofísico tenía todas las propiedades del espacio euclídeo tridimensional E. Por tanto, el espacio-tiempo era pensado sólo como dos conjuntos sin influencia alguna entre sí. Una posición tridimensional a la que se le asociaba un tiempo, es decir, como un producto cartesiano $E \times R$ donde E es el espacio físico o una isometría de este y R es el tiempo, denotado por los números reales con sus propiedades de orden y densidad.

Con esta concepción del tiempo separado del espacio las ecuaciones para encontrar x y t, respecto a x' y a t' (por que el que no juegen un papel ni y ni z fue independiente del carácter absoluto o no del tiempo), f y g debían ser tales que

$$x = f(x', t') y t = g(t')$$

es decir, t sólo dependía de t' y además eran iguales, es decir $t=t'$, entonces g debía ser la función idéntica. Y para analizar la posición que guarda respecto a S una partícula que tiene coordenada x' en S, es importante ver que distancia que tiene la partícula al origen de S, sobre el eje x es igual a la distancia x', más lo que el origen de S' ha recorrido en un tiempo t al ir a la velocidad β, que es βt. Es decir, así:

$$\begin{aligned} x &= x' + \beta t \\ t &= t' \end{aligned}$$

Por tanto si las coordenadas en S de una partícula son (x', y', z', t') entonces, vista desde S son $(x'+\beta t, y', z', t')$, donde S' se mueve con traslación uniforme y velocidad β respecto a S. ¿Y qué tanto cambiarán estas coordenadas ahora que sabemos que el tiempo no es absoluto sino más bien relativo al sistema de referencia?. Entrémos pues a buscar estas coordenadas.

b) *DESDE EL PUNTO DE VISTA RELATIVISTA.*

Busquemos ahora de otra forma $\alpha_1, \alpha_2, \delta_1$ y δ_2 tales que:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 t' \\ t &= \delta_1 x' + \delta_2 t' \end{aligned}$$

Analizando el origen de S tenemos que:

el evento $(0, t)$ respecto a S es el $(-\beta t', t')$ respecto a S' y sustituyendo arriba resuslta:

$$0 = -\alpha_1 \beta t' + \alpha_2 t'$$

entonces,

$$\alpha_2 t' = \alpha_1 \beta t'$$

de donde,

$$\alpha_2 = \alpha_1 \beta$$

Dada la constancia de la rapidéz de la luz, tenemos que:
los eventos (x, x) en S son los eventos (x', x') en S' por lo que:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_1 \beta x'$$
$$x = \delta_1 x' + \delta_2 x'$$

entonces,

$$\alpha_1 x' + \alpha_1 \beta x' = \delta_1 x' + \delta_2 x'$$

Y por otro lado, debido a la isotropía del espacio:
los eventos $(-x, x)$ en S son los eventos $(-x', x')$ en S', de ahí que

$$-x = -\alpha_1 x' + \alpha_1 \beta x'$$
$$x = -\delta_1 x' + \delta_2 x'$$

entonces,

$$-\alpha_1 x' + \alpha_1 \beta x' = \delta_1 x' - \delta_2 x'.$$

Sumando las dos ecuaciones resultantes, tenemos

$$2\alpha_1 \beta x' = 2\delta_1 x'$$

entonces,

$$\delta_1 = \alpha_1 \beta$$

Y restando las mismas dos ecuaciones anteriores, tenemos

$$2\alpha_1 x' = 2\delta_2 x'$$
$$\delta_1 = \alpha_1$$

entonces

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_1 \beta t'$$
$$t = \alpha_1 \beta x' + \alpha_1 t'$$

Ahora calculemos α_1 (la cual depende de la velocidad β).

Dada la invariancia de la velocidad de la luz, las ecuaciones de un frente de onda en los sistemas S y S' son:

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \quad \text{y} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = t'^2$$

ya que es la distancia recorrida igual al tiempo recorrido, pues la velocidad de la luz es 1.

Como $y' = y$ y $z' = z$, entonces:

$$x^2 - t^2 = -y^2 - z^2 = -y'^2 - z'^2 = x'^2 - t'^2$$

Usando las ecuaciones obtenidas de la transformación

$$\begin{aligned} x^2 - t^2 &= \alpha_1^2 x'^2 + 2\alpha_1^2 \beta t' x' + \alpha_1^2 \beta^2 t' - \alpha_1^2 \beta^2 x'^2 - 2\alpha_1^2 \beta t' x' - \alpha_1^2 t'^2 \\ x^2 - t^2 &= \alpha_1^2 x'^2 + \alpha_1^2 \beta^2 t' - \alpha_1^2 \beta^2 x'^2 - \alpha_1^2 t'^2 \\ x^2 - t^2 &= \alpha_1^2 (1 - \beta^2)(x'^2 - t'^2) \end{aligned}$$

Por tanto $\alpha_1^2(1 - \beta^2) = 1$ y de ahí:

$$\alpha_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

donde se puede tomar el signo más, ya que el menos corresponde a la dirección opuesta de los ejes x y x'.

Por tanto, la transformación buscada es:

$$x = \frac{x' + \beta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$
$$t = \frac{\beta x' + t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Entonces si un evento en S' tiene coordenadas espacio-temporales (x', y', z', t'), visto desde S tiene coordenadas

$$(x, y, z, t,) = \left(\frac{x' + \beta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, y', z', \frac{\beta x' + t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)$$

, donde S se mueve con velocidad β respecto a S y en dirección de su eje común xx'.

O sea que las coordenadas del sistema S' pueden transformarse lineamente en las coordenadas del sistema S, es decir, existe una $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que:

$$T(x, y, z, t) = (\frac{x - \beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, y, z, \frac{\beta x + t'}{\sqrt{1 - \beta^2}})$$

es un cambio de coordenadas entre dos sistemas inerciales, uno de los cuales S se mueve con translación uniforme, con velocidad β con respecto $S' = T(S)$. A esta transformación, que en relatividad es de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, se le llama **Transformación de Lorentz**, ya que estas son las mismas ecuaciones que Lorentz habría encontrado en su famosa contracción, pero en el fondo con una gran diferencia pues para él esta deformación era en un mismo sistema y no por la relatividad de la posición ocacionada por el movimiento uniforme.

En realidad, esta transformación es mucho más que eso. Para empezar, fortalece esa idea del materialismo, que en la materia están estrechamente vinculados el espacio y el tiempo y que uno influye en el otro tanto como ese otro en el uno, y además están en contante movimiento. No hay ni tiempo ni espacio absolutos. Y es tan estrecha la vinculación entre el tiempo y el espacio que en realidad el tiempo es un eje más de este sistema coordenado que es el espacio-tiempo, tiene todas las características que puede tener el eje x de la geometría euclidiana tridimensional con el cual representamos una de las dimensiones en las que vivimos espacialmente. Para convensernos de todo esto, hace falta ver la dualidad entre x y t en la Transformación misma de Lorentz, el tiempo juega el mismo papel que juega la posición x, en los sistemas coordenados espacio-tiempo que se mueven unos respecto a otros. Y pudimos en lugar de tomar el eje x como dirección del movimeinto, haber tomado el de eje y o el de z, o el de t (aunque físicamente no es posible) y la transformación habría resultado la misma. Realmente la relatividad del tiempo es más bien la incorporación de él en todos los procesos físicos. De ahora en adelante hablar de un solo espacio-tiempo no tiene sentido, pues hay una infinidad de ellos. Y eso que sólo hemos movido unos sistemas respecto a otros con dirección y velocidad constante. De aquí no se concluye que todo es relativo. Un contraejemplo de esto es la constancia de la velocidad de la luz. La tarea después de que se plantea la relatividad del tiempo, es precisamente la de buscar clasificar todos los conceptos y leyes en absolutos o relativos.

Otra enorme consecuencia es que, abre muchas preguntas cuestionándonos sobre el universo en el que vivimos. Entonces: ¿vivimos no en un espacio de tres dimensiones, sino de cuatro ?, ¿ en qué geometría vivimos, aún en la euclidiana ?, o mejor dicho, ¿qué geometría explica el espacio-tiempo en el que vivimos ?. En realidad creo que estamos lejos de decir cual geometría, apenas con el descubrimiento del tiempo como algo que interviene en los cálculos físicos, efectivamente vemos que vivimos al menos en cuatro dimensiones y luego apenas empezamos a comparar coordenadas espacio-temporales entre sistemas que se mueven uniformes unos con respecto a otros, como es el caso que hemos analizado y ya no se cumple que la métrica euclidiana que era $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$, se conserve en todos estos sistemas. Veamos con más calma esto último. Si en un sistema S' (como el tren) que se mueve con respecto a otro sistema S un evento es $(1, 0, 0, 1)$ en en las coordenadas espacio-tiempo de S', entonces su distancia euclidiana al origen $(0, 0, 0, 0)$ de S' mismo, es:

$$\sqrt{1^2 + 0 + 0 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Ahora bien, usando la Transformación de Lorentz, las coordenadas con respecto a S son:

$$\left(\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},0,0,\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

y la distancia euclidiana al origen de S es:

$$\sqrt{\frac{(1+\beta)^2}{1-\beta^2}+0+0+\frac{(1+\beta)^2}{1-\beta^2}}=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\beta}{1-\beta}}=$$

$$\sqrt{2\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Con todo esto vemos que la única forma de que esta distancia sea invariable aquí, es que $\beta = 0$, o sea, que S' esté en reposo respecto a S y pues sí es lógico ya que se rigen por el mismo sistema coordenado, pero si $\beta \neq 0$ ya no es invariable . Más aún si β es casi 1 la distancia euclidiana está lejísimos de preservarse. Por todos estos nuevos resultados aseguramos que al menos en el universo que vivimos no rige la geometría euclideana porque si rigiera, la distancia euclidiana sería invariante en cualquier sistema coordenado y al menos en los que se mueven con traslación uniforme no lo es.

Al analizar la geometría nueva que nos explique las leyes entre sistemas que se mueven con traslación uniforme, suena muy interesante para ver que tan distinta es la euclideana que había regido antes de la Teoría de la Relatividad. El análisis profundo de esta geometría, lo haremos un poco más adelante, por lo pronto sigamos analizando la Transformación de Lorentz y algunas de las consecuancias más inmediatas de ésta.

Una observación importante es que en dicha Transformación:

$$x=\frac{\beta x'+\beta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y=y' \qquad\qquad z=z'$$

$$t=\frac{\beta x'+t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

cuando $\beta=\frac{v}{c}$ es muy pequeña, es decir cuando v es pequeña respecto a la velocidad de la luz entonces $\sqrt{1-\beta^2}$ es casi 1 y las ecuaciones se parecen a las de Newton:

$$x=x'+\beta t$$

$$y=y'$$

$$z = z'$$

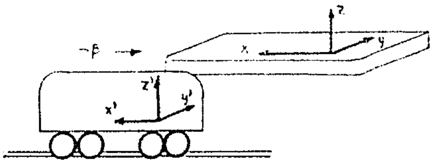
$$t = t'$$

donde $\beta x'$ es omitido porque x y x' son muy pequeñas comparadas con t y t', en velocidades bajas.

Dicho lo anterior de mejor manera, el límite de la Transformación de Lorentz cuando β tiende a cero, es la trasnformación de la mecánica clásica que mucho nos explica del mundo cotidiano de bajas velocidades, y si en un principio apareció la Teoría de la Relatividad como contrapuesta a la mecánica clásica, con esto nos damos cuenta de que no es así. La Relatividad es una visión más general, que supera la particularidad de la teoría clásica, pero que no la niega, al contrario, la reafirma, no como teoría que explica todo el universo, sino ese universo de bajas velocidades, lo cual ha sido muy importante en el desarrollo de la física que le dió incluso pie a la misma Teoría de la Relatividad.

¿Y el primer postulado de Einstein también se verifica ?. ¿ Se sigue cumpliendo en la Transformación de Lorentz el principio de la relatividad ?.

Supongamos que en lugar de considerar que el tren S' se mueve con velocidad β respecto al andén S, consideramos que el andén S se mueve con velocidad $-\beta$ respecto al tren S', entonces por el Principio de la Relatividad de las leyes deben ser las mismas a las que obtuvimos considerando al tren en movimiento respecto a S, es decir, que la Transformación de Lorentz debe ser también ser válida en este caso, o sea:



$$x' = \frac{x+(-\beta)t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = \frac{(-\beta x)+t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Y por otro lado el encontar las coordenadas de S respecto a S', a partir de la Transformación de Lorentz que encontramos, que fué:

$$x = \frac{x' + \beta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y = y' \qquad z = z'$$

$$t = \frac{\beta x' + t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

significaría despejar a x', y', z', t' y ponerlas en términos de x, y, z, t. Es decir, encontraríamos la Tranformación inversa de Lorentz. Lo cual es invertible por tener determinante distinto de cero, ya que la Transformación es:

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

cuya matríz de 2×2 tiene determinante uno. Esta Transformación inversa de Lorentz debiera coincidir con la que resulta de haber pensado moviéndose el andén con velocidad $-\beta$ respecto al tren, si es que el Principio de la Relatividad es algo que sigue valiendo. Entonces depejemos x' y t' en términos de x y t y veamos si coinciden. Quizás se vuelva un poco tediosa esta talacha pero, hay que despejar.

como $\quad x = \frac{x'+\beta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad$ y $\quad t = \frac{\beta x'+t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad$ vamos a despejar x' de una y t' de la otra:

entonces, $\quad \sqrt{1-\beta^2} \cdot x = x' + \beta t'$

y $\quad \sqrt{1-\beta^2} \cdot t = \beta x' + t'$

por tanto:

$$\sqrt{1-\beta^2} \cdot x - \beta t' = x'$$

$$\sqrt{1-\beta^2} \cdot t - \beta x' = t'$$

resolvemos las dos ecuaciones anteriores como ecuaciones simultáneas, sustituyendo t' en la primera ecuación, tenemos:

$$\sqrt{1-\beta^2} \cdot x - \beta(\sqrt{1-\beta^2} \cdot t - \beta x') = x'$$

de donde:

$$\sqrt{1-\beta^2} \cdot x - \beta\sqrt{1-\beta^2} \cdot t + \beta^2 x' = x'$$

y juntando las x', tendremos una ecuación en términos de x y t

$$\sqrt{1-\beta^2} \cdot x - \beta\sqrt{1-\beta^2} \cdot t = x'(1-\beta^2)$$

que para aclararla más la dividimos entre $(1-\beta^2)$, entonces:

$$\frac{x-\beta t}{\sqrt{1-\beta^2}} = x'$$

que es la ecuación precisamente de x' cuando era el andén el que se movía respecto al tren con velocidad $-\beta$. Ahora veamos la que resulta de t'. Ya que encontamos x', la sustituimos en la segunda ecuación simultánea, entonces:

$$t' = \sqrt{1-\beta^2}\cdot t - \beta\left(\frac{x-\beta t}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

que es lo mismo a:

$$t' = \frac{(1-\beta^2)t - \beta(x-\beta t)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

y distrubuyendo queda:

$$t' = \frac{t - \beta^2 t - \beta x + \beta^2 t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

y cancelando tenemos:

$$t' = \frac{-\beta x + t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

que es precisamente la ecuación de t' cuando supusimos que el andén se movía respecto al tren. or tanto el haber encontrado la Transformación inversa de Lorentz o el haber considerado desde un principio el movimiento del andén con velocidad $-\beta$ respecto al tren, y el encontrar para ese caso la Transformación de Lorentz directamente, es exactamente lo mismo, con lo cual se confirma que lo desarrollado hasta este momento de la Teoría de la Relatividad no contradice al principio de la Relatividad (primer postulado de Einstein), sino que lo reafirma. En conclusión toda al teoría desarrollada hasta el momento, no tiene contradicciones internas. Pero realmente su aparición es trascendente en muchos más sentidos. No sólo va de acuerdo con sus postulados, sino que reestablece el verdadero sentido de la Teoría Newtoniana, abre nuevos caminos a esta nueva teoría de lo absoluto, para buscar nuevas leyes físicas que rijan ahora en todos los sistemas como movimiento de traslación uniforme, hasta tratar de acercarse a la geometría que explique el universo en el que vivimos, siempre cambiante, siempre en movimiento.

2. CONSECUENCIAS DE LA TRANSFORMACION DE LORENTZ

a) *RELATIVIDAD DE LA SIMULTANEIDAD.*

Si consideramos dos eventos distintos simultáneos en S, veamos que no lo son en S' si $\beta \neq 0$. Sean $A = (x_1, t_1)$ y $B = (x_2, t_2)$ respecto a S.

Si $t_1 = t_2$ con $x_1 \neq x_2$, entonces usando la Transformación de Lorentz, tenemos que, si $A = (x'_1, t'_1)$ y $B = (x'_2, y'_2)$ son sus coordenadas respecto a S', entonces:

$$\frac{\beta x_1' + t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta x_2' + t_2'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

o bien

$$\beta x_1' + t_1' = \beta x_2' + t_2' \qquad (\beta \neq 0)$$

si $t_1' = t_2'$, (es decir, si fueran eventos simultáneos en S'), entonces $x_1' = x_2'$, de donde A y B serían el mismo evento, lo cual supusimos alrevés. Por tanto, si $\beta \neq 0$, entonces $t_1' \neq t_2'$, es decir, A y B no son simultáneos en S'. Analogamente, si dos eventos A y B son simultáneos en S', no lo son en S si $\beta \neq 0$, pues utilizando la transformación inversa, tenemos:

$$t_1' = t_2' \quad \Rightarrow \quad \frac{-\beta x_1 + t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{-\beta x_2 + t_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

y razonando como arriba, tenemos que $t_1 \neq t_2$, mientras $\beta \neq 0$. Por tanto, el concepto de simultaneidad es relativo al sistema de referencia y cumple con el Principio de Relatividad.

b) *RETRASO DEL TIEMPO.*

Consideramos un reloj en el orígen del sistema S' en el tiempo 0, es decir, el evento $(0,0)$ en S'. Por como colocamos S' y S, sabemos que este evento tiene coordenadas $(0,0)$ también respecto a S. Ahora bien, si tomamos t' unidades de tiempo de este reloj en el sistema S', es decir, los eventos $(0,t')$, la pregunta es: ¿cuales serán las coordenadas de dicho evento respecto a S?, si le llamamos (x,t) a estas coordenadas buscadas, por la Transformación de Lorentz tenemos:

$$t = \frac{\beta \cdot 0 + t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

o bien

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

entonces, esas t' unidades de tiempo en S', corresponden a $t\sqrt{1-\beta^2}$ unidades de tiempo en S. Como $\sqrt{1-\beta^2} < 1$ (si $\beta \neq 0$), pues $\beta < 1$ (la velocidad del sistema S' no supera la velocidad de la luz que es la cota máxima), entonces $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$, lo cual quiere decir que una unidad de tiempo de t' en S', equivale a $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ veces la unidad de tiempo de t

respecto a S. Es decir, respecto a S, su tiempo transcurre más rapidamente que el de S', o bien, el reloj de S' se retrasa respecto al suyo.

Análogamente t unidades de tiempo marcadas en el reloj de su orígen de S, es decir, el evento $(0,t)$, tendrá las coordenadas (x', y') en S', tal que

$$t' = \frac{\beta \cdot 0 + t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Lo cual quiere decir que respecto a S', el tiempo de S transcurre más lentamente que el suyo.

Por tanto, desde cualquiera de los dos sistemas S o S', se observa que el tiempo del otro sistema transcurre más lentamente. A esta propiedad es a la que se llama **retraso del tiempo**, con factor de retraso $\sqrt{1-\beta^2}$.

c) *CONTRACCION DE LONGITUDES.*

Consideremos una barra rígida en el sistema S' cuyos extremos estén en el orígen y a $x'S'$-unidades separada del orígen en la dirección del eje x'. Al medir esta barra desde S' mismo, en el tiempo t', estaremos hablando de dos eventos $(0,t)$ y (x', t') respecto a S'. La pregunta sería: ¿qué coordenedas tendrá el evento $(1,0)$ respecto a S?.

Más en concreto, si quisieramos medir la barra de S' desde S en el tiempo $t = 0$, entonces bastará con saber qué coordenadas $(x, 0)$ respecto a S tiene el evento $(x'; t')$ de S'. Entonces, la barra en S' sería medida desde S por los eventos $(0,0)$ y $(x, 0)$.

Usando la Transfirmación inversa de Lorentz, tenemos que

$$x' = \frac{x - \beta \cdot 0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

que es lo mismo que:

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

entonces,

$$x'\sqrt{1-\beta^2} = x$$

Por lo tanto, desde S la barra en S' mide $\sqrt{1-\beta^2}$ veces lo que mide desde S'. Es decir, desde S las longitudes que registra S' se contraen desde su sistema de medida.

Analogamente si tomamos una barra en S que mida x unidades, es decir, considerando los eventos $(0,t)$ y (x,t) para algún t, buscaremos x' tal que con los eventos $(0,0)$ y $(x', 0)$ respecto a S', mida la barra de S. Usando la Transformación de Lorentz:

$$x = \frac{x' + \beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

o bien

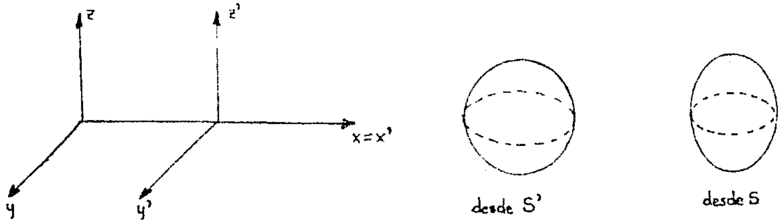
$$x\sqrt{1-\beta^2} = x'$$

de donde se deduce que también desde S' la barra de S se reduce respecto al sistema de medida de S'.

Por tanto, desde cualesquiera de los dos sistemas la barra del otro sistema se reduce. A esto se le llama **contracción de longitudes**.

d) *REDUCCION DE VOLUMENES*

Si un cuerpo tiene un volumen V respecto a S, el volumen que tendrá respecto a S' será $\frac{V}{\sqrt{1-\beta^2}}$, ya que las longitudes transversales se preservan, pues $y' = y$ y $z' = z$ y sólo disminuye la longitud en la dirección del movimiento.

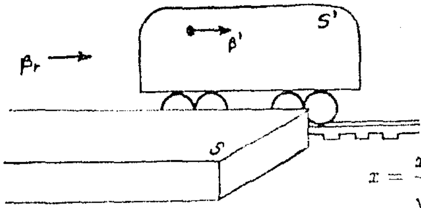


Por ejemplo, una esfera vista desde S' es un elipsoide visto desde S.

e) *SUMA DE VELOCIDADES*

Con la idea de recuperar las leyes de la física clásica, veamos ahora que pasa con la ley se suma de velocidades. ¿ Era cierta o no la suma como se decía en la mecánica clásica ?. ¿ Porqué resultaba que la luz no la cumplía ?. Averigüémos.

Si un objeto se mueve con velocidad β' (en coordenadas geometrícas y con dirección del eje x') respecto al sistema S' que se mueve a su vez con velocidad β_r (en coordenadas geométricas también y en dirección de eje xx') respecto al sistema S, ¿cuál es la velocidad β del objeto respecto al sistema S?. Imaginemos todo esto con el tren y el andén, como se ve en la figura, para darnos una mejor idea.



Supongamos que cuando los origenes de S y S' coinciden, es lanzado un objeto también desde el origen de S', para así tener $\beta_r = \frac{x'}{t'}$ y también $\beta = \frac{x}{t}$. Entonces usando la trnsformación de Lorentz:

$$x = \frac{x' + \beta_r t'}{\sqrt{1-\beta_r^2}}$$

$$t = \frac{\beta_r x' + t'}{\sqrt{1-\beta_r^2}}$$

donde la velocidad β_r es la velocidad de S' respecto a S. De aquí deducimos que la velocidad del objeto respecto a S es:

$$\beta = \frac{x}{y} = \frac{(x'+\beta t')(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}{(\beta x'+t')(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x'+\beta_r t'}{\beta_r x'+t'} = \frac{\frac{x'}{t'}+\frac{\beta_r t'}{t'}}{\beta_r\frac{x'}{t'}+\frac{t'}{t'}} = \frac{\beta'+\beta_r}{\beta_r\beta'+1}$$

entonces la velocidad β del objeto respecto a S es $\frac{\beta'+\beta_r}{1+\beta'\beta_r}$. Esta es la nueva ley de **suma de velocidades**. Poniéndola en términos de unidades no geométicas quedan como:

$\beta' = \frac{v}{c}$ $\quad \beta_r = \frac{u}{c}$ y $\beta = \frac{w}{c}$ para algunas u, v, w, entonces $\frac{w}{c} = \frac{\frac{v}{c}+\frac{u}{c}}{1+\frac{uv}{c^2}}$ $\quad \Rightarrow \quad w = \frac{v+u}{1+\frac{uv}{c^2}}$.

Entonces la suma $u+v$ no es una ley válida para todo el universo. Sin embargo sí para el de bajas velocidades respecto a la de la luz, pues si u y v son pequeñas respecto a ésta, entonces el término $\frac{uv}{c^2}$ es despreciable y entonces w está bien aproximado por $u+v$. Es decir, la antigua ley de suma de velocidades es muy buena aproximación para seguir explicando nuestro mundo cotidiano. Sin embargo la ley de suma de velocidades pequeñas o no respecto a la de la luz es $\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$ y deja de ser muy buena aproximación $u+v$ cuando cualquiera de estas dos es una velocidad muy cercana a la velocidad de la luz o incluso es ésta misma. Por eso la luz no cumplía la suma de velocidades y el experimento de Michelson-Morley no resultó lo que se esperaba al hacer la analogía con el experimento del lanchero remando. Realmente no eran tán análogos, pues la velocidad del remado es muy pequeña en comparación con la de la luz. Al usar la suma de velocidades de la mecánica clásica se estaba aproximando bastante bien en el caso del lanchero, pero no así en el experimento de Michelson.

Al querer detectar el movimiento de la Tierra respecto al *eter*, se hizo este experimento cuyo resultado esperado nunca iba a suceder. Entonces, ¿eso quiere decir que sí existe el *eter*?. Hasta el momento no hemos necesitado en lo absoluto de él y además las aparentes contradicciones que se trataron de resolver con la suposición de su existencia quedan ya resueltas con la nueva suma de velocidades. Pues el que no cumpliera con el Principio de Relatividad de Galileo, se debe a que el análisis fué hecho con la suma de velocidades de la mecánica. Así es que por lo menos no hay una razón para que se siga suponiendo la existencia de ese *eter*.

Para terminar esta sección veamos como la velocidad de la luz es la misma en cualquier sistema de referencia Esta, parecía siempre tener la misma magnitud en cualquier sistema inercial de referencia. Si en el experimento que analizamos anteriormente, en lugar de ser un objeto, fuera un rayo de luz el que llevara velocidad $\beta_1 = 1$ respecto a S', ¿qué velocidad tendría respecto a S?. Esperaríamos que fuera $\beta = 1$ también, pues se lo pedimos al buscar la Transformación de Lorentz. Veamos:

$$\beta = \frac{\beta' + \beta_r}{\beta_1 \beta' + 1} = \frac{1 + \beta_r}{\beta_r \cdot 1 + 1} = 1$$

Y alrevés también debe de cumplirse, si el rayo se mueve con velocidad $\beta = 1$ respecto de S', la velocidad del rayo respecto a S debiera ser $\beta_1 = 1$. Sacándolo de la ecuación $1 = \frac{\beta_1 + \beta_r}{\beta_r \beta + 1}$ entonces,

$$\beta_r \beta_1 + 1 = \beta_1 + \beta_r \Rightarrow \beta_r \beta' - \beta' = \beta_r - 1 \Rightarrow \beta'(\beta - 1) = (\beta_r - 1) \Rightarrow \beta' = 1.$$

por tanto, el rayo de luz tiene velocidad $\beta' = 1$ respecto a S' también. Y con esto el segundo postulado de Einstein queda verificado, aunque lo anterior no es una demostración de éste, pues lo supimos al buscar la Transformación de Lorentz. Pero ¡qué bueno que la teoría creada hasta el momento no tiene contradicciones con sigo misma!.

3. ¿CUALES SON LAS HIPOTESIS DEL ANALISIS FISICO?

La primera hipótesis física ha sido la homogeneidad e isotropía del espacio y la homogeneidad del tiempo, es decir, que en el espacio-tiempo no hay puntos ni direcciones preferenciales, que las leyes físicas con las mismas condiciones iniciales no deben depender de cuál evento se escoja, ni de cual dirección. Esta hipótesis se ha utilizado en la deducción de las formulas, tanto de Galileo como de la Transformacón de Lorentz, en la linealidad de ambas transformaciones.

La segunda hipótesis establecida para la deducción de las ecuaciones de Galileo es la suposición de el tiempo absoluto, que como veremos en un momento, es equivalente a suponer que existen veocidades infinitas y a que la simultaneidad es un concepto absoluto.

Por otro lado, la segunda hipótesis supuesta para la deducción de la Transformación de Lorentz, ha sido la sola relatividad del tiempo, que es equivalente a la relatividad de la simultaneidad y a la existencia de una velocidad máxima en la naturaleza, la cual por ser una cota en las velocidades del universo, es una constante en cualquier sistema de referencia.

Probemos primero las equivalencias mencionadas arriba y luego daremos un esquema donde visualizaremos las hipótesis físicas.

El que el tiempo en cualquier sistema de referencia sea el mismo, es decir, queel tiempo sea absoluto, es equivalente a que haya velocidades infinitas ya que:si tomamos dos cuerpos en el mismo instante, uno en S y otro en S' (sistemasinerciales con velocidad relativa distinta de cero), el que el tiempo sea absolutoimplica que una variación del cuerpo en S será detectada por el de S' en el mismoinstante, entonces la transmisión de la interacción transcurre de inmediato, esdecir, a velocidad infinita. E inversamente, supongamos que en el sistema S hayun dispositivo que de forma isotrópica, emite una "señal" que se propagaa velocidad infinita, entonces, en los respectivos relojes situados en todos lospuntos del espacio, en cualquier sistema inercial que respecto a S se mueve convelocidad finita, fijan la indicada señal en el mismo momento en que ella fuéemitida. Es decir, tales señales sirven de "marcas de tiempo" con las que seráregistrado en todos los sistemas inerciales un lapso igual, es decir, el tiempo esabsoluto. Por tanto, tiempo absoluto y la exitencia de velocidades infinitas son equivalentes.

Analogamente el tiempo absoluto y la simultaneidad absoluta lo son. Si dos eventos son simultáneos en S, como el tiempo es absoluto, ambos eventos serán registrados con los mismos tiempos en cualquier sistema S' inercial que se mueve con velocidad relativa a S, por tanto, son S'-simultáneos también. Y biceversa, si dos eventos son simultáneos en S y en un sistema inercial S' con velocidad constante respecto a S también lo son, eso quiere decir que la velocidad de transmisión entre S' y S' fué infinita y por tanto en el mismo instante, de donde se deduce el caracter absoluto del tiempo.

Con todo lo demostrado hasta aquí, se completa la segunda parte de ser equivalentes el tiempo relativo, la existencia de una velocida máxima y la relatividad de la simultaneidad. Sólo falta probar que la existencia de una velocidad máxima, es lo mismo que decir que dicha velocidad (o rapidéz) es igual en todos los sistemas de referencia inerciales.

Si la velocidad límite de propagación de señales y de las interacciones variara al pasar de un sistema a otro, sería posible tanto diminuirla como aumentarla, perdiéndo su caracter de límite superior. Es decir, si es la velocidad límite, entonces, es invariante en magnitud, al pasar de un sistema a otro. Ahora bien, si la velocidad es la misma desde cualquier sistema inercial, entonces, no se puede variar al pasar de un sitema a otro, ni se puede aumentar desde ningún sitema inercial, por lo que es un límite superior en las velocidades.

Ahora sí, el esquema de las hipótesis físicas es el siguiente:

homogeneidad del espacio-tiempo
e isotropía del espacio

$\swarrow$	$\searrow$
t absoluto	t relativo
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
simultaneidad absuluta	simultaneidad relativa
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
velocidades infinitas	velocidad máxima

CAPITULO III

ANALISIS GEOMETRICO DE LA TEORIA.

1. ¿ QUE GEOMETRIA EXPLICA LAS ECUACIONES DE GALILEO?

¿Con cuál geometría se explican las leyes entre los sistemas con traslación uniforme considerando el tiempo absoluto?

Para intentar buscar la geometría desde la cual se pueden explicar las ecuaciones de Galileo, debemos observar dos cosas con las cuales podemos intuir cual es lo característico de dicha geometría.

Primero, las coordenadas x y t de una partícula respecto a un sistema S, tenían una relación con sus coordenadas x' y t' respecto a un sistema S', el cual se movía con velocidad β respecto a S. Esta relación era: $x = x' + \beta t$ y $t = t'$, la cual ya vimos anteriormente.

Debido a que $t = t'$, (o sea el tiempo es absoluto en cualquier sistema inercial de referencia), podemos también escribir la relación como:

$$x = x' + \beta t'$$

$$t = t'$$

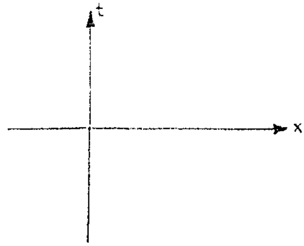
Esto nos sirve para verlo como producto de matrices, de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

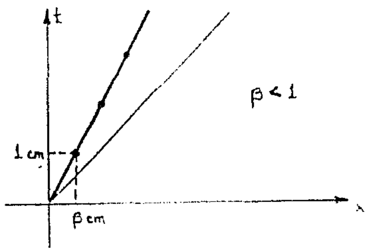
es decir, que las coordenadas (x', t') respecto a S se le aplica la transformación lineal $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y van a dar a las coordenadas (x, t) respecto a S. Dicho de otra forma, para hacer cambios de coordenadas entre sistemas con traslación uniforme entre ellos. O sea que la geometría que buscamos debe tener como transformación de cambio de coordenadas, a las de esta forma.

Por otro lado, algo que es muy claro en la mecánica clásica es que si una partícula hace un recorrido recto en un cierto tiempo t_1 a una cierta velocidad constante, hasta llegar a un lugar y luego en ese lugar a otra velocidad hace otro recorrido recto y en la misma dirección, también durante un cierto tiempo t_2, entonces el tiempo total de recorrido es $t_1 + t_2$.

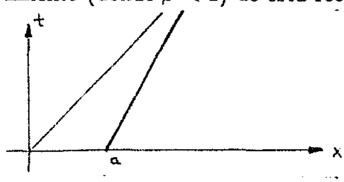
Lo anterior verdaderamente pasa en la mecánica clásica, pero ¿qué tiene que ver esto con la geometría que la explica?. Para contestar esto, vamos a decir otra vez la afirmación pero ahora en forma goemétrica. Es importante recordar que cuando un sistema S' con (x', y', z', t') se mueve con movimiento de traslación uniforme respecto a S con las coordenadas (x, y, z, t), teníamos que no cambian las coordenadas y' ni z' y que la transformación de cambio de las coordenadas no es en realidad del espacio-tiempo de cuatro dimensiones en él mismo, sino del espacio-tiempo de dos dimensiones en él mismo, donde la coordenada espacial es en la direción del movimiento de S' respecto a S. Entonces nos interesa graficar el espacio-tiempo de esas dos dimensiones. Lo hacemos con la idea con la que estamos acostumbrados en cálculo, formando un plano con los ejes x y t, como en la siguiente figura. Hasta aquí, no hemos dicho nada de la perpendicularidad entre los ejes, podemos hacer abstracción de esta en el dibujo.



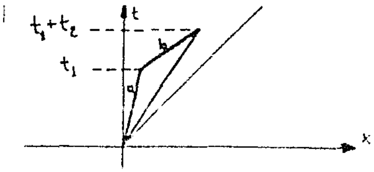
Y para representar el movimiento de una partícula con velocidad β respecto a este sistema S con coordenadas x, t, con unidades geométricas y en dirección positiva al eje x del sistema, no hay que confundir el movimiento de la partícula en dirección del eje x, (que es la misma dirección del movimiento de S' respecto a S) con el graficar con respecto al eje x. Entonces si la partícula en el tiempo $t = 0$, tiene la posición $x = 0$ (es decir, está en el origen) por cada centímetro de tiempo (en las coordenadas geométricas), la partícula habrá recorrido β centímetros sobre el eje x y por tanto el movimiento es graficado de la siguiente forma:



Pues, $\beta = \frac{x}{t}$, entonces $\beta t = x$, o bien $t = \frac{x}{\beta}$ y así visualizamos que la pendiente es $\frac{1}{\beta}$ si vemos a t como función de x y es β si vemos a x como función de t. Y la gráfica de una partícula que se mueve en la dirección positiva del eje x, con velocidad β respecto a S, ahora no empezando en el origen sino cuando $t = 0$, $x = a$, entonces la gráfica del movimiento (donde $\beta < 1$) de esta recta es:



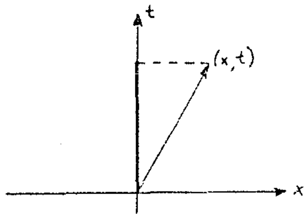
Estas gráficas del movimiento de una partícula, se les conoce como *líneas de mundo* de una partícula. Más adelante vamos a profundizar este concepto, por lo pronto intentemos decir la afirmación que hicimos de la mecánica clásica.



El que una partícula haga un recorrido en la dirección del eje x y con una velocidad β_1 y luego en ese lugar y en ese tiempo continúe su recorrido a otra velocidad β_2, representa dos segmentos de dos líneas de mundo distintas. Una con velocidad β_1 y pasando por el origen y que llega hasta t_1 y la otra que empieza en el punto $(t_1, \beta_1 t_1)$ y con velocidad β_2, durante un tiempo t_2. Representando el primer segmento por a y el segundo por b.

Entonces la afirmación hecha es que el tiempo total del recorrido es $t_1 + t_2$, es decir las proyecciones de los vectores a y b sobre el eje t, debe de medir $t_1 + t_2$, ¿ Qué quiere decir con esto ?.

En un plano xt ¿Qé es lo que hace que haya distintas geometrías en él ?, ¿ De qué depende ?, bueno pues, depende de la métrica que le demos en ese plano, si la métrica, o bien la longitud de un vector (x,t) es una u otra, las circunferencias ancladas al origen, por ejemplo cambiarán ya que será el conjunto de los puntos (x,t) que cumplan que su distancia al origen sea un cierto número, pero esas longitudes están definidas en forma distinta. Entonces habrá que buscar una forma de definir longitud, en la geometría buscada, de tal forma que la proyección de dos vectores sea la suma de cada una de las proyecciones. Una manera es que la longitud de un vector (que bien puede representar un movimiento de alguna partícula), sea igual a su proyección sobre el eje t.



Veamos entonces si un espacio con una métrica definida así no recupera los resultados y conceptos de la mecánica clásica, en particular las ecuaciones de Galileo para el movimiento uniforme.

Ya que, intuimos más o menos la geometría que quizás nos explique las leyes de la mecánica clásica, vamos a presentar el espacio bidimensional con dicha métrica, un poco más en general para establecerlo bien independientemente si se trata del espacio-tiempo o no y posteriormente regresaremos a la mecánica clásica.

Definiremos varias cosas, bastante formal con la idea, no de quitarle el aspecto intuitivo, sino de aclarar muy bien de que hablamos.

a) *PLANO SEMIEUCLIDEO*

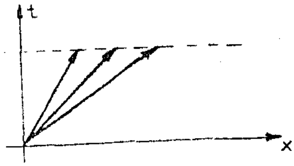
DEFINICION.

Sea V un espacio vectorial bidimensional en donde está definido el producto escalar de la siguiente forma: $\forall v, w \epsilon V \qquad <\overline{v},\overline{w}>= v_2, w_2$

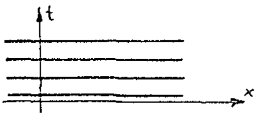
donde: $\overline{v} = (x_1, x_2) \qquad \overline{w} = (y_1, y_2)$

Definimos la norma de v, denotada como $\| v \|= \sqrt{<v,v>}$ por lo que $\| \overline{v} \|= \sqrt{<\overline{v}_2^2} = |v^2|$

Es decir que la longitud de cualquier vector $\overline{v}$ es la magnitud o valor absoluto de su proyección sobre el segundo eje.Por tanto todos los vectores cuya segunda coordenada es igual, miden lo mismo, por ejemplo todos los de la figura tienen la misma longitud.



Y cualquier vector horizontal tiene longitud cero:



En general diremos que en V los ejes serán V_1 y V_2.

Ahora sí comencemos a invetigar algunas de las casc) cracterísticas que tiene este espacio, con esta métrica al cual llamaremos **espacio semieuclidiano.**

Considermos los vetores $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$.Estos están en dirección de los ejes V_1 y V_2 respectivamente. Observamos que cualquier vector $v = (v_1, v_2)$ se puede poner en términos de e_1 y e_2, de la siguiente manera:

$$(v_1, v_2) = v_1(1,0) + v_2(0,1)$$

De tal forma que e_1 y e_2 son una base en el espacio-tiempo de eventos. Veamos como actúa el producto escalar con estos eventos básicos y por tanto métrica.

$$<e_1, e_1>=<(1,0),(1,0)>=0$$

$$<e_2, e_2>=<(0,1),(0,1)>=1$$

y

$$<e_1, e_2>=0$$

ya que:

$$<e_1+e_2, e_1+e_2>=<(1,1),(1,1)>=1$$

y por otro lado por propiedades de producto escalar real:

$$< e_1 + e_2, e_1 + e_2 > = < e_1, e_1 > +2 < e_1, e_2 > + < e_2, e_2 >$$
$$= 0 + 2 < e_1, e2 > +1$$

entonces, $\Rightarrow < e_1, e_2 >= 0$

Por tanto, e_1 es ortogonal a e_2 (pues por definición v es ortogonal a w sí sólo sí $< v, w >=< w, v >= 0$ que no es lo mismo que sean perpendiculares ya que puede ser una base $\{e_1, e_2\}$ que no sean perpendiculares entre sí, pero al definir ese producto escalar así, sí serán ortogonales. Y es que ortogonalidad no es perpendicularidad. Entonces tenemos:

$$\| e_1 \| = \sqrt{< e_1, e_1 >} = 0$$

$$\| e_2 \| = \sqrt{< e_1, e_2 >} = 1$$

es decir, la longitud de estos eventos, que podemos asociar con vectores anclados al origen $(0, 0)$ es 0 y 1.

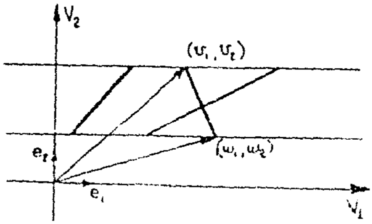
Entonces, diremos que una base $\{e_1, e_2\}$ se V es canónica si cumple que:

$$< e_1, e_1 >= 0, < e_1, e_2 >= 1 \text{y} < e_1, e_2 >= 0$$

Ahora bien, sabemos cual es la longitud de un vector anclado al origen, o mejor dicho cual la distancia semieuclidiana de un vector o punto $v = (v_1, v_2)$ al origen $(0, 0)$, pero ¿Cuál es la distancia a cualquier otro punto $w = (w_1, w_2)$?. Veamos que buscar esa distancia es buscar la longitud del segmento $v - w$, entonces:

$$\begin{aligned} \| \overline{v} - \overline{w} \| &= \sqrt{< v - w, v - w >} \\ &= \sqrt{< (v_1 - w_1, v_2 - w_2), (v_1 - w_1, v_2 - w_2) >}. \\ &= \sqrt{(v_2 - w_2)^2} = |v_2 - w_2| \end{aligned}$$

es decir, que la distancia semieuclídea entre dos puntos de vista desde la geometría euclideana es la longitud de la diferencia entre las segundas coordenadas, o bien la diferencia entre las proyecciones de los vectores v y w sobre el eje V_2, como se muestra en la figura anterior. Entonces cualquiera de los vectores que tengan las misma proyección desde el punto de vista euclideano, "miden lo mismo".



Como en este dibujo, todos esos segmentos "miden lo mismo" semieuclidianamente. Si al ver este dibujo nos preguntaran ¿ esos segmentos miden lo mismo, o no ? la respuesta es, depende, desde el punto de vista de la geométrica euclidiana no y desde la semieuclidiana sí.

Además si escogemos un punto $P = (p_1, p_2)$ en V y queremos encontrar los puntos $x = (x_1, x_2)$ tales que tengan una cierta distancia r a ese punto P, serán todos los que tengan segunda coordenada $x_2 = p_2 + r$ o bien $x_2 = p_2 - r$ ya que:

$$\| P - x \| = |p_2 - x_2| = |p_2 - (p_2 + r)| = |-r| = r$$

o bien:

$$\| P - x \| = |p_2 - x_2| = |p_2 - (p_2 - r)| = |r| = r$$

A este conjunto de puntos que distan de P una distancia fija $r > 0$, se le llama **circunferencia de radio r con centro en P**, la cual denotaremos C. Entonces:

$C = \{x \in V \mid \| P - x \| = r\} = \{x = (x_1, x_2) \in V \mid x_2 = p_2 \pm r\}$

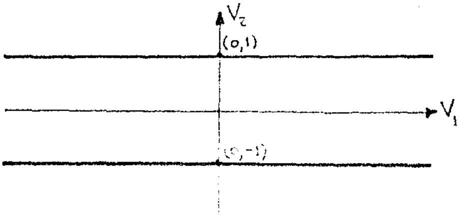
Si observamos esta circunferencia, desde el punto de vista euclidiano, nos parecerán más bien dos rectas paralelas al eje V_1 que distan una distancia de $2r$, porque una circunferencia euclidiana tiene otra forma que seguramente no es circunferencia observada desde un punto de vista semieuclideo. La defínción de circunferencia no es la definición de una figura, sino la característica métrica de un conjunto de puntos respecto a otro fijo. Aunque si observamos bien, la circunferencia semieuclídea no tiene un único centro, sino una infinidad y es toda la recta (vista desde la geometría euclidiana) con segunda coordenada p_2. O mejor dicho las circunferencias con radio $r > 0$ y centro en cualquier punto con segunda coordenada igual a p_2, coinciden.

Vamos a darle una ecuación a cualquiera de estas circunferencias. Tomemos como centro nuevamente a $P = (p_1, p_2)$. Entonces:

$C = \{x = (x_1, x_2) \in V \mid x_2 = p_2 \pm r\} = \{x = (x_1, x_2) \in V \mid |x_2 - p_2| = r\} = \{x = (x_1, x_2) \in V \mid (x_2 p_2)^2 = r^2\}$.

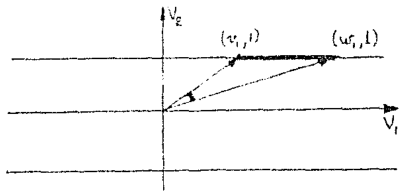
La ecuación de C será:$(x_2 - p_2)^2 = r^2$

En particular si $r = 1$ y $P = (0,0)$ entonces la ecuación de la circunferencia unitaria C con centro en el origen es: $x_2^2 = 1$ o bien $|x^2| = 1$, cuya gráfica es:



Ahora bien, como queremos llegar a poder plantear cómo son las transformaciones de cambio de coordenadas entre sistemas que se mueven con una velocidad y dirección constante, y esas son las mismas transformaciones que conservan el producto escalar, preservando todos los ángulos. Pero, ¿qué son los ángulos en la geometría semieuclidiana?. Algo que será muy útil para definirlos es el tener claro que son lascircunferencias, porque el ángulo entre dos vectores cualesquiera, es el mismo que entre esos vectores pero unitarios y transladados al origen. Y como el ángulo es igual al arco de la circunferencia unitaria, veamos como medir arcos en nuestra ya conocida circunferencia unitaria C, para poder entonces definir el concepto de ángulo.

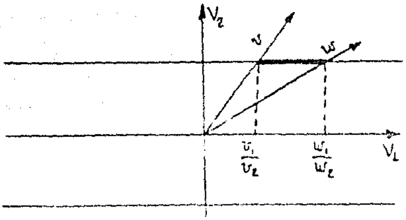
Consideremos $v = (v_1, 1)$ y $w = (w_1, 1)$ dos vectores unitarios. Como se encuentran sobre la circunferencia unitaria y el arco que subtienden dos vectores es igual al ángulo entre ellos por el radio de la circunferencia en la que se encuentran, entonces en este caso el ángulo coincide con el arco que subtienden los vectores unitarios, es decir, el ángulo entre ellos es $|w_1 - v_1|$.



Analogamente, si $v = (v_1, -1)$ y $w = (w_1, -1)$, el ángulo entre ellos es $|w_1 - v_1|$. Observemos que debido a que la cincunferencia (desde el punto de vista euclidiano) son dos rectas paralelas al eje V_1, entonces, el arco y por lo tanto el ángulo puede ser infinitamente grande.

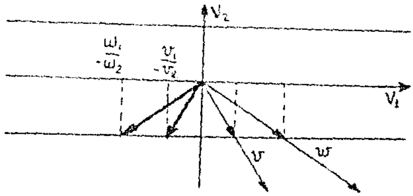
Si tomamos ahora, dos vectores $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$ cualesquiera, observemos que el ángulo entre ellos es el mismo que el que hay entre sus vectores unitarios. Es decir, si normalizamos v y w, podremos reducir este caso a los anteriores, siempre y cuando v y w se encuentren "del mismo lado" respecto a V_1, pues si estuvieran en lados distintos, el ángulo parecería ser infinito, pues el arco que sustentan en la circunferencia unitaria lo sería y habría una no bien definición del ángulo en este caso.

Asi es que consideremos $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$ vectores tales que $v_2 > 0$ y $w_2 > 0$.



Primero los normalizamos, es decir, consideramos $\frac{v}{|v|}$ y $\frac{w}{|w|}$. Como $|v| = |v_2| = v_2$ y $|w| = |w_2| = w_2$, entonces $\frac{v}{|v|} = (\frac{v_1}{v_2}, 1)$ y $\frac{w}{|w|} = (\frac{w_1}{w_2}, 1)$ y de estos vectores unitarios ya sabemos que el ángulo entre ellos es el arco que subtienden de la circunferencia unitaria, es decir, $\left|\frac{v_1}{v_2}\right|$.

Analogamente si $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$ tales que $v_2 < 0$ y $w_2 < 0$, como $|v| = |v_2| = -v_2$ y $|w| = |w_2| = -w_2$, entonces $\frac{v}{|v|} = (\frac{v_1}{v_2}, -1)$ y $\frac{w}{|w|} = (\frac{w_1}{w_2}, -1)$. Estos vectores normalizados ya están sobre la circunferencia unitaria, aunque del otro lado del eje de V_2, pero del mismo lado respecto al eje V_1. Entonces, el ángulo entre ellos es $\left|\frac{v_1}{-v_2} - \frac{w_1}{-w_2}\right| = \left|\frac{w_1}{w_2} - \frac{v_1}{v_2}\right| = \left|\frac{v_1}{v_2} - \frac{w_1}{w_2}\right|$.



Por tanto, la definición del **ángulo entre** v **y** w es:

$$\left|\frac{v_1}{v_2} - \frac{w_1}{w_2}\right| \quad \text{con} \quad v_2 \neq 0 \quad \text{y} \quad w_2 \neq 0.$$

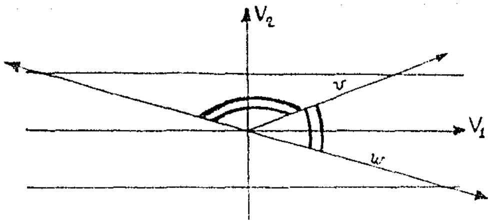
Varias observaciones a esta definición son importantes. No hay ángulos negativos. La definición también está considerando el caso cuando v y w no están en el mismo lado respecto a V_1, en tal caso el ángulo entre $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$ con $v_2 > 0$ y $w_2 > 0$ es

$$\left|\frac{v_1}{v_2} - \frac{w_1}{w_2}\right| = \left|\frac{v_1}{v_2} - \frac{-w_1}{-w_2}\right|$$

es decir, que es el mismo ángulo que $v = (v_1, v_2)$ y $-w = (-w_1, -w_2)$, con $v_2 > 0$ y $-w_2 > 0$. O sea que a ángulos suplemantarios son iguales bajo esta definición.

Los ángulos opuestos por un vértice también resultan ser iguales, ya que ángulo entre v y w es el mismo que entre $-v$ y w, pues $|\frac{w_1}{w_2} - \frac{v_1}{w_2}| = |\frac{-w_1}{-w_2} - \frac{-v_1}{-v_2}|$.

Y por último también se cumple (como en la geometrá euclidiana) que dos ángulos correspondientes miden lo mismo ya que v y w tienen la misma pendiente y por tanto forman el mismo ángulo con x.



Por estos dos últimos hechos se sigue que también los ángulos alternos internos y externos son iguales.

Ahora así, para poder saber como son las transformaciones de cambio de base canónica que preservan ángulos, necesitamos recordar primero que debido a la homogeneidad del espacio ya sabemos que esas transformaciones son lineales, lo cual lo vimos cuando empezamos a ver la Transformación de Lorentz. entonces una hipótesis que sigue estando presente en esa homogeneidad del espacio que nos va a implicar la linealidad de esas transformaciones. Pero en la geometría semieuclidiana, plantéemoslo sólo en términos de buscar las transformaciones lineales de cambio de base canónica que preservan ángulos.

Entonces tenemos dos bases canónicas, una en V que sea $\{e_1, e_2\}$ y en V que sea $\{e'_1, e'_2\}$. O sea que se cumple que $< e_1, e_1 >= 0, < e_2, e_2 >= 1$ y $< e_1, e_2 >= 0$ y por otro lado también $< e'_1, e'_1 >= 0, < e'_2, e'_2 >= 1$ y $< e'_1, e'_2 >= 0$.

Como la transformación buscada es lineal, entonces, le podemos asociar una matriz T de 2 x 2.

... y poniendo

e'_1 y e'_2 en coordenadas respecto a $\{e_1, e_2\}$, en la forma $e'_1 = (a_{11}, a_{21})$ y $e'_2 = (a_{12}, a_{22})$ o sea $e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$ y $e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$.

Entonces la Transformación mandará el $e_1 = (1,0)$ al $e'_1 = (a_{11}, a_{21}$ y el $e_2 = (0,1)$ al $e'_2 = (a_{12}, a_{22})$, todo en coordenadas respecto a V. Por tanto la forma de la matriz T es: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

ya que:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

y:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}.$$

Vamos a ver que condiciones implica sobre las a_{ij} el que sea T un cambio de base canónica:

Como $< e'_1, e'_1 >= 0$, entonces, $< (a_{11}, a_{21}), (a_{11}, a_{21}) >= 0$ es decir,

$$a_{21}^2 = 0, \text{dedonde } a_{21} = 0.$$

Además como $< e'_2, e'_2 >= 1$ entonces $< (a_{12}, a_{22}), (a_{12}, a_{22}) >= 1$ lo cual implica $a_{22}^2 = 1$, por tanto $a_{22} = \pm 1$, y con esto ya encontramos dos valores de la matriz $T, a_{21} = 0$ y $a_{22} = \pm 1$ con lo cual checa que $< e'_1, e'_2 >= 0$ pues $< e'_1, e'_2 >= < (a_{11}, a_{21}), (a_{12}, a_{22}) >= a_{21}a_{22} = 0(\pm 1) = 0$

Entonces una transformación lineal de T de cambio de base canónica semieuclídea es de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Ahora veamos las condiciones les pone a las a_{ij}, el que se pida que preserve ángulos.

Tomemos $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ en V. El ángulo entre esos vectores es $|\frac{y_1}{y_2} - \frac{x_1}{x_2}|$ y queremos que $T(x)$ y $T(y)$ tengan el mismo ángulo, es decir si:

$$T(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \pm x_2 \end{pmatrix}$$

$$T(y) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \pm y_2 \end{pmatrix}$$

queremos que:

$$\left| \frac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}{\pm y_2} - \frac{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)}{\pm x_2} \right| = \left| \frac{y_1}{y_2} - \frac{x_1}{x_2} \right|$$

Como T es de la forma $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

entonces es importante observar que y_2 y x_2 tiene el mismo signo. Entonces queremos:

$$\left| \frac{\pm a_{11}y_1}{y_2} \pm a_{12} - \left(\frac{\pm a_{11}x_1}{x_2} \pm a_{12} \right) \right| = \left| \frac{y_1}{y_2} - \frac{x_1}{x_2} \right|$$

que es lo mismo que:

$$\left| \frac{\pm a_{11}y_1}{y_2} - \frac{(\pm a_{11}x_1)}{x_2} \right| = \left| \frac{y_1}{y_2} - \frac{x_1}{x_2} \right|,$$

o sea, necesitamos que se cumpla:

$$| \pm a_{11} || \frac{y_1}{y_2} - \frac{x_1}{x_2} | = | \frac{y_1}{y_2} - \frac{x_1}{x_2} |,$$

de donde se debe de cumplir que $|a_{11}| = 1$ o sea, $a_{11} = \pm 1$.

Entonces las transformaciones lineales de cambios de base que preservan ángulos son de la forma $\begin{pmatrix} \pm 1 & \beta \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ para cualquier β arbitraria.

Y en realidad estas 4 formas de transformaciones, son cuantro formas de componder la transformación $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pues:

$$A_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A_0 = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

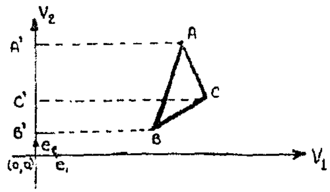
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(que junto con A_0 son las cuatro formas).

Ahora con todo lo que conocemos de cerca de esta geometría semieuclidiana, probemos algunos teoremas importantes en esta geometría. Los tre teoremas que veremos son acerca de algunas propiedades de los triángulos. Por ejemplo, ¿Qué relación hay entre las longitudes de sus lados, ó entre sus ángulos ó entre lados y ángulos ?, ¿se sigue cumpliendo la desigualdad del triángulo válida en la geometría euclidiana ?, ¿ la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de dos rectos ?, etc.

TEOREMA A

El lado mayor de un triángulo es igual a la suma de los otros dos lados.



Demostración:

Supongamos que AB es el lado mayor del triángulo ABC.

$$\| A - B \| = |A' - B'|$$
$$\| B - C \| = |B' - C'|$$
$$\| C - A \| = |C' - A'|$$

y como $|A' - B'| = |A' - C' + C' - B'| = |A' - C'| + |C' - B'|$.
entonces: $\| A - B \| = \| C - A \| + \| B - C \|$ □

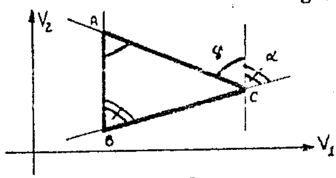
Observemos que para los otros lados BC y AC se cumple que:

$$\| B - C \| \leq \| A - B \| \text{ y } \| C - A \| \leq \| A - B \|$$

por lo que $\| B - C \| \leq \| A - B \|$ y $\| C - A \|$ y $\| C - A \| \leq \| A - B \| + \| B - C \|$ que con resultado anterior, $\| A - B \| = \| C - A \| + \| B - C \|$ (es decir $\| A - B \| \leq \| C - A \| + \| B - C \|$), parece cumplirse la desigualdad del triángulo, sin embargo no es así ya que la desigualdad del triángulo euclidiano, se da la igualdad sólo cuando los tres lados del triángulo están sobre la misma recta, y en este caso, si tomamos el lado mayor, la igualdad se dá siempre. Así es que, aunque como propiedad sea cierta en significado es realmente distinto y la igualdad se dá con otras condiciones.

TEOREMA B.

El ángulo mayor de un triángulo es igual a la suma de los otros dos ángulos.



Demostración:

Sean A, B, C, los vértices del triángulo. Supongamos (sin pérdida de de generalidad) que el $\angle B$ es mayor .

Tracemos una recta paralela al lado AB que pase por el vértice C y consideremos el $\angle\alpha$ que forma con el lado BC. Como el lado AB y su paralela tienen la misma pendiente, entonces forman el mismo ángulo, es decir $\angle B = \angle\alpha$.

Ahora, como el triángulo formado por la recta paralela a AB y el lado AC, al cual llamaremos $\angle\gamma$, por ser ángulos alternos internos al $\angle A$, los cuales ya analizamos, resulta $\angle\gamma = \angle A$.

Y como un ángulo, y su ángulo suplementario son iguales en esta geometría, entonces $\angle\alpha = \angle\gamma + \angle C$, pues el ángulo suplementario de $\angle\alpha$ es $\angle\gamma + \angle C$.

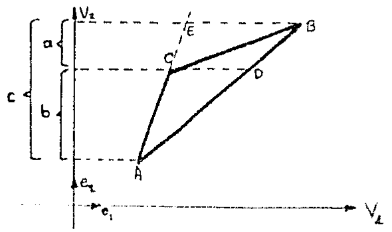
Por lo tanto el $\angle B = \angle A + \angle C$, lo cual queríamos demostrar. □

Observemos que si el $\angle B$ mide un recto, entonces $\angle A + C$ también y por tanto la suma de los ángulos internos de un triángulo, en este caso sí mediría dos rectos. Pero si el $\angle B$ no mide un recto, la suma de los ángulos no mide dos rectos, puede medir mucho más o mucho menos, anque siempre positivo.

No parecen cumplirse muchos teoremas que eran válidos en la geometría euclidiana. Veamos un último resultado válido en esta geometría semieuclideana.

TEOREMA C.

La longitud de los lados de un triángulo son proporcionales a los ángulos opuestos.



Sean A, B, C los vértices del triángulo y $\angle A, \angle B, \angle C$, los ángulos internos al triángulo en cada vértice. Denotamos:

$$\| C - A \| = b$$
$$\| B - C \| = a$$
$$\| A - B \| = c$$

las longitudes de los lados.

Tracemos una recta CD paralela a e_1. Ahora como el arco que sustenta un ángulo es igual al producto de éste por el radio de la circunferencia. Si se toman como centro el vértice A, como ángulo el $\angle A$ y como radio b, entonces $|C - D|$ es el arco sustentado por el $\angle A$ de esa circunferencia, por tanto $|C - D| = (\angle A) \cdot b$.

Por otro lado, tomemos como centro B, como radio a y el arco sustentado por el $\angle B$. Como el radio a es igual a $|C - D|$, ocurre que $|C - D| = (\angle B) \cdot a$, es decir, $|C - D| = (\angle A) \cdot b = (\angle B) \cdot a$.

de donde, $\frac{\angle A}{a} = \frac{\angle B}{b}$

o sea, $\frac{\angle A}{\|B-C\|} = \frac{\angle B}{\|C-A\|}$

y el lado BC es opuesto al $\angle A$ y el lado CA al $\angle B$.

Análogamente trazamos la recta BE paralela al e_2 y con el mismo razonamiento:

$$|B - E|(\angle C) \cdot a \text{ y } |B - E = (\angle A) \cdot c$$

entonces: $\frac{\angle C}{c} = \frac{\angle A}{a}$

es decir: $\frac{\angle C}{\|A-B\|} = \frac{\angle A}{\|B-C\|}$

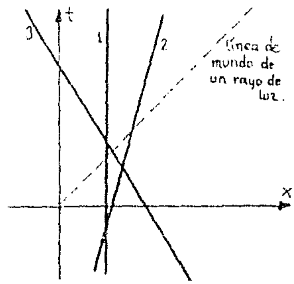
donde $\| A - B \|$ es la longitud del lado opuesto al $\angle C$.

por lo tanto $\frac{\angle A}{\|B-C\|} = \frac{\angle B}{\|C-A\|} = \frac{\angle C}{\|A-B\|}$. □

Hasta aquí dejamos el análisis de esta geometría semieuclideana bidimensional y veamos cómo es que ésta nos explica la mecánica clásica.

b) *ESPACIO-TIEMPO SEMIEUCLIDEO.*

Consideremos el espacio-tiempo bidimensional y representémoslo gráficamente como en la figura de abajo, donde cualquier evento A tiene una coordenada espacial x y una temporal t.

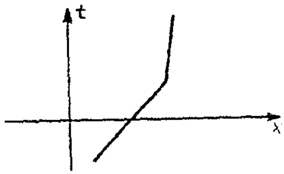


Para representar en este espacio-tiempo la "historia" del movimiento de una partíícula, la representamos con una curva a la cual llamaremos, como ya dijimos **línea de mundo de la partícula**. Por ejemplo, una partícula que se encuentra en una cierta posición fija, mientras transcurre el tiempo es representada por una recta paralela al eje t, cuya representación el en dibujo es la recta 1. Una partícula que viaja hacia la derecha del eje x, mientras transcurre el tiempo, con una velocidad β (en coordenadas geométricas, por lo que $\beta \leq 1$), será representada por la recta 2, ya que recorre distancias positivas iguales en intervalos de tiempos iguales, y tiene pendiente $\frac{1}{\beta}$ ya que en física se acostumbra ver a la distancia como función del tiempo entonces se grafica así, por lo tanto la recta aparece con pendiente β. Pero en este caso se voltéa, pues se vé al tiempo como una función de la distancia.

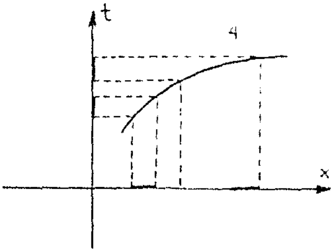
Ahora bien, la línea del mundo de una partícula que viaja hacia la hacia la izquierda del eje x, mientras transcurre el tiempo, a una velocidad $\beta(\beta < 1)$, recorre distancias negativas iguales, en intervalos de tiempo iguales, y esta representada por la recta 3, cuya pendiente es $\frac{-1}{\beta}$.

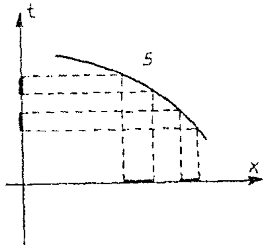
La línea del mundo de un rayo de luz que pasa por el origen, es representada por la recta a "45°" (euclidianamente hablando) ya que, ahí $\beta = 1$. Pero las líneas del mundo no sólo son rectas.

Puede una partícula llevar una velocidad β, con un recorrido hacia la derecha del eje x y luego con un choque con otra partícula cambiar esa velocidad, entonces la línea del mundo de este movimiento es una línea quebrada como la de este dibujo. Pero porsupuesto que puede volver a chocar otras veces y su línea de mundo continuará siendo una línea quebrada.

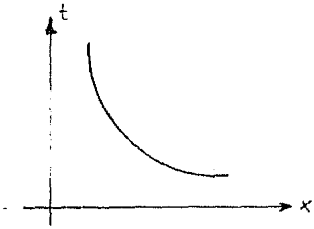


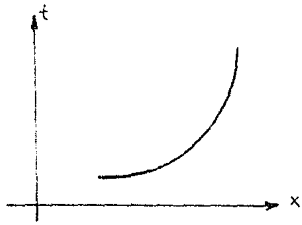
Pero también puede ser que la partícula no lleve velocidad constante, sino que acelere, frene, o varíe por intervalos de tiempo, estas dos formas. Si una partícula que hace un recorrido hacia la derecha del eje x con una aceleración, es representada por líneas de mundo como las de abajo, ya que, en iguales intervalos de tiempo que transcurren, cada vez se corre una mayor distancia. Aunque puede ser que aumente cada vez más distancia o que aumente cada vez menos, cuyas líneas del mundo están graficadas por las curvas 4 y 5 respectivamente.



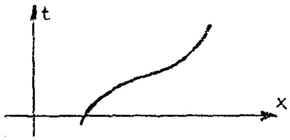


Y en el caso de que una partícula esté recorriendo también una distancia positiva, pero ahora frenando será representado por líneas del mundo como éstas:

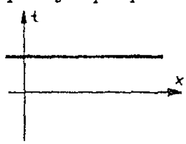




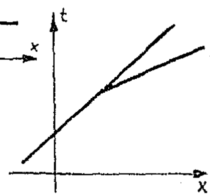
Pero también puede ser que la partícula acelere en un espacio de tiempo y luego comience a frenar, su línea de mundo será por ejemplo al así y puede volver a acelerar, detenrse ó empezar a avanzar con velocidad constante, etc. Y su línea de mundo será una curva que tenga varios trozos de las curvas que ya analizamos.



Aquí se abre una pregunta y es: ¿Toda curva en el plano es una línea de mundo que representa el movimiento de una partícula? No, por ejemplo para una línea horizontal, no hay un movimiento de alguna partícula, pues significaría hacer un recorrido en un instante y eso no es posible.



Y tampoco hay movimiento de ninguna partícula, cuya línea de mundo sea como la siguiente, pues sería algo así como una partícula que se mueve primero de A a B con velocidad



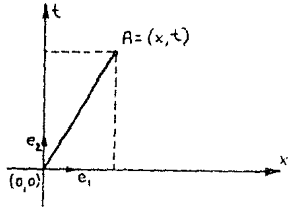
constante, y luego, retroceder en el tiempo hasta el punto P y cambiar luego de velocidad. Esto es algo que físicamente no es posible. El problema en esta curva es que recorre dos veces un trozo de recta, lo cual representaría algo imposible físicamente, pues el tiempo no puede retroceder y seguir avanzando el recorrido al mismo tiempo. Por eso la definición más exacta de línea de mundo es:

DEFINICION.

Una línea de mundo del espacio-tiempo Newtoniana es una variedad 1-dimensional parametrizada por el tiempo t.

Todo este análisis nos servirá cuando veamos sistemas de referencia que aceleran, para el análisis de la Relatividad Especial no necesitamos más que las líneas de mundo de movimiento con velocidad y dirección constante que es el movimiento que realizan unos sistemas de refencia respecto a otros.

Ahora en ese espacio-tiempo bidimensional definimos esa métrica semieuclideana. Veamos ahora los conceptos desarrollados en esa geometría, que significado tiene en el espacio-tiempo bidimencional de la mecánica clásica. Si A es un evento (x,t) (respecto a la base $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$ en el eje y y en el t respectivamente con la misma unidad), entonces la longitud de la curva o línea de mundo del movimiento de una partícula con velocidad constante $\frac{x}{t}$ pasando por el evento $(0,0)$ y llegando $A = (x,t)$ es $|\ t\ |$ de acuerdo a lo analizado anteriormente respecto a esta métrica.

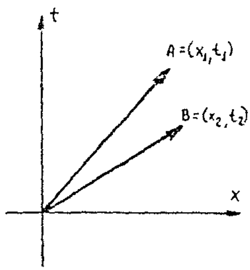


(En general la longitud de una línea de mundo sería $\int_\alpha dt$)

La distancia entre cualesquiera dos eventos $A = (x_1,t_1)$ y $B = (x_2,t_2)$ es $\| A - B \| = |\ t_2 - t_1\ |$ es decir es igual al intervalo de tiempo entre uno y otro evento.

Ahora, ¿qué significa un ángulo en el espacio-tiempo bidimensional?.

Como el ángulo entre dos vectores formados por dos eventos $A = (x_1,t_1)$ y $B = (x_2,t_2)$ anclados al origen, lo defininimos como: $|\frac{x_2}{t_2} - \frac{x_1}{t_1}|$ es lo mismo que $|\ v_2 - v_1\ |$ donde v_1 es la velocidad que tiene la partícula que viaja del origen $(0,0)$ al evento A y v_2 la que tiene de $(0,0)$ a B.



Por tanto el ángulo entre dos líneas de mundo de partículas moviéndose con velocidades constantes, es la magnitud de la velocidad relativa entre ellas, es decir la velocidad que lleva una partícula medida desde un sistema inercial de referencia fijo en la otra partícula.

Así es que los ángulos semieuclídeos son las velocidades relativas en el espacio-tiempo bidimencional.

¿Y qué resultarán ser las transformaciones semieuclídeas de cambio de base en el espacio-tiempo bidimensional?

Consideremos un evento $A = (x', t')$ cuyas coordenadas espacio-tiempo son respecto a una base e'_1 y e'_2 de un sistema inercial de referencia S'. Para saber que coordenadas tendrá respecto a una base e_1 y e_2 de un sistema inercial se mueve S' con velocidad β en dirección del eje x coincidente con el x', necesitamos la forma de las matrices $T = \begin{pmatrix} \pm 1 & \beta \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ que eran las transformaciones de cambio de base.

Entonces al aplicar T al evento $A = (x', t')$, obtendremos las coordenadas (x, t) del evento A respecto a S.
es decir,

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \beta \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos que:

$$\pm x' + \beta t' = x$$

$$\pm t' = t$$

Aquí hay cuatro posibles ecuaciones simultáneas entre las cuales están descartadas dos de ellas, pues por el carácter absoluto del tiempo $t' = t$ y tomando $\begin{pmatrix} -1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ obtenemos $x' = -x + \beta t \quad t' = t$ que es casi como $x' = x + \beta\, t' = t$, sólo que cambiando el eje x de sentido. Así es que en realidad hay una única forma de cambio de coordenadas y es la siguiente:

$$x' + \beta t' = x \qquad\qquad t' = t$$

o bien $x = x' + \beta t \quad t = t'$ las cuales son las ecuaciones de Galileo para el movimiento de traslación uniforme, donde el tiempo es considerado absoluto, es decir el mismo en cualquier sistema coordenado.

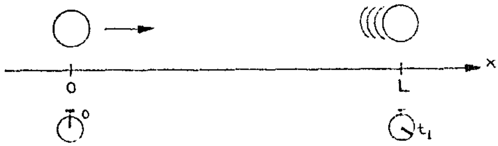
Entonces las ecuaciones de la mecánica clásica, están bien explicadas por medio de una transformación de cambio de base, dentro de la geometría semieuclidiana. Esto ya da una buena idea de que es esta la geometría que explica la mecánica clásica, pero ¿qué tanto más recupera sus leyes?. Para ver un poco más que recupera muchas de sus leyes de la mecánica clásica, veamos el significado que toman los TEOREMAS A ,B y C que vimos anteriormente.

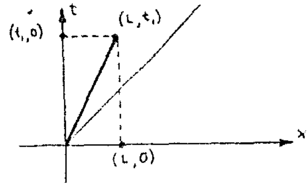
Con el significado que toman los conceptos de longitud de un vector como su intervalo temporal y de ángulo como la velocidad relativa entre dos sistemas, tenemos que los teoremas se traducen en:

TEOREMA A.

El intervalo temporal que transcurre cuando una partícula viaja a una velocidad constante para llegar a un lugar en el eje x , es igual la suma de dos intervalos de tiempo, en los cuales la partícula viaja primero a una velocidad constante y luego a otra, para llegar también a esa posición en el eje x, en el mismo instante.

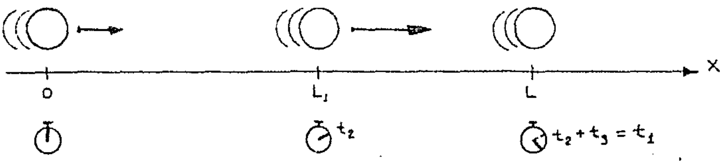
Una idea física la da el siguiente dibujo. Aquí una partícula viaja a una velocidad constante y llega a la posición L sobre el eje x en un tiempo t_1.



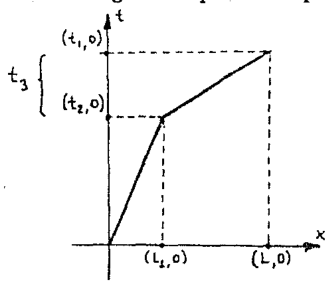


Cuya representación geométrica está dada en el diagrama de arriba del espacio-tiempo.

Ahora consideremos una partícula que viaja primero a una velocidad constante durante un tiempo t_2 llegando a la posición L_1 y luego viaja a otra velocidad constante durante un tiempo t_3 para llegar a la posición L en el tiempo t_1.

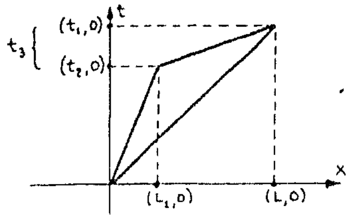


La gráfica de esto en el diagrama espacio-tiempo es:



por tanto el diagrama de ambas partículas es como el que se muestra abajo..

La afirmación del TEOREMA A es que $t_1 = t_2 + t_3$ lo cual es muy claro en la mecánica clásica.



TEOREMA B.

Si una partícula P se mueve con velocidad β_1 respecto a otra partícula Q, la cual a su vez lleva una velocidad β_2 respecto a una tercer partícula R, entonces la partícula P se mueve con una velocidad $\beta_1 + \beta_2$ respecto a la parícula R.

Es esta la ley de la suma de las velocidades en la mecánica clásica.

TEOREMA C

El tiempo entre un evento y otro es proporcional a su velocidad relativa.

La diferencia de tiempos entre dos partículas a dos ciertas velocidades, es proporcional a la velocidad relativa entre ellas. La cual como hemos visto es una consecuencia natural si la geometría que explica el mundo físico en el espacio-tiempo bidimensional es la semieuclidiana.

2. ¿QUE GEOMETRIA EXPLICA LA TRANSFORMACION DE LORENTZ?.

¿Con cuál geometría se explican las leyes entre los sistemas con traslación uniforme, considerando el tiempo relativo?.

a)*PLANO SEUDOEUCLIDEO.*

Comencemos diciendo cuál es la métrica a través del producto escalar, el cual nos dará una geometría muy peculiar.

DEFINICION.

Sea V un espacio vectorial bidimensional en donde está definido el producto escalar de la siguiente forma: $\forall v, w \epsilon V \ < \overline{v}, \overline{w} >= v_1 w_1 - v_2 w_2$, Definimos la norma de v, denotando como:

$$\| \overline{v} \| = \sqrt{< \overline{v}, w >}$$

por lo que, $\| \overline{v} \| = \sqrt{v_1^2 - v_2^2}$.

Notemos que con esta métrica definida así hay vectores distintos de cero, con norma cero, como serían los que cumplen que $v_1 = \pm v_2$. También hay vectores con norma imaginaria como los que cumplen que $| v_1 | < | v_2 |$.

Ahora veamos algunas características de esta geometría como base canónica, circunferencia, transformaciones ortonormales seudoeuclideas, etc.

Consideremos los elementos $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$. Cualquier $v = (v_1, v_2) \epsilon V$ se puede poner en términos de e_1 y e_2

Dicho de otra forma $\{e_1, e_2\}$ son una base de V. Veamos como actúa la norma de ellos.

$$< e_1, e_2 > = < (1,0), (1,0) > = 1 - 0 = 1$$

$$< e_2, e_2 > = < (0,1), (0,1) > = 0 - 1 = -1$$

y $< e_1, e_2 > = 0$, ya que:

$$< e_1 + e_2, e_1 + e_2 > = < (1,1), (1,1) > = 1 - 1 = 0$$

y usando las propiedades del producto escalar

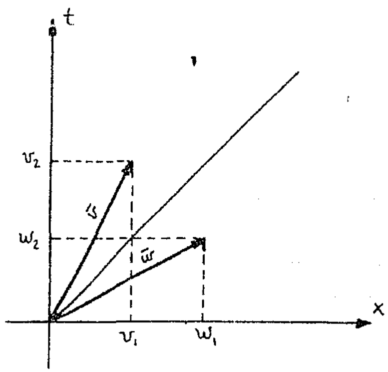
$$< e_1 + e_2, e_1 + e_2 > = < e_1, e_1 > +2 < e_1, e_2 > + < e_2, e_2 > =$$

$$1 + 2 < e_1, e_2 > -1 = 2 < e_1, e_2 >$$

entonces, $< e_1, e_2 > = 0$.

Diremos que una **base** $\{e_1, e_2\}$ **es canónica si cumple que** $< e_1, e_1 > = 1$, $< e_2, e_2 > = -1$ *y* $< e_1, e_2 > = 0$.

Y dos vectores v y w son **ortogonales** si $< v, w > = 0$, es decir, si $v_1 w_1 - v_2 w_2 = 0$, es lo mismo que $v_1 w_1 = v_2 w_2$, o bien $\frac{v_1}{v_2} = \frac{w_1}{w_2}$, lo cual desde el punto de vista euclideano son simétricos (en sus direcciones) respecto a la recta de 45° en el plano V, pues si v tiene pendiente m, la de w es $\frac{1}{m}$. Además w tiene longitud real, mientras que v es de longitud imaginaria. En resumen v y w son ortogonales seudoeuclideanamente si desde la geometría euclideana son simétricos respecto a la recta de 45° . Ahora, ¿cuál será la distancia entre dos puntos?, es decir, de un vector que no esté anclado al origen.



Si $v, w \epsilon V$ $\| \overline{v - w} \| = \sqrt{< v - w, v - w >} =$

$$\sqrt{<(v_1-w_1,v_2-w_2),(v_1-w_1,v_2-w_2)>}=\sqrt{(v_1-w_1)^2-(v_2-w_2)^2}.$$

Esta definición nos dá inmediatamente la definición de la circunferencia seudoeuclideana, como el conjunto de puntos que distan de un punto fijo $P=(p_1,p_2)$, una distancia fija r, entonces

$$C=\{v\in V/\parallel v-P\parallel=r\}=$$

$$=\{v=(v_1,v_2)\in V/\sqrt{(v_1-p_1)^2-(v_2,p_2)^2}=r\}=$$

$$=\{v\in(v_1,v_2)\in V/(v_1-p_1)^2-(v_2-p_2)^2=r^2\}.$$

Por lo tanto la ecuación de C es:

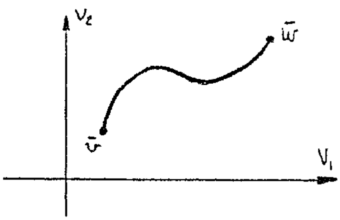
$$(v_1-p_1)^2-(v_2-p_2)=r^2.$$

Vista esta ecuación desde la geometría euclideana, representa una hipérbola horizontal (si $r^2>0$), vertical (si $r^2<0$) o degenerada, es decir que el radio de la circunferencia puede ser positivo, cero o imaginario puro.

En particular la circunferencia de radio 1 con centro en el origen tiene por ecuación $v_1^2-v_2^2=1$

Como podemos observar aquí también la imágen geométrica de circunferencia es realmente un prejuicio, circunferencia no es una forma absoluta sino relativa a la métrica.

Volviendo a las definiciones de longitud.Tomando v y $w\epsilon V$ ya vimos la distancia entre ellos como $\|v-w\|$, pero si ahora en lugar de unirlas con el vector $v-w$, lo hacemos con cualquier curva regular α, ¿cuál es la longitud de α?.



Regularmente pensamos su longitud como límite de sumas de longitudes de segmentos rectos altravés de particiones de α, donde las longitudes son seudoeuclideanas.

Así que: $L(\alpha)=\int_\alpha (dv_1)^2-(dv_2)^2$

Para redondear la idea de esta geometría , veremos por último, qué forma tienen las transformaciones lineales seudoeuclídeas de cambio de coordenadas, o bien de cambio de base entre sistemas de referencia que se mueven con velocidad y dirección constante. Buscaremos la forma de las transformaciones que preserven la distancia, pidiéndole que preserve el producto escalar (a estas transformaciones usualmente les llamaremos **seudoortogonales**).

Entonces, propongámonos encontrar la forma de las transformaciones lineales que preserven el producto escalar, que manden la base de un sistema en la base de otro.

Así es que consideremos un sistema S' con una base canónica $\{e'_1, e'_2\}$. Este sistema se mueve a la velocidad β respecto a otro sistema S con base $\{e_1, e_2\}$.

Buscamos T lineal tal que:

$$< T(e_1), T(e_1) >=< e_1, e_1 >= 1$$

$$< T(e_2), T(e_2) >=< e_2, e_2 >= -1$$

$$< T(e_1), T(e_2) >=< e_1, e_2 >= 0$$

Como T es lineal, tiene la forma $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

entonces

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

o sea $T(e_1) = (a_{11}, a_{21})$ en coordenadas respecto a S,

y

$$T(e_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

o sea $T(e_2) = (a_{12}, a_{22})$en coordenadas respecto a S.

Entonces queremos que se cumpla que:

$$< (a_{11}, a_{21}) >=< (1,0), (1,0) >= 1$$

$$< (a_{12}, a_{22}) >=< (0,1), (0,1) >= -1$$

$$\text{y} \quad < (a_{11}, a_{21}), (a_{12}, a_{22}) >=< (1,0), (0,1) >= 0$$

de donde,

$$a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1$$
$$a_{12}^2 - a_{22}^2 = -1$$

y

$$a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0$$

de donde $a_{11} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$, y de la última igualdad tenemos que:

$$a_{11}a_{12} = a_{21}a_{22} \;\Rightarrow\; \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Llamándole $\beta = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$, tenemos que:

$$a_{12} = \beta a_{22}$$
$$a_{21} = \beta a_{11}$$

Sustituyendo en las dos primeras ecuaciones que habríamos encontrado, tenemos:

$$a_{11}^2 - a_{21}^2 = a_{11}^2 - \beta^2 a_{11}^2 = 1$$
$$a_{12}^2 - a_{22}^2 = \beta^2 a_{22}^2 - a_{22}^2 = -1$$

es decir, $a_{11}^2(1-\beta^2) = 1$ y $a_{22}^2(1-\beta^2) = 1$

o sea

$$a_{11} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$a_{22} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Por lo tanto T es de la forma

$$\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$$

Son en realidad cuatro formas, las cuales son composición de las matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con la matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$.

Como T preserva el producto escalar de e_1 y e_2, entonces lo hará para cualquier $v, w \in V$, $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2)$, pues:

$$T(v) = v_1 T(e_1) + v_2 T(e_2) = v_1 e_1' + v_2 e_2'$$

$$T(w) = w_1 T(e_1) + w_2 T(e_2) = w_1 e_1' + w_2 e_2'$$

debido a la linealidad de T.

Y como $\{e'_1, e'_2\}$ es base canónica, entonces:

$$< T(v), T(w) > = < v_1 e'_1 + v_2 e'_2, w_1 e'_1 + w_2 e'_2 > =$$

$$= v_1 w_1 < e'_1, e'_1 > + 2 v_1 w_2 < e'_1, e'_2 > + v_2 w_2 < e'_2, e'_2 >$$

$$= v_1 w_1 - v_2 w_2 = < v, w >$$

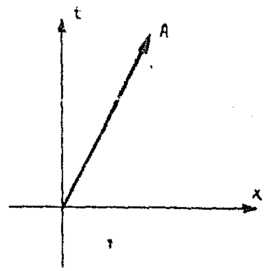
Por tanto T preserva el producto escalar y con esto la métrica.

b) *ESPACIO-TIEMPO SEUDOEUCLIDEO.*

Ahora, empecemos ya a hablar del espacio-tiempo bidimensional con la métrica seudouclidea, es decir, el espacio de eventos a los cuales les asignamos una coordenada espacial y una temporal y tomando dos eventos $A = (x_1, t_1)$ y $B = (x_2, t_2)$, definimos el producto escalar como:

$$< A, B > = x_1 x_2 - t_1 t_2$$

y la norma de cualquier evento $A = (x, t)$ como $\|A\| = \sqrt{x^2 - t^2}$ o bien, $\|A\|^2 = x^2 - t^2$, que más bien es la norma del vector anclado al origen y con extremo en el evento A (dicho vector puede perfectamente representar "la línea de mundo" de una partícula que se mueve en dirección al eje x, con velocidad constante $\frac{x}{t}$).



Traduciendo todo el análisis hecho para espacios vectoriales bidimensionales con la métrica seudoeuclideana, a este espacio tiempo bidimensional, tenemos que los eventos $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ forman una base canónica.

La definición de una circunferencia con centro en el evento $P = (x_0, t_0)$ de radio r es:

$$C = \{(x,t) \mid \|(x,t) - P\| = r\} = \{(x,t) \mid (x - x_0)^2 - (t - t_0)^2 = r\}$$

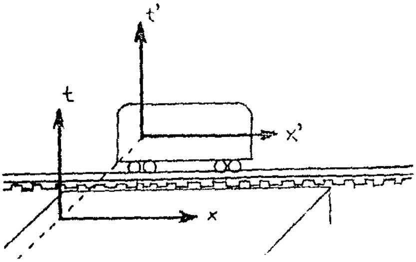
En particular la circunferencia con centro en el origen y radio 1, tiene por ecuación $x^2 - t^2 = 1$. Estas ecuaciones nuevamente aparecen como hipérbolas desde el punto de vista de la geometría euclideana. Vertical, si $r^2 < 0$, es decir, si $(x - x_0)^2 - (t - t_0)^2 < 0$ o bien, en cuyo caso le llamaremos un **spacelike**. Si $r^2 > 0$ o bien le llamaremos un **timelike**. Y en el caso en que $r^2 = 0$ le llamaremos **lightlike**.

La longitud de una curva regular a es:

$$L(\alpha) = \int_{\alpha} (dx)^2 - (dt)^2$$

En realidad como lo que queremos analizar en la Relatividad Especial, son los movimientos de traslación uniforme de unos sistemas respecto a otros, solo necesitaremos la longitud de líneas de mundo de partículas cuyo movimiento esta representado por "rectas".

Supongamos ahora que tenemos un sistema inercial de referencias S al cual le podemos fijar dos ejes coordenados x y t, es decir, construímos un espacio de eventos respecto a S. Y tenemos también otro sistema S' al cual le podemos también fijar un espacio de eventos mediante los ejes x' y t'. Supongamos que S' se mueve en direcciíon del eje común xx', con una velocidad constante β respecto a S y que los orígenes coincidieron en $t = 0 = t'$.



Una observación importante aquí, es que no se presupone que $t = t'$ como en el caso de la mecánica clásica, sino la relatividad del tiempo respecto al sistema inercial de referencia desde el cual se mida. Como ya vimos, esto es algo sumamente importante en física.

Si un evento tiene coordenadas (x', t') respecto a S', ¿cuáles serán sus coordenadas respecto a S?. Como ya habíamos analizado muchas páginas atras (cuando planteamos la Transformación de Lorentz), la transformación de un sistema de referencia a otro, debía ser lineal como consecuencia de la homogeneidad del espacio-tiempo (un supuesto muy fuerte sobre este).

Ahora bien, ya que tomamos como postulado, que la velocidad de la luz es siempre 1 (en coordenadas geométricas) independientemente del sistema de referencia desde el cual se mida (que es lo mismo que suponer el tiempo relativo, como se vió en el capítulo anterior), veámos que esto implica que la métrica seudoeuclídea es invariante en cualquier sistema de referencia inercial.

Examinando las ecuaciones de un frente de onda en el sistema S y S', $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ y $x'^2 + y'^2 + z'^2 = t'^2$, en donde hemos hecho uso de esa propiedad de invariancia de la velocidad de la luz y de su valor 1. Como el movimiento de S' respecto a S en dirección del eje común xx', entonces $y' = y$ y $z' = z \;\; \forall y, z$, con lo que tenemos:

$$x^2 - t^2 = y^2 + z^2 = y'^2 + z'^2 = x'^2 - t'^2 \qquad \forall y, z$$

es decir, $x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2$, paracualesquiera sistemas inerciales S y S'. Lo cual significa que el intervalo espacial al cuadrado menos el temporal al cuadrado es un **invariante** del sistema al cual nos referimos. Podemos decir ahora que con la métrica definida, la constancia de la velocidad de la luz en cualquier sistema es realmente pedir que la métrica seudoeuclideana sea invariante (o bien el producto escalar).

Entonces si queremos encontrar una transformación lineal de un sistema en otro (respecto al cual se mueve con velocidad β y dirección del eje xx') que cumpla con el primer postulado de Einstein, dicha transformación tendrá que preservar el producto escalar. Y esas transformaciones T son las que encontramos hace un momento y que son de la forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\pm\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\pm\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$$

Si consideramos la matriz con todos los signos positivos y la aplicamos a un evento $A = (x', t')$, entonces las coordenadas de este en el sistema S son:

$$x = \frac{x' + \beta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t = \frac{t' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

a dicha transformación le llamamos anteriormente Transformación de Lorentz.

Físicamente no son posibles muchas formas de todas las que había. Como vimos, la relación entre las entradas es $\begin{pmatrix} a_{11} & \beta a_{22} \\ \beta a11 & a_{22} \end{pmatrix}$, así es que el análisis es por columnas.

Si la segunda columna fuera con signos negativos y la primera con cualquiera, entonces tendríamos que una de las ecuaciones sería $t = \frac{\beta x' - t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$, con lo cual tendríamos que los tiempos marchan en sentidos contrarios lo cual es imposible físicamente. Ahora si la primera columna tuviera los signos negativos las ecuaciones serían:

$$x = \frac{-x' - \beta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t = \frac{-\beta x' + t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

y que son las ecuaciones que resultan si el sentido del eje x' es el contrario y cambiandolo son las de la Transformación de Lorentz.

Ahora la transformación inversa la encontramos con la inversa de la matriz T. El determinante de esta es, $\frac{(1-\beta^2)}{1-\beta^2} = 1$, entonces la la matríz inversa es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$$

es decir, las coordenadas x', t' dadas las de x y t son:

$$x' = \frac{x - \beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$t' = \frac{-\beta x + t}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

¿Y quién es β aquí?. Para saberlo consideremos el movimiento del origen del eje x', es decir cuando $x' = 0$, en el transcurso de los tiempos t y t'. Por la transformación inversa de Lorentz...

$$0 = \frac{x - \beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

es la posición de dicho origen en el tiempo t, o sea $x = \beta t$ es la ecuación respecto a S de donde, $\beta = \frac{x}{t}$, es decir, es β la velocidad relativa del sistema S' respecto a S.

O sea que la Transformación de Lorentz es una consecuencia natural en la física si la métrica del espacio tiempo es la seudoclideana.

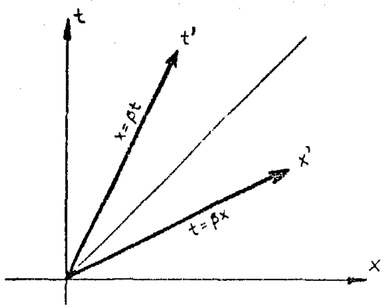
La relatividad del tiempo, es algo cierto, algo absoluto, por esa razón nuestro espacio tiempo no es ni Euclideano, si semieudoclideano, por lo pronto es la geometría seudoeuclideana la que ha explicado el comportamiento de los sistemas que se mueven con translación uniforme unos respecto de los otros.

Realmente pudimos haber empezado esta tésis tomando un espacio vectorial bidimensional, definiendo la métrica seudoeuclídea y obteniendo la transformación lineal de cambio de base, bajo la cual sea invariante la métrica, llegando así a la Transformación de Lorentz, sin hablar de conceptos físicos. Con esto quiero decir que este aspecto geométrico es lo suficientemente independiente del físico y verdaderamente axiomático, con unas hipótesis geométricas que estableceremos más adelante en forma más clara. Aunque esta parte geométrica es bastante independiente de la física, desde luego habríamos entendido mucho menos de lo que se trata la Transformación de Lorentz en el conocimiento del universo físico y palpado mucho menos de la trascendencia que tiene una teoría como la Relatividad.

Bueno , aunque hemos llegado a una parte geométrica importante de la teoría, internémonos más en ella para ver geométricamente mcuhos de los resultados que con el análisis físico se habían encontrado, como son la contracción del tiempo, de longitudes y la relatividad de la simultaneidad.

c)*RELATIVIDAD DE LA SIMULTANEIDAD*

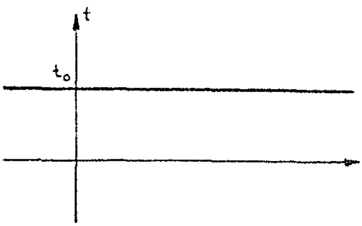
Para empezar preguntémonos: ¿Cómo se vé el sistema inercial S' en el espacio-tiempo bidimensional S? la respuesta realmente no es difícil. El origen del eje x' de

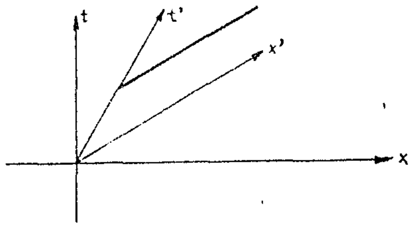


S' (o bien los eventos en S' con $x' = 0$) se mueve respecto a S de acuerdo a la línea de mundo $x = \beta t$ ya que sustituímos en la ecuación $x' = \frac{x-\beta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$ cuando $x' = 0$. Y esta línea de mundo es la recta con pendiente $\frac{1}{\beta}$ que pasa por el origen $(0,0)$ de S (pues los origenes coinsidieron en $t = 0 = t'$) como se vé en la figura. Esta recta es el eje t' pues el conjunto de esos eventos cumplen con $x' = 0$.

Ahora, el eje x' es el conjunto de eventos tales que en S' cumplen que $t' = 0$, y sustituyendo esto en la ecuación $t' = \frac{-\beta x+t}{\sqrt{1-\beta^2}}$ tenemos que son los eventos que cumplen que $t = \beta x$ y la recta con pendiente β es su línea de mundo de estos eventos. Como vimos un poco antes, los ejes ortogonales son (desde el punto de vista euclideano) simétricos a la recta de 45°.

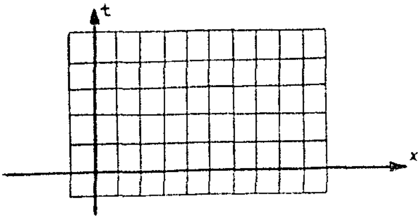
Todos los eventos que ocurren en un t_0 fijo en S, son representados por la recta paralela (desde el punto de vista euclideano) a la altura t_0, como se muestra en el dibujo. En cambio los eventos que ocurren en un tiempo t_1 en el sistema S' (es decir, los simultáneos en el tiempo t_1) está representada por la línea paralela al eje x', a la altura t_1, como se puede ver en el otro dibujo:

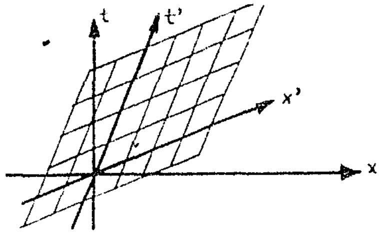




Y todos los eventos que en S están en la misma posición al transcurso del tiempo son representados por rectas paralelas al eje t, a la altura x_0, de tal forma que las líneas con x constante y t constante están representadas por una retícula como en el primer dibujo de abajo.

En cambio las líneas con t' constante y x' constante están representadas (vistas desde S) por el segundo dibujo.



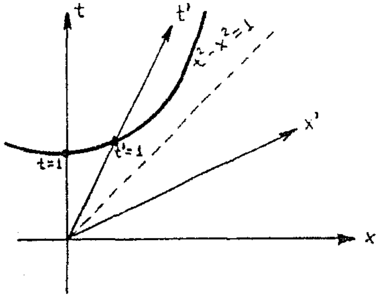


pero...¿cómo medir esas constantes?, ¿con qué unidad?, ¿dónde queda el 1 del tiempo y dónde el del espacio en cada sistema?.

Para verlo, encontremos la intersección de la circunferencia unitaria con el eje t y encontraremos la unidad temporal en S y con la intersección en el eje x encontraremos la unidad espacial en S.

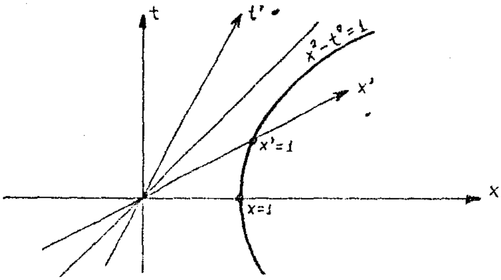
La circunferencia unitaria en la geometría seudoeuclideana tiene por ecuación: $x^2 - t^2 = 1$ (aquí $r^2 = 1$) y vista desde la geometría euclideana representa una hipérbola con focos en el eje t. Donde corta esta circunferencia el eje t, es la unidad de tiempo en el sistema S.

Ahora bien, como la distancia seudoeuclídea es invariante bajo Transformaciones de Lorentz, es decir, es la misma en cualquier sistema de referencia inercial, la circunferencia unitaria $t^2 - x^2 = 1$ en S es también la circunferencia unitaria en S', pues:



$1 = t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2$ Entonces para encontrar para encontrar la unidad del tiempo en el sistema S', nos fijamos donde esta circunferencia unitaria corta al eje t'. Así que, observando las unidades de tiempo en S y S' desde el punto de vista de la geometría euclideana, no "miden lo mismo" ambas unidades, pues la circunferencia unitaria euclidiana es otro lugar geométrico y serían encontradas ambas unidades cortando ésta los ejes t y t'.

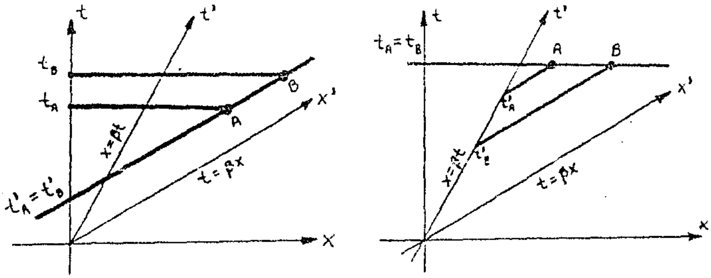
De una forma parecida se encuentran las unidades espaciales en S y S'. Considerando ahora la circunferencia unitaria $x^2 - t^2 = 1$ (la cual vista desde la geometría es una hipérbola horizontal) y sus intersecciones con los ejes x y x', encontramos ambas unidades como se observa en el dibujo.



Bueno, ya todo está listo para ver la relatividad de la simultaneidad, el retraso del tiempo y la contracción de longitudes.

Dos eventos A y B simultáneos en S', no lo son en S con $\beta \neq 0$, ya que aunque estén en la misma recta de simultaneidad en S' (es decir, paralela al eje x'), no están sobre una misma recta paralela al eje x, por tanto los eventos A y B marcan distintos tiempos en el eje t.

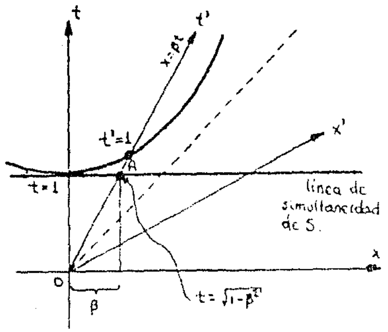
E inversamente, dos eventos A y B simultáneos en S no lo son en S' (con $\beta \neq 0$), porque el que estén sobre una misma recta paralela al eje x, no implica que estén sobre una misma recta paralela al eje x'.



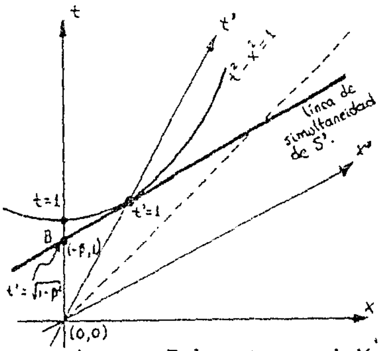
d) *RETRASO DEL TIEMPO*

Ahora el retraso del tiempo es observado desde ambos sistemas de referencia pues, como lo muestra el dibujo, cuando el reloj de S marca 1 y en <u>ese mismo momento</u> (es decir, simultaneamente) se observa desde S el reloj se S' y se vé que se ha retrasado o sea, que aún no llega a la unidad de S'.

Eso se observa pues los eventos S-simultáneos al de marcar $t = 1$ en el reloj del sistema S, son los que están sobre la recta paralela al eje x de altura 1 sobre el eje t y por tanto está el evento A donde corta esta línea de simultaneidad al eje t', dicho evento marca en el reloj de S' una cantidad menor a 1 como se observa en el dibujo. Podemos incluso decir qué tiempo marca el reloj de S' (visto desde el sistema S), sacando la longitud seudoeuclídea del evento A, desde el sistema S, aplicando la definición de la métrica, donde A tiene coordenadas en S de $(\beta, 1)$ ya que el eje t' es el lugar geométrico que cumple (en S) la ecuación $x = \beta t$ y con $t = 1, x = \beta$. Por tanto, la longitud de $(\beta, 1)$ es $\sqrt{1-\beta^2}$. Entonces cuando ha marcado 1 en el reloj de S, lo que se observa desde este sistema es que el reloj de S' señala $\sqrt{1-\beta^2}$ unidades de tiempo, el cual es menor que 1 (si $\beta \neq 0$), por tanto desde el sistema S el tiempo de S' se retrasa.



¿Y qué se observará desde S'?,¿que su S'-reloj se retrasó?, no. Si intuímos (bajo el Principio de la Relatividad) lo que pasará, diremos que S' no está de acuerdo con el que desde S se vea un retraso, porque en realidad desde el punto de vista de S' es el reloj de S el que se retrasa. Pero hagámos el análisis de S' sin el Principio de la Relatividad. De la misma forma, lo que se observa desde S' es el retraso del tiempo de S. Ya que cuando en el reloj de S' marca 1 y desde ese mismo sistema se observa simultaneamente el reloj de S, es decir, nos fijamos en el evento B de corte entre la línea de simultaneidad de S' a la altura $t' = 1$ con el eje t, como se puede observar en la gráfica:



El evento B tiene como coordenada temporal algo menor que 1, a saber $\sqrt{1-\beta^2}$ unidades de tiempo, ya que nuevamente nos fijamos en la longitud del evento B desde S' y B,el cual tiene coordenadas $(-\beta, 1)$ en el sistema S', pues S se mueve con velocidad $-\beta$ respecto a S'.

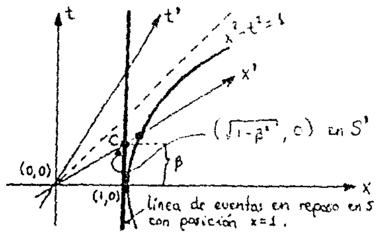
Así es que desde el sistema S', el reloj de S se ha retrasado, y ¿quién tiene la razón?, la única respuesta verdadera es, ambos la tienen, porque desde un sistema se mide según su simultaneidad y desde el otro también según la suya y no es algo absoluto eso de la simultaneidad como acabamos de ver.

e) *CONTRACCION DE LONGITUDES*

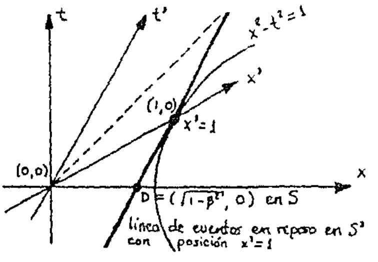
El retraso del tiempo en un sistema que se observa desde otro, tiene que influir necesariamente en las longitudes de las cosas. Veamos pues, la contracción relativista de estas geometricamente.

La unidad espacial en S y S' (como vara rígida), la encontramos geométricamente, intersectando la circunferencia $x^2 - t^2 = 1$ con el eje x y x' respectivamente. Ahora nos preguntamos, la unidad en S, ¿cuánto mide desde el sistema S'?

Para empezar, observemos que una vara rígida que mide una unidad en S, se encuentra en reposo respecto a este sistema.



Los eventos en reposo respecto a S en la posición 1, son los que tienen esa posición 1 con t variando, representados geométricamente por la recta paralela al eje t, a la distancia 1 (ver dibujo). Y que la vara rígida en S mida 1, es que la distancia entre dos eventos simultáneos separados, sea 1, por ejemplo el $(0,0)$ y el $(1,0)$. Pero esta vara rígida que está en reposo respecto a S, no lo está respecto a S' y si desde S' se quiere medir dicha vara, tendrá que ser midiendo la distancia entre dos eventos S'-simultáneos (o sea al mismo tiempo en S'), digamos en el tiempo $t' = 0$. Así es que la vara de S, o bien lo seventos con $x = 1$, no están en reposo respecto a S' y en el tiempo $t' = 0$ el evento que medirá la vara será el evento donde se intersecta el eje x' (o bien $t' = 0$) y la línea de eventos en reposo respecto a S con posición $x = 1$. A dicho evento le llamaremos C. Entonces la longitud del segmento de $(0,0)$ a C es lo que desde S' hay que medir en un momento ($t' = 0$), pues C está en reposo respecto a S. sacando otra vez la longitud seudoeuclideana del evento C, tenemos que es $\sqrt{1 - \beta^2}$, pues el eje x' es el conjunto de eventos que vistos desde S cumplen $t = \beta x$ y si $x = 1$, entonces $t = \beta$ y por tanto C tiene S-coordenadas $(1, \beta)$. Por tanto, desde el sistema S', la vara unitaria rígida de S mide $\sqrt{1 - \beta^2}$ el cual es menor que 1 (si $\beta \neq 0$) y por tanto se observará que la vara unitaria "realmente" mide menos desde su punto de vista. Analogamente, con un análisis similar la vara unitaria fija en S', se contrae respecto a S, con lo cual se vuelve a checar nuevamente el Principio de la Relatividad. Veámoslo más detenidamente. La vara rígida unitaria en S', se encuentra en reposo respecto a este sistema y se mide su longitud midiendo la que hay entre dos eventos S'-simultáneos, digamos el $(0,0)$ y $(1,0)$ en S'.



El conjunto de eventos que representan la terminación de la vara en reposo es geometricamente la línea paralela al eje t' que pasa por $x' = 1$. Dichos eventos no representan algo en reposo respecto a S sino más bien en movimiento y tendrá que tomar el inicio y el término de la vara de S', al mismo tiempo, es decir, deberá considerarse dos eventos simultáneos donde uno de ellos estará en la línea de eventos en reposo respecto a S' y con $x' = 1$, digamos en el tiempo $t = 0$, habrá entonces que considerar la longitud mide $\sqrt{1-\beta^2}$, obteniendo la longitud seudoeuclídea $D = (1, -\beta)$ cuyas coordenadas son respecto a S', D tiene esas coordenadas pues el eje x (visto desde S') cumple que $t' = -\beta x'$, (sustituyendo en la Transformación de Lorentz $t = 0$).

Entonces desde S, la vara rígida unitaria de S' se ha contraído, pues mide $\sqrt{1-\beta^2} < 1$. Por tanto la vara (y con ella todas las cosas que con ellas se midan en S) se ha contraído respecto a S' y alrevéz, la vara de S' vista desde S se ha contraído también. Y nuevamente, ambos puntos de vista son correctos, porque cada quien mide de acuerdo a su simultaneidad.

Hasta aquí, con la geometría del plano seudoeuclídeo, hemos podido recuperar esas consecuencias físicas de la relatividad del tiempo o de la constancia de la velocidad de la luz en cualquier sistema de referencia, que son: la relatividad de la simultaneidad, el retraso del tiempo y la contracción de longitudes.

Hemos llegado realmente a una parte muy importante de este trabajo, en el que redondeamos todo lo hecho hasta aquí. Hay que identificar muy bien dos formas de deducir lo mismo, una física y otra geométrica.

Se deducen la relatividad del tiempo, la Transformación de Lorentz, la relatividad de la simultaneidad, la contracción de longitudes y el retraso del tiempo, por lados independientes,

Por un lado, con un análisis puramente matemático del modelo geométrico que dá el plano seudoeuclídeo para la Relatividad Especial suceden de modo natural muchos resultados que son precisamente los obtenidos mediante hipóteis y leyes físicas.

3. ALGO MAS DE LA GEOMETRIA SEUDOEUCLIDEANA

a) *PARADOJA DE LOS GEMELOS*

Supongamos un laboratorio lejos de toda atracción gravitacional, es decir, flotando en el espacio estelar alejado de cuerpos celestes. Dos hermanos gemelos, Pedro y Sofía se encuentran en este laboratorio. Sofía viaja en una nave despegando de dicho laboratorio, acelerando rápidamente hasta alcanzar la velocidad de 0.8 (muy cercana a la velocidad de la luz). Con esta velocidad, Sofía viaja durante tres años, marcados con su reloj biológico: los latidos de su corazón. Al terminar estos 3 años, frena muy rápidamente y regresa también con velocidad constante de 0.8 durante otros 3 años. Se encuentran de nuevo los gemelos. Para Pedro el reloj biológico de Sofía marchó más lento. A saber, los primeros 3 años del viaje de Sofía fueron 5 años biológicos para él, usando la transformación de Lorentz que vimos anteriormente:

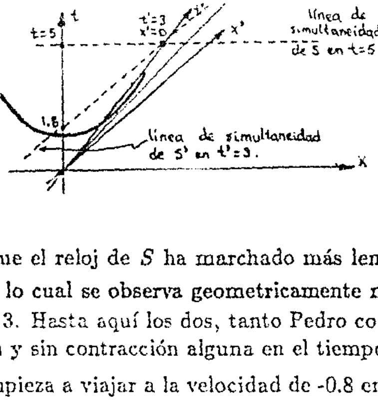
$$t = \frac{t' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{3 + (0.8)\cdot(0)}{0.6} = \frac{3}{\frac{6}{10}} = 5$$

donde (x,t) son las coordenadas del laboratorio (sistema inercial de Pedro) y (x',t') las de la nave de Sofía cuyo reloj es considerado con los eventos $(0,t')$.

Y también los 3 años de regreso en el viaje de Sofía a la velocidad de -0.8 equivalen a 5 años de Pedro. Por tanto, según Pedro, cuando se vuelven a encontrar, él tiene 10 años más de edad, mientras Sofía sólo 6. Es posible de acuerdo a la Teoría de Relatividad, Sofía podría decir que fué ella quien estuvo esperando y Pedro quien viajó de ida y regreso a la velocidad constante de 0.8, entonces sería ella la que tendría 10 años y Pedro 6. En conclusión cuando se encuentran Pedro sería más grande que Sofía y también Sofía más grande que Pedro, lo cual es imposible, ¿quién es más grande?, ¿dónde está el error en el razonamiento anterior?, o ¿hemos encontrado una inconsistencia en la Teoría de la Relatividad?. La solución a esta paradoja está en el análisis de la simetría entre los dos gemelos.

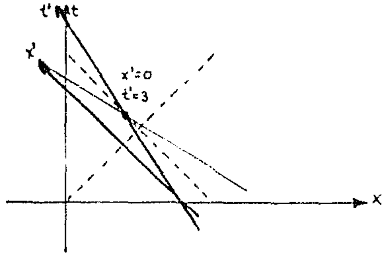
El laboratorio de Pedro, la nave flotando es un sistema en donde se cumplen las leyes de inercia, mientras que la nave de Sofía no lo es, porque en cuanto frena para regresarse a la velocidad de -0.8, los cuerpos nos siguen con la velocidad constante anterior respecto a ese sistema. O mejor dicho, no hay un sistema inercial fijo a la nave de Sofía, para todo el viaje, en todo caso lo hay uno para la primera parte del viaje (con velocidad constante 0.8) y otro para la otra parte de su viaje (con velocidad constante -0.8), la ida y el regreso respectivamente. Así que no es posible aplicar el Principio de Relatividad como Sofía lo hizo, pues no son sistemas inerciales entre sí en todo el viaje.

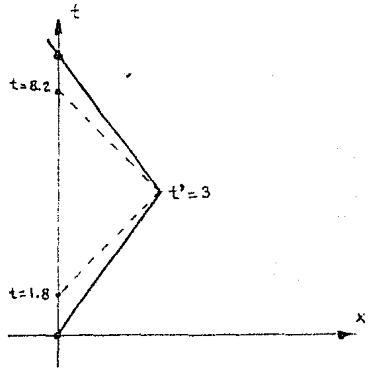
Analicemos un poco más esta paradoja,usando un poco de la herramienta geométrica anterior.



Grafiquemos el movimiento de la nave de Sofía (S') respecto al laboratorio de Pedro (S). En la primera parte del viaje, la nave lleva una velocidad de 0.8, entonces el eje t' es muy cercano a la recta que euclidianamente es la de 45°. Lo mismo que el eje x'. Cuando el reloj en S' marca $t' = 3$, el reloj en S marca $t = 5$ desde la observación de S, es decir, considerando la línea de simultaneidad de S. Analogamente respecto a S', cuando su reloj marca $t' = 3$, observa que el reloj de S ha marchado más lento, pues registra $\sqrt{1-\beta^2}t' = (0.6) \cdot 3 = 1.8 = t$, lo cual se observa geometricamente mediante la línea de simultaniedad de S' en $t' = 3$. Hasta aquí los dos, tanto Pedro como Sofía, pueden afirmar que el otro es más jóven y sin contracción alguna en el tiempo.

Pero, apenas la nave de Sofía gira y empieza a viajar a la velocidad de -0.8 en el evento $(0,3)$, cambia de sistema inercial (llamémosle S'' ahora), que desde S se observa como en el dibujo, pues no coincidieron los orígenes en $t' = 0 = t$, sino a partir del punto donde se quedó la nave y gira, la línea de mundo del reloj en S' es una recta de pendiente -0.8 . Y ahora desde S'', Sofía observará (con la línea de simultaneidad respectiva) que en $t' = 3, t = 8.2$, pues en los tres años que tardará el regreso tan solo transcurrirán 1.8 en S, observado esto desde la nave S' con lo cual S' observa nuevamente el retraso del tiempo de S. Y desde S, el reloj de S sigue marcando 5 años cuando la nave inicia su regreso, pues el giro y el frenado son casi instantáneos (o por lo menos en un tiempo despreciable). Entonces desde S el movimiento de la nave es así:

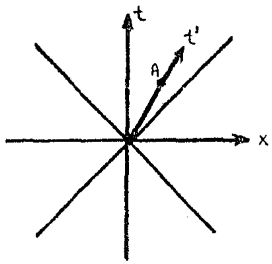




donde las líneas punteadas son las líneas de simultaneidad en S' y S''. Por tanto en el giro hubo un tiempo de 6.4 años que compensan esos diez años que Pedro sí marcó y Sofía no. Por lo que, cuando se vuelven a encontrar, Pedro tiene 10 más de edad y Sofía 6. Ella no pudo haber observado que ella tenía 10 años mientras Pedro 6 más, pues durante su viaje no estuvo en un mismo sistema inercial, es decir, el laboratorio S no pudo ser observado desde la nave como un sistema inercial. Pudiendo hacer la simetría mencionada al inicio usando el Principio de Relatividad.

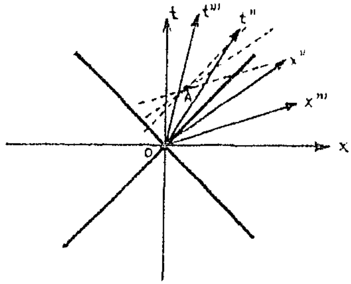
b) *ORDEN TEMPORAL Y CAUSALIDAD.*

Con el descubrimiento de la Relatividad del tiempo y con la ayuda de la geometría seudoeuclidiana, respondámos la siguiente pregunta: el orden temporal en que ocurren los sucesos, ¿es absoluto o relativo al sistema de referencia?. Para empezar a dar una respuesta, analicemos en el plano seudoeuclídeo las líneas de mundo de partículas en comparación con las de la luz.

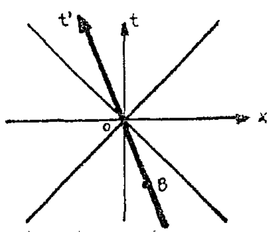


Un rayo del luz que parte del origen $(0,0)$ de un sistema S, en uno y otro sentido del eje x, tiene por líneas de mundo las rectas de $45°$ y $-45°$ respectivamente (visto esto euclidianamente). Se pueden observar tres regiones importantes. Una primera, limitada por las líneas de mundo de la luz y la parte positiva del eje t; la segunda limitada por las líneas de mundo de la luz y la parte negativa del eje t y las dos partes restantes son la tercera.

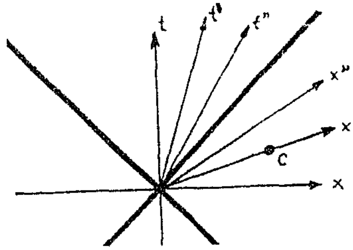
Si tomamos cualquier evento $A = (x_A, t_A)$, en la primera región podemos pensarlo como un evento de una partícula que se mueve con velocidad $\frac{x_A}{t_A}$, que como sabemos es menor que 1, es decir, A **está conectada causalmente** con el origen $O = (0,0)$, porque esa partícula no rebasa la velocidad de la luz. Más aún, como sabemos que la recta OA puede ser el eje t' de un sistema S' (que lleva velocidad de $\frac{x_A}{t_A}$ respecto a S), entonces sabemos que A ocurre en el mismo lugar que O separados sólo temporalmente respecto a S' y respecto al cual ocurre primero O y luego A. En este caso se dice que están separados por un intervalo **timelike**.



Respecto a S, A ocurre primero que O y también respecto a cualquier sistema inercial que coincida su tiempo cero con el de S, ya que, para que fueran O y A simultáneos al menos, el eje x del sistema debiera ser la línea OA, lo cual no es posible. En otras palabras el evento A ocurre después del evento O. Esto es para todo evento en esta región limitada por las líneas de mundo de la luz y la parte positiva del eje t, a la cual se le llama **el futuro absoluto del evento O**. No depende este futuro del sistema de referencia.



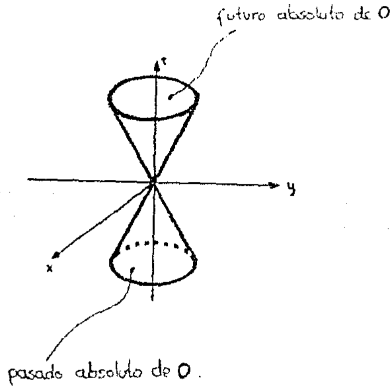
Analogamente, si tomamos cualquier evento B en la parte limitada por las líneas de mundo de la luz y la negativa del eje t, hay un sistema S' tal que su eje t' pasa por O y B, por lo que se dice que O y B están separados también por un intervalo **timelike**, sólo que en este caso B ocurre antes que O para cualquier sistema inercial de referencia cuyo evento O tenga coordenadas $(0,0)$ también. A esta parte se le llama **el pasado absoluto de O** y también está formada por eventos del movimiento de una partícula con velocidad negativa, pero no menor que -1, es decir, movimientos que no rebasan tampoco la velocidad o rapidéz de la luz. O y B también están conectados causalmente.



En cambio en la parte restante, los eventos que la forman son parte de movimientos de partículas que rebasan la velocidad de la luz, ya que si llamamos $C = (x_C, t_C)$ a uno de estos eventos, entonces $x_C > t_C$, por tanto, $\frac{x_C}{t_C} > 1$. El que exista una velocidad máxima está ligado con hecho de la causalidad, porque en el caso anterior decimos que O y C no están conectados causalmente, pues no hay movimiento ni señal que rebase la velocidad de la luz. A estos eventos como C se els llama separados por un **espacelike**, ya que existe un sistema inercial de referencia S', en cuyo eje x' O yC son simultáneos y sólo están separados espacialmente.

Para este evento C, existen también sistemas en los que el evento C ocurre antes que O y otros en los que C ocurre después de O. En el dibujo de arriba, respecto a S'' el evento ocurre antes que O y respecto a S alrevés, por tanto, esta parte del plano no es ni pasado ni futuro absoluto de O, respecto a todos los sistemas inerciales coincidentes en O.

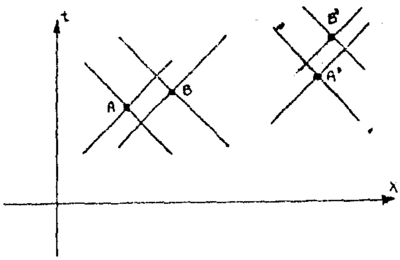
Si consideramos ahora partículas moviéndose no en una sola dirección, sino en todo un plano, entonces su diagrama espacio-tiempo sería tridimensional y el cono $t^2 = x^2 + y^2$ determinaría el futuro y el pasado absolutos de O como lo muestra la siguiente gráfica:



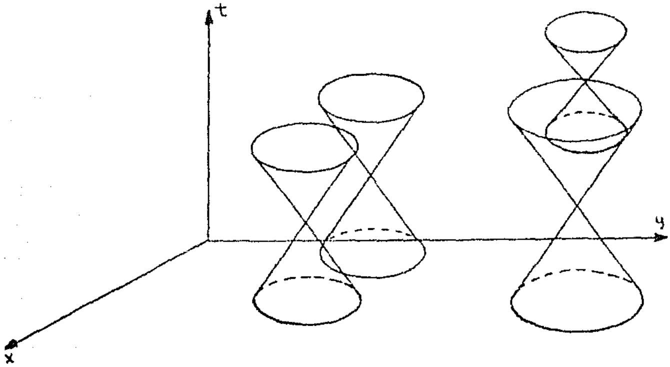
A dicho cono se le llama **el cono de luz** y está formado por todas las líneas de mundo de una señal de luz desde O en todas las posibles direcciones de un plano (no sólo en las del eje x). Nuevamenete el fututro y pasado de O están conectados causalmente con este evento.

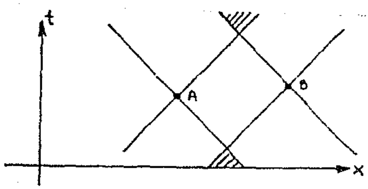
Para cada evento $M = (x_M, y_M, t_M)$, existe un cono de luz con las mismas propiedades de invariancia respecto al sistema inercial, debido también a la invariancia de la métrica seudoeuclidiana que en este caso es $x^2 + y^2 - t^2$. La ecuación del cono de luz para M es: $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (t - t_M)^2 = 0$, por lo que también es invariante respecto a cualquier sistema. Analogamente si consideramos el cono de luz de cuatro dimensiones.

Por tanto, la conexión causal entre dos eventos cualesquiera del espacio-tiempo es invariante respecto al sistema inercial.



Entonces, para cualesquiera dos eventos A y B que están conectados temporalmente, su orden temporal es ebsoluto. Sin embargo no están conectados causalmente, su orden temporal sí es relativo al sistema inercial de referencia. En el dibujo anterior y en el siguiente, el orden temporal de A y B es relativo, mientras que el de A' y B' es absoluto, ocurre A' antes que B'.





Además, el futuro absoluto respecto a un evento B que se encuentra en el futuro absoluto de otro evento A, es también parte de este futuro absoluto de A. Lo mismo con el pasado. Y todo esto es algo que no se puede garantizar sino hay conexión causal entre dos eventos. Sólo una parte del futuro absoluto de uno pertenece al futuro absoluto del otro e igual con el pasado. Con todo esto toma mucha más importancia la existencia de una velocidad máxima invariante respecto a cualquier sistema y es que su existencia dá el caracter de absoluto a cualesquiera dos eventos del espacio-tiempo.

4. ¿CUALES SON LAS HIPOTESIS DEL ANALISIS GEOMETRICO?.

Una hipótesis geométrica tanto en el plano semieuclídeo como en el seudoeuclídeo es pedir que los cambios de base sean lineales, es decir, que las transformaciones entre un sistema y otro sean lineales. Esa idea de buscarlas lineales es para que no "deformen" los espacios vectoriales, es un supuesto o un axioma de nuestro modelo geométrico. Esta hipótesis se presupuso a partir de definir el producto interior del espacio vectorial. Por tanto, es una hipótesis para ambas geometrías desarrolladas anteriormente.

La segunda hipótesis para ambas geometrías, es el pedir que bajo las transformaciones de cambio de base (o de coordenadas de S' a S), estas preserven la norma del espacio vectorial, es decir, que dichas transformaciones sean isometrías, mediante la invariancia del producto interior definido en cada geometría. Así, en la geometría seudoeuclídea la segunda hipótesis es la invariancia de:

$$\|(x,t)\| = |t|$$

en cualquier sistema inercial, es decir, $|t| = |t'|$ para cualquier sistema inercial S' con movimiento de traslación uniforme respecto a un sistema S. Y en la geometría seudoeuclídea la segunda hipótesis es la invariancia de:

$$\|(x,t)\| = x^2 - t^2$$

en cualquier sistema inercial, es decir, $x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2$ para cualesquiera dos sistemas S y S' con movimiento relativo de traslación uniforme.

Entonces, en cada geometría estableciendo dos hipótesis se ha logrado explicar geometricamente por un lado las ecuaciones de Galileo y varios resultados importantes en la mecánica clásica y por otro lado con otras dos hippotesis, explicar la Transformación de Lorentz y muchos aspectos de la Relatividad Especial, siendo esta explicación geométrica independiente del desarrollo teórico e hipótesis físicas presentadas en el capítulo II.

En el siguiente punto, último de este capítulo, haremos el análisis comparativo del aspecto físico y el geométrico y muy centralmente la equivalencia entre las hipótesis de ambos aspectos.

5. EQUIVALENCIA ENTRE LAS HIPOTESIS FISICAS Y LAS GEOMETRICAS.

En el capítulo anterior, establecimos las hipótesis físicas que resultaban ser la homogeneidad del espacio-tiempo, isotropía del espacio y el tiempo absoluto, en el caso de la mecñica clásica. En las hipótesis en cambio para la Teoría Especial de Relatividad, además de la homegeneidad e isotropía está la hipótesis del tiempo relativo.

Hicimos varias equivalencias entre el caracter del tiempo, la existencia o no de una velocidad máxima en la naturaleza y el caracter de la simultaneidad. Así el caracter relativo del tiempo fué equivalente al caracter relativo de la simultaneidad y a la existencia de una velocidad máxima en la naturaleza. Esta última característica de una cota de las velocidades fué equivalente a la constancia de dicha velocidad máxima en cualquier sistema inercial de referencia, es decir, invariante bajo la Transformación de Lorentz.

Para hacer el análisis comparativo entre el aspecto geométrico y el físico, veamos primero como las hipótesis físicas de homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo son equivalentes a la hipótesis geométrica de la linealidad de la transformación de cambio de base; segundo, que la hipótesis del caracter absoluto del tiempo es equivalente a la invariancia métrica semieuclídea y tercero, que la hipótesis de la constancia de la velocidad máxima en cualquier sistema inercial de referencia, es equivalente a la invariancia de la métrica seudoeuclídea.

Con la equivalencia entre las hipótesis físicas y las geométricas, podremos al final analizar los dos aspectos (físico y geométrico) traduciendo uno de ellos en el otro.

Veamos la equivalencia entre la homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo con la linealidad de la transformación de cambio de base, dicha equivalencia la analizamos en una dirección cuando nos propusimos encontrar las ecuaciones de Galileo y la Transformación de Lorentz.

La homogeneidad del espacio-tiempo y la isotropía del espacio es al afirmación de que no hay puntos ni direcciones preferenciales en el espacio-tiempo. Los resusltados físicos no dependen de si los experimentos se hacen en ciertas zonas del espacio, ni a partir de uno u otro momento, ni las leyes deben cambiar si se hacen en una cierta dirección del espacio, por ejmplo, no deben cambiar las leyes si el movimiento relativo de dos sistemas de referencia es en una u otra dirección del espacio. Ahora bien, si queremos encontrar una transformación T de un sistema inercial $S' = (x', y', z', t')$ en otro $S = (x, y, z, t)$, entonces, queremos encontrar $f_i(x', y', z', t')$ y $g_i(x', y', z', t')$ funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned} x &= f_1(x', y', z', t')x' + f_2(x', y', z', t')y' \\ &\quad + f_3(x', y', z', t')z' + f_4(x', y', z', t')t' \\ t &= g_1(x', y', z', t')x' + g_2(x', y', z', t')y' \\ &\quad + g_3(x', y', z', t')z' + g_4(x', y', z', t')t' \end{aligned}$$

dichas funciones no deben depender del evento (x', y', z', t') que tomemos, puesto que el espacio-tiempo es homogéneo e isotrópico el espacio, es decir, las f_i y g_i deben ser constantes respecto a x', y', z' y t', entonces

$$\begin{aligned} x &= Ax' + By' + Cz' + Dt' \\ t &= Ex' + Fy' + Gz' + Ht' \end{aligned}$$

donde A, B, C, D, E, F, G y H son constantes. Es decir, la transformación T es lineal.

Y biceversa, si las f_i y g_i son funciones constantes respecto a x', y', z' y t', entonces eso quiere decir que dicha transformación de cambio de coordenadas no depende del evento que tomemos del espacio-tiempo, ni de la dirección, es decir, el espacio-tiempo es homogéneo e isotrópico. Por tanto, la hipótesis física de homogeneidad e isotropía e isotropía es equivalente a la hipótesis de linealidad de $T : S' \to S$.

El caracter absoluto del tiempo, es decir $t = t'$, para cualesquiera sistemas inerciales $S = (x,t)$ y (x',t') , es claramente equivalente a la invariancia de la métrica semieuclídea $|t| = |t'|$, puesto que, los ejes t y t' en los sistemas S y S' respectivamente, fueron colocados en forma que sus partes positivas estuvieran en el mismo sentido, así que cuando uno es positivo el otro lo es y sólo cuando ésto pasa.

La equivalencia entre el caracter relativo del tiempo y la invariancia de la métrica seudoeuclídea, la haremos altravés de la equivalencia entre la constancia de la velocidad máxima respecto a cualquier sistema inercial y la invariancia de la métrica seudoeuclídea.

El que la velocidad (o rapidéz) sea constante en cualquier sistema, es lo mismo que decir que en un frente de onda de luz enviado desde el origen $(0,0)$ en ambos sistemas inerciales se cumple que:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{t^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x'^2+y'^2+z'^2}{t'^2} = 1 \quad \forall y,z$$

ya que hicimos a esa velocidad máxima de magnitud 1, entonces:

$$x^2+y^2+z^2 = t^2 \quad \text{y} \quad x'^2+y'^2+z'^2 = t'^2,$$

de donde

$$x^2-t^2 = -y^2-z^2 \quad \text{y} \quad x'^2-t'^2 = -y'^2-z'^2$$

y como las coordenadas y y z coinciden en ambos sistemas S y S', tenemos

$$x^2-t^2 = -y^2-z^2 = -y'^2-z'^2 = x'^2-t'^2,$$

por tanto, $x^2-t^2 = x'^2-t'^2$ para cualesquiera sistemas S y S'. Es decir, la métrica seudoeuclídea es invariante.

Y si ahora suponemos invariante l amétrica seudoeuclídea, es decir, $x^2-t^2 = x'^2-t'^2 \quad \forall y,z$, en particular para los de norma cero:

$$x^2-t^2 = 0 = x'^2-t'^2$$

de donde $x^2 = t^2$ y $x'^2 = t'^2$, o bien, $\frac{x^2}{t^2} = 1 = \frac{x'^2}{t'^2}$. Por tanto, $|\frac{x}{t}| = 1 = |\frac{x'}{t'}|$ que es la magnitud de esa velocidad máxima es 1 en cualesquiera sistemas inerciales de referencia con movimiento de traslación uniforme entre ellos. Con esto último, concluímos el caracter relativo del tiempo y la invariancia de la métrica seudoeuclídea y con ello la equivalencia entre las hipótesis físicas y geométricas.

Un esquema muy ilustrativo de la anterior equivalencia es el siguiente:

FISICAMENTE		GEOMETRICAMENTE
Homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo	$\Longleftrightarrow$	$T : S' \to S$ lineal
t absoluto	$\Longleftrightarrow$	$\lvert t\rvert = \lvert t'\rvert$ métrica semieuclídea invariante
t relativo	$\Longleftrightarrow$	$x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2$ métrica seudoeuclidiana invariante

Así es que cuando se habla en el análisis físico de homogeneidad e isotropía, es buscar transformaciones de cambio de base, al pedir que se preserve la norma del espacio vectorial, es estar pidiendo caracter absoluto o relativo del tiempo y al deducir muchos teoremas en la geometría semi o seudoeuclídea, es obtener las consecuencias del caracter del tiempo. Por eso, el retraso y la contracción de longitudes en la geometría seudoeuclídea, preservando su métrica, son las obtenidas por la relatividad del tiempo y la Transformación de Lorentz en física, no es más que el cambio de coordenadas en dicha geometría. Es decir, el aspecto geométrico tanto semieuclídeo como el seudoeuclídeo, son buenos modelos geométricos del aspecto físico de la mecánica clásica y de la Teoría Especial de la Relatividad respectivamente.

Para terminar con el análisis de las hipótesis, haremos dos observaciones importantes. La primera es que el Principio de Relatividad (segundo postulado de Einstein), realmente no es un postulado en el sentido estricto de decirle axioma o hipótesis. Es una propiedad que como se puede observar en toda esta tesis, se cumple en todo momento, es decir, toda la teoría desarrollada hasta el final, no tiene contradicción con este principio, como parecía en la historia contradecirse con la constancia de la velocidad máxima. El Principio de Relatividad no es una hipótesis extra, ni en el análisis físico ni en el geométrico, es una consecuencia de las hipótesis y al ponerlo desde el inicio es para mí una idea de creer mucho en la armonía de la naturaleza, o mejor dicho, querer que la teoría buscada para resolver los problemas históricos presentados en aquella época a la mecánica clásica, no esté en contraste con esa armonía esperada de la naturaleza.

La segunda observación sobre las hipótesis es la siguiente. Aún cuando se demostró la equivalencia entre el tiempo relativo y la exitencia de una velocidad máxima en la naturaleza, en ningún momento aparece la necesidad de que sea ésta la de la luz, a la cual por medio de coordenadas geométricas se hizo 1. El análisis pudo haberse hecho exactamente igual si dicha velocidad máxima hubiera sido otra. Tanto el análisis físico como el geométrico hechos aquí, habrían quedado igual haciendo esa velocidad máxima también 1. Por supuesto que no afirmo que la velocidad de la luz no es la velocidad máxima, se entiende perfectamente que el análisis teórico debe checar con el experimental de donde se tiene la idea de que la velocidad máxima es la de la luz.

CAPITULO IV

UN POCO DE RELATIVIDAD GENERAL

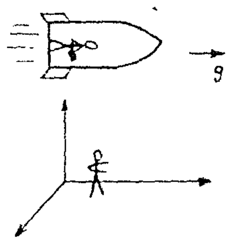
1. ¿CUALES SON LAS HIPOTESIS FISICO-GEOMETRICAS DE LA TEORIA GENERAL DE LA RELATIVIDAD?

Todo lo que hemos desarrollado anteriormente, toda esa importante Teoría de Relatividad Especial que realmente vino a revolucionar a la física, se hizo en base al análisis únicamente de sistemas de referencia inerciales que se mueven unos respecto a otros con velocidad y dirección constante, pero... ¿qué pasa si los sistemas de referencia se aceleran unos con respecto a otros?, ¿qué tanto más va a cambiar la física?, ¿es realmente una generalización la Teoría General de la Relatividad?.

Estas preguntas parecen naturales con la idea de generalizar la Relatividad Especial, pero realmente no se vé nada fácil resolverlas, sobre todo si tanto la aceleración como la dirección de un sistema respecto a otro son no constantes; abarcaría todos los sistemas de referencia posibles, incluyendo los inerciales con movimiento de traslación uniforme. Sin embargo, algo que hay que reconocer y es que aunque la Relatividad Especial es un caso particular de este análisis más general, es algo que por sí mismo tiene un gran valor, una vida propia que se debe analizar por separado.

Abramos pues, el análisis de esta generalización que nos dará pie a la Teoría General de la Relatividad. Las preguntas anteriores significan que, si desde un sistema de referencia S, se observan determinados fenómenos físicos, ¿qué se observará desde un sistema acelerado?, (no necesariamente con aceleración y dirección constante). Cuando nos preguntamos esto en la Relatividad Especial, la respuesta fué por medio de la Transformación de Lorentz. Si en un sistema inercial, un evento tenía coordenadas (x, y, z, t), podíamos saber sus coordenadas respecto a cualquier sistema que se moviera con velocidad y dirección constante respecto al primero. Y resultaban ser leyes físicas entre los sistemas, aquellas propiedades que se cumplían en cualquiera de esos sistemas, es decir, aquellas propiedades invariantes bajo la Transformación de Lorentz.

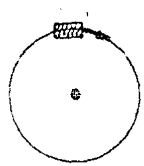
Con esta transformación, hacíamos equivalentes a todos estos sistemas, con lo cual se reestablecía el Principio de Relatividad. Pero ahora con tantas formas posibles de movimientos entre los sistemas, ¿podrá hablarse de alguna equivalencia entre todos ellos?, ¿cómo sería dicha equivalencia si existiera?. Analicemos un poco. Consideremos por ejemplo un sistema de referencia con dirección y rapidéz constante respecto a otro. Pensémoslo como un cohete que vemos desde un determinado lugar de la Tierra, el cual está lejos de la fuerza de atracción de cualquier cuerpo celeste. Supongamos que esta nave no tiene ventanas, para que los pasajeros no pudieran saber en donde están. Dada la aceleración del cohete, los pasajeros sentirán presión sobre la pared opuesta a la dirección del movimiento y la llamarán "suelo", mientras que a la pared de en frente la llamarán "techo". Si uno de ellos ha estado sosteniendo un paquete y ahora lo suelta (sin empujarlo), éste "caerá al suelo" (observado desde el sistema de referencia del cohete), que es lo mismo que decir que la pared llamada suelo alcanza al paquete (visto esto desde el sistema en la Tierra respecto al cual se mueve el cohete). La masa del cuerpo es irrelevante aquí, pues el suelo lo alcanza siempre con la misma aceleración y por tanto se cumple que "todo cuerpo cae con la misma aceleración", lo cual pasa en la Tierra. Ahora, si el pasajero dá un empujón al paquete, este seguirá una trayectoria parabólica, desde su punto de vista, debido a la aceleración de su nave.



Entonces, si la aceleración del cohete fuera de 9.8 m/seg, los pasajeros podrían creer realmente que están dentro de un laboratorio en reposo sobre la Tierra, en el cual actúa la fuerza de gravedad sobre todos los objetos dentro de él. O mejor dicho, los pasajeros no tienen por medio de experimentos dentro de su nave, manera de saber si los fenómenos que observan se deben a la aceleración de su laboratorio o a que están bajo un campo gravitacional.

Decimos aquí campo gravitacional y no fuerza de gravedad por esa importante observación que hizo Einstein a que la atracción de una cualquier partícula sobre cualquiera otra, no es una fuerza, sino más bien un campo generado alrededor de ella, un campo atractor a su centro; análogo al campo magnético generado por un imán.

De la observación del cohete acelerado, podemos decir que aceleración y presencia de campo gravitacional resultan ser equivalentes. Y parece ser cierto en general. Un sistema acelerado con movimiento circular (por ejemplo un juego mecánico de la feria), puede ser pensado como un sistema con un campo gravitacional puntual dentro del círculo, el cual hace que la pared opuesta a la dirección del movimiento, sea el suelo, aunque no tan uniforme (en cuanto a atracción) como el del cohete.

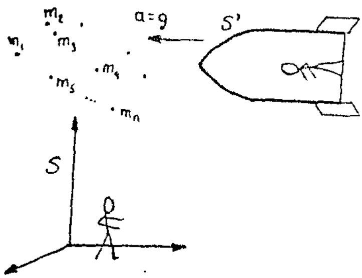


Más en general, para cualquier movimiento arbitrario de una partícula, se puede hacer equivalente dicho movimiento, al que tiene una partícula bajo un campo gravitacional por muy raro que sea.

Este es el primer principio que toma la Teoría General de Relatividad, para hacer equivalentes todos los sistemas de referencia. Todos son equivalentes a un sistema de referencia con presencia de un campo gravitacional.

Si el sistema de referencia es como los utilizados en la relatividad Especial, con movimiento de traslación uniforme e inercial, es decir, donde un cuerpo en reposo permenece en dicho estado, hasta que una fuerza externa lo saque de ese reposo. Y un cuerpo al que se le dió un empujón, permanece con rapidéz y dirección constante, hasta que una fuerza externa lo saque de este estado uniforme. En ambos casos se vé que sólo podrían ocurrir si el campo gravitacional es nulo.

Veamos matematicamente cómo es equivalente un sistema acelerado (con dirección y aceleración constante), a uno con la presencia de un campo gravitacional, analizando más detenidamente el ejemplo del cohete.



Sea S el sistema de referencia inercial fijo en la Tierra y S' el sistema no inercial fijo al cohete. Llamemos $X = (x, y, z)$ a las coordenadas espaciales de un evento respecto al laboratorio S y $X' = (x', y', z')$ respecto a S'. Hemos de aclarar que X y X' son funciones de t.

Como S' está acelerando respecto a S, con dirección constante y aceleración g, entonces la relación que guardan ambos sistemas es:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2X'}{dt^2} + g$$

Analicemos cómo se observan m partículas que están en reposo respecto a S. Vamos a deducir las ecuaciones en donde se refleje que desde el sistema acelerado S', se detecta la presencia de un campo gravitacional.

Llamemos $m_1, m_2, ..., m_n$ a las masas de las partículas y $X_i = (x_i, y_i, z_i)$ y $X'_i = (x_{i'}, y_{i'}, z_{i'})$ a su posición en S y S' respectivamente con $i = 1, ..., n$.

Como dichas partículas se encuentran en reposo respecto a S (flotando respecto a dicho sistema), entonces las únicas fuerzas que actúan sobre las partículas, son las fuerzas de atracción entre ellas. Si llamamos F_{ij} a la fuerza de atracción que la partícula i ejerce sobre la j, entonces la fuerza ejercida sobre la partícula j es la suma de todas las fuerzas atractoras a ella, o sea:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ij} \quad \text{con } i \neq j$$

y esto para cada partícula, es decir,

$$\sum_{i \neq j} F_{ij} \; para \; cada \; j = 1, ..., n$$

Y dado que por la segunda ley de Newton la fuerza total ejercida sobre una partícula es el producto de su masa por su aceleración (o bien, la segunda derivada respecto a t de la posición), entonces:

$$\sum_{i\neq j} F_{ij} = m_j \cdot \frac{d^2X_j}{dt^2}$$

(fuerza total ejercida sobre la masa j = masa j × su aceleración respecto a S = la suma de fuerzas que interactuan en la masa j).

Una observación es que si las partículas se encuentran en reposo respecto a S o incluso con velocidad constante, su aceleración es cero y por tanto las fuerzas interactuando están en un "equilibrio" que permiten ese reposo o esa velocidad constante.

Como ya dijimos, la relación que guardan S' y S es:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2X'}{dt^2} + g$$

que aplicadas a las partículas es:

$$\frac{d^2X_j}{dt^2} = \frac{d^2X'_j}{dt^2} + g$$

para cada $j = 1, ..., n$, entonces lo que desde S' se observará de las partículas será:

$$m_j\left(\frac{d^2X'_j}{dt^2} + g\right) = \sum_{i\neq j} F_{ij} \text{ para cada } j = 1, ..., n$$

es decir,

$$m_j \cdot \frac{d^2X'_j}{dt^2} + m_j g = \sum_{i\neq j} F_{ij} \text{ para cada } j = 1, ..., n$$

que es lo mismo que:

$$m_j \cdot \frac{d^2X'_j}{dt^2} = \sum_{i\neq j} F_{ij} - m_j g \text{ para cada } j = 1, ..., n$$

o sea que desde S' (el cohete) se observa que la fuerza total que está actuando sobre cada partícula es además de las que interactúan entre ellas, la fuerza del campo gravitacional que actúa sobre cada partícula con aceleración $-g$.

Por tanto, lo que desde un sistema inercial S se observa con reposo o velocidad constante, desde un sistema acelerado S' (respecto a S), se observa la presencia de un campo gravitacional.

No esperábamos que la equivalencia fuera de S con S', pues uno es inercial y el otro no, sino más bien que fuera equivalente un sistema S' acelerado respecto a S y uno que en él mismo esté presente un campo gravitacional.

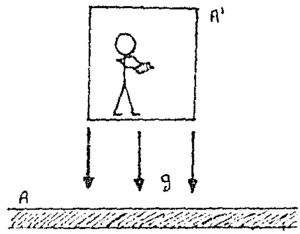
Entonces, es lo mismo estudiar sistemas de referencia con aceleración y dirección constante, que sistemas con presencia de un campo gravitacional uniforme (es decir, con fuerza de gravedad constante y en una sola dirección).

Esta equivalencia se establece más en general aunque no se demuestra. Es lo mismo estudiar los sistemas de referencia acelerados (con dirección y aceleración arbitrariamente variable), que los sistemas con la presençia de un campo gravitacional (no necesariamente uniforme). Y es por esto por lo que se abandonará la idea del sistema de referencia, para dar pie al análisis de un nuevo tema: gravitacion.

Pero el Principio de Equivalencia no está aún establecido con esto. Ahora con la mirada puesta en los sistemas de referencia con la presencia de un campo gravitacional, nos preguntamos: ¿qué pasa con una partícula (o lo que sea) cayendo libre en la presencia de un campo gravitacional?.

Nos interesan las cosas en caida libre, porque es lo que estaría en "reposo o en movimiento de traslación uniforme" de no ser por la presencia del "campo gravitacional", con la misma idea que en relatividad Especial al pedirles a los sistemas que fueran inerciales. Un poco más adelante hablaremos de la caida libre como generalización de la ley de inercia.

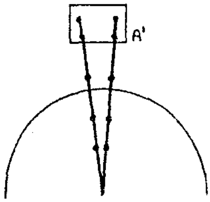
Supongamos un sistema A con la presencia de un campo gravitacional y un sistema A' que está en caida libre en este campo. Para poder imaginarlo mejor, pensemos que un elevador sube muchísimos kilómetros, de repente se detiene y cae. Sobre él solo actúa la fuerza del campo gravitacional. ¿Qué pasa en ese elevador?, es decir, ¿qué se observa desde el sistema A'?.



Como todo lo que está dentro del elevador también está bajo la presencia del campo, será igualmente atraído y todas cosas dentro estarán en reposo respecto al elevador (pues todos estan "cayendo" según la observación desde A). Es más se cumple la ley de inercia en el elevador, ya que, si por ejemplo alguien estuviera sosteniéndo un cuerpo y de repente lo suelta suavemente sin empujarlo, el cuerpo permanecerá en reposo (visto desde A') y si lo empujara en dirección paralela al piso, dicho cuerpo tendría velocidad y dirección constante (aún cuando desde A se observe que sigue cayendo aceleradamente). En ambos casos estos cuerpos permanecerán así, hasta que una fuerza externa los saque de ese estado. Por tanto, A' es un sitema de referencia inercial (pues se cumple la ley de inercia, aún cuando respecto a A va con la aceleración ocacionada por el campo gravitacional). Y en este elevador ocurrirán entonces los mismos sucesos que en una nave que se encuentre flotando en el espacio lejos de toda atracción material. El estado sin peso de las cosas igualmente se puede deber a la no presencia de un campo gravitacional o bien a la caida libre de un sistema bajo un campo gravitacional. En otras palabras, un sistema en caida libre dentro de un campo gravitacional es equivalente a un sistema inercial sin presencia de campo gravitacional alguno.

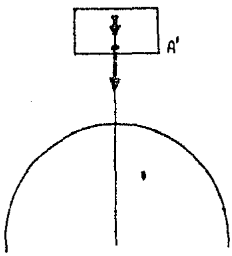
Entonces, para aquella partícula que caía libremente en un sistema A con la presencia de un campo gravitacional, podemos asegurar que hay un sistema inercial A' en donde la partícula se encuentra en reposo y en cuyo sistema no está presente ningún campo gravitacional. Pero, aquí sólo hemos analizado el caso en el que el campo gravitacional que está presente en A es uniforme, eso quiere decir con aceleración y dirección constante. Y ¿qué pasa si el campo no es uniforme?, que es el caso más general.

Para analizar un campo gravitacional no uniforme, podemos usar el ejemplo de la Tierra cuyo campo generado está en dirección de su centro y su magnitud depende unicamente del radio. Así es que, analizando ahora un sistema de referencia A' en caida libre, de tal forma que su suelo sea perpendicular a la dirección de su caida libre como se muestra en la figura, ¿podemos asegurar que este sistema es inercial como en el caso del elevedor que caía?



Bueno, lo primero que debemos aclarar, es que al analizar ese caso del elevador y suponer un campo gravitacional uniforme, estabamos suponiendo que el suelo "atraía igual en cualquier lugar", por lo que la dirección de la caida libre era siempre perpendicular al suelo, por ello a cualquier altura la fuerza de atracción del campo era de la misma magnitud. Pero esto es sólo una aproximación, pues si ahora dentro del sistema que estamos analizando, consideramos dos partículas en caida libre a la misma distancia del centro de la Tierra, como ambas son atraídas hacia el centro de ésta, entonces sus trayectorias de caida libre se cortan en el centro de ésta y en consecuencia afirmamos que no son paralelas, por lo que en cuanto van "cayendo" tanto las partículas como el sistema, estas se van acercando cada vez más (esto observado tanto desde el mismo sistema A' como desde uno fijo en la Tierra), como se observa en el dibujo de arriba.

Así es que no podemos afirmar en principio que el sistema en caida libre A' es equivalente a un inercial y sin presencia de campo gravitacional, porque esto que acabamos de analizar en A' no ocurre en un inercial.



Y más aún, si observamos ahora que el campo no necesariamente tiene una atracción de magnitud igual en todos puntos (como es el caso de la Tierra), que depende de la altura, veremos que tampoco A' puede ser equivalente a un sistema inercial por esta otra razón. Si en lugar de tomar dos partículas a la misma distancia del centro, las tomamos a distintas distancias, pero sobre un mismo rayo desde el centro de la Tierra, tal como se observa en el dibujo, el campo gravitacional "atrae" con una mayor magnitud a la partícula más cercana. Por tanto, si A' y las partículas estan cayendo libremente, entonces desde A' mismo se observará que las partículas no estan en reposo, sino una acelera con respecto a la otra, cosa que no pasa en un sistema inercial sin la presencia de un campo gravitacional.

A ambos efectos, tanto el que dos partículas en caída libre no viajen en trayectorias paralelas como el que tengan aceleraciones unas con respecto a otras se les llama efectos tidales. O mejor dicho, a los efectos que un campo gravitacional no uniforme tiene que en cada punto varía su dirección y magnitud, se les llama **efectos tidales**. Por tanto, para cualquier partícula en caida libre respecto a un sistema con presencia de un campo gravitacional, no podemos asegurar que exista un sistema inercial en donde las partículas estén en reposo y donde no esté presente un campo gravitacional. Para campos gravitacionales no uniformes no podemos asegurarlo, a menos que lo permitamos con cierto margen de error, es decir, así como la Tierra se puede considerar aproximadamente como un sistema con un campo gravitacional uniforme, así se puede afirmar que para un cierto grado de aproximación, sí existe un sistema inercial donde las partículas estan muy aproximadamente en reposo y el campo gravitacional sea muy pequeño y poderse despreciar. Esto es lo que establece precisamente el tan buscado **Principio de la Relatividad**, el cual será la **primera hipótesis** fuerte en este análisis de la Relatividad General:

> *"Para cada punto del espacio-tiempo (es decir, para cada evento) y para un grado de aproximación, existe un sistema de referencia en el cual en una cierta región de espacio y para un cierto intervalo de tiempo (es decir, en una vecindad del evento suficientemente pequeña), los efectos de gravitación son despreciables y el sistema es inercial en ese grado de aproximación especificado..."*.

Este principio es realmente importante, en el sentido en el que está analizando todos los casos de movimiento libre de partículas. Si el campo gravitacional es nulo, las partículas cumplen con la ley de inercia en el sistema inercial (que existe, pues es cualquiera en donde esas partículas están en movimiento de traslación uniforme) y las leyes que rigen a este sistema quedan explicadas por la Relatividad Especial y la goemetría euclidiana o de Minkowski. Y si en el otro caso el campo gravitacional no es nulo, de todos modos existe un sistema localmente inercial en donde se puede despreciar la presencia de campo gravitacional.

Por tanto, el analizar el movimiento libre de partículas localmente, es lo mismo que analizar el problema como si estuviera en el caso de la Relatividad Especial con estas partículas cumpliendo la ley de inercia. Es tanto como decir que el análisis del espacio-tiempo gravitacional, es localmente el análisis de la Relatividad Especial.

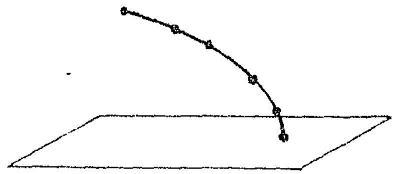
Pero ¿por qué analizamos la caida libre en el espacio-tiempo?, ¿cómo es que se pueden ver partículas cayendo libremente como partículas que cumplen la ley de inercia, localmente hablando?

Vamos a intentar analizar que pasaba en la Relatividad Especial y poder así ver la caida libre como una generalización del movimiento de traslación uniforme.

Cuando consideramos los sistemas de referencia en Relatividad Especial y al pedirles que cumplieran con la ley de inercia, se analizaban partículas (o cualquier objeto) que se encontraban en reposo respecto al sistema, o bien, en movimiento de traslación uniforme, ¿qué estaban cumpliendo con esto dichas partículas?. Ahí en ese sistema no esta presente ningún campo gravitacional, pero y si hubiera habido, ¿cómo viajarían esas partículas?, ¿seguirían en reposo? o ¿en línea recta?.

Comparemos un poco, si en un sistema inercial sin la presencia de un campo gravitacional, se suelta una partícula sin empujarla, ésta permanecerá en reposo respecto a dicho sistema, en cambio, si estuviera presente un campo gravitacional, uniforme por ejemplo, ésta seguiría una línea recta en la dirección del campo. Estaría en reposo de no ser porque hay un campo gravitacional. En otras palabras, esa caida libre es lo más quieta que puede estar una partícula en dicho sistema con el campo gravitacional presente.

Ahora, si a la partícula se le dá un empujón de tal forma que en el sistema inercial sin campo gravitacional alguno, viaja con dirección y velocidad constante indefinidamente (si eliminamos la fricción y resistencia del aire), en el sistema con la presencia de un campo graviacional uniforme esta partícula seguirá una trayectoria parabólica, muy parecida a la del tiro parabólico que experimentamos en la Tierra aún cuando este campo gravitaconal no es uniforme.



También en este caso de empujar la partícula, se observa que, en el sistema con campo gravitacional presente, esa partícula es lo más uniforme que puede ir y llevaría velocidad y dirección constante de no ser por el campo existente y aunque lleva la aceleración del campo la la partícula en sí no lleva aceleración, lo cual cuando no hay campo gravitacional alguno, es más fácil distinguir con el movimiento de traslación uniforme.

En ambos casos de caida libre o tiro parabólico, empujando o no la partícula y con y sin presencia de un campo gravitacional, la aceleración de la partícula misma, es cero, en el sentido en el que, si no fuera por la aceleración que el campo le pone, la partícula actuaría cumpliendo la ley de inercia. Y más en general (con el campo gravitacional no necesariamente unforme), estos movimientos de partículas también llevan aceleración cero en sí mismas, aún cuando el campo les obligue a llevar aceleración. Dicho todo esto más formalmente, si a estas partículas se les observara desde un sistema de caida libre, cumplirán en este la ley de inercia, además de que en dicho sistema no estará presente ningún campo gravitacional. Esto es lo que afirma el Principio de Relatividad que mencionamos anterirormente.

Pero mencionamos esto de aceleración cero, no sólo para decir de otra manera el principio, sino para lo siguiente:

Una **segunda hipótesis** hecha por Einstein en la Teoría de la Relatividad General es la afirmación de que las partículas en caída libre viajan en las geodésicas del espacio-tiempo. Esta afirmación tiene como fondo precisamente ese análisis de que las partículas en caida libre dentro de un campo gravitacional, tienen en sí mismas aceleración cero y como las curvas que dentro de una superficie tienen aceleración cero, son precisamente las curvas geodésicas, entonces se afirma que las trayectorias de caida libre son curvas geodésicas (ver apéndice geométrico para la definición de estas curvas).

Realmente esta hipótesis es digna de analizarse con mucha más calma, pues involucra sobre el espacio-tiempo una característica geométrica fuerte. ¿Cómo que geodésicas en el espacio-tiempo?, ¿se está suponiendo que el espacio-tiempo es una variedad?, ¿con qué métrica?, ¿con qué curvatura? y ¿qué sería eso de la curvatura en el espacio-tiempo?. Sí, la hipótesis anterior abre muchas preguntas que no se vé fácil contestar.

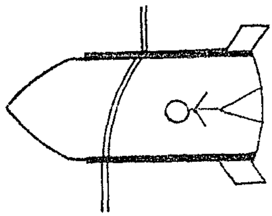
Para empezar, es cierto que al afirmar que las partículas en caida libre viajan en geodésicas, se supuso antes que el espacio-tiempo es una variedad, por lo demás, de cuatro dimensiones y es esta la **tercera hipótesis** que se considera para la Teoría General de la Relatividad, mejor llamada Teoría de Gravitación.

Y sobre la cuestión de la métrica que tiene dicha variedad, podemos decir que, como el Principio de la Relatividad afirma que para cada evento en el espacio-tiempo , hay un sistema aproximadamente inercial con campo gravitacional despreciable, cuyas leyes explicamos anteriormente con la geometría seudoeuclidiana, esto nos dá la idea siguiente: si definieramos en el espacio tangente a la variedad en un punto o evento de dicha variedad, la métrica seudoeuclideana, entonces así la variedad seudoriemanniana sería localmente como el espacio tangente seudoeuclídeo con la métrica:

$$\|(x, y, z, t)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - t^2}$$

el cual se identificaría con las leyes que rígen en un sistema inercial sin un campo gravitacional, que con un cierto grado de aproximación son como las leyes que rígen en un sistema con presencia de campo gravitacional. Por todo esto, la hipótesis tercera es que el espacio-tiempo es una 4-variedad seudoriemanniana.

Pero al hablar de variedad y de sus geodésicas en ella, podríamos entonces preguntarnos: ¿y qué curvatura tiene dicha variedad del espacio-tiempo? y ¿a qué se debe esta curvatura físicamente hablando?.

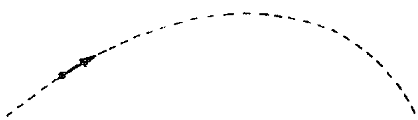


Imaginemos el siguiente experimento. En una nave que viaja con aceleración y dirección constante, se atraviesa un rayo de luz perpendicular a la dirección del movimiento de la nave. El rayo entra por una ventana y sale por otra. Dada la aceleración de la nave, en el tiempo en el que el rayo la atraviesa, ésta ha recorrido una distancia distinta de cero por lo que desde dentro de la nave se observará que el rayo se curvea. Entonces, como es equivalente un sistema acelerado y uno con presencia de un campo gravitacional, este efecto de haberse curveado el rayo de luz es consecuencia de la aceleración del sistema de referencia o bien por la presencia del campo gravitacional. Aunque este curvearse es observado en el espacio , podemos asegurar que se curvea en el espacio-tiempo también, ya que, una trayectoria curveada en un espacio de cierta dimensión, seguirá siendo curveada en el espacio de una dimensión mayor.

Con el experimento anterior queremos dar una motivación a la **cuarta hipótesis** que es que la curvatura del espacio-tiempo se debe o está asociada a la presencia del campo gravitacional.

En un sistema inercial sin la presencia de un campo gravitacional, la luz viaja con dirección y rapidéz constante, por tanto en un sistema donde está presente un campo gravitacional viaja en geodésicas. Entonces, ese curvearse de la luz se debe a la curvatura de esa variedad seudoriemanniana del espacio-tiempo, ya que, las geodésicas en una variedad son las trayectorias "lo más derechas posible". Dicho de otra forma, como la trayectoria de la luz por sí misma no se curvea, entonces ese curvearse es debido al campo gravitacional.

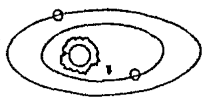
Otros ejemplos que pueden ayudar a ilustrar esta hipótesis, está en el tiro parabólico. Una bala que recibe un impulso seguirá una trayectoria recta y no curva, sino fuera por la atracción del campo gravitacional sobre ésta, ya que la bala también viaja en geodésicas de espacio-tiempo.



Un ejemplo más de todo esto está en el movimiento de la luna alrededor de la Tierra o de los planetas alrededor del Sol. Desde que Newton en su *Principia Matamatica*, establece la Ley de la Gravitación Universal:

> *"...cada partícula en el universo atrae a cualquiera otra partícula de tal forma que la fuerza entre las dos está a lo largo de la línea entre ellas y tiene magnitud proporcional a el producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas..."*.

se puede comprender que el movimiento de los planetas se debe a la atracción de los cuerpos celestes como el Sol, o bien, que el campo gravitacional que genera el Sol es la causa por lo que los planetas giran alrededor de éste.



Los planetas estarían en reposo de no ser por la presencia de este campo que los hace seguir trayectorias elípticas (según las leyes de Kepler, siglo XVI). Y la curvatura de dicha elipse depende de la distancia al Sol, mientras más cerca esté un planeta del Sol , más fuerte es la atracción del campo gravitacional sobre dicho planeta y más curvatura tiene la elipse que sigue su movimiento.

Así es que, parece bastante razonable postular esta cuarta hipótesis de que la curvatura del espacio-tiempo se debe a la presencia de un campo gravitacional ocacionado por la materia misma. Con esto último, se puede palpar un poco de la enorme importancia que tiene también esta hipótesis y que es, que la materia misma es la que parece imponerle nuevamente al espacio-tiempo físico una característica geométrica: la curvatura.

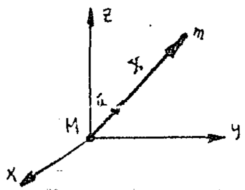
Resumiendo, tenemos que las cuatro hipótesis de la teoría son:

1. Para todo evento del espacio-tiempo y para un grado de aproximación, existe unsistema de referencia en el cual, en una cierta región del espacio y para un cierto intervalo de tiempo, los efectos de gravitación son despreciables y el sistema es inercial en ese grado de aproximación.
2. El espacio-tiempo es una variedad seudoriemanniana.
3. Las trayectorias de caida libre son las geodésicas del espacio-tiempo.
4. La curvatura del espacio-tiempo está asociada al campo gravitacional.

El siguiente paso es establecer un análisis comparativo entre el comportamiento de partículas en caida libre, físicamente hablando y entre el comportamiento de una variación geodésica, haciéndolo geometricamente. Lo cual, analizaremos através de la obtención de las ecuaciones en uno y otro caso. Entonces, empecemos.

2.ANALISIS FISICO
¿QUE ECUACIONES CUMPLEN LOS CUERPOS EN CAIDA LIBRE?.

Si llamamos M a la masa que genera un cierto campo gravitacional y m a la masa de una partícula en caida libre bajo el campo de M. El campo gravitacional de m es despreciable. Llamemos $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ las coordenadas espaciales (como función del tiempo) de la partícula, colocando a M (o bien su centro de gravedad) en la posición $(0,0,0)$.



Sea $r = \|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ y $u = \frac{X}{r}$ el vector unitario que determina la posición de la masa m (el cual está anclado al orígen).

Encontraremos la ecuación de la trayectoria de la partícula en caida libre. Por la Ley de la Atracción Universal, tenemos que:

$$F = \frac{-GMm}{r^2}\vec{u}$$

donde $G = 1$ haciendo una conversión adecuada de unidades, grados a centímetros[†].

---

† [Fab.] Cap.III pág.187

Así es que tenemos:

$$F = \frac{-Mm}{r^2}\,\vec{u}$$

Por la segunda ley de Newton, también tenemos que:

$$F = m\,\frac{d^2X}{dt^2}$$

de dodnde,

$$\frac{-Mm}{r^2}\,\vec{u} = m\,\frac{d^2X}{dt^2}$$

o bien, como $m \neq 0$:

$$\frac{-M}{r^2}\,\vec{u} = \frac{d^2X}{dt^2}$$

Por otro lado, definimos un potencial asociado al campo gravitacional. Sea $\phi(r) = \frac{-M}{r}$, que mide la influencia del campo cuando la distancia r varía. Calculando $\nabla\phi$...

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{M}{r^2}\cdot\frac{x_i}{r}$$

pues,

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}) = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2+x_2+x_3^2}} = \frac{x_i}{r}$$

entonces,

$$-\nabla\phi = -(\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\frac{\partial\phi}{\partial x_2},\frac{\partial\phi}{\partial x_3}) = \frac{-M}{r^2}(\frac{x_1}{r^2},\frac{x_2}{r^2},\frac{x_3}{r^2})$$

por tanto, $-\nabla\phi = \frac{-M}{r^2}\vec{u}$, con lo que concluímos que la aceleración de la partícula es una función gradiente, es decir:

$$-\nabla\phi = \frac{d^2X}{dt^2}$$

o bien

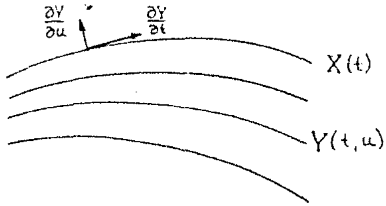
$$\frac{-\partial\phi}{\partial x_i} = \frac{d^2x_i}{dt^2}$$

que es lo mismo que:

$$\frac{d^2x_i}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0$$

Esta es la ecuación de la trayectoria de caida libre de la partícula. Ahora bien, si tenemos varias partículas en caida libre, ¿qué relación guardan entre ellas?.

Tomemos una trayectoria de caida libre, llamándole $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ y consideramos una variación de ésta $Y(t,u) = (y_1(t,u), y_2(t,u), y_3(t,u))$ con $t, u \epsilon \mathbb{R}$.



Donde para cada u fija $Y(t,u)$ es una trayectoria de caida libre y $Y(t,0) = X(t)$.

Como acabamos de ver, cada trayectoria cumple que:

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}(t,u) + \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(t,u) = 0 \text{ con } u \text{ fija,}$$

entonces variando en u:

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y_i}\right)\right](t,u) = 0$$

que es lo mismo que:

$$\frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial t}(t,u) + \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(t,u) = 0$$

intercambiando parciales y usando que $\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial u}$, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t^2}\frac{\partial y_i}{\partial u}(t,u) + \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial u}\frac{\partial \phi}{\partial y_i}(t,u) = 0$$

Si llamamos $J_i(t,0) = \frac{\partial y_i}{\partial u}(t,0)$, que es ver como cambian las trayectorias entre ellas cuando u varía, entonces la ecuación que queda es:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}J_i(t,0) + J_i\frac{\partial^2 \phi}{\partial y_{i^2}} = 0 \quad con\ i = 1,2,3.$$

donde $\frac{\partial^2}{\partial t^2}J_i(t,0)$ es la aceleración relativa entre las partículas y $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y_{i^2}}(t,0)$ es la aceleración o fuerza gravitacional producida por los efectos tidales.

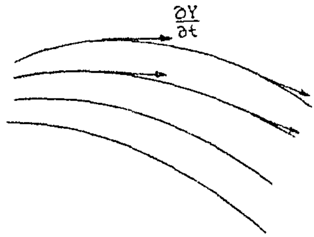
La ecuación anterior, es la relación que rige entre todas las trayectorias de caida libre, la cual es la que vamos a comparar con la que saldrá del análisis geométrico.

Para poder entender ésta, es importante revisar antes el apéndice geométrico, para los conceptos de derivada covariante, variación geodésica curvatura Riemanniana y un teorema de ésta.

Por las hipótesis 2 y 3 de esta teoría, ahora en lugar de analizar trayectorias de caida libre, anaizaremos geodésicas en una variedad M.

3. ANALISIS GEOMETRICO
¿QUE ECUACION CUMPLE UNA VARIACION GEODESICA?

ANALISIS COMPARATIVO ENTRE LAS ECUACIONES FISICAS Y GEOMETRICAS



Sea $Y : [0,1] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ una variación geodésica, es decir, $Y(t,u) = Y_u(t)$ es geodésica para cada u fija, donde $t \epsilon [0,1]$ y $u \epsilon (-\epsilon, \epsilon)$.

Entonces, la derivada covariante del campo vectorial $\frac{dY_u}{dt}$ es cero, es decir:

$$\frac{D}{\partial t} \cdot \frac{dY_u}{dt} = 0 \qquad \forall u$$

que es lo mismo que $\frac{D}{\partial t} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} = 0$, cuya variación en u es también cero (ver apéndice, definición de curvatura Riemanniana, para la idea intuitiva), es decir:

$$\frac{D}{\partial u} \cdot \frac{D}{\partial t} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} = 0.$$

Y por el último Teorema del apéndice, sabemos que:

$$\frac{D}{\partial u} \cdot \frac{D}{\partial t} \cdot V - \frac{D}{\partial t} \cdot \frac{D}{\partial u} \cdot V = R(\frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial u}, V)$$

donde V es un campo vectorial a lo largo de Y, que en el caso que estamos viendo V es $\frac{\partial Y}{\partial t}$.

O sea

$$\frac{D}{\partial u} \cdot \frac{D}{\partial t} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \cdot \frac{D}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} + R(\frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial t}).$$

entonces $\frac{D}{\partial t} \cdot \frac{D}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} + R(\frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial t}) = 0.$

y conmutando tenemos:

$$\frac{D}{\partial t} \cdot \frac{D}{\partial t} \cdot \frac{\partial Y}{\partial u} + R(\frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial t}) = 0.$$

Si llamamos nuevamente $J(t) = \frac{\partial Y}{\partial u}(t,0)$, entonces

$$\frac{d^2}{dt^2} J(t) + R(\frac{\partial Y}{\partial t}, J(t), \frac{\partial Y}{\partial t}) = 0$$

A esta ecuación se le conoce como la **Ecuación de Jacobi**, o mejor dicho, a un campo vectorial que satisface la anterior ecuación diferencial se le llama un campo de Jacobi. Así es que, $\frac{\partial Y}{\partial t}$ es un campo de Jacobi†.

Aquí, $\frac{d^2 J}{dt}$ es la aceleración relativa entre goedésicas y $R(\frac{\partial Y}{\partial t}, J(t), \frac{\partial Y}{\partial t})$ es la curvatura Riemanniana, la cual es una propiedad intrínseca de la variadad, pues sólo depende de los coeficientes métricos y sus derivadas.

Ahora sí, haciendo el análisis comparativo entre

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} J_i(t,0) + J_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_i{}^2} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} J(t) + R(\frac{\partial Y}{\partial t}, J(t), \frac{\partial Y}{\partial t}) = 0 \tag{2}$$

con $i = 1,2,3$.

El razonamiento en base a las hipótesis es el siguiente. Dado que una variación de trayectorias de caida libre equivale a una variación geodésica, que la aceleración entre partículas $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} J_i\right)$ es la aceleración relativa entre geodésicas $\left(\frac{d^2}{dt^2} J\right)$ y que el campo gravitacional esá asociado a la curvatura del espacio-tiempo vista como una variedad, la ecuación (1) es identificada como la ecuación (2) y así establecidas las ecuaciones de campo planteadas por Einstein.

Hay que hacer una observación importante aquí y es que la equivalencia entre conceptos físicos y geométricos que teníamos en Relatividad Especial no se tiene aquí. En la Teoría Especial, las hipótesis geométricas y al mismo tiempo independientes unas de otras. Cada consecuencia en uno de los dos terrenos era sólo dependiente de sus hipótesis y a su vez esta misma consecuencia, tenía su equivalente respectiva en el otro análisis. De cierta forma el modelo geométrico y el físico eran en aquel caso, copias independientes una de la otra. Todo eso no pasa aquí. Desde la postulación de las hipótesis de la Toería General, hay relación física y geométrica en ellas. Son hipótesis muy fuertes de vinculación (y no de traducción solamente) entre conceptos físicos de la naturaleza y conceptos geométricos.

---

† [Mil] 14 pg77.

Es importante diferenciar el tipo de relación que se dá entre lo físico y lo geométrico, en ambas teorías, para poder comprender el tipo de modelo que trata de darse para explicar algo físico.

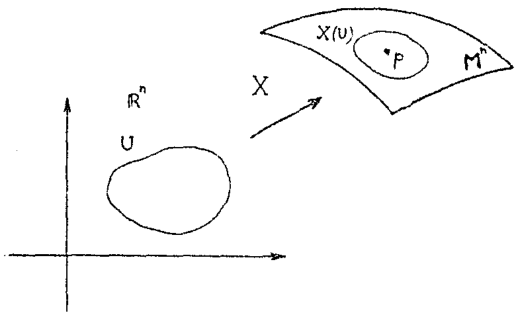
La sustitución de unas ecuaciones por otras, muestra también la dependencia de los conceptos físicos de los geométricos y biceversa. Reconocer aquí que el modelo matemtíco propuesto no es una copia independiente del modelo físico, es realmente importante, no desprecia el modelo y sí abre muchísimas interrogantes sobre la teoría, la cual no es una teoría acabada. Si ni la Teoría Especial lo es, con esa ventaja de un modelo más acabado, más lejos aún parece estar la Teoría General. Junto con esta observación hecha se abren muchas interrogantes tanto para mí como para el lector de esta tesis.

4. APENDICE GEOMETRICO
ALGO DE GEOMETRIA RIEMANNIANA

Este resumen, tiene la finalidad de dar los conceptos no necesariamente conocidos por todos los que lleguen a leer esta tesis. Estos conceptos serán muy importantes para tener una idea más clara de la parte geométrica de la Relatividad General. Está hecho explicando desde las ideas intuitivas del material, hasta la formalidad nacesaria. Muchas demostraciones son omitidas y para mayor profundidad del tema, se dá bibliografía de consulta. Empecémos con la parte intuitiva.

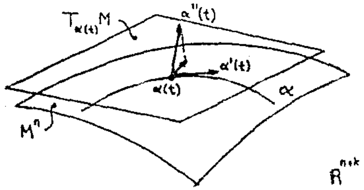
DEFINICION.

Una variedad diferenciable M de dimensión n es un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ tal que $\forall p \epsilon M$, $\exists U \subsetneq \mathbb{R}^n$ abierto y una función $X : U \to \mathbb{R}^{n+k}$ inyectiva y diferenciable C^∞ tal que $X(U)$ es una vecindad de p en M y dX_q es no singular $\forall q \epsilon U$.



A X se la llama una parametrización y a (U, X) una carta de M. Intiutivamente una variedad M^n es algo localmente como $\mathbf{R}^n$.

Tomamos ahora, $\alpha : [0,1] \to M^n$ una curva sobre M^n.

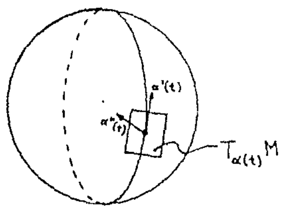


Consideremos $\alpha'(t)$ el cual sabemos que está en el espacio tangente a la variedad en el punto $\alpha(t)$ (es decir, $\alpha' \epsilon T_{\alpha(t)}M$) y consideramos $\alpha''(t)$ del cual sólo sabemos que está en $\mathbb{R}^{n+k}$. Tomando la proyección normal de $\alpha''(t)$ sobre $T_{\alpha(t)}M$, denotada por $\alpha''_T(t)$, definímosla como la **derivada covariante** de $\alpha'(t)$ en la dirección de la curva α.

Intuitivamente, si $\alpha(t)$ representa la trayectoria de una partícula moviéndose en una variedad mientras transcurre el tiempo $t \epsilon [0,1]$, $\alpha'(t)$ la velocidad de la partícula y $\alpha''(t)$ su aceleración, entonces $\alpha''_T(t)$ representará la aceleración de la partícula dentro de la misma variedad, ya que es la derivada de α' sobre el plano tangente a la variedad. $\alpha''_T(t)$ es la aceleración de la partícula vista desde M.

Esta aceleración puede ser positiva, negativa o cero. Cuando $\alpha''_T(t) = 0 \ \forall t \epsilon [0,1]$, se dice que α es una **curva geodésica** de la variedad M.

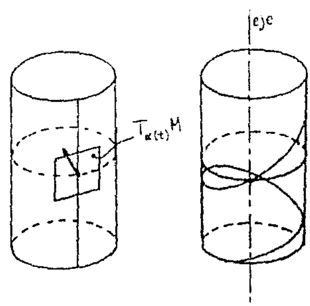
Ejemplo 1. En la esfera de dimensión dos, las circunferencias máximas (ecuadores) son las geodésicas de ésta.



Tomando cualquier $t \epsilon [0,1]$, α una parametrazación de una circunferencia máxima y $\alpha'(t)$ el vector tangente a la curva en el punto $\alpha(t)$, sabemos que $\alpha''(t)$ está en la dirección al centro de la esfera, por lo que su proyección al plano tangente a la esfera en el punto $\alpha(t)$ es cero.

El que $\alpha''(t)$ esté en dirección del centro de la esfera, es una propiedad de las cincunferencias máximas nada más, por tanto cualquier otra circunferencia no es geodésica.

Ejemplo 2. Si M es el cilindro circular, las curvas geodésicas son las curvas que se pueden obtener cortando al cilindro con un plano parpendicular al eje de éste, las rectas paralelas a dicho eje y todas las hélices. Para todas estas curvas $\alpha''(t)$ es perpendicular al plano tangente en $\alpha(t)$, por lo que $\alpha''_T(t) = 0$.

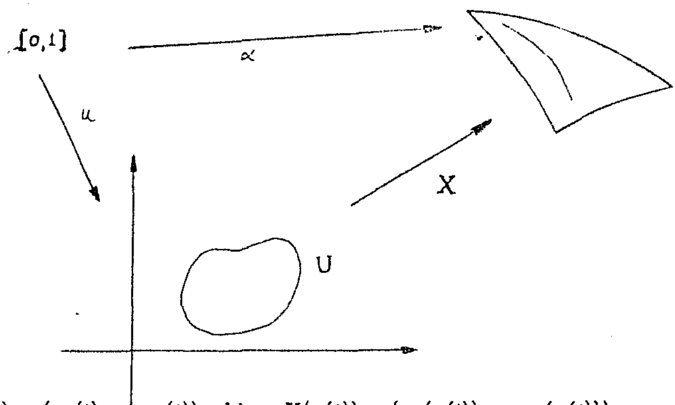


Intuitavamente, las geodésicas de una variedad son las curvas con aceleración cero, o bien lo más "derecha posible" que pude ser una curva sobre la variedad.

Para generalizar toda esta idea, obtengamos $\alpha''(t)$ en términos de algo que la muestre como una propiedad intrínseca de la variedad.

Sea (U,X) la carta de la n-variedad M y $\alpha : [0,1] \to M$ una curva. Sea $u(t) = X^{-1}(\alpha(t))$, es decir, $\alpha(t) = X(u(t))$ con $t \epsilon [0,1]$, entonces:

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_i}(u(t)) \cdot u_i'(t)$$



donde $X(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ o bien, $X(u(t)) = (x_1(u(t)), ..., x_n(u(t)))$.
y derivando nuevamente tenemos:

$$\alpha''(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_k} \cdot u_i''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} \cdot u_i'(t) \cdot u_j'(t)$$

Ahora bien, para que α sea geodésica, nos interesa que su componenete tangencial sea cero, o bien sus proyecciones en la base $\left\{\frac{\partial X}{\partial x_k}\right\}$ del plano tangente sean cero, es decir:

$$\alpha_T''(t) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_k} \right\rangle u_i'' + \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial X}{\partial x_k} \right\rangle u_i' u_j' = 0$$

esto para toda $k = 1, ..., n$. Si denotamos por $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle$ (el producto interior entre las parciales, base del plano tangente), son éstos los **coeficientes métricos** y están definidos en $T_{\alpha(t)}M$.

Denotemos ahora por $\Gamma_{ijk} = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial X}{\partial x_k} \right\rangle$. Observemos que:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_k}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 X}{\partial x_j \partial x_k} \right\rangle = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki}$$

y como $\Gamma_{ikj} = \Gamma_{jki}$ por la conmutatividad del producto escalar, entonces, $\Gamma_{ikj} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}$
.

Así que:

$$\alpha''(t) = \sum_{i=1}^{n} g_{ik} \cdot u_i''(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial xk} \cdot u_i'(t) \cdot u_j'(t)$$

Por tanto, $\alpha_T''(t)$ ha quedado en términos de los coeficientes métricos g_{ij} y su derivadas, con lo cual $\alpha_T''(t)$ es una propiedad intrínseca de la variedad.

Para continuar generalizando esta propiedad de "aceleración vista desde la variedad" e ir obteniendo el importante concepto de curvatura , veamos algunas definiciones.

DEFINICION

Un **campo vactorial** V en una variedad diferenciable M, es una correspondecia tal que $V(p) \epsilon T_pM \quad \forall p \epsilon M$.

DEFINICION

Un campo vectorial a lo largo de una curva α es un campo vectorial tal que $V(\alpha(t)) \epsilon T_{\alpha(t)}M \quad \forall \alpha(t) \epsilon M$.

Observemos aquí que V puede no ser el campo vectorial $\alpha'(t)$.

DEFINICION

La **derivada covariante** del campo V en la dirección de $\alpha'(t)$ es $V_T'(t) = D_{\alpha'(t)}V = \frac{DV}{\partial t}(t)$.

Es la proyección de la derivada direccional usual, en el plano $T_{\alpha(t)}M$.

DEFINICION

Un campo vectorial V a lo largo de α es **paralelo** si $D_{\alpha'(t)}V = 0 \quad \forall t \epsilon [0,1]$.

DEFINICION

Una curva α es **geodésica** si el campo vectorial $\alpha'(t)$ a lo largo de α es paralelo, es decir, $D_{\alpha'(t)} \frac{d\alpha}{dt} = 0$, o bien $\frac{D}{\partial t} \frac{d\alpha}{dt} = 0$.

DEFINICION.

Sea $v \epsilon T_pM$, α una curva tal que $\alpha(0) = p$. V un campo vectorial paralelo a lo largo de α tal que $V(p) = v$, se dice que es el **transporte paralelo de** v *a lo largo de* α.

Encontrando la fórmula en general, si $\bar{V}(t) = V(\alpha(t))$:

$$\bar{V}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \frac{\partial X}{\partial x_i} \quad \text{y} \quad \alpha(t) = X(u(t))$$

entonces

$$\bar{V}'(t) = \sum_{i}^{n} a_i'(t)\frac{\partial X}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}u_j'(t)$$

es decir,

$$\bar{V}_T'(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i'(t)\left\langle\frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_k}\right\rangle + \sum_{ij=1}^{n} a_i(t)\left\langle\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial X}{\partial x_k}\right\rangle u_j'(t)$$

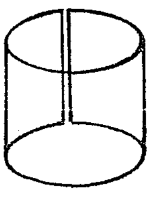
V es el campo vectorial paralelo a lo largo de α si

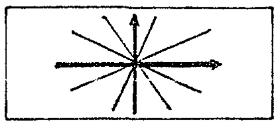
$$\bar{V}_T(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i'(t)g_{ik}(\alpha(t)) + \sum_{i,j=1}^{n} a_i(t)\Gamma_{ijk}(\alpha(t))u_j'(t) = 0$$

y V es el transporte paralelo de $v(t) = (a_1(t), ..., a_n(t))$ con $v(t)\epsilon T_{\alpha(t)}M$.

Una observación importante es que tanto las geodésicas como el transporte paralelo quedan determinados por los coeficientes métricos g_{ij}, es decir, sólo dependen de la métrica definida en el plano tangente. Hay un teorema fácil de probar que afirma que una isometría manda geodésicas en geodésicas y campos paralelos en campos paralelos †.

Con todo lo anterior podemos ver más claramente las geodésicas del cilindro circular. Como el cilindro sin un generador es isomorfo al plano y el "enderesarlo" es una isometría, entonces todas las geodésicas en el plano que pasan por un punto p (haz de rectas) irán a dar a geodésicas en el cilindro. Así es que son las rectas paralelas al eje del cilindro, las circunferencias que se obtienen al cortar al cilindro con los planos perpendiculares al eje y las hélices que son las demás rectas.





Nuestra siguiente meta será medir que tanto una n-variedad deja de ser isométrica a un abierto en $\mathbb{R}^n$.

Esto por supuesto tiene que ver con qué tanto se curva dicha variedad. Una manera de ir resolviendo esto, es medir que tanto deja de ser geodésica cundo ésta se traslade en una determinada dirección. Este trasladar o empujar, lo haremos en forma

† [Rey] Tésis Profesional pg.12

paralela, ya que en el plano al trasladar una recta a una paralela sigue siendo geodésica. Más generalmente dicho, dado un campo vectorial paralelo a lo largo d una curva α y "empujarlo" en una cierta dirección, que tánto deja de ser paralelo (un caso particular importante será si el campo es $\alpha'(t)$).

Sea M una n-variedad diferenciable, $p\epsilon M$, $v\epsilon T_pM$ y $\alpha : [0,1] \to M$ la única geodésica tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$ [†] y sea $w\epsilon T_pM$. Sea V un campo vectorial paralelo a lo largo de α tal que $V(p) = w$ y $\bar{V}(t) = V(t)$

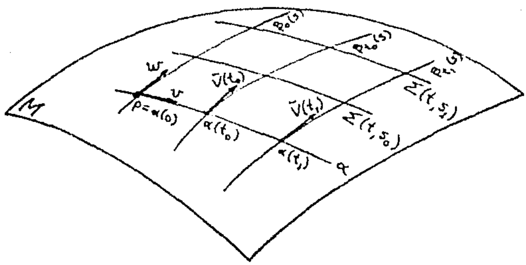
Consideremos para cada t, la geodésica $\beta_t : [0,1] \to M$, $\beta_t(s)$ tal que $\beta_t(0) = \alpha(t)$ y $\beta_t'(0) = \bar{V}(t)$ (ver dibujo). Definimos

$$\Sigma : [0,1] \times [0,1] \to TM (= \bigcup_{p\epsilon M} T_pM)$$

dada por:

$$\Sigma(t,s) = \beta_t(s)$$

Σ es diferenciable y sólo depende de v y w.



Las curvas $\Sigma(t,s_0)$ con s_0 fijo son las trasladadas de α y queremos saber si son geodésicas o no, entonces debemos calcular la derivada covariante de $\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(t,s_0)$, es decir, $\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(t,s_0)\right)$ y nos interesa su variación al mover s en $[0,1]$, entonces nos fijamos en

$$\frac{D}{\partial s}\left(\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(0,0)\right)\right)$$

Aquí, v está jugando un doble papel. Así es que hagamos lo anterior desdoblándolo:

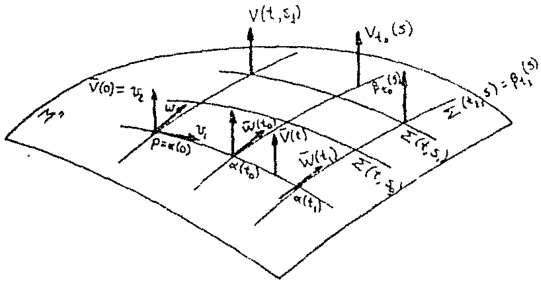
[†] cuya existencia y unicidad es un teorema ([Doc] Geometría Riemanniana)

Sean $v_1, v_2, w \epsilon T_pM$. Consideremos $\alpha : [0,1] \to M$ la geodésica tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v_1$.

Sea $\bar{V}$ un campo vectorial paraalelo a lo largo de α tal que $\bar{V}(0) = v_2$ y $\bar{W}$ otro campo vectorial paralelo de α con $\bar{W}(0) = w$.

Sea $\Sigma : [0,1] \times [0,1] \to M$ tal que $\Sigma(t,s) = \beta_t(s)$, donde $\beta_t(s)$ es la geodésica tal que $\beta_t(0) = \alpha(t)$ y $\beta_t'(0) = \bar{W}(t)$.

Observemos el dibujo para entender la idea:



Sea V_t el campo paralelo a lo largo de $\beta_t(s)$ tal que $V_t(0) = \bar{V}(t)$. Y también definimos:

$$V : [0,1] \times [0,1] \to TM$$

tal que $V(t,s) = V_t(s)$, la cual resulta diferenciable.

Queremos ver qué tanto la curva $\Sigma(t,s_0)$ deja de ser geodésica, es decir, qué tanto el campo V deja de ser paralelo al restringirse a la curva $\Sigma(t,s_0)$. Para eso, observémos la derivada covariante $\frac{D}{\partial t}V$ y veámos su variación de w al pasar por $p = \alpha(0)$, es decir, $\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V(0,0)$ nos mide qué tanto la geodésica por p con dirección v_1 deja de ser geodésica al empujarla en la direccción w, o más generalmente dicho, qué tanto al empujar la geodésica α en la dirección w un campo paralelo deja de serlo.

DEFINICION.

$$\mathbf{R_p} : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$$

tal que $\mathbf{R_p}(v_1, v_2, w) = \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V(0,0)$. A esta función la llamamos **curvatura Riemanniana de** M **en** p.

Si $\mathbf{R}_p(v_1, v_2, w) = 0 \quad \forall v_1, v_2, w \epsilon T_pM$ y $\forall p$ en una vecindad V en M, entonces el campo $V(t, S_0)$ es paralelo a lo largo de la curva $\Sigma(t, s_0)$, para cualquier campo vectorial V. Por tanto, $\Sigma(t, s_0)$ es geodésica $\forall s_0$. Es decir, al empujar la geodésica α en cualquier dirección sigue siendo geodésica, lo cual habla de una isometría de V con un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Hasta aquí, ya hemos desarrollado y generalizado muchas ideas y conceptos que usaremos para intentar explicar la parte geométrica de la Teoría de la Relatividad, sin embargo vamos a generalizar aún más, principalmente el concepto de derivada covariante, para formalizar a su vez el concepto de curvatura Riemanniana y así creando conceptos que por su generalidad resultan más fuertes e importantes en las matemáticas y en su uso.

DEFINICION.

Una **métrica Riemanniana** de una n-variedad M es una asignación g_p de un producto interior al plano tangente de M en p, definido así:

$$\forall u, v \epsilon T_pM \ y \ p \epsilon M \qquad g_p = < u, v >$$

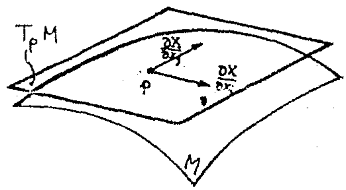
Para una carta (U, X) de M, basta definir g_p para la base $\left\{\frac{\partial X}{\partial x_i}\right\}$ de T_pM , es decir, definimos

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle$$

evaluado en el punto p, los cuales son llamados **coeficientes métricos** en (u, X).

DEFINICION.

Una variedad Riemanniana es una variedad con una métrica Riemanniana.



DEFINICION.

Si $g_p = < v, v > = 0$, con v no necesariamente el vector 0, entonces a g_p se le llama **semimétrica Riemanniana** y a una variedad con una semimétrica se le llama **variedad semiriemanniana.**

PROPOSICION.

Toda variedad diferenciable es una variedad Riemanniana.

Para la demostración, ver [Doc], cap. 0, proposición 5.4.

DEFINICION.

$\chi(M)$ es el es el conjunto de campos vectoriales definidos sobre M.

Ahora con esto, generalizemos el concepto de derivada covariante, de transporte paralelo y de geodésica.

DEFINICION.

Una conexión afín en M es una función real bilineal

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

definida como $\nabla(V,W) = \nabla_V W$ y que satisface las siguientes propiedades:

$$i)\ \nabla_{fV+gW} Z = f\nabla_V Z + g\nabla_W Z$$
$$ii)\ \nabla_V (W+Z) = \nabla_V W + \nabla_V Z$$
$$iii)\ \nabla_V (fW) = f\nabla_V W + V(f)W.$$

donde $V, W \epsilon \chi(M)$ y $f, g \epsilon C^{\infty}(M)$.

PROPOSICION.

$\nabla_V W(p)$ sólo depende de $V(p)$ y del valor de W a lo largo de una curva α adaptada a $V(p)$.

Demostración:

Sea (U,X) una carta de M en torno a p, con $X = (x_1, ..., x_n)$. Escribiendo los campos V y W en componentes de las parciales

$$\frac{\partial X}{\partial x_i} = X_i, V = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i y W = \sum_{j=1}^{n} y_j X_j,$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= \sum_{i=1}^{n} x_i \Big(\nabla_{X_i} \Big(\sum_{j=1}^{n} y_j X_j \Big) \Big) \\ &= \sum_{ij=1}^{n} x_i y_j \nabla_{X_i} \Big(X_j \Big) + \sum_{ij=1}^{n} x_i X_i(y_i) X_j. \end{aligned}$$

$$\text{Haciendo } \nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} X_k,$$

es decir, $\nabla_{X_i} X_j$ en coordenadas respecto a las parciales X_k, concluímos que Γ_{ij}^{k} son funciones diferenciales, llamados **símbolos de Christoffel**, entonces

$$\nabla_V W = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i \Gamma_{ij}^{k} + X(y_k) \Big) X_k$$

en donde se muestra que $\nabla_V W(p)$ solo depende de $x_i(p), y_k(p)$ y de las derivadas $X(y_k)(p)$. □

DEFINICION.

La **derivada covariante** del campo V a lo largo de la curva $\alpha : [0,1] \to M$ está definida por:

$$\frac{D}{\partial t} V = \nabla_{\alpha'(t)} V$$

para algún $V \epsilon \chi(M)$, tal que $\tilde{V}(t) = V(\alpha(t))$.

DEFINICION.

Un campo vectorial V a lo largo de una curva α es **paralelo** a lo largo de α si $\frac{D}{\partial t} V = 0 \quad \forall t \epsilon [0,1]$.

PROPOSICION.

Sea $\alpha : [0,1] \to M$ una curva diferenciable en M y $v_0 \epsilon T_{\alpha(t_0)} M$ para algún $t_0 \epsilon [0,1]$, entonces existe un único campo paralelo a lo largo de α tal que $\tilde{V}(t_0) = v_0$. En tal caso a V se le llama **transporte paralelo de v_0 a lo largo de α**.

Para la demostración ver [Doc] Cap II prop.2.6.

DEFINICION

Una curva $\alpha : [0,1] \to M$ es una **geodésica** si $\frac{D}{\partial t} \frac{d\alpha}{dt} = 0$.

DEFINICION.

Una conexión afín en una variedad Riemanniana M, se dice que es **compatible con la mértica** $<,>$ si $\forall t \epsilon [0,1]$ y $\forall V, W, Z \epsilon \chi(M)$ sucede que

$$V < W, Z > = < \nabla_V W, Z > + < W, \nabla_V Z > .$$

Es decir, que podemos caracterizar el producto interno por la "regla del producto usual".

DEFINICION.

Si $V,W\epsilon\chi(M)$, definimos **el paréntesis de Poisson** como $[V,W] = VW - WV \quad \epsilon\chi(M)$.

DEFINICION.

Una conexión afín ∇ se dice que es **simétrica**, si

$$\forall V,W\epsilon\chi(M), [V,W] = \nabla_V W - \nabla_W V.$$

Se prueba que dad un avariedad Riemanniana M , existe una única conexión afín ∇ en M que es simétrica y compatible con la métrica, a la cual llamaremos la conexión Riemanniana de M.

Ahora, también generalicemos el concepto de curvatura.

DEFINICION.

La **curvatura Riemanniana R** de una variedad Riemanniana M es la aplicación

$$\mathbf{R} : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

dada por:

$$\mathbf{R}(Z,W,V) = \nabla_W \nabla_Z V - \nabla_Z \nabla_W V + \nabla_{[Z,W]} V$$

donde ∇ es la conexión Riemanniana de M.

Se puede demostrar no muy facilmente que esta definición de curvatura Riemanniana y la que obtuvimos anteriormente, coinciden. Para esto, veámos el último teorema de este apéncice del cual será corolario.

DEFINICION.

Una **superficie parametrizada** en una variedad diferenciable M, es una aplicación $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$ diferenciable en $A \subseteq U$ abierto.

DEFINICION.

Sea $V\epsilon\chi(M)$ y $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$. Un **campo de vectores a lo largo de** f es un aaplicación tal que a cada $q\epsilon A$ le asocia un vector $V(q)\epsilon T_{f(p)}M$ tal que $V \circ f$ es diferenciable.

DEFINICION.

Si $V, W \epsilon \chi(M)$, definimos **el paréntesis de Poisson** como $[V,W] = VW - WV \quad \epsilon \chi(M)$.

DEFINICION.

Una conexión afín ∇ se dice que es **simétrica,** si

$$\forall V, W \epsilon \chi(M), [V,W] = \nabla_V W - \nabla_W V.$$

Se prueba que dad un avariedad Riemanniana M , existe una única conexión afín ∇ en M que es simétrica y compatible con la métrica, a la cual llamaremos la conexión Riemanniana de M.

Ahora, también generalicemos el concepto de curvatura.

DEFINICION.

La **curvatura Riemanniana R** de una variedad Riemanniana M es la aplicación

$$\mathrm{R} : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

dada por:

$$\mathrm{R}(Z,W,V) = \nabla_W \nabla_Z V - \nabla_Z \nabla_W V + \nabla_{[Z,W]} V$$

donde ∇ es la conexión Riemanniana de M.

Se puede demostrar no muy facilmente que esta definición de curvatura Riemanniana y la que obtuvimos anteriormente, coinciden. Para esto, veámos el último teorema de este apéncice del cual será corolario.

DEFINICION.

Una **superficie parametrizada** en una variedad diferenciable M, es una aplicación $f : A \subseteq \mathrm{R}^2 \to M$ diferenciable en $A \subseteq U$ abierto.

DEFINICION.

Sea $V \epsilon \chi(M)$ y $f : A \subseteq \mathrm{R}^2 \to M$. **Un campo de vectores a lo largo de** f es un aaplicación tal que a cada $q \epsilon A$ le asocia un vector $V(q) \epsilon T_{f(p)} M$ tal que $V \circ f$ es diferenciable.

TEOREMA.

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$ una superficie parametrizada y llamémosle (t,s) a las coordenadas en $\mathbb{R}^2$. Sea $V = V(t,s)$ un campo de vectores a lo largo de f. Denotemos $\frac{\partial f}{\partial t} = df\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ y $\frac{\partial f}{\partial s} = df\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$, entonces,

$$\mathbf{R}\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}, V\right) = \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V.$$

Demostración:

Sea (U, X) un sistema local de coordenadas alrededor de $p \epsilon M$ y sea $V(t,s) = \sum_{i=1}^{n} v_i X_i$ donde $v_i = v_i(t,s)$ y $X_i = \frac{\partial X}{\partial x_i}$.

Entonces, calculemos primero $\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V$.

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial s}V &= \frac{D}{\partial s}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i X_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{D}{\partial s}X_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial s}X_i\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V = &\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}X_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial t}\frac{D}{\partial s}X_i\\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial s}\frac{D}{\partial t}X_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial s}X_i\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V = &\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial s}X_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial s}\frac{D}{\partial t}X_i\\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial t}\frac{D}{\partial s}X_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v_i}{\partial s \partial t}X_i\end{aligned}$$

y restando

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V = \sum_{i=1}^{n} v_i\left(\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}X_i - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}X_i\right).$$

Calculemos ahora $\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}X_i$.

Pongamos $f(s,t) = (y_1(s,t), ..., y_n(s,t))$, pues $f : \mathbb{R}^2 \to M \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial t} X_j \text{ y } \frac{\partial f}{\partial s} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial s} X_k.$$

Así tenemos:

$$\frac{D}{\partial t} X_i = \nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} X_i = \nabla_{\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial t} X_j\right)} X_i$$

que por las propiedades de la conexión afín es igual a:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial t} \nabla_{X_j} X_i$$

entonces

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t} X_i = \frac{D}{\partial s}\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial t} \nabla_{X_j} X_i\Big)$$

que es lo mismo que

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial s \partial t} \nabla_{X_j} X_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial t} \nabla_{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial s} X_j\right)} \Big(\nabla_{X_j} X_j\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial s \partial t} \nabla_{X_j} X_j + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial t} \frac{\partial y_k}{\partial s} \nabla_{X_k} \nabla_{X_j} X_i$$

De donde

$$\Big(\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t} - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\Big) X_i =$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial t} \frac{\partial y_k}{\partial s} \Big(\nabla_{X_k} \nabla_{X_j} X_i - \nabla_{X_j} \nabla_{X_k} X_i\Big) =$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial t} \frac{\partial y_k}{\partial s} \mathbf{R}(X_j, X_k, X_i)$$

(pues $[X_j, X_k] = X_j X_k - X_k X_j = 0$ y usando la definición de curvatura Riemanniana).

Por tanto:

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V = \sum_{i,j,k=1}^{n} v_i \frac{\partial y_j}{\partial t}\frac{\partial y_k}{\partial s}\mathrm{R}(X_j, X_k, X_i)$$
$$= \mathrm{R}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial t}X_j, \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_k}{\partial s}X_k, \sum_{i=1}^{n} v_i X_i\Big)$$
$$= \mathrm{R}\Big(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}, V\Big)$$

(usando las propiedades de Curvatura Riemanniana [Doc]), con lo cual queda probado el Teorema y terminado el apéndice.

BIBLIOGRAFIA

[Bar] L. Barnett. *El Universo y el Doctor Einstein.* Fondo de Cultura Económica. México 1964.

[Bre] M. Brédov, V. Runiántsev, I. Topitiguin *Electrodinámica Clásica.* Editorial MIR Moscú 1986.

[Doc] Manfredo P. Do Carmo. *Geometría Riemanniana.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Brasil 1979.

[Doc1] Manfredo P. Do Carmo. *Differential Geometry.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Brasil.

[Ein] Albert Einstein. *El Principio de la Relatividad.* Dover Publcation. Inc. New York 1952.

[Fab] Richard Faber L. *Differential Geometry and Relativity Theory. An Introduction.* Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc. New York 1983.

[Gol] L. I. Golovina. *Algebra Lineal y algunas de sus Aplicaciones.* Editorial MIR Moscú 1974.

[Lan] Lev Landau, Yuri Rumer. *¿Qué es la Teoría de la Relatividad?.* Ed. Mir. Moscú 1978.

[Kut] L.V. Kutnetsov. *La Teoría del Espacio, el Tiempo y la Gravitación. La Teoría de la Relatividad.* Ed. Grijalvo, Col.70. México 1969.

[Mil] J. Milnor. *Morse Theory.* Princenton University Press 1973.

[Pea] L. Pearce Williams. Selección. Ed. Alianza Universidad. México 1977.

[Whe] John A. Wheeler, Charles W. Misner. *Gravitation* W.H. Freeman And Company. San Fransico 1973.

[Yag] I. M. Yaglom. *A Simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basic.* Springer Verlag. Heidelberg Science Library. New York 1979.