# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

UNIDAD ACADEMICA DE LOS CICLOS DE ESTUDIOS DE PROFESIONAL Y POSGRADO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Y

CENTRO DE LENGUAS EXTRANJERAS

# SINTAXIS DEL ALGEBRA ELEMENTAL: UN SISTEMA GENERATIVO DE EXPRESIONES Y ECUACIONES BASICAS

## T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRIA EN LINGüISTICA APLICADA**

P R E S E N T A

**BERNARDO JAVIER HERNANDEZ-MARQUEZ BOLIO**

México, D. F. Ciudad Universitaria 1989

# TABLA DE CONTENIDOS

# RESUMEN

El propósito principal de este trabajo de tesis es presentar una gramática generativa para las expresiones y ecuaciones básicas de la aritmética y el álgebra. Esta gramática consiste en un conjunto de reglas sintácticas (de reescrituración) que describen, en forma abstracta, los procesos mentales básicos de la comprensión y la producción en dichas ramas de la matemática. No pretende, por lo tanto, distinguir el razonamiento matemático correcto del incorrecto.

El primer capítulo es bastante amplio, en lo que se refiere a los temas y los campos de estudio que toca. Su intención es acercarse a un panorama y a un orden cronológico de los antecedentes que conducen a que en la actualidad existan campos de estudio especializado en los cuales confluyen tanto la lógica matemática como la lingüística aplicada --la lingüística matemática, la lingüística cuantitativa y la lingüística computacional. No pretende, sin embargo, hacer de este trabajo un estudio exhaustivo de estos temas que en sí ameritan una investigación por su cuenta en vista de que son los campos de estudio que tienen mayor incidencia en este tipo de trabajo.

La gramática, que se presenta en el capítulo dos, consta de

reglas de generación y de reglas de transformación, al igual que se tiene en el modelo original de N. Chomsky (1957) para las lenguas naturales. Es decir, implica una analogía de los elementos matemáticos (números, símbolos algebraicos y signos aritméticos) y sus relaciones, por un lado, con los componentes de la oración y sus relaciones, por otro.

En principio, la gramática presentada tendría validez propia, por su adecuación a los datos --las intuiciones del 'matemático ideal'. En otras palabras, debe juzgarse si genera o no las expresiones y ecuaciones que pretende describir. Sin embargo, la justificación de emprender su desarrollo se encuentra, en parte, en la analogía mencionada. Esta puede ser la base, tanto para investigaciones futuras sobre dificultades en el aprendizaje de la matemática como sobre la naturaleza de su lenguaje. Asimismo, de la analogía podrían derivarse aplicaciones en el diseño de programas de lectura de textos matemáticos y de enseñanza de la matemática.

La presentación simultánea de la sintaxis del álgebra elemental en sus propios términos y de la analogía con la gramática de una lengua natural, permite identificar con bastante nitidez temas para las investigaciones y aplicaciones mencionadas en el párrafo anterior, por ejemplo: el concepto de cardinalidad y la distinción entre el signo intrínseco de un número y un signo como operador aritmético (vorzeichen y rechenzeichen, en alemán).

Las características esenciales de la gramática que propongo se ejemplifican brevemente al final del mencionado capítulo dos. En esa misma sección, se señalan los temas indicados en el párrafo anterior.

El capítulo tres presenta un esbozo de las líneas de trabajo que podrían desarrollarse a partir de los resultados de esta tesis, dando unos ejemplos de aplicaciones en la descripción de errores sintácticos que cometen los alumnos de matemáticas. Es, pues, una exploración sobre el estado de la investigación en el área de la matemática educativa. Incluye, también, reflexiones (que rebasan la lingüística) sobre el discurso matemático.

Y por último, al final de la tesis, se incluye una amplia bibliografía de consulta y referencia, un glosario de los términos utilizados para vincular la analogía entre el lenguaje matemático y la lengua natural, y un cuadro general de la estructura de base y de algunas transformaciones del álgebra elemental.

# C A P I T U L O   1

## INTRODUCCION Y JUSTIFICACION

<u>Planteamiento del Problema.</u> Desde el surgimiento de las gramáticas generativas (Chomsky, N.:1957), estas han sido objeto de gran discusión en distintos campos de estudio, y no sólo en la lingüística. En México, el tema de las gramáticas generativas, apenas empieza a tocarse con algo de profundidad por distintos estudiosos, aunque a nivel mundial, su estudio ha conducido a cambios radicales en los enfoques hacia el lenguaje en general.

Una de las discusiones más interesantes que se han dado en torno a las gramáticas generativas, es la que se sostuvo en 1975 entre Jean Piaget y Noam Chomsky con la participación de destacados científicos en distintos campos del conocimiento, sobre el enfoque *constructivista* versus el enfoque *innatista* de la capacidad de *adquisición* del conocimiento en general, y del lenguaje en particular. Aunque esta tesis, no tiene la intención de tomar partido en el debate que se suscitó en esa época, y el cual ha marcado líneas de investigación psicológicas y lingüísticas, desde entonces, la descripción gramatical del álgebra elemental que se presenta en este trabajo, busca aclarar uno de los puntos álgidos del debate, aquél relacionado con la <u>generalización</u> de las estructuras sintácticas como modelo explicativo de los procesos mentales de un "hablante idealizado".

En particular, se plantea que: "*si es posible una descripción gramatical de la matemática en el sentido generativo-transformacional; entonces, se podría inferir un núcleo común tanto en los procesos mentales matemáticos como en los procesos mentales lingüísticos de los hablantes.*

Posibles implicaciones y aplicaciones de los resultados. De ser cierta la hipótesis anterior, cabría cuestionar varios aspectos de la teoría *psico-genética* de Piaget, especialmente, aquellos que inciden en su postura psico-lingüística (Piaget, J., et al. : 1967). No es el objeto de esta tesis entrar en un debate teórico de este tipo, sino más bien, sentar algunas bases para desarrollar posteriormente. Por otra parte, los resultados proporcionarán elementos metodológicos para un tipo de análisis contrastivo entre el lenguaje de la matemática y el lenguaje natural, que permita ir construyendo una *gramática pedagógica* que filtre interferencias que pueda o no tener un tipo de lenguaje sobre el otro. El objeto a largo plazo de estudios como el que aquí se expone, es obtener una descripción del proceso de adquisición del conocimiento matemático a partir de los procesos mentales de un hablante no especializado con el conocimiento matemático.

Razones personales. Entre las razones para la elección del tema de esta tesis, existen preocupaciones de índole diversa, tales como la aplicabilidad de los modelos teóricos de la lingüística en la enseñanza de lenguas (Tavakolian, S. L.: 1981), lo cual ha sido objeto de intensas discusiones en distintos foros y congresos sobre la enseñanza de lenguas extranjeras aquí en México en años recientes. Otras preocupaciones, tienen que ver con las discrepancias dentro de la propia teoría lingüística y las controversias entre los principales puntos de vista acerca del aprendizaje (ver, Schumann, J.H.: 1976; Reed, M.B: 1984; Velázquez, I., et al: 1987), especialmente, aquellas que abarcan tanto al campo del conocimiento lógico-matemático y sus relaciones con el lenguaje verbal.

Pienso que la formulación de una gramática generativa para las matemáticas, contribuirá a aclarar aspectos de las discusiones en torno a las preocupaciones anteriores, al implicar la posibilidad de generalizar, para el conocimiento matemático, observaciones que se han hecho para el conocimiento lingüístico.

Cabe mencionar, que este trabajo de tesis surge de una investigación previa que buscó vincular dos enfoques estructurales, uno para la matemática y otro para el lenguaje verbal, desde el punto de vista de la retención de *oraciones* y *expresiones* en la memoria (Hernández-Márquez, B.B.: 1986). De hecho, en ese trabajo, se llegó a proponer tentativamente un sistema generativo para las expresiones matemáticas, el cual, visto con más detalle, condujo a la necesidad de construir un modelo generativo más riguroso y sistemático para describir, con mayor precisión, a las diferencias y similitudes entre el *lenguaje matemático* y el lenguaje verbal, y así, poder interpretar con mayor confianza los resultados de la experimentación. En este trabajo de tesis, abordaremos esta construcción más sistemática.

<u>Propósito de las próximas secciones de este capítulo.</u> Aunque la sintaxis de Chomsky, no distingue entre proposiciones falsas y verdaderas, sino entre oraciones gramaticales y agramaticales, su construcción algoritmica rigurosa parece ser análoga a ciertas construcciones axiomáticas de la lógica y de las matemáticas. Por lo tanto, tendría sentido plantearse la construcción de una gramática generativa para las expresiones de la aritmética y el álgebra, lo cual será el objeto del segundo capitulo. Antes de abordar directamente la construcción y el marco teórico de un sistema generativo para ecuaciones y expresiones matemáticas básicas (las que comprende el curriculum escolar en las distintas secundarias estatales y federales en la República Mexicana), consideramos necesario resumir un breve panorama general de los distintos campos de estudio (lingüístico y matemático) y como han enfocado a su propio campo de estudio. No es la intención de las siguientes secciones, dar una descripción histórica de su desarrollo independiente, sino más bien, describir un panorama

general para cada una de las áreas del conocimiento que permita contextualizar y servir de posible antecedente para este tipo de trabajo, en vista de que no hemos podido encontrar un trabajo similar en las distintas bibliografías de referencia a esta tesis, ni en los distintos bancos de datos que hemos consultado. Su propósito, es sugerir que tanto la teoría lingüística reciente y sus procedimientos de análisis, como la lógica matemática y sus modelos de lenguajes formales, han sido producto de un desarrollo independiente que han dado por resultado terminologías distintas para conceptualizaciones análogas, especialmente aplicables en el campo de la matemática educativa y en la enseñanza de lenguas extranjeras, aunque haría falta un estudio más a fondo para sostener afirmaciones de este tipo.

A continuación, se pasará a dar una breve descripción del panorama lingüístico hasta el surgimiento de las gramáticas generativas, y se complementará con un panorama matemático que describe someramente los cambios en el enfoque matemático hacia lo que en la actualidad se considera como la noción de *lenguaje matemático*, para concluir este capítulo con un resúmen general de algunos puntos coincidentes en torno al papel de la lógica, y luego pasar al tema principal de esta tesis.

## § 1.0. PANORAMA LINGUISTICO.

### § 1.1.0. Ferdinand De Saussure.

La lingüística estructuralista propuesta por F. De Saussure a principios de siglo, establece por primera vez que los entes de las lenguas naturales pueden ser descritos con cierto rigor *científico* desde el punto de vista de la arbitrariedad del signo lingüístico, permitiendo así la construcción de la *semiología* (del griego: σημειον, signo, y ; λογος, tratado) como una *teoría* sobre el funcionamiento de los *lenguas* partiendo de la arquitectura de su estructura significativa (Mounin, G.: 1968). De Saussure da la pauta al proponer dos niveles de articulación para una lengua; un nivel que establece las unidades mínimas significativas, y otro nivel que las analiza a partir de sus rasgos distintivos mínimos. Este proceder del análisis lingüístico, se reconoce explícitamente como la esencia de las gramáticas estructuralistas de mediados de este siglo, y se encuentra también, en la base tanto de las gramáticas funcionalistas que se conocen en la actualidad, como en las recientes gramáticas generativas.

A esta visión *científica* de la descripción de las lenguas naturales, se suman posteriormente distintas escuelas europeas y norte-americanas. Destacan, notablemente entre otras, el Círculo de Praga, el Círculo de Copenhague y la Escuela Estructuralista Norte-Americana, que podrían en su conjunto considerarse como las tendencias funcionalistas, estructuralistas y axiomatizantes, respectivamente, que anteceden a las gramáticas generativas actuales desde el punto de vista de la descripción científico-lingüística.

§.1.1.1. El Circulo de Praga.

Los exponentes más claros de las gramáticas funcionalistas corresponden a los lingüistas de las lenguas eslavas, y más recientemente a la Escuela Británica. El Manifiesto que presentaron los funcionalistas en el Primer Congreso de Filólogos Eslavos en Praga, en 1929 muestra el argumento fundamental de sus tesis que consiste en:

*Just as the individual parts of a language depend on one another, so each element of the language as a whole exists only in relationship to specific extralinguistic conditions and has a function with respect to these conditions.*

(Johnson, M. K.: 1978)

Esta visión sistémica de la lengua natural en función con sus contextos y que posteriormente también incluye a las situaciones de enunciacion, es uno de los aspectos principales que desarrolla la escuela británica inspirándose en el trabajo de antropólogos lingüistas (van Dijk, T.: 1980).

§.1.1.2. El Circulo de Copenhague.

El Circulo de Copenhague, de carácter estructuralista, propone que en la base de la estructura de las lenguas naturales se encuentran los elementos discretos esenciales que permiten la *algebrización* de la descripción lingüística y se avocan a la construcción de un modelo notacional de la teoria lingüística que denominan la *Glosemática*, cuyo objetivo es establecer procedimientos de descomposición del fenómeno lingüístico total, en particulas componenciales cada vez más reducidas hasta llegar a un limite bajo el cual no existe mayor susceptibilidad de reducción (Hjemslev, L. : 1943).

§.1.1.3. La Escuela Estructuralista Norte-Americana.

Las preocupaciones fundamentales en torno a la construcción lógica del análisis lingüístico aparecen, por su parte, como una de las lineas principales de la naciente escuela lingüística norte-americana, desarrollando considerablemente los métodos axiomáticos de análisis lingüístico (Bloomfield, L. : 1930). Lo anterior, conduce, en fechas posteriores a los planteamientos básicos de Zellig Harris, que más bien resultan ser un analisis sistemático de esquemas gramaticales relativos a las *oraciones* de un discurso y al inicio de la noción de *transformación* que le subyace a las gramáticas generativas (van Dijk, T. : 1980).

Para volver más clara la noción de *estructura* entre los lingüistas, nos detendremos un poco con los estructuralistas de mediados de este siglo.

§.1.2.0.<u>El Enfoque General de Estructura.</u>

Entre los lingüistas estructuralistas más rigurosos, destaca Louis Hjemslev del Circulo de Copenhague. El nos proporciona una visión clara de su proceder del análisis lingüístico cuando expresa que el principio de dicho análisis consiste en establecer procedimientos de descomposición del fenómeno lingüístico total, en particulas componenciales cada vez más reducidas hasta alcanzar un supuesto limite bajo el cual no existe mayor susceptibilidad de reducción (Hjemslev, L. : 1943, p.p. 22). Cabe señalar aquí, que bajo el enfoque de Hjemslev, no se implica la necesidad de establecer un *postulado existencial* de los componentes minimos como en la epistemologia tradicional ya que su procedimiento es fundamentalmente analitico y no axiomático, lo que se vera con mayor claridad cuando toquemos el enfoque generativo.

Según Hjemslev (ibid: p.p. 30), los procedimientos analiticos pueden conducirse en dos direcciones distintas: del todo hacia las partes, o de las partes hacia el todo. Esto, lo denomina *procedimientos deductivos* y *procedimientos inductivos*, respectivamente (ibid: p.p. 31).

Los planteamientos anteriores, están vinculados con la existencia de distintos enfoques de análisis para conformar una jerarquia entre si, en otras palabras, en donde un nivel dado sirve de fundamento para explicar al nivel que le sigue. Lo anterior, se relaciona con el concepto de *dependencia* entre las partes componentes objeto del análisis (ibid: p.p. 30 - 31). Según esta concepción, las dependencias entre las partes componentes se clasifican de acuerdo con sus características relacionantes, o de acuerdo con la manera en que se asocian los elementos entre sí. Así, por ejemplo, cuando una parte componente depende de alguna manera de otra parte componente y viceversa --como en el caso de la *propiedad comutativa* de la matemática-- se clasifica como una *interdependencia*. De igual forma, cuando una parte componente depende de otra, pero no a la inversa, se clasifica como una *determinación*. Cuando las partes componentes no dependen entre sí, se clasifican como *constelaciones* (ibid: p.p. 35).

Por otro lado, para Hjemslev, existe una diferencia fundamental entre los distintos procedimientos de análisis sobre una *jerarquía mayor* o el "*todo*" objeto del análisis. Por un lado están los *procesos*, los cuales consisten en procedimientos de análisis que estudian al eje de las combinaciones de las partes componenciales o encadenación de sus partes, mientras que por otro lado, están los *sistemas* que estudian un eje de las selecciones o sustituciones posibles que pueden darse en una parte dada de la *cadena*; es decir, el eje de las combinaciones analiza la *conjunción* (lógica) de los componentes o la *coexistencia* entre los distintos componentes de un todo de caracter lingüístico, mientras que, el eje de las selecciones analiza la *disyunción* (lógica) o el *reemplazamiento* posible de distintos componentes de una partición dada en la cadena de la enunciación (ibid: p.p. 36). Con lo anterior, se podría entonces afirmar, que el "*todo*" conforma una *clase de las clases*, y que la jerarquía mayor de los niveles consiste en esencia, dar una definición del concepto de *oración*. El nombre técnico que le da Hjemslev al objeto del análisis lingüístico así descrito, lo denomina *texto*, mientras que otra manera de denominar al procedimiento de análisis lingüístico así descrito, es *análisis de texto*, empleando de manera distinta el término "*texto*" a como lo utiliza van Dijk en su propuesta de la *gramática del texto*, que más bien se refiere a '*textos*' en el sentido plural (van Dijk, T. : 1980).

La descripción anterior del enfoque estructuralista de Hjemslev, confirma la viabilidad de *modelos* abstractos sobre el funcionamiento de las lenguas naturales que había sido anticipada en trabajos teóricos como los de la Escuela de Port Royal, y en este siglo, por Otto Jespersen (Castaños, Z, F. : comunicación personal), y permite introducir la noción de *lenguaje universal*.

### § 1.3.0. El Enfoque Generativo de la Estructura.

Lo que en un principio dió lugar a la glosemática, posteriormente, facilita en la escuela lingüística norte-americana, basándose en los trabajos de los epistemólogos y filósofos de la matemática, crear una modelación *algorítmica* de la estructura de la oración de las lenguas naturales, recurriendo a los conceptos de la *teoría de grupos*, y *teoría de los algoritmos* de la naciente lógica matemática, lo que sienta las bases de las gramáticas generativas en la actualidad (Chomsky, N. : 1957).

Las gramáticas generativas actuales, parten de una modelación algebraica abstracta (es decir, sin un referente concreto) que primero establece una definición de los elementos *primitivos* o partes componentes mínimas que luego se *adecúan* por medio de ciertas *reglas* definidas que actúan sobre ellos dando lugar a las distintas estructuras gramaticales de las lenguas naturales. En términos más técnicos, se dice que las reglas *generan* distintas *derivaciones* de estructuras a partir de estructuras de base. Esta diferencia entre *estructuras de base* y *estructuras derivadas* a partir de la base, es lo que a grandes rasgos fundamenta las diferencias entre *estructuras profundas* y *estructuras superficiales* respectivamente. Lo anterior se debe a que las estructuras superficiales representan el último paso de derivación sobre una estructura de base lo que permite que la descripción generativa construya una *oración gramaticalmente correcta* al contrastar la última derivación, de entre toda la gama de posibles derivaciones, con el empleo común y corriente que los hablantes hacen de esas oraciones.

Así pues, en términos de Hjemslev, el procedimiento de análisis lingüístico de las gramáticas generativas se fundamenta tanto en efectuar procedimientos de análisis deductivos como procedimientos de análisis inductivos. La diferencia estriba en que las gramáticas generativas complementan los procedimientos de *análisis* con procedimientos *reconstructivos* o procedimientos *sintéticos* de construcción de oraciones estableciendo parámetros axiomáticos de tipo lógico formal. Lo anterior, conduce a que sus creadores hayan optado por denominar a su teoria como LA ESTRUCTURA LOGICA DE LA TEORIA LINGUISTICA (Chomsky, N. : 1975b) y a sentar las bases cientificas para la noción de *lenguaje* como modelo universal de las lenguas naturales.

### §.1.4.0.Los Puntos de Discrepancia.

Gran parte de la polémica actual en torno a las gramáticas generativas se centra justamente en las implicaciones y presuposiciones que sus creadores le asignan al término "lógica", y la relación que puede tener con los procesos mentales y la adquisición del conocimiento en general.

En realidad, desde el punto de vista de los funcionalistas, la descripcion formal de la teoría generativa, sólo aspira a ser un estudio del *proceso lógico* de la construcción de oraciones en las lenguas naturales y no estudios sistemáticos de la *lógica de los usos de los enunciados en las lenguas naturales.* Los argumentos más sólidos provienen de la escuela funcionalista británica, a quienes Chomsky ha dado por llamarlos *teóricos de la comunicación* (Chomsky, N. : 1975a).

Los teóricos de la comunicación, a diferencia de Hjemslev y los generativistas, amplian el concepto de 'texto' como una *conección* propia de las clases de las clases, y lo estudian bajo el empleo que el hablante hace de él durante el uso cotidiano de la lengua, estudiando al texto bajo una *situación* y *contexto real* ("real" en el sentido pragmático, es decir, marcado por el momento de la enunciación) en donde la corrección de su uso le corresponde más bien a los hablantes decidir como usuarios naturales de esa lengua, observándolo en el discurso conectado o *coherente* desde un punto de vista semántico-pragmático (van Dijk, T. : 1980).

Bajo el enfoque funcionalista anterior, el análisis gramatical del texto de Hjemslev, se convierte en un análisis del *discurso* o de textos conectados, y se observa al fenómeno discursivo a partir de sus funciones comunicativas a través del empleo y los propósitos que el hablante tiene al momento de esgrimir su enunciado (Austin, J. L. : 1962). Por lo tanto, el enfoque comunicativo del análisis lingüístico tiende a restaurarle a los procedimientos anteriores de análisis y síntesis gramatical, la espontaniedad que el hablante hace de ellos durante el empleo cotidiano de la lengua, es decir, la diferencia fundamental entre lo que es un *lenguaje formal* y una *lengua natural*, o análogamente, la diferencia entre un enunciado formalmente construido y un enunciado natural gramaticalmente aceptable.

La otra parte de la polémica, se centra más bien en el tipo de vinculación que debe existir entre el nivel de análisis semántico y el nivel de análisis sintáctico. Aquí, las líneas de cuestionamiento han centrado sus indagaciones en descubrir si el nivel semántico actúa con mayor presencia a partir de las estructuras profundas, o a partir de las estructuras superficiales. En este trabajo, no nos ocuparemos de este problema, en vista de la complejidad que reviste la noción de *nivel semántico* (Chomsky, N. : 1975a). No obstante, se asumirá que los *procesos mentales* de tipo inconsciente comparten una cierta relación entre el nivel sintáctico y el nivel semántico, y que ellos se describen mejor con un tipo de gramática generativa que se vincula tanto *intensional* como *extensionalmente* con el nivel semántico y con el nivel pragmático, lo que se verá más adelante al discutir los aspectos que vinculan a la oración con la *proposición*.

Para resumir el panorama lingüístico arriba expuesto, y para relacionarlo con el enfoque matemático, propondremos en este trabajo de tesis que la característica común de las tres escuelas lingüísticas mencionadas en los párrafos anteriores, es su interés central por desarrollar descripciones y procedimientos de análisis y síntesis lingüísticos cada vez más próximos a un rigor y a una consistencia de tipo lógico-matemática para poder cimentar a la *teoría* lingüística como una suerte de *teoría científica*. Son estos esfuerzos iniciales los que a nuestro juicio, sientan las bases lingüísticas para poder considerar en la actualidad el desarrollo de campos especializados de estudio tales como la *lingüística matemática*, la *lingüística cuantitativa* y la *lingüística computacional* que son los campos de estudio lingüístico especializado en donde tienen una importancia fundamental conceptos lógico-matemáticos tales como *elementos discretos* , *entes primitivos*, *estructuras básicas*, *proposiciones* y *transformaciones* que más bien son componentes sustraídos por propiedades lógicas que caracterizan a los análisis efectuados sobre sistemas numéricos, y sólo hasta épocas recientes se ha buscado vincularlos a los sistemas lingüísticos, careciendo en lo fundamental, de un enfoque hacia lo comunicativo de la lengua.

A continuación, se pasa a discutir el enfoque matemático desde un punto de vista cronológico sobre la vinculación de los modelos matemáticos con el pensamiento, y por extensión con la lengua natural.

## § 1.5. PANORAMA MATEMATICO

### § 1.5.0. Las Matemáticas.

Desde el punto de vista matemático, su interés por procedimientos de análisis no nace de la preocupación por su objeto de estudio como un todo de caracter lingüístico-acústico, sino más bien como un todo de tipo geométrico-visual.

Esto último, se remonta hasta la época de la Grecia Clásica con los trabajos monumentales de Euclides[1] sobre la geometría (D. E. Smith : 1958, y Bunt, N. H.; Jones, P. S & Bedient, J. P. [S. F.]). Con la introducción del álgebra por los árabes hacia fines de la Edad Media y la intervención de unos cuantos matemáticos destacados hasta mediados del Siglo XVIII, el conocimiento matemático se podía resumir en tres campos distintos de estudio: la *geometría*, el *álgebra* y el *análisis* (ibid).

A mediados del Siglo XVIII, se inicia la *rigurización* del conocimiento matemático que culmina con la *axiomatización* de la geometría por Hilbert a fines del Siglo XIX (ibid).

A la entrada del Siglo XIX, también ingresa un nuevo campo de estudio en las matemáticas: el *cálculo*. La búsqueda filosófica

[1] Aproximadamente, 300 años antes de nuestra era.

por vincular estos cuatro campos del conocimiento matemático, es la pauta de lo que posteriormente sería el concepto general de un *lenguaje matemático* en oposición a *las matemáticas*, que empieza a gestarse desde mediados del Siglo XIX con los trabajos de Gottlob Frege (ibid).

§ 1.5.1. Los Fundamentos de la Aritmética.

A mediados del Siglo XIX, renace en Europa una preocupación ancestral entre los matemáticos en torno a las relaciones que se suscitan entre el *pensamiento* y el *método de la escritura notacional científica* de las matemáticas, debido en gran parte a los trabajos sobre la teoría de conjuntos de George Boole y de Georg Cantor quienes habían propuesto que el pensamiento matemático se regía por leyes y reglas que podían *formalizarse* matemáticamente (ibid).

Los trabajos de Gottlob Frege publicados en 1879 contextualizan y le dan solidez a las propuestas hechas por Boole y por Cantor en 1847 y en 1854, respectivamente, cuando amplía sus propuestas en el sentido de que el pensamiento matemático se podía regir por leyes y por reglas que se podían, a su vez, formalizar, no matemáticamente, pero sí *logicamente* (Frege, G. : 1972).

Por siglos había prevalecido en la matemática una opaca distinción entre la *lógica aristotélica* y el campo propio del conocimiento matemático (Gortari, E. : (1965). Con Frege (1879), la barrera entre el *silogismo* y el *lenguaje de las fórmulas matemáticas para el pensamiento puro* empezó a desvanecerse a tal grado que se llegó a afirmar que la diferencia entre el *lenguaje de las fórmulas aritméticas* y la lengua natural era *más* bien de grado similar al que pudiese darse entre el microscopio y el ojo, o entre el *modelo de un fenómeno* y el fenómeno natural, en términos de Husserl (Xirau, R. : 1971).

De hecho, el trabajo de Frege se consideró como el primer trabajo de *logica formal* que sirvió de base para los "Principia Mathematica" de Alfred North Whitehead y Bertrand Russell (1924), quienes son los que desarrollaron las bases que sustentan a la *lógica simbólica* actual como parte esencial del método de la *lógica matemática* (Russell, B. : 1903; y Gortari, E. : 1965).

Las preocupaciones principales de Frege (ibid: p.p. 107-14) descansaron sobre la realidad de la *unidad* como base de los *sistemas numéricos*, de las *leyes aritméticas* en general, y de los conceptos de *función*, *deducción lógica* y *significado referencial* como conceptos matemáticos, así cómo de lo *finito* y de lo *infinito* de los procesos del cálculo.

Nos detendremos un poco con Frege, para dar una descripción de la manera en que él concibió a la estructura de la *proposición* del lenguaje matemático para posteriormente fundamentar la analogía de la estructura generativa entre la estructura de la *oración* de Hjemslev y la estructura de la *proposición* de Frege.

§ 1.5.1.1. La Proposición de Frege.

Frege se avocó al estudio del lenguaje simbólico de la matemática recurriendo para ello al concepto fundamental de la lógica formal: la *proposición*, subdividida a su vez en *argumento* y *predicado*.

Encontró que en la base de los *enunciados judicables* (es decir, enunciados que establecen un juicio de la veracidad de un referente) éstos se remitían a dos elementos fundamentales; una *afirmación rotunda* ó una *negación contundente*.

Para Frege, tanto la afirmación como la negación de una proposición se relacionaba directamente con la *claridad* de los procesos perceptuales del pensamiento humano libres de toda ingerencia de los aspectos socio-culturales y psico-afectivos que tendían a alterar la percepción de la *realidad*, o mundo fenomenológico natural (Xirau, R. : 1971). En otras palabras, su interés principal consistía en *demostrar* confiablemente el encadenamiento *formal* de las partes constitutivas del fenómeno observado, desde el punto de vista del significado referencial del símbolo, y no en *derivar* un *modelo idealizado* de ese simbolismo en el sentido generativista.

Así pues, propone la construcción de un sistema lógico formal en donde cada proposición era una descripción exacta de cada parte constitutiva del fenómeno matemático *real* y en donde el método seguido por Euclides resultaba ser un seguimiento riguroso y consistente (es decir; marcado por leyes en donde un afirmación compuesta con otra afirmación era una afirmación *verdadera*, una afirmación compuesta con una afirmación *falsa* era una *contradicción*, una afirmación compuesta con una negación *falsa* era una afirmación *verdadera*, etcétera) de la demostración del fenómeno matemático.

Frege reconoció que en la estructura misma de los lenguajes naturales se encontraban los elementos mínimos que permitían ese tipo de descripción. Así, al discutir los conceptos de *variable*, *constante* y *unidad* concluyó que representaban a un tipo de categoría única que se distinguía de aquella que le correspondía a los *operadores matemáticos* tales como: *suma*, *resta*, *multiplicación* y *división*. En su descripción, separó tajantemente lo psicológico de lo lógico, entendiendo a lo *lógico* como aquellas propiedades que le pertenecen a los fenómenos naturales propios, en oposición a como la mente humana los percibía.

Ante ésto, para Frege, los objetos matemáticos adquirían una *representación psicológica* en la mente, que a su vez podían ser símbolos o palabras. Su preocupación principal se centró en los símbolos matemáticos y su contenido conceptual (ver Figura 1).

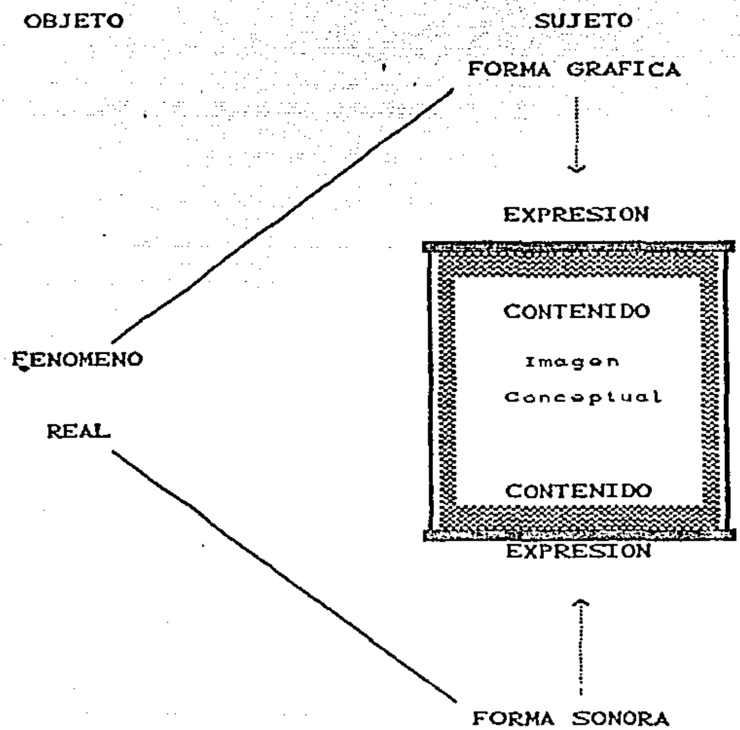



FIGURA 1.

La linea punteada indica la relacion indirecta entre la escritura de la palabra y su objeto referente. El cuadro general indica el plano del contenido y su relacion con el plano de la expresion desde el punto de vista de Gottlob Frege segun nuestra interpretacion.

§.1.5.2. El Lenguaje Matemático según Russell.

Por su parte, Bertand Russell y Alfred North Whitehead fueron los primeros lógicos modernos que propusieron que

> *la evidencia de la matemática y de la lógica pudiera ser* '*inductiva*'.[1] (Lakatos, I. : 1978)

si recurría a procedimientos axiomatizantes que partían de unos cuantos elementos primitivos (Russell resume el conocimiento matemático de su época en aproximadamente unos 20 elementos), de donde posteriormente (Russell, B. : 1924) nació el pensamiento de la similitud entre la lógica y la matemática en vista de que las proposiciones de ambas son aceptadas debido a la verdad observada de algunas de sus consecuencias lógicas. Es decir, con Russell, el sistema axiomático de los cinco libros de Euclides y de todo el conocimiento de aritmética y de la matemática de sus días (500 A.C. - 1900 D.C.) forma un discurso encadenado derivable por proposiciones que se enlazan entre sí a partir de verdades o postulados primitivos, eliminándo todo hueco de razonamiento entre una proposición y otra con reglas lógicas de implicación.

La demostración de lo dicho en el párrafo anterior, por Russell y Whitehead, dió lugar a una de las discusiones más revolucionarias del conocimiento matemático actual, a tal grado

[1] Subrayado nuestro. Aquí, 'inductiva' no tiene el mismo significado que en Hjemslev, sino más bien tiene el sentido de un razonamiento de tipo axiomático que caracteriza a la inferencia lógica.

que algunos especialistas consideran que los descubrimientos de los últimos cincuenta años en el campo de la matemática rebasan muy por encima todo el conocimiento matemático anterior. Con ésto, nace la idea del *lenguaje de la matemática* , en donde por lenguaje de la matemática se presupone todo el conocimiento matemático que es traducible total y exclusivamente por proposiciones lógicas.

A continuación daremos un breve resumen de las discusiones más importantes, a nuestro juicio, que trajo consigo el nuevo enfoque hacia el conocimiento matemático en lo que resta de este siglo y que permiten poner en contacto a la lingüística con la matemática.

§ 1.5.3. El Lenguaje de la Matemática.

Entre los seguidores y críticos más destacados de la filosofía Frege-Russell-Whitehead sobresalen Ludwig Wittgenstein (Wittgenstein, L. : 1957) y Kurt Gödel (Nagel, E. & Newman, J. R. : 1958), y un grupo de destacados matemáticos europeos que se dieron a conocer al mundo con el nombre de Nicolás Bourbaki (Hernández, J. : 1978, y Bourbaki, N. : 1968).

Para L. Wittgenstein (destacado alumno de Bertrand Russell), el lenguaje de las fórmulas matemáticas de Frege, Russell y Whitehead no era el lenguaje por excelencia de la lógica sino más bien un *método de la lógica* en donde sus proposiciones consisten en ecuaciones que no expresan ningún pensamiento ya que la función de la ecuación es equivalente a la *tautología* en la lógica:

> *Si dos expresiones están unidas por el signo de igualdad, esto significa que se puede sustituir la una por la otra...*
> (L. Wittgenstein : 1957; prop. 6.23)

Por otro lado, aunque Wittgenstein (ibid) reconoce que en la proposición se encuentran los elementos simples de la estructura de la lengua natural y del pensamiento matemático, considera que lo esencial del lenguaje de las fórmulas matemáticas no está contenido en el análisis semántico del enunciado judicable sino más bien en proporcionar las habilidades necesarias para resolver los problemas matemáticos por medio del *proceso del cálculo*.

Por su parte, Kurt Gödel (1935), llega a demostrar con base en la descripción de B. Russell, que los sistemas axiomáticos no pueden aspirar a ser completamente rigurosos y consistentes. Gödel basa su trabajo recurriendo a una analogía con el metalenguaje, la *metamatemática*, y con el uso de números primos en vez de palabras, comprueba la capacidad de creación al infinito de los sistemas axiomáticos que como cualquier sistema semántico que recurre a una cantidad discreta y económica de semas, tiene la capacidad de construir significados al infinito, muchos de ellos contradictorios, de manera que no se puede determinar con exactitud las consecuencias lógicas de un sistema axiomático.

Los Bourbaki, por su parte, afirman de manera dogmática, que los sistemas axiomáticos del lenguaje de la matemática tienen el propósito principal de *demostrar* las intuiciones del matemático recurriendo a ellos como una suerte de modelación para interpretar a los fenómenos observados y constatar su validez y confiabilidad. Su preocupación principal consiste en estudiar la *estructura* fundamental de los sistemas axiomáticos y se dedican a dar una descripción *formal* (es decir, de formas de expresión) y lógica del conocimiento matemático que terminan publicando en seis libros, todos encadenados lógicamente entre sí. La publicación de "Eléments de Mathématique" (1968) trajo consigo una reestructuración general de los métodos de enseñanza de las matemáticas en casi todos los sistemas educativos en el mundo, lo cual es todavía en estos días objeto de gran discusión y profundas reflexiones (Hernández, J.: 1978).

### § 1.5.3.1. La Lingüística Matemática.

Siguiendo los modelos de Russell, otros filósofos se avocan al diseño de teorías formales sobre la misma lógica. Uno de ellos, Rudolf Carnap (1942) llega a construir una descripción bastante rigurosa de la lógica formal que subdividió en tres niveles distintos de análisis tomados de la lingüística (un nivel semántico, un nivel sintáctico y un nivel pragmático) que es la base de las *gramáticas formales* que estudian a los lenguajes de programación de hoy en día. Carnap (ibid) propuso con lo anterior la creación más rigurosa de una nueva disciplina que ya había sido propuesta en el siglo pasado por Charles Pierce, y a inicios de este siglo por F. De Saussure; la *semiótica*[1], en donde el objeto principal de estudio lo componen los signos de los lenguajes. El enfoque de Carnap, facilita el estudio del lenguaje de las fórmulas matemáticas como parte del estudio de los lenguajes formales en oposición a los lenguajes naturales. De aquí pudieron haber surgido los primeros enfoques teóricos sobre la lingüística matemática al combinarse con los enfoques estructuralistas matemáticos que veinte años después aflorarían con los Bourbaki, en vez del enfoque informático y de computabilidad que predomina en la actualidad.

Inicialmente, se le consideró a la lingüística matemática como parte de la lógica matemática, dando la pauta para el estudio de las traducciones automáticas al vincular el *lenguaje de las máquinas calculadoras* con el *lenguaje de los números* (Haller, H. : 1988). Con los trabajos de A. Turing (1937) y E. Post (1940) sobre los lenguajes para máquinas computadoras y la inteligencia

1 De Saussure, utilizó el término 'semiología' en vez de 'semiótica'. Ver §1.1.0..

artificial, surge una nueva rama de aplicación a causa de los intentos por diseñar programas de traducción completamente automatizados que incluye los primeros experimentos de traducción automatizada para lenguas naturales. En la actualidad, la traducción automatizada de las lengua naturales forma parte de un campo de estudio que se denomina la *lingüística computacional* (Slocum, J. : 1985).

Con la publicación de *Estructuras Sintácticas* por N. Chomsky en 1957 sobre gramática generativa, y los trabajos de A. Kolmogorov, I. I. Revzin, S. K. Shaumjan y O. S. Kulagina en la U.R.S.S. sobre procedimientos estadísticos y análisis matemáticos de la lengua natural, la escuela matemática rusa declara las bases firmes para consolidar a la *lingüística matemática* como una disciplina por derecho propio (Gladkii, A. V. : 1970). La inclusión de métodos estadísticos en el estudio de las lenguas naturales, se ve afectada por un nuevo enfoque sobre la relación entre la matemática y la lingüística, lo que orilla a ciertos lingüistas europeos, principalmente, a considerar el uso de modelos matemáticos no deterministicos como otro campo de la lingüística matemática que denominan la *lingüística cuantitativa* (Marcus, S., Nicolau, E. & Sarti, S. : 1966).

Según A. V. Gladkii (1970), la lingüística matemática actual parte del grupo de disciplinas matemáticas denominadas *matemáticas finitas* cuyas bases se sustentan en la lógica matemática, el álgebra abstracta, los métodos combinatorios, la teoría de los algoritmos y la teoría de los autómatas, fundamentalmente. Por otro lado, según el mismo autor, la lingüística matemática ha tomado distintas direcciones siendo una de ellas la teoría de las gramáticas generativas que proviene de :

*la interpretación de la gramática de una lengua en tanto que como sistema genera las unidades de las palabras gramaticales del discurso, proposiciones, etcétera.* (Gladkii, A. V. : ibid)

y su aparato formal posee un caracter matemático que en lo fundamental pertenece a la teoría sobre el cálculo que es una rama de la lógica matemática.

Con lo anterior, Gladkii, por lo tanto, caracteriza a las gramáticas generativas como una herramienta que podría describir, además de las unidades gramaticales del discurso, a las unidades gramaticales del lenguaje matemático.

§ 1.6.0. Resúmen del Panorama General.

Por todo lo expuesto en este capitulo, se desprende que tanto en el campo de la matemática, como en el campo de la lingüística, se presupone de manera intuitiva, confusa y con poca claridad, una vinculación entre ambos campos de estudio. Esta vinculación parece radicar, a veces, bajo una perspectiva psicológica, y , a veces, bajo una perspectiva de procedimiento de análisis sistemático, lógico y metodológico.

Por un lado, para la matemática, su estudio general parece inclinarse a visualizar al conocimiento matemático bajo un enfoque lingüístico. Por otro lado, la lingüística, parece inclinarse hacia los estudios matemáticos y lógicos para establecer algunos de sus métodos de análisis. Debido a ésto, esta tesis enfoca a ambos campos de estudio bajo un punto intermedio, un enfoque psico-lingüístico (Fodor et al.:1974), que podría ser un punto de partida tanto para un análisis de la *adquisisción* de una lengua natural, como de un lenguaje formal. Cómo no es el objeto de esta tesis elaborar un marco teórico para la psico-lingüística (que puede o no existir), no se toca a profundidad la validez teórica que podría tener un enfoque general de '*procesos mentales*', ya que para poder entrar a su discusión con algunas bases, habría la necesidad de tener una descripción '*gramatical*' del lenguaje matemático. Nuestra búsqueda por distintas bibliografías al respecto, no nos permitió obtener esa descripción gramatical de la matemática. Ante esta disyuntiva, nos hemos visto en la necesidad de construir esa gramática como punto inicial para cualquier discusión al respecto. Este trabajo, representa ese esfuerzo. Ante ésto, lo que a continuación sigue, es un enfoque totalmente nuevo hacia el lenguaje matemático, que de seguro va a despertar algunas polémicas entre profesionistas allegados al campo del conocimiento matemático. Esperemos que así sea.

# CAPITULO 2

## § 2.0. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Ante el panorama lingüistico previamente descrito en el primer capítulo y su contraparte matemática del mismo, surgió a principios de 1985 una preocupación por vincular ambos enfoques en torno a la *proposición*' de caracter matemático y la *oración* desde el punto de vista de la retención en la memoria. Esto condujo a un experimento en el cual se observó a 39 sujetos del cuarto año de la Especialidad de Matemáticas de la Escuela Normal Superior de la Universidad Autónoma de Guerrero.

El experimento consistió en distribuirles diez tarjetas a cada uno de los sujetos, las cuales contenían en su totalidad cinco *oraciones simples* y cinco *expresiones matemáticas compuestas* tomadas de la *Segunda Serie de Problemas Matemáticos* que utilizó A. V. Krutetsky (1962b) para observar la *habilidad para generalizar material matemático.*

Las *expresiones compuestas* que utilizó Krutetsky, se ordenaron en cinco rangos de complejidad en los cuales subyacían implícitamente distintos niveles diferenciales semánticos para el tipo de *símbolo matemático* que se utilizaba sin tomar en consideración un nivel sintáctico en general (ver Cuadro 1).

| EXPRESIONES MATEMATICAS COMPUESTAS | | |
|---|---|---|
| ORDEN DE COMPLEJIDAD | TRINOMIO PERFECTO | REDUCCION |
| Mas Simple | (1) $a^2 - 2ab + b^2$ | $(a - b)^2$ |
| Simple | (2) $9a^4 - 6a^2m^2 + m^4$ | $(3a^2 - m^2)^2$ |
| Intermedio | (3) $16x^2 - 4xy^2 + \frac{1}{4}y^4$ | $(4x - [\frac{1}{2}]^2)^2$ |
| Complejo | (4) $2xy - x^2 - y^2$ | $-([x - y]^2)$ |
| Mas Complejo | (5) $b^2 + (x - a)^2 - 2b(x - a)^2$ | $(b - (x - a))^2$ |

CUADRO 1.[1]

Ante lo anterior, el experimento se propuso observar si en la *memoria corta* de los sujetos influyía en mayor grado el tipo de estructura sintáctica que el diferencial semántico de los símbolos desde el punto de vista de la relación entre la percepción y la memoria a través de la lectura y memorización de las expresiones compuestas.

Para poder observar la estructura sintáctica de las

[1] El nivel de complejidad de Krutetsky presuponía que las expresiones de trinómio perfecto podían subdividirse en símbolos que se denominaban 'constantes', 'coeficientes', 'exponentes', 'variables', y 'signos operatorios', que adquirían por si mismos un diferencial semántico durante la lectura de las expresiones, en donde su complejidad dependía en parte de sus combinaciones.

expresiones matemáticas se propuso provisionalmente *categorías sintácticas* para cada tipo de símbolo matemático. Así, por ejemplo, los *exponentes* vinieron a considerarse un tipo de categoría abreviada con la letra "E", las *constantes* otro tipo abreviado con la letra "K", los *coeficientes* otro tipo abreviado con la letra "C", las *variables* con la letra "V", y los *signos operatorios* con la letra "O". Para el caso de los *paréntesis* de las expresiones matemáticas "()", se reemplazaron tal cual y se introdujeron los *corchetes* "[]" y los gatos "##" para marcar los grupos sintácticos de las categorías sintácticas mencionadas arriba. En el Cuadro 2 se muestran las agrupaciones sintácticas.

| GRUPOS SINTACTICOS DE TRINOMIOS PERFECTOS | |
|---|---|
| No. | ESTRUCTURA SINTACTICA DE LA EXPRESION |
| (1) | {#O~K~E#} ~ {#O~C~K~K#} ~ {#O~K~E#} |
| (2) | {#O~C~K~E#} ~ {#O~C~K~E~K~E#} ~ {#O~K~E#} |
| (3) | {#O~C~V~E#} ~ {#O~C~V~V~E#} ~ {#O~C~V~E#} |
| (4) | {#O~C~V~V#} ~ {#O~V~E#} ~ {#O~V~E#} |
| (5) | $\{\#O\sim K\sim E\#\}\sim\{\#_1 O\sim\#_2 V\sim O\sim K\#_2\sim E\#_1\}\sim\{\#_1 O\sim C\sim K\sim\#_2 V\sim O\sim K\#_2 E\#_1\}$ |

CUADRO 2.

Un análisis posterior de esas categorías sintácticas permitió observar que las categorías en sí se podían resumir gramaticalmente en la siguiente regla, por medio de un criterio de evaluación que contaba los distintos símbolos de las categorías y los ordenaba sintácticamente de izquierda a derecha:

(2)[2]

$$\ldots\ O \begin{Bmatrix} K \\ C \\ V \end{Bmatrix} (E)\ \ldots$$

De lo anterior, surgieron los problemas concretos de este trabajo de tesis. Las preguntas fundamentales que aparecieron con el trabajo, son las siguientes:

(3) ¿Son las constantes "K" desde el punto de vista gramatical, distintas de las variables "V", o son un caso derivado de ellas?

(4) ¿Mantiene el signo operatoria "O" las mismas relaciones con los coeficientes "C", las variables "V", las

[2] Aquí se sigue con los procedimientos típicos de las gramáticas generativas de utilizar las llaves largas para indicar la opcionalidad del uso de una categoría por sobre otra. Los símbolos que no aparecen encerrado con paréntesis, son obligatorios. La colocación de los símbolos en una columna indica que es obligatoria la selección de uno de ellos, mientras que el arreglo en renglón de las llaves y los paréntesis indica la selección de uno de los dos o de ambos. Los puntos suspensivos "..." indican el contexto a la izquierda y a la derecha que en este caso particular es una aplicación recursiva de la categorización, la que también puede ser extensiva al símbolo exponencial "(E)".

constantes "K", y los exponentes "E", o no?

(5) ¿Qué papel gramatical juegan los exponentes "E" en relación con las otras categorías sintácticas descritas anteriormente?

Para poder acercarnos a responder las preguntas anteriores, nos vimos en la necesidad de recurrir a una gramática generativa que diera cuenta de la generación de estos símbolos. En la búsqueda e indagación al respecto por distintas bibliografías, se tuvo que aceptar que dicha gramática no había sido elaborada, o por lo menos publicada. Ante ésto, no se tuvo más remedio que construir provisionalmente un modelo generativo que diera cuenta de este tipo de expresiones matemáticas (Hernández-Márquez, B. B. : 1985; p.p. 27) para poder concluir con el experimento.

Para este trabajo de tesis nos proponemos construir dicho modelo generativo que de cuenta, y nó de manera provisional sino de manera sistemática, de la sintaxis de las expresiones matemáticas básicas que construyen a las *expresiones de trinómio de cuadrado perfecto*, y por extensión, a las expresiones básicas del *álgebra elemental*.

A continuación tocaremos algunos de los aspectos generales de la exposición del primer capitulo con el objeto de construir un marco teórico de referencia para este trabajo. No obstante, la exposición será un poco vaga ya que es un tema bastante polémico y muy ambiguo. Su intención es más bien, sugerir, posibles interpretaciones sobre lo que podría ser una *gramática de la matemática*, y no un estudio a fondo del uso de ese término en el campo de la matemática. Con ésto en mente, se pasa a plantear el enfoque de esta tesis sobre la *gramática de la matemática.*

un marco teórico de referencia para este trabajo. No obstante, la exposición será un poco vaga ya que es un tema bastante polémico y muy ambiguo. Su intención es más bien, sugerir, posibles interpretaciones sobre lo que podría ser una *gramática de la matemática*, y no un estudio a fondo del uso de ese término en el campo de la matemática. Con ésto en mente, se pasa a plantear el enfoque de esta tesis sobre la *gramática de la matemática.*

justificar al concepto de *número* en la matemática, se sugiere recurrir a la indagación de la relación directa que guarda con las nociones que se tienen de los conjuntos en los campos de estudio como la Física, la Teoría de la Acción y la Lingüística (Apostol, L. : ibid).

Bajo la perspectiva anterior, se presupone que muchas ciencias son ciencias tipológicas, es decir, ciencias que estudian el complejo de la realidad a través del estudio de modelos simplificados de ella, recurriendo a la noción de una *realidad pluralística* que se explica con base en la noción matemática del concepto de *número* para armar el modelo científico. Así, se tiene que:

(a) La realidad presenta distintas regiones y distintas teorías de conjuntos son verdaderas para las distintas regiones.

(b) El ser humano necesita distintos tipos de acción y distintas maneras para construir en tanto que distintas teorías de conjuntos son verdaderas para estos distintos tipos de acción y construcción.

(c) El ser humano utiliza distintas maneras para designar por medio del uso del lenguaje y distintas teorías de conjuntos son verdaderas para estas maneras de designar.

(d) Para cada tipo de realidad, lenguaje o acción, pueden construirse varios modelos que simplifican el objeto estudiado en distintas direcciones de manera tal que señalan uno o unos cuantos de sus rasgos (Apostol, L. : ibid).

De lo anterior, se desprende que a un *conjunto* se le clasifica por las *propiedades comunes* de uno o unos cuantos rasgos que comparten todos los miembros que pertenecen a ese conjunto. Cuando distintos conjuntos comparten ciertas *propiedades matemáticas* que definen una relación lógica de equivalencia (a. equivalente consigo mismo, b. transitividad, y c. reflexividad) bajo una cierta operación matemática (suma, resta, multiplicación, división, etcétera), se denominan "*clases*" que a su vez pueden estar contenidas unas en otras, formando así una jerarquía, en donde la jerarquía mayor que contiene a todas las otras clases, se denomina la "*clase de las clases*" (Cobham, A. : 1965). Así, por ejemplo, bajo la perspectiva matemática, todas las posibles maneras de generar un *número dos* ([3 − 1], [$\frac{4}{2}$], [2 • 1], etcétera) forman una *clase*, en principio, porque a) son equivalentes entre si, b) son transitivas --es decir, si uno de sus miembros es equivalente con otro que a su vez es equivalente con otro más de sus miembros, produce el mismo resultado que el primero con el tercero, y c) son reflexivos, es decir, el uno equivalente con el otro es lo mismo que el otro equivalente con el uno. Así, la *clase de las clases* o *jerarquía mayor*, podría constituirse por todos los tipos de números habidos y por haber que reunan ciertas características comunes (es decir, los *números enteros*, los *números naturales*, los *números reales*, etcétera).

Extendiendo los conceptos anteriores al sentido lingüístico, se observa que las partes componentes de una *cadena* en el sentido de Hjemslev podrían también definirse tanto como "*clases*" que como "*conjuntos*", dependiendo en si se considera a los miembros que pertenecen a una categoría sintáctica como producto de operaciones de *transformación*, o si se les considera como *enlistados* de miembros. Es decir, cuando se analiza la estructura de un sistema, y se conforman listas de palabras , morfemas, oraciones, o lo que sea, que se clasifican bajo un tipo sintáctico, se están conformando *conjuntos de formas* en sentido matemático. Por otro lado, cuando se establecen relaciones de algún tipo entre los conjuntos anteriores, y se definen los miembros de un tipo sintáctico por las relaciones entre los distintos conjuntos, se están conformando *clases*, bajo un criterio de *transformación*. Es bajo este contexto, que este estudio considera el término "gramática de la matemática".

A continuación enfocaremos la visión de la matemática aplicada sobre el concepto anterior de *jerarquía* y su aplicación dentro de las *gramáticas formales*.

§ 2.1.0.1. Gramáticas Formales.

En las gramáticas formales de los lenguajes formales, esta jerarquización, se esquematiza por medio de diagramas arbóreos, en donde la clase de las clases ocupa el *nódulo* denominado "*raiz*", o el único *nódulo* en donde no termina ninguna *ramificación* (Guerra Ortiz, V. M. : 1969). Por otro lado, los nódulos de las gramáticas formales, designan más bien a proposiciones lógicas que a tipos sintácticos de la oración, aunque muchas veces ejemplifican sus diagramas arbóreos con palabras de un diccionario, es decir,construyen arborescencias a partir de los análisis que efectuan sobre una *sucesión de proposiciones* o *de palabras*, a las cuales también denominan *cadenas*. Así por ejemplo, utilizan como cadena a una sucesión de palabras como en la Figura 2.:

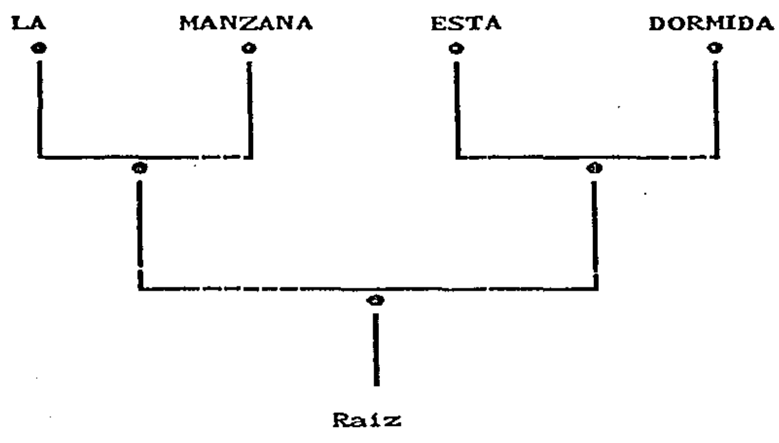



FIGURA 2.

en donde las ramas se indican con las rayas negras y los nódulos con los puntos negros. En este caso, la clase de las clases se clasifica como *raiz* que contiene a dos clases; a) una que agrupa a la palabra LA con la palabra MANZANA, y b) otra que agrupa a la palabra ESTA con la palabra DORMIDA. A su vez, cada una de estas palabras podría ser un símbolo para un conjunto de palabras que tuvieran las mismas propiedades, nominalmente, la propiedad de pertenecer a esa parte de la estructura que permite construir oraciones con cierto carácter gramatical, así por ejemplo:

(6)[3] LA = {la, mi, una ...}

MANZANA = {manzana, mente, muchacha ...}

ESTA = {está, vive, sueña ...}

DORMIDA = {dormida, podrida, cansada ...}

sería una descripción formal en la teoría de conjuntos de más de ochenta y un ($3^4$) oraciones posibles que componen la estructura de la clase de las clases de la Figura 2, objeto de lectura por una máquina analítica. En las gramáticas formales, la transición de conjunto a clase, a clase de las clases se opera por *conjunción* o coexistencia de los conjuntos y clases, y está reglamentado por leyes sobre las *tablas de verdad* que se denominan *procesos de*

3 Aquí, el signo de igualdad "=" indica el conjunto. Los corchetes "{}" encierran a los elementos que pertenecen al conjunto, y los puntos suspensivos ". . ." indican "etcétera".

reducción (Guerra Ortiz, V. M. : ibid). Es decir, el análisis estructural de los lenguajes formales decide si una cadena del lenguaje pertenece o no a un cierto lenguaje en particular;

> *"al ir reduciendo la cadena original a sus partes más significativas (generales) ...[y]...recurriendo para ello a un número finito de reglas sobre un conjunto de elementos (que puede ser infinito) encadenados sucesivamente..."*
>
> (Guerra Ortiz, V. M. : ibid)

o, análogamente, en términos de las gramáticas generativas, analiza la estructura superficial de un enunciado escrito hasta poder encontrar su estructura profunda distintiva. Desde el punto de vista matemático, los diagramas arbóreos, así elaborados, podrían esquematizarse de muchas formas, incluso, con una *máquina turing* (Hockett, Ch.: 1976), por lo cual, también se les conoce con el nombre de *gramática de estados finitos*, en virtud de que a una raíz en particular, sólo le corresponde un número finito de casos.

## § 2.1.0.2. Gramáticas Generativas.

Inicialmente, las gramáticas generativas, a diferencia de las gramáticas formales, no sólo se conformaron con analizar cadenas de signos lingüísticos, sino que además, invirtieron la dirección del proceso de reducción, y en vez de reducir una cadena de signos hacia su raíz, partieron de la raíz y *generaron* una cadena de signos que en última instancia, quedaba sujeta a un criterio de verificación que no necesariamente se sustentaba en las tablas de verdad. A este proceso, Chomsky (1957) lo denominó inicialmente "proceso mental de un lector ideal" cuando el criterio de verificación de la cadena de signos quedaba sujeto a la *aceptabilidad* gramatical que un *lector inteligente* tenía al respecto. La propuesta, verdaderamente original para ese entonces, consistió en que por "lector ideal" y por "inteligencia", Chomsky se estaba refiriendo a un ser humano y no exclusivamente a una *máquina de inteligencia artificial* (Chomsky, N. : 1975b).

En sus etapas posteriores, los enfoques teóricos de Chomsky, se van modificando sustancialmente (Alba, L.: 1986), llegando a sustituir "procesos mentales de un lector ideal" por conceptos más definidos como la *competencia*, y la *performancia* de un hablante común. Lo mismo ocurre con los conceptos 'estructura profunda' y 'estructura superficial' que más bien son las denominaciones de Chomsky para los conceptos de 'raíz' ("oración nuclear" o "*kernel sentence*" en la versión de 1957) y 'cadena de signos lingüísticos', respectivamente, de la gramática formal.

En esta tesis, se propone que son estos conceptos fundamentales de 1957, los que permiten la descripción de la sintaxis del álgebra elemental, concretamente, de las ecuaciones de trinómio de cuadrado perfecto mencionadas al principio de este capitulo.

§2.1.0.3. Sintaxis y Semántica.

Subsiste, todavia, un punto adicional que faltaría tocar brevemente para clarificar la aplicación de una gramática generativa sobre los campos numéricos. Desde el punto de vista matemático, el fenómeno *estructural* independiente del fenómeno semántico, no es una perspectiva novedosa, sino por el contrario, tiene su esencia misma en la fundamentación de la matemática moderna (Bourbaki, N: 1968). No obstante, desde el punto de vista lingüístico, la independencia relativa del nivel de estructura sintáctica, del nivel de significación, es un asunto bastante espinoso.

Para la matemática, el postulado de entidades abstractas, libres de vinculación significativa con el objeto o fenómeno referente, es una de sus características apriorísticas, como por ejemplo, en los sistemas simbólicos de las ecuaciones. Esta idea, se ilustra claramente con la afirmación de A. Robinson (1965), según la cual, las totalidades infinitas características de la matemática no existen en ningún sentido de la palabra, ya sea tanto en la realidad, como en la idealidad, es decir; literalmente carecen de sentido. ¿Acaso es posible hablar de una *variable* o de un *sistema numérico* con un contenido que se refiere a un objeto concreto? En esta tesis, se propone que sí, es decir, se visualiza al enunciado escrito como ese objeto concreto y material sobre el cual incide el conocimiento matemático para poder comunicarse. El razonamiento, se sustenta a partir de observaciones de F. Castaños (1977) y A. Marrón (1986). Estos investigadores encuentran que en los sistemas numéricos (sin considerar a los números infinitésimales) ocurre algo análogo a lo que ocurre en las configuraciones semánticas de supraordinal a hipónimo, sólo que a la inversa, de hipónimo a supraordinal.[4] Los campos semánticos de los términos genéricos de la teoría de números, es decir, los "números", los "números naturales", los "números enteros", los "números racionales", los "números reales" y los "números complejos", se configuran como conjuntos contenidos unos en otros, en donde es el último término "números complejos"

[4] En un contexto matemático, podría ocurrir un enunciado como:

(a) Los números de los números naturales se originaron en la India mucho antes de la época de Pitágoras.

presuponiendo por "los números" a los 'dígitos' del 1 al 9, sin que se considere una proposición falsa y sin sentido. En contraste, considérese el siguiente enunciado:

* (b) Los barcos de los barcos griegos se originaron en la India mucho antes de la época de Pitágoras.

que semánticamente resulta ser anómalo. (Se usa el asterisco * para indicar la 'inaceptabilidad' del enunciado) el que abarca a todos los otros términos sucesivamente a la inversa, y nó, el primero, los "números", el que contiene a los otros respectivamente . Este funcionamiento análogo pero inverso, sólo puede ser comparable a partir del plano de la expresión y no propiamente a partir del plano del contenido.

Por cuestiones de claridad en la exposición de la descripción de la sintaxis del álgebra elemental, que se tocará más adelante, a continuación se presentará un modelo notacional generativo en sustitución de los diagramas arbóreos comentados arriba.

§ 2.1.0.4. <u>El Modelo Generativo.</u>

El siguiente modelo generativo que se presentará fue seleccionado de entre varias descripciones generativas del español por dos razones fundamentales: a) su fácil acceso en México, y b) su promenorizada explicación del sistema notacional arbóreo y el sistema notacional de estructura de frases (phrase structure) generativo, a veces también denominada estructura ahormacional. Este modelo fue elaborado para hacer un estudio de las distintas estructuras profundas del español peninsular (Casellas, F. : 1979), y no propiamente del español de México. No obstante, ante la carencia de una descripción generativa del español de México, el modelo peninsular representa un grado de aproximación aceptable para este trabajo, salvo una o dos diferencias sustanciales en la conjugación verbal (el aspecto perfectivo-imperfectivo, por ejemplo).

El modelo notacional generativo, describe esencialmente a la estructura de las frases u hormas de las oraciones nucleares del español, a las cuales Casellas (1979: ibid) denomina "oraciones básicas", que en esencia se refieren al concepto de 'raíz' discutido en la sección anterior. El cambio de diagram arbóreo a notación generativa, consiste fundamentalmente en sustituir los *nódulos* por juegos de paréntesis. La conección entre la raíz, los nódulos y la expresión superficial, se denota con *reglas de reescrituración* que se indican con flechas "---▸", eliminándo así, el uso de las ramificaciones. La relación entre un nivel de descripción y otro se sintetiza con un *ordenador de reglas* que establece la *dominancia* y *precedencia* de las reglas de reescrituración, escribiéndose de arriba hacia abajo, y de izquierda hacia derecha, respectivamente, donde la primer regla describe la raíz.

A continuación se describirán los símbolos notacionales que se utilizarán para referirse a esta estructura de base:

a) Se utilizarán los parentesis simples "()" para denotar que el conjunto o clase aparece en la cadena de enunciación esctrita de manera optativba, es decir, que puede o no ocurrir en esa parte de la cadena de enunciación. Cuando el constituyente del mismo tipo, o categorial, ocurre en una parte dada de la cadena de enunciación de manera obligatoria, no se utilizarán los paréntesis para marcar sus fronteras.

b) Cuando uno o varios elementos categoriales aparezcan en una parte dada de la cadena de enunciación escrita y pueda reemplazarse entre sí, se utilizarán llaves largas rectángulares:

"[ ]"

c) La *coexistencia* de los elementos categoriales se denotará utilizando comas "," entre elemento y elemento.

d) La jerarquía superior dominante de los nódulos se indicará con reglas de reescrituración ordenadas de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, escribiendo el símbolo correspondiente al conjunto o clase dominante del lado izquierdo, mientras que sus subconjuntos precedentes irán del lado derecho, precedidos por una flecha "---▸" que se podrá leer como "se reescribe como". Asimismo, se enumeran las reglas con números romanos "i".

ORACION NUCLEAR

i) O ---▸ (neg), (INT), (IMP), SN, SV

ii) SV ---▸ aux, verbal, (CC)

iii) aux ---▸ t, M,, (haber - do), (progresivo - ndo)

$$\text{iv)} \quad \text{t} \dashrightarrow \begin{bmatrix} \text{presente} \\ \text{imperfecto} \\ \text{indefinido} \\ \text{futuro} \\ \text{condicional} \end{bmatrix}$$

$$\text{v)} \quad \text{verbal} \dashrightarrow \begin{bmatrix} \text{V, (SN), (pasiva)} \\ \\ \text{cop, PN} \end{bmatrix}, \text{ (CI)< (compl)}$$

$$\text{vi)} \quad \text{PN} \dashrightarrow \begin{bmatrix} \text{CC} \\ \text{SN} \\ \text{(int) Adj} \end{bmatrix}, \text{ (compl)}$$

$$\text{vii)} \quad \text{pasiva} \dashrightarrow \begin{bmatrix} \text{pasiva "se"} & \\ \text{pasiva} & \begin{bmatrix} \text{"ser"} \\ \text{cop} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{viii)} \quad \text{CC} \dashrightarrow \quad \text{(prep),} \begin{bmatrix} \text{(int), Adv} \\ \\ \text{SN} \end{bmatrix}$$

$$\text{ix)} \quad \text{CI} \dashrightarrow \quad \text{"a", SN}$$

$$\text{x)} \quad \text{compl} \dashrightarrow \quad \text{prep, SN}$$

$$\text{xi)} \quad \text{SN} \dashrightarrow \begin{bmatrix} \text{impersonal} \\ \text{(det), N,} \quad \begin{bmatrix} \text{(int), (Adj)} \end{bmatrix} \text{, (prep, SN)} \end{bmatrix}$$

CUADRO 3.

Las abreviaciones que se utilizan son las siguientes:

| | |
|---|---|
| Adj | adjetivo |
| Adv | adverbio |
| aux | auxiliar |
| CC | complemento circunstancial |
| CI | complemento indirecto |
| compl | complemento |
| cop | cópula |
| det | determinante |
| haber-do | haber + participio pasado |
| IMP | imperativa |
| INT | interrogativa |
| M | modal |
| N | nombre |
| neg | negación, negativa |
| O | oración |
| PN | predicado nominal |
| prep | preposición |
| progresivo-ndo | verbo + forma de gerundio |
| SN | sintagma nominal |
| SV | sintagma verbal |
| t | tiempo |
| V | verbo |

(Casellas, F.: 1979)

De la lista de categorías y subactegorías gramaticales anteriores, se tiene que descartar algunas categorías que pertenecen exclusivamente a las lenguas naturales, tales como "haber-do", para considerar un lenguaje formal para la matemática. Esto, se ha hecho de manera intuitiva, por lo que en adelante sólo se considerarán trece categorías y subacategorías para el estudio.

A continuación, se presenta la terminologáia básica que se empleará para la descripción de la sintaxis de las expresiones matemáticas.

§ 2.1.0.5. Categorías Gramaticales.

2.1.0.5.1. Oración. En el análisis de texto, tanto de expresiones matemáticas como de oraciones gramaticales de la lengua española, se propone que la estructura de frase de ambas consiste en una asociación binaria regida por funciones interdependientes que representan al nivel *nuclear* o *raíz* del diagrama arbóreo. La denominación de "raíz" proviene de las gramáticas formales, mientras que la denominación de "oración nuclear" proviene de las gramáticas para lenguas naturales. En este trabajo, se utilizará *oración nuclear* para referirnos tanto a la estructura de frase de las gramáticas formales como a la estructura de frase de las gramáticas naturales.

2.1.0.5.2. Sintagma Nominal. Uno de los miembros de la asociación binaria de función interdependiente que agrupa a un tipo de categoría gramatical; el *nombre*. En general, juega funciones gramaticales distintas en la asociación binaria. Por un lado, puede jugar el papel de *SUJETO* de la acción, o por otro, el *OBJETO* de la acción, desde el punto de vista de las gramáticas para lenguas naturales. Desde el punto de vista de las gramáticas formales y de la lógica simbólica, tanto la función de SUJETO-DE como la función de OBJETO-DE juegan el papel de *ARGUMENTO* del *PREDICADO* de la proposición. En este trabajo, se utilizarán los términos "sujeto-de" y "objeto-de" para referirnos al papel del argumento del predicado de la proposición lógica.

2.1.0.5.3: Nombre. El sintagma nominal agrupa a tres tipos gramaticales distintos en este trabajo. Dos de ellos, determinan a una categoría gramatical en particular. La categoría gramatical particular, la denominaremos con el término "nombre" o "núcleo nominal", indistintamente. La categoría gramatical *nombre* tiene la propiedad de denotar objetos, nombres o cosas, tanto concretas como abstractas.

2.1.0.5.4. Determinante. Tipo gramatical que juega una función determinante en relación con el núcleo nominal en el sintagma nominal.

2.1.0.5.5. Adjetivo. Tipo gramatical que juega la otra función determinante en relación con el núcleo nominal en el sintagma nominal.

2.1.0.5.6. Sintagma Verbal. Segundo miembro de la asociación binaria de función interdependiente que agrupa a otra categoría gramatical; el *verbal*. El verbal, a su vez, es el que denota al *tiempo*, al *modo*, y a la *acción* de la oración nuclear, mejor conocida como *PREDICADO* de la proposición lógica, mientras que en la lengua natural también determina al objeto-de.

2.1.0.5.7. <u>Verbal.</u> Categoría gramatical general que agrupa tanto rasgos léxicos, o semas, como tipos gramaticales. El tipo gramatical particular que agrupa los rasgos léxicos que denotan a la acción del verbal se denomina "*verbo*" y no "verbal".

2.1.0.5.8. <u>Auxiliar.</u> Tipo gramatical general que determina al verbo particular que agrupa a los rasgos léxicos que denotan a la acción del verbal en la oración o en la expresión nuclear.

2.1.0.5.9. <u>Modal.</u> Tipo gramatical particular que agrupa los rasgos que denotan al modo de la acción del verbal.

2.1.0.5.10. <u>Tiempo.</u> Tipo gramatical que agrupa los rasgos que denotan al tiempo gramatical del verbo del verbal de la oración nuclear. En las lenguas naturales, este tiempo gramatical puede "peturbar" el tiempo real de la enunciaciación, o el *aquí* y *ahora* del momento de la enunciación. En los lenguajes formales, esta subcategoría no esta claramente definida. En las expresiones aritméticas, el tiempo gramatical de la acción se caracteriza más bien por su imperturbabilidad, sin especificar un punto de referencia al aquí y ahora del momento de la enunciación. En este trabajo, denominamos con "impertérrito" a esta caracteristica temporal de las expresiones aritméticas y algebraicas en general.

2.1.0.5.11. Verbo. Tipo gramatical que agrupa los rasgos léxicos o semas del verbal.

2.1.0.5.12. Cópula. Tipo de verbo que establece una relación de equivalencia en general, o una relación de equivalencia lógica entre dos sintagmas nominales, a veces, abreviados como $SN_1$ y $SN_2$.

§ 2.1.0.6. Enfoque Psicolingüístico de la Matemática.

Por último, para contextualizar al marco teórico arriba expuesto, a continuación se discute de manera muy amplia lo que pudiera ser un enfoque psicolingüístico del lenguaje matemático.

V. A. Krutetsky (1951), en un trabajo de investigación sobre la psicología del aprendizaje de la matemática, ha propuesto una serie de habilidades específicas, susceptibles de desarrollarse en el proceso de enseñanza de la matemática, que en términos muy generales describe el carácter de la *adquisición* del lenguaje matemático. Las habilidades son las siguientes:

a) una habilidad para generalizar a partir de proposiciones específicas, características comunes del conocimiento matemático, por ejemplo; fórmulas, ecuaciones, definiciones, etcétera.

b) una habilidad para abreviar o eliminar cadenas intermedias de razonamientos para llegar rápidadmente del planteamiento de un problema a su solución.

c)una <u>habilidad</u> <u>para</u> <u>invertir</u> las relaciones asociativas que se dan entre las cadenas de razonamiento.

La descripción del conocimiento matemático cómo si se tratara de un lenguaje tendría que tomar en consideración los planteamientos de Krutetsky.

En esencia, la descripción lingüística del conocimiento matemático, no modifica en absoluto ese conocimiento, sino que más bien, lo sistematiza bajo un enfoque, más importante aún, lo sistematiza tomando en consideración al usuario del conocimiento. Se puede afirmar que existe *algo* que se clasifica como conocimiento matemático. No obstante, de que exista un conocimiento a que exista un lenguaje, hay un gran trecho que recorrer. Este punto, ha suscitado muchas discusiones entre los matemáticos y los filósofos de las ciencias. Así, por ejemplo, hay matemáticos que han afirmado que:

> *...el hecho de que el griego o el latín sean tan imprecisos como la naturaleza, no por ello son más adecuados para describirla. Más a fondo y para decirlo claramente, las matemáticas son algo más que un lenguaje.*
>
> (Hernández, J. G.: 1984)

En el fondo de esta polémica parece ser que lo que subsiste es una diferencia entre lo que es un conocimiento de un fenómeno, ya sea de la realidad o de la idealidad, y la función que juega un lenguaje en torno a ese conocimiento.

Por un lado, los distintos campos del conocimiento representan las distintas ramas del saber, de la percepción y de la experiencia, de los fenómenos como tales. Por otro lado, los lenguajes cumplen fundamentalmente una función comunicativa de ese saber cuando un hablante emplea un lenguaje con una intención y un propósito en torno a ese saber. Asimismo, la intención y el propósito del hablante requieren de un mecanismo que permita darlos a conocer a su interlocutor en el evento comunicativo. Cómo menciona James Kaput (1985) en torno al conocimiento matemático y su vinculación con las lenguas naturales:

> *...ninguna actividad matemática es posible sin las formas materiales para su expresión---formas con dos funciones estrechamente relacionadas: 1) el apoyo del procesamiento cognitivo interno, y 2) la comunicación entre las gentes*
> (Kaput, J.: 1985)

Existe en el conocimiento matemático una necesidad de expresarlo por medio de un lenguaje, al igual que existe en el conocimiento de las cosas una necesidad de un lenguaje para expresarlas. La matemática, como un campo del saber de lo abstracto y de la idealidad, parece recurrir a distintos lenguajes particulares, tanto naturales como formales, o por lo menos a distintos aspectos de ellos. Puede ser aquí en donde el *lenguaje matemático* como medio de comunicación de ese conocimiento sea 'algo más' que un lenguaje en particular. No obstante, eso no es razón suficiente para afirmar que como *lenguaje* en el sentido más amplio y universal de las gramáticas generativas, *no es un lenguaje*.

Para este trabajo de tesis, este último enfoque de *lenguaje* es el que se ha suscrito. A este lenguaje, lo denominamos "lenguaje matemático", y se caracteriza por los sistemas notacionales que utilizan los matemáticos para comunicarlo. Con esto, se busca distinguirlo del "lenguaje de la matemática", que podría ser un lenguaje formal en particular creado por un matemático con un fin específico. Queda, por lo tanto, entendido que cuando en este trabajo de tesis nos refiramos al "lenguaje matemático" nos estaremos refiriendo a los sistemas notacionales con los cuales se construyen las expresiones matemáticas que se utilizan en los sistemas de ecuaciones y en las fórmulas matemáticas. Así pues, esta tesis, se propone dar una descripción del nivel sintáctico de una parte característica del lenguaje matemático; las ecuaciones de trinómio de cuadrado perfecto que se enseñan en el sistema escolar mexicano.

## § 2.2. EL LENGUAJE MATEMATICO

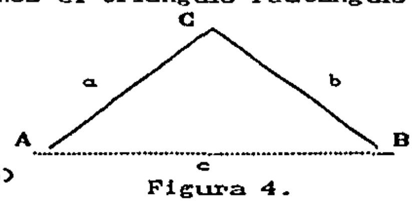
### § 2.2.1. Algunas precisiones.

El lenguaje matemático podria distinguirse, al igual que los lenguajes científicos, por construirse independientemente del contexto y de la situación de enunciación (Jakobson, R.: 1974), y cómo llegan a demostrarlo los Bourbaki (1969). En el lenguaje matemático, esta diferencia con los lenguajes naturales, se puede observar en dos enfoques de análisis del texto. Por una parte, se habla de un procedimiento de análisis *macro-estructural* que es cuando se estudian las cadenas de razonamiento lógico del discurso matemático (es decir, el texto matemático contextualizado en referencia a un tema específico central) que a su vez puede subdividirse en tres niveles de análisis: a) pragmático, b) semántico y c) sintáctico (Carnap, R: 1943). Los elementos componentes de este análisis macro-estructural son las proposiciones lógicas que lo componen, y se dice que su organización secuencial es la *axiomática* (Bourbaki, N. : 1969).

Por otro lado, se habla de análisis *micro-estructural* del texto, cuando se estudian las cadenas de morfemas o formas que construyen a las oraciones gramaticales o a las expresiones matemáticas que se analizan como proposiciones de las cadenas de razonamiento lógico del discurso matemático. El análisis micro-estructural del texto, también, puede estudiarse con base en tres niveles de análisis: a) pragmático, b) semántico y c) sintáctico (van Dijk, T. : 1981). Sin entrar en mucho detalle al respecto, aquí se asume que en el caso de las expresiones notacionales algebraicas, son las estructuras profundas los elementos primitivos que generan directamente a las estructuras superficiales de las expresiones notacionales algebraicas. Con lo anterior, se propone que el análisis micro-estructural del texto, construye como punto intermedio del análisis del discurso matemático (la conjunción de lo micro con lo macro), a los elementos del análisis macro-estructural del texto llegando a compartir dos niveles de análisis (semántico y pragmático) en común por medio de un procedimiento disyuntivo o sistemático.

Desde el punto de vista de la lógica fromal, el análisis macro-estructural del texto matemático consiste en establecer una secuencia de sus enunciados, de manera tal que ninguno de sus enunciados puede considerarse indepdendientemente de los demás, es decir, su cohesión es de tipo lógica y consitente. Así,. por ejemplo, se tiene la siguiente estructura de una *demostración* sobre la semejanza de los triángulos rectángulos (S.E.P.: 1986):

(a) Consideremos el triángulo rectángulo siguiente:




(b)

Figura 4.

(c) Tracemos con $\overline{CD}$ la altura que parte del vértice del ángulo recto para formar dos triángulos.

(d)

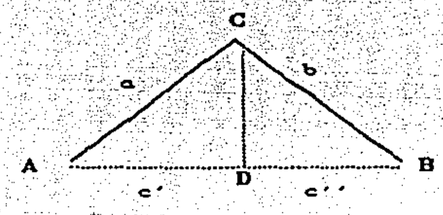



Figura 5.

(e) El triángulo ADC y el triángulo ABC son semejantes pues los dos son triángulos rectángulos y tiene en común el ángulo A.

(f) El triángulo DBC y el triángulo ABC son semejantes, pues los dos son triángulos rectángulos y tiene en común el ángulo B.

(g) Cómo el triángulo ADC es semejante al triángulo ABC y el triángulo DBC es semejante al triángulo ABC entonces concluimos que el triángulo ADC es semejante al triángulo DBC.

(h) Con esto queda demostrado nuestra afirmación.

(S.E.P.: 1984)

Aquí, en los enunciados (a)- (h) anteriores, se deduce en el sentido matemático una secuencia axiomática del desarrollo lógico consecuente de cada enunciado, es decir, mientras que los enunciados (a) , (b) establecen el postulado de existencia de un tipo caracteristico de triángulo, un triángulo rectángulo cualquiera, los enunciados (c) y (d) establecen el tipo de operación matemática (geométrica) que se va a llevar a cabo sobre el postulado existencial. Los enunciados (e) y (f) construyen un nuevo tipo de equivalencias resultado de las operaciones sobre el postulado inicial, y como consecuencia lógica de lo anterior. Los enunciados (g) y (h) infieren lógicamente una nueva equivalencia que a primera vista de los enunciados anteriores no era del todo perceptible.

Por otro lado, en el análisis micro-estructural del texto anterior se deduce que cada enunciado contiene una raíz particular, así, por ejemplo, el enunciado (a) contiene una serie de categorías gramaticales que forman una estructura profunda distintiva que podría ser la siguiente:

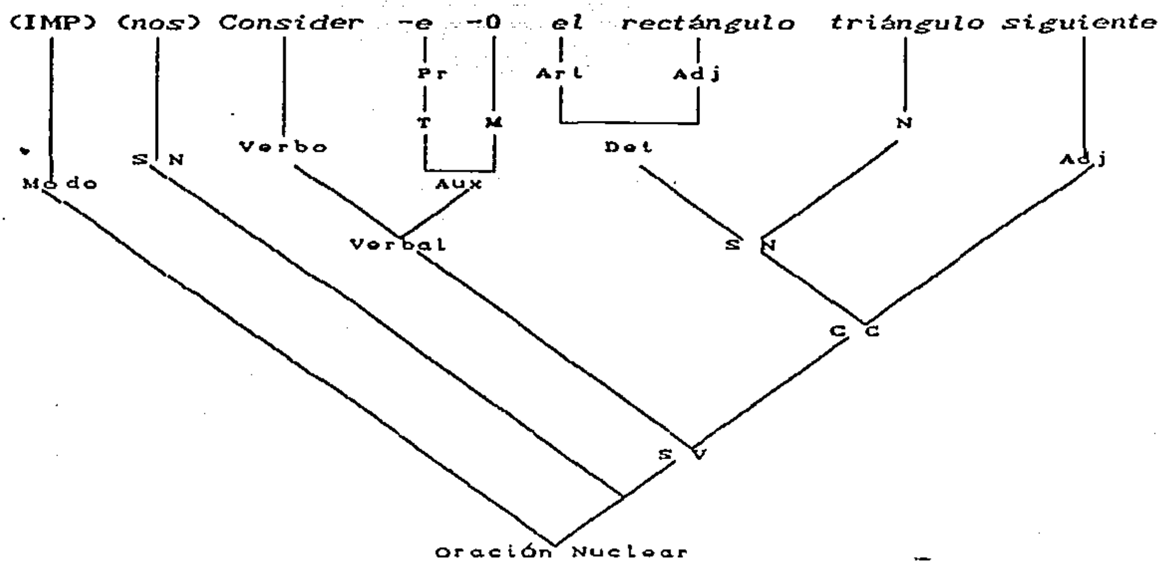



Figura 6.

en donde el complemento circunstancial juega una función deíctica anafórica que lo caracteriza de manera distintiva de los enunciados (c), (e), (f), (g), y (h) por su estructura profunda.

Nuestra propuesta es que se puede practicar un tipo análogo de análisis a las expresiones matemáticas que se dan con mayor frecuencia en el álgebra elemental, así, por ejemplo, en el siguiente discurso:

($\alpha$) Como los triángulos son semejantes, sus lados respectivos son proporcionales.

($\beta$) Por lo tanto, tenemos que

($\chi$) $c/a = a/c'$,

($\delta$) y

($\varepsilon$) $c/b = b/c''$

($\phi$) en donde

($\gamma$) $c' = c - \overline{DB}$

($\eta$) y

($\iota$) $c'' = c - \overline{AD}$,

($\psi$) lo que obtiene por multiplicación

($\varkappa$) $a^2 = cc'$

($\lambda$) $b^2 = cc''$

($\mu$) sumando $a^2$ más $b^2$, tenemos que

($\nu$) $a^2 + b^2 = cc' + cc''$

($o$) $a^2 + b^2 = c(c' \mp c'')$

($\pi$) Cómo

($\theta$) $c' + c'' = c$,

($\rho$) entonces

($\sigma$) $a^2 + b^2 = cc$

($\tau$) O sea,

($\upsilon$) $a^2 + b^2 = c^2$

en donde los enunciados ($\alpha$), ($\beta$), ($\delta$), ($\phi$), ($\eta$), ($\psi$), ($\mu$), ($\pi$), ($\rho$), y ($\tau$), juegan un doble papel como oraciones gramaticales y conectores lógicos (probablemente, también, como proposiciones y actos de disertación) en el discurso conectado, mientras que las ecuaciones ($\chi$), ($\varepsilon$), ($\gamma$), ($\iota$), ($\kappa$), ($\lambda$), ($\nu$), ($o$), ($\theta$), ($\sigma$) y ($\upsilon$), juegan el papel del proceso de cálculo, en el mismo discurso matemático, es decir, convergen dos lenguajes; un *lenguaje natural particular* de tipo lógico formal, y un *lenguaje matemático*.

En este trabajo de tesis, enfocaremos el papel que juegan las oraciones nucleares como proposiciones por medio de la sintaxis generativa de la expresión matemática, y dejaremos de lado la *demostración* de cómo funciona el proceso de cálculo desde el punto de vista gramatical, de la axiomática, y de los *actos de disertación* (Castaños, F. : 1984).

§ 2.2.2. Oración Nuclear de la Expresión Matemática Básica.

Definimos gramaticalmente a una *expresión matemática nuclear* como una expresión matemática cuyos símbolos se asocian binariamente bajo una función interdependiente y cuya estructura profunda corresponde al árbol gramatical de una oración nuclear del siguiente tipo:

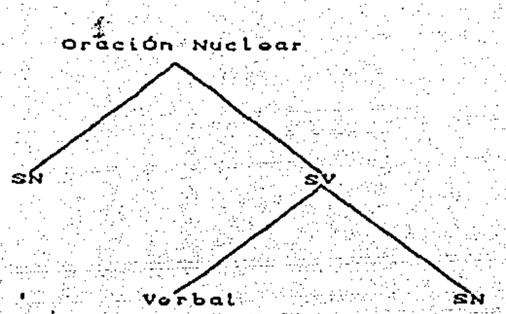



Figura 7.

Así, al analizar a un signo numeral "5" o a una variable "X" como sintagma nominal, los términos:

(1) +X
(2) +5

no formarían por sí mismos una expresión nuclear, ya que la relación que guarda el símbolo "+" con respecto al símbolo "X" o al símbolo "5" no es una función interdependiente, sino más bien, una función determinante; es decir, en el discurso matemático ocurren combinaciones significativas cómo:

(3) −X
(4) +X
(5) X
(6) −5
(7) +5
(8) 5

pero no como

* (9) X+
* (10) X−
* (11) +
* (12) 5+
* (13) 5−
* (14) −

en donde se usan los asteriscos "*" para indicar la inaceptabilidad de los enunciados por un hablante común. Por lo tanto, decimos que los símbolos "+" y "-" determinan a los símbolos como "X" o como "5", mientras que estos últimos no están determinados por los anteriores. Los primeros pueden, inclusive, omitirse como en los casos de (5) y (8) en donde actúa tácitamente el contenido del símbolo "+".

En el caso de expresiones como

(15) X • +5
(16) X ÷ +5
(17) X • -5
(18) X ÷ -5

se observa que parecen ocurrir dos signos operacionales contiguamente cómo en el caso de

(19) X + +5
(20) X + -5
(21) X - -5

No obstante, ese caso sólo es posible para los signos "+" y "-", y no para

*(22) X • •5
*(23) X ÷ ÷5
*(24) X • ÷5

por lo que se deduce que estos signos "+" y "-" pertenecen a dos categorías gramaticales distintas. Por un lado, cuando ocurren como signos que indican una operación de cálculo en particular (*sumar*, *restar*, respectivamente), y por otro lado cuando determinan el valor positivo o negativo del sintagma nominal.

Esta diferencia adquiere denominaciones distintas en algunas lenguas naturales para referirse a los signos "+" y "-", como por ejemplo en el alemán que utiliza el término *"vorzeichen"* para referirse la valor positivo o negativo del signo, y el término *"rechenzeichen"* para referirse a su uso como operadores de 'suma' y 'resta'. Para poder distinguir simbólicamente a estos dos usos de los signos "+" y "-", los colocaremos entre *llaves cuadradas* "[]" cuando se refiera a las operaciones de 'suma' y 'resta', y se dejarán sin marca pnemotécnica cuando se refiera a su valor 'positivo' o 'negativo'. Así, por ejemplo:

(*25*) X [+] +5
(*26*) X [+] -5
(*27*) X [-] -5
(*28*) X [-] 5

indicarán que el sintagma nominal denotado con el signo numeral "5" adquiere distintos valores bajo las operaciones de cálculo de 'suma' y 'resta'.

Este cambio de valor se observa con mayor claridad cuando se contrasta con:

(*29*) +5 [+] +5
(*30*) 5 [+] 5
(*31*) -5 [-] -5
(*32*) 5 [-] 5

en donde intuitivamente el cambio de valor del signo "+" de la (*29*) y el "-" de la (*31*) se da en el sintagma nominal de la derecha y no en el de la izquierda, es decir;

(33) ...[+] +5
(34) ...[−] −5
(35) ...[−] 5

indican una posible alteración en el valor 'positivo' o 'negativo' del sintagma nominal denotado con el signo numeral "5", y no necesariamente en:

(36) +5 [+] ...
(37) −5 [−] ...
(38) 5 [−] ...

en donde se utilizan los puntos suspensivos "..." para indicar el contexto en que se encuentra la parte de la expresión analizada. Por lo que se deduce que los sintagmas nominales (33), (34), y (35) juegan una función gramatical distinta a los sintagmas nominales (36), (37) y (38). Esta diferencia en función gramatical del valor que adquiere el signo 'positivo' o 'negativo' indica una analogía con la función gramatical de '*Sujeto de la acción*' y '*Objeto de la acción*' en las oraciones nucleares de los lenguajes naturales, por lo que nos referiremos a expresiones matemáticas como (25), (26), (27), (28), (29), (30), (31) y (32) con el término "*expresión matemática nuclear*", análogamente, así cómo se afirmo en un principio. Su árbol gramatical general, por lo tanto, es el que corresponde a la Figura 8.

Aquí, se denominará a los símbolos "+" y "−" de función determinante como "signo positivo" y "signo negativo", respectivamente, para referirnos a ambos como determinantes de la '*direccionalidad*' del sintagma nominal en substitución del determinante indicador de '*género*' como rasgo sintáctico pertinente que caracteriza a la categoría gramatical '*sintagma nominal*'.

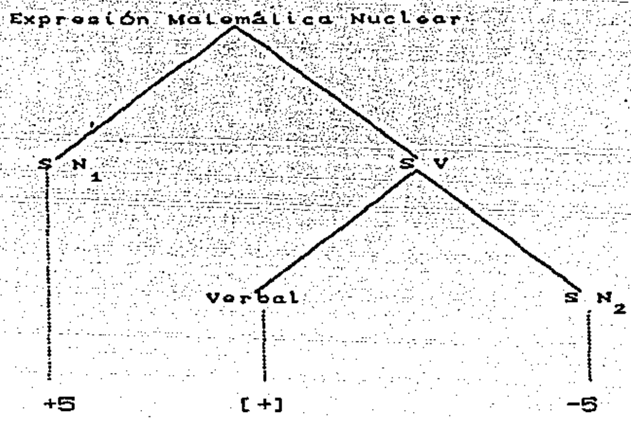



Figura 8.

§ 2.2.2.1. <u>Sintagma Nominal.</u>

A los símbolos del tipo "X" o "5" se les da el nombre genérico de *nombre* del sintagma nominal ya que son los símbolos que denotan el contenido significativo, o léxico, y son los que se mantienen determinados por el valor determinante en la asociación. Para distinguir a estos signos, se denominan *variables* a los del tipo "X" ya que su referente no es un 'número' en particular, sino dependiente según el contexto en que ocurra. A los signos del tipo "5" se les denomina "numerales" ya que su contenido es un 'número' en particular. Por "número" se refiere aquí, a un concepto de conmensurabilidad abstracto, característico del conocimiento matemático, y fundamental en la aritmética. Este, se caracteriza por dos rasgos distintivos: 'cardinalidad' y 'ordinalidad'. La 'ordinalidad' distingue al número por su posición en una recta imaginaria como punto que sintetiza a sus antecesores. La 'cardinalidad' distingue al número por la posición que ocupa en una recta imaginaria como punto que define a sus sucesores (Halmos P.: 1965 ).

En las lenguas naturales, el rasgo gramatical de <número> de los *nombres* de los sintagmas nominales, por lo general, se marca por dos características distintivas; la 'singularidad' y la 'pluralidad' del objeto al que se refiere el nombre. Cuando, por otro lado, se refiere a las características distintivas de 'ordinalidad' o de 'cardinalidad' en particular, se selecciona uno de estos rasgos y se reemplaza por una subcategoría gramatical que podría denominarse *doble determinante* o *pre-determinante*, y ocupa la posición del determinante del nombre. En el español, es común que tanto el rasgo gramatical de <número> como el rasgo gramatical de <género> determinen a todo el sintagma nominal (es decir, los valores marcan en todas las partes componenciales del sintagma nominal). En el caso del sintagma nominal de la expresión matemática, los valores 'positivo' y 'negativo' se marcan independientemente como categoría gramatical antes del nombre, y se puede omitir su escritura como en el caso de la (5) y de la (8). Así, por ejemplo, se tendría que para un nombre como *manzana*, sus sintagmas nominales determinados por rasgos gramaticales de ⟨género⟩ y ⟨número⟩ serían:

(39) los manzanos vistosos
(40) las manzanas vistosas
(41) los cinco manzanos vistosos
(42) las cinco manzanas vistosas
(43) el manzano vistoso
(44) la manzana vistosa

como procedimiento general, en donde sólo en la (41) y en la (42), la subcategoría gramatical predeterminante que indica el 'número' "cinco", no se marca con ⟨género⟩ 'masculino' ni con el rasgo gramatical de ⟨número⟩ 'plural', sino que se denomina específicamente con un término. El término que denomina específicamente a la 'cardinalidad' de los sintagmas nominales (41) y (42), es la expresión escrita en caracteres alfabéticos del concepto de 'número' en el sentido matemático, y de hecho, se representa también con signos numerales. Cuando esta 'cardinalidad' adquiere su sentido matemático puro, pasa a ocupar la posición de nombre del sintagma nominal en la lengua española. Así, por ejemplo, los siguientes sintagmas nominales comparten tanto un sentido gramatical lingüístico, como un sentido matemático:

(45) el cinco
(46) algunos cincos
(47) cinco cincos

y por lo tanto, son objetos de análisis gramatical. Sus símbolos numerales, podrían ser los siguientes:

(48) "5"
(49) X"5"
(50) 5"5"

en donde usamos las comillas dobles "" para indicar a los sintagmas nominales matemáticos de los nombres de los sintagmas nominales lingüísticos (45), (46) y (47), respectivamente.

Lo anterior, lleva a ampliar el árbol gramatical de la Figura 8, con la Figura 9, en donde las abreviaciones que se utilizan son las mismas de las categorías gramaticales propuestas por Casellas (1979) que mencionamos más arriba.

Proponemos, por lo tanto, las siguientes reglas de re-escrituración para la construcción del sintagma nominal para la expresión matemática nuclear.

(51)

i) $SN_1 \longrightarrow$ Det, N

ii) Det $\longrightarrow$ direccionalidad, Adj

iii) direccionalidad $\longrightarrow \begin{bmatrix} (+) \\ - \end{bmatrix}$

iv) Adj $\longrightarrow$ O

v) Numero $\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{bmatrix}$

y en donde las flechas "--->" indican "se reescribe como", mientras que los números romanos "(i),ii),iii)...)" indican el orden de aplicación de las reglas. Los paréntesis "()" de la regla iii) indican la posibilidad de omitir la escritura del signo positivo "+", y los puntos suspensivos "..." indican "etcétera". Las comas "," entre las particiones indican la contiguidad de las categorías gramaticales mientras que las llaves largas cuadradas "[ ]" indican la disyunción de los elementos de los conjuntos y de las clases.

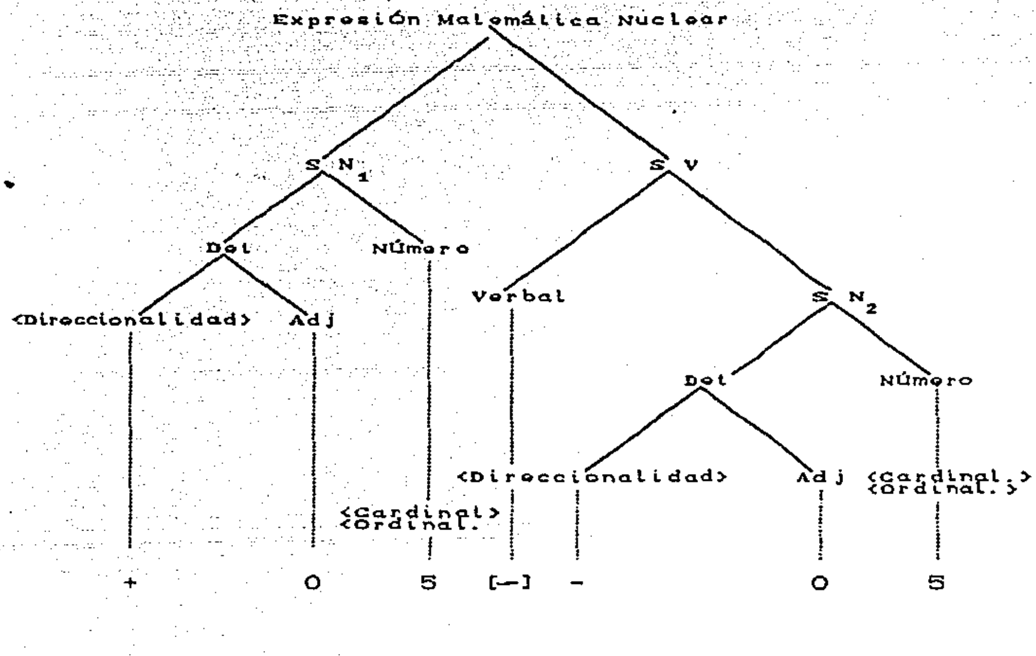



Figura 9.

Las reglas i) y ii) de la (51) describen la estructura del sintagma nominal, mientras que las reglas iii), iv) y v) describen la forma terminal que puede tomar la expresión matemática nuclear.

La aplicación de las reglas de la *(51)* en el orden establecido, generan el siguiente sintagma nominal de la expresión matemática nuclear:

*(52)*

| | | | |
|---|---|---|---|
| SN | ---▸ | Det, Numero | i) |
| Det | ---▸ | direccionalidad, Adj, Numero | ii) |
| direccionalidad | ---▸ | (+), Adj, Numero | iii) |
| Adj | ---▸ | (+), 0, Numero | iv) |
| Numero | ---▸ | (+), 0, 5 | v) |

que genera como estructura de base al 'número' 'cinco' al borrar todos los símbolos de las reglas y cuando se opta por omitir al signo positivo. Así, la *(53)* es una estructura de base generada por *(52)*:

*(53)* 5

La diferencia fundamental entre el "5" de la *(48)* y el "5" de la *(53)*, es que en la *(53)* se especifica su estructura de generación gramatical con la *(52)*; no así en la *(48)*.

El caso de las variables como "X" de la *(5)*, parece tratarse de un tipo de *pro-nominalización*, por lo que se verá más adelante cuando se toquen las *transformaciones*.

§ 2.2.2.2. Sintagma Verbal.

El contenido específico de un signo de operación de cálculo, es una acción concreta de cálculo que se ejecuta sobre los sintagmas nominales de la expresión matemática nuclear. Así pues, su asociación con los sintagmas nominales es de función interdependiente; es decir, está determinado por el primer sintagma nominal ($SN_1$), y asimismo, determina el segundo sintagma nominal ($SN_2$). Así, por ejemplo, se tiene que:

(54) 5 [+] X
*(55) [+] 5 X
*(56) 5 X [+]

en donde el asterisco "*" indica la inaceptabilidad gramatical de la expresión matemática por un lector común y corriente[1], y lo mismo se podría decir de los otros signos de la operación del cálculo aritmético, tales como la "multiplicación" ([·]), la "división" ([÷]) y la "resta" ([-]).

Desde el punto de vista lingüístico, estos operadores del cálculo aritmético, son más difíciles de describir porque aparentemente se remiten a acciones más abstractas del pensamiento humano que el mero hecho de denotar a los fenómenos. No obstante,

[1] Aunque la (55) podría ser aceptable para un matemático como la base sintáctica que sustenta a las funciones matemáticas "f(x)" en el álgebra superior, su transformación sintáctica podría considerarse como producto de una análisis "lógico simbólico" y no de una gramática generativa, por lo que aquí se considera inaceptable ya que no se excluye la posibilidad de que la lógica simbólica también pueda ser descrita por una gramática generativa. Esto último, no es el objeto de esta tesis.

se intuye que en el contenido semántico de los signos operatorios del cálculo aritmético subsiste la acción verbal en el sentido gramatical. Esta podría interpretarse de la siguiente manera, conservando la forma del infinitivo:

(*57*) 5 <u>sumarse</u> <u>a</u> X
(*58*) 5 <u>restarse</u> <u>por</u> X
(*59*) 5 <u>multiplicarse</u> <u>por</u> X
(*60*) 5 <u>dividirse</u> <u>por</u> X

para referirse a

(*61*) 5 [+] X
(*62*) 5 [−] X
(*63*) 5 [·] X
(*64*) 5 [÷] X

respectivamente. No se puede afirmar que estos representan a los verbos que subsisten en los signos operatorios del cálculo aritmético, pero sí sugiere que son los residuos de ciertos rasgos sintácticos y semánticos de estos verbos los que subsisten en los signos (posiblemente a nivel de categorías y subcategorías gramaticales).

Por lo pronto, a continuación se propone un diagrama arbóreo gramatical para el Sintagma Verbal de las expresiones nucleares de las ecuaciones aritméticas, análogo a la oración nuclear del español en vista de que para definir con mayor precisión la traducción del lenguaje matemático al lenguaje natural, se requeriría, por lo menos, complementar este enfoque con un estudio diacrónico, lo cual no es el objeto de esta tesis.

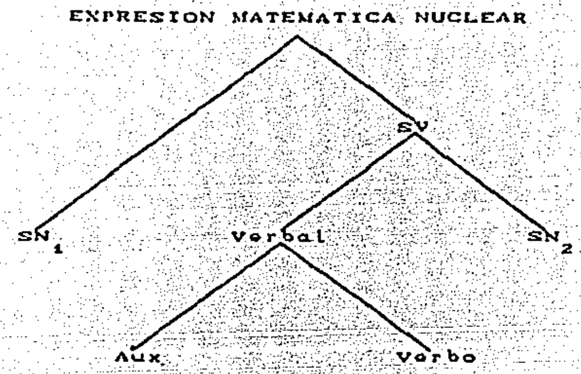


Figura 10.

El sintagma verbal de la expresión matemática nuclear, por lo tanto, se compone del signo de la operación de cálculo y otro sintagma nominal ($SN_2$), y es distinto del primer sintagma nominal($SN_1$).[2] La asociación del signo de la operación de cálculo con el segundo sintagma nominal, es de función determinante, así, por ejemplo se tiene, al igual que los ejemplos (33), (34) y (35) que:

(65) ... [+] 5
*(66) ... 5 [+]

mientras que es la función determinada por el primer sintagma nominal, al igual que los ejemplos (36), (37) y (38), como por

2Aquí, se utilizan los subíndices ($_{1,2}$) para indicar la recursividad de la aplicación de las reglas en una estructura profunda.

ejemplo:

(67) 5 [+] ...
*(68) [+] 5 ...

en donde los puntos suspensivos "..." indican el contexto bajo el cual ocurre el signo. Tanto el signo de operación de cálculo aritmético, como el segundo sintagma nominal conforman, por lo tanto, la función determinada por el primer sintagma nominal, es decir:

(69) ... [+] 5
*(70) ... 5 [+]
*(71) ... [+] [•]

y sólo en el caso de la multiplicación puede omitirse el símbolo "•", como por ejemplo:

(72) 5 X

es decir, su contenido semántico sigue siendo

(73) 5 ([•]) X

aunque posiblemente sujeto a una transformación, y en donde, los paréntesis () indican la opcionalidad de la escritura del símbolo.

En vista de lo anterior, proponemos inicialmente, las siguientes reglas de generación del sintagma verbal con el objeto de mantener una analogía con el modelo de oración nuclear que se presentó previamente (Casellas, F. : 1979):

(74)

i) SV ---▶ Verbal, $SN_2$

ii) Verbal ---▶ Aux, Verbo

iii) Aux ---▶ t, M

iv) Verbo ---▶ $\begin{bmatrix} [+] \\ [-] \\ [\div] \\ [\bullet] \end{bmatrix}$

en donde se mantienen las mismas abreviaciones de las categorías gramaticales previamente presentadas, y los números romanos (i), ii),...) establecen el orden de precedencia de la aplicación de las reglas.

Anteriormente, se decía que lo que subsiste en el verbo son los rasgos característicos de la acción verbal de las oraciones gramaticales, y que no son los verbos gramaticales en sí. Los verbos gramaticales de las expresiones matemáticas nucleares se caracterizan por dos rasgos distintivos "<*iteratividad*>", y "<*perfectividad*>", junto con unos rasgos semánticos que distinguen a unas acciones de otras. En el español, estos rasgos, corresponden más bien al '*aspecto verbal*'. Así, el verbo '*multiplicar*' tiene el sema de <*plegabilidad*> y el aspecto verbal de '*muchas veces*'[3] a diferencia de '*quintuplicar*'

[3] Lo anterior se toma de la raíz latina de *multiplicar*. Está claro al respecto, que para entrar en detalle, se requeriría un estudio filológico más a fondo. En vista de que ésto no es la intención de esta tesis, no se profundiza al respecto, sino que se menciona como posible investigación futura.

que tiene el mismo sema, pero especificando el aspecto verbal con otro sema numérico de *'cinco veces'*. El sema que subsiste en el símbolo "∘" es, por lo tanto, la acción de plegar cómo cuando se hacen dobleces en una hoja de papel, sin especificar las veces que se ejecuta. La especificación de las veces del *pliego* se traslada al segundo sintagama nominal, así, por ejemplo:

(75) X [∘] 5

no significa lo mismo que

(76) 5 [∘] X

tanto desde el punto de vista sintáctico, como desde el punto de vista semántico.

Por un lado,

(77) 3 [∘] 5

significa que "3" se pliega cinco veces, o se *quintuplica*, mientras que por otro lado,

(78) 5 [∘] 3

significa que "5" se pliega tres veces, o se *triplica*. No obstante, desde el punto de vista pragmático del total de pliegues, ambas expresiones obtienen el mismo resultado después de la operación de cálculo aritmético, es decir, *'quince pliegues'* que es lo que matemáticamente se analiza en las unidades que lo componen. Por lo tanto, también, ambas expresiones ((77) y (78)) son equivalentes. La diferencia entre los enfoques, el sintáctico, el semántico y el pragmático, radica en que el análisis sintáctico enfoca a la expresión nuclear desde el punto de vista del proceso, mientras que el análisis semántico lo hace desde el punto de vista del sistema, y el pragmático lo hace desde el punto de vista de ambos. Debido a ésto, se puede afirmar que desde el punto de vista del proceso, el signo "•" contiene, también, el rasgo distintivo de <*iteratividad*> que también le subyace al aspecto verbal en el español.

Así, a manera de ejemplo:

(*79*) Pedro – tocó – la puerta.

se distingue de,

(*80*) Pedro – rompió – la puerta.

en donde el enunciado (*79*) se distingue del enunciado (*80*) porque en el (*79*) se presupone una acción que se llevó a cabo '*muchas veces*', mientras que en el (*80*), se presupone que la acción se llevó a cabo '*una sola vez*'. Es decir, en el análisis de las expresiones matemáticas nucleares,

(*81*) 3 <u>multlipicado por</u> 5

proviene de

(*81*) "5" <u>multiplica a</u> "3" '*cinco veces*'

al igual que

(*82*) 9 <u>dividido por</u> 3

proviene de

(*83*) "3" <u>divide a</u> "9" '*tres veces*' mientras que

(84) 3 <u>restado por</u> 2

proviene de

(85) "2" <u>se</u> <u>resta</u> <u>de</u> "3" '*una sola vez*'

y

(86) 3 <u>sumado</u> <u>a</u> 2

proviene de

(87) "3" <u>se</u> <u>suma</u> <u>a</u> "2" '*una sola vez*'.

Por lo tanto, los rasgos como '*muchas veces*' o '*tres veces*' los denominamos como rasgos de ‹iteración›. Su función en el verbo de la expresión matemática consiste en indicar que la acción se repite tantas veces cómo lo indique el segundo sintagma nominal. Los rasgos como '*una sola vez*' los denominamos como rasgos de ‹perfectividad›. Su función consiste en indicar que la acción se lleva a cabo perfectamente cómo lo indica la expresión.

En lo referente al rasgo de '*temporalidad*' de los verbos, aunque en los ejemplos (*81*), (*83*), (*85*) y (*87*) recurrimos a tiempos del indicativo, no se encuentran elementos en las expresiones matemáticas nucleares para poder afirmar una conjugación temporal. Para referirse a esta carencia de conjugación temporal, simplemente se dirá que el '*tiempo verbal*' es ‹impertérrito› o imperturbable en torno al tiempo de la acción.

La diferencia entre el "<u>multiplica</u> <u>a</u>" de la (*81*) y el "divide a" de la (83) es un rasgo semántico de la acción, al igual que la diferencia entre "se resta de" de la (85) y el "se suma a" de la (87). Por lo pronto, se propone que esta diferencia tiene que ver con un rasgo distintivo de <*inversabilidad*> pero contextualizado bajo la <direccionalidad> del sintagma nominal. Así, se propone que '*dividir*' es '*des-plegar*' o plegar a la inversa, mientras que '*restar*' es '*des-sumar*' o sumar a la inversa. La diferencia semántica entre '*multiplicar*' y '*sumar*', es más bién una diferencia entre '*plegabilidad*' y '*sumatividad*', rasgos semánticos que no se han podido analizar en componentes distintivos más reducidos.

Se utilizarán los términos de "inversabilidad" y "no-inversabilidad", para distinguirlos de 'direccionalidad' que ya hemos visto en el análisis del sintagma nominal. Estos se referiran a la diferencia gramatical de las acciones verbales de la expresión matemática nuclear.

Para el caso de las acciones verbales de los operadores de cálculo aritmético conocidas como "exponenciación" ($n^n$) y de la "obtención de la raiz" ($\sqrt[n]{n}$), no se han podido encontrar otro tipo de rasgos gramaticales distintivos, por lo que se intuye que ambos casos son derivaciones abreviadas de los anteriores. Más adelante, se intentará explicarlos como un caso transformacional de los anteriores.

En el Cuadro 4, se reunen todos los rasgos distintivos que construyen al Verbal de las expresiones aritméticas nucleares.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| <iteratividad> | | | x | x |
| <perfectividad> | x | x | | |
| <inversabilidad> | | x | | x |
| <no-inversabilidad> | x | | x | |
| <sumatividad> | x | x | | |
| <plegabilidad> | | | x | x |
| Símbolo | [+] | [−] | [∘] | [÷] |

Cuadro 4.

En el Cuadro 3 se utiliza el símbolo "x" para marcar los rasgos que le pertenecen a una operación de cálculo aritmético en particular. Así, por lo tanto, los símbolos "+", "−", "∘", y "÷" que se utilizan en las expresiones matemáticas nucleares, son sólo abreviaciones notacionales de la combinación particular de ciertos rasgos distintivos, como por ejemplo:

$$(88) \quad \text{Verbal} \longrightarrow t, \begin{bmatrix} \text{perfec.} \\ \text{iter.} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{inver.} \\ \text{no-inver.} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{sum.} \\ \text{pleg.} \end{bmatrix}, SN_2$$

podría ser una representación de la regla general que podría derivar en la escritura de (65) o (69). Para este caso, y los que siguen, se utilizarán las abreviaciones de la (88), es decir, "perfec.(tividad)", "iter.(atividad)", "inver.(sabilidad)", "no-inver.(sabilidad)", "sum.(atividad)", y "pleg.(abilidad)" para referirse a los rasgos distintivos previamente expuestos.

Con la intención de conservar la analogía con la descripción de la oración nuclear del español, se clasificarán los rasgos distintivos de ‹perfectividad› y de ‹iteratividad› bajo '*aspecto verbal*', mientras que los rasgos distintivos de ‹inversabilidad› y de ‹no-inversabilidad› se clasificarán como '*modo de la acción*'. Los rasgos semánticos de ‹plegabilidad› y de ‹sumatividad›, se clasificarán como rasgos distintivos semánticos de la acción verbal. A su vez, tanto el 'aspecto de la acción' como el 'modo de la acción' se agruparán en la subcategoría gramatical 'Modal', mientras que los rasgos semánticos distintivos se clasificarán en la categoría gramatical 'Verbo'. El rasgo de temporalidad "imperturbable", se clasificará bajo la subcategoría de 'tiempo'. Por su parte, tanto la subcategoría 'tiempo' como la subcategoría 'Modal' se clasificarán bajo la categoría gramatical 'Auxiliar', en vista de que son los componentes que *auxilian* a las raíces de la acción verbal 'Verbo', en analogía a lo que sucede en las lenguas naturales.

A continuación se propone el árbol gramatical correspondiente que describe de manera sintetizada la distribución de las distintas categorías y subcategorías que se acaban de mencionar.

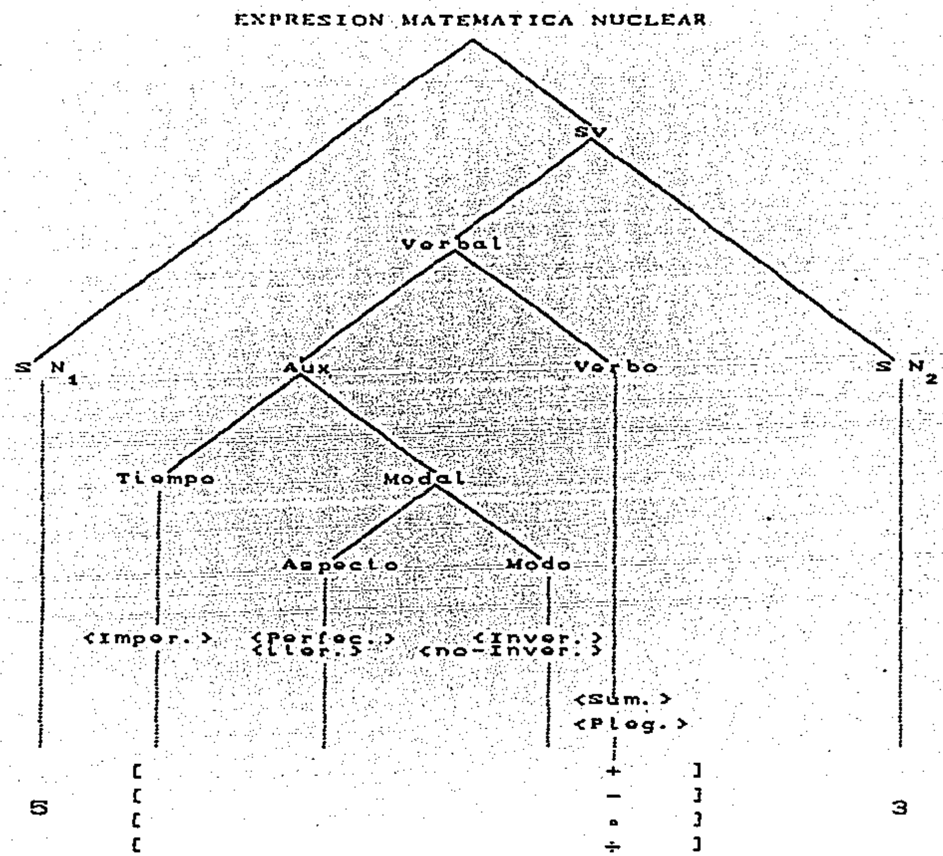



Figura 11.

Aquí, se utilizan las llaves cuadradas "[]" para marcar los límites de las distintas acciones verbales.

Con lo anterior, se pasa a modificar las reglas de reescrituración del Sintagma Verbal de la regla (74) de la siguiente manera:

(89)

(i) SV ---▸ Verbal, $SN_2$

(ii) Verbal ---▸ Aux, Verbo

(iii) Aux ---▸ t, M

(iv) t ---▸ impertérrito

(v) M ---▸ Aspecto, Modo

(vi) Aspecto ---▸ $\begin{bmatrix} \text{perfec.} \\ \text{iter.} \end{bmatrix}$

(vii) Modo ---▸ $\begin{bmatrix} \text{inver.} \\ \text{no-inver.} \end{bmatrix}$

(viii) Verbo ---▸ $\begin{bmatrix} \text{sum.} \\ \text{pleg.} \end{bmatrix}$

en donde las llaves cuadradas largas indican la opcionalidad y la $SN_2$ se construye con la aplicación cíclica de las reglas de la (74).

Para el caso del signo de igualdad "=", se propone que es otro tipo de verbo análogo a la '*cópula*' en los lenguajes naturales. Lo anterior modifica el árbol gramatical de la Figura 11, de la misma manera que lo describe Casellas (1979) en el Cuadro 3 en el Marco Teórico de este capítulo. Es decir, se cambia la clasificación de la categoría gramatical $SN_2$ a función de 'Predicado Nominal' (PN), por lo cual, no se entrará en detalle al respecto ya que mucha de la discusión que ésto podría generar, se podría resolver con un análisis de tipo filológico, lo cual, insistimos, no es el objeto de esta tesis.

A continuación, resumimos todas las reglas de generación y de reescrituración de la expresión matemática nuclear.

(90)

**EXPRESION MATEMATICA NUCLEAR**

i) EN ---▸ (neg), SN, SV

ii) SV ---▸ Verbal, SN

iii) Verbal ---▸ Aux, $\begin{bmatrix}\text{Verbo} \\ \text{Cop, PN}\end{bmatrix}$

iv) Aux ---▸ t, M

v) t ---▸ impertérrito

vi) M ---▸ Aspecto, Modo

vii) Aspecto ---▸ $\begin{bmatrix}\text{perf.} \\ \text{iter.}\end{bmatrix}$

viii) Modo ---▸ $\begin{bmatrix}\text{inver.} \\ \text{no-inver.}\end{bmatrix}$

ix) Cop ---▸ "="

x) Verbo ---▸ $\begin{bmatrix}\text{sum.} \\ \text{pleg.}\end{bmatrix}$

xi) PN ---▸ SN

xii) SN ---▸ Det, N

$$\text{xiii) Det ---▸} \begin{bmatrix} (+) \\ - \end{bmatrix}$$

$$\text{xiv) N ---▸} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$$

en donde EN significa 'Expresión Matemática Nuclear', y en donde las siguientes reglas especifican la reescrituración abreviada del Verbal:

(91) t, perfec., no-inver., sum. ---▸ [+]
(92) t, perfec., inver., sum. ---▸ [−]
(93) t, iter., no-inver., pleg. ---▸ [•]
(94) t, iter., inver., pleg. ---▸ [÷]

Por último, a continuación se da un ejemplo de generación de una expresión matemática nuclear:

(95) EN ---▸ $SN_1$ , SV

(96) SN ---▸ Det, N, SV

(97) Det ---▸ direc, Adj, N, SV

en donde seleccionando el signo positivo para direc:

(98) direc ---▸ (+), Adj, N, SV

(99) Adj ---▸ (+), O, N, SV

escogiendo 'número' para N:

(100) N ---▸ (+), O, 'número', SV

seleccionando el "5" para 'número'

(*101*) Numero ---▸ (+), O, S, SV

omitiendo el signo positivo y borrando el signo O por una regla de transformación a estructura superficial no especificada

(*102*) EN ---▸ S, SV

(*103*) SV ---▸ S, Verbal, $SN_2$

(*104*) Verbal ---▸ S, Aux, Verbo, $SN_2$

(*105*) Aux ---▸ S, t, M, Verbo, $SN_2$

(*106*) t ---▸ S, impert., M, Verbo, $SN_2$

(*107*) M ---▸ S, impert., Aspecto, Modo, Verbo, $SN_2$

seleccionando (iter.) para Aspecto

(*108*) Aspecto ---▸ S, impert., iter., Modo, Verbo, $SN_2$

seleccionando (no-inver.) para Modo

(*109*) Modo ---▸ S, impert., iter., no-inver., Verbo, $SN_2$

seleccionando (pleg.) para Verbo

(*110*) Verbo ---▸ S, impert., iter., no-inver., pleg., $SN_2$

aplicando la regla (*93*) y conjugando el tiempo

(*111*) EN ---▸ S, [∘], $SN_2$

aplicando ciclicamente las reglas xii), xiii) y xiv) de la (*90*)

(*112*) SN ---▸ S, [∘], (+), 'número'

escogiendo "3" para 'número'

(*113*) Numero ---▸ S, [∘], (+), 3

y por último, borrando todos los signos de las reglas gramaticales, y optando por omitir el signo positivo

(*114*) 5 [•] 3

No obstante, la expresión matemática nuclear requiere todavía de otras reglas más para que pueda derivar en una expresión matemática a como aparece en las ecuaciones aritméticas y algebraicas.

A estas otras reglas las denominaremos *reglas de transformación* y las cuales en las gramáticas generativas más recientes también se les denomina como *reglas de movimiento* ya que su función consiste en adecuar la expresión matemática nuclear por medio del movimiento de sus constituyentes para construir a la estructura profunda con la cual se inicia la derivación de la estructura superficial (una vez aplicadas las reglas de inserción léxica) de las ecuaciones aritméticas y algebraicas. A continuación se pasa a estudiar algunas transformaciones.

## § 2.3. Algunas Reglas de Transformación de la Oración Nuclear.

Antes de poder considerar a las reglas de transformación de las expresiones matemáticas nucleares (EMN), se necesita considerar a la EMN bajo el contexto de una expresión ecuacional (EE), es decir:

(115) EMN = EMN

(116) EMN ≠ EMN

(117) EMN > EMN

(118) EMN < EMN

*(119) EMN >=< EMN

*(120) EMN <> EMN

en donde el símbolo "=" denota al signo 'igualar a', el "≠" denota al 'negación-igualar a', el ">" a 'ser mayor que', y, "<" a 'ser menor que', mientras que el asterisco "*" denota la inaceptabilidad gramatical del enunciado.

Los anteriores, conforman un grupo distinto de verbales de los que corresponden a las operaciones de cálculo aritmético. Tanto el *modo* de estos verbales, como su verbo, contienen otros rasgos que se han dejado de lado durante el estudio de la oración nuclear. En lo que se refiere al modo, estos verbos no contienen la pareja de rasgos de (iteratividad) y (perfectividad). Con respecto a los rasgos semánticos del verbal, tampoco, se distinguen por la (*inversabilidad*). Sus rasgos distintivos son más bien de tipo (*ecuativo*), en otras palabras, *comparan* y *contrastan* objetos, personas, animales y cosas, es decir;

(121) Juan <u>es igual a</u> Pedro.

(122) La manzana <u>es igual a</u> la pera.

(123) El perro <u>es igual al</u> gato.

(124) X <u>es igual a</u> 5.

que se podrían clasificar como rasgos semánticos de (*comparatividad*), como en;

(125) X <u>es mayor que</u> 5.

y de (*contrastividad*), como en;

(126) X <u>no es igual a</u> 5.

en donde la comparación y el contraste tienen la función de encontrar un valor común, o una equivalencia lógica. Desde el punto de vista lógico-filosófico, su función es *tautológica* (Wittgenstein, L.: 1957), mientras que desde el punto de vista gramatical, su función es *copulativa*, ya que liga al Sujeto Gramatical con lo que *predica*, o su Predicado Nominal. Sin embargo, estas diferencias no cambian en lo absoluto las reglas básicas de la generación de una expresión matemática básica, salvo las modificaciones en el verbal. A continuación se presentan las modificaciones:

(127)

(i) SV ----▸ Verbal, PN

(ii) Verbal ----▸ Aux, Cop

(iii) Aux ----▸ Tiempo, Modo

(iv) Tiempo ----▸ impertérrito

$$\text{(v) Modo} \dashrightarrow \begin{bmatrix} \langle\text{comparatividad}\rangle \\ \langle\text{contrastividad}\rangle \end{bmatrix}$$

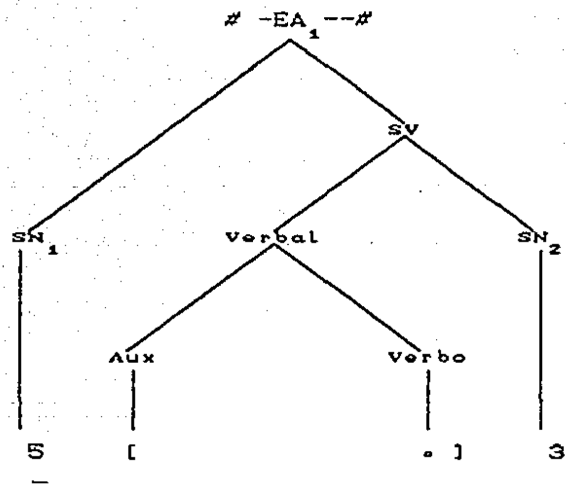
(vi) Cop ----▸ <equidad>

$$\text{(vii) PN} \dashrightarrow \begin{bmatrix} \text{SN} \\ \text{(EMN)} \end{bmatrix}$$

Bajo las reglas anteriores de reescrituración, se clasifican a los verbales de tipo *ecuacional*, que a grandes rasgos se distinguen en dos grupos, las igualdades, y las desigualdades. En este trabajo, no se entra en detalle al respecto, y sólo se enfoca al signo de la igualdad "=".

En el caso que nos ocupa, los entes que *co-existen* bajo el signo de la igualdad, son las mismas EMN que se presentaron anteriormente. Para distinguirlas de las EE mencionadas al principio de esta sección, denominaremos a las EMN que contengan un verbal de cálculo aritmético como *expresiones aritméticas* (EA), mientras que a las que contengan un verbal copulativo, las denominamos *expresiones ecuacionales* (EE). Cuando nos refiramos en este trabajo, ambiguamente, a los dos tipos de expresiones, nos referiremos a ellas como EMN. Con esto, definimos gramaticalmente a la ecuación en el sentido matemático, como la incrustación (*embedding*) de una o varias EA en una EE, que podría describirse por medio de las siguientes *reglas de transformación*:

(128)

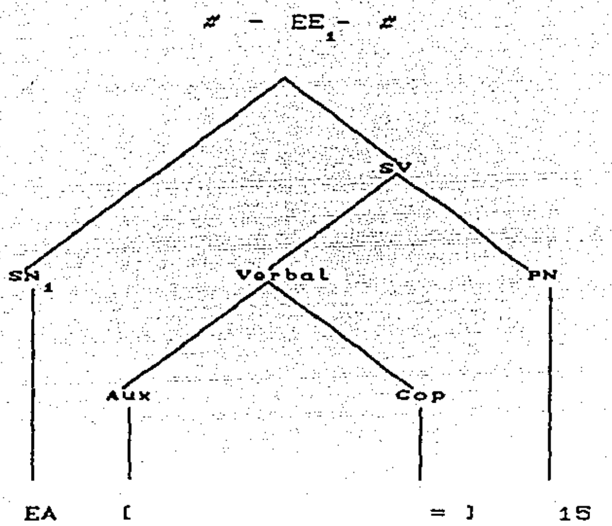



que podría analizarse estructuralmente en;

(129) EA ----> $SN_1$ SV

se incrusta en;

(130)




en donde el análisis estructural de EE corresponde a;

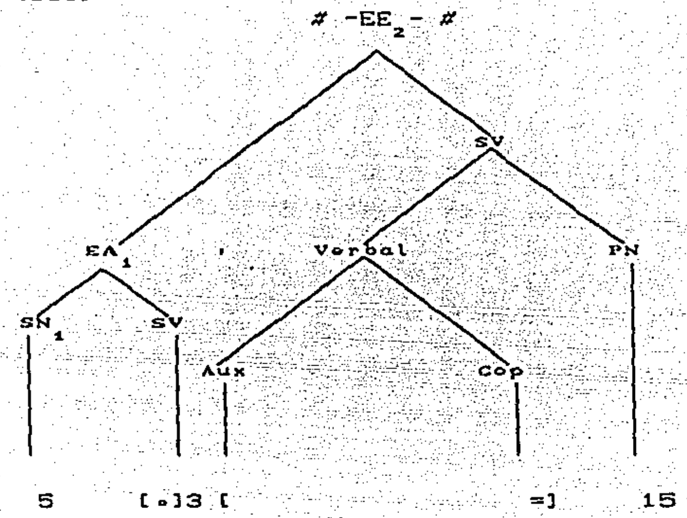
$$\text{(131) EE} \longrightarrow \text{SN}_1 \quad \text{Cop} \quad \text{PN}$$

que es la base que permite la incrustación de la (128), derivando en un cambio estructural a nivel de estructura superficial del siguiente tipo:

$$\text{(132) EE}_2 \longrightarrow \text{EA}_1 \quad \text{Cop} \quad \text{PN}$$

que podría diagramarse de la siguiente manera:

(133)




que también podría describirse con otro tipo de notación como la siguiente:

(134)

ANALISIS ESTRUCTURAL DE EA: $SN_1$ SV

en donde: $x_i$ $x_j$

ANALISIS ESTRUCTURAL DE EE: $SN_1$ Cop PN

en donde: $x_k$ $x_l$ $x_m$

Tiene un

CAMBIO ESTRUCTURAL: EA, EE ---> $SN_1$, Cop, PN ---> $SN_1$, SV, Cop, PN

en donde; $x_k$ $x_l$ $x_m$ ----> $x_i$ $x_j$ $x_l$ $x_m$

es decir, de EE y de EA se construye

(135) 5 [•] 3 = 15

en donde las "x" con subíndices de la (134) indican el orden de co-existencia de los elementos analizados gramaticalmente e indican, también, la transformación que opera sobre la EE por medio del procedimiento de incrustación.

Con base en lo anterior, se observa que la (115), como EMN, deriva de una estructura profunda cuya función consiste en ligar al Verbal de una expresión aritmética con el Sujeto de otra expresión aritmética, en donde la corrección de la nueva EMN formada por este procedimiento, corresponde a un nivel lógico-semántico, y no propiamente a un nivel sintáctico. Sin embargo, consideramos que a nivel sintáctico actúan una serie de rasgos distintivos para *estabilizar* a la transformación. Estos rasgos distintivos, corresponden a los signos positivos y negativos de los sintagmas nominales correspondientes, y su función consiste, principalmente, en darle la característica *unitaria* y *complementaria* a las SN de la EMN. Estos rasgos, se podrían adecuar por medio de una transformación adjetival predicativa, cuya función consiste en otorgarle el rasgo de <*unidad*> a los SN por medio de un Verbal de multiplicación, es decir;

(136) 5 ...

(137) ...5

siguen siendo 'cinco' ya que se derivan de

(138) 1 [∘] 5

y su '*producto*' sigue siendo 'cinco'. En otras palabras, todo número es 'un' número porque ese número '*multiplicado*' por la ⟨unidad⟩ es el '*mismo*' número. La siguiente regla de transformación tiene la intención de describir en notación abreviada la morfología unitaria del sintagma nominal de la (131):

(139)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ANALISIS ESTRUCTURAL : | $\langle\mp\rangle$ | $\langle 1\rangle$ | $[\circ]$ | SN |
| en donde: | $x_i$ | $x_j$ | $x_k$ | $x_l$ |

Tiene un
CAMBIO ESTRUCTURAL: $x_i \ x_j \ x_k \ x_l \longrightarrow x_i \ x_l$

en donde los corchetes ⟨⟩ indican los rasgos pertinentes, y los subíndices alfabéticos, el orden de los constituyentes. El cambio corresponde a:

(140) $\langle\mp\rangle \quad \langle 1\rangle \quad [\circ] \quad SN \longrightarrow \langle\mp \quad SN\rangle$

y la denominamos TRANSFORMACION ADJETIVAL DE FIJACION DE SIGNO POSITIVO O NEGATIVO ($Trans_{adj\mp}$).

La transformación anterior, necesita distinguirse de otra transformación similar que construye después de haberse aplicado la anterior. Esta siguiente transforamación, la denominamos TRANSFORMACION NOMINAL ya que su función consiste en construir un PN al incrustarse en una EE, así, por ejemplo:

(141) -2 [•] -2

resulta ser una EA que produce otras EMN y/o predicados nominales distintos siendo posible un cambio en el signo positivo o negativo de la expresión correspondiente. En apariencia, el cambio de signo positivo o negativo, se rige por unas reglas relativamente independientes (aunque no del todo) de los cambios que se efectúan sobre el núcleo nominal del PN durante la operación matemática, es decir;

(142) -2 [•] -2 = 4

*(143) -2 [•] -2 = -4

lo que se observa con mayor claridad cuando la EA contiene signos distintos pero núcleos semánticamente equivalentes, tanto en la función Sujeto-de como Objeto-de, es decir;

(144) -2 [•] +2

que produce un PN distinto a la (142), mientras que con la substitución del verbal de multiplicación por el verbal de la suma, produce la neutralización de los signos direccionales y del valor léxico-numérico de los sintagmas nominales, es decir;

(145) -2 [+] +2 = 0

en donde se utiliza el símbolo del "cero" (0) para indicar ambas cosas , la neutralización de los signos y del valor numérico del PN. Así, por lo tanto, se observan tres condiciones fundamentales que determinan los cambios que se operan en los signos positivos y negativos al construir una EMN:

a) el tipo de verbal

b) las diferencias entre las funciones de los SN (Sujeto-de, Objeto-de)

c) el valor numérico del SN.

Para la primera condición (a), se observa que el cambio de verbal produce signos y PN distintos, así, por ejemplo:

(146) -2 [-] -2 = 0

(147) -2 [+] -2 = -4

(148) -2 [÷] -2 = 1

Tanto para las condiciones (b) y (c), se obsserva que la función gramatical Sujeto-de ($SN_1$) produce signos distintos en los "productos" (PN) según el valor numérico en relación con la función Objeto-de ($SN_2$) de la EA, en otras palabras, si $SN_1$ es mayor que $SN_2$, o si $SN_1$ es equivalente a $SN_2$, o si $SN_1$ es menor que $SN_2$, condiciona el cambio del PN de la EE, así, por ejemplo:

(149) -2 [-] -1 = -1

(150) -2 [-] -2 = 0

(151) -1 [-] -2 = 1

En el siguiente Cuadro, se ilustran todos los cambios posibles, según las condiciones que intervengan:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a) Tipos de Verbal [+] [-] [•] [÷] | [•] [÷] $SN_1$ * $SN_2$ | | [+] | | [-] | | Signo de SN2 | |
| b) Funciones Gram. $SN_1$, $SN_2$ c) Valor Numérico | + | − | − | − | + | + | − | SN1 < SN2 |
| | − | + | + | + | − | − | + | |
| | | | − | 0 | 0 | + | − | SN1 = SN2 |
| [+] [-] $SN_1$ > $SN_2$ | − | + | 0 | + | − | 0 | + | |
| | − | + | | | | | − | |
| Signo de SN1 | − | + | − | + | − | + | | |

CUADRO 5.

Nota: El símbolo "<" se lee "menor que"; el ">" se lee "mayor que"; el "=" se lee "igual que"; y el símbolo "*" se lee como "cualquiera de los tres anteriores".

A continuación se propone el cambio estructural que permite independizar relativamente, al signo direccional del núcleo nominal del sintagma nominal.

(152)

ANALISIS ESTRUCTURAL: $\mp$ $SN_1$ [•] $\mp$ $SN_2$

en donde: $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$

Tiene un

CAMBIO ESTRUCTURAL: $x_1\ x_2\ x_3 x_4\ x_5 \dashrightarrow x_1 x_4 x_6$

en donde el $x_6$ denota la nueva forma de PN que produce la EMN cuando se opera matemáticamente, y la cual corresponde a:

$$(153) \quad \mp \; SN_1 \begin{bmatrix} [-] \\ [+] \\ [\cdot] \\ [\div] \end{bmatrix} \mp \; SN_2 \; \dashrightarrow \; \mp \; PN$$

en donde por medio de las veinticuatro reglas del Cuadro 5, se establecen las condiciones para la escritura de los signos positivos y negativos del PN.

En lo que conscierne al cambio del PN y su valor numérico, este está condicionado tanto por el valor numérico de la $SN_1$ como de la $SN_2$, así como, también, por los signos positivos y negativos que tengan los sintagmas nominales.

El PN construido por medio de una transformación nominal ($Trans_{nom}$), pasa a ser, por lo tanto, la construcción sintáctica de la <cardinalidad> y de la <ordinalidad> de los sistemas numéricos cuando se recurre a una EMN incrustada en posición de función Sujeto-de de una EE, así, por ejemplo:

(154) $1 \; [+] \; 1 = 2$

(155) $2 \; [\cdot] \; 1 = 2$

(156) $2 \; [\div] \; 1 = 2$

(157) $2 \; [-] \; 1 = 1$

que es lo que permite construir el significado del concepto de *número* desde el punto de vista matemático, sin importar cual sea este. En vista de que en este trabajo de tesis, no se enfoca el aspecto matemático ni sus métodos y procedimientos, no se entra en mayor detalle al respecto, y sólo se consideran los aspectos sintácticos más relevantes. En este trabajo, la (152) incrustada en la (134), a manera de regla de transformación más general, permite generalizar una de las propiedades características de las operaciones aritméticas elementales, es decir, definir las cuatro operaciones aritméticas básicas a partir de los verbales de suma y multiplicación. Desde el punto de vista gramatical, su transformación hipotética podría ser la siguiente:

(158)

ANALISIS ESTRUCTURAL: $SN_1$ Verbal $SN_2$CopPN

en donde: $x_1 \begin{bmatrix} [+] \\ [\cdot] \end{bmatrix} x_2 - x_3$

Tiene un

CAMBIO ESTRUCTURAL:

$$x_1 \begin{bmatrix} [+] \\ [\cdot] \end{bmatrix} x_2 \;=\; x_3 \quad \dashrightarrow$$

$$x_3 \begin{bmatrix} [-] \\ [\div] \end{bmatrix} x_1 \;=\; x_2 \quad \dashrightarrow$$

o, también;

$$x_3 \begin{bmatrix} [-] \\ [\div] \end{bmatrix} x_2 \;=\; x_1$$

que pudiera corresponder a los siguientes ejemplos:

(159) +3 [+] −2 = +1

(160) +1 [-] +3 = -2

(161) +1 [-] -2 = +3

es decir, cuando el PN pasa a ocupar la función de Sujeto-de ($SN_1$) de la EA incrustada en la EE, el rasgo de <no-inversabilidad> del Verbal de las expresiones aritméticas, se substituye por el rasgo de <inversabilidad> del Verbal de la EA, y viceversa (ver Cuadro 4.). A esta transformación la denominaremos TRANSFORMACION INVERSA ($Trans_{inver}$) en virtud de la modificación en los rasgos distintivos del Verbal.

Al iniciar el planteamiento de los sintagmas nominales con los ejemplos (49) y (50), se observó que en el lenguaje matemáticos ocurrían expresiones *compuestas* o *relativizadas* que contenían sintagmas nominales en donde aparecían más de un nombre o núcleo nominal. En este trabajo, se propone que en estos casos ocurre que el núcleo nominal principal se encuentra modificado por otro núcleo nominal a manera de determinante en la posición de adjetivo del sintagma nominal (ver Figura 9.), tal y como se muestra en el siguiente ejemplo:

(162) 5X...

Esta construcción deriva de un núcleo nominal denominado *variable* enel lenguaje matemático, y cuya diferencia con el concepto de *constante*, pertenece más bien al análisis semántico. Desde el punto de vista sintáctico, no encontramos rasgos distintivos o pertinentes que indiquen un comportamiento sintáctico diferente, ya que también pueden ocurrir sintagmas nominales como

(163) ...5X...

durante el desarrollo de la demostración de la solución de un problema matememático como;

(164) ...X(5 + Y)...

sin que se establezca una claridad sintáctica sobre cuales son "constantes", y cuales son "variables", quedando más bien en reglas convencionales sobre la manera de presentar a los lectores la escritura notacional de la matemática (Wolf, B. K.: 1986). La transformación que construye a la (162), lo hace subordinando una $SN_2$ a la $SN_1$ de la EA. Debido a lo anterior, aquí la denominaremos como TRANSFORMACION ADJETIVAL RELATIVA ($Trans_{adj.\,rel.}$). Su transformación es la siguiente:

(165)

ANALISIS ESTRUCTURAL :

$$SN_1 \begin{bmatrix} [\circ] \\ [+] \end{bmatrix} SN_2$$

en donde; $x_1 \quad x_2 \quad x_3$

tiene un
CAMBIO ESTRUCTURAL: $x_1 \; x_2 \; x_3 \dashrightarrow x_3 \; x_2 \; x_1$

en donde por una regla convencional, se elide la escritura del símbolo del Verbal de multiplicación ([·]). Esta transformación, es aplicable de manera recursiva, y en teoría, puede subordinar una infinitud de $SN_2$. En el caso del Verbal de la suma ([+]), su símbolo no se elide, así, por ejemplo:

(166) Y [·] X

se relativiza como

(167) XY

mientras que

(168) Y [+] X

se pudiera relativizar como

(169) X [+] Y

Con la aplicación de la transformación anterior, se derivan expresiones aritméticas y algebraicas como;

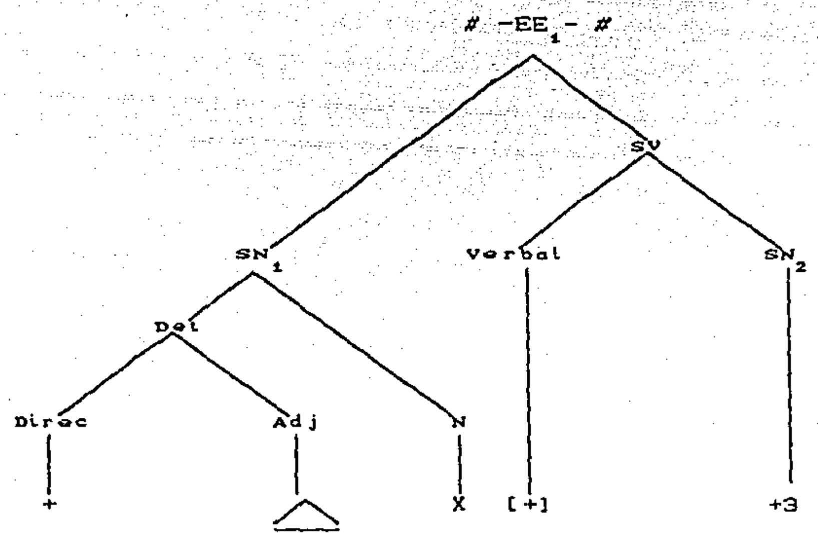
(170) 5X

(171) 5X [+] 3

(172) 2 [+] 3X [·] 5X [+] 3

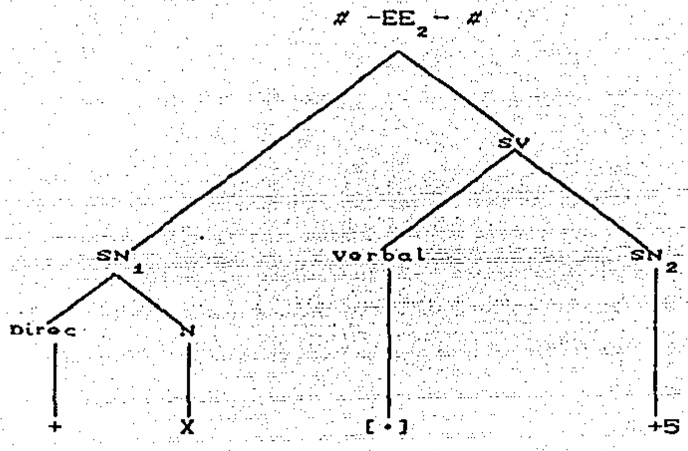
Los casos particulares como la (171) y (172), parecen tener una história de derivación un poco más complicada, ya que en estas expresiones, llegan a intervenir reglas de *co-referencialidad* que se sustentan en consideraciones sobre *deixis*, *anáfora*, y el *universo del discurso* (Lyons, J. : 1977). Según algunos semánticistas generativos, como por ejemplo McCawley (1969), los casos como (171) y (172) están sujetos a un tipo de *pro-nominalización* condicionada por la identidad *referencial* de términos que se repiten en el universo del discurso como acto comuicativo. Según la versión estandard de N. Chomsky (1965; p.p. 129 - 139) resultan condicionarse, más bien, tanto por una identidad léxica, como por una identidad referencial (Lyons, J.: 1977; p.p. 662) que se muestra con subíndices referenciales como en la (139), que ligan dos textos co-referencialmente. En este trabajo, asumimos la posición de Chomsky e indicamos el término sujeto a la co-referencialidad con un triángulo enmarcado en el sintagma nominal, como en la (173):

(173)




que en esencia, se refiere tanto léxica como referencialmente a la (174);

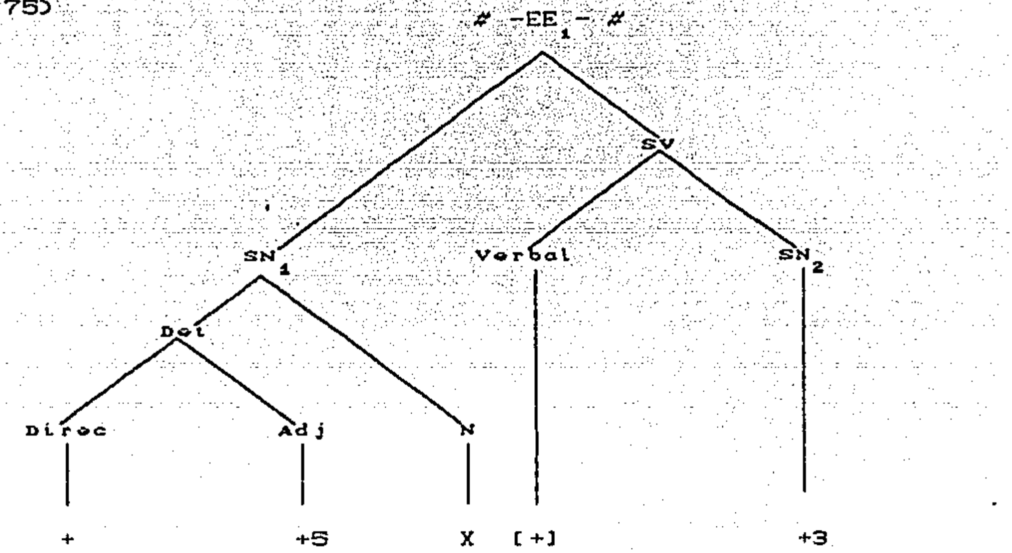
(174)




la cual, sujeta a la $Trans_{adj.\,rel}$ de la (165) y su subsecuente incrustación en el lugar marcado con el triángulo en la (173), construye la (175) que corresponde al árbol gramatical de la (171).

Otra forma de representar la historia transformacional de la (171), podría ser la forma notacional de la (176), en donde los subíndices alfabéticos indican la co-referencialidad de los componentes de las distintas expresiones aritméticas, los subíndices de los subíndices numéricos de las EA, indican los pasos intermedios de la historia transformacional, y los gatos "##", indican la relativización o la subordinación del núcleo nominal a un sintagma nominal compuesto, al cual, todavia le faltaría la aplicación de las condiciones del Cuadro 5 para el cambio que se opera en el signo direccional.

(175)




(176) ANALISIS ESTRUCTURAL: $EA_1$: Direc, Adj, N, Verbal, $SN_2$

en donde; $x_i$ Adj $x_j$ $x_k$ $x_l$

y

$EA_2$: Direc, N, Verbal, $SN_2$

$x_i$ $x_j$ [•] +5

tiene un

CAMBIO ESTRUCTURAL: $EA_{2_1}$: $x_i$ $x_j$ [•] +5 ---▸ $x_i$ +5 $x_j$

mientras que por la aplicación de la $Trans_{adj.rel}$

y por incrustación a la $EA_1$;

(176') $EA_{2_1}$ ---▸ $EA_3$: $x_i$ #+5 $x_j$# $x_k$ $x_l$

Por último, otra transformación que conduce a resultados interesantes en el lenguaje matemático, similar a la anterior pero distinta en el sentido de que solamente opera a nivel de EA y que produce estructuras superficiales que varían según el Verbal de cálculo aritmético de la EA, es la que denominaremos TRANSFORMACION EQUI-NOMINAL ($Trans_{equi.}$), ya que su esencia consiste en partir de una estructura profunda de EA, en donde tanto la $SN_1$ como la $SN_2$ son co-referenciales, o equivalentes. Su aplicación, en el caso del Verbal de la suma, consiste en definir intuitivamente al Verbal de la multiplicación. En el caso del Verbal de la resta, su aplicación define intuitivamente al concepto de *cero*. Su aplicación con un Verbal de división, define intuitivamente al concepto de *unidad* de la (139), mientras que en el caso del Verbal de multiplicación, define intuitivamente al tipo de operaciones de cálculo conocidas como *exponenciación* (o elevar al cuadrado, al cubo, etcétera), en tanto que, aplicando posteriormente de manera recursiva a la $Trans_{inver}$, una vez derivada la exponenciación, llega a definir intuitivamente al concepto de *obtención de raíz* (cuadrada, cúbica, etcétera). A continuación presentamos la regla general de transformación para todos los verbales mencionados en este párrafo, en donde se utilizan los índices alfabéticos para indicar la co-referencialidad de los sintagmas nominales de la EA, el número "2" del Verbal de la suma, para indicar la cantidad de veces o la reiteratividad que denota el $SN_1$ del Verbal de la suma al transformarse en Verbal de multiplicación, mientras que el supraíndice "$^2$" para indicar el grado de exponenciación.

(177)

ANALISIS ESTRUCTURAL : $SN_1$ Verbal $SN_2$

en donde; $x_i$ Verbal $x_i$

tiene un

CAMBIO ESTRUCTURAL: $x_i$ [+] $x_i$ ---▸ $x_i$ [·] 2

$x_i$ [−] $x_i$ ---▸ *cero*

$x_i$ [÷] $x_i$ ---▸ *unidad*

$x_i$ [·] $x_i$ ---▸ $x_i^2$

Para el caso de la *obtención de raíz*, faltaría aplicar la (158) al Cambio Estructural del Verbal de multiplicación de la (177) para obtener su raíz correspondiente, es decir;

(178)

ANALISIS ESTRUCTURAL DE EA: $x_i$ [·] $x_i$ = $x_i^2$

en donde; $x_1$ [·] $x_2$ = $x_3$

tiene un

CAMBIO ESTRUCTURAL: $x_1$ [·] $x_2$ = $x_3$ ---▸

$x_3$ [÷] $x_1$ = $x_2$

o, también $x_3$ [÷] $x_2$ = $x_1$

en donde la inversabilidad de la operación de división, también se podría representar notacionalmente como:

$$(179) \quad \sqrt[2]{x_i^{2}} \; = \; x_i$$

y en el caso de números concretos, correspondería a :

$$(180) \quad +2 \; [+] \; +2 \; \dashrightarrow \; +2 \; [\cdot] \; 2$$

$$(181) \quad +2 \; [-] \; +2 \; \dashrightarrow \; 0$$

$$(182) \quad +2 \; [\div] \; +2 \; \dashrightarrow \; 1$$

$$(183) \quad +2 \; [\cdot] \; +2 \; \dashrightarrow \; 2^2$$

$$(184) \quad \sqrt[2]{+2^{2}} \; \dashrightarrow \; +2$$

Para concluir este capítulo, sólo añadiremos que el paso de operaciones aritméticas hacia operaciones algebraicas elementales, consiste, a grandes rasgos y sin entrar en detalles al respecto en vista de que faltaría un estudio más a fondo, en denotar con *variables* a los distintos sintagmas nominales, en vez de utilizar números concretos, como un posible caso de pro-nominalización, es decir:

$$(185) \quad X \; [+] \; X \; \dashrightarrow \; X \; [\cdot] \; 2$$

$$(186) \quad X \; [-] \; X \; \dashrightarrow \; 0$$

$$(187) \quad X \; [\div] \; X \; \dashrightarrow \; 1$$

$$(188) \quad X \; [\cdot] \; X \; \dashrightarrow \; X^2$$

$$(189) \quad \sqrt[2]{X^{2}} \; \dashrightarrow X$$

en donde por "variable", el lenguaje matemático se refiere al uso convencional de distintos alfabetos en vez de numerales.

A continuación, se pasará a dar un breve ejemplo de la aplicación del análisis gramatical de las ecuaciones de trinómio de cuadrado perfecto, pasando a una breve discusión sobre los procesos mentales y la manera en que un *lector idealizado* percibe dicha ecuación basándose para ello en los resultados de un experimento que se llevó a cabo en alumnos de matemáticas. Posteriormente, se dará una breve discusión sobre las influencias que podría tener este tipo de análisis en la detección y corrección de errores en la resolución de problemas matemáticos y su enseñanza.

## CAPITULO 3

### § 3.1. Análisis Gramatical de la Ecuación de Trinómio de Cuadrado Perfecto.

La *ecuación de trinómio de cuadrado perfecto* es un tipo de ecuación que pertenece a los *productos notables* en la matemática. A su vez, forma parte de la teoría de ecuaciones, y más concretamente, de la teoría de los productos de los *polinómios*. Su empleo en los programas de enseñanza de la matemática, por lo general, ocurre cuando los alumnos cmienzan a estudiar el Álgebra, especialmente, a *factorizar* para resolver ecuaciones y para simplificar expresiones *racionales*. Esto, por lo general, ocurre entre el tercer año de secundaria y el primero de preparatoria o de bachillerato. Por lo regular, los alumnos aprenden a resolver este tipo de ecuaciones con base en ejercicios y repeticiones que los docentes les inculcan a los alumnos de matemáticas con el objeto de explotar al máximo las capacidades de memorización del alumno, ya que su uso es muy frecuente y necesario para factorizar ciertos polinómios. En realidad, los métodos de enseñanza para este tipo de ecuaciones varían muy poco y fundamentalmente consisten en establecer una analogía entre el concepto de *cuadrado perfecto* y un *trinómio de cuadrado perfecto*. Un "trinómio de cuadrado perfecto", es básicamente, el cuadrado de un *binómio*, mientras que un "binómio" es un tipo de expresión matemática que contiene dos *términos*. Su importancia en el aprendizaje del álgebra elemental es indiscutible.

El empleo de este tipo de ecuación, ha sido investigado extensamente por investigadores educativos matemáticos, especialmente para observar las capacidades y *habilidades matemáticas* de los alumnos (Krutetsky, V. A.: 1962b; Ramiro, V. R. S.: 1986; Hernández-Márquez, B. B.: 1986). Nuestro propósito de retomar el análisis gramatical de este tipo de ecuaciones, radica, en principio, en colocar bajo cuestionamiento para una investigación futura, el caracter mismo de las "habilidades matemáticas", así como las enfocan gran cantidad de investigadores matemáticos educativos en la actualidad, ya que por lo general, consideran la existencia de cierto tipo de habilidades matemáticas específicas, y no *habilidades de procesos mentales* en general.

Comunmente, en el sistema educativo mexicano, la ecuación de trinómio de cuadrado perfecto (ETCP) se les presenta a los alumnos junto con la memorización de la frase:

> (*i*) *La suma de dos términos, todo elevado al cuadrado es igual al cuadrado del primer término más la suma del doble producto del primer término con el segundo, y la suma del cuadrado del segundo término.*

es decir;

$$(ii) \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

y por lo general, lo demuestran desarrollando el problema de la siguiente manera:

$$(iii)\quad (a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) =$$
$$a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b =$$
$$a^2 + 2ab + b^2$$

argumentando, en todo caso, una *propiedad comutativa* para pasar de;

$$(iv)\quad a\cdot b + b\cdot a$$

hacia

$$(v)\quad 2ab$$

Aunque la descripción anterior, posiblemente sea más económica para un matemático, dificilmente podría serlo para un alumno, como se llega a observar en la cantidad de tiempo que un docente invierte en ejercicios y taréas para que sus alumnos puedan *generalizar* el proceso de resolución a otras expresiones que se resuelven de la misma manera, así, por ejemplo:

$$(vi)\quad (2x-5)^2$$
$$(vii)\quad (x-1/2)^2$$
$$(viii)\quad (\sqrt{3x}+\sqrt{5})^2$$
$$(ix)\quad (x-\sqrt{2}/2)^2$$

por lo que frecuentemente, los alumnos terminan memorizándose una serie de pasos que automáticamente desarrollan para resolver los problemas, sin que en realidad se pueda afirmar que los alumnos hayan *comprendido* el problema. Sin entrar en un análisis sobre el uso comunicativo de este tipo de discurso con adolescentes de escasos quince años, a continuación presentaremos la historia transformacional de este tipo de ecuaciones siguiendo el desarrollo de la (*iii*).

Como primer paso, la estructura de base de EA que corresponde al binómio elevado al cuadrado "$(a + b)^2$" es el resultado de una EA a la cual se le aplica una $Trans_{equi.}$ (177) que construye a una $SN_1$ con una $EA_1$ incrustada que es co-referencial con una $SN_2$, es decir;

(*x*) $SN_i$ Verbal $SN_i$

como en los ejemplos de la (177), en donde el Verbal de la (*x*) es el Verbal de la multiplicación, y la $SN_i$ (tanto Sujeto-de como Objeto-de) podría deberse a un caso de aplicación de una $Trans_{adj. rel}$ como la (165) que subordina a una $SN_2$ a la $SN_1$ de la EA, es decir;

(*xi*) +b [+] +a ---▸ +a [+] +b

Como segundo paso, el Verbal de multiplicación establece las relaciones de co-referencia entre cada uno de los términos de la $SN_1$ con la $SN_2$, es decir;

(*xii*)

ANALISIS ESTRUCTURAL: +a [+] +b [·] +a [+] +b

en donde; $x_i$ [+] $x_j$ [·] $x_i$ [+] $x_j$

tiene un

CAMBIO ESTRUCTURAL: $x_i$ [+] $x_j$ [·] $x_i$ [+] $x_j$ ---▶

$x_i$[·]$x_i$ [+] $x_i$[·]$x_j$ [+] $x_j$[·]$x_i$ [+] $x_j$[·]$x_j$

cuando se toma a cado uno de los núcleos nominales por separado y en donde el Verbal dominante es el de multiplicación. Con base en lo anterior, a primera vista se llegan a distinguir dos EA que quedan sujetas a una Trans$_{equi.}$, y que son:

(xiii) $x_i$[·]$x_i$ ---▶ $x_i^2$

(xiv) $x_j$[·]$x_j$ ---▶ $x_j^2$

lo que transforma el Cambio Estructural de la (xii) en;

(xv) $x_i^2$ [+] $x_i$[·]$x_j$ [+] $x_j$[·]$x_i$ [+] $x_j^2$

faltando por transformar las EA co-referenciales;

(xvi) #$x_i$[·]$x_j$ [+] $x_i$[·]$x_j$#

que, a su vez, aplicando una Trans$_{adj. rel}$ a cualquiera de las dos EA, construye otra EA que queda sujeta a una Trans$_{equi}$, es decir;

(xvii) $x_i$[·]$x_j$ [+] $x_i$[·]$x_j$ ---▶ $x_i$[·]$x_j$[·]2

a la cual, aplicando de manera recursiva otra Trans$_{adj. rel.}$ y elidiendo los signos de multiplicación por la (155), construye

(xviii) $2x_ix_j$

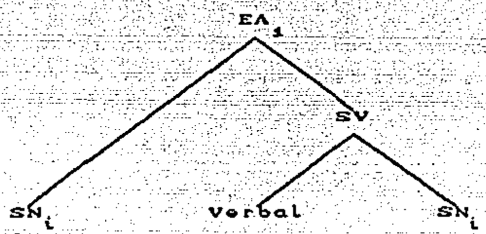
que, como último paso, transforma el Cambio Estructural de (xii) en;

(xix) $x_i^2$ [+] $2x_ix_j$ [+] $x_j^2$

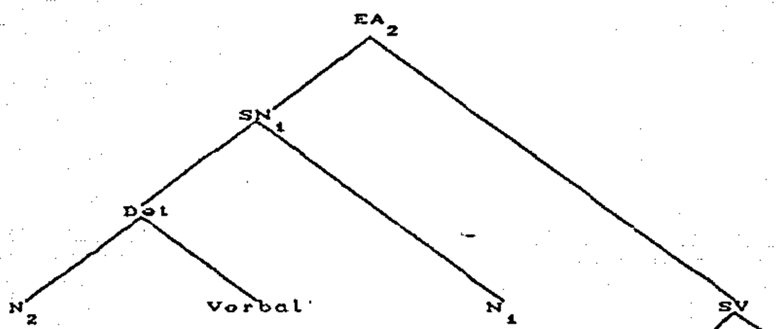
que es la estructura de base de todas ETCP, sin tomar en consideración detalles como los cambios de signos positivos y negativos, que a fin de cuentas se adecúan con el Cuadro 5.

A continuación, presentamos los diagramas arbóreos para los pasos (x), (xi), (xii) y (xix), en ese orden.

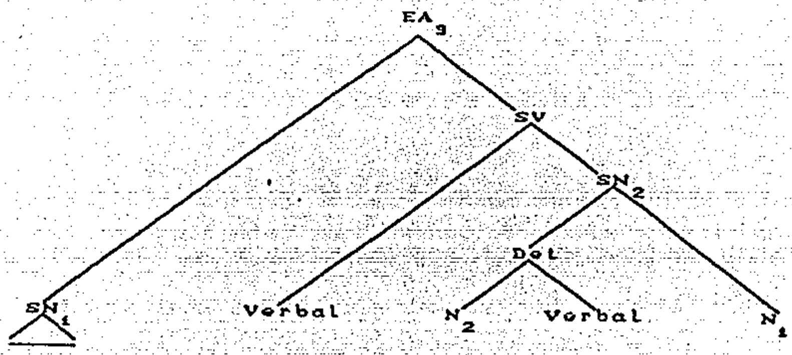
(xx)



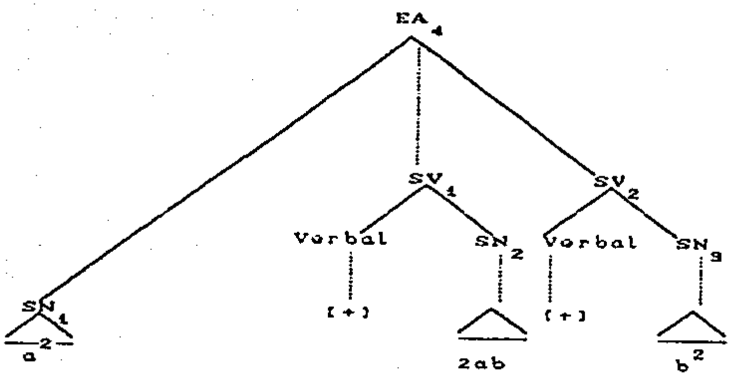

(xxi)



(xxii)


EA3
SV
SN2
Det
SN1
Verbal
N2
Verbal
N1

(xxiii)


EA4
SV1
SV2
Verbal
SN2
Verbal
SN3
(+)
(+)
SN1
a2
2ab
b2

## § 3.2. Percepción y Memorización de la ETCP por Alumnos de la Escuela Normal Superior.

Durante el mes de julio de 1985, se efectuó un experimento en las instalaciones de la Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero con alumnos de la Escuela Normal Superior de la misma, pertenecientes al cuarto año de la Especialidad de Matemáticas. Eneste experimento participaron un total de 39 sujetos (Hernández-Márquez, B. B.: 1986). El objeto del experimento fue observar los procesos mentales durante la percepción de ecuaciones y oraciones por medio de la capacidad de retención en la memoria corta de alumnos que en su gran mayoría eran maestros de primaria en servicio.

Este experimento se diseño como una réplica a un estudio previo llevado a cabo por V. A. Krutetsky de la Académia de Ciencias Pedagógicas de la U.R.S.S. para observar cualitativamente las habilidades especificas matemáticas para generalizar y para invertir los procesos mentales de una dirección a otra, en sentido opuesto (Krutetsky, V. A.: 1962b). Para ésto, Krutetsky había clasificado a sus sujetos (alumnos de secundaria del sexto al octavo año) en tres grandes grupos; *alumnos competentes*, *alumnos promedio*, y *alumlnos menos competentes*. La base de su investigación cualitativa fue llevar a cabo un análisis comparativo del proceso de resolución de problemas experimentales seleccionados específicamente. Con base en su estudio, concluye que existen varias habilidades que son esenciales para adquirir dominio del conocimiento matemático, llegando a identificar tres en particular;

a) una habilidad para generalizar amplia, rápida y detalladamente material de tipo matemático.

b) una habilidad para "*abreviar*" razonamientos, así como se refiere a una serie de operaciones matemáticas, y

c) una habilidad para cambiar un tren de pensamiento de una dirección a un sentido inverso.

El consideró que estas habilidades sólo pueden ser habilidades específicas para la actividad matemática y que no se manifestaban en todos los aspectos de la actividad mental de una persona dada, aunque reconoció que ésto último, amerita una investigación especial.

Sin entrar en detalles en torno al experimento, ya que no es el objeto de esta tesis repasar la tesis que le antecede a esta[1], en el experimento, se llega a la conclusión de que existe una relación entre el grado de memorización de las oraciones, con el grado de memorización de las ecuaciones, que contradice la afirmación de Krutetsky en torno a que los procesos mentales que

1 Este material, puede consultarse en la Biblioteca Stephen Bastien del CELE de la UNAM y existe otra copia en la Biblioteca de la Maestría en Educación en Matemática de la UACP y P del CCH de la UNAM.

le subyacen a las habilidades matemáticas para resolver problemas matemáticos

*sólo pueden ser habilidades específicas para la actividad matemática y que no se manifiestan en todos los aspectos de la actividad mental de una persona dada.*

por lo menos, en lo que se refiere a los aspectos lingüísticos.

La relación se encontró al comparar niveles de estructuras de base y estructuras profundas tanto en oraciones como en ecuaciones, lo que en cierta manera, nos permitió afirmar que en la *competencia* u "actividad mental" de los *hablantes* o "personas dadas", tienden a darse estructuras profundas y de base de caracter sintáctico, con las cuales, aparentemente, se acostumbran los hablantes a organizar sus procesos cognoscitivos y de percepción durante la lectura y memorización tanto de ecuaciones como de oraciones. El objeto de esta tesis consistió, por lo tanto, en hacer explícita la analogía entre las ecuaciones y las oraciones, no obstante, al concluir este estudio, hemos observado tanto una serie de similitudes como de diferencias en torno a las estructuras sintácticas de ambos lenguaje, po lo cual, a continuación pasaremos a discutirlas brevemente.

## § 3.3. Discusión General.

Desde el punto de vista pragmático, la diferencia fundamental que se observa en torno al lenguaje matemático con el lenguaje natural, es la función que juega el lenguaje en general en torno a su uso. Por un lado, el lenguaje natural cumple esencialmente una función social, mientras que no se puede afirmar lo mismo en torno a la función comunicativa del lenguaje matemático. En el análisis que hemos hecho sobre el lenguaje matemático, hemos observado que el concepto de *transformación* no tiene las mismas características de adecuación a las estructuras superficiales evaluadas a partir de la aceptabilidad del hablante idealizado, sino que más bien, cumple una función *hermética* con el objeto de transformar por el puro hecho de transformar bajo un criterio de *corrección-incorrección*, o para ponerlo en términos lógicos, bajo un criterio de verdadero-falso. Es decir, o se transforma correctamente, o nó.

Por otro lado, desde un punto de vista semántico-sintáctico, comparte una gran cantidad de similitudes, tanto en sus funciones referenciales, denotativas y estructurales con los lenguajes naturales, es decir, el lenguaje matemático, *funciona* como un lenguaje natural, no obstante, no *actúa* como tal, en el sentido de los actos verbales (Austin, J. L.: 1962).

Esto, nos lleva a considerar un aspecto importante en la enseñanza de la matemática; el análisis de errores.

En los últimos años, mucho se ha hablado en la matemática educativa de un vínculo entre la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos con su entorno social y cultural (Freundenthal, H. : 1981). Según Freundenthal, uno de los problemas principales en la enseñanza de la matemática, radica en que los maestros de matemáticas no analizan los errores que cometen los alumnos de matemáticas, y no se preocupan ni esfuerzan por considerar los estados de ánimo que afectan el aprendizaje de los alumnos, lo que se ha traducido en la causa fundamental del alto índice de reprobación de alumnos de matemáticas alrededor del mundo.

En el experimento que se efectuó en la Maestría en Matemática Educativa de la U.A.G., tanto con oraciones como con ecuaciones, se observó un aspecto interesante en torno al tipo de errores que cometían los alumnos al tratar de recuperar las oraciones y ecuaciones originales, desde un punto de vista sintáctico en relación con una interpretación semántica. Por un lado, los errores que cometían los alumnos al tratar de recurperar oraciones originales condujo a los alumnos a una serie de *aproximaciones* al modelo original, que fundamentalmente buscaban *conectar* el sustantivo con su calificativo correspondiente, basándose en su experiencia *afectiva*. Así, por ejemplo, ante un modelo original como

(a) El doctor malo atrapa a los ladrones.

el alumno recuperaba

(a') El doctor *bueno* atrapa a los ladrones.

Algo similar ocurría con las ecuaciones, pero desde un punto de vista sintáctico, es decir, ante un modelo orignal como

(b) $16\ x^2 - 4xy^2 + 1/4y^2$

el alumno recuperaba

(b') $16ab + 4a^2b^2 + b^4$

respetando la calidad de trinómio, pero totalmente descontextualizado de la estructura profunda que le subyace a la ETCP, es decir, *no comprendió en absoluto* el tipo de problema matemático que tenía enfrente. Lo anterior, es una muestra clara de los procesos de percepción a partir de los cuales se inicia la reflexión que cultiva la memoria. En el primer caso, el alumno respeta su intención comunicativa. En el segundo caso, el alumno confía en su memória fotográfica. Y sin embargo, en ambos casos le falla la memorización. Yo me atrevería a sugerir, que en el primer caso, al alumno no le importa haberse equivocado, ya que probablemente no le afecta gran cosa ser consistente con su estado de ánimo. No obstante, el haberse equivocado en el segundo caso, probablemente sea la causa de una gran cantidad de inseguridad, es decir, *físicamente*, algo no le funciona como el alumno pensaba que debía funcionarle, nominalmente, su memoria. Personalmente, no creo que mostrándole afecto y compasión, se le vaya a quitar la preocupación en el segundo caso, sino por el contrario, intuyo que esta discrepacia entre su capacidad de memoria y lo que él piensa sobre ella, va a ser fuente de mayor ansiedad, y por ende, la razón fundamental por la que reprueba las materias matemáticas, es decir;

*!Yo no sirvo para las matemáticas!*

cuando en realidad, todas las habilidades necesarias para resolver problemas matemáticos, duermen plácidamente en el inconsciente de sus capacidades lingüísticas, esperando a ser desarrolladas con base en ejercicios y estrategias bien planificadas, que recurran menos a la memoria, y más a la ejercitación de los procesos mentales en general.

Lo anterior, lo propongo, no como una discusión acabada, sino con el objeto de iniciar una discusión en torno a este tema que se fundamente en el desarrollo de capacidades lingüísticas, similares a aquellas que se elaboran en la enseñanza de lenguas extranjeras. Esta, es otra de las intenciones de este trabajo.

En conclusión, el análisis gramatical descrito a lo largo de esta tesis, demuestra que si es posible hablar de una *gramática de la matemática*, y que esta puede ser descrita con una gramática generativa que produce los términos de las expresiones matemáticas; monómios, binómios, polinómios, etcétera. Por otro lado, la gramática aquí descrita, no explica como producir ecuaciones correctamente ya que este proceso consiste más bien en *balancear equilibradamente* dos o más expresiones a ambos lados del signo de igualdad, y, por lo tanto, requiere cierta práctica por parte de quien las produce, básicamente, un proceso ingenioso regido por el rigor y la consistencia de sus pasos. No obstante, si por *ecuación* se presupone 'todo lo que tenga en medio un signo de igualdad', entonces, se podría considerar que esta gramática también produce ecuaciones con un cierto grado de corrección.

Sus posibles usos y aplicaciones, son más bien de tipo pedagógico, pues, como un meta-lenguaje de la matemática, le permite al matemático educativo contar con una poderosa herramienta explicativa de conceptos tales como *propiedad comulativa*, *propiedad asociativa*, *propiedad distributiva*, y otras más, sin tener que recurrir a la misma matemática para, ya no explicarlas, siño, para *demostrarlas*.

Lo que en este trabajo se presenta, es sólo un esbozo de esta gramática. Se requiere todavía descubrir el cuerpo del tempano de hielo, para lo cual, probablemente, se requiera de un trabajo conjunto con matemáticos de distintas especialidades, y fundamentalmente, un cuerpo de investigadores dispuesto a colaborar interdisciplinariamente. Esperemos, que esto pueda darse en un futuro próximo.

## B I B L I O G R A F I A


Abellan, C. :(1988), Notas sobre Etimologías Greco-Latinas de Mateos: Entrevista con Investigadores del Instituto de Investigaciones Filológicas de la U.N.A.M., Depto. de Letras Clásicas. (Comunicación Personal). México.

Abernathy, R.: (1963), "Mathematical Linguistics". En <u>Current Trends in Linguistics</u>. Vol. I, p.p. 113 - 132. Seboak, Mouton Publ. Co.. [S.L.]

Abreu, J. L.: (1987), "Las Matemáticas, el Lenguaje y el Mundo". En <u>Omnia</u>, Vol. 11. México, Distrito Federal.

Alba, L.: (1986), Trabajo para la materia de Semántica de la Maestría en Lingüística Aplicada de la U.N.A.M. sobre las configuraciones semánticas de N. Chomsky en dos distintas obras. México, Distrito Federal.

Alcaráz, V. J. et al. :(1983), <u>La Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero</u>. Tesis de Grado. C.INV.EST.AV. Sección de Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional. México, Distrito Federal.

Apostel, L. :(1965), "The Justification of Set Theories". En <u>Logic, Methodology and Philosophy</u>, p.p. 199-209. North-Holland Publ. Co.. Amsterdam, Holanda.

Ard, J. :(1980), "Discourse Interpretation". En <u>Beyond the Sentence Symposium</u>. Wisconsin, E.E.U.U..

________________, (1982), "The Pragmatics of Mathematical Discourse". En <u>Pragmatics and L.S.P.</u>. Hoedt, Jeval. Copenhague School of Economics. Copenhague, Dinamarca.

Ardila, R. :(1976), <u>Psicología del Aprendizaje</u>. Siglo XXI. México.

Armer, P. :(1960), "Attitudes toward Intelligent Machines". En <u>Bionics Symposium</u>, p.p. 13-39. Wright Air Development Division. Pensilvania, E.E.U.U..

Austin, J. L. & Howson, A. G. :(1970), "Language and Mathematical Education". En Educational Studies in Mathematics, Vol. No. 10, p.p. 161-197. Boston, Massachussetts, E.E.U.U..

Auzin, P. K. :(1979), Metody i Modeli Upravleniya i Kontroly. Rizhsk. Politekhn. Inst., Riga, U.R.S.S..

Avila, A. J. & Mancera, E. :(1987), "Aprendizaje y Conceptualización de las Fracciones. Estudio en 293 niños que finalizan la educación Primaria en el Distrito Federal". Reporte de investigación de la Universidad Pedagógica Nacional. Inédito. México.

Ayer, A. J. :(1936), Language, Truth and Logic. Penguin Books. Inglaterra.

Bach, E. :(1974), Teoria Sintáctica. Anagrama. Madrid, España.

Bar-Hillel, Y. :(1954), "Sintaxis Lógica y Semántica". En Lógica y Lingüística. Nueva Visión. Buenos Aires, Argentina.

__________________, (1960), "Una Demostración de la Impracticabilidad de Traducciones Completamente Automáticas y de Alta Calidad". En Presentación del Lenguaje. Taurus. Madrid, España.

Bauersfeld, H. :(1980), "Hidden Dimensions in the so-called Reality of a Mathematics Classroom". En Educational Studies in Mathematics, Vol. 11, p.p. 23-41. Boston, Massachussetts, E.E.U.U..

Becerra, J. :(1981), Metalenguaje para Describir Reconocedores Sintácticos. Tesis Profesional. Instituto de Matemáticas Aplicadas y Sistemas de la Universidad Nacional Autónoma de México. México, Distrito Federal.

Bell, A. W. :(1979), "The Learning of Process Aspects of Mathematics". En Educational Studies in Mathematics, Vol. 10, p.p. 361-387. Boston, Massachussetts, E.E.U.U..

Bierman, A. W. & Ballard, B. W. :(1980), "Toward Natural Language Computation". En American Journal of Computational Linguistics, Vol. 6, No. 2. E.E.U.U..

Bloomfield, L. :(1933), Language. Holt. Nueva York, E.E.U.U..

Blum, M. :(1960), "Properties of Neurons with many Inputs". En Bionics Symposium, p.p. 52-82. Wright Air Development Division. Pensilvania, E.E.U.U..

Borasi, R., et al. :[S.F.], "Using Errors as Springboards for the Learning of Mathematics: An Introduction". En Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol. 7, No. 3 & 4. p.p. 91-103. E.E.U.U..

Bourbaki, N. :(1968), Elements of Mathematics Theory of Sets. Herman Publishing Co. in Arts & Science; Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Massachussetts, E.E.U.U..

Bourbeau, P. I. & Bourbeau, L. :(1985), "TAUM-AVIATION: Its Technical Features and Some Experimental Results". En Computational Linguistics, Vol. 11, No. 1. E.E.U.U..

Broch, T. :(1973), "Kategoriale Grammatik, Struktur-analytische Algebra und Phanomenologie II: Die Verkettung". En Acta Lingüistica Hafniensia, Vol. 14, No. 2., p.p. 181-200. Dinamarca.

Brown, R. :(1973), "Development of the First Language in the Human Species". En American Psychologist, febrero, p.p. 97-106. E.E.U.U..

Buchanan, N. K. :[S.F.], "Factors Contributing to Mathematical Problem-Solving Performance: An Exploratory Study". En Educational Studies in Mathematics.

Bunt, N. H., Jones, P. S. & Bedient, J. P. :[S.F.], The Historical Roots of Elementary Mathematics. Prentice-Hall. [S.L.].

Cantoral, R. :(1985), "Ponencia sobre la Enseñanza de la Matemática". Grabación. Escuela Normal Superior de la Universidad Autónoma de Guerrero. Cursos de Verano de la Especialidad de Matemáticas. Chilpancingo, Guerrero, México.

Carnap, R. :(1942), <u>Introduction to Semantics and Formalization of Logic</u>. Harvard University Press. E.E.U.U..

Casellas, C. F. :(1979), <u>Prácticas de Gramática Generativa Transformacional</u>. Teide. Barcelona, España.

Castaños, Z. F. :(1984), "Las Categorías Básicas del Discurso y de la '*Disertación*'". En <u>Discurso, Cuadernos de Teoría y Análisis</u>, Año 2, No. 5. p.p. 11-28. México, Distrito Federal.

________________________,(1986), "Cómo se moldean las teorías? Notas sobre el estudio del lenguaje especializado". En <u>Omnia</u>, Vol. 11. p.p. 35-43. México, Distrito Federal.

Catford, J. C. :(1965), <u>A Linguistic Theory of Translation</u>. Oxford University Press. Inglaterra.

Ciesielsky, Z. & Olech, C. :(1984), <u>Proceedings of the International Congress of Mathematicians</u>. Polish Scientific Publ.. North-Holland Publ. Co.. Amsterdam, Holanda.

Clark, H. & Clark, E. :(1977), <u>Psychology and Language, an Introduction to Psycholinguistics</u>. Harcourt-Brace-Hanovich Inc.. E.E.U.U..

Cobham, A. :(1965), "The Intrinsic Computational Difficulty of Functions". En <u>Logic, Methodology and Philosophy</u>. North-Holland Publ. Co.. Amsterdam, Holanda.

Cohen, P. :(1966), <u>Set Theory and the Continuum Hypothesis</u>. W. A. Benjamin. Massachussetts, E.E.U.U..

Corder, P. :(1981), "The Elicitation of Interlanguage". En <u>Error Analysis and Interlanguage</u>. [S.L.]. (Fotocopia).

Courmet, E., Ducro, D. & Cattegno, J. :(1966), Lógica y Lingüística. Nueva Visión. Buenos Aires, Argentina.

Cuatrecasas, J. :(1972), Lenguaje, Semántica y Campo Simbólico. Paidos. Buenos Aires, Argentina.

Cuatrecasas, J. & Alvarez, O. :(1938), "El Desarrollo Sintáctico en los Débiles Mentales". En Boletín del Instituto Psiquiátrico. Rosario, Argentina.

Curry, H. B. :(1951), Outline of a Formalist Philosophy of Mathematics. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publ. Co.. Amsterdam, Holanda.

Chester, D. :(1980), "A Parsing Algorithm that Extends Phrases". En American Journal of Computational Linguistics, Vol. 6, No. 2, p.p. 87-96. E.E.U.U..

Chomsky, A. N. :(1954), "Sintaxis Lógica y Semántica". En Lógica y Lingüística. Nueva Visión, p.p. 33-43. Buenos Aires, Argentina.

________________,(1957), Estructuras Sintácticas. Siglo XXI. México.

________________,(1964), Problemas Actuales en Teoría Lingüística. Siglo XXI. México.

________________,(1972a), El Caso contra B.F.Skinner. Anagrama. Barcelona, España.

________________,(1972b), Sintáctica y Semántica en la Gramática Generativa. Siglo XXI. México.

________________,(1975a), Reflexions on Language. Pantheon Books. Nueva York, E.E.U.U..

________________,(1975b), The Logical Structure of Linguistic Theory. University of Chicago Press. E.E.U.U..

Chomsky, A. N. & Halle, M. :(1969), The Sound Patterns of English. Harper & Row Publ. Co.. Nueva York, E.E.U.U..

Chomsky, A. N. :(1965). Aspectos de la Teoría de la Sintaxis.Ed. Aguilar. Madrid, España.

Choquet, G. :(1978), "El Análisis y Bourbaki". En *La Enseñanza de Las Matemáticas Modernas*, p.p. 231-254. Alianza Universidad. Madrid, España.

Dahl, V. :(1981), "Translating Spanish into Logic through Logic". En *American Journal of Computational Linguistics*, Vol. 7, NO. 3, pp.p. 149-164. E.E.U.U..

Davidson, D. :(1965), "Theories of Meaning and Learnable Languages". En *Logic, Methodology and Philosophy*. North-Holland Publ. Co.. Amsterdam, Holanda.

Derwing, B. :(1973), *Transformational Grammar as a Theory of Language Acquisition*. Cambridge University Press. Cambridge, Inglaterra.

Dumont, B. :(1982), "L'influence du '*decor*' et du langage dans les épreuves type de '*logique*' portant apparemment sur l'implication". En *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 13, p.p. 409-430. Boston, Massachussetts, E.E.U.U..

Durand, G. :(1964), *L'imagination Symbolique*. Presses Universitaires de France. Paris, Francia.

Eco, H. :(1976), *Tratado de Semiótica General*. Nueva Imágen & Lumen. México.

Engelhardt, J. M. :(1982), "Using Computational Errors in Diagnostic Teaching". En *Arithmetic Teacher*, abril. E.E.U.U..

Fodor, J., Bever, G. & Garrett, M. F. :(1974), *The Psychology of Language. An Introdution to Psycholinguistics and Generative Grammar*. Mc.Graw-Hill. Nueva York, E.E.U.U..

Frege, G. :(1972), *Conceptografía (1879). Los Fundamentos de la Aritmética (1884). Otros Estudios Filosóficos*. Instituto de Investigaciones Filosóficas de la Universidad Nacional Autónoma de México. México, Distrito Federal.

Freundenthal, H. :(1981), "The Major Problems of Mathematical Education". En *Proceedings of the 4th International Congress on Mathematical Education*. University of California-Berkley. Berkley, California, E.E.U.U..

Gentilhomme, Y. :(1964). "Optimisation des Algorithmes D'Enseignement". En La Pedagogie Cybernetique. Vol. II, No. 4, p.p. 13-31. París, Francia.

________________.(1968). "Les Ensembles Flous en Linguistique". En Cahiers de Linguistique Theorique et Aplique. Bucarest, Rumania.

________________.(1974). "La Proportion Langagiere". En Modéles Logiques et Niveaux D'Analyse Linguistique. Coloquio organizado por el Centre D'Analyse Syntaxique de la Université de Metz. [S.L.].

Gladkii, A. V. :(1970). Leçons de Linguistique Mathematique. En Documents de Linguistique Quantitative. Nos. 5 & 6 del Centre de Linguistique Quantitative de la Faculté des Sciences de la Université de París. Dunod. París, Francia.

Gortari, E. :(1956). Introducción a la Lógica Dialéctica. Tratados y Manuales Grijalbo. México.

________________.(1965). Lógica General. Grijalbo. México.

Gross, M. :(1972). Modelos Matemáticos en Lingüística. Gredos. Madrid, España.

Grzegorczyk, A. :(1953). Some Classes of Recursive Functions. Rozprawy Matemyczne. U.R.S.S..

Guerra, O. V. M. :(1969). Gramáticas Formales y Lenguajes de Programación. Tesis Profesional. Facultad de Ciencias-U.N.A.M.. México.

Gutierrez, J. A. :(1983). Introducción al Algebra Elemental. Tesis Profesional. Escuela Normal Superior de la Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, Guerrero, México.

Hadamard, J. :(1945). The Psychology of Invention in the Mathematical Field. Princeton, E.E.U.U..

Haller, H. :(1988). Notas del Curso de Lingüística Computacional impartido en el Instituto de Investigaciones Filológicas-U.N.A.M.. Agosto. México.

Halliday, M. A. K. :(1973), *Explorations in the Functions of Language*. Edward Arnold. Inglaterra.

________________,[S.F.], "The Clause. Constituency. Grammatical". (Fotocopia).

Halmos, P. :(1965), *Teoría INtuitiva de los Conjuntos*. C.E.C.S.A.. México.

________________,(1973), "How to write Mathematics". En *Sturd, Halmos, Schiffer & Dieudonné. Proceedings of the American Mathematical Society*. Providence, Rhode Island, E.E.U.U..

Harper, K. :(1963), "Machine Translation". En *Current Trends in Linguistics*, Vol. I, p.p. 133-142. Seboak, Mouton Publ.Co.. [S.L.].

Hartmanis, J. & Stearns, R. E. :(1963), "On Computational Complexity of Algorithms". En *Notes for the University of Michigan Summer Conference on Automata Theory*. University of Michigan, Lansing, Michigan, E.E.U.U..

Hernández, J. :(1978), *J. Piaget, F. Choquet, J. Diedonné, R. Thom y otros. La Enseñanza de las Matemáticas Modernas*. Alianza Universidad. Madrid, España.

Hernández-Márquez, B. B. :(1981), *Inglés. Capacitación Lingüística. Traducción Técnica. Paquete Didáctico para la Especialidad de Matemáticas de la ENS-UAG*. Editado por la M.M.E.-U.A.G., Chilpancingo, Guerrero, México.

________________,(1986), *Relaciones entre las Habilidades Matemáticas para el Aprendizaje y la Sintaxis Generativa Transformatoria*. Tesis Profesional. Escuela de Filosofía y Letras-U.A.G.. Chilpancingo, Guerrero, México.

Hjemslev, L. :(1943), *Prolegomena to a Theory of Language*. University of Wisconsin Press. Madison, Wisconsin, E.E.U.U..

Hocket, Ch. F. :(1976), *Language, Mathematics and Linguistics*. Mouton. La Haya, Holanda.

Hopcroft & Allman : (1965), _Formal Languages and their Relation to Automata_. Addison-Wesley Publ. Co.. E.E.U.U.

Howes, V.: (1967), _Pre-Calculus Mathematics. A Programmed Text._ Books I, II & III. John Wiley & Sons. Nueva York, E.E.U.U..

Hughes, M. : (1975), _Mathematische Eiführung in die Formale Grammatik._ Max Niemeyer Verlag. Tübingen, Alemania Federal.

Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.: (1979), _Proceedings of the 18th Symposium on Adaptive Processes held in Fort Lauderdale, Florida_. I.E.E.E.. Nueva York, E.E.U.U..

Jansson, C. L. : (1973), "Structural and Linguistic Variables that Contribute to Difficulty in The Judgment of Simple Verbal Deductive Arguments". En _Educational Studies in Mathematics_ . Vol. 5, p.p. 493 - 505. Boston, Mass. E.E.U.U..

Johnson, E. : [S.F.], "Algebraic and Numerical Explorations Inspired by the simplification 16/64=1/4". En _Focus on Learning Problems in Mathematics,_ Vol. 7, No. 3 & 4, p.p. 15. E.E.U.U..

Johnson, M. K. (1978). _Recycling the Prague Linguistic Circle_. En _Linguistica Extranea, Studia 6_. Karoma Publ. Ann Arbor, Mich., E.E.U.U..

Kamke, E. : (1950), _Theory of Sets_. Dover Publ. Co.. Nueva York, E.E.U.U..

Kane, R., Byrne, M.A. & Hater, M. A. : (1974), _Helping Children Read Mathematics_. American Book Co.. Nueva York, E.E.U.U..

Kemeny, J. G., Snell, J. L. & Thompson, C. L. : (1988), _Introducción a las Matemáticas Finitas_. C.E.C.,S.A.. México.

Kerlinger, F. N. : (1973), _Investigación del Comportamiento. Técnicas y Metodología_. Interamericana. México.

Keto, J. E. : (1960). "Bionics--New Frontiers of Technology Through Fusion of the Bio and Physio Disciplines". En Bionics Symposium, p.p. 7 - 12. Wright Air Development Division. Pensilvania, E.E.U.U..

Kirschner, D. : (1984). "A Linguistic Model of Algebraic Symbol Skill". University of British Columbia. (fotocopia). Canadá.

Knuth, D. E. : (1968). The Art of Computer Programming. Addison-Wesley Publ. Co.. [S.L.].

Krashen, S. : (1976). "Formal and Informal Linguistic Environements in Language Acquisition and Language Learning". En Tesol Quarterly, Vol. 10, No. 2. E.E.U.U..

Krutetsky, A. V.: (1962a). "The Structure of Mathematical Abilities". En Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. II, p.p. 1 - 4. Kilpatrick & Wirzup. E.E.U.U..

________, (1962b). " An Investigation of Mathematical Abilities in Schoolchildren". En Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. II, p.p. 5 - 58. Kilpatrick & Wirzup. E.E.U.U..

________, (1962c). "An Analysis of the Individual Structure of Mathematical Abilities in Schoolchildren". En Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. II, p.p. 59 - 104. Kilpatrick & Wirzup. E.E.U.U..

________, (1962d). "An Experimental Analysis of Pupils' Mathematical Abilities". En Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. II, p.p. 105 - 111. Kilpatrick & Wirzup. E.E.U.U..

________, (1962e). "Mathematical Aptitudes". En Soviet Studies in the Psychology of Learning and

_Teaching Mathematics_. Vol. II. p.p. 113 - 158. Kilpatrick & Wirzup. E.E.U.U..

________________, (1962f). "Different Kinds of Pupils and How to Approach Them in Arithmetic Instruction". En _Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics_. Vol. II. p.p. 159 - 194. E.E.U.U..

Laborde, C. : (1981). "Langue Naturelle et Symbolisme en Mathematiques". _Memorias del 6o. Congreso Internacional de Lingüística Aplicada_. Lund. Suecia.

Lambek, J. & Scott, P. J. : (1986). _Introduction to Higher Order Categorical Logic_. Cambridge University Press. Cambidge, Inglaterra.

Loyo, C. : (1969). _Equivalencia entre Criterios de Computabilidad_. Tesis profesional. Facultad de Ciencias-U.N.A.M.. México.

Lowenthal, F. &Severs, R.: (1979). " Langage, Jeu et Activite Mathematique. Un Essai à l'Ecole Primaire". En _Educational Studies in Mathematics_. Vol. 10. Boston, Mass. E.E.U.U..

Lyons, J. (1977). _Semantics_. Vol. 1 & 2. Cambridge University Press. Cambridge, Inglaterra.

Mancera, E. : (1988). " Lo Bueno de los Errores". En _Matemática Educativa_. No. 2. Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, Guerrero, México.

Marcus, S., Nicolau, E. & Sarti, S.: (1988). _Introducción en la Lingüística Matemática_. Teide. Barcelona, España.

Marrón, A. : (1986). "Configuración Semántica de los Sistemas Númericos". Trabajo para la materia "Semántica" de la Maestría en Lingüística Aplicada de la U.N.A.M.. México.

Martín, W. : (1981). "Roles, Co-Descriptors, and the Formal Representation of Quantified English Expressions". En _American Journal of Computational Linguistics_. Vol. 7, No. 3. E.E.U.U..

Mc. Culloch, W. S. : (1960), "The Life Sciences in Bionics". En Bionics Symposium, p.p. 51 - 54. Wright Air Development Division. Pensilvania, E.E.U.U..

__________, (1965), "What's in the Brain that Ink may Character?". En Logic, Methodology and Philosophy. p.p. 395 - 404. North-Holland Publ. Co.. Amsterdam, Holanda.

Mega & Huber, : (1984), Lingüística Computacional. Teide. Barcelona, España.

Menyuk, P. : (1971), The Acquisition and Development of Language. Prentice-Hall. Nueva Jersey, E.E.U.U..

Mestre, J. & Gerace, W. : (1986), "The Interplay of Linguistic Factors in Mathematical Translation Tasks". En Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol. 8, No. 1. E.E.U.U..

Montague, M. & Bos, C. S. : (1986), "Verbal Mathematical Problem Solving and Learning Disabilities: A Review". En Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol. 8, No. 2, p.p. 7 - 21. E.E.U.U..

Moro Simpson, T. : (1973), Semántica Filosófica: Problemas y Discusiones. Siglo XXI. Argentina.

Myhill, J. : (1960), "Linear Bounded Automata". Wright Air Development Division Technical Report. Notas 60 - 165, Reporte No. 60 - 62. University of Pennsylvania. Pensilvania, E.E.U.U..

Nagel, E. & Newman, J. R. : (1958), El Teorema de Gödel. CO.NA.C. y T.. México.

Nájera, R. S. : (1981), Paquete Didáctico de Aritmética. Tesis profesional. Escuela Normal Superior de la Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, Guerrero, México.

Nivat, N. : [S.F.], Algoritmia. (fotocopia del I.M.A.S.-U.N.A.M.). [S.E.]. [S.L.].

O'Brien, T. , Shapiro, J. B. & Reali, N. : (1971), "Logical Thinking-Language and Context". En Educational Studies in Mathematics, Vol. 4, p.p. 201 - 219. Boston, Mass., E.E.U.U..

Ogden, C. K. & Richards, I. A. : (1984), _El Significado del Significado_. Paidos. Barcelona, España.

Olson, A. T., Kiere, T. E. & Ludwig, S.: [S.F.]. "Linking Logo, Levels and Language in Mathematics". En _Educational Studies in Mathematics_. Boston, Mass., E.E.U.U..

Orilia, L. S. : (1984), _Computación Aplicada a los Negocios: Teoría y 1725 Problemas Resueltos_. Schaum-Mc.Graw-Hill. México.

Papert, S. : (1960), "Redundancy and Linear Logical Nets". En _Bionics Symposium_, p.p. 181 - 195. Wright Air Development Division. Pensilvania, E.E.U.U..

__________, (1981), "Logo, Turtle-Graphics and Mathematical Education". En _Proceedings of the 4th International Congress on Mathematical Education_. (Grabación). University of California-Berkley. Berkley, California, E.E.U.U..

Peterson, B. T. & Nahrgang, C. L. :(1988), "Using Writing to Learn Mathematics". En _Mathematics Teacher_, septiembre, p.p. 461 - 465. E.E.U.U..

Piaget, J. et al. : (1987), _Introducción a la Psicolingüística_. Nueva Visión. Buenos Aires, Argentina.

Pinchback, C. : (1987), "Types of Errors Exhibited in a Remedial Mathematics Course". Ponencia presentada en la Reunión Anual de _Research Council for Diagnostic and Prescriptive Mathematics_. Febrero, Nueva Orleans, Luisiana. (Comunicación Personal). E.E.U.U..

__________, (1988), "Simbolismo: El Lenguaje de la Matemática y la Resolución de Problemas. En prensa. México.

Pinker, A. : (1981), "On the Assimilation of the Concept 'Set' in the Elementary School Mathematics Texts". En _International Journal of Mathematical Education in Science and Technology_, Vol.12, No. 1, p.p. 93 - 100. E.E.U.U..

Popper, K. : (1959). _The Logic of Scientific Discovery._ Hutchison of London. Inglaterra.

Putnam, H. : (1975). _Mind, Language and Reality._ Philosophical Papers. Vol. II. Cambridge University Press. Inglaterra.

Quine, V. W. : (1959). "Meaning and Translation". En _On Translation._ V. Brower, p.p. 148 - 172. Harvard University Press. E.E.U.U..

__________, (1961). "La Lógica y la Aclaración de los Problemas Sintácticos". En _Lógica y Lingüística._ Nueva Visión. Buenos Aires, Argentina.

Rabin, M. D. : (1960). _Degree of Difficulty of Computing a Function and a Partial Ordering of Recursive Sets._ En _Applied Logic Branch, Hebrew University._ Reporte Técnico No. 2. Jerusalém, Israel.

Ramiréz, V. R. S. : (1986). _Estudio de las Habilidades Matemáticas en Alumnos de Sexto Grado de Primaria y en Alumnos de Tercer Grado._ Tesis de Grado de la Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, Guerrero, México.

Reed, M.B. : (1984). "The Influence of Linguistic Factors upon Mathematical Achievement among Second-Language Learners." En _International Journal of Mathematical Education in Science and Technology._ Vol. 15, No. 4, p.p. 437-448. E.E.U.U..

Reinoso, C. : (1974). _En Busca de una Nueva Didáctica para la Matemática._ Nuevas Técnicas Educativas. México.

__________, (1980) _Matemática en la Educación Básica._ Editado por la M.M.E.-U.A.G.. Chilpancingo, Guerrero, México.

__________, (1983) _El Pensamiento Matemático._ Editado por la E.F. y L.-U.A.G.. Chilpancingo, Guerrero, México.

Robinson, A. :(1965), "Formalism 64". En Logic, Methodology and Philosophy. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, Holanda.

Rojano, M. T. :(1978), Análisis de la Metodología de un Programa de Matemáticas. Un uso de las Taxonomías de los Objetivos Educacionales. C.INV.EST.AV., Sección de Matemática Educativa del Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.

Rounds, L. P. :(1987), "Characterizing Successful Classroom Discourse for NNS Teaching Assistant Training" En Tesol Quarterly, Vol. 21, No. 4. E.E.U.U..

Russell, B. :(1903), The Principles of Mathematics. W.W. Norton & Co., Nueva York, E.E.U.U..

Sánchez, E. :(1984), Fuzzy Information, Knowledge Representation and Decision Analysis. Proceedings of the IFAC Symposium held in Marseille. Pergamon Press. Oxford, Inglaterra.

Savely, H. :(1960), "Air Force Research on Living Prototypes". En Bionics Symposium, p.p. 41-47. Wright Air Development Division. Pesilvania, E.E.U.U..

School Mathematics Study Group :(1960), Mathematics for Junior High School, Vol. I.. Yale University Press. New Haven, Conneticut, E.E.U.U..

Schumann, J. H. :(1976), "Second Language Acquisition: The Pidginization Hypothesis." En Language Learning, Vol. 22, No. 2. E.E.U.U..

Secretaría de Educación Pública :(1974), Matemáticas. Sexto Grado. S.E.P.. México.

Sierpinska, A. :[S.F.], "Humanities Students and Epistemological Obstacles related to Limits". En Educational Studies in Mathematics. Boston, Massachussetts, E.E.U.U..

Singh, J. :(1966), Teoría de la Información del Lenguaje y la Cibernética. Alianza Universidad. Madrid, España.

Skemp, R. :(1980), _Psicología del Aprendizaje de las Matemáticas._ Morata. Madrid, España.

Slobin, D. I. :(1979), _Psycholinguistics._ Scott-Foresman. Londres, Inglaterra.

Slocum, J. :(1985), "A Survey of Mahcine Translation: Its History, Current Status and Future Prospects. En _Computational Linguistics_, Vol. 11, No. 1. E.E.U.U..

Smith, D. E. :(1958), _History of Mathematics._ Vol. I & II. Dover Publ. Co.. Nueva York, E.E.U.U..

Smith, R. N. :(1973), "Toward a Representation Scheme for Performance". En _Linguistics-Northwestern University_, Vol. 108, p.p. 78-90. E.E.U.U..

Sovichik, R. & Heddens, J. W. :[S.F.], "Classroom Diagnosis and Remediation". En _Arithmetic Teacher._ Enero, p.p. 47-49. E.E.U.U..

Sprowls, R. C. :(1971), _Introducción a la Programación en Lenguaje PL/1._ Harper & Row Publ. Inc.. México.

Stalnaker, R. :(1986), "Possible Worlds and Situations". En _Journal of Philosophical Logic_, Vol. 15, No. 1, p.p. 109-123. E.E.U.U..

Strawson, P. F. :(1971), _Logico-Linguistic Papers._ Metheun. Londres, Inglaterra.

__________________,(1973), "Sobre el Referir". En _Semántica Filosófica._ Recopilación de Moro, S. T., p. 62. Siglo XXI. Buenos Aires, Argentina.

Strevens, P. :(1977), _New Orientations in The Teaching of English._ Oxford University Press. Inglaterra.

Sueur, M., Lamarche, P. & Marthe, P. :[S.F.], "Locutions Inductrices et Distractrices '*de plus que*', et '*de moins que*'". En _Educational Studies in Mathematics_, Vol. 10. Boston, Massachussetts, E.E.U.U..

Suppes, P. :(1965), "The Kinematics and Dynamics of Concept Formation". En _Logic, Methodology and_

<u>Philosophy</u>. Norht-Holland Publ. Co. Amsterdam, Holanda.

________________.(1966). <u>Introducción a la Lógica Simbólica</u>. C.E.C.S.A.. México.

Tavakolian, S. L. :(1981). <u>Language Adquisition and Linguistic Theory</u>. M.I.T. Press. Cambridge, Massachussetts, E.E.U.U..

Tijanov, A. & Kostomárov, D. :(1984). <u>Conferencias de Introducción a las Matemáticas Aplicadas</u>. Ed. MIR. Moscú, U.R.S.S..

Thom, R. :(1978). "¿Son las matemáticas '*modernas*' un error pedagógico y filosófico?". En <u>La Enseñanza de las Matemáticas Modernas</u>. Alianza Universidad. Madrid, España.

Toulmin, S. E. :(1974). <u>The Uses of Argument</u>. Cambridge University Press. Cambridge, Inglaterra.

Traub, F. :[S.F.], <u>Iterative Methods for the Solutions of Equations</u>. (Fotocopia). E.E.U.U..

van Dijk, T. :(1980). <u>Estructuras y Funciones del Discurso: Una Introducción Interdisciplinaria a la Lingüística del Texto y los Estudios del Discurso</u>. Siglo XXI. México.

Velázquez, A. :(1987), "El Lenguaje de los Especialistas: La Nueva Torre de Babel". En <u>Omnia</u>, Vol. 11, p.p. 5-20. México.

Velázquez, I. et al. :(1987), <u>Estrategias Pedagógicas para Niños de Primaria con Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas</u>. Fasc. 1, Subsecretaría de Educación Elemental, Dirección de Educación Especial, S.E.P.. México.

Vergnaud, G. :(1979). "The Acquisition of Arithmetical Concepts". En <u>Educational Studies in Mathematics</u>, Vol. 10. Boston, Massachussetts, E.E.U.U..

Vizcaíno, G. M. :(1983), "Discurso Matemático, Consideraciones Teóricas y Metodológicas para la Enseñanza del Francés". En <u>Lenguaje</u>, No. 14, p.p. 69-96. Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Vossler, K. :(1943). Filosofía del Lenguaje. Losada. Buenos Aires, Argentina.

Watson, H. :[S.F.]. "Learning to Apply Numbers to Nature: A Comparison of English Speaking and Yoruba Speaking Children Learning to Quantify". En Educational Studies in Mathematics. Boston, Massachussetts, E.E.U.U..

Weber, D. & Mann, W. C. :(1981). "Prospects for Computer-Assisted Dialect Adaptation". En American Journal of Computational Linguistics. Vol. 7, No. 3, p.p. 165-177. E.E.U.U..

Wechsung, G. :(1984). Frege Conference, 1984. En Proceedings of the Second International Conference held at Schwerin. Akademie-Verlag. Berlin, Alemania Federal.

Wells, R. S. :(1947). "Immediate Constituents". En Language, Vol. 23, No. 81, p.p. 186-207. E.E.U.U..

Widdowson, H. :(1979). Explorations in Applied Linguistics. Oxford University Press. Oxford, Inglaterra.

Wilson, B. :(1981). Cultural Contexts of Science and Mathematics Education. (Fotocopia). Leeds, Inglaterra.

Wolf, K. B. et al. :(1986). Manual de Lenguaje y Tipografía Científica en Castellano. Trillas. México.

Wirth, N. & Weber, H. :(1966). Euler: A Generalization of Algol, and its Formal Definition. Part I & II. En Communications of the A.C.M.. [S.L.].

Wittgenstein, L. :(1957). Tractactus Logico-Philosophicus. Alianza Editorial. Madrid, España.

Xirau, R. :(1971). Introducción a la Histório de la Filosofía. Editorial U.N.A.M.. Mexico.

Zubieta, R. G. :(1968). Manual de Lógica para Estudiantes de Matemáticas. Trillas. México.

# G L O S A R I O

**Análisis:** descomposición de un todo en partes componentes.

**Argumento:** objeto o sujeto lógico sobre lo que se predica en una proposición.

**Cadena:** enlazamiento de distintas particiones.

**Cadena de razonamiento:** enlazamiento de proposiciones por medio de inferencias lógicas.

**Conjunción:** paso del proceso generativo que consiste en la unión o co-existencia de las partes componenciales.

**Constante:** símbolo con un contenido no cambiante o fijo.

**Derivable:** que puede construirse como consecuencia del paso anterior.

**Discurso:** un texto enmarcado por sus condiciones pragmáticas.

**Disyunción:** reemplazamiento alternativo de distintos componentes en una partición dada.

**Enunciado:** secuencia escrita de signos delimitados por marcas tipográficas u ortográficas.

**Expresión matemática:** forma gráfica compuesta de términos con función interdependiente.

**Fenómeno:** hecho, cosa, acontecimiento u objeto.

**Forma gráfica:** el plano de la expresión de un signo.

**Fórmula matemática:** forma gráfica compuesta de expresiones matemáticas con funciones interdependientes o constelativas.

**Función:** tipo de asociación que se da entre dos signos.

**Función constelativa:** tipo de función que asocia libremente dos signos sin dependencia entre sí.

**Función determinante:** tipo de función que asocia un signo a otro de manera dependiente.

**Función interdependiente:** tipo de función que asocia dos signos que dependen uno del otro.

**Generar:** derivar distintas permutaciones o transformaciones.

**Imágen auditiva:** estimulación sensomotora de la imágen perceptual que da forma fonológica al plano del contenido del signo.

**Imágen perceptual:** estimulación senso-visual de un objeto, hecho, acontecimiento o signo que sirve de base a la imágen auditiva.

**Inferencia lógica:** consecuencia semántica de una transformación sintáctica.

**Jerarquía:** clase de clases.

**Lenguaje artificial:** una modelación parcial del lenguaje natural.

**Lenguaje formal:** una modelación lógica del lenguaje.

**Lenguaje especializado:** tipo de lenguaje natural, por lo general escrito, altamente técnico y especializado en un campo de conocimiento.

**Lenguaje particular:** un lenguaje en especial.

**Modelo:** un sistema estructural resultado de una construcción analógica.

**Operador:** símbolo matemático con contenido específico.

**Partición:** lazo específico de una cadena de componentes, analizada gramaticalmente; también tipo sintáctico.

**Permutar:** intercambio de posiciones de las partes componenciales de una cadena.

**Postulado:** proposición inicial de un argumento que establece una relación entre una cadena de signos y un objeto referencial.

**Predicado:** lo que se predica sobre un objeto o sujeto lógico en una proposición.

**Primitivo:** primerizo.

**Procedimiento deductivo:** análisis del todo hacia las partes.

**Procedimiento: inductivo:** análisis de las partes hacia el todo.

**Procesos:** procedimientos de análisis que describen la encadenación de las partes componenciales de una cadena de signos.

**Procesos mentales:** actividad mental que interpreta y crea la encadenación de signos. Sinónimo de pensamiento.

**Proposición:** lo que se expresa por una oración declarativa cuando se enuncia para hacer una afirmación sobre algo.

**Semiótica:** teoría de los códigos y de la producción de signos.

**Semiología:** sinónimo de semiótica. Estudio que trata sobre la teoría de los signos a partir de tres niveles de análisis; sintáctico, semántico y pragmático.

**Significado referencial:** información descriptiva de algún fenómeno.

**Significación denotativa:** la relación que existe entre un lexema y las personas, cosas, lugares, propiedades, procesos y actividades externas al sistema lingüístico.

**Signo:** palabra o símbolo matemático que mantiene una relación entre un plano de la expresión y un plano del contenido.

**Símbolo:** tipo de signo abstracto, que carece de un referente concreto, o que es tratado como tal.

**Sistema:** procedimientos de análisis que describen por medio de listas las distintas partes componenciales y su posible reemplazamiento en un lugar dado de la cadena de signos.

**Texto:** un todo objeto de análisis libre de sus relaciones pragmáticas.

**Unidad:** partición morfológica de un sistema.

**Variable:** símbolo carente de un contenido específico.

# A P E N D I C E

## EXPRESION MATEMATICA NUCLEAR

i) EN ---▸ (neg), SN, SV

ii) SV ---▸ Verbal, SN

iii) Verbal ---▸ Aux, $\begin{bmatrix} \text{Verbo} \\ \text{Cop, PN} \end{bmatrix}$

iv) Aux ---▸ t, M

v) t ---▸ impertérrito

vi) M ---▸ Aspecto, Modo

vii) Aspecto ---▸ $\begin{bmatrix} \text{perf.} \\ \text{iter.} \end{bmatrix}$

viii) Modo ---▸ $\begin{bmatrix} \text{inver.} \\ \text{no-inver.} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle\text{comparatividad}\rangle \\ \langle\text{contrastividad}\rangle \end{bmatrix}$

ix) Cop ---▸ $\langle\text{equidad}\rangle$

x) Verbo ---▸ $\begin{bmatrix} \text{sum.} \\ \text{pleg.} \end{bmatrix}$

xi) PN ---▸ $\begin{bmatrix} \text{SN} \\ \text{(EMN)} \end{bmatrix}$

xii) SN ---▸ Det, N

xiii) Det ---▸ $\begin{bmatrix} (+) \\ - \end{bmatrix}$

xiv) N ---▸ número

# T R A N S F O R M A C I O N E S

INCRUSTACION DE EA EN EE.

ANALISIS ESTRUCTURAL DE EA: $SN_1$ SV

en donde: $x_i$ $x_j$

ANALISIS ESTRUCTURAL DE EE: $SN_1$ Cop PN

en donde: $x_k$ $x_l$ $x_m$

Tiene un

CAMBIO ESTRUCTURAL: EA, EE ---▸ $SN_1$, Cop, PN ---▸ $SN_1$, SV, Cop, PN

en donde: $x_k$ $x_l$ $x_m$ ----▸ $x_i$ $x_j$ $x_l$ $x_m$

TRANSFORMACION ADJETIVAL DE FIJACION DE SIGNO POSITIVO Y NEGATIVO

ANALISIS ESTRUCTURAL : (∓) (1) [∘] SN

en donde: $x_i$ $x_j$ $x_k$ $x_l$

Tiene un

CAMBIO ESTRUCTURAL: $x_i$ $x_j$ $x_k$ $x_l$ ----▸ $x_i$ $x_l$

TRANSFORMACION NOMINAL

ANALISIS ESTRUCTURAL: ∓ $SN_1$ [∘] ∓ $SN_2$

en donde: $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$

Tiene un

CAMBIO ESTRUCTURAL: $x_1$ $x_2$ $x_3 x_4$ $x_5$ ----▸ $x_1 x_4 x_5$

TRANSFORMACION INVERSA

ANALISIS ESTRUCTURAL: $SN_1$ Verbal $SN_2$CopPN

en donde: $x_1 \begin{bmatrix} [+] \\ [\cdot] \end{bmatrix} x_2 - x_3$

Tiene un

CAMBIO ESTRUCTURAL:

$$x_1 \begin{bmatrix} [+] \\ [\cdot] \end{bmatrix} x_2 = x_3 \dashrightarrow$$

$$x_3 \begin{bmatrix} [-] \\ [\div] \end{bmatrix} x_1 = x_2 \dashrightarrow$$

$$x_3 \begin{bmatrix} [-] \\ [\div] \end{bmatrix} x_2 = x_1$$

TRANSFORMACION ADJETIVAL RELATIVA

ANALISIS ESTRUCTURAL :

$$SN_1 \begin{bmatrix} [\cdot] \\ [+] \end{bmatrix} SN_2$$

en donde; $x_1 \quad x_2 \quad x_3$

tiene un

CAMBIO ESTRUCTURAL: $x_1 \ x_2 \ x_3 \dashrightarrow x_3 \ x_2 \ x_1$

TRANSFORMACION ADJETIVAL

ANALISIS ESTRUCTURAL: $EA_1$: Direc. Adj. N. Verbal. $SN_2$

en donde; $x_i$ Adj $x_j$ $x_k$ $x_l$

y

$EA_2$: Direc. N. Verbal. $SN_2$

$x_i$ $x_j$ $[\cdot]$ +5

tiene un

CAMBIO ESTRUCTURAL: $EA_{2_1}$: $x_i \; x_j \; [\cdot] + S \dashrightarrow x_i + S \; x_j$

mientras que por la aplicación de la $\text{Trans}_{\text{adj.rel}}$ y por incrustación a la $EA_1$;

$$(176') \quad EA_{2_1} \dashrightarrow EA_3: \; x_i \; \#{+S} \; x_j \# \; x_k \; x_l$$

TRANSFORMACION EQUI-NOMINAL

ANALISIS ESTRUCTURAL : $SN_1$ Verbal $SN_2$

en donde; $x_i$ Verbal $x_i$

tiene un

CAMBIO ESTRUCTURAL:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $[+]$ | $x_i$ | $\dashrightarrow$ | $x_i \; [\cdot] \; 2$ |
| $x_i$ | $[-]$ | $x_i$ | $\dashrightarrow$ | *cero* |
| $x_i$ | $[\div]$ | $x_i$ | $\dashrightarrow$ | *unidad* |
| $x_i$ | $[\circ]$ | $x_i$ | $\dashrightarrow$ | $x_i^2$ |