

01186
21.3

ESTABILIDAD LINEAL DE UNA PELICULA DESCENDENTE CILINDRICA
DE LIQUIDO: ESTUDIO TEORICO Y EXPERIMENTAL.

FRANCISCO JAVIER SOLGRIO ORDAZ

TESIS DOCTORAL

Presentada a la División de Estudios de
Posgrado de la
FACULTAD DE INGENIERIA
de la
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener
el grado de

DOCTOR EN INGENIERIA
(MECANICA TEORICA Y APLICADA)

CIUDAD UNIVERSITARIA. D.F.. 23 de febrero de 1969

TESIS GEN
FALLA 15 GEN 1969



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

Se estudia el flujo de una película líquida, descendiendo verticalmente por el exterior de una columna cilíndrica. Se analiza la estabilidad lineal del flujo básico completamente desarrollado, primero con una técnica de perturbaciones para números de onda pequeños, y después numéricamente. Los resultados numéricos se comparan favorablemente con los publicados para los casos límite de chorro circular y placa plana. Se concluye que la película es inestable para todo valor finito de los números de Reynolds y Weber, y de un parámetro de curvatura, si el número de onda es menor que el crítico. El rango de números de onda crítico y de máxima amplificación aumenta al aumentar la curvatura. Para pequeñas curvaturas el número de onda de máxima amplificación decrece con los números de Reynolds y de Weber, mientras que para grandes curvaturas sucede lo contrario.

El problema también se estudia experimentalmente. Se usa una técnica óptica para medir el número de onda y la celeridad. Los resultados numéricos se aproximan bien a los experimentales. Se hace un estudio fotográfico de la configuración de las ondas, el cual muestra resultados acordes con las predicciones teóricas de Shlang y Sivashinsky [1962].

ABSTRACT

The problem of a cylindrical falling film, descending vertically outside a long cylinder, is considered. The linear stability of the fully developed flow is studied, first with a perturbation technique for small wavenumbers, and then by direct numerical computation. The numerical results are in agreement with other published values for the cylindrical jet and flat plate limits. The study shows that the cylindrical falling film is unstable for all Reynolds numbers, Weber numbers and radius ratios. Stability and amplification curves are calculated for different values of the parameters. With increasing curvature of the film the range of unstable wavenumbers and the wavenumber of the most amplified wave increase. For low curvature the wavenumber of the most amplified wave decreases with Reynolds number or Weber number, while for high curvatures it increases.

The problem is studied experimentally too. An optical technique for measure the wavenumber and the wavecelerity is used. The numerical results are in reasonably good agreement with the experimental ones. Also, a photographical study is done to see the shape of the waves. This shape is in agreement with the predictions of Shiang Y Sivashinsky [1962].

INDICE

NOMENCLATURA.....	vi
CAPITULO 1	
INTRODUCCION.....	1
CAPITULO 2	
ANTECEDENTES.....	6
2.1. Estudios teóricos para películas planas...6	
2.1.1 Aproximación de capa límite y métodos integrales.....	8
2.1.2 Teorías de estabilidad.....	12
2.1.3 Uso de la condición de choque en el modelado de ondas rodantes....	23
2.2. Técnicas experimentales en la medición de las propiedades de las ondas.....	25
2.2.1 Técnicas fotográficas.....	25
2.2.2 Sensores conductivos y capacitivos..	26
2.2.3 Técnicas ópticas.....	27
2.3. El efecto de la curvatura.....	31
CAPITULO 3	
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	35
3.1. Ecuaciones fundamentales.....	35
3.2. Solución para el flujo básico.....	38
3.3. Análisis lineal de estabilidad.....	39
3.4. Forma adimensional del problema de valores característicos.....	42
CAPITULO 4	
SOLUCION TEORICA DEL PROBLEMA DE ESTABILIDAD LINEAL.....	46
4.1. Aproximación de número de onda pequeño....	47
4.2. Técnica numérica.....	52

4.3. Resultados numéricos.....	59
4.3.1 Comparación con los resultados existentes en la literatura.....	61
4.3.2 Resultados nuevos para la película cilíndrica.....	65
CAPITULO 5	
ESTUDIO EXPERIMENTAL.....	73
5.1. Equipo experimental.....	74
5.2. Comparación de los resultados numéricos con los experimentales.....	84
5.3. Estudio fotográfico de la configuración de las ondas.....	88
CAPITULO 6	
CONCLUSIONES.....	98
REFERENCIAS.....	100
APENDICE A	
DEDUCCION DE LAS ECUACIONES BASICAS DE ESTABILIDAD.....	111
APENDICE B	
PROGRAMA DE COMPUTO.....	122

NOMENCLATURA

a	radio del cilindro
A_n y B_n	constantes arbitrarias
A_n^* y B_n^*	coeficientes de Fourier
\underline{E}	matriz
$c = c_r + ic_i$	celeridad compleja de la onda
c_r	celeridad de la onda
d	distancia entre los fototransistores
f	frecuencia y función analítica
$F = \frac{u_0}{(gh_0)^{1/2}}$	No. de Froude
g	aceleración de la gravedad
$G = \frac{R}{F^2} = \frac{4(1-\gamma)^2}{\gamma^2 - 2L\eta\gamma - 1}$	
h	espesor local instantaneo de la película
h_0	espesor no perturbado
h_1 y h_2	espesor del estrato y de la cresta respectivamente en una onda rodante
i	unidad imaginaria
K	curvatura
m	número de ondulaciones transversales
\underline{M}	matriz
p	presión
p_0	presión del ambiente
q	factor de amplificación
Q_n y P_n	variables intermedias
r, θ y z	coordenadas cilíndricas
$R = \frac{u_0 h_0}{\nu}$	No. de Reynolds
t	tiempo
u y v	componentes en x y y de la velocidad
u_r y u_z	componentes en r y z de la velocidad
u_s y v_s	velocidades superficiales

u_0	velocidad superficial no perturbada
$W = \frac{c}{\rho u_0^2 h_0}$	No. de Weber
x, y	coordenadas espaciales
\underline{y}	vector

Letras griegas

$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} h_0$	No. de onda adimensional
αc_1	factor de amplificación
$\beta = \frac{a}{h_0}$	parámetro de curvatura
β^*	amplitud de la armónica fundamental en la serie de Fourier
$\gamma = \frac{a}{a+h_0}$	parámetro de curvatura
$\epsilon = \frac{\beta}{(W)^{1/2}}$	parámetro de Shiang y Sivashinsky
ϵ^*	parámetro pequeño
θ_{12}	ángulo de fase entre las señales
λ	longitud de onda
μ	viscosidad dinámica
ν	viscosidad cinemática
ρ	densidad
σ	coeficiente de tensión superficial
ϕ	amplitud de la función de corriente
ϕ^*	variación en el espesor expresado como fracción de h_0
ψ	función de corriente

CAPITULO 1

INTRODUCCION

El flujo de líquidos en forma de películas descendentes tiene una gran variedad de aplicaciones industriales. Entre las más importantes se encuentran las siguientes:

- 1) Columnas de destilación y de absorción.
- 2) Condensadores y evaporadores.
- 3) Sistemas de enfriamiento de emergencia en reactores nucleares.
- 4) Procesos de recubrimiento en placas fotográficas, fibras ópticas, pinturas de protección, etc.
- 5) Enfriamiento de álabes de turbinas.
- 6) Transporte de líquidos por arrastre de corrientes gaseosas.

También se observa en muchos fenómenos de la vida cotidiana; por ejemplo, cuando llueve, en los cristales de las ventanas, en los parabrisas de los automóviles y en las corrientes de los arroyos.

Una de las características sobresalientes en las películas líquidas descendentes es la formación de ondas en su superficie para prácticamente cualquier flujo volumétrico. Dichas ondas modifican drásticamente los coeficientes de transporte de masa, cantidad de movimiento y calor con respecto a los calculados para películas lisas, por lo que su estudio es de gran importancia. A grandes rasgos podría decirse que en un flujo descendente en una pared vertical, se presentan los tipos de configuraciones ilustradas en la figura 1.1.

En la región 1 (figura 1.1D) la película se desarrolla hidrodinámicamente hasta alcanzar un espesor constante en la región 2. La línea 3 es la llamada línea de inicio de las ondas; delante de ella se tiene una región de ondas largas, de pequeña amplitud y relativamente ordenadas.

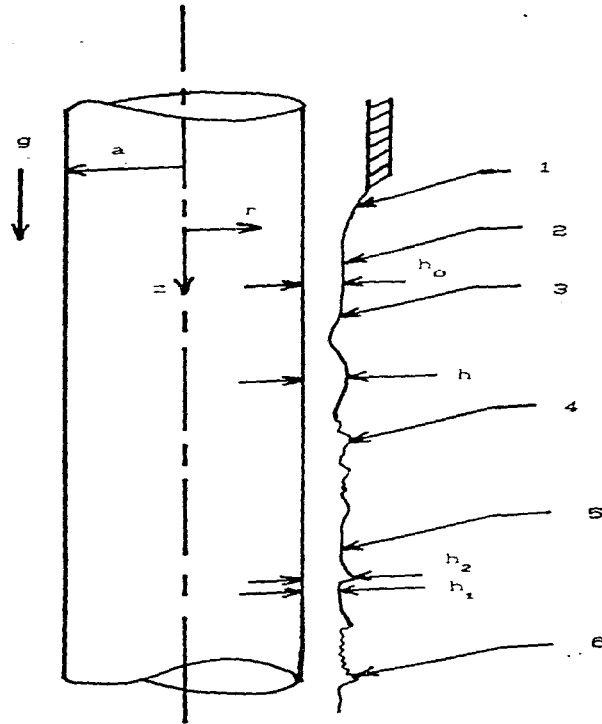


Figura 1.1. Configuraciones comunes en una película descendente vertical.

Viene después en 4 una región de transición, desordenada, donde aparecen también ondas cortas (capilares), para llegar en 5 a ondas rodantes separadas por un estrato laminar. Se tienen finalmente en 6 ondas rodantes turbulentas, separadas por estratos igualmente turbulentos. A las últimas dos configuraciones también se superponen ondas capilares.

Desde principios de siglo, partiendo con los trabajos pioneros de Hopf [1910] y Nusselt [1916], el estudio de las películas descendentes ha llamado la atención de numerosos investigadores. Se ha hecho trabajo tanto teórico como experimental.

En lo teórico se han buscado soluciones periódicas a las ecuaciones de movimiento con métodos analíticos aproximados. se ha aplicado la teoría lineal de la estabilidad para predecir las principales propiedades de las ondas y se ha enfatizado en la importancia de las no linealidades en su desarrollo; en todo ello, se han aplicado desde las teorías no lineales débiles hasta la moderna teoría de sistemas dinámicos. También se han obtenido, con el advenimiento de la computadora, las soluciones numéricas de las ecuaciones completas de movimiento.

Por el lado experimental, las técnicas para medir amplitud, celeridad y longitud de onda evolucionaron desde las fotográficas simples hasta las ópticas más recientes.

En este trabajo sólo se consideran las películas formadas al escurrir un líquido sobre una pared sólida, dejándose de lado las que caen libremente formando cortinas líquidas.

El capítulo 2 presenta un análisis crítico de los resultados de una investigación bibliográfica y resume tanto los principales antecedentes como lo que, a juicio

del autor, falta por hacer sobre el tema de películas descendentes.

La mayoría de las soluciones teóricas que se tienen hasta ahora desprecian la curvatura de la película, a pesar de que la geometría cilíndrica se presenta en muchos equipos y procesos industriales. Más aún, las predicciones teóricas frecuentemente han sido probadas usando columnas cilíndricas, sin preocuparse por la influencia de la curvatura.

Como se señala en el próximo capítulo, algunos autores han cuantificado el efecto de la curvatura teóricamente, pero sus análisis contienen ciertas limitaciones. Experimentalmente sólo Goren [1962] ha evaluado dicho efecto para una película con velocidad nula.

El presente trabajo tiene por objeto estudiar tanto teórica como experimentalmente la influencia de la curvatura en las características de las ondas que se forman en una película descendente vertical. El estudio se limita a la región cercana a la línea de inicio de las ondas, donde se supone que es válida la teoría lineal aplicada.

En el capítulo 3 se plantea concretamente el problema a resolver y se presenta la ecuación que rige la estabilidad lineal de la película, así como las condiciones en la frontera; se llega de esta manera a un problema de valores característicos donde el valor característico complejo incluye tanto a la celeridad de la onda, como a su factor de amplificación. Se señalan también los parámetros adimensionales pertinentes. La deducción de las ecuaciones se da en el apéndice A.

En el capítulo 4 se presentan dos métodos de solución al problema de valores característicos: el primero usa la aproximación de número de onda pequeño y una técnica de perturbaciones regulares; el segundo es un método numérico

que ha dado buenos resultados para flujos confinados. Se hace notar la diferencia entre los resultados de los dos métodos, y se enfatiza en las bondades del método numérico. Se estudian algunas peculiaridades del espectro de valores característicos, se comparan los resultados con los existentes en la literatura para los casos extremos de chorro circular y película descendente en plano vertical, y finalmente, se presentan los valores de número de onda y celeridad correspondientes tanto a la estabilidad neutra como a la máxima amplificación de la onda, para diferentes valores de los parámetros pertinentes.

En el capítulo 5 se describe la técnica óptica usada para determinar la frecuencia, la celeridad y la longitud de onda. Los resultados son novedosos y se comparan con los obtenidos mediante el método numérico, observándose una buena correlación. Se presentan, además, los resultados de un estudio fotográfico de la configuración de las ondas en la región cercana a la línea de inicio y se comparan con la tentativa de Shlang y Sivashinsky [1962] que relaciona el número de ondulaciones transversales al flujo con un cierto parámetro de curvatura.

Por último, en el capítulo 6, se resumen las principales conclusiones del trabajo.

CAPITULO 2

ANTECEDENTES

La lista de artículos sobre películas descendentes es muy extensa; tan solo Fulford (1964) en su revisión del estado del arte menciona 246 referencias, y desde entonces a la fecha el número se ha incrementado notablemente. En el presente capítulo sólo se citan los artículos que, a juicio del autor, mejor ilustran las técnicas generales usadas tanto en lo teórico como en lo experimental.

En lo teórico se analizan primero los trabajos que usan la aproximación de capa límite en las ecuaciones de movimiento y los métodos integrales para su solución. Después vienen las investigaciones donde las características de las ondas se evalúan usando ya sea la teoría clásica de la estabilidad o la moderna teoría de sistemas dinámicos. Por último se mencionan los artículos donde se hace uso de la ecuación integral de la cantidad de movimiento y de la condición de choque para modelar las ondas rodantes.

En lo experimental se mencionan las principales técnicas empleadas para medir las propiedades de las ondas, así como sus ventajas y desventajas.

Finalmente se analizan los trabajos que, de una u otra forma, toman en cuenta el efecto de la curvatura de la pared, que son los más importantes para los objetivos del presente estudio.

2.1. ESTUDIOS TEORICOS PARA PELICULAS PLANAS.

Para facilitar la explicación se supondrá que en todos los enfoques se parte del siguiente sistema de ecuaciones, válido para películas planas verticales (ver Dukler [1972]). Las correspondientes para el caso cilíndrico se dan en el

capítulo 3)

Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (2.2)$$

Continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

En la pared ($y=0$)

$$u=v=0 \quad (2.4)$$

En la intercara ($y=h$)

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$p = 2\mu \left\{ \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]^2 - \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}}{\left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]} \right\} \\ + \sigma \left\{ \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\} \quad (2.6)$$

$$2 \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right] \frac{\partial h}{\partial x} + \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \left[1 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] = 0$$

(2.7)

En las ecuaciones anteriores u y v son las componentes de la velocidad en las direcciones x y y respectivamente. La coordenada x es en la dirección del flujo y la coordenada y perpendicular con origen en la pared. Las propiedades del fluido se suponen constantes. Las ecuaciones de Navier-Stokes (2.1) y (2.2) y de continuidad (2.3) se acompañan de la condición de no deslizamiento en la pared (2.4), de la condición cinemática en la superficie libre (2.5), de la condición de continuidad en el esfuerzo normal a la superficie (2.6) cuando la presión del gas se supone cero, y de la condición de ausencia del esfuerzo cortante en la superficie (2.7).

2.1.1. Aproximación de capa límite y métodos integrales.

En este enfoque, propuesto originalmente por Kapitza [1949], se elimina la ecuación (2.2) usando la aproximación de capa límite (ver por ejemplo Currie [1974]), y se integra la ecuación (2.1) a lo ancho de la película

$$\int_0^h \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] dy = \int_0^h \left[g - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] dy \quad (2.8)$$

El término $\frac{dp}{dx}$ se evalúa de la ecuación (2.6), quedando en términos de las velocidades superficiales u_s y v_s y del espesor h de la película.

Suponiendo una estructura ondulatoria permanente (ondas periódicas), el cambio de variable $z = \alpha(x-ct)$ elimina la dependencia temporal e introduce el número de onda α y la celeridad c . Si además, como es costumbre en los métodos integrales, se supone conocido el perfil u de velocidades, de la ecuación de continuidad se obtiene v y la ecuación (2.8) puede integrarse, llegándose a una ecuación en $h(z)$, u_s , α , c (convenientemente adimensionalizadas) y el número de Weber W . La condición integral de continuidad

$$h(c-u_s) = h_0(c-u_{s0}) \quad (2.9)$$

donde h_0 y u_{s0} son el espesor y la velocidad superficial en la región no perturbada, transforma dicha ecuación en una diferencial ordinaria no lineal en términos de los siguientes parámetros

$$r(h, z, R, W, \alpha, c, h_0) = 0 \quad (2.10)$$

o si se define la nueva variable ϕ^* como $h = h_0(1 + \phi^*)$ en términos de

$$r(\phi^*, z, R, W, \alpha, c, h_0) = 0 \quad (2.11)$$

siendo R el número de Reynolds.

Las diferentes formas de resolver la ecuación (2.11) dan lugar a los trabajos que se describen a continuación. Generalmente la solución $\phi^*(z)$ se expresa en series de Fourier como

$$\phi^*(z) = \beta^* \sin z + \sum_{n=2}^N \beta^{*n} \left[A_n^* \sin(nz) + B_n^* \cos(nz) \right] \quad (2.12)$$

donde β^* es la amplitud de la armónica fundamental.

Sustituyendo (2.12) en (2.11) e igualando los coeficientes de las diferentes armónicas a cero se obtiene un conjunto de $2N$ ecuaciones algebraicas no lineales para las $2N+1$ incógnitas α , β^* , c , A_n^* y B_n^* ($n=2$ hasta N) para valores dados de R y W requiriéndose por lo tanto de una ecuación adicional para cerrar el sistema.

Kapitza [1949] toma el perfil parabólico laminar de Nusselt y hace dos aproximaciones: en la primera, que corresponde a su teoría lineal, considera sólo la primera armónica reteniendo los términos de orden β^* en la ecuación; en la segunda, toma los términos hasta $O(\beta^{*2})$. La ecuación adicional que sugiere proviene de un principio de mínima energía. Shkadov [1967] da un paso más: retiene sólo dos armónicas en la expansión (2.12) pero incluye los armónicos generados por estos dos en la ecuación (2.11) conservando términos hasta $O(\beta^{*3})$. Su ecuación adicional se basa en minimizar el espesor de la película para un flujo dado.

Hirshburg y Florschuetz [1982] suponen que la onda de amplitud finita más frecuentemente observada corresponde o está relacionada con la máxima amplificación que predice la teoría lineal. Dichos autores toman en cuenta seis armónicas en sus cálculos.

Varios investigadores introducen sólo pequeñas correcciones al trabajo de Kapitza (ver Krantz y Goren [1971]). Sin embargo, como mencionan Lin y Wang [1985], tanto el principio de la mínima energía disipada, como el del mínimo espesor de la película, carecen de bases racionales, y la suposición de que la onda que alcanza una amplitud finita de equilibrio es única es incorrecta según se demuestra en Lin [1974], Krishna y Lin [1977] y Lin y Krishna [1977] donde se llega a la conclusión de que la onda que alcanza el equilibrio depende de las condiciones iniciales.

Lee [1969] no usa, como en los trabajos anteriores, un criterio físico o una suposición para obtener la ecuación

adicional: demuestra que es posible llegar a un sistema cerrado partiendo sólo de las ecuaciones dinámicas, siempre y cuando el estudio se restrinja a ciertas clases de ondas que vienen de su sistema lineal (con un número infinito de soluciones periódicas).

Ruckenstein y Berbente [1958] sugieren una forma diferente de resolver el problema de cerradura: correlacionando la amplitud de la armónica fundamental con datos experimentales. Proponen además, una expansión en series de potencias de $(1-\gamma)$ para ambas componentes de la velocidad, cuyos coeficientes dependen de z . Esto permite incluir perfiles no parabólicos en el análisis, pero aumenta el número de ecuaciones algebraicas no lineales a treinta y uno. Para salvar algunas dificultades de cálculo, linealiza sus ecuaciones en términos de la amplitud de la armónica fundamental, lo que restringe el estudio a bajos flujos volumétricos ($Re < 100$).

Dukler [1972] señala que se requieren entre seis y ocho términos de una serie de Fourier para describir adecuadamente una onda si el número de Reynolds es mayor que 300. El presente enfoque resultaría prácticamente intratable con tantos términos. Telles [1966] trata de salvar el inconveniente probando con series de Gram-Charlier. En dichas series el primer término es una gaussiana y los sucesivos representan modificaciones en su forma. Con relativamente pocos términos (muchas veces tres) es posible modelar las ondas.

Telles [1966] y Telles y Dukler [1970] resuelven una versión de la ecuación de movimiento que incluye términos hasta $O(\alpha^2)$. Más aún, desprecian la tensión superficial en las condiciones en la frontera y resuelven el sistema de ecuaciones diferenciales resultante iterativamente con la técnica de cuasilinealización de Bellman [1965] y series de Gram-Charlier. El problema de cerradura se resuelve usando mediciones experimentales del espesor no perturbado de la

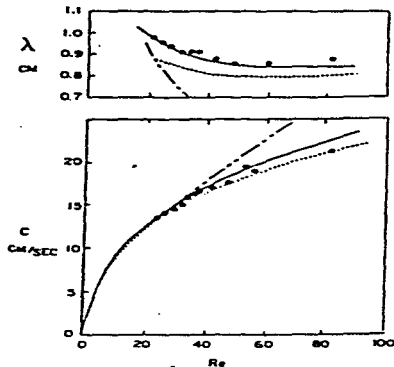


Figura 2.1. Comparación de los resultados experimentales de Kapitza [1949] • con los teóricos de Shkadov [1967] — , Ruckenstein y Berbente [1966] y los no lineales de Kapitza [1949] — — —

película. Reportan resultados satisfactorios hasta Reynolds de 700.

La comparación de los resultados de algunos de los trabajos incluidos en este inciso con los experimentales de Kapitza se muestran en la figura 2.1, tomada de Dukler [1972]. Como se observa, la correlación es bastante buena hasta números de Reynolds de 80 aproximadamente. Para Reynolds mayores la dispersión es mayor ya que este enfoque no toma en cuenta la posible aceleración de las ondas.

2.1.2. Teorías de estabilidad.

El primero en usar la teoría de la estabilidad para estudiar las ondulaciones en películas descendentes fue Yih [1954]. En este enfoque las velocidades y la presión se suponen como la suma de su valor no perturbado (solución de Nusselt) y una perturbación. Dicha perturbación puede

crecer, decrecer o permanecer constante en el tiempo (o en el espacio), dando lugar a un flujo inestable, estable o con estabilidad neutra respectivamente. Las perturbaciones de la velocidad se expresan en términos de una función de corriente ψ de tal forma que la ecuación de continuidad se satisface idénticamente. La perturbación en la presión se elimina mediante una diferenciación cruzada de las ecuaciones de movimiento e igualando las segundas derivadas de dicha perturbación. Por supuesto, las condiciones en la frontera se expresan también en términos de ψ . Así se llega a un sistema diferencial no lineal en derivadas parciales de ψ . Las diferentes formas de resolver este sistema dan lugar a las técnicas que se describen a continuación.

En la teoría lineal propuesta por Yih [1954, 1963] y Benjamin [1957] se desprecian los términos cuadráticos en ψ . Si además se supone que ψ es de la forma

$$\psi = \phi(y)e^{i\alpha(x-ct)} \quad (2.13)$$

el sistema se transforma en uno lineal en derivadas totales de ϕ . Se obtiene de esta manera la conocida ecuación de Orr-Sommerfeld (ver capítulo 3) que junto con sus respectivas condiciones en la frontera plantean un problema de valores característicos para la celeridad compleja de la onda c ($c = c_r + i c_i$). El signo de c_i dirá si la perturbación crece (signo $-$) o decrece (signo $+$).

Benjamin [1957] resuelve la ecuación de Orr-Sommerfeld expresando la solución en series de potencias de y . Obtiene así una solución analítica para c que a su juicio compara bien con los experimentos, pero los cálculos resultan muy laboriosos. También desarrolla una teoría simplificada para ondas largas (o pequeñas). Llega a la conclusión de que la película vertical es inestable para todo R finito.

Yih [1963] propone una sencilla técnica de perturbaciones

para este tipo de problemas, donde la inestabilidad se manifiesta a bajos números de Reynolds, y la aplica a tres casos: números de onda pequeños, números de Reynolds pequeños y números de onda grandes. Los resultados para números de onda pequeños concuerdan con los de Benjamin [1957], y los de los otros dos casos son originales. Además, analiza brevemente el efecto de la variación en la tensión superficial.

Sternling y Barr-David [1964] usan una computadora para incluir términos de alto orden de la serie de Benjamin (que sólo tomó 16 y su solución es válida hasta $O(\epsilon^2)$). Aunque su método es directo y da resultados satisfactorios, es muy engorroso y esto motivó a Whitaker [1964], que estudiaba los efectos de los contaminantes superficiales en la estabilidad del flujo, a resolver la ecuación de Orr-Sommerfeld numéricamente mediante diferencias finitas, con resultados muy similares a los de Sternling y Barr-David. De Bruin [1974] resuelve también numéricamente la ecuación de Orr-Sommerfeld, pero usando una técnica de ortonormalización e integración por Runge-Kutta.

Anshus y Goren [1966] obtienen una solución aproximada de la ecuación de Orr-Sommerfeld reemplazando la velocidad, que es función de y , por su valor en la superficie libre, pero manteniendo el valor correcto de su segunda derivada. Esto permite una solución sencilla de la ecuación, con lo que los valores característicos se pueden determinar mediante un rápido y simple método numérico. Compara sus resultados con los obtenidos por los autores anteriores, notándose una buena aproximación.

En las figuras 2.2 y 2.3, tomadas de Lin [1965], se comparan algunos resultados de la teoría lineal con datos experimentales. Los valores teóricos del factor de amplificación α_c son hasta un 50% menores que los experimentales, lo que va mucho más allá del error experimental esperado. Como se ha demostrado en Benjamin

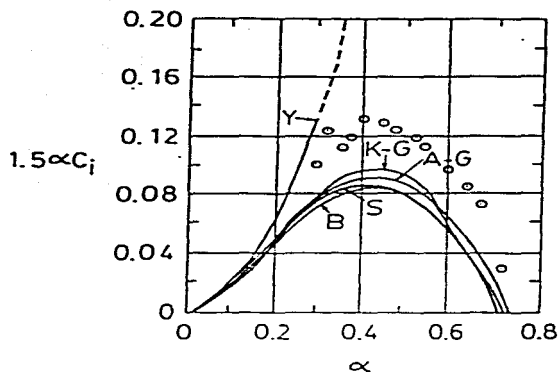


Figura 2.2. Variación del factor de amplificación αC_i con el número de onda α . $R=1.935$, $W=0.844$. Resultados teóricos: Benjamin [1957] B; Yih [1963] Y; los demás símbolos son los de la figura 2.3.

[1957], Lin [1970, 1972], Whitaker y Jones [1966] y Yih [1963]. La contaminación superficial estabiliza la película, y así, para una superficie limpia se tendría una diferencia aún mayor.

Para la celeridad también se tiene cierta dispersión (aunque en menor grado que para el factor de amplificación), que tal vez se deba a que para el mismo valor de W se tienen diferentes celeridades, que a su vez corresponden a diferentes valores de R . Esto sugiere la existencia de una correlación entre c_p y R que no se incluye en la figura 2.3.

La curvatura de la película (como se verá posteriormente) y la variación espacial de las perturbaciones (Agrawal [1972], Agrawal y Lin [1973]) tampoco pueden ser el origen de la citada dispersión.

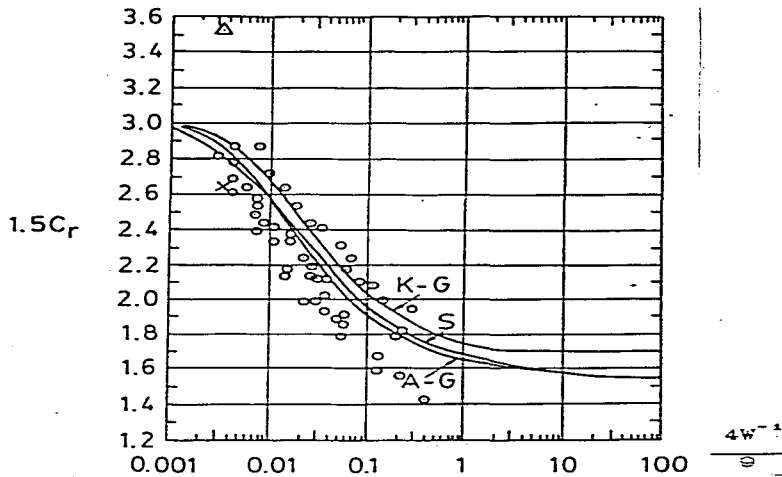


Figura 2.3. Variación de la celeridad c_r , correspondiente a la máxima amplificación, con W ; $(\sigma/\rho)(3/gv^*)^{1/3} = 4567$. Resultados experimentales: Krantz y Goren [1971] O; Binnie 1957] Δ; Kapitza [1949] X. Resultados teóricos: Anshus y Goren [1966] A-G; Solesio [1977] S; Krantz y Goren [1971] K-G.

Lin [1985] señala que para números de Reynolds relativamente grandes (> 1000) las no linealidades juegan un papel muy importante en el desarrollo de las ondas. Numerosos son los investigadores que han hecho estudios no lineales: a continuación se presentan los resultados más importantes.

En general se parte de la ecuación diferencial no lineal en derivadas parciales de w , mencionada en párrafos anteriores. Se elige una escala conveniente para la ecuación de tal manera que, en su forma adimensional,

aparezca un parámetro pequeño ϵ^* . Benney [1965], por ejemplo, toma el cociente del espesor no perturbado h_0 con la longitud de onda $\lambda/2\pi$, resultando $\epsilon^* = \alpha$, siendo α el número de onda adimensional. La función de corriente se expande entonces como

$$\psi = \psi_0 + \alpha \psi_1 + \alpha^2 \psi_2 + \dots \quad (2.14)$$

de tal forma que la expansión es válida para ondas largas comparadas con el espesor.

La serie (2.14) se sustituye en la ecuación diferencial para ψ , para obtener, después de igualar los términos de igual potencia de α , un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales. Dichas ecuaciones se resuelven sucesivamente, partiendo de la dada en términos de ψ_0 y sus respectivas condiciones en la frontera (que pueden ser no lineales), hasta llegar a órdenes superiores. Benney [1966] toma sólo dos términos de la serie, mientras que Lin [1969] extiende el análisis. Éste consta de un gran trabajo algebraico, a términos de segundo orden en α .

La solución para w se sustituye en la condición cinemática en la superficie $y=h$ para obtener una ecuación diferencial en el espesor h en ϕ^* .

Gevik [1970,1971], suponiendo que $\alpha^2 w = O(1)$ llega a la siguiente ecuación

$$h_t + Q_1 h_x + \alpha \frac{\partial}{\partial x} [Q_2 h_x + Q_3 h_{xxx}] + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x} [Q_4 h_x^2 + Q_5 h_{xx} + Q_6 h_{xxxx}] + Q_7 h_x h_{xxxx} + Q_8 h_{xx}^2 + Q_9 h_x^2 h_{xx}] + O(\alpha^3) = 0 \quad (2.15)$$

donde

$$Q_1 = 2h^2, \quad Q_2 = \frac{8}{15} Rh^6, \quad Q_3 = \frac{2}{3} \alpha^2 wh^3$$

$$Q_4 = \frac{1016}{315} R^2 h^9 + \frac{14}{3} h^9, \quad Q_5 = \frac{32}{63} R^2 h^{10} + 2h^4$$

$$Q_6 = \frac{40}{63} \alpha^2 Rwh^7, \quad Q_7 = \frac{16}{3} \alpha^2 Rwh^6$$

$$Q_8 = \frac{16}{5} \alpha^2 Rwh^6, \quad Q_9 = \frac{32}{5} \alpha^2 Rwh^5$$

Si en la ecuación anterior se toma $\alpha^2 W = 0$, se recupera, excepto por pequeños errores algebraicos, la ecuación de Benney [1966].

Nakaya [1975, 1977] generaliza la ecuación de Benney [1966] para incluir términos de orden α^3 cuando $W = O(1)$. Roskes [1970] lo hace para considerar ondas tridimensionales.

Atherton y Homsy [1976] y Krishna y Lin [1977] toman términos hasta de $O(\alpha)$ y $O(\alpha^2)$ respectivamente para obtener la versión tridimensional de la ecuación (2.15). Para el caso de películas descendentes cilíndricas, Lin y Liu [1975] y Atherton y Homsy [1976], obtuvieron la ecuación equivalente a (2.15) tomando α como parámetro pequeño.

mientras que Shlang y Sivashinsky [1982] lo hacen usando una aproximación de tensión superficial alta ($\sigma^M = \frac{1}{\sqrt{W}}$).

Si se resuelve la versión linealizada de la ecuación (2.15) se obtienen, como era de esperarse, los resultados de la teoría lineal para α pequeños.

Lin [1969,1970,1971] resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes mediante la técnica propuesta por Stuart [1960] y Watson [1960], adaptada por Reynolds y Potter [1967] para flujos con superficie libre, y demuestra que, cerca de la rama superior de la curva de estabilidad neutra, una perturbación infinitesimal inestable de acuerdo a la teoría lineal, evoluciona hasta transformarse en una onda estable de amplitud pequeña, pero finita (onda monocromática de estabilidad supercrítica). La forma en que evoluciona la amplitud de la armónica fundamental se obtiene con la ecuación de Landau-Stuart (ver Lin [1969]). La existencia de la citada onda de estabilidad supercrítica, así como de la dependencia de su velocidad con la amplitud, ha sido demostrada por Gjevik [1970] y Nakaya [1975,1977], resolviendo la ecuación (2.15) directamente en lugar de las de Navier-Stokes.

Lin [1974] demuestra que la onda monocromática de estabilidad supercrítica es inestable con respecto a perturbaciones de cierto ancho de banda, a menos de que éste sea muy pequeño. Lo mismo se obtiene si las perturbaciones son tridimensionales (según Krishna y Lin [1977]), que además demuestran que el flujo que es estable de acuerdo a la teoría lineal, sigue siendo estable con respecto a perturbaciones tridimensionales finitas (pequeñas) de un cierto ancho de banda.

Cerca de la rama inferior de la curva de estabilidad neutra la ecuación de Landau-Stuart no se cumple. Esto se debe a que son varias las armónicas que caen dentro de la región inestable que predice la teoría lineal, teniéndose entonces

una interacción no lineal más marcada (fuerte).

Krishna y Lin [1977] derivan una ecuación de evolución de las ondas que es válida cerca de la rama inferior. Parten de la versión tridimensional de (2.15). La ecuación bidimensional queda como

$$f_t = -2f_x - 4ff_x - c_1 f_{xxx} - \frac{2\alpha^2 W}{3} f_{xxxxx} - \alpha^2 \left\{ \left[2 + \frac{32 R^2}{63} \right] f_{xxx} + \frac{40 \alpha^2 WR}{63} f_{xxxxx} \right\} \quad (2.16)$$

donde $f = h-1$. A la fecha sólo se ha resuelto esta ecuación despreciando los términos de orden α^2 .

Atherton [1972] resuelve numéricamente la ecuación (2.16) para describir la evolución de las ondas hasta que alcanzan un estado de equilibrio periódico, que extrañamente no depende de las condiciones iniciales. Sivashinsky y Michelson [1980] encuentran que la misma ecuación (determinística) es capaz de producir un flujo ondulado irregular, caótico, cuasipermanente. Sin embargo, como menciona Lin [1985], debe tomarse en cuenta que antes de que se llegue a dicho caos superficial, por alguna razón, los efectos tridimensionales estabilizantes se vuelven importantes, y podrían llevar a una estructura tridimensional estable. Más aún, la forma final depende de las condiciones iniciales.

Chang [1986] generaliza los trabajos de Benney [1966], Krishna y Lin [1977], Sivashinsky y Michelson [1980] y Shlang y Sivashinsky [1982] para tomar en cuenta los

efectos del esfuerzo cortante en la superficie libre del líquido. Usa una serie de expresiones empíricas para el esfuerzo previamente validadas por Zabaraz [1985]. Hace tanto el análisis lineal de la ecuación, como un análisis no lineal débil.

Chen y Chang [1986] resuelven la controversia entre Atherton [1972] y Sivashinsky y Michelson [1980] haciendo un detallado análisis de la bifurcación de las soluciones periódicas espaciales. Resolviendo numéricamente la ecuación (2.16) muestran que la solución depende fuertemente del parámetro

$$\theta = \frac{2\pi h_0 F W}{3\lambda R q} \quad (2.17)$$

donde F es el número de Froude y q es el factor de amplificación de la onda que resulta en la parte lineal. Para θ un poco menor que la unidad se tiene una bifurcación de la película lisa hasta una onda de amplitud finita con una sola armónica. Si se disminuye paulatinamente el valor de θ se obtienen una serie de bifurcaciones que llevan a ondas con modos más inestables. Cuando se alcanza un valor crítico de θ ($\theta_c = 0.068$), aparece un atractor extraño cuyas propiedades estadísticas valdría la pena estudiar en un futuro. Para $\theta < \theta_c$ se tiene una solución caótica que corresponde a la turbulencia superficial que mencionan Sivashinsky y Michelson [1980].

Ninguna de las aproximaciones que desprecian términos de $O(\alpha^2)$ muestran las características de las ondas solitarias observadas por Kapitza [1949]: un frente empinado con pequeñas ondulaciones delante de él, y una cola larga de pequeña pendiente. Para ondas largas cuya amplitud es del mismo orden que el espesor de la película, se puede usar la ecuación (2.15) siempre y cuando la pendiente de la onda sea pequeña ($\ll 1$) en cualquier lugar. Existe entonces la

posibilidad de asociar la trayectoria homoclinica de (2.15) con una onda solitaria de gran amplitud. En este sentido Pumir, Manneville y Pomeau [1983] usan la teoría de sistemas dinámicos para estudiar la existencia de una onda solitaria. Suponen que dicha onda no se deforma con respecto a un marco de referencia que se mueve a una velocidad c_p relativa al laboratorio. En términos de este marco la onda se modela con una ecuación diferencial ordinaria. A una distancia relativamente grande, tanto aguas abajo como aguas arriba, el espesor de la película perturbada tiene el espesor del flujo básico. En la teoría de los sistemas dinámicos tales soluciones se llaman trayectorias homoclinicas. Estas soluciones existen sólo para valores especiales de c_p , a un número de Reynolds dado; determinan la relación $c_p(R)$ numéricamente para las diferentes clases de ondas solitarias que pueden aparecer: con 1, 2...etc. jorobas principales. Investigan la existencia real de tales ondas integrando numéricamente la ecuación diferencial parcial, llegando sólo a ondas con una joroba en sus simulaciones.

Chang [1987] estudia las soluciones permanentes de la ecuación (2.15) que se propagan con celeridad constante. En contraste con Pumir et al. [1983], efectúa un cambio no lineal de coordenadas (cambio de variables) que lo lleva a un sistema de ecuaciones ordinarias muy sencillo (sistema en forma normal, de donde toma el nombre el método que usa), debido a que se desprecian los términos que no alteran el comportamiento cualitativo del sistema. Usando la técnica de la forma normal de la moderna teoría de sistemas dinámicos logra construir soluciones analíticas tales como ciclos límite, toros, órbitas homoclinicas y heteroclinicas que corresponden a: ondas periódicas simples, ondas periódicas de varias jorobas, ondas solitarias (solitones) y ondas de choque hidráulico (saltos) respectivamente. Correlaciona así analíticamente celeridad, amplitud y longitud de onda, obteniendo resultados que se comparan satisfactoriamente con los

experimentales, aun lejos de la línea de inicio de las ondas.

Las técnicas no lineales descritas anteriormente permiten entender en forma aproximada lo que sucede en una zona bastante amplia del flujo (desde la línea de inicio, donde la teoría lineal puede aplicarse, hasta la región de ondas solitarias) para diferentes valores de los parámetros pertinentes. Sin embargo, para simplificar las ecuaciones no lineales que rigen el fenómeno, se han tenido que introducir algunas aproximaciones, tales como la de onda larga comparada con el espesor de la película y la de ondas con celeridad constante. Resolver en forma completa las ecuaciones de Navier-Stokes, junto con sus condiciones iniciales y a la frontera, sigue siendo un desafío para las matemáticas modernas; aun las más sofisticadas técnicas numéricas muestran su debilidad ante tal reto.

Bach y Villadsen (1984) formulan las ecuaciones de Navier-Stokes en términos lagrangianos y las resuelven con un avanzado método de elementos finitos. Demuestran la existencia de la onda solitaria y obtienen resultados, para la celeridad y la forma de la onda, muy similares a los experimentales. Las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento, discretizadas en términos de los valores de la velocidad y la presión en los puntos nodales, se resuelven por el método de Galerkin. Cuando dichas ecuaciones se expresan para un sistema de coordenadas que se mueve junto con las partículas, la determinación del espesor de la película no es problema serio, en contraste con lo que sucede en la formulación Euleriana (Ver Ruschak [1980] y Frederiksen y Watts [1981]).

2.1.3. Uso de la condición de choque en el modelado de ondas rodantes.

Las ondas rodantes son estructuras de intensa vorticidad que aparecen en la película a altos números de Reynolds y/o

a una gran distancia de la línea de inicio. En general, su amplitud es comparable al espesor medio de la película, tienen un frente muy empinado y una larga cola de suave pendiente. En el frente de la onda hay un mezclado altamente turbulento, que se cree que es la principal causa del incremento en los coeficientes de transferencia, mientras que la cola puede ser incluso laminar. Se observan también pequeñas ondas secundarias superpuestas a las ondas rodantes. La distancia entre crestas generalmente es constante, aunque a veces unas ondas alcanzan a otras.

El enfoque que se ilustra en esta sección, propuesto por Dressler [1949] originalmente para ondas rodantes en canales casi horizontales, fue modificado posteriormente por Brock [1970] para mayores ángulos de inclinación. Tamada y Tougou [1979] presentan una versión moderna del método, la cual se resume en el siguiente párrafo.

En la cola de la onda se aplica el método de la integral de la cantidad de movimiento, mientras que en el frente se usa la condición de choque (conservación de masa y cantidad de movimiento, pero no de energía). Se supone que la onda es permanente y que se mueve con velocidad constante.

Suponiendo un perfil de velocidades (laminar o turbulento), es posible integrar las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento llegando así a una ecuación diferencial ordinaria en términos de h y z de la que se puede obtener la celeridad de la onda.

La conservación de masa y de cantidad de movimiento a través del frente de onda dan dos ecuaciones más, que relacionan h_1 y h_2 (ver figura 1.1). Las condiciones límite para h ($h=h_1$ en $z=0$ y $h=h_2$ en $z=\lambda$) junto con la condición de choque permiten calcular λ y el espesor promedio de la onda.

Al igual que en el enfoque dado en 2.1.1., en esta técnica

se tienen más incógnitas que ecuaciones; deben entonces determinarse experimentalmente algunas propiedades o introducirse más suposiciones para cerrar el sistema. Brauner y Maron [1982] usan el criterio de mínima energía de Kapitzka, mientras que Tamada y Tougou [1979] estudian la estabilidad de las ondas y toman la más inestable.

El método requiere de mejoras substanciales debido a que a la fecha no se ha determinado teóricamente el perfil de velocidades en la película. Dicho perfil es además importante dado que los cálculos de los coeficientes de transferencia dependen de él.

2.2. TECNICAS EXPERIMENTALES EN LA MEDICION DE LAS PROPIEDADES DE LAS ONDAS.

En esta sección se presentan en forma resumida las principales técnicas experimentales usadas para determinar la celeridad, frecuencia y longitud de las ondas superficiales, así como el espesor local instantáneo de la película. Las formas de medir el espesor promedio se describen ampliamente en Fulford [1984].

En términos generales las técnicas se pueden clasificar de la siguiente manera

- 1.- Técnicas fotográficas.
- 2.- Sensores conductivos y capacitivos.
- 3.- Técnicas ópticas.

A continuación se da una breve descripción de cada una de ellas.

2.2.1. Técnicas fotográficas.

Una experiencia importante para quien intente modelar los fenómenos ondulatorios en películas descendentes es la visualización de dichos fenómenos. En esta tarea la

fotografía juega un papel muy especial. Las técnicas fotográficas también permiten determinar en forma aproximada los parámetros principales de las ondas.

La longitud de onda se puede medir directamente de las fotos. Para la celeridad se requiere de una cámara rápida. Si se conoce el número de cuadros por segundo y la distancia que recorre una determinada onda, la celeridad se obtiene en forma inmediata. La frecuencia se calcula de $f=c/\lambda$. Este es el procedimiento que usan Kapitza [1949], Binnie [1957] y Tailby y Portalski [1962]. Kapitza no toma fotos directamente de la película, sino de su sombra ampliada, lo que le permite obtener además, la amplitud de la onda. En muchos casos la frecuencia se obtiene en forma independiente con estroboscopio.

Dado que las ondas son muy irregulares, tanto en su longitud como en su frecuencia, hay necesidad de obtener promedios. Este proceso resulta muy laborioso con técnicas fotográficas, donde es necesario el conteo directo.

2.2.2. Sensores conductivos y capacitivos.

En esta técnica se mide la conductancia o la capacitancia entre dos electrodos convenientemente colocados; el valor de dichas variables depende del espesor de la película líquida contenida entre los electrodos. Los sensores conductivos se colocan ambos en la pared, mientras que los capacitivos uno va en la pared y otro fuera del líquido. Tienen las ventajas de su fácil instalación y de su versatilidad en mediciones con geometrías muy complicadas. Sin embargo, sus desventajas son muchas: el líquido debe ser conductor, si el sensor es conductivo; los electrodos deben estar tanto más cercanos entre sí cuanto más delgada sea la película; muchas veces el tamaño del electrodo es del orden de la longitud de onda, de tal forma que sólo se obtiene un espesor promedio en esa región; la respuesta en voltaje es no lineal y se requiere de un complejo equipo

electrónico adicional.

Esta técnica permite obtener el espesor local instantáneo (dentro de sus limitaciones), que convenientemente procesado, ya sea en forma gráfica o electrónica, da el espesor promedio, la frecuencia y la distribución de probabilidades del espesor. Midiendo simultáneamente el espesor en dos puntos separados una distancia conocida es posible, mediante una correlación cruzada, obtener la celeridad y la longitud de onda.

El método lo usan, para el caso de películas descendentes, Tailby y Portalski [1960], Telles y Duckler [1970], Portalski y Clegg [1972] y Chu y Dukler [1974], entre otros.

2.2.3. Técnicas ópticas.

En estas técnicas, que hacen uso de un rayo de luz que cruza la película, las áreas transversales de la región en que se mide el espesor (región iluminada) y la del rayo, son iguales. Por esta razón, como se verá en los párrafos siguientes, el espesor así obtenido es prácticamente local e instantáneo. Además, la señal obtenida (voltaje) varía linealmente con el espesor de la película. Por supuesto, como en el caso de los sensores conductivos y capacitivos, para determinar la celeridad y la longitud de onda se requieren dos señales (dos rayos), así como su correlación cruzada. En general, se pueden tener las técnicas de : absorción de luz, fluorescencia, dispersión y deflección.

En la técnica de absorción de luz se pasa un rayo a través de la película líquida para recibirse después en un fotomultiplicador (ver figura 2.4). Se agrega un colorante al líquido de tal manera que la intensidad recibida por el sensor depende de la absorción instantánea, y por consiguiente, del espesor de la película. El método tiene la desventaja de que si el frente de onda es muy empinado,

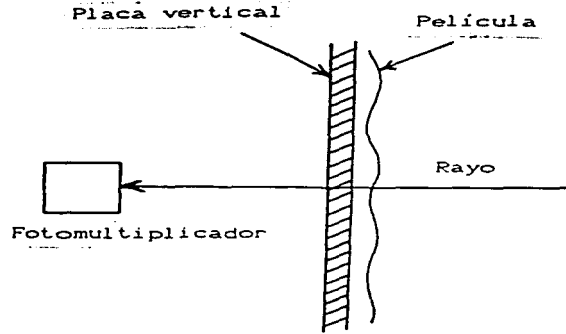


Figura 2.4. Técnica de absorción de la luz.

el rayo puede sufrir una excesiva refracción que aumenta la longitud de la porción del rayo en el fluido, que en un caso extremo podría invalidar el método. Esta técnica la usan exitosamente Stainthorp y Allen [1963] y Krantz y Goren [1971].

Hewitt et al. [1964] desarrollan una técnica donde un rayo de luz de cierta longitud de onda atraviesa la película y genera fluorescencia con una longitud de onda diferente. La intensidad de dicha fluorescencia es función del espesor de la película. Hay que tener cuidado de separar la fluorescencia del rayo reflejado. Aquí se tiene la ventaja de que el rayo incidente y los rayos fluorescentes se encuentran del mismo lado de la película (ver figura 2.5). Esto evita las complicaciones, que pueden tenerse con la técnica de absorción, de introducir los sensores en el interior de los tubos, si la película se forma en una columna cilíndrica. Las dificultades que agrega la refracción pueden eliminarse también con el presente método.

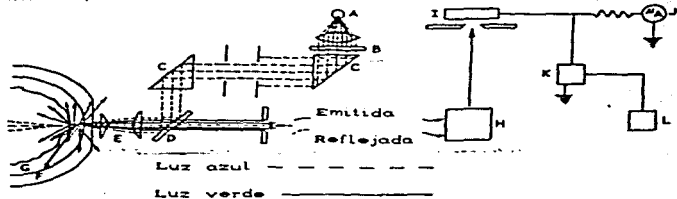


Figura 2.5 Técnica de la fluorescencia (Tomada de Hewitt [1964]). A. Lámpara de mercurio B. Filtros C. Prismas D. Espejo pulido E. Lentes F. Pared del tubo G. Película líquida H. Espectrómetro I. Fotomultiplicador J. Amplificador K. Osciloscopio L. Interruptor.

En la técnica de la dispersión, propuesta por Salazar y Marshall [1975], el espesor se mide detectando los cambios en la longitud de la columna de luz que se forma al cruzar un rayo laser la película, a la que se han agregado partículas pequeñas que producen la dispersión. La cantidad de luz dispersada por la columna es linealmente proporcional al espesor. Dicha cantidad es medida con dos fotodiodos, con inclinaciones diferentes para evitar efectos de reflexión (ver figura 2.6).

La técnica de la deflexión, original de Jones y Whitaker [1966], se usa posteriormente en Strobel y Whitaker [1969], Pierson y Whitaker [1977] y Alekseenko et al [1985]. Cuando un rayo de luz cruza la película se deflecta (refracción y reflexión combinadas). La cantidad de luz deflectada se mide con un fotosensor, que debido a la no uniformidad de sus superficies fotovoltaicas, dan una señal que es proporcional a la desviación del rayo de luz de su posición media (ver figura 2.7). La ventaja de este esquema es la sencillez de la óptica y de la electrónica involucradas. La desventaja es que se determina la pendiente, en lugar de la posición de la superficie. Sin embargo, la celeridad y la

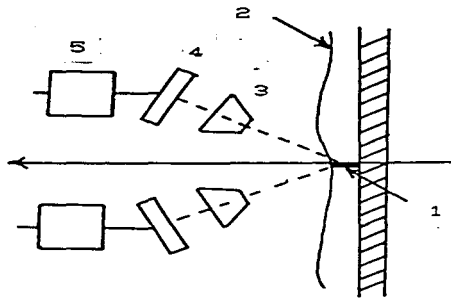


Figura 2.6 Técnica de la dispersión. 1. Columna de luz dispersa 2. Película 3. Cono y lente 4. Fotodiodo 5. Amplificador.

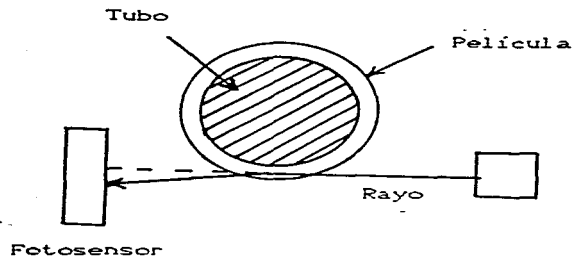


Figura 2.7. Técnica de la deflección.

longitud de la onda se pueden obtener fácilmente, tanto de la posición como de la pendiente, por lo que esto no es una grave desventaja. Alekseenko et al. [1985] perfeccionaron el método para medir también la amplitud.

2.3. EL EFECTO DE LA CURVATURA.

En esta sección se presentan los trabajos que toman en cuenta el efecto de la curvatura de la película en las propiedades de las ondas.

Kapitza [1949] cuantifica teóricamente dicho efecto suponiendo que el espesor de la película es mucho menor que el radio del tubo. Esto se cumple bastante bien en sus experimentos con agua y alcohol, donde el radio del tubo es de 1.25 cm y el espesor de un orden 100 veces menor. Demuestra que, en primera aproximación, la curvatura sólo influye en la longitud de onda y que, para los valores dados en sus experimentos, el cambio esperado en dicha longitud no pasa del uno por ciento, por lo que en su caso la teoría de placa plana es suficiente.

Goren [1962] estudia la estabilidad de una película inicialmente en reposo. Suponiendo que las perturbaciones tienen simetría axial obtiene una solución cerrada de las ecuaciones de movimiento que relaciona implícitamente los parámetros geométricos $\mu = a \cdot (Ca + h_0) / \alpha$, $S = W^2$ y un parámetro de rapidez de crecimiento de la onda. Sin embargo, es tan complicada dicha relación que para poder obtener las curvas de estabilidad recurre a dos aproximaciones: a) inercia despreciable y b) viscosidad despreciable. En sus experimentos, hechos en alambres de pequeño diámetro (0.127 y 0.019 mm), aplica con brocha la película de líquido (miel comercial) de tal forma que inicialmente no se mueve. Casi inmediatamente después nacen las ondas que, al crecer, forman gotas regulares. Compara los resultados experimentales con los obtenidos para el caso de inercia despreciable. Sus experimentos tienen el mérito de cubrir

un amplio rango de valores del parámetro de curvatura ($0.025 \leq \gamma \leq 0.725$).

Lin y Liu [1975] resuelven el problema de la estabilidad de la película cilíndrica tomando en cuenta efectos de tensión superficial, gravedad y viscosidad. Obtienen una ecuación diferencial parcial no lineal para el desarrollo de las ondas superficiales axisimétricas usando un método de perturbaciones regulares. Suponen que el espesor de la película es pequeño comparado con la longitud de onda. De la forma linealizada de dicha ecuación llegan a su criterio y curvas de estabilidad. Sin embargo, como lo señala Krantz [1977], sus resultados sólo son válidos para $a/h_0 \ll 1$. Compara sus resultados con los experimentales de Kapitza [1949], Binnie [1957] y Goren [1962]. El número de onda es muy similar al medido por Kapitza y Binnie, pero no así la celeridad. Los resultados de Goren se alejan de los suyos, como era de esperarse de acuerdo a la limitación en γ .

Krantz y Zollars [1976] usan la forma cilíndrica de la ecuación de Orr-Sommerfeld para el análisis lineal de estabilidad. Resuelven dicha ecuación mediante un método de perturbaciones usando α como parámetro pequeño ($\alpha \ll 1$). Algunos detalles del método se presentan en el capítulo 4 de esta tesis. Su solución asintótica es válida para $R = O(1)$ y $h_0/a \ll 1$. Hacen notar que mientras que la curvatura en la dirección axial es un factor estabilizante, la curvatura lateral desestabiliza al flujo. Esto ocurre porque los valles de las ondas tienen un menor radio de curvatura que las crestas, induciéndose así una presión capilar que tiende a mover el fluido de valles a crestas, incrementándose de esta manera el tamaño de las ondas. Presentan curvas de estabilidad neutra, donde R sólo cambia hasta 0.5, y cuantifican el error en que se incurre en esos experimentos realizados en columnas cilíndricas que desprecian la curvatura. Demuestran que si el parámetro $\mu/(p\omega h_0)^{1/2}$ es de $O(1)$ o menor, el error puede ser

apreciable. Este no es el caso en las columnas de 2.5 cm de diámetro usadas por Kapitza [1949] y Binnie [1957], donde el fluido de trabajo es agua y alcohol. Sin embargo, si el fluido fuera algún aceite mineral, el valor de α podría ser hasta un 250% mayor.

Los métodos de perturbaciones regulares han sido usados ampliamente en la deducción de ecuaciones de evolución de las ondas. Muchos de los trabajos mencionados en la sección 2.1.2. los usan. Para el caso de la película cilíndrica se tiene el trabajo de Lin y Liu [1975], como ya se dijo; de Atherton y Homsy [1976]; de Homsy y Geyling [1977], que resuelven el problema de la estabilidad de la película formada en los procesos de recubrimiento por remoción en forma parecida a como lo hacen Lin y Liu [1975]; de Shlang y Sivashinsky [1982], que toman en cuenta la coordenada transversal al flujo en su ecuación; y de Sharma y Ruckenstein [1985], que incluyen las fuerzas de van der Waals en el estudio de la ruptura de la lágrima en un ojo humano.

Shlang y Sivashinsky [1982] señalan que el grado de irregularidad y caos que existe en las ondas (que predice su ecuación) puede depender de factores geométricos externos, tales como la curvatura. Por ejemplo, el flujo en una columna cilíndrica es, en general, más regular que el flujo en una placa plana vertical. Con una solución de su ecuación linealizada logran obtener diferentes configuraciones del flujo para diferentes valores del parámetro geométrico $(\beta/CW)^{1/2}$ (ver definición de β en el próximo capítulo). Sobre este particular se ahondará en el capítulo 5.

En resumen, son relativamente pocos los trabajos que incluyen el efecto de la curvatura. Se tienen algunas ecuaciones de evolución para las ondas en películas cilíndricas pero todas ellas se dedujeron tomando en cuenta ciertas hipótesis simplificadoras. Sin embargo, su

complejidad es tal que no se han podido obtener soluciones que tomen en cuenta los términos no lineales. La versión linealizada de dichas ecuaciones si se ha resuelto, pero con algunas restricciones en los valores de los parámetros pertinentes (por ejemplo en el número de onda, en la tensión superficial, o en la curvatura de la película). Es importante entonces disponer de una solución, cuando menos para la versión linealizada, que no tenga restricciones en los valores de estos parámetros. Dicha solución se obtiene en este trabajo.

Por otro lado, los resultados experimentales se reducen a los de Goren [1962], existiendo la necesidad de más para validar las diferentes teorías. La presente investigación incluye una parte experimental que pretende resarcir esta carencia.

CAPITULO 3

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El modelado del flujo ondulado en películas descendentes es un desafío a los métodos matemáticos modernos, que como se ha visto en el capítulo anterior, fallan cuando se trata de dar una descripción completa del desarrollo de las ondas. La teoría lineal de la estabilidad demuestra dar buenos resultados en la región cercana a la línea de inicio de las ondas, cuando el número de Reynolds no es muy grande ($Re < 100$). El objetivo principal del presente trabajo es, como ya se ha dicho, evaluar el efecto de la curvatura en las propiedades de las ondas. El primer paso deberá darse, obviamente, en la región de flujo relativamente ordenado y usando una teoría ya probada, aunque claro, esto resta generalidad al modelo. Se usará entonces la teoría lineal, con lo que se estudia la estabilidad del flujo básico de espesor constante, correspondiente a la región 2 de la figura 1.1.

3.1. ECUACIONES FUNDAMENTALES

Se supone el flujo de una película líquida descendiendo verticalmente por el exterior de un cilindro de radio a , como se muestra en la figura 1.1. El líquido tiene una densidad ρ , una viscosidad dinámica μ y una tensión superficial σ . Dichas propiedades se toman como constantes. No existe transferencia de masa, calor, o cantidad de movimiento con el medio ambiente, que se supone de viscosidad nula.

En las regiones 1, 2 y 3 (figura 1.1) el flujo puede tomarse como bidimensional y con simetría axial, por lo que tanto los cambios en las variables como la velocidad en la dirección transversal al movimiento serán cero.

Las ecuaciones que rigen el movimiento son las de continuidad y Navier-Stokes, que una vez tomadas en cuenta las suposiciones anteriores quedan, en coordenadas cilíndricas (ver Hughes y Gaylord [1964]), como

Continuidad

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r u_r] + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

Navier-Stokes

$$\rho \frac{Du_r}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right] \quad (3.2)$$

$$\rho \frac{Du_z}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z + \rho g \quad (3.3)$$

donde

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Se tienen, además, las siguientes condiciones en la frontera

En $r=a$

$$u_r = 0 \quad (3.4)$$

$$u_z = 0 \quad (3.5)$$

que vienen de la condición de no deslizamiento del fluido en la superficie del cilindro.

En la superficie libre del líquido se debe cumplir, de acuerdo con las suposiciones antes hechas, que la resultante de las fuerzas que actúan sobre un elemento infinitesimal es igual a cero. Esto conduce a las siguientes ecuaciones cuya obtención se da en el apéndice A.

En $r = a - h$

$$-p + p_0 + \sigma K + \frac{2u}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} - \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.6)$$

$$\geq \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial h}{\partial z} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \left[1 - \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right]$$

$$- \geq \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad (3.7)$$

donde p es la presión del ambiente y K la curvatura dada por

$$K = \frac{1}{a+h} - \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}}{\left[1 + \left[\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right]^2 \right]^{3/2}}$$

Finalmente se tiene la condición cinemática en la superficie libre que viene del hecho de que si el líquido no cruza dicha superficie, en cada punto de la misma se cumple que, la componente normal de la velocidad del fluido y la velocidad normal de la superficie son iguales.

En $r = a+h$

$$u_r = \frac{\partial h}{\partial t} + u_z = \frac{\partial h}{\partial z} \quad (3.8)$$

3.2. SOLUCION PARA EL FLUJO BASICO

Para el flujo básico, es decir, para el flujo cuya estabilidad se estudia, supuesto completamente desarrollado (invariable con z), permanente, laminar y paralelo al eje del cilindro, se tiene la siguiente solución (ver apéndice A)

$$\bar{u}_z = \frac{g}{2\nu} \left[(a+h_0)^2 \text{Ln}(r/a) - \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \right] \quad (3.9)$$

$$\bar{h} = h_0 = \text{cte.} \quad (3.10)$$

$$\bar{p} = p_0 + c\bar{r}^2 \quad (3.11)$$

$$\bar{K} = \frac{1}{a+h_0} \quad (3.12)$$

donde las variables testadas corresponden al flujo básico.

3.3. ANALISIS LINEAL DE ESTABILIDAD

En la teoría lineal de la estabilidad se supone que las variables del flujo básico son afectadas por pequeñas perturbaciones, tan pequeñas que puedan desprejiciarse términos cuadráticos en las ecuaciones. Se trata de determinar si estas perturbaciones crecen, decrecen, o si mantienen su valor constante. Si crecen el flujo es inestable (dicha inestabilidad se manifiesta en este caso como ondas), si decrecen será estable, y si mantienen constante su valor se dice que tiene estabilidad neutra.

Las variables para el flujo perturbado serán igual a la suma de las correspondientes para el flujo básico más una pequeña perturbación

$$\begin{aligned} u_r &= \bar{u}_r(z, t) \\ u_z &= \bar{u}_z(z) + u'_z(z, t) \\ p &= \bar{p} + p'(z, t) \\ h &= h_0 + h'(z, t) \\ K &= \bar{K} + K'(z, t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Las variables del flujo perturbado deben también satisfacer tanto las ecuaciones fundamentales como las condiciones en la frontera dadas en 3.1. Si se sustituye (3.13) en dichas ecuaciones, se resta la solución para el flujo básico y se eliminan los términos cuadráticos en las perturbaciones, se obtienen las ecuaciones linealizadas de las perturbaciones (para más detalles sobre esta sección ver el apéndice A). Como se ha supuesto que la perturbación en la superficie

libre (h') es pequeña, pero función de z y del tiempo, es posible y preferible referir las condiciones en la frontera a $(a+h_0)$ en lugar de $(a+h(z,t))$. Esto se logra si se realiza una expansión en serie de Taylor de los términos de las condiciones (3.6), (3.7) y (3.8), y se eliminan los términos cuadráticos en h' .

Las ecuaciones, en términos de las perturbaciones dadas en (3.13), no se resuelven directamente, sino que se procede de una manera que ya es típica en esta clase de problemas, la cual se describe en el apéndice A.

Con el objeto de reducir el problema a uno de una sola variable independiente, se define una función de corriente para la perturbación de la velocidad, de tal manera que se cumpla en forma idéntica la ecuación de continuidad

$$u_r' = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.14)$$

$$u_z' = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3.15)$$

Las ecuaciones anteriores se sustituyen en las de movimiento y en las condiciones en la frontera.

Se supone que toda perturbación es una onda de forma arbitraria, pero que admite un análisis de Fourier y que por lo tanto puede expresarse como la suma de varias ondas de forma definida. Se analiza solamente el término más inestable de esta serie. Generalmente se supone que ψ es de la forma

$$\psi(r, z, t) = \phi(r) e^{i\alpha(z-ct)} \quad (3.16)$$

donde ϕ es la amplitud, α el número de onda y c es una

cantidad compleja cuando se estudia el crecimiento temporal. cuya parte real c_r representa la celeridad de la onda y la parte imaginaria c_i un factor de amplificación. Como ha demostrado Yih [1955], al hacer una extensión al teorema de Squire [1933], que es válido sólo para flujos confinados, un flujo con superficie libre es estable o inestable con respecto a una perturbación tridimensional, si es estable o inestable con respecto a perturbaciones bidimensionales a menores números de Reynolds. Por esta razón sólo se consideran perturbaciones bidimensionales. Se tendrá entonces que, para $c_i > 0$ el flujo es inestable, para $c_i < 0$ es estable y para $c_i = 0$ habrá estabilidad neutra.

Las perturbaciones en la presión y en el espesor de la película se expresan en términos de ϕ usando las ecuaciones de movimiento y las condiciones en la frontera con lo que finalmente se llega al siguiente problema de valores característicos para el parámetro c

$$\left[\frac{i\alpha}{\nu} \left(c - \bar{u}_z \right) + D^2 - \alpha^2 \right] \left(D^2 - \alpha^2 \right) \phi + \frac{i\alpha}{\nu} \left(D^2 \bar{u}_z \right) \phi = 0 \quad (3.17)$$

$$\text{donde } D^2 = r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right] \quad (3.18)$$

En $r = a$

$$\phi = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{d\phi}{dr} = 0 \quad (3.20)$$

y en $r = a+h_0$

$$\frac{\alpha^2}{r} \phi + \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right] - \frac{\phi g}{rv(c-\bar{u}_z)} = 0 \quad (3.21)$$

$$\rho \left[(c-\bar{u}_z) \frac{d\phi}{dr} + \frac{d\bar{u}_z}{dr} \phi \right] - \frac{\mu}{i\alpha} \left[-\frac{d^3\phi}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\phi}{dr^2} + \right. \\ \left. + \left(\alpha^2 - \frac{1}{r^2} \right) \frac{d\phi}{dr} \right] - \frac{\sigma \phi}{(c-\bar{u}_z)} \left[\alpha^2 - \frac{1}{(a+h_0)} \right] \\ + 2\omega i \alpha \left[\frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{r} \right] = 0 \quad (3.22)$$

Si se deseara hacer un análisis del crecimiento espacial de las perturbaciones, se debería suponer α compleja y c real. Con esto el problema sería de valores característicos para el parámetro α . Gaster [1962] ha obtenido una ecuación que permite pasar de los resultados temporales a los espaciales, y Lin [1976] ha demostrado que dicha relación es válida siempre que se cumplan los supuestos de la teoría lineal.

La ecuación (3.17) es la conocida ecuación de Orr-Sommerfeld, sólo que expresada en coordenadas cilíndricas.

3.4. FORMA ADIMENSIONAL DEL PROBLEMA DE VALORES CARACTERÍSTICOS

Cuando se pretende calcular c es muy útil manejar tanto la ecuación diferencial como las condiciones en la frontera en su forma adimensional. Esto permite conocer cuales son los principales parámetros adimensionales que intervienen en el problema y facilita el análisis de órdenes de magnitud cuando se hace alguna aproximación.

En la adimensionalización del problema de valores característicos se ha usado la velocidad superficial no perturbada u_0 como velocidad característica y al espesor no perturbado de la película h_0 como longitud característica. Las nuevas variables adimensionales se representan con las mismas letras que las dimensionales para evitar complicaciones en la nomenclatura, pero debe recordarse de aquí en adelante su carácter adimensional.

Con esto en cuenta, el problema de valores característicos se transforma en

$$\left[(c - \bar{u}_z)(D^2 - \alpha^2) + D^2 \bar{u}_z \right] \phi = \frac{i}{\alpha R} (D^2 - \alpha^2)^2 \phi \quad (3.23)$$

En $r = \beta$

$$\phi = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{d\phi}{dr} = 0 \quad (3.25)$$

y en $r = \beta+1$

$$\alpha^2 \phi + \frac{d^2 \phi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} - \frac{R}{F^2} \frac{\phi}{c-1} = 0 \quad (3.26)$$

$$\alpha(c-1) \frac{d\phi}{dr} + \frac{1}{iR} \left[\frac{d^3\phi}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2\phi}{dr^2} - c\alpha^2 - \frac{1}{r^2} \right] \frac{d\phi}{dr}$$

$$- \frac{W\alpha\phi}{c-1} \left(c\alpha^2 - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2i\alpha^2}{R} \left(\frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{r} \right) = 0 \quad (3.27)$$

El perfil básico queda como

$$u_{\text{b}} = \frac{2\text{Ln} \frac{r}{\beta} - \frac{r^2}{(\beta+1)^2} + \gamma^2}{\gamma^2 - 2\text{Ln} \gamma - 1} \quad (3.28)$$

En las ecuaciones anteriores el parámetro geométrico

$$\beta = \frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{a}{h_0} \quad (3.29)$$

representa la relación entre el radio del tubo y el espesor de la película y γ se define como

$$\gamma = \frac{a}{a+h_0} \quad (3.30)$$

Los parámetros γ y β no son independientes entre sí, pero se mantendrán los dos por simplicidad algebraica en las ecuaciones.

Los números de Reynolds R, Froude F y Weber W se definen de la siguiente manera

$$R = \frac{u_0 h_0}{\nu} \quad (3.31)$$

$$F = \frac{u_0}{(g h_0)^{1/2}} \quad (3.32)$$

$$W = \frac{\sigma}{\rho u_0^2 h_0} \quad (3.33)$$

En resumen, existen tres parámetros independientes para el problema: R , W y γ (ó β). Es fácil demostrar que el número de Froude puede obtenerse de

$$\frac{R}{F^2} = G \quad (3.34)$$

donde

$$G = \frac{4(1-\gamma)^2}{\gamma^2 - 2\ln\gamma - 1} \quad (3.35)$$

CAPITULO 4

SOLUCION TEORICA DEL PROBLEMA DE ESTABILIDAD LINEAL

En este capítulo se resuelve el problema de valores característicos planteado por las ecuaciones (3.23)-(3.27). Se presenta, en primer lugar, la solución analítica válida para números de onda pequeños debida a Krantz y Zollars [1976], obtenida mediante la técnica de perturbaciones regulares propuesta por Yih [1983] para el caso de placa plana. La razón que se tiene para incluir esta solución es la siguiente: el autor de esta tesis trabajó en dicha solución sin darse cuenta de la existencia del trabajo de Krantz y Zollars. Al comparar las dos soluciones se dió cuenta de que él omitió el término Wo^2 de la condición en la frontera (4.19) en la aproximación para orden uno en α , por lo que llegó a una solución que no toma en cuenta el efecto combinado de la tensión superficial y la curvatura en la dirección axial, que finalmente puede estabilizar el flujo. Así pues, el mérito de la solución correcta es de Krantz y Zollars y sólo se presenta aquí porque se considera que los detalles son importantes para el trabajo.

También se da una solución numérica que no se restringe a valores pequeños de los números de onda y de Reynolds. Dicha solución numérica hace uso del método propuesto por Davey [1973] para resolver la ecuación de Orr-Sommerfeld u otros problemas de valores en la frontera de carácter similar. Se hace notar la diferencia entre ambos métodos empleados.

Se comparan los resultados numéricos con los reportados en la literatura para los casos límite de placa plana y chorros, y con las aproximaciones existentes para películas cilíndricas. Se presentan nuevos resultados para diferentes valores de los parámetros fundamentales.

4.1. APROXIMACION DE NUMERO DE ONDA PEQUENO

Se supone una solución de la forma

$$\phi = \phi_0 + \alpha \phi_1 + \alpha^2 \phi_2 + \dots \quad (4.1)$$

y

$$c = c_0 + \alpha c_1 + \alpha^2 c_2 + \dots \quad (4.2)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (3.23)-(3.27) e igualando términos de igual potencia en α se llega a lo siguiente:
Para orden cero en α la ecuación (3.23) queda como

$$D^+ \phi_0 = 0 \quad (4.3)$$

donde se supone que $1/\beta = O(1)$ para que los términos proporcionales a $1/r$ no sean dominantes (de orden mayor que ϕ_0) en esta ecuación.

La condición en la frontera en $r=\beta$ es

$$\phi_0 = \frac{d\phi_0}{dr} = 0 \quad (4.4)$$

y en $r=\beta^{-1}$

$$\frac{d^2 \phi_0}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\phi_0}{dr} - G \frac{\phi_0}{c_0 - 1} = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{d^3 \phi_0}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 \phi_0}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d\phi_0}{dr} = 0 \quad (4.6)$$

La solución de la ecuación (4.3) es

$$\phi_0 = A_0 + A_1 r^2 + A_2 r^4 + A_3 r^2 \ln r \quad (4.7)$$

donde A_0 , A_1 , A_2 y A_3 son constantes arbitrarias.

Sustituyendo esta solución en las condiciones en la frontera se tiene

$$A_0 + A_1 \beta^2 + A_2 \beta^4 + A_3 \beta^2 \ln \beta = 0 \quad (4.8)$$

$$2A_1 + 4A_2 \beta^2 + A_3 (1 + 2 \ln \beta) = 0 \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{A_0 G}{c_0 - 1} + \frac{A_2 G (1 + \beta)^2}{c_0 - 1} - A_2 \left[8(1 + \beta)^2 - \frac{G(1 + \beta)^4}{c_0 - 1} \right] \\ - A_3 \left[2 - \frac{G(1 + \beta)^2}{c_0 - 1} \ln (1 + \beta) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$A_2 = 0 \quad (4.11)$$

El sistema algebraico anterior tiene solución diferente de la trivial sólo si su determinante es igual a cero. Después del manejo algebraico correspondiente, esto conduce a

$$c_0 = 2 \quad (4.12)$$

Dado que la ecuación diferencial (4.3) es lineal y homogénea, las funciones características se pueden determinar solamente con una constante multiplicativa arbitraria. Así, se puede tomar $A_3 = 1$, por lo que A_0 y A_1 resultan

$$A_0 = \frac{\beta^2}{2} \quad (4.13)$$

$$A_1 = -(1/2 + \text{Ln } \beta) \quad (4.14)$$

de esta manera . la función característica es

$$\phi_0 = \frac{(\beta^2 - r^2)}{2} + r^2 \text{Ln}(r/\beta) \quad (4.15)$$

Para términos de primer orden en α . y usando la solución anterior. la ecuación diferencial es

$$D^4 \phi_1 = \frac{R}{i} \left[4 - \frac{2G}{(1-\gamma)^2} \text{Ln}(r/\beta) + \frac{G(r^2 - \beta^2)}{2} \left(1 - \frac{\beta^2}{r^2 \gamma^2} \right) \right] \quad (4.16)$$

y las condiciones en la frontera en $r = \beta$

$$\phi_1 = \frac{d\phi_1}{dr} = 0 \quad (4.17)$$

en $r = \beta+1$

$$\frac{d^2 \phi_1}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\phi_1}{dr} + G \left[c_1 \phi_0 - \phi_1 \right] = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{d\phi_0}{dr} + \frac{1}{iR} \left[\frac{d^3\phi_1}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2\phi_1}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d\phi_1}{dr} \right] + W \left[\frac{1}{r^2} - \alpha^2 \right] \phi_0 = 0 \quad (4.19)$$

donde para que los términos de esta última ecuación sean del orden de ϕ_0 se debe cumplir que: $R = O(1)$, $W = O(\beta+1)^2$ y $W = O(1/\alpha^2)$. Así se conserva la influencia de la curvatura en la dirección axial (proporcional a α) en la estabilidad.

La solución de la ecuación (4.16), en términos de las constantes arbitrarias B_0 , B_1 , B_2 , y B_3 , es

$$\phi_1 = B_0 + B_1 r + B_2 r^4 + B_3 r^2 \ln r + \frac{K_2}{192} r^6 + r^4 \left[\left(\frac{K_1}{16} - \frac{5}{64} K_4 \right) \ln r + \frac{K_4}{32} (\ln r)^2 \right] - \frac{K_3}{8} r^2 (\ln r)^2 \quad (4.20)$$

donde

$$K_1 = -iR \left[4 + \frac{2G}{(1-\gamma)^2} \ln \beta + \frac{G\beta}{2} \left(\frac{1+\gamma}{\gamma} \right) \right] \quad (4.21)$$

$$K_2 = - \frac{iRG}{2} \quad (4.22)$$

$$K_B = \frac{1RG\beta^4}{2\gamma^2} \quad (4.23)$$

$$K_A = \frac{2iRG}{(1-\gamma)^2} \quad (4.24)$$

Sustituyendo la solución (4.20) en las condiciones en la frontera. después de un laborioso trabajo algebraico. se pueden eliminar B_0 , B_1 , B_2 y B_3 para llegar finalmente a

$$c_1 = \frac{1}{\alpha} \left[f_1 + WR \left[\alpha^2 - \frac{1}{(\beta+1)^2} \right] f_2 \right] \quad (4.25)$$

donde

$$\begin{aligned} f_1 = & \frac{G^2}{128} \left[16(\beta+1)^6 \left[\text{Ln} \left(\frac{\beta+1}{\beta} \right) \right]^3 - (40\beta^5 + 180\beta^4 + \right. \\ & + 320\beta^3 + 260\beta^2 + 120\beta + 20) \left[\text{Ln} \left(\frac{\beta+1}{\beta} \right) \right]^2 - (20\beta^6 + 180\beta^5 + \\ & + 190\beta^4 + 136\beta^3 + 34\beta^2) \text{Ln} \left(\frac{\beta+1}{\beta} \right) + 20\beta^5 + 96\beta^4 + \frac{500}{3} \beta^3 \\ & \left. + 140\beta^2 + 598 + \frac{59}{6} \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$f_2 = \frac{(2\beta+1)^2}{16(\beta+1)} - \frac{(\beta+1)}{26}$$

por lo que

$$c = 2 + \alpha c_1 \quad (4.27)$$

hasta esta aproximación.

Krantz y Zollars [1976] obtienen que, para $1/\beta \ll 1$, $f_1 > 0$ y $f_2 < 0$, y por lo tanto, el signo del término $\alpha^2 - 1/(\beta+1)^2$ dictará la estabilidad del flujo. Así, la curvatura en la dirección axial (proporcional a α) tiene un efecto estabilizante, mientras que la curvatura lateral (proporcional a $1/(\beta+1)$) desestabiliza al flujo.

La celeridad de la onda resulta de dos veces la velocidad en la superficie no perturbada ($c_p = 2$), coincidiendo el resultado con el de placa plana vertical, cuando menos hasta este orden en α (ver Benjamin [1957] y Yih [1963]).

Es importante hacer notar que el factor de amplificación de la onda αc_1 , depende linealmente de los números de Reynolds y de Weber.

4.2. TECNICA NUMERICA

Entre los principales problemas que surgen en el análisis lineal de la estabilidad de los flujos laminares paralelos se encuentra el de obtener la solución de la ecuación de Orr-Sommerfeld. La dificultad mayor se tiene cuando se busca una solución numérica para altos números de Reynolds, ya que para este caso muchos de los métodos presentan un gran crecimiento de los errores parásitos en la solución. Se han desarrollado varios métodos intentando salvar este inconveniente, siendo los más populares los debidos a Kaplan [1964] y a Davey [1973]. Sin embargo, estos métodos se complican por la necesidad de ortogonalizar las soluciones para evitar la dependencia lineal entre las cuatro

soluciones independientes (la ecuación es de cuarto orden), que puede provenir de errores numéricos.

Para el caso de flujos en películas descendentes se demuestra experimentalmente (ver Kapitza [1949], Binnie [1957] y el capítulo 5 del presente trabajo) que la inestabilidad tiene lugar a bajos números de Reynolds, por lo que se evitan la mayoría de los problemas en la solución de la ecuación. En el presente trabajo se usa un método derivado del propuesto por Davey [1973] en el que no existe la necesidad de ortogonalizar las soluciones en el interior del intervalo de integración. La esencia del método (ver también Solorio y Sen [1985]) se presenta a continuación.

Para el empleo del algoritmo numérico conviene escribir el problema de valores característicos (3.23)-(3.27) de la siguiente forma

$$\frac{d^4 \phi}{dr^4} + Q_1 \frac{d^3 \phi}{dr^3} + Q_2 \frac{d^2 \phi}{dr^2} + Q_3 \frac{d\phi}{dr} + Q_4 \phi = 0 \quad (4.28)$$

en $r = \beta$

$$\phi = \frac{d\phi}{dr} = 0 \quad (4.29)$$

en $r = \beta+1$

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + P_1 \frac{d\phi}{dr} + P_2 \phi = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{d^3 \phi}{dr^3} + P_3 \frac{d^2 \phi}{dr^2} + P_4 \frac{d\phi}{dr} + P_5 \phi = 0 \quad (4.31)$$

donde

$$Q_1 = -\frac{2}{r}$$

$$Q_2 = i\alpha R(c - \bar{u}_z) - 2\alpha^2 + \frac{3}{r^2}$$

$$Q_3 = \frac{1}{r} \left[2\alpha^2 - i\alpha R(c - \bar{u}_z) - \frac{3}{r^2} \right]$$

$$Q_4 = \alpha^4 - i\alpha^3 R(c - \bar{u}_z) + i\alpha R \left(\frac{d^2 \bar{u}_z}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}_z}{dr} \right)$$

$$P_1 = P_3 = -\frac{1}{r} \quad (4.32)$$

$$P_2 = \alpha^2 - \frac{6}{(c-1)}$$

$$P_4 = i\alpha R(C-1) - 3\alpha^2 + \frac{1}{r^2}$$

$$P_5 = \frac{2\alpha^2}{r} - \frac{i\alpha RW}{(C-1)} \left[\alpha^2 - \frac{1}{r^2} \right]$$

La idea central del método se presenta a continuación.

Sea el vector \underline{Y} definido de la siguiente manera

$$\underline{Y} = [\phi, \phi', \phi'', \phi''']^T \quad (4.33)$$

donde las primas representan derivadas con respecto a r .

Si ϕ y sus tres primeras derivadas son continuas, \underline{Y} será una función continua de r . Esto último permite aplicar un desarrollo en serie de Taylor para calcular el valor de \underline{Y}_n en $r = \beta + n \Delta r$ en función del valor del vector \underline{Y}_{n-1} en $r = \beta + (n-1)\Delta r$ donde $n = 1, 2, 3, \dots, N$ y Δr es un incremento en r pequeño ($\Delta r = 1/N$). Se tiene entonces

$$\underline{Y}_n = \underline{Y}_{n-1} + \frac{d\underline{Y}_{n-1}}{dr} \Delta r \quad (4.34)$$

que no es más que una transformación lineal del vector \underline{Y}_{n-1} en el vector \underline{Y}_n de la forma

$$\underline{Y}_n = T \underline{Y}_{n-1} \quad (4.35)$$

En términos de la matriz de la transformación la ecuación anterior se puede escribir como

$$\underline{Y}_n = \underline{M}_n \underline{Y}_{n-1} \quad (4.36)$$

que aplicada a todo el intervalo de integración lleva a

$$\underline{Y}_1 = \underline{M}_1 \underline{Y}_0,$$

$$\underline{Y}_2 = \underline{M}_2 \underline{Y}_1, \quad (4.37)$$

...

$$\underline{Y}_n = \underline{M}_n \underline{Y}_{n-1}$$

de tal manera que sustituyendo cada ecuación en la anterior, partiendo de la última, se obtiene

$$\underline{Y}_n = \underline{M}_n \underline{M}_{n-1} \dots \underline{M}_1 \underline{Y}_0 \quad (4.38)$$

o

$$\underline{Y}_n = \underline{E}_n \underline{Y}_0 \quad (4.39)$$

donde

$$\underline{E}_n = \underline{M}_n \underline{M}_{n-1} \dots \underline{M}_1 \quad (4.40)$$

Si se abarca todo el rango de integración se llega finalmente a la ecuación

$$\underline{Y}_f = \underline{E} \underline{Y}_0 \quad (4.41)$$

donde \underline{E} es la llamada matriz de transferencia y \underline{Y}_f es el valor de \underline{Y} en $r = \beta+1$.

Ahora bien, se sabe del álgebra lineal que si se conoce la

transformada de cuatro vectores linealmente independientes (vectores base) queda completamente determinada la matriz B . Si se toman como vectores base $(1.0.0.0)^T$, $(0.1.0.0)^T$, $(0.0.1.0)^T$ y $(0.0.0.1)^T$ y se obtienen los correspondientes vectores transformados, mediante la integración de la ecuación (4.28) usando un método de Runge-Kutta de cuarto orden en este caso, éstos resultan ser, como es fácil demostrarlo, las columnas de la matriz B . Así se determina entonces la matriz de transferencia una vez que se han fijado valores a los parámetros que aparecen en la ecuación (4.28) (de otra forma no sería posible integrarla), incluyendo un valor supuesto de c . Sin embargo, el valor de c será el correcto sólo si además se satisfacen las condiciones en la frontera (4.29)-(4.31).

La ecuación (4.41) se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} \phi_f \\ \phi_0'' \\ \phi_0'' \\ \phi_0'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ c \\ \phi_0'' \\ \phi_0'' \end{bmatrix}$$

o bien

$$B_{13} \phi_0'' + B_{14} \phi_0'' - \phi_f = 0 \quad (4.42)$$

$$B_{23} \phi_0'' + B_{24} \phi_0'' - \phi_f = 0 \quad (4.43)$$

$$B_{33} \phi_0'' + B_{34} \phi_0'' - \phi_f = 0 \quad (4.44)$$

$$B_{43} \phi_0'' + B_{44} \phi_0'' - \phi_f = 0 \quad (4.45)$$

donde se ha tomado en cuenta la condición (4.29).

Por otro lado, de (4.30) y (4.31) se tiene

$$\phi_f'' + P_1 \phi_f' + P_2 \phi_f = 0 \quad (4.46)$$

$$\phi_f'' + P_3 \phi_f' + P_4 \phi_f + P_5 \phi_f = 0 \quad (4.47)$$

Las ecuaciones (4.42)-(4.47) forman un sistema de seis ecuaciones para las seis incógnitas ϕ_f , ϕ_f' , ϕ_f'' , ϕ_f''' , ϕ_0'' y ϕ_0''' . Como el sistema es homogéneo, tendrá solución diferente de la trivial si y sólo si el determinante de sus coeficientes es cero. El determinante Δ , una vez desarrollado, queda como

$$\begin{aligned} \Delta = & P_2 \left[B_{13} (B_{34} P_3 + B_{44} + B_{24} P_4) - B_{14} (B_{33} P_3 + B_{43} + B_{23} P_4) \right] \\ & - P_1 \left[B_{24} (B_{33} P_3 + B_{43} + B_{13} P_5) - B_{23} (B_{34} P_3 + B_{44} + B_{14} P_5) \right] \\ & + B_{33} (B_{24} P_4 + B_{44} + B_{14} P_5) - B_{34} (B_{23} P_4 + B_{43} + B_{13} P_5) \end{aligned} \quad (4.48)$$

El valor característico correcto deberá entonces ser tal que anule el valor del determinante anterior. Para encontrar este valor, se realiza una serie de iteraciones de la manera siguiente: se suponen dos valores para c y se encuentran los Δ correspondientes (nótese que la matriz B varía para cada c , por lo que hay que integrar cuatro veces la ecuación (4.28) cada vez que se calcula Δ); con estos valores se interpola para encontrar el valor de c que haría $\Delta = 0$. Con este nuevo valor de c se calcula Δ , y si efectivamente es cero se para el proceso. Si es diferente de cero se toman estos c y Δ como un tercer par y se vuelve a interpolar. De esta manera se sigue hasta lograr que tanto la parte real como la imaginaria de Δ sean, en valor

absoluto, menores que 10^{-6} .

El proceso de interpolación converge rápidamente si el valor supuesto de c es cercano a la solución. En este caso la fórmula de interpolación de Lagrange da buenos resultados. Si el valor supuesto de c está lejos de la solución la fórmula de Lagrange conduce a una divergencia en el método, y conviene entonces usar el método de interpolación de Muller Over Conte [1960], que aunque es lento tiene un mayor radio de convergencia.

El programa de cómputo usado para calcular c se muestra en el apéndice B. Está escrito en Fortran e incluye varias subrutinas. Se corrió tanto en la computadora Burroughs 6700 como en una microcomputadora Printaform 6710-2 compatible con IBM. El tiempo de cómputo depende de que tan cercano esté el valor supuesto de la solución y varía entre 4 y 7 segundos en la Burroughs y entre 8 y 12 en la Printaform.

4.3. RESULTADOS NUMERICOS

Estos resultados han sido publicados por Solorio y Sen [1987] básicamente como se reportan en esta sección.

Con el método numérico se obtiene un conjunto infinito, pero discreto, de valores característicos para un conjunto de valores dados de los parámetros R , σ , W y γ . En las figuras 4.1 y 4.2 se muestran sus partes real c_1 e imaginaria c_2 para los primeros modos, como función del número de onda, para $R=1$, $W=1$ y $\gamma=0.5$. Los modos se numeran de tal forma que, al aumentar su número, disminuye el valor de su parte imaginaria c_2 . Solo el primer modo presenta una parte imaginaria positiva en $0 < \alpha < \alpha_1$. En dicho rango las perturbaciones se amplifican, teniéndose el máximo crecimiento de la onda en $\alpha=0.45$, que es el número de onda más inestable.

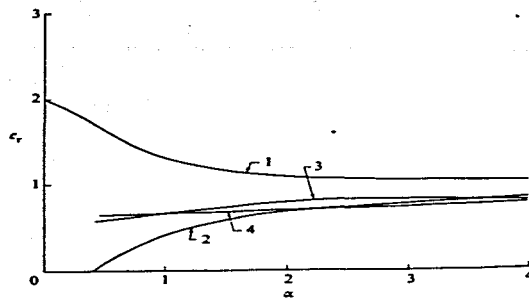


Figura 4.1. Algunos modos de c_r para $R = 1$, $W = 1$ y $\gamma = 0.5$.

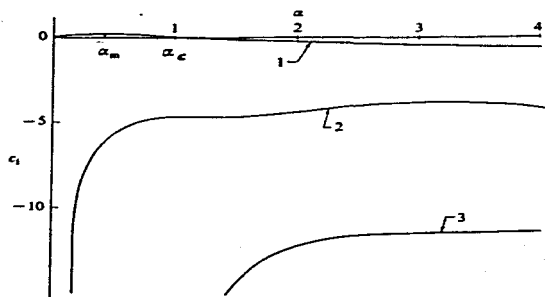


Figura 4.2. Algunos modos de c_i para $R = 1$, $W = 1$ y $\gamma = 0.5$.

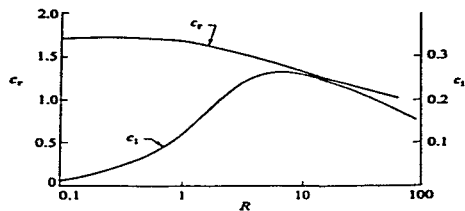


Figura 4.3 Valor característico del modo más inestable con $W = 1$, $\gamma = 0.5$ y $\alpha = 0.4$.

En la figura 4.3 se muestran la parte real e imaginaria de c para el modo más inestable como función del número de Reynolds para $W=1$, $\gamma=0.5$ y $\alpha=0.4$. La parte imaginaria es positiva para todo R para este α en particular, y crece linealmente con R para R pequeños, como predice la ecuación (4.27), pero disminuye paulatinamente para R grandes.

4.3.1 Comparación con los resultados existentes en la literatura.

Cuando $\gamma \rightarrow \pi$ por la izquierda, la geometría cilíndrica tiende a la de la placa plana vertical y el valor característico del modo menor tiende a una constante. De esta forma se pueden obtener valores para placa plana (aquí se toma $\gamma = 0.999$) y usarse para comparar los resultados del método numérico con los existentes en la literatura para ese caso. En la figura 4.4 se muestran los valores calculados del número de onda crítico α_c como función del Reynolds R , y se comparan con los obtenidos por Whitaker [1964]. Los valores calculados por Stening y Barr-David [1964], mencionados en dicho artículo de Whitaker, coinciden con los obtenidos con el presente método.

En la figura 4.5, se muestran el número de onda y la celeridad de máxima amplificación, denotadas por α_m y c_{rm}

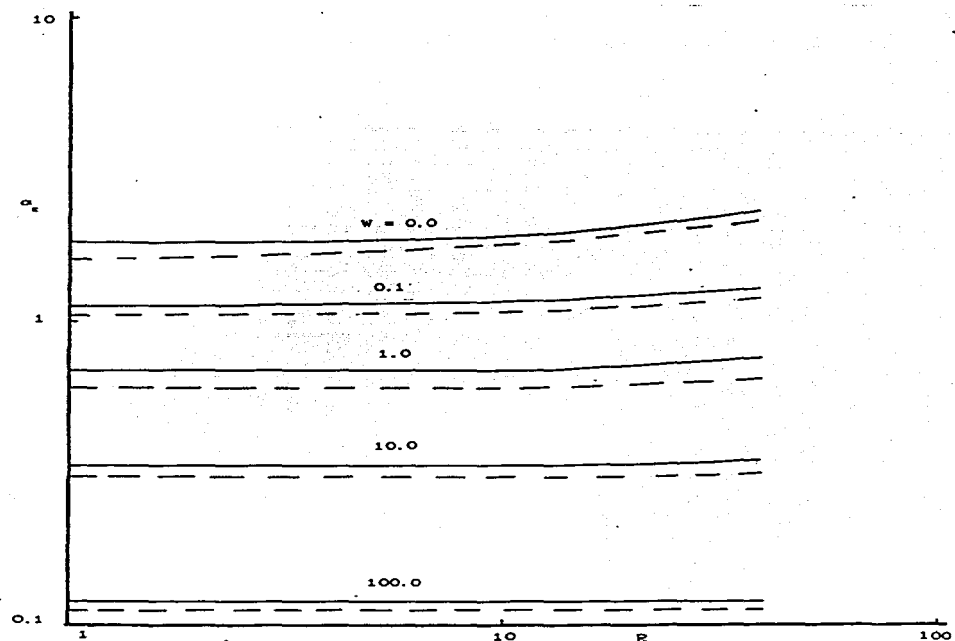


Figura 4.4. Comparación de los resultados de Whitaker [1964] - - - - con los del presente trabajo ——— para $\gamma = 0.99$

respectivamente, y se comparan con los obtenidos para placa plana por Pierson y Whitaker [1977], que a su vez los han comparado con resultados teóricos y experimentales de varios autores.

En el otro límite, cuando $\gamma \rightarrow 0$, la geometría tiende a la de un chorro cilíndrico. Por supuesto existen diferencias físicas ya que el chorro se acelera continuamente, y el perfil de velocidades es distinto en una pequeña región

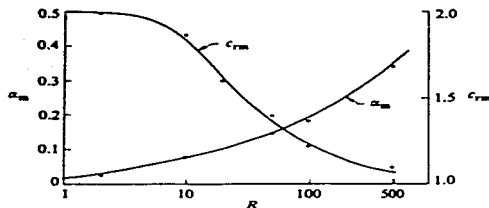


Figura 4.5. Comparación de los resultados de Pierson y Whitaker [1977] — con los del presente trabajo • para $\gamma = 0.99$ y $(\sigma/\rho)(2/gv^4)^{1/3} = 4280$.

debido a las diferentes condiciones en la frontera internas. Sin embargo, las características de estabilidad parecen ser similares, y los resultados que aquí se obtienen para $\gamma \rightarrow 0$ pueden compararse con los correspondientes a un chorro estático, para el que existe mucha información. Chandrasekhar [1961] generaliza los resultados de Rayleigh [1879, 1892], válidos solo para altas viscosidades, para tomar en cuenta viscosidades moderadas. Si se toma $W \rightarrow \infty$ y $R \rightarrow 0$ de tal forma que $J = WP^2$ sea constante, los resultados del método numérico se pueden comparar con los de Chandrasekhar [1961] para la columna cilíndrica estática. La tabla 4.1 muestra el número de onda de máxima amplificación calculado para $\gamma=0.015$, $R=10^{-4}$ y diferentes valores de J , que coinciden con los de Chandrasekhar y se comparan bien con los valores obtenidos por la fórmula

$$\alpha_m = \frac{0.707}{\left[1 + \left(\frac{9}{2J}\right)^{1/2}\right]^{1/2}} \quad (4.49)$$

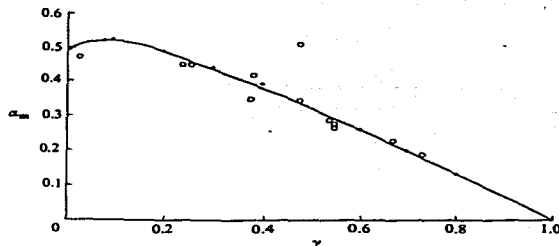


Figura 4.6. Número de onda de máxima amplificación para $R = 10^{-9}$ y $W = 10^9$. Valores teóricos — y experimentales \circ de Goren [1962]; numéricos del presente trabajo \bullet .

dada por Weber [1931].

Como se señaló en la sección 2.3, Goren [1962] estudia la estabilidad de una película cilíndrica inicialmente en reposo C que corresponde a $R=00$. Sus cálculos y sus resultados experimentales cubren un amplio rango de γ , por lo que son un buen patrón de comparación para el método numérico de este trabajo. La figura 4.6 muestra los números de onda de máxima amplificación α_m , como función de γ , calculados por Goren y los obtenidos con el presente método. Prácticamente no hay diferencia entre ellos. También se indican los resultados experimentales de Goren convertidos a la presente nomenclatura, mismos que aportan una confirmación experimental del análisis lineal de estabilidad en este límite ($R=00$).

Las figuras 4.7 y 4.8 muestran la diferencia entre las curvas

Tabla 4.1

Número de onda de máxima amplificación con $\gamma = 0.015$,
 $R = 10^{-4}$ para diferentes $J = W R^2$.

J	α_m
1	0.41
2	0.45
4	0.50
8	0.53

de estabilidad neutra calculadas con las aproximaciones de Lin y Liu [1975] y Krantz y Zollars [1976] (sección 4.1 de esta tesis) respectivamente, y los presentes resultados numéricos. La diferencia se acentúa cuando se incrementa el número de Reynolds, y por lo tanto el número de onda crítico. También hay una mayor diferencia al incrementarse el espesor relativo de la película (bajos β). Para grandes valores de β , como en el experimento de Binnie [1957] donde $\beta = 118.64$ y $W = 597$, la diferencia prácticamente desaparece.

4.3.2. Resultados nuevos para la película cilíndrica.

El método numérico tiene la ventaja de que permite estudiar la estabilidad del flujo para cualquier valor de los parámetros R , W y γ . Si R excede a 2000 aproximadamente hay necesidad de usar un método de ortogonalización de las soluciones de la ecuación de Orr-Sommerfeld en el interior del intervalo de integración (Gram-Schmidt por ejemplo), para evitar que se hagan paralelas entre sí, y que no formen ya un espacio de soluciones. Pero hay que señalar que para tan altos números de Reynolds, las no linealidades juegan un papel muy importante en una región muy cercana a la línea de inicio de las ondas (ver próximo capítulo), y la teoría lineal ya no es válida. Para el rango de números de Reynolds considerados en este estudio no se requiere de la mencionada ortogonalización.

La figura 4.9 muestra las curvas de amplificación constante para $W=1$ y $\gamma = 0.5$. Para $R>0$ los números de onda mayores que 0.8 se amplifican. Nótese que, para un α dado, el factor de amplificación crece con R . La figura 4.10 muestra el número de onda crítico α_c como función de R para diferentes γ . Se ve que α_c se incrementa al incrementarse la curvatura de la película, es decir, cuando γ disminuye.

Las figuras 4.11 y 4.12 muestran el número α_m y la celeridad c_{rm} de la onda de máxima amplificación como función del número de Reynolds, para $W=1$ y diferentes γ . Dicho número de onda se incrementa también al incrementarse la curvatura. Así, para la misma velocidad superficial y espesor de la película en la columna cilíndrica y en la placa plana, se tendrán inestabilidades de menor longitud de onda en el caso cilíndrico. Los cambios en el número de Reynolds producen un efecto ambiguo, si los demás parámetros se mantienen constantes. La figura 4.11 muestra que para $\gamma < 0.25$, un incremento en R implica un incremento en α_m . Para γ mayores sucede justamente lo opuesto. La celeridad crece con el radio de curvatura para todo Reynolds.

En las figuras 4.13 y 4.14 se estudian los efectos de γ en la onda más inestable. La influencia de la tensión superficial es curiosa. Para $\gamma < 0.25$ al aumentarse el número de Weber se produce un incremento en el número de onda de máxima amplificación. Para mayores γ el efecto es el opuesto.

En la figura 4.15 se ilustra el efecto del número de Weber en el número de onda y en el factor de amplificación para la máxima amplificación. Para $W \rightarrow \infty$, α_m tiende a un valor asintótico α_m^* . Este valor se presenta en las tablas 4.2 y 4.3 como función de R y de γ . Nótese que en este límite las variaciones son pequeñas con R , pero grandes con γ .

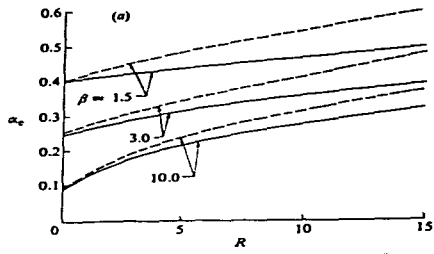


Figura 4.7. Comparación de los resultados de Lin y Liu [1975] - - - - con los del presente trabajo ——— para $W = 100$.

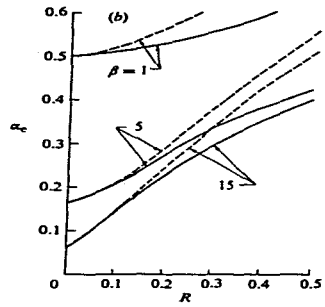


Figura 4.8. Comparación de los resultados de Krantz y Zollars [1976] - - - - con los del presente trabajo ——— para $(\sigma/\rho)(2/gv^4)^{1/3} = 2.0$.

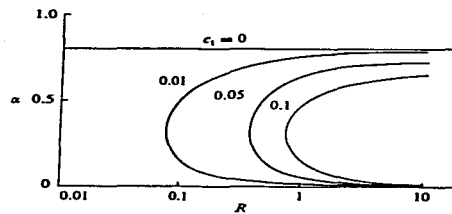


Figura 4.9. Curvas de amplificación constante para $W = 1$ y $\gamma = 0.5$.

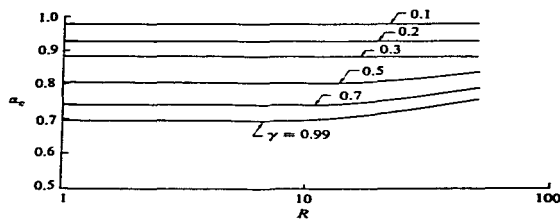


Figura 4.10. Curvas de estabilidad neutra para $W = 1$.

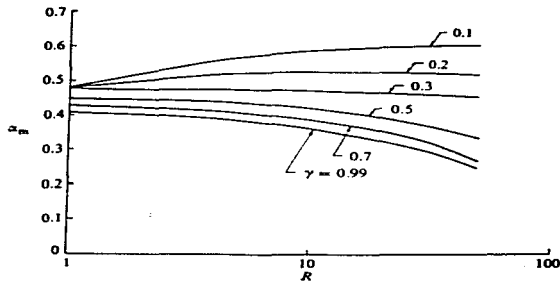


Figura 4.11. Número de onda α_m de máxima amplificación para $W = 1$.

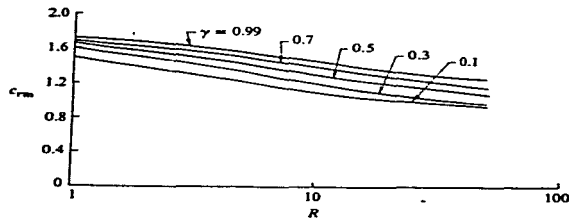


Figura 4.12. Celeridad c_{fm} de máxima amplificación para $W = 1$.

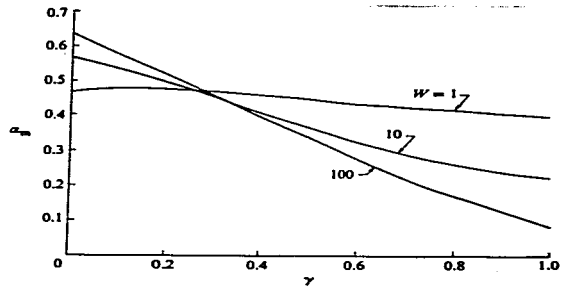


Figura 4.13. Número de onda α_m de máxima amplificación para $R = 1$.

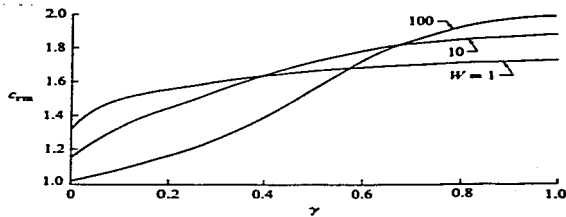


Figura 4.14. Celeridad c_{fm} de máxima amplificación para $R = 1$.

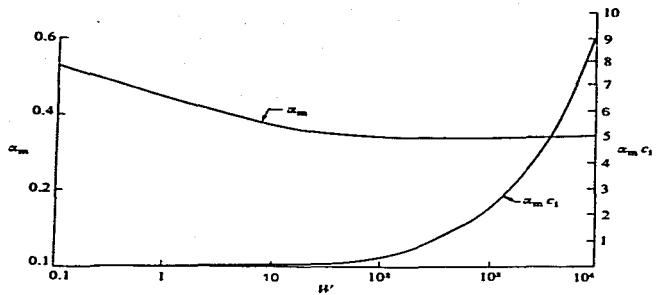


Figura 4.15. Número de onda α_m y factor de amplificación $\alpha_m c_i$ de máxima amplificación para $P = 1$ y $\gamma = 0.5$.

Tabla 4.2

Valor asintótico de α_m cuando $W \rightarrow \infty$. para $\gamma = 0.5$ y diferentes R .

R	α_m^*
1	0.34
5	0.35
10	0.35
20	0.35
40	0.35

Tabla 4.3

Valor asintótico de α_m cuando $W \rightarrow \infty$. para $R = 1$ y diferentes γ

γ	α_m^*
0.9	0.08
0.7	0.21
0.6	0.28
0.5	0.34
0.3	0.46
0.1	0.62
0.01	0.68

CAPITULO 6

ESTUDIO EXPERIMENTAL

Como se ha señalado en los capítulos 2 y 4, existen pocos estudios experimentales donde se cuantifica el efecto de la curvatura de la película en las características de las ondas superficiales a pesar de que muchos de los experimentos proyectados para comprobar las teorías de estabilidad de películas planas se han realizado en columnas cilíndricas. Este es el caso en los trabajos de Kapitza (1949), Binnie (1957), Jones y Whitaker (1966) y Alekseenko et al (1965) entre otros. En sus experimentos el espesor de la película es mucho menor que el radio del tubo ($\gamma \approx 10$), de tal manera que la aproximación de placa plana es bastante satisfactoria, como se ha demostrado en el capítulo anterior. Sin embargo, para películas relativamente gruesas, por ejemplo las obtenidas con aceites en columnas de enfriamiento, o en procesos de recubrimiento de alambres y fibras, la curvatura puede ser un parámetro de suma importancia, como se demuestra teóricamente en la sección 4.3.2.

Goren (1962), en sus experimentos con alambres de pequeño diámetro, logra cubrir un amplio rango de curvaturas ($0.02 \leq \gamma \leq 0.725$), pero con la restricción de número de Reynolds nulo, ya que su película es estacionaria. Existe entonces la necesidad de disponer de resultados experimentales más completos para su comparación con la teoría, en particular, con la teoría lineal desarrollada en el presente trabajo.

Por otro lado, la tentativa de Shlang y Sivashinsky (1982) de correlacionar el número de ondulaciones en la dirección transversal al movimiento con un cierto parámetro de curvatura ($\beta/w^{1/2}$), requiere de apoyo experimental.

En este capítulo se presentan valores experimentales de la

celeridad y del número de onda y se comparan con los obtenidos mediante el método numérico, para diferentes valores de los parámetros pertinentes. También se presentan los resultados de un estudio fotográfico de la película en el que se comparan satisfactoriamente el número de ondulaciones observado con el que predicen Shlang y Sivashinsky [1982].

5.1 EQUIPO EXPERIMENTAL.

Las películas descendentes cilíndricas investigadas se formaban haciendo escurrir algunos líquidos por la parte exterior de tubos de diferentes diámetros. Es muy importante lograr una película homogénea en todo el perímetro de los tubos, pues de otra manera parámetros tales como el número de Reynolds, de Weber y el de curvatura, variarían en la dirección transversal al movimiento, sucediendo lo propio con las características de las ondas. Para este propósito se aprovecharon algunos distribuidores de flujo ideados con anterioridad cuyas configuraciones básicas pueden consultarse en Pierson y Whitaker [1977].

Para la formación de las películas en tubos de diámetro relativamente grande se diseñó y construyó el equipo experimental mostrado en la figura 5.1. El líquido contenido en el tanque de carga constante 1 pasa a través del conducto 2 a la parte inferior del tubo 4, por cuyo interior fluye hasta alcanzar el tope superior, donde rebosa para formar así la película líquida. El gasto se regula con la válvula 3. El líquido se recolecta en el pequeño depósito 5, para de ahí pasar a la probeta de aforo 6, de donde se lleva nuevamente al tanque de carga constante.

Para lograr una película homogénea se requiere tanto de un buen acabado en el extremo superior del tubo como de su alineación lo más cercana posible con la vertical. El

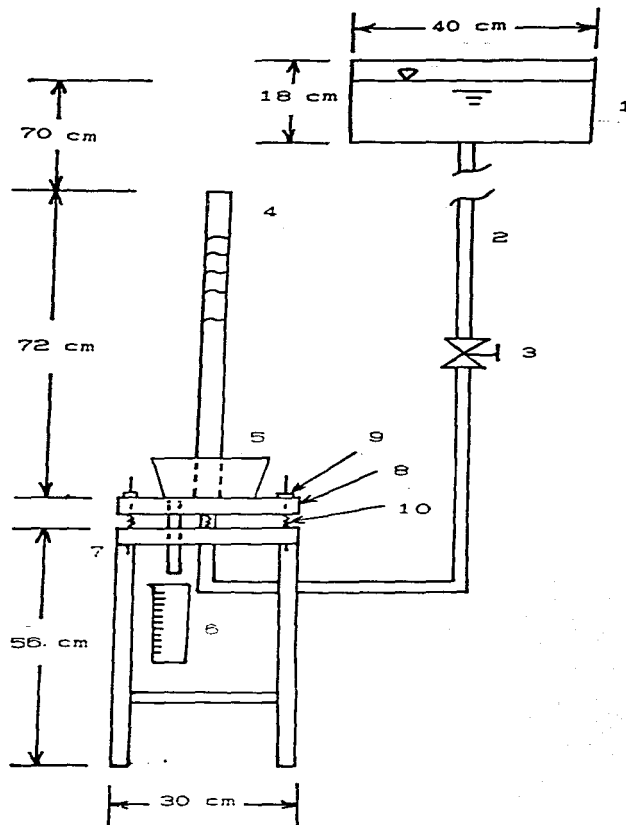


Figura 5.1. Equipo experimental para pequeñas curvaturas.

acabado que dió mejores resultados fue un bisel a 45° en el interior de dicho extremo. La alineación vertical se logra, en primer lugar, nivelando la mesa 7. Después viene un ajuste fino que se obtiene nivelando la plataforma 8 con los cuatro tornillos 9, que presionan a los resortes 10. Se compara la verticalidad del tubo con la de una plomada. Sin embargo, como se verá posteriormente, la mejor prueba de dicha verticalidad será la obtención de ondas uniformes, toroidales (de crestas perpendiculares al movimiento) en la línea de inicio.

Las películas en tubos de diámetro relativamente pequeño se forman con el equipo ilustrado en la figura 5.2. El líquido pasa del tanque de carga constante 1, a través del conducto 2, al depósito 4. En la parte inferior de este depósito se tiene un orificio y un canal circular por los cuales se pasa el tubo 5. Este tubo se coloca verticalmente en el marco 6 mediante una cuerda que se fija previamente en su interior y que se tensa con el tornillo 7. El extremo inferior de dicha cuerda tiene un cierto grado de libertad para permitir la alineación vertical. El centrado del tubo en el canal circular se logra moviendo el depósito 4, que se fija con los tornillos 8. De esta manera, al pasar el líquido por el canal se distribuye alrededor del tubo, formando así la película. El ajuste se efectúa mediante la recolección del líquido en la probeta graduada 9, de donde se lleva nuevamente al tanque. El gasto se regula con la válvula 3 hasta que el nivel del líquido es constante en el depósito 4.

Para películas de pequeña curvatura se usan dos tubos de aluminio de 2.5 y 1.0 cm de diámetro exterior, respectivamente y de 72.0 cm de longitud, mientras que para películas de curvatura grande se usa un tubo de vidrio de 0.5 cm y una cuerda de guitarra de 1.0 mm de diámetro exterior respectivamente y de 45.0 cm de longitud.

Como líquido de trabajo se usó en un principio el agua,

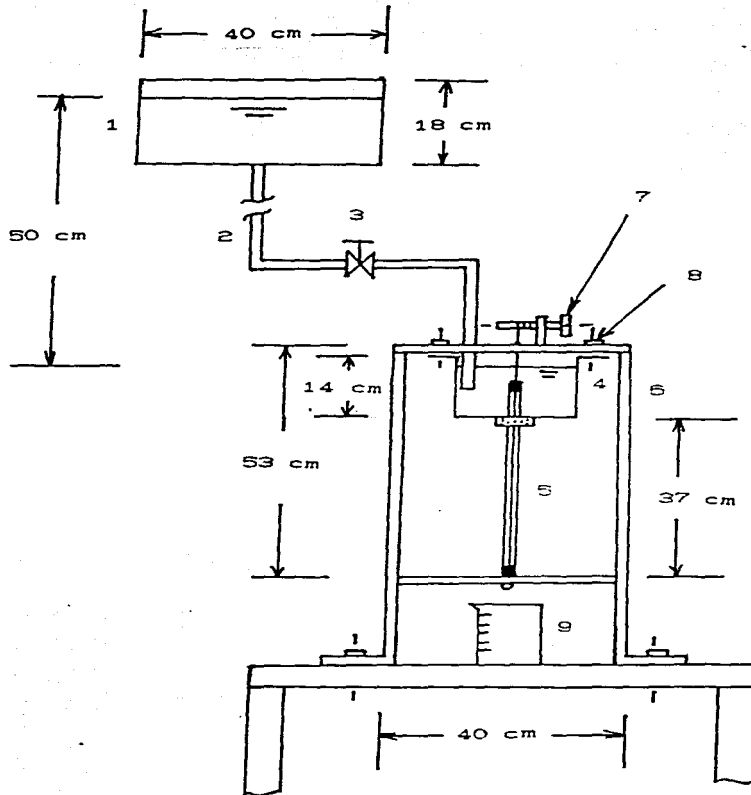


Figura 5.2. Equipo experimental para grandes curvaturas.

pero las películas que se obtuvieron en los tubos grandes fueron tan delgadas que los resultados prácticamente eran los mismos que para placas planas (ver Solorio et al [1987]). Reducir el número de Reynolds por debajo de 30, para los tubos pequeños, resulta muy difícil debido a la baja viscosidad del agua.

Se optó entonces por usar un líquido más viscoso, seleccionándose un aceite comercial para motor SAE 40, por su bajo costo. La viscosidad de dicho aceite se varía agregando diesel hasta lograr los espesores de película y números de Reynolds deseados. Los porcentajes usados varían desde 80% de aceite y 20% de diesel hasta 50% de aceite y 50% de diesel. Esto modifica la viscosidad entre 0.055 kg/m.s y 0.170 kg/m.s aproximadamente. Por supuesto el valor correcto depende de la temperatura, que varía entre 10° C y 20° C en el laboratorio.

La viscosidad μ se mide usando un viscosímetro Brookfield modelo RVF, y para cada proporción aceite-diesel se obtiene una tabla de variación de la viscosidad con la temperatura.

La densidad ρ de la mezcla se determina pesando una muestra de volumen conocido con una balanza analítica. Su valor varía entre 850 y 870 kg/m³.

Para medir la tensión superficial se construyó un estalagmómetro usando una jeringa comercial de cristal, con pivote metálico. Dicho pivote se tornó con un torno de relojería hasta lograr un fino acabado y un diámetro exterior de 4.04 mm. En principio, el peso de la gota de mayor tamaño que es capaz de equilibrarse en el pivote es numéricamente igual a la fuerza de tensión superficial; pero no todo el peso se libera al caer la gota, y la tensión superficial para vez actúa verticalmente. Para corregir los errores que introducen estos factores se mantiene un período de goteo alto (un minuto aproximadamente), y se usa la curva de corrección dada por

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Davies y Rideal (1963). Se cuenta con un número de gotas en un volumen conocido (lo marca la pirneta) con lo que se puede determinar el volumen de una gota, que multiplicado por el peso específico del líquido da el peso de dicha gota. Se midieron las tensiones superficiales del agua destilada y del mercurio y se compararon con los valores dados en la literatura, obteniéndose una diferencia menor al 5 %, por lo que se supone que las mediciones de este parámetro son confiables con el dispositivo construido. La tensión superficial de la mezcla aceite-diesel es prácticamente independiente de la concentración y de la temperatura, cuando menos dentro del rango de temperaturas en que se hicieron los experimentos. El valor que se usa en los cálculos es de $\sigma = 0.033 \text{ N/m}$.

El espesor constante de la película se mide directamente con un micrómetro, al que se le pega una aguja en uno de sus extremos. Dicho micrómetro se monta en un soporte adecuado y se toma la lectura cuando la aguja toca el tubo sin escurrimiento. Después se permite que el líquido fluya y se toma la lectura cuando la aguja apenas toca el líquido. La diferencia de las dos lecturas da el espesor de la película.

Los resultados de la medición del espesor h_0 se comparan con los que predice la teoría de la sección 3.2, una vez que se evalúa el gasto con el perfil (3.10). Fulford (1964) hace estos cálculos y llega a la siguiente ecuación que relaciona el gasto Q con h_0 .

$$Q = \frac{2\pi a g h_0^3}{3\nu} \left[1 - \frac{h_0}{a} + \frac{3}{20} \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 - \frac{1}{40} \left(\frac{h_0}{a} \right)^3 + \dots \right] \quad (5.1)$$

Resolviendo esta ecuación numéricamente, usando el método

de Newton-Raphson y suponiendo el gasto conocido, se obtiene un valor teórico de h_0 . Después de realizar varias mediciones se notó que la diferencia entre el valor teórico y el experimental cae en todos los casos dentro del error experimental permisible (en este caso se tiene $\pm 5\%$ del valor teórico), por lo que resulta más cómodo disponer de un programa que evalúe h_0 para cada gasto que medir directamente con micrómetro. Esto es lo que se hace en el presente trabajo.

Para determinar la frecuencia, la celeridad y la longitud de las ondas cerca de la línea de unicio se usa el arreglo óptico mostrado esquemáticamente en la figura 3.3. El rayo laser 2 se divide en dos rayos perpendiculares mediante el espejo semirreflejante 3. Con la ayuda del espejo pulido 4 la dirección del rayo superior se cambia de tal forma que se hace paralelo al inferior. La dirección de estos rayos es tal que son tangentes al tubo 5 cuando no existe flujo, y chocan perpendicularmente en los fototransistores 6, produciendo un voltaje que es proporcional a la intensidad del rayo. Si se tiene flujo, y se pasan los rayos por la zona donde existen ondas superficiales, se produce una desviación de dichos rayos que depende de la pendiente de las ondas. Esto produce un cambio en la intensidad de la luz que recibe el fototransistor, y por lo tanto, un cambio en el voltaje de salida. Así pues, el voltaje obtenido oscila con la misma frecuencia que se tiene en las ondas. Esto se demuestra usando una luz estroboscópica en la zona donde las ondas son más o menos ordenadas.

Con un solo rayo se puede obtener la frecuencia, pero para obtener la celeridad, y con ello la longitud de onda de la ecuación $\lambda = c/f$, es necesario correlacionar la señal medida en dos localidades diferentes, separadas una distancia conocida d .

El voltaje producido por cada fototransistor es amplificado en 7 y grabado en 8 para posteriormente ser procesado en el

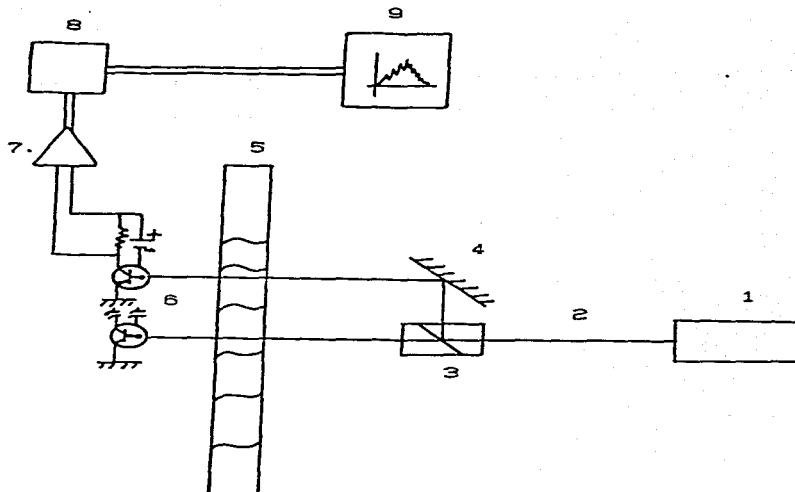


Figura 5.3. Arreglo óptico para medir las propiedades de las ondas.

analizador de espectros 9. Este analizador proporciona el espectro de amplitudes (raíz cuadrada del espectro de potencias) para cada señal. La celeridad se obtiene de la correlación cruzada de las dos señales de la manera siguiente:

Considerando que las dos señales procedentes de los dos fototransistores son de naturaleza estocástica, su procesamiento involucra las técnicas usuales en el análisis de procesos estocásticos, principalmente la evaluación de las densidades espectrales de potencia y cruzadas. Suponiendo que el proceso es estacionario y ergódico, las

funciones de autocorrelación y correlación cruzada para las dos señales $V_i(t)$, $i = 1, 2$, están dadas por (ver Brauner y Maron (1982))

$$R_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_1(t) V_1(t+\tau) dt \quad (5.2)$$

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_1(t) V_2(t+\tau) dt \quad (5.3)$$

Dado que el espesor es estacionario con respecto a la posición, la autocorrelación es idéntica en ambas localidades.

La función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia G_{11} se relacionan mediante la transformada de Fourier de la siguiente manera

$$G_{11}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (5.4)$$

Para las funciones de correlación cruzada y la densidad espectral cruzada G_{12} existe la relación

$$G_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (5.5)$$

donde el ángulo de fase entre las señales está dado por

$$\theta_{12}(f) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im} \left[G_{12}(f) \right]}{\text{Re} \left[G_{12}(f) \right]} \right\} \quad (5.5)$$

Los analizadores de señales existentes en el mercado generalmente proporcionan los valores de las variables antes definidas. La densidad espectral de potencia da una idea de la composición general de frecuencias de cada señal en términos de la densidad espectral de su valor cuadrático medio (energía, ver Doebelin [1965]), mientras que la densidad espectral cruzada se usa para determinar el tiempo requerido para que una misma onda pase por las dos localidades en estudio. Dicho tiempo τ , la celeridad de la onda c_r y la separación de los sensores d se encuentran relacionados por

$$\tau = \frac{\theta_{12}(f)}{2\pi f} = \frac{d}{c_r} \quad (5.6)$$

o

$$c_r = \frac{2\pi d}{\theta_{12}(f)} f \quad (5.7)$$

donde $\theta_{12}(f)$ se obtiene de la ecuación (5.5) o, como en el presente trabajo, directamente del analizador de espectros.

La ecuación (5.7) implica que la celeridad de una onda de frecuencia dada se puede obtener de la pendiente de la gráfica del ángulo de fase θ_{12} como función de la frecuencia. Como se verá posteriormente, el ángulo de fase varía linealmente con la frecuencia (ver figura 5.6), comprobándose así que las señales V_1 y V_2 están interrelacionadas por una celeridad promedio de propagación, $V_2(t) = V_1(t + d/c_r)$.

El generador de rayo laser, de marca Spectra Physics, es de Helio-Neón y tiene una potencia de 4 mW. Los fototransistores empleados son de tipo comercial, muy económicos, con número de referencia ST8005T. Se alimentan con una fuente de poder de Instrumenta de México A.C., modelo FP-Labi, con un voltaje constante de 2 volts. Se les conecta una resistencia de polarización de 1.7 k Ω en serie.

Los amplificadores son de marca Honeywell, modelo Accurata 122 DC, y se operan con una ganancia aproximada de 200. Las señales se graban en una grabadora Hewlett-Packard modelo 3964A de cuatro canales (aquí sólo se usan dos) durante un minuto aproximadamente, con una velocidad de grabación de 9.52 cm/s. Finalmente se procesan en un analizador de espectros, también Hewlett-Packard, modelo 3562A para obtener el espectro de amplitudes de cada señal y el ángulo de fase entre las dos señales.

5.2 COMPARACION DE LOS RESULTADOS NUMERICOS CON LOS EXPERIMENTALES.

Los resultados numéricos de la teoría lineal se comparan con los obtenidos experimentalmente en la región relativamente ordenada cercana a la línea de inicio de las ondas (ver figura 1.1). Se supone que la onda inestable de máxima amplificación según la teoría lineal, de longitud y frecuencia bien definidas, es la que dicta las características de las ondas observadas.

En el cálculo de la celeridad experimental se toma la frecuencia con máxima amplitud según los espectros, pero debe notarse que existe todo un rango de frecuencias con amplitud del orden de la máxima, que se ensancha al aumentar el número de Reynolds. Por ejemplo, la figura 5.4 ilustra el espectro de un flujo con $R=0.99$ que muestra un pico muy marcado en $f=3.6$ Hz, pero en cambio, en la figura 5.5 donde $R=17.29$, el espectro se extiende mucho a los

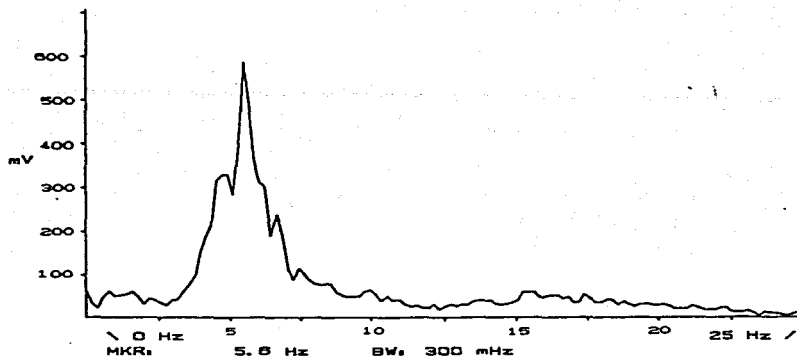


Figura S.4. Espectro de amplitudes para $R = 0.99$, $W = 0.35$ y $\gamma = 0.292$.

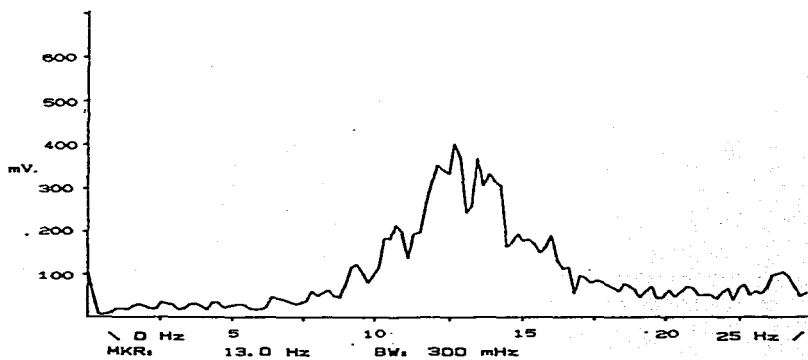


Figura S.5. Espectro de amplitudes para $R = 17.29$, $W = 0.234$ y $\gamma = 0.175$.

lados de $f = 13.0$ Hz que es la frecuencia de amplitud máxima. Esto da una idea del grado de irregularidad del proceso de formación de las ondas. Sin embargo, dentro de la región de estudio, los espectros son prácticamente iguales en diferentes localidades para el mismo R.

En la tabla S.1 se muestran los valores adimensionales teóricos y experimentales del número de onda α_m y de la celeridad c_{rm} , como función del número de Reynolds R, del número de Weber W y del parámetro de curvatura γ . Se ordenan atendiendo al orden creciente de γ . Se incluye el cociente del valor experimental y el valor teórico (numérico) para α_m y c_{rm} .

La celeridad c_{rm} se obtiene usando la fórmula (S.7) y evaluando $f \theta_{12}$ de las gráficas de frecuencia contra el ángulo de fase. La figura S.6 presenta una de dichas gráficas, donde se puede observar claramente la dependencia lineal entre f y θ_{12} (el analizador 3582A da directamente el ángulo de fase para cada frecuencia con la tecla Phase XFRFCTN).

El número de onda se obtiene de la ecuación

$$\alpha_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} h_0 \quad (S.8)$$

donde $\lambda_m = c_{rm} / f_m$ siendo f_m la frecuencia con máxima amplitud como se señaló anteriormente.

El valor absoluto de la diferencia entre los valores experimental y teórico del número de onda y de la celeridad es menor en todos los casos al diez por ciento del valor teórico, lo que cae dentro del rango del error experimental esperado. Debido a que en las figuras 4.9-4.15 se mantiene el Reynolds o el Weber constantes, no es posible incluir en ellas más de un punto de los mostrados en la tabla S.1.

TABLA 5.1

Comparación de los resultados numéricos con los
experimentales para la película descendente cilíndrica.

R.	γ	W	α_{me}	α_{mt}	c_{re}	c_{rt}	$\frac{\alpha_{me}}{\alpha_{mt}}$	$\frac{c_{re}}{c_{rt}}$	ϵ	Pto.	Conf. m=
17.29	0.175	0.234	0.51	0.56	1.23	1.13	0.91	1.09	0.438	1	0
13.15	0.163	0.323	0.51	0.56	1.28	1.16	0.91	1.10	0.395	2	0
5.14	0.216	1.034	0.52	0.52	1.40	1.29	1.00	1.09	0.271	3	0
3.92	0.227	1.460	0.53	0.51	1.38	1.33	1.04	1.04	0.244	4	0
0.99	0.292	9.350	0.46	0.46	1.54	1.54	1.04	1.00	0.135	5	0
12.77	0.577	0.226	0.46	0.50	1.37	1.28	0.92	1.07	2.880	6	1
9.30	0.600	0.367	0.48	0.48	1.25	1.34	1.00	0.94	2.470	7	1
7.35	0.616	0.527	0.47	0.46	1.26	1.40	1.02	0.90	2.210	8	1
3.97	0.656	1.360	0.44	0.40	1.43	1.56	1.10	0.92	1.650	11	0
2.83	0.680	2.310	0.40	0.37	1.50	1.65	1.08	0.91	1.400	12	0
4.98	0.772	0.797	0.42	0.42	1.50	1.52	1.00	0.99	3.600	13	2
1.56	0.767	2.960	0.36	0.34	1.60	1.76	1.06	0.91	2.140	9	1
3.33	0.794	1.520	0.40	0.38	1.47	1.63	1.05	0.90	3.120	14	2
2.57	0.806	2.280	0.37	0.36	1.64	1.69	1.03	0.97	2.760	10	1
2.91	0.892	1.240	0.41	0.39	1.55	1.65	1.05	0.94	7.480	15	>2
2.65	0.896	1.440	0.36	0.38	1.58	1.67	0.95	0.95	7.140	16	>2

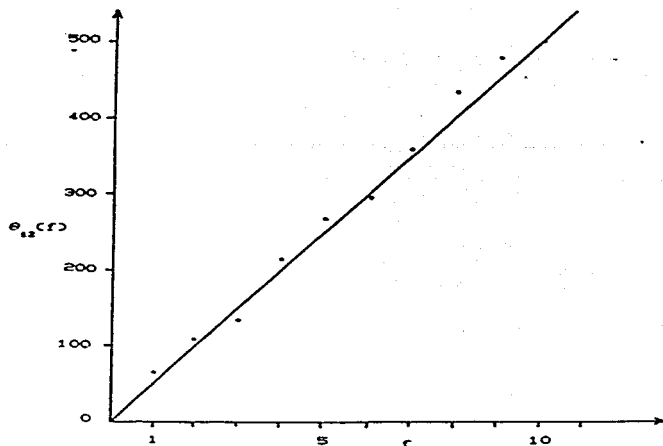


Figura 5.6. Gráfica del ángulo de fase θ_{12} contra la frecuencia f para $R = 2.65$, $W = 1.44$ y $\gamma = 0.896$.

Dicha tabla se elabora entonces sólo con el propósito de validar el modelo teórico y la solución numérica. Una vez alcanzado este objetivo se tendrá la confianza suficiente en el método numérico, de tal suerte que se puede decir que las tendencias de α y ϕ con los parámetros R , W y γ señaladas en la sección 4.3.2 son correctas.

5.3 ESTUDIO FOTOGRÁFICO DE LA CONFIGURACION DE LAS ONDAS.

Con el propósito de comprobar la tentativa de Shlang y Sivashinsky [1962] de correlacionar el número de ondulaciones en la dirección transversal al flujo m con el parámetro de curvatura $\xi = R/WD^{1/2}$, se ha llevado a cabo un estudio fotográfico de la película descendente, donde además se miden todos los parámetros pertinentes, incluidos el número de onda y la celeridad, teniéndose así una forma experimental alternativa de obtener aproximadamente los

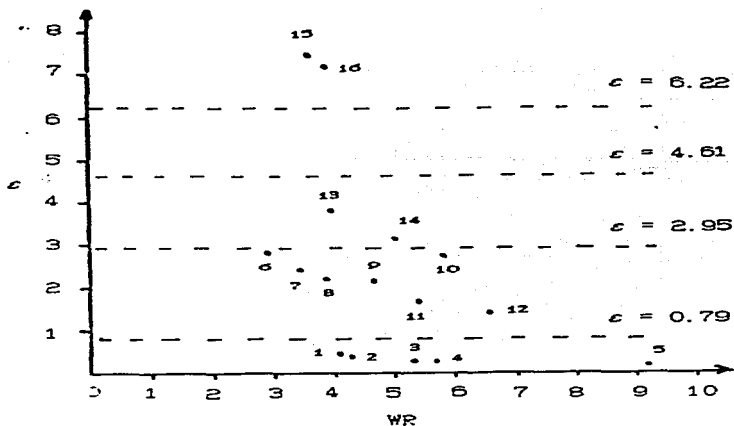


Figura 5.7. Configuraciones obtenidas en el presente trabajo (indicadas en la tabla 5.1) comparadas con las que predicen Shlang y Sivashinsky (1982).

valores dados en la tabla 5.1.

Para cada conjunto de valores de R , W y γ se calcula el valor de c y se toma una serie de 12 fotografías (diapositivas) para observar la configuración de las ondas. Las longitudes de onda se miden directamente de la proyección en una pantalla, obteniéndose después el promedio aritmético de las longitudes de las primeras dos ondas observadas en las 12 fotos. La frecuencia que se toma es la de máxima amplitud en el espectro y la celeridad se evalúa con $c_r = \lambda f$.

En la tabla 5.1 se indican los valores de c y la configuración observada, así como los números de los puntos que aparecen en la figura 5.7, en la que se grafica el producto WR contra c . En esta figura también se señalan los límites que, de acuerdo con Shlang y Sivashinsky (1982).

separan las regiones correspondientes a las diferentes configuraciones. Según esto, cuando

$$\varepsilon < \sqrt{10}/4 \left[2n^2 - 1 + 2n(n^2 - 1)^{1/2} \right]^{1/2} = f(n) \quad (5.9)$$

la perturbación inestable no puede contener un número mayor a n ondulaciones en la dirección transversal. Así, para $0 < \varepsilon < 0.79$ ($f(1) = 0.79$) se tendrán las ondas en forma de anillos toroidales que descienden sin ondulaciones transversales como se muestra en la figura 5.8.a. es decir, se obtendrán ondas con $m=0$. Para $0.79 < \varepsilon < 2.95$ ($f(2) = 2.95$) los anillos presentan una ondulación transversal, por lo que serán ondas con $m=1$ (figura 5.8.b). Si $2.95 < \varepsilon < 4.61$ ($f(3) = 4.61$) se tendrán dos ondulaciones y serán ondas con $m=2$ (figura 5.8.c), y si ε es aún mayor el flujo se complica considerablemente ($m > 2$).

La figura 5.9 muestra una serie de fotografías correspondientes a algunos de los puntos de la figura 5.7. Por supuesto, sólo se incluye una de las doce que se tomaron para cada punto. Las configuraciones observadas, señaladas en la tabla 5.1 como ya se dijo, presentan una tendencia como la que predice la teoría de Shlang y Sivashinsky [1982] para los diferentes valores de ε . Sin embargo, es difícil señalar los límites experimentales de cambio de configuración en forma precisa, dado que pueden existir ondulaciones transversales que no fácilmente se observan en las fotos o a simple vista.

Tal vez esto haga que los puntos 11 y 12, que teóricamente son de $m=1$ ($\varepsilon = 1.65$ y 1.40 respectivamente), aparezcan en la tabla 5.1 como de $m=0$ (ver figuras 5.9.c y 5.9.d) dando la impresión de que el límite teórico 0.79 es de casi la mitad del experimental. Los puntos 10 y 14 ilustran claramente el cambio de una configuración con $m=1$ (punto 10 con $\varepsilon = 2.76$) a una con $m=2$ (punto 14 con $\varepsilon = 3.12$) como se puede ver en las figuras 5.9.i y 5.9.h. Para este caso la concordancia con la teoría es realmente buena. La

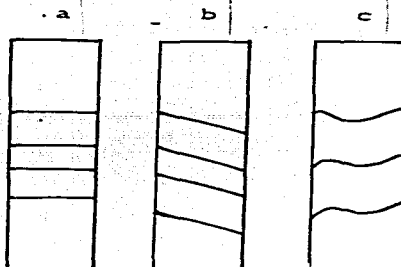


Figura 5.8. Configuraciones posibles.

teoría también predice las configuraciones de los puntos restantes. Los puntos 1-5 tienen flujos con $m=1$; dos de dichos flujos, los correspondientes a los puntos 1 ($\epsilon = 0.44$) y 5 ($\epsilon = 0.13$), se muestran en las figuras 5.9.a y 5.9.b respectivamente. Para los puntos 6-9 se tienen flujos con $m=1$ como los mostrados en las figuras 5.9.f (punto 7, $\epsilon = 2.47$) y 5.9.e (punto 9, $\epsilon = 2.14$). La configuración con $m=2$ aparece de nuevo en la figura 5.9.g (punto 13, $\epsilon = 3.80$) y una configuración con $m \geq 2$, algo compleja, se muestra en la figura 5.9.j (punto 15, $\epsilon = 7.48$).

Debe recordarse que cuando menos la primera onda observada (la más cercana a la línea de inicio) presenta siempre un carácter toroidal ($m=0$), independientemente del valor de ϵ , pero que al avanzar aguas abajo la componente inestable transversal de la perturbación, cuando exista, se manifestará en una distancia que aumenta al disminuir el número de Reynolds. Así por ejemplo, en el flujo de la figura 5.9.e que corresponde a un $R = 1.56$, lo de $m=1$ se observa hasta la quinta onda, mientras que en el flujo de la figura 5.9.g, con $R = 4.98$, lo de $m=2$ se manifiesta en la tercera onda.

En general se puede decir que, en un flujo con un valor de ϵ relativamente alto (mayor que 2.95 por ejemplo), se presenta el siguiente esquema:

Se tiene primero una zona cercana a la línea de inicio donde las ondas son toroidales ($m=0$), aunque su frecuencia y longitud varíen dentro de un cierto rango como ya se dijo: en esta zona se supone válida la teoría lineal. Viene después una segunda zona, tal vez lineal o tal vez aquí ya comiencen a ser importantes las no linealidades, donde las componentes inestables transversales se manifiestan. Le sigue una zona de flujo desordenado, definitivamente no lineal, desde donde las ondas serán acompañadas por pequeñas ondas capilares al frente.

Por último se tienen ondas rodantes, más o menos ordenadas, laminares o turbulentas, separadas por estratos largos que también pueden ser laminares o turbulentos dependiendo de los valores de R y W .

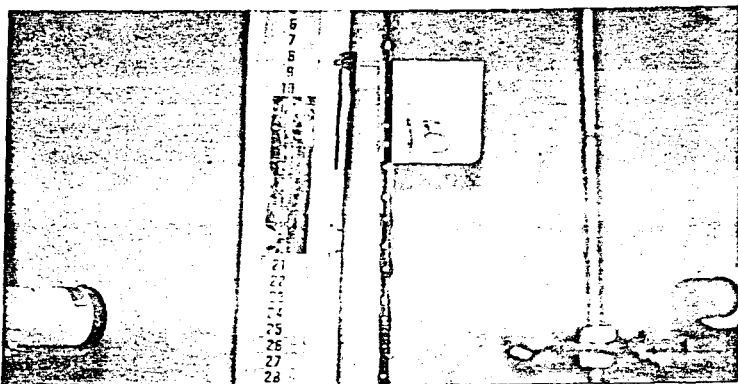


Figura 5.9.A. Punte 1. $P = 17.29$, $K = 0.294$, $\gamma = 0.175$ y $c = 0.436$.

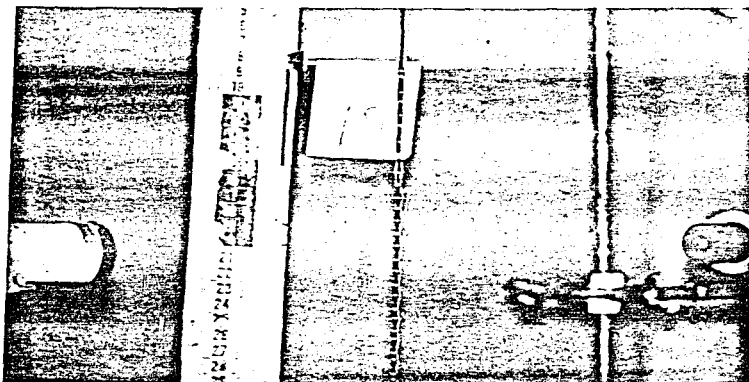


Figura 5.9.B. Punte 2. $P = 0.99$, $K = 9.56$, $\gamma = 0.292$ y $c = 0.135$.

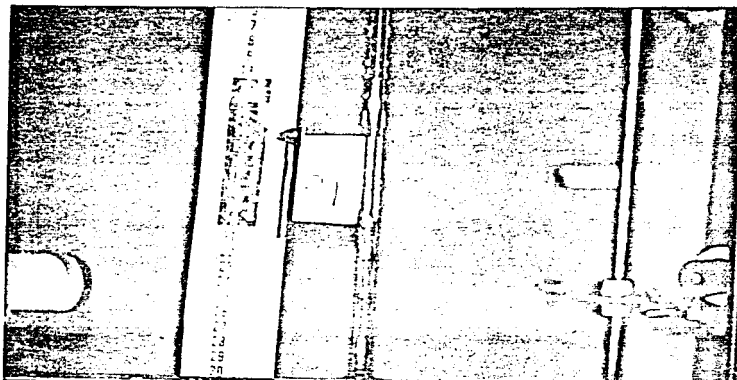


Figura 5.3.2. Punto 11. $F = 1.17$, $K = 1.00$, $\gamma = 0.56$ y $\beta = 1.66$.

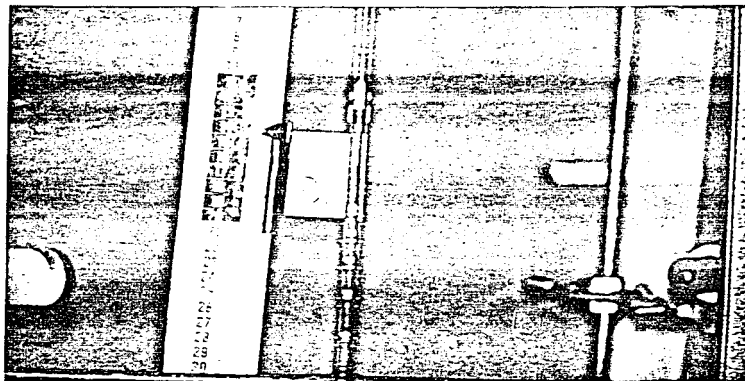


Figura 5.3.4. Punto 13. $F = 0.96$, $K = 0.91$, $\gamma = 0.56$ y $\beta = 1.40$.

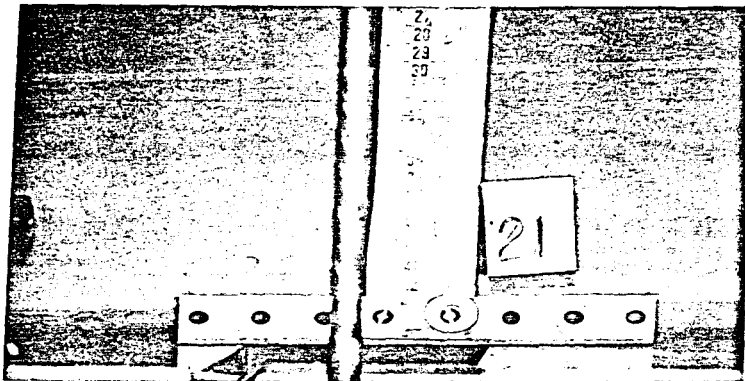


Figura 3.3.11. Punto 6, $F = 1.00$, $W = 0.007$, $y = 0.007$, $z = 0.14$.

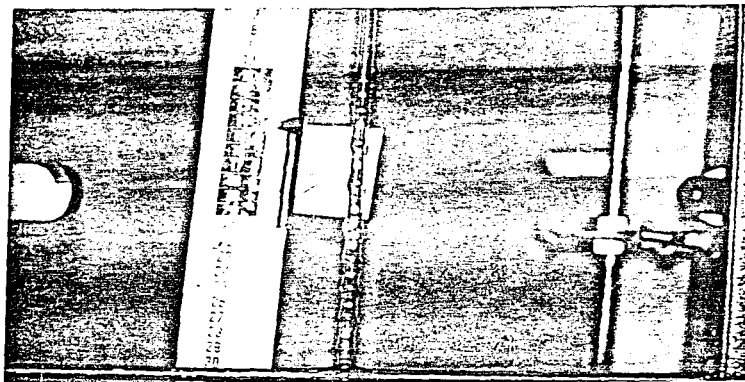


Figura 3.3.12. Punto 7, $F = 1.0$, $W = 0.007$, $y = 0.00$ y $W = 0.47$.



Figura 5.2.3. Filtro 13. $F = 4.16$, $W = 1.077$, $y = 1.773$ y $z = 3.60$.

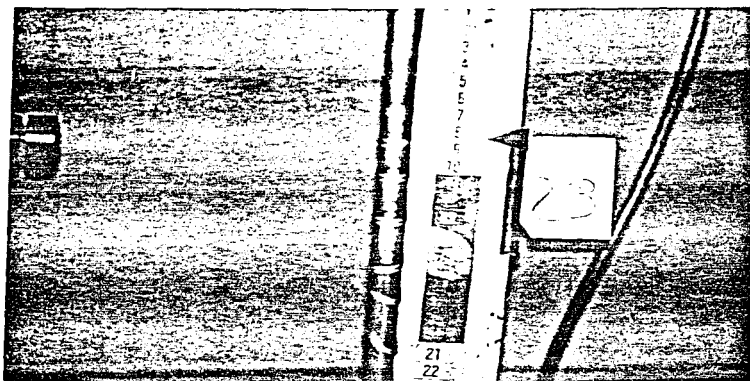


Figura 5.2.4. Filtro 14. $F = 4.25$, $W = 1.051$, $y = 1.784$ y $z = 3.12$.



Figure 7.21. $P = 0.01$, $N = 1.04$, $y = 0.0002$, $x = 0.74$.

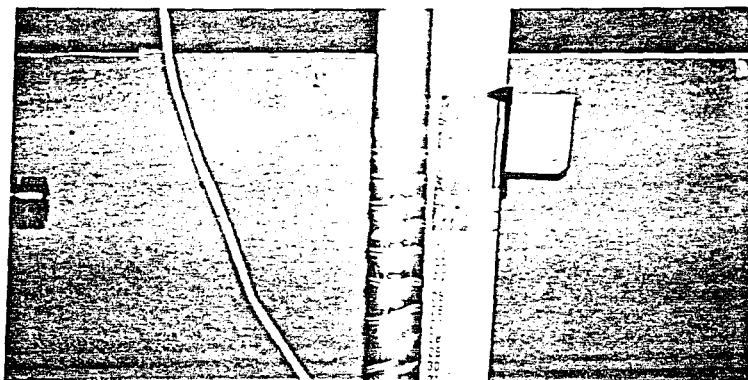


Figure 7.22. $P = 0.01$, $N = 1.04$, $y = 0.0002$, $x = 0.74$.

CAPITULO 6

CONCLUSIONES

Las características de las ondas que se presentan en las películas descendentes dependen de la curvatura.

La teoría lineal de la estabilidad da cuenta de la forma en que se modifican la celeridad y la longitud de onda al variar dicho parámetro. También proporciona un criterio para predecir la forma de las ondas. Todo esto en la región cercana a la línea de inicio.

Para un mismo fluido, si se mantienen la velocidad y el espesor constantes, se tiene que la longitud de las ondas será mayor mientras mayor sea el radio de las columnas. La celeridad también crece si el radio aumenta. La forma de las ondas cambia desde anillos toroidales para radios pequeños, hasta los flujos con varias ondulaciones transversales de dichos anillos cuando el radio es grande.

Si el espesor de la película es pequeño comparado con el radio del tubo, como sucede en muchos experimentos con agua, la teoría de placa plana resulta satisfactoria. Si aumenta el espesor relativo de la película deberán aplicarse los resultados del presente trabajo.

La tensión superficial juega un papel curioso al variar la curvatura si los demás parámetros se mantienen constantes. Para grandes curvaturas ($\gamma > 0.25D$) al aumentar la tensión superficial disminuye la longitud de la onda. Para curvaturas pequeñas ($\gamma < 0.25D$) sucede lo contrario.

La solución numérica muestra el espectro completo de valores característicos. Da el número de onda y la celeridad correspondientes a la máxima amplificación, y prácticamente no tiene restricciones en los valores de los parámetros adimensionales usados. El trabajo computacional

invertido es realmente poco y predice con buena aproximación los valores obtenidos experimentalmente en la región donde se inician las ondas.

El equipo experimental es versátil en cuanto que permite cambiar el radio de los tubos fácilmente, usar fluidos de diferentes viscosidades y variar el gasto dentro de un rango conveniente. Para medir la celeridad y la longitud de onda con el método de deflexión empleado, no se requiere de una electrónica de apoyo complicada y cara, y el procesamiento de la señal se hace en forma directa con el analizador de espectros. Para medir el espesor local instantáneo deberá mejorarse este equipo.

Lejos de la línea de inicio las no linealidades juegan un papel muy importante y el flujo caótico que se observa debe de estudiarse con modelos matemáticos más complicados como el propuesto por Shiang y Sivashinsky (1982). El enfoque clásico debido a Landau (1944) puede predecir el tipo de bifurcación en el punto de estabilidad marginal, pero sus resultados cuantitativos sólo son válidos en una región muy cercana a dicho punto (ver Lin (1989)). Para un estudio más a fondo de la evolución no lineal de las ondas se puede integrar directamente la ecuación de Shiang y Sivashinsky como lo hacen para el caso plano Chen y Chang (1986), o se puede buscar una solución analítica con el método propuesto por Chang (1987). Una tercera alternativa se tendría con la solución numérica de las ecuaciones completas de Navier-Stokes como lo hacen, también para el caso plano, Bach y Villadsen (1984).

REFERENCIAS

- 1.- Agrawal. S.. Spatially growing disturbances in a film. Tesis doctoral. Clarkson College of Technology (1972).
- 2.- Agrawal. S. y Lin. S.P.. Nonlinear spatial instability of a film coating on a plate. J. Appl. Mech.. V 42. 560 (1975).
- 3.- Alekseenko. S.V.. Nakoryakov. V.Ye. y Pokusaev. B.G.. Wave formation on a vertical falling film. AIChE J.. V 31. No 9.1446 (1985).
- 4.- Anshus. B.D. y Goren. S.L.. A method of getting approximate solution to the Orr-Sommerfeld equation for flow on a vertical wall. AIChE J.. V 12. 1004 (1966).
- 5.- Apostol. T.M.. Calculus. John Wiley and Sons. Inc.. 2a. ed.. V 1. (1967).
- 6.- Atherton. P.W.. Studies of the hydrodynamics of a viscous liquid film flowing down an inclined plane. Tesis. Stanford University (1972).
- 7.- Atherton. P.W. y Homsy. G.M.. On The evolution equations for interfacial waves. Chem. Eng. Comm.. V 2. 57 (1976).
- 8.- Bach. P. y Villadsen. J.. Simulation of the vertical flow of a thin, wavy film using a finite-element method. Int. J. Heat and Mass Transfer. V 27. No 6. 815 (1984).
- 9.- Batchelor. G.K.. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press. Cambridge. (1967).
- 10.- Bellman. R.T.. Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems. Elsevier. New York (1965).

- 11.- Benjamin. T.B., Wave formation in laminar flow down an inclined plane. J. Fluid Mech., V 2. 554 (1957).
- 12.- Benney. D.J., Long waves in liquid films. J. of Math. and Phys., V 45. 150 (1966).
- 13.- Serbente. C.P. y Ruckenstein. E., AIChE J., V 14. 772 (1968).
- 14.- Binnie. A.M., Experiments on the onset of wave formation on a film of water flowing down a vertical plate. J. Fluid Mech., V 2. 551 (1957).
- 15.- Brauner. N. y Maron. D.M., Characteristics of inclined thin films. waviness and the associated mass transfer. Int. J. Heat Mass Trans., V 25. 99 (1982).
- 16.- Brock. R.R., Periodic permanent roll waves. J. Hydraulics Div., ASCE. V 96. 2565 (1970).
- 17.- Conte. S.D., Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach. 3a ed., 120 (1980).
- 18.- Currie. I.G., Fundamental Mechanics of Fluids. McGraw-Hill. (1974).
- 19.- Chandrasekhar. S., Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Clarendon Press. Oxford. (1961).
- 20.- Chang. H-C., Nonlinear waves on liquid film surfaces - I Flooding in a vertical tube. Chem. Eng. Sci., V 41. No 10. 2463 (1986).
- 21.- Chang. H-C., Evolution of nonlinear waves on vertically falling films- a normal form analysis. Chem. Eng. Sci., V 42, No 3. 515 (1987).

- 22.- Chen, L-H. y Chang, H-C..Nonlinear waves on liquid film surfaces- II. Bifurcation analysis of the long-wave equation. Chem. Eng. Sci.,V 41. No 10. 2477 (1986).
- 23.- Chu, K.J. y Dukler, A.E.. Statistical Characteristics of thin, wavy films: Part II Studies of the substrate and its wave structure. AIChE J., V 20. No 4. 695 (1974).
- 24.- Davey, A.. A simple numerical method for solving Orr-Sommerfeld problems. Q. Jl Mech. Appl. Math., V 26. No 4. 401 (1973).
- 25.- Davies, J.T. y Rideal, E.K.. Interfacial Phenomena. Academic Press. (1963).
- 26.- De Bruin, G.L.. Stability of a layer of liquid flowing down an inclined plane. J. of Eng. Math., V 8. No 3. 259 (1974).
- 27.- Doebelin, E.O.. Measurement Systems: Application and Design. McGraw-Hill. (1968).
- 28.- Dressler, R.F.. Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels. Comm. Pure Appl. Math., V 2. 149 (1949).
- 29.- Dukler, A.E.. Characterization, effects and modeling of the wavy gas-liquid interface. Pergamon Press. Progress in Heat and Mass Transfer. V 6. 207 (1972).
- 30.- Frederiksen, C.S. y Watts, A.M.. Finite element method for time dependent incompressible free surface flow. J. Comp. Phys., V 39. 262 (1981).

- 31.- Fulford. G.D., The flow of liquids in thin films. Advances in Chemical Engineering, V 5, 151 (1964).
- 32.- Gaster. M., A note on the relation between temporarily-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamics stability. J Fluid Mech., V 14, 222 (1962).
- 33.- Gjevik. B., Occurrence of finite amplitude surface waves on falling liquid films. Phys. Fluids, V 13, 1918 (1970).
- 34.- Gjevik. B., Spatially varying finite-amplitude wave trains on falling liquid films. Acta Polytechnica Scandinavica, V 61, (1971).
- 35.- Goren. S.L., The instability of an annular thread of fluid. J. Fluid Mech., V 12, 309 (1962).
- 36.- Hewitt. G.F., Lovegrove. P.C. y Nicholls. B., Film thickness measurement using a fluorescence technique Part 1: Description of the method. UKEA. Report No AERE-R 4476 (1964).
- 37.- Hirshburg. P.I. y Florschuetz. P., Laminar-film flow: Part 1. Hydrodynamics analysis. J. of Heat Transfer, V 104, 452 (1962).
- 38.- Homsy, G.M. y Geyling F.T., A note on instabilities in rapid coating of cylinders. AIChE J., V 23, No 4, 587 (1977).
- 39.- Hopf. L., Ann. Physik, V 32, No 4, 777 (1910).
- 40.- Hughes, W.F. y Gaylord E.W., Basic Equations of Engineering Science, Schaum Pub. Co., New York (1964).

41. - Jones, L.O. y Whitaker, S.. An experimental study of falling liquid films. AICHE J., V12, No 3, 525 (1966).
42. - Kapitza, P.L. y Kapitza, S.P.. Wave flow of thin layers of a viscous fluid. (Originalmente : Zh. Eksperim. i Teor. Fiz., 18 (1948), 21 (1949)) Collected Papers of P.L. Kapitza, Macmillan, New York, 663 (1964). (Al referirio sólo se usa el año 1949).
43. - Kaplan, R.E.. The stability of laminar incompressible boundary layer in the presence of compliant boundaries. Mass. Inst. Tech., Aero Elastic and Structures Research Lab., ASRL-TP 116-1 (1964).
44. - Krantz, W.B.. Reply (Letter). AICHE J., V 23, No 5, 776 (1977).
45. - Krantz, W.B. y Goren, S.L.. Stability of thin liquid films flowing down a plane. Ind. Eng. Chem. Fund., V 10, No 1, 91 (1971).
46. - Krantz, W.B. y Zollars, R.L.. The linear hydrodynamic stability of film flow down a vertical cylinder. AICHE J., V 22, No 5, 930 (1976).
47. - Krishna, M.V.G. y Lin S.F.. Nonlinear stability of a viscous film with respect to three-dimensional side-band disturbances. Phys. Fluids, V 20, 1039 (1977).
48. - Landau, L.D.. On the problem of turbulence. C.R. Acad. Sci. U.R.S.S., v 44, 311 (1944) (ver también Collected Papers, Oxford: Pergamon Press, 387 (1965)).
49. - Lee, J.. Kapitza's method of film flow description. Chem. Eng. Sci., V 24, 1309 (1969).

- 50.- Lin. S.P.. Finite amplitude stability of a parallel flow with a free surface. J. Fluid Mech.. V 36. 113 (1969).
- 51.- Lin. S.P.. Roles of surface tension and Reynolds stresses on the finite amplitude stability of a parallel flow with a free surface. J. Fluid Mech.. V 40. No 2. 307 (1970).
- 52.- Lin. S.P.. Profiles and speed of finite amplitude waves in a falling liquid layer. Phys. Fluids. V 14. 263 (1971).
- 53.- Lin. S.P.. Finite amplitude stability of a contaminated liquid film. Progress in Heat and Mass Transfer. Pergamon Press. New York. V 6. 263 (1972).
- 54.- Lin. S.P.. Finite amplitude side-band stability of a viscous film. J. Fluid Mech.. V 63. No 3. 417 (1974).
- 55.- Lin. S.P.. On the applicability of the linear stability theory. AIChE J.. V 22. No 5. 937 (1976).
- 56.- Lin. S.P. y Liu. W.C.. Instability of film coating of wires and tubes. AIChE J.. V 21. 775 (1975).
- 57.- Lin. S.P. y Krishna. M.V.G.. Stability of a liquid film with respect to initially finite three dimensional disturbances. Phys. Fluids. V 20. 2005 (1977).
- 58.- Lin. S.P. y Wang. C.Y.. Modelling wavy film flow. no publicado (comunicación personal). (1965).
- 59.- Nakaya. C.. Long waves on a thin fluid layer flowing down an inclined plane. Phys. Fluids. V 18. 1407 (1975).

60. - Nakaya, C.. Waves of large amplitude on a fluid film down a vertical wall. J. Phys. Sci. Jpn., V 43. 1821 (1977).
61. - Nusselt, W.. VDI (Ver. Deut. Ingr.) Z., V 60. 549.569 (1916).
62. - Pierson, F.W. y Whitaker S.. Some theoretical and experimental observations of the wave structure of falling liquid films. Ind. Eng. Chem., Fundam., V 16. No. 4. 401 (1977).
63. - Portalski, S. y Clegg, A.J.. An experimental study of wave inception on falling liquid films. Chem. Eng. Sci., V 27. 1257 (1972).
64. - Fumir, A., Manneville, P. y Pomeau, Y.. On solitary waves running down an inclined plane. J. Fluid Mech., V 135. 27 (1983).
65. - Rayleigh, L.. On the capillary phenomenon of jets. Proc. Roy. Soc. Lond., V 29. 71 (1879).
66. - Rayleigh, L.. On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary forces. Phil. Mag., V 34. 145 (1892).
67. - Reynolds, W.C. y Potter, M.C.. Finite-amplitude instability of parallel shear flows. J. Fluid Mech., V 27. 465 (1967).
68. - Roskes, C.J.. Three dimensional long waves on a liquid film. Phys. Fluids, V 13. 1440 (1970).
69. - Ruckenstein, E. y Berbente, C.. Mass transfer to falling liquid film at low Reynolds number. Int. J. Heat and Mass Transf., V 11. 743 (1968).
70. - Ruschak, K.J.. A method for incorporating free

- boundaries with surface tension in finite element fluid flow simulators. Int. J. Num. Methods Engrn., V 15, 639 (1980).
- 71.- Salazar, F.P. y Marschall, E.. Thickness measurement in liquid film flow by laser scattering. Rev. Sci. Instrum., V 46, No 11, 1539 (1975).
- 72.- Segel, L.A., Mathematics Applied to Continuum Mechanics, Macmillan Pu.Co., (1977).
- 73.- Sharma, A. y Ruckenstein, E.. Mechanism of tear film rupture and formation of dry spots on cornea. J. Colloid and Interface Science, V 106, No 1, 12 (1985).
- 74.- Shkadov, V.Y., Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity. Fluid Dynamics, V 2, 29 (1967).
- 75.- Shlang T., y Sivashinsky, G.I., Irregular flow of a liquid film down a vertical column. J. Physique, V 43, 459 (1962).
- 76.- Sivashinsky, G.I. y Michelson, D.M., On irregular wavy flow of a liquid film down a vertical plane. Prog. Theor. Phys., V 63, 2112 (1980).
- 77.- Solesio, J.N., Instabilités des films liquides isothermes. Rapport CEA-R-4835, Centre d' Etudes Nucleaires de Grenoble, (1977).
- 78.- Solorio, F.J. y Sen M., Solución numérica de la ecuación de Orr-Sommerfeld para el caso de una película descendente cilíndrica de líquido. Memoria de Ponencias del II Simposium Nacional de Ciencias Térmicas, México D.F., 170 (1985).
- 79.- Solorio, F.J., San Roman, M.A. y Gonzalez, A., Estudio

- experimental de la influencia de la curvatura en el flujo de películas descendentes. Memoria del XIII Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería. 143 (1967).
- 80.- Solorio, F.J. y Sen M.. Linear stability of a cylindrical falling film. J. Fluid Mech., v 183. 365 (1967).
- 81.- Squire. H.B.. On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. Proc. Roy. Soc. London A 142. 621 (1933).
- 82.- Stainthorp. F.P. y Allen. J.M.. The development of ripples on the surface of a liquid film flowing inside a vertical tube. Trans. Instn. Chem. Engrs., V 43. T85 (1965).
- 83.- Sternling. C.V. y Barr-David. F.H.. Reporte no publicado (1964).
- 84.- Strobel. W.J. y Whitaker. S.. The effect of surfactants on the flow characteristics of falling liquid films. AIChE J., V 18. No 4. 527 (1969).
- 85.- Stuart. J.T.. On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part I: The basic behavior in plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech., V 9. 693 (1960).
- 86.- Tailby. S.R. y Portalski. S.. The hydrodynamics of liquid films flowing on a vertical surface. Trans. Inst. Chem. Engrs., V 38. 324 (1960).
- 87.- Tailby. S.R. y Portalski. S.. The determination of the wavelength on a vertical film of liquid flowing down a hydrodynamically smooth plate. Trans. Inst. Chem. Engrs., V 40. 114 (1962).

88. - Tamada, K. y Tougou, H.. Stability of roll-waves on thin laminar flow down an inclined plane wall. J. Phys. Soc. Jpn., V47, 1992 (1979).
89. - Telles, A.. Liquid film characteristics in vertical two-phase flow. Tesis doctoral, Univ. of Houston (1968).
90. - Telles, S. y Dukler, A.E.. Statistical characteristics of thin, vertically, wavy liquid films, Ind. Eng. Chem. Fund., V 9, 412 (1970).
91. - Telles, A.S. y Dukler, A.E.. Statistical characteristics of thin, vertical, wavy, liquid films, Ind. Eng. Chem. Fund., V 9, No 3, 412 (1970).
92. - Watson, J.. On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flow. Part 2: The development of a solution for plane Poiseuille flow and for Couette flow. J. Fluid Mech., V 9, 371 (1960).
93. - Weber, C.. Zum Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles. Z. angew. Math. Mech., v 11, 136 (1931).
94. - Whitaker, S.. Effect of surface active agents on the stability of falling liquid films. Ind. Eng. Chem. Fund., V 10, No. 2, 132 (1964).
95. - Whitaker, S. y Jones, L.D.. Stability of falling liquid films, effect of interface and interfacial mass transport, AIChE J., V 12, 421 (1966).
96. - Yih, Ch-S.. Stability of parallel laminar flow with a free surface. Proceedings of the 20 U.S. National Congress of Applied Mechanics, 623 (1954).
97. - Yih, Ch-S.. Stability of two-dimensional parallel

flows for three dimensional disturbances. Quart. of Appl. Math., V 12. No 4. 434 (1955).

98. - Yih. Ch-S.. Stability of liquid flow down an inclined plane. Phys. Fluids. V 6. No 3. 321 (1963).

99. - Zabaras. G.J.. Tesis doctoral. Univ. of Houston. University Park (1965).

APENDICE A

DEDUCCION DE LAS ECUACIONES BASICAS DE ESTABILIDAD

CONDICIONES EN LA FRONTERA

Se toma un elemento material δE cuya superficie media δS es una porción de la superficie libre, que tiene en su parte superior un gas y en la inferior un líquido.

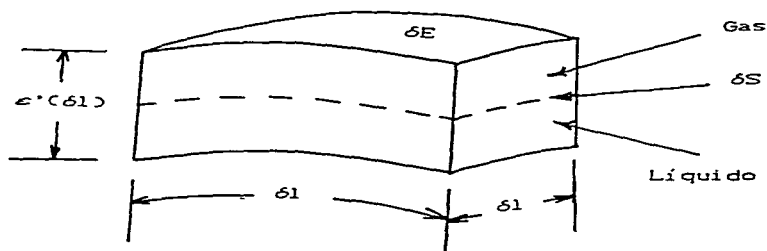


Figura A.1

Las fuerzas de inercia y de cuerpo son proporcionales a $z'(\delta l)^3$, mientras que las que actúan en los lados de δE lo son a $z'(\delta l)^2$, como es fácil demostrarlo (ver Segel [1977]). Dado que z' puede hacerse tan pequeño como se quiera, las fuerzas antes mencionadas resultan de orden superior y pueden despreciarse cuando se comparan con las superficiales (de presión, viscosas y de tensión superficial), que son independientes de z' . La condición de equilibrio dinámico del elemento se reduce de esta manera a la aseveración de que la suma de fuerzas superficiales es igual a cero. Esta suma de fuerzas, junto con las suposiciones de la sección 3.1, conducen a las condiciones en la frontera en la superficie libre.

En la dirección normal a la superficie se tiene (ver Batchelor [1967])

$$-p + p_0 + \sigma K + (S_{\underline{v}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n} = 0 \quad (\text{A.1})$$

donde

$$K = \text{curvatura} = \frac{1}{RC_1} + \frac{1}{RC_2} = \frac{1}{a+h} - \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (\text{A.2})$$

siendo RC_1 y RC_2 los radios principales de curvatura (ver Apostol [1967])

$S_{\underline{v}}$ = tensor de esfuerzos, que está dado por (ver Hughes y Gaylord [1964])

$$S_{\underline{v}} = \mu \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ 0 & 2 \frac{u_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} & 0 & 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

y \underline{n} = vector unitario normal a la superficie libre, dirigido hacia afuera del líquido por (Apostol [1967])

$$\underline{n} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Sustituyendo A.2, A.3 y A.4 en A.1 se obtiene la primera condición en la superficie libre (ecuación (3.6))

$$-p + p_0 + \sigma K + \frac{2\mu}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} - \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (\text{A.5})$$

En la dirección tangencial el equilibrio de fuerzas lleva a (Batchelor [1967])

$$\underline{\underline{S}}_v \cdot \underline{\underline{n}} - \left[(\underline{\underline{S}}_v \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{n}} \right] \underline{\underline{n}} = 0 \quad (\text{A.6})$$

donde sustituyendo A.3 y A.4 se obtienen las siguientes dos ecuaciones

$$2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{2}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} - \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} - z \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{z \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} - \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right] = 0$$

(A.8)

Las dos ecuaciones anteriores son linealmente dependientes, ya que

$$B.7 = \frac{\partial h}{\partial z} A.6$$

por lo que una sola de ellas es suficiente. Una simplificación adicional de la ecuación A.7 lleva a

$$z \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial h}{\partial z} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \left[1 - \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right] - z \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

(A.9)

que es la condición (3.7).

SOLUCION PARA EL FLUJO BASICO

Suponiendo un flujo permanente, completamente desarrollado (invariable con z), laminar y paralelo al eje del cilindro, las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes (ecs. (3.1)-(3.3)) se reducen a

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (A.10)$$

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) \right] + \rho g = 0 \quad (\text{A.11})$$

La ecuación (A.11) tiene como solución

$$u_z = - \frac{g}{4\mu} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (\text{A.12})$$

Las condiciones en la frontera (3.4)-(3.8) toman la forma

En $r = a$

$$u_z = 0 \quad (\text{A.13})$$

En $r = a+h_0$

$$-p + p_0 + \sigma \bar{K} = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{du_z}{dr} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Sustituyendo A.12 en A.13 y A.15 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para C_1 y C_2

$$- \frac{ga^2}{4\mu} + C_1 \ln a + C_2 = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$- \frac{g}{2\mu} (a+h_0) + \frac{C_1}{(a+h_0)} = 0 \quad (\text{A.17})$$

resolviendo el sistema anterior para C_1 y C_2 y sustituyendo estos valores en (A.12) se tiene

$$\bar{u}_z = \frac{g}{2\nu} \left[(a+h_0)^2 \ln(r/a) - \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \right] \quad (\text{A.18})$$

que es el perfil básico de velocidades.

ECUACIONES DE ESTABILIDAD

Sustituyendo las variables para el flujo perturbado (ec. (3.13)) en las ecuaciones fundamentales ((3.1)-(3.8)) y despreciando términos cuadráticos en las perturbaciones se obtiene

Continuidad

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r') + \frac{\partial u_z'}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.19})$$

Navier-Stokes

$$\rho \left[\frac{\partial u_r'}{\partial t} + \bar{u}_z \frac{\partial u_r'}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p'}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_r'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r'}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r'}{\partial z^2} - \frac{u_r'}{r^2} \right] \quad (\text{A.20})$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_z'}{\partial t} + u_r' \frac{d\bar{u}_z}{dr} + \bar{u}_z \frac{\partial u_z'}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_z'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z'}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z'}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A.21})$$

donde en esta última ecuación se ha tomado en cuenta (A.11).

Condiciones a la frontera

De (3.4) y (3.5) se obtiene, en $r = a$

$$u_r^* = 0 \quad \text{(A.22)}$$

$$u_{zz}^* = 0 \quad \text{(A.23)}$$

y de (3.6)-(3.8), en $r = a+h$

$$-p^* + \sigma K^* + 2\mu \left[\frac{\partial u_r^*}{\partial r} - \frac{d\bar{u}_{zz}}{dr} \frac{\partial h^*}{\partial z} \right] = 0 \quad \text{(A.24)}$$

$$\frac{\partial u_r^*}{\partial z} + \frac{d\bar{u}_{zz}}{dr} + \frac{\partial u_z^*}{\partial r} = 0 \quad \text{(A.25)}$$

$$u_r^* = \frac{\partial h^*}{\partial t} + \bar{u}_{zz} \frac{\partial h^*}{\partial z} \quad \text{(A.26)}$$

El valor de K^* se obtiene de la siguiente manera: si se expresa (A.2) como

$$K = \frac{1}{(a+h_0) + h^*} - \frac{\frac{\partial^2 h^*}{\partial z^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial h^*}{\partial z} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

y si se desarrolla el primer término en series de h^*

$$K = \frac{1}{(a+h_0)} \left[1 - \frac{h^*}{a+h_0} + O(h^*)^2 + \dots \right] - \frac{\frac{\partial^2 h^*}{\partial z^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial h^*}{\partial z} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

linealizando queda

$$K = \frac{1}{a+h_0} \left[1 - \frac{h'}{a+h_0} \right] - \frac{\partial^2 h'}{\partial z^2}$$

y recordando que $K = \bar{K} + K'$ y que $\bar{K} = \frac{1}{a+h_0}$ se tiene

finalmente

$$K' = - \frac{h'}{(a+h_0)^2} - \frac{\partial^2 h'}{\partial z^2} \quad (\text{A. 27})$$

Ya que h es una función de z y del tiempo, conviene tener las condiciones en la frontera más bien referidas a $(a+h_0)$, que es una constante. Esto se logra si se realiza una expansión en serie de Taylor de los términos de las condiciones (A.24)-(A.26) y sólo se conservan términos lineales en la perturbación. De esta manera se tiene
En $r = a+h_0$

$$-p' + \sigma K' + 2\mu \frac{\partial u_r'}{\partial r} = 0 \quad (\text{A. 28})$$

$$\frac{\partial u_r'}{\partial z} + \frac{\partial u_z'}{\partial r} - \frac{g}{\nu} h' = 0 \quad (\text{A. 29})$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{u}_z \frac{\partial h'}{\partial z} = u_r' \quad (\text{A. 30})$$

Ahora se define una función de corriente para la perturbación de la velocidad de tal manera que satisfaga idénticamente la ecuación de continuidad

$$u_r' = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (\text{A. 31})$$

$$u_z' = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{A. 32})$$

Si se elimina la presión p' mediante la derivación cruzada de las ecuaciones A.20 y A.21 (la primera se deriva con respecto a z y la segunda con respecto a r) y se introduce en la ecuación resultante la (31) se llega a

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 \psi}{\partial t \partial z^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial t \partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial r} - \bar{u}_z \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{d^2 \bar{u}_z}{dr^2} \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{d \bar{u}_z}{dr} + \bar{u}_z \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial z} \\ & - \bar{u}_z \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} = \nu \left[2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} - \frac{2}{r} \left[\frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} \right] + \frac{3}{r^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{A. 33})$$

Si se suponen perturbaciones de la forma

$$v(r, z, t) = \phi(r) e^{i\alpha(z-ct)} \quad (\text{A. 34})$$

$$p'(r, z, t) = p^*(r) e^{i\alpha(z-ct)} \quad (\text{A. 35})$$

$$h'(z, t) = h^* e^{i\alpha(z-ct)} \quad (\text{A. 36})$$

y se sustituyen en (A.33) y en las condiciones en la frontera (A.22), (A.23), (A.28)-(A.30) se obtiene la ecuación

$$\left[\frac{i\alpha}{\nu} \left(c - \bar{u}_z \right) + D^2 - \alpha^2 \right] \left[D^2 - \alpha^2 \right] \phi + \frac{i\alpha}{\nu} \left[D^2 \bar{u}_z \right] \phi = 0 \quad (\text{A. 36})$$

$$\text{donde } D^2 = r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right] \quad (\text{A. 37})$$

y las condiciones en la frontera en $r = a$

$$\phi = 0 \quad (\text{A. 38})$$

$$\frac{d\phi}{dr} = 0 \quad (\text{A. 39})$$

en $r = a + h_0$

$$-p^* + \phi h^* \left(\alpha^2 - \frac{1}{(a+h_0)^2} \right) + 2\mu i \alpha \left(\frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{r^2} \right) = 0 \quad (\text{A. 40})$$

$$\frac{\alpha^2 \phi}{r} + \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right] + \frac{h^* g}{v} = 0 \quad (\text{A. 41})$$

$$\phi = r h^* (\bar{u}_z - c) \quad (\text{A. 42})$$

Si se obtienen los valores de p^* y h^* , como función de ϕ , usando A.21 y A.42 respectivamente, las ecuaciones A.40 y A.41 se transforman en

en $r = a+h_0$

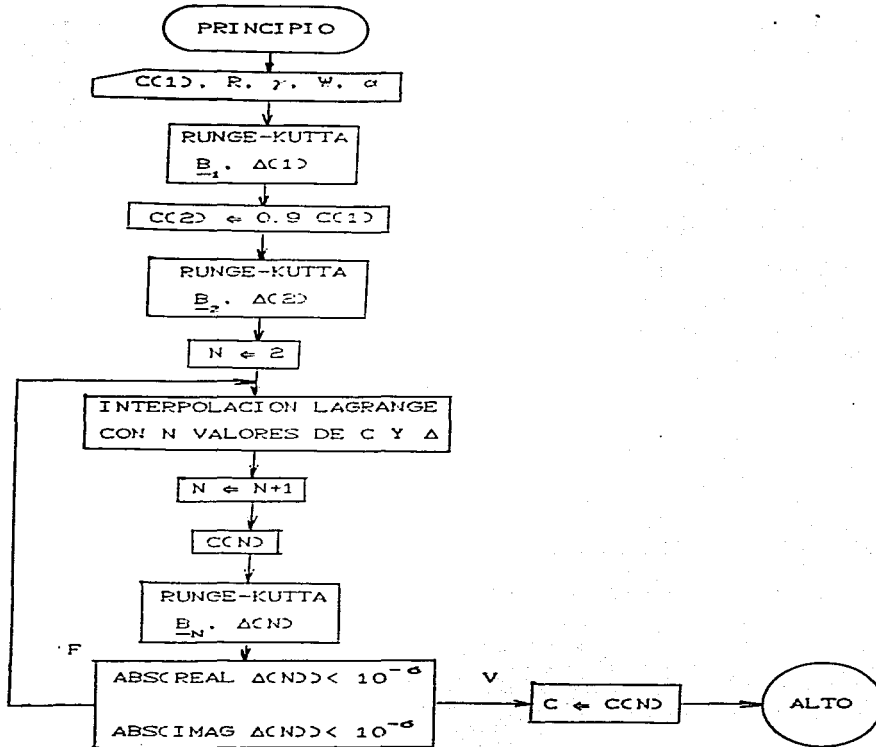
$$\frac{\alpha^2}{r} \phi + \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right] - \frac{\phi g}{rv(c-\bar{u}_z)} = 0 \quad (\text{A. 43})$$

$$\begin{aligned} & \rho \left[(c-\bar{u}_z) \frac{d\phi}{dr} + \frac{d\bar{u}_z}{dr} \phi \right] - \frac{\mu}{\alpha} \left[- \frac{d^3 \phi}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \phi}{dr^2} \right. \\ & \left. + \left(\alpha^2 - \frac{1}{r^2} \right) \frac{d\phi}{dr} \right] - \frac{\sigma \phi}{(c-\bar{u}_z)} \left[\alpha^2 - \frac{1}{(a+h_0)^2} \right] \\ & + 2\mu\alpha \left[\frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{r} \right] = 0 \quad (\text{A. 44}) \end{aligned}$$

Las ecuaciones (A.36), (A.38), (A.39), (A.43) y (A.44) forman el problema de valores característicos (3.17)-(3.22).

APENDICE B

PROGRAMA DE COMPUTO



U
U
U
U
U
U
U

CALCULA EL VALOR CARACTERISTICO CIO Y EL FACTOR DE AMPLIFICACION ACI PARA VALORES DADOS DEL No. DE REYNOLDS R, No. DE WEBER W, PARAMETRO DE CURVATURA GA Y No. DE ONDA A. SE DEBE DAR UN VALOR SUPUESTO CIM(1) DEL VALOR CARACTERISTICO PARA COMENZAR LA ITERACION.

```

DIMENSION CIM(40),X(101),UTA(101),UTB(101),UT(101),UT1(101)
COMPLEX CIM,CIO,IM
WRITE (*,*) 'DAME CIM(1)'
READ (*,100) CIM(1)
100 FORMAT(F5.3,1X,F5.3)
WRITE(*,*) 'DAME REYNOLDS'
READ(*,*) R
WRITE(*,*) 'DAME GAMMA'
READ(*,*) GA
WRITE(*,*) 'DAME WEBER'
READ(*,*) W
WRITE(*,*) 'DAME ALFA'
READ(*,*) A
BE=(GA)/(1.-GA)
BE1=(1.)/(1.-GA)
G=(4.)/(BE1**2*(GA**2-2.*ALOG(GA)-1.0))
IM=(0.0,1.0)
NF=50
H=1./NF
N=1
NMAX=2*NF+1
DO 8 NN=N,NMAX
X(NN)=BE+(NF-1)/2.*H
UTA(NN)=(1.)/(GA*GA-2.*ALOG(GA)-1.)
UTB(NN)=2.*ALOG(X(NN)/BE)-(X(NN)**2)/(BE1**2)+GA**2
UT(NN)=UTA(NN)*UTB(NN)
UT1(NN)=-G*(BE1**2)/(X(NN)**2)
8 CONTINUE
CIM(2)=-.9*CIM(1)
CALL CIO(R,A,W,CIM,CIO,GA,BE,BE1,G,IM,NF,H,NMAX,X,UT,UT1)
CIOI=AIMAG(CIO)
ACI=A*CIOI
WRITE(*,*) 'FACTOR DE AMPLIF.=',ACI
WRITE(*,*) 'CIO=',CIO
STOP
END

```

UUUUU

ESTA SUBROUTINA ITERA PARA ENCONTRAR EL VALOR
 CARACTERISTICO QUE HACE EL DETERMINANTE IGUAL
 A CERO.

```

SUBROUTINE CIO(R,A,W,CIM,CIO,GA,BE,BE1,G,IM,NP,H,NMAX,X,UT,UT1)
DIMENSION CIM(40),D(40),X(101),UT(101),UT1(101)
COMPLEX CI,CIM,DET,D,CIO,IM,CIN1,CIN2
CI=CIM(1)
CALL DETR(R,A,W,CI,DET,GA,BE,BE1,G,IM,NP,H,NMAX,X,UT,UT1)
D(1)=DET
CI=CIM(2)
CALL DETR(R,A,W,CI,DET,GA,BE,BE1,G,IM,NP,H,NMAX,X,UT,UT1)
D(2)=DET
NI=1
5 NI=NI+1
WRITE(*,*) 'NI=',NI
IF(NI .EQ. 30) GO TO 20
CALL LAB(D,CIM,CI,NI)
CALL DETR(R,A,W,CI,DET,GA,BE,BE1,G,IM,NP,H,NMAX,X,UT,UT1)
WRITE(*,*) 'CI=',CI,'DET=',DET
F1=REAL(DET)
F2=AIMAG(DET)
CIN1=CIM(NI)
CIN2=CI
CIN1R=ABS(REAL(CIN1))
CIN1I=ABS(AIMAG(CIN1))
CIN2R=ABS(REAL(CI))
CIN2I=ABS(AIMAG(CI))
IF((ABS(CIN2R-CIN1R) .LT. 1.E-6) .AND. (ABS(CIN2I-CIN1I)
*.LT. 1.E-6)) GO TO 10
IF((ABS(F1) .LT. 1.E-6) .AND. (ABS(F2) .LT. 1.E-6)) GO TO 10
CIM(NI+1)=CI
D(NI+1)=DET
GO TO 5
10 WRITE(*,*) 'NI FINAL=',NI
CIO=CIM
GO TO 30
20 WRITE(*,*) 'SE HAN EXCEDIDO EN ITERACIONES '
GO TO 40
30 WRITE(*,*) 'DETO=',DET
40 RETURN
END

```

U
U
U
U

ESTA SUBROUTINA EVALUA EL DETERMINANTE PARA CADA CIM(N) DADO.

10
15
20

```

SUBROUTINE DEIR(R,A,W,C1,DET,GA,BE,BE1,G,IM,NP,H,NMAX,X,UT,UT1)
DIMENSION Y(4),B(4,4),YM(4),X(101),UT(101),UT1(101)
COMPLEX IM,C1,K2,K4,K5,Y,YM,B
COMPLEX DEL1,DEL2,DEL3,DEL4,DEL5,DEL6,DET
REAL K1,K3
K1=-1./BE1
K2=A*A-B/(C1-1.)
K3=B1
K4=IM*A*B*(C1-1.)+A*A+1./BE1*(B2-2.*A*A)
K5=(2.*A*A)/(BE1)-(IM*A*B*W)/(C1-1.)*(A*A-1./BE1**2)
DO 20 I=1,4
DO 10 J=1,4
Y(J)=(0,0,0,0)
CONTINUE
Y(I)=(1,0,0,0)
CALL RUMR(NP,H,NMAX,X,UT,UT1,IM,A,R,C1,Y,YM)
DO 15 JB=1,4
B(J,I)=YM(J)
CONTINUE
CONTINUE
DEL1=K2*B(1,0)*(B(0,4)*K3+B(4,4)+B(2,4)*K4)
DEL2=-K2*B(1,4)*(B(0,0)*K3+B(4,0)+B(2,0)*K4)
DEL3=-K1*B(2,4)*(B(0,3)+K3+B(4,3)+B(1,3)*K5)
DEL4=K1*B(2,0)*(B(0,4)+K3+B(4,4)+B(1,4)*K5)
DEL5=B(3,0)*(B(2,4)*K4+B(4,4)+B(1,4)*K5)
DEL6=-B(3,4)*(B(2,0)*K4+B(4,0)+B(1,0)*K5)
DET=DEL1+DEL2+DEL3+DEL4+DEL5+DEL6
RETURN
END

```

U
U
U
U

ESTA SUBROUTINA INTEGRA LA ECUACION DIFERENCIAL PARA OBTENER LAS COLUMNAS DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA

10

```

SUBROUTINE RUMR(NP,H,NMAX,X,UT,UT1,IM,A,R,C1,Y,YM)
DIMENSION X(101),O1(101),O2(101),O3(101),O4(101)
DIMENSION B(4,4),Y(4),YM(4),UT(101),UT1(101)
COMPLEX O2,O3,O4,O1,G1,G2,G3,G4,Y,IM,C1,IM
N=1
DO 10 NN=N,NMAX
O1(NN)=- (2.) / (X(NN))
O2(NN)=IM*A*R*(C1-UT(NN))-2.*A**2+(3.) / (X(NN)**2)
O3(NN)=(1.) / (X(NN)) * (2.*A**2-IM*A*R*(C1-UT(NN)))-(3.) / (X(NN)**2)
O4(NN)=A**4-IM*A**3*R*(C1-UT(NN))+IM*A*R*UT1(NN)
CONTINUE

```

```

51=Y(17)
62=Y(2)
63=Y(3)
64=Y(4)
30 IF (N .GE. NMAX) GO TO 40
C(1,1) =H*62
C(2,1) =H*63
C(3,1) =H*64
C(4,1) =-H*(C1(N)*G4+O2(N)*G3+O3(N)*G2+O4(N)*G1)
C(1,2) =H*(G2+.5*C(1,1))
C(2,2) =H*(G3+.5*C(1,1))
C(3,2) =H*(G4+.5*C(1,1))
C(4,2) =-H*(C1(N+1)*(G4+.5*C(4,1))+O2(N+1)*(G3+.5*C(3,1))
* +O3(N+1)*(G2+.5*C(2,1))+O4(N+1)*(G1+.5*C(1,1)))
C(1,3) =H*(G2+.5*C(2,2))
C(2,3) =H*(G3+.5*C(2,2))
C(3,3) =H*(G4+.5*C(2,2))
C(4,3) =-H*(C1(N+1)*(G4+.5*C(4,2))+O2(N+1)*(G3+.5*C(3,2))
* +O3(N+1)*(G2+.5*C(2,2))+O4(N+1)*(G1+.5*C(1,2)))
C(1,4) =H*(G2+C(1,3))
C(2,4) =H*(G3+C(1,3))
C(3,4) =H*(G4+C(1,3))
C(4,4) =-H*(C1(N+2)*(G4+C(4,3))+O2(N+2)*(G3+C(3,3))
* +O3(N+2)*(G2+C(2,3))+O4(N+2)*(G1+C(1,3)))
G1=G1+(C(1,1)+2.*C(1,2)+2.*C(1,3)+C(1,4))/6.0
G2=G2+(C(2,1)+2.*C(2,2)+2.*C(2,3)+C(2,4))/6.0
G3=G3+(C(3,1)+2.*C(3,2)+2.*C(3,3)+C(3,4))/6.0
G4=G4+(C(4,1)+2.*C(4,2)+2.*C(4,3)+C(4,4))/6.0
N=N+2
GO TO 30
40 YM(1)=G1
YM(2)=G2
YM(3)=G3
YM(4)=G4
RETURN
END
SUBROUTINA DE INTERPOLACION QUE USA LA
FORMULA DE LAGRANGE.
SUBROUTINE LAB(D,CIM,C1,NI)
COMPLEX D,CIM,C1,SUM,PRO
DIMENSION D(50),CIM(50)
SUM=(0.0,0.0)
DO 10 I=1,NI
PRO=(1.0,0.0)
DO 5 J=1,NI
IF (J .NE. I) PRO=PRO*((-D(J))/(D(I)-D(J)))
5 CONTINUE
SUM=SUM+CIM(I)*PRO
10 CONTINUE
C1=SUM
RETURN
END

```