

00326  
2 y 10

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
FACULTAD DE CIENCIAS



POLARIDAD DE POLITOPOS Y CONJUNTOS POLIEDRICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MATEMATICO

PRESENTA:

DANIEL ARMANDO CERVANTES PEREDO

1989

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **INDICE.**

Introducción	1
1. Espacios Afines	3
2. Convexidad	7
3. Las Caras de un Conjunto Convexo	13
4. Politopos	19
5. Conjuntos Poliédricos	24
6. Polaridad	31
7. Polaridad de Politopos y Conjuntos Poliédricos	41
8. Dualidad	45
Bibliografía	62

## INTRODUCCION.

Los politopos convexos son los análogos  $n$ -dimensionales de los polígonos en el plano y de los poliedros en el espacio tridimensional.

En esta tesis estudiaremos algunas de sus propiedades y trabajaremos con las caras de las distintas dimensiones de estos conjuntos (vértices, aristas, etc.).

El punto central de esta tesis será probar que existen dos formas de caracterizar a los politopos convexos. De hecho, la primera forma de caracterización se desprende de la definición de politopo convexo y está dada en términos de los vértices (o caras de dimensión mínima) del conjunto, la segunda caracterización se deriva del concepto de conjunto poliédrico y está dada en términos de las facetas (o caras de dimensión máxima) del conjunto.

Probaremos entonces uno de los resultados más importantes en la teoría de politopos, esto es el hecho de que los politopos convexos son precisamente los conjuntos poliédricos acotados.

Para lograr esto aplicaremos la noción de polaridad a los politopos convexos y a los conjuntos poliédricos, ya que de este modo apreciaremos más claramente el papel dual que juegan los vértices y las facetas de estos conjuntos.

En las dos primeras secciones se presentan algunos hechos generales de la teoría de convexidad que serán necesarios para desarrollar el trabajo que sigue.

En la sección 3 se introduce el concepto de cara de un conjunto convexo y en las secciones 4 y 5 se definen los conceptos de politopo convexo y de conjunto

poliédrico.

Los resultados de polaridad que necesitamos se presentan en la sección 6 y en la siguiente sección se prueba el teorema central de este trabajo.

Para terminar, se habla brevemente del concepto de dualidad y se utilizan los sólidos platónicos para ilustrar geoméricamente algunos de los resultados obtenidos en esta tesis.

## 1. ESPACIOS AFINES

A lo largo de esta tesis nos situaremos en el espacio euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ . El marco más adecuado para estudiar a los conjuntos convexos en general y a los polítopos en particular es la estructura afín de  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto, en esta sección se hará una breve descripción de esta estructura afín, para lo cual asumiremos la familiaridad del lector con la estructura lineal de  $\mathbb{R}^n$ , así como con su producto interno canónico,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , con la norma definida por este producto,  $\| \cdot \|$ , y con algunos conceptos elementales de topología tales como el interior  $\text{int } M$ , la cerradura  $\overline{M}$  y la frontera  $\text{fr } M$  de un conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$ .

Un conjunto  $A$  contenido en  $\mathbb{R}^n$  es llamado un *subespacio afín* de  $\mathbb{R}^n$  si para cualesquiera dos puntos  $x, y \in A$ ,  $A$  contiene a la recta que pasa por esos dos puntos, es decir, si  $x, y \in A$  entonces  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Los subespacios afines que contienen al origen son subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^n$ . Por un *espacio afín* se entenderá un subespacio afín de algún  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $a \in \mathbb{R}^n$ , el conjunto  $A + a := \{x + a \mid x \in A\}$  es llamado la *translación* del conjunto  $A$  por el vector  $a$ . Todo espacio afín  $A$  no vacío es la translación de un único subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$ :

$$A = L + a \text{ donde } a \in A \text{ y } L = \{x - a \mid x \in A\}.$$

Una *combinación lineal* de los puntos  $x_1, \dots, x_m$  en  $\mathbb{R}^n$  es una suma de la forma  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ , donde cada  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ .

Una *combinación afín* de los puntos  $x_1, \dots, x_m$  en  $\mathbb{R}^n$  es una combinación lineal

en la que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ .

**PROPOSICION 1.1.** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces  $A$  es un subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  si y sólo si toda combinación afín de puntos de  $A$  está nuevamente en  $A$ .*

Dado que la intersección de subespacios afines de  $\mathbb{R}^n$  es también un subespacio afín, se puede definir la *cerradura afín* de un conjunto  $S$  en  $\mathbb{R}^n$  como la intersección de todos los subespacios afines de  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $S$ .  $\text{af } S$  será entonces el subespacio afín más pequeño de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $S$ . Denotaremos a la cerradura afín de  $S$  por  $\text{af } S$ .

**PROPOSICION 1.2.** *Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ . La cerradura afín de  $S$  es el conjunto de todas las combinaciones afines de elementos de  $S$ .*

Un conjunto finito de puntos es *linealmente (afínmente) independiente* si ninguno de sus puntos puede ser expresado como combinación lineal (afín) de los otros puntos. En caso contrario se dice que el conjunto es *linealmente (afínmente) dependiente*.

**PROPOSICION 1.3.** *El conjunto  $\{x_1, \dots, x_m\}$  es linealmente (afínmente) dependiente si y sólo si el origen puede ser expresado en la forma  $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$  con algún  $\lambda_i \neq 0$  (y con  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$  en el caso de dependencia afín).*

Un espacio vectorial (afín) es llamado *d-dimensional* si el máximo número de puntos linealmente (afínmente) independientes en él es  $d$  ( $d+1$ ). La dimensión de un espacio  $A$  se denotará por  $\dim A$ .

La dimensión de un espacio afín  $A$  no vacío es la dimensión del espacio vectorial  $L$  tal que

$$A = L + a.$$

Los espacios afines de dimensiones 0, 1 y 2 corresponden a puntos, rectas y planos, respectivamente. La dimensión del conjunto vacío se define como

$$\dim \emptyset = -1.$$

Un subespacio afín  $H$  de un espacio afín  $A$  con  $\dim A = n$  es llamado un hiperplano de  $A$  si  $\dim H = n - 1$ .

Todo hiperplano  $H$  en  $\mathbb{R}^n$  puede representarse por una ecuación del tipo  $\langle x, a \rangle = \alpha$  donde  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $a$  es un vector fijo no nulo en  $\mathbb{R}^n$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa el producto interno canónico en  $\mathbb{R}^n$ .

Denotaremos al hiperplano  $H$  por

$$H(a, \alpha) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle = \alpha \}.$$

El vector  $a$  es llamado *vector normal* de  $H(a, \alpha)$ .

A los conjuntos

$$K(a, \alpha) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle \leq \alpha \}$$

y

$$K(-a, -\alpha) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, -a \rangle \leq -\alpha \} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle \geq \alpha \}$$

se les llamará *semiespacios cerrados* definidos por el hiperplano  $H(a, \alpha)$ .

Los *semiespacios abiertos* se definen de manera análoga tomando las desigualdades estrictas.

Finalmente, definiremos una *transformación afín* como una función  $\varphi$ , que va de un subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$ , que preserva combinaciones afines, es decir, que

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(x_i)$$

donde  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ .

Si  $A = x + L$ , donde  $L$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$ , entonces una función  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  es afín si y sólo si existe una transformación lineal  $\phi : L \rightarrow \mathbb{R}^m$  y un punto  $y \in \mathbb{R}^m$  tal que  $\varphi(x + z) = y + \phi(z)$  para toda  $z \in L$ .

Si  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  es afín, entonces  $\varphi(A)$  es un subespacio afín de  $\mathbb{R}^m$ , es decir, una transformación afín conserva la estructura afín de los conjuntos. Además, las transformaciones afines son continuas.

En el caso de que  $\varphi$  sea una transformación afín biyectiva, de un espacio afín  $A_1$  en un espacio afín  $A_2$ , diremos que  $\varphi$  es un *isomorfismo afín* y que  $A_1$  y  $A_2$  son *afínmente isomorfos*.

Dos espacios son afínmente isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión. En este caso podremos identificar un espacio con el otro como si de hecho fueran iguales.

## 2. CONVEXIDAD

A continuación introduciremos el concepto de conjunto convexo y presentaremos algunos hechos básicos referentes a estos conjuntos. Así mismo, podremos observar algunas analogías entre los conceptos de convexidad y los conceptos afines vistos en la sección anterior. Al final de esta sección mencionaremos tres teoremas de gran importancia en la teoría de convexidad que nos serán muy útiles a lo largo de este trabajo.

Se dice que un subconjunto  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  es *convexo* si para cualesquiera dos puntos,  $x, y \in C$ , el segmento de recta cerrado que une  $x$  con  $y$  está contenido en  $C$ , es decir, si dados  $x, y \in C$ , entonces

$$[x, y] = \{ \lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1 \} \subset C.$$

Los segmentos de recta semi-abiertos,  $(x, y]$ ,  $[x, y)$  y el segmento abierto  $(x, y)$  se definen de manera análoga tomando desigualdades estrictas. Los subespacios afines de  $\mathbb{R}^n$ , incluyendo a  $\mathbb{R}^n$  y al  $\emptyset$ , son convexos, lo mismo que todo semiespacio (abierto o cerrado) de  $\mathbb{R}^n$ .

Una *combinación convexa* de los puntos  $x_1, \dots, x_m$  en  $\mathbb{R}^n$  es una combinación lineal  $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ , donde  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ .

**PROPOSICION 2.1.** *Un subconjunto  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  es convexo si y sólo si cualquier combinación convexa de puntos de  $C$  está también en  $C$ .*

Como la intersección de conjuntos convexos es también convexa, dado un conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  podemos definir el *casco convexo* de  $M$  como la intersección de todos

los conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $M$ . En otras palabras, la cerradura convexa de  $M$  es el conjunto convexo más pequeño en  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $M$ . La cerradura convexa de  $M$  será denotada por  $\text{conv } M$ .

**PROPOSICION 2.2.** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$ . El casco convexo de  $M$  es el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos en  $M$ .*

De hecho, el teorema de Caratheodory nos dice que si  $M \subset \mathbb{R}^n$  es tal que  $\dim(\text{af } M) = k$ , entonces  $\text{conv } M$  es el conjunto de todas las combinaciones convexas de exactamente  $k + 1$  puntos en  $M$ .

**PROPOSICION 2.3.** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto. Entonces  $\text{conv } M$  es también compacto.*

La dimensión de un conjunto convexo  $C \subset \mathbb{R}^n$  se define como la dimensión de la cerradura afín de  $C$ .

El conjunto de puntos interiores de un conjunto  $C$  es llamado el *interior* de  $C$ . Claramente, si un conjunto convexo  $C \subset \mathbb{R}^n$  tiene interior no vacío en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\dim C = n$ . Si  $\dim C < n$  entonces  $C$  no tiene puntos interiores en  $\mathbb{R}^n$ , sin embargo, podemos definir el *interior relativo* de  $C$  como el interior de  $C$  en  $\text{af } C$ . Denotaremos al interior relativo de  $C$  por  $\text{intrel } C$ . Así mismo llamaremos *frontera relativa*,  $\text{frel } C$ , a la frontera de  $C$  en  $\text{af } C$ .

Por otro lado, como  $\text{af } C$  es un conjunto cerrado en  $\mathbb{R}^n$ , la cerradura de  $C$  en  $\text{af } C$  es también cerrado y coincide con la cerradura de  $C$  en  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto, no será necesario definir la "cerradura relativa" de  $C$  y hablaremos simplemente de la

cerradura de  $C$ , a la que denotaremos por  $\bar{C}$ .

**PROPOSICION 2.4.** *Sea  $C$  un conjunto convexo no vacío contenido en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $\text{intrel } C \neq \emptyset$ .*

**PROPOSICION 2.5.** *Sea  $C$  un conjunto convexo contenido en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces para todo  $x_0 \in \text{intrel } C$  y todo  $x_1 \in \bar{C}$  con  $x_0 \neq x_1$  se tiene que  $[x_0, x_1] \subset \text{intrel } C$ .*

Las proposiciones anteriores permiten probar los siguientes hechos con respecto a la cerradura, la frontera relativa y el interior relativo de un conjunto convexo  $C$  contenido en  $\mathbb{R}^n$ .

**PROPOSICION 2.6.** *Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo, entonces:*

(a)  $\bar{C}$  es convexo.

(b)  $\text{intrel } C$  es convexo.

(c)  $\bar{C} = \overline{(\bar{C})} = \overline{\text{intrel } C}$ .

(d)  $\text{intrel } C = \text{intrel } \bar{C} = \text{intrel}(\text{intrel } C)$ .

(e)  $\text{frel } C = \text{frel } \bar{C} = \text{frel}(\text{intrel } C)$ .

(f)  $\text{af } C = \text{af } \bar{C} = \text{af}(\text{intrel } C)$ .

(g)  $\dim C = \dim \bar{C} = \dim(\text{intrel } C)$ .

**PROPOSICION 2.7.** *Sea  $C$  un conjunto convexo contenido en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $x \in C$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a)  $x \in \text{intrel } C$ .

(b) Si  $A$  es una recta en  $\text{af } C$  con  $x \in A$ , entonces existen puntos  $y_0, y_1 \in A \cap C$  tales que  $x \in (y_0, y_1)$ .

(c) Si  $y \in C$  con  $y \neq x$ , entonces existe un punto  $z \in C$  tal que  $x \in (y, z)$ .

Se define el *casco convexo cerrado* de un conjunto  $M$ ,  $\text{cconv } M$ , como el conjunto convexo cerrado más pequeño que contiene a  $M$ . Es fácil probar que para todo  $M \subset \mathbb{R}^n$  se tiene

$$\text{cconv } M = \overline{\text{conv } M}.$$

Sea  $C$  un conjunto convexo cerrado no vacío en  $\mathbb{R}^n$ . Llamaremos *semiespacio soporte* de  $C$  a un semiespacio cerrado  $K$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $C \subset K$  y  $H \cap C \neq \emptyset$ , donde  $H$  denota al hiperplano que determina a  $K$ .

Un *hiperplano soporte* de  $C$  será un hiperplano  $H$  en  $\mathbb{R}^n$  que acote a un semiespacio soporte de  $C$ . Si  $H$  es un hiperplano soporte de  $C$  y  $C \not\subset H$  diremos que  $H$  es un *hiperplano soporte propio* de  $C$ .

Analíticamente, un hiperplano  $H(a, \alpha)$ , es un hiperplano soporte de  $C$  si y sólo si

$$\alpha = \max_{x \in C} \langle x, a \rangle$$

o

$$\alpha = \min_{x \in C} \langle x, a \rangle.$$

Además,  $H(a, \alpha)$  será un hiperplano soporte propio de  $C$  si y sólo si  $H$  es un

hiperplano soporte de  $C$  y

$$\inf_{x \in C} \langle x, a \rangle < \max_{x \in C} \langle x, a \rangle.$$

**PROPOSICION 2.8.** Sea  $C$  un conjunto convexo no vacío en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $H$  un hiperplano en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a)  $H \cap \text{intrel } C = \emptyset$ .

(b)  $C$  está contenido en uno de los dos semiespacios cerrados acotados por  $H$  pero no en  $H$ .

De aquí se tiene que un hiperplano soporte  $H$ , de un conjunto convexo, cerrado, no vacío  $C$ , es un hiperplano soporte propio de  $C$  si y sólo si  $H \cap \text{intrel } C = \emptyset$ .

Finalmente, enunciaremos tres teoremas básicos en la teoría de la convexidad:

**TEOREMA 2.9.** Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos conjuntos convexos cerrados contenidos en  $\mathbb{R}^n$  tales que no tengan puntos en común y con al menos uno de ellos acotado. Entonces existe un hiperplano  $H$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $C_1$  está contenido en uno de los semiespacios abiertos definidos por  $H$  y  $C_2$  está contenido en el otro semiespacio abierto definido por  $H$ .

**TEOREMA 2.10.** Sea  $C$  un conjunto convexo cerrado en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $x \in \text{frel } C$ . Entonces existe un hiperplano soporte  $H$  de  $C$  tal que  $x \in H$ .

Cabe mencionar que de hecho este teorema nos sirve para caracterizar a los conjuntos convexos cerrados. Esto quiere decir que un conjunto cerrado  $C$  (con

intrel  $C \neq \emptyset$ ) es convexo si y sólo si por cada punto de su frontera relativa pasa un hiperplano soporte.

**TEOREMA 2.11.** *Sea  $C$  un conjunto convexo cerrado no vacío en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $C$  es la intersección de sus semiespacios soporte.*

Puede decirse que este teorema nos da una representación "externa" de un conjunto convexo cerrado con base en los hiperplanos soportes del conjunto. Más adelante utilizaremos esta forma de representación para definir una familia particular de conjuntos convexos.

### 3. LAS CARAS DE UN CONJUNTO CONVEXO

En esta sección definiremos ciertos subconjuntos "extremos" de un conjunto convexo. Dichos subconjuntos formarán la "cáscara" del conjunto convexo y nos serán de gran utilidad cuando trabajemos con los conceptos de polaridad y dualidad. Además, nos servirán para dar una representación "interna" de los conjuntos convexos compactos.

Sea  $C$  un conjunto convexo cerrado en  $\mathbb{R}^n$ . Un subconjunto convexo  $F$  de  $C$  es llamado *cara* de  $C$  si para cualesquiera dos puntos  $x, y \in C$  tales que  $(x, y) \cap F$  sea no vacío, se tiene que  $[x, y] \subset F$ .

Los subconjuntos  $\emptyset$  y  $C$  de  $C$  son caras de  $C$ , llamadas *caras impropias*; todas las otras caras de  $C$  son llamadas *caras propias*.

Un punto  $x \in C$  es llamado *punto extremo* de  $C$  si  $\{x\}$  es una cara de  $C$ . Esto quiere decir que  $x$  no está en el interior relativo de ningún segmento de recta con extremos en  $C$ , o equivalentemente, que  $C - \{x\}$  es también un conjunto convexo. El conjunto de puntos extremos de  $C$  se denotará por  $\text{ext } C$ .

Notemos que la intersección de cualquier conjunto de caras de  $C$  será nuevamente una cara de  $C$ .

Una cara  $F$  de  $C$  es llamada una  $d$ -cara si  $\dim F = d$  y llamaremos *faceta* de  $C$  a una cara  $F$  de  $C$  tal que  $\dim F = \dim C - 1$ .

Si  $C$  es un conjunto convexo cerrado con  $\dim C \geq 1$ , y  $H$  es un hiperplano soporte propio de  $C$ , entonces  $H \cap C$  es una cara propia de  $C$ . A este tipo de caras

se les llamará *caras expuestas* de  $C$ . Así mismo, se considerará al conjunto vacío y a  $C$  como caras expuestas y diremos que son caras expuestas impropias.

**PROPOSICION 3.1.** *Toda cara  $F$  de un conjunto convexo cerrado es un conjunto cerrado.*

**DEMOSTRACION.** Si  $F = \emptyset$  o  $F$  es un punto extremo, no hay nada que probar. Ahora supongamos que  $\dim F \geq 1$  y sea  $x$  un punto en  $\overline{F}$  y  $x_0$  un punto en  $\text{intrel } F$ . Si  $x \neq x_0$ , entonces  $[x_0, x)$  está contenido en  $\text{intrel } F$ . En particular,  $(x_0, x) \cap F \neq \emptyset$ . Por la definición de cara se tiene que  $x \in F$ , probando así la proposición.  $\square$

**PROPOSICION 3.2.** *Sea  $F$  una cara de un conjunto convexo cerrado  $C$  y sea  $G$  un subconjunto de  $F$ . Entonces  $G$  es una cara de  $C$  si y sólo si  $G$  es una cara de  $F$ .*

**DEMOSTRACION.** Si  $G$  es una cara de  $C$  se sigue directamente de la definición de cara que  $G$  es también una cara de  $F$ . Recíprocamente, supongamos que  $G$  es una cara de  $F$  y sean  $x$  y  $y$  puntos de  $C$  tales que  $(x, y) \cap G \neq \emptyset$ . Como  $G \subset F$  el segmento  $(x, y)$  también-intersecta a  $F$ . Esto implica que  $[x, y] \subset F$  puesto que  $F$  es una cara de  $C$ . Por otro lado, como  $G$  es una cara de  $F$  se tiene que  $[x, y] \subset G$  y por lo tanto que  $G$  es una cara de  $C$ .  $\square$

**PROPOSICION 3.3.** *Sea  $F$  una cara propia de un conjunto convexo cerrado  $C$ . Entonces  $F \subset \text{frel } C$ .*

**DEMOSTRACION.** Si  $\dim C = -1$  o  $0$ , no hay nada que probar. Supongamos entonces que  $\dim C \geq 1$ . Sea  $F$  una cara de  $C$  y supongamos que existe un punto

$x$  en  $F$  que pertenece a intrel  $C$ . Se probará que  $F = C$ . Sea  $y \in C$ . Si  $y = x$ , entonces  $y \in F$  como se desea. Si  $y \neq x$ , entonces existe un punto  $z \in C$  tal que  $x \in (y, z)$ . Como  $x \in F$  y  $F$  es una cara, se sigue que  $[y, z] \subset F$ . En particular  $y \in F$ . Con esto se termina la prueba.  $\square$

De las dos proposiciones anteriores se obtiene inmediatamente el siguiente:

**COROLARIO 3.4.** Sean  $F$  y  $G$  caras de un conjunto convexo cerrado  $C$  tales que  $G \subsetneq F$ . Entonces  $G \subset \text{frel } F$ .

**COROLARIO 3.5.** Sean  $F$  y  $G$  caras de un conjunto convexo cerrado,  $C$ , en  $\mathbb{R}^n$  tales que  $G \subsetneq F$ . Entonces  $\dim G < \dim F$ .

**DEMOSTRACION.** Como  $G \subset F$ , tenemos que  $\text{af } G \subset \text{af } F$  y por lo tanto que  $\dim G \leq \dim F$ . Supongamos que  $\text{af } G = \text{af } F$ .  $G \subset F$  implica que  $\text{intrel } G \subset \text{intrel } F$ . Si aplicamos el corolario anterior, obtenemos que  $\text{intrel } G = \emptyset$ . Como el interior relativo de un conjunto convexo cerrado es no vacío, esto implica que  $G = \emptyset$ . Pero como  $\text{af } F = \text{af } G$  se tendría también que  $F = \emptyset$  lo cual contradice la hipótesis  $G \neq F$ . Se concluye entonces que  $\text{af } G \subsetneq \text{af } F$  y por lo tanto que  $\dim G < \dim F$ .  $\square$

**PROPOSICION 3.6.** Sea  $C$  un conjunto convexo cerrado en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $x \in C$  y sea  $F$  una cara de  $C$  que contenga a  $x$ . Entonces  $F$  es la cara más pequeña de  $C$  que contiene a  $x$  si y sólo si  $x \in \text{intrel } F$ .

**DEMOSTRACION.** Si  $x \in \text{intrel } F$  entonces, por el Corolario 3.4,  $F$  es la cara más pequeña de  $C$  que contiene a  $x$ .

Recíprocamente, supongamos que  $x \in \text{frel } F$ , entonces existe un hiperplano soporte  $H$  de  $F$  que contiene a  $x$ . Definimos  $G := F \cap H$ . Sabemos que  $G$  es una cara propia (expuesta) de  $F$  que contiene a  $x$ . De acuerdo con la Proposición 3.2,  $G$  es también una cara de  $C$ , y por lo tanto,  $F$  no es la cara más pequeña de  $C$  que contiene a  $x$ . Con esto queda probada la proposición.  $\square$

**PROPOSICION 3.7.** *Sea  $F$  una faceta de un conjunto convexo cerrado  $C$ . Entonces  $F$  es una cara expuesta de  $C$ .*

**DEMOSTRACION.** Por la definición de faceta se tiene que  $\dim F \geq 0$  y por lo tanto que existe un punto  $x$  en  $\text{intrel } F$ . De la proposición anterior se sigue que  $F$  es la cara más pequeña que contiene a  $x$ . Como  $x \in \text{frel } C$  existe un hiperplano soporte propio de  $C$  en  $x$ , y por lo tanto, una cara expuesta propia  $G$  de  $C$  que contiene a  $x$ . Se tiene entonces que  $F \subset G \subsetneq C$ . Por el Corolario 3.5, se obtienen las siguientes desigualdades

$$\dim C - 1 = \dim F \leq \dim G < \dim C$$

lo que demuestra que  $\dim G = \dim F$ . Aplicando nuevamente el Corolario 3.5, tenemos que  $G = F$  y por lo tanto que  $F$  es una cara expuesta de  $C$ .  $\square$

**TEOREMA 3.8.** *(Krein-Milman). Sea  $C$  un subconjunto compacto y convexo de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $M$  un subconjunto de  $C$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a)  $C = \text{conv } M$ .

(b)  $\text{ext } C \subset M$ .

En particular,

(c)  $C = \text{conv}(\text{ext } C)$ .

**DEMOSTRACION.** Supongamos que  $C = \text{conv } M$  y que  $x \in \text{ext } C$ . Si  $x \notin M$ , entonces  $M \subset C - \{x\}$  que es un conjunto convexo por la definición de punto extremo. Esto nos lleva a una contradicción pues se tendría que  $C = \text{conv } M \subset C - \{x\}$ .

Para demostrar la afirmación recíproca basta probar que  $C = \text{conv}(\text{ext } C)$ , pues en este caso se tendrá también que  $C = \text{conv } M$  para cualquier subconjunto  $M$  de  $C$  que contenga a  $\text{ext } C$ .

La inclusión  $\text{conv}(\text{ext } C) \subset C$  es obvia. La demostración de la otra inclusión se hará por inducción sobre la dimensión de  $C$ . Si  $\dim C = -1$  o  $0$  no hay nada que probar. Si  $\dim C = 1$  la afirmación es claramente válida. Supongamos ahora que la afirmación es válida para todos los conjuntos compactos y convexos con dimensión menor que  $d$ , donde  $d \geq 2$ ; sea  $C$  un conjunto compacto y convexo con  $\dim C = d$ . Sea  $x \in C$ . Queremos demostrar que  $x$  está en el casco convexo del conjunto de puntos extremos de  $C$ . Si  $x \in \text{ext } C$ , no hay nada que probar. Si  $x \notin \text{ext } C$ , entonces  $x$  pertenece al interior relativo de un segmento con extremos en  $C$ . Podemos suponer que los extremos de este segmento están en  $\text{frel } C$ , es decir,  $x \in (y_0, y_1)$  donde  $y_0, y_1 \in \text{frel } C$ . Sean  $F_0$  y  $F_1$  las caras más pequeñas de  $C$  que contienen a  $y_0$  y a  $y_1$ , respectivamente. Entonces  $F_0$  y  $F_1$  son caras propias de  $C$  y por lo tanto son conjuntos convexos compactos con dimensiones menores que  $d$ .

Aplicando la hipótesis de inducción obtenemos conjuntos  $\{x_{01}, \dots, x_{0p}\} \subset \text{ext}F_0 \subset \text{ext}C$  y  $\{x_{11}, \dots, x_{1q}\} \subset \text{ext}F_1 \subset \text{ext}C$  tales que  $y_0 \in \text{conv}\{x_{01}, \dots, x_{0p}\}$  y  $y_1 \in \text{conv}\{x_{11}, \dots, x_{1q}\}$ . Como  $x \in (y_0, y_1)$  y  $(y_0, y_1) \subset \text{conv}\{x_{01}, \dots, x_{0p}, x_{11}, \dots, x_{1q}\}$  se tiene entonces que  $x \in \text{conv}\{x_{01}, \dots, x_{0p}, x_{11}, \dots, x_{1q}\}$ , es decir,  $x$  está en el casco convexo de puntos extremos de  $C$  y el teorema está probado.  $\square$

Esta representación de  $C$  con base en sus puntos extremos  $C = \text{conv}(\text{ext } C)$ , es la representación "interna" de la que hablamos al inicio de esta sección.

#### 4. POLITOPOS

Presentaremos en esta sección, a los conjuntos convexos para los cuales la representación "interna" mencionada en la sección anterior, es finita. Este hecho simplificará la estructura del conjunto y nos permitirá probar algunas propiedades de sus caras; propiedades que en general no tienen las caras de cualquier conjunto convexo.

Llamaremos *politopo convexo* al casco convexo de un conjunto finito, no vacío, de puntos en  $\mathbb{R}^n$ .

Dado que por definición, los politopos convexos son conjuntos convexos, en lo sucesivo se omitirá la palabra convexos y se hablará simplemente de politopos.

Diremos que un politopo  $P$  es un  $k$ -politopo si  $\dim P = k$ .

Como el casco convexo de un conjunto compacto es también un conjunto compacto, se tiene que los politopos son conjuntos compactos. Podemos entonces aplicar el Teorema 3.8, para el caso particular en el que el conjunto compacto y convexo  $C$  sea un politopo  $P$ , y se tendrá que  $P = \text{conv}(\text{ext } P)$ .

**PROPOSICION 4.1.** *Sea  $P$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a)  $P$  es un politopo.

(b)  $P$  es un conjunto convexo compacto con un número finito de puntos extremos.

**DEMOSTRACION.** Supongamos que  $P$  es un politopo,  $P = \text{conv}\{x_1, \dots, x_m\}$ . Sabemos entonces que  $P$  es compacto y convexo y por el Teorema 3.8 se tiene que  $\text{ext } P \subset \{x_1, \dots, x_m\}$ . Por lo tanto  $\text{ext } P$  es finito y la primera implicación está probada.

La otra implicación se sigue directamente del Teorema 3.8 dado que  $P = \text{conv}(\text{ext } P)$ . □

Llamaremos *vértices* de un politopo  $P$  a los puntos extremos de  $P$ .

Un conjunto finito de puntos, que genera a un politopo  $P$ , no es único. Sin embargo, por el Teorema 3.8, podemos afirmar que existe un conjunto mínimo de puntos que generan a  $P$ , a saber, el conjunto de vértices o puntos extremos de  $P$ .

**PROPOSICION 4.2.** Sea  $P$  un politopo en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $F$  una cara propia de  $P$ . Entonces  $F$  es también un politopo y  $\text{ext } F = F \cap \text{ext } P$ .

**DEMOSTRACION.** Por la Proposición 3.1, sabemos que  $F$  es un subconjunto cerrado del conjunto compacto  $P$  y por lo tanto  $F$  es también compacto. Además, por la Proposición 3.2, sabemos que un punto  $x \in F$  es un punto extremo de  $F$  si y sólo si  $x$  es un punto extremo de  $P$ , es decir,  $\text{ext } F = F \cap \text{ext } P$ .

Por la Proposición 4.1,  $\text{ext } P$  es finito, lo que implica que  $\text{ext } F$  también lo es. Basta ahora aplicar nuevamente la Proposición 4.1 para completar la prueba. □

**COROLARIO 4.3.** Sea  $P$  un politopo en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces el número de caras de  $P$  es finito.

**DEMOSTRACION.** El Teorema 3.8 nos permite afirmar que  $\text{ext } P$  es un conjunto finito. Por la Proposición 4.2 sabemos que cada cara de  $P$  es el casco convexo de un subconjunto de  $\text{ext } P$ . Esto implica que existe sólo un número finito de caras de  $P$ . □

A continuación probaremos que las caras de un politopo  $P$  son de la forma  $H \cap P$  donde  $H$  es algún hiperplano en  $\mathbb{R}^n$ , es decir, que todas las caras de  $P$  son expuestas. Cabe mencionar que esto no sucede para cualquier conjunto convexo, como lo muestra el siguiente ejemplo:

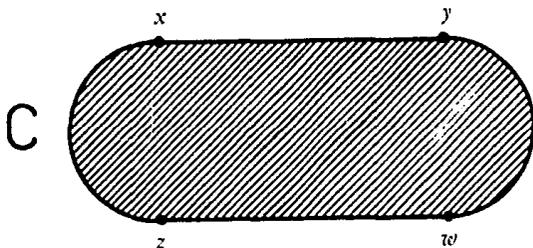


Figura 1.

El conjunto  $C$  es convexo y los puntos  $x, y, z$  y  $w$  son caras de  $C$  (puntos extremos) que no son caras expuestas.

**TEOREMA 4.4.** *Sea  $P$  un politopo en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces toda cara de  $P$  es una cara expuesta.*

**DEMOSTRACION.** Suponemos, sin pérdida de generalidad, que  $P$  es un  $n$ -

politopo en  $\mathbb{R}^n$ . Usaremos inducción sobre  $n$ .

Para  $n = 0$  no hay nada que probar. Los casos  $n = 1$  y  $n = 2$  son obvios.

Supongamos entonces que la afirmación es válida para politopos con dimensión menor que  $n$ , donde  $n \geq 3$ . Sea  $P$  un  $n$ -politopo en  $\mathbb{R}^n$ . Las caras impropias de  $P$  son, por convención, caras expuestas. Sea  $F$  una cara propia de  $P$  y sea  $x \in \text{intrel } F$ . Como  $x \in \text{frel } P$  existe un hiperplano soporte  $H$  de  $P$  en  $x$  tal que  $H \cap P$  es una cara expuesta propia de  $P$  que contiene a  $x$ . Dado que  $F$  es la cara más pequeña de  $P$  que contiene a  $x$ , tenemos que  $F \subset H \cap P$ . Si  $H \cap P = F$ , entonces  $F$  es una cara expuesta como se desea. Si  $F \subsetneq H \cap P$ , entonces por la Proposición 3.2,  $F$  es una cara propia de  $H \cap P$ . Como  $H \cap P$  es una cara propia de  $P$ , se tiene que  $H \cap P$  es un politopo y que  $\dim(H \cap P) < n$ . Si aplicamos la hipótesis de inducción a  $H \cap P$  podemos afirmar que existe un hiperplano soporte  $H'$  de  $H \cap P$  en  $\text{af}(H \cap P)$  tal que  $F = H' \cap (H \cap P)$ .

Ahora, extendamos el hiperplano  $H'$  a un hiperplano  $A$  en  $H$  tal que  $A \cap P = F$ . Observemos que  $\dim A = n - 2 \geq 1$ . Sea  $B$  un subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  con  $\dim B = 2$  ortogonal a  $A$  y sea  $\pi$  la proyección ortogonal de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $B$ .

No es difícil ver que  $\pi(A)$  es un punto en  $B$  y que  $\pi(P)$  es un 2-politopo en  $B$ . Probaremos que  $\pi(A)$  es un vértice de  $\pi(P)$ . En caso contrario existirían puntos  $y, z \in P$  tales que  $\pi(y) \neq \pi(z)$  y con  $\pi(A) \in (\pi(y), \pi(z))$ . Encontramos entonces un punto  $u \in P$  tal que  $u \in (y, z)$  y  $\pi(u) = \pi(A)$ . Además, como  $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$  se sigue que  $u \in A$  y por lo tanto  $u \in F = A \cap P$ .

Como  $F$  es cara de  $P$  se sigue que  $y, z \in F$ . Pero  $F \subset A$  y por lo tanto  $\pi(y) =$

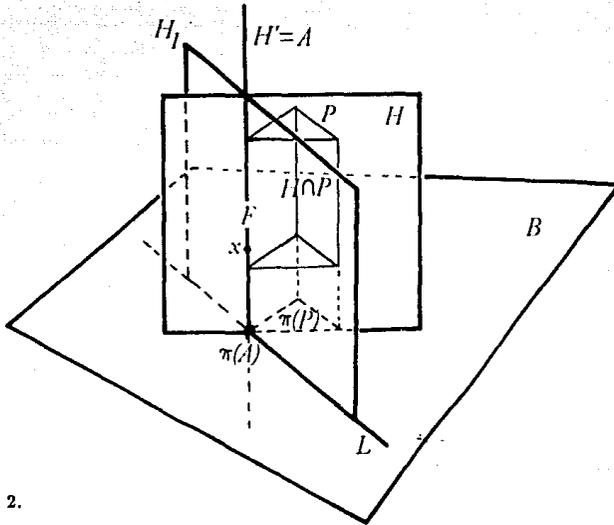


Figura 2.

$\pi(A)$  para toda  $v \in F$ , en particular,  $\pi(y) = \pi(z)$  lo cual es una contradicción. Con esto hemos probado que  $\pi(A)$  es un vértice de  $\pi(P)$ .

Aplicando el teorema, que es válido en dimensión 2, hallamos una recta  $L$  en  $B$  tal que

$$L \cap \pi(P) = \pi(A).$$

Definimos

$$H_1 := \text{af}(A \cup L) = \pi^{-1}(L).$$

Entonces  $H_1$  es un hiperplano soporte de  $P$  en  $\mathbb{R}^n$  con  $H_1 \cap P = F$ , lo que prueba que  $F$  es una cara expuesta.  $\square$

## 5. CONJUNTOS POLIEDRICOS

Recordemos que al final de la sección de convexidad vimos que los conjuntos convexos cerrados tienen una representación "externa" dada por las intersecciones de los semiespacios soportes del conjunto. Así como hay conjuntos convexos que tienen una representación "interna" finita, también existen conjuntos convexos con una representación "externa" finita. En esta sección se estudiarán estos conjuntos y, como lo hicimos con los polítopos, probaremos algunas características especiales de sus caras.

Un subconjunto  $Q$  de  $\mathbb{R}^n$  es llamado un *conjunto poliédrico* si  $Q$  es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados de  $\mathbb{R}^n$ . Conviene suponer, por convención, que  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto poliédrico.

Se sigue de la definición que los conjuntos poliédricos son conjuntos convexos cerrados.

Todo hiperplano  $H$  en  $\mathbb{R}^n$  es la intersección de los dos semiespacios cerrados definidos por él mismo. Por lo tanto  $H$  es un conjunto poliédrico. Así mismo, como todo subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  es la intersección de un número finito de hiperplanos en  $\mathbb{R}^n$ , se tiene que todo subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto poliédrico.

Dado que la estructura de las caras de  $Q$  es trivial cuando  $Q$  es un espacio afín (sus únicas caras son el conjunto vacío y  $Q$  mismo) y como todo conjunto poliédrico  $Q$ , con  $\dim Q = d$ , es afinmente isomorfo a un conjunto poliédrico  $Q'$  en  $\mathbb{R}^d$ , con  $\dim Q' = d$ , en lo sucesivo consideraremos únicamente conjuntos poliédricos  $Q$  en  $\mathbb{R}^n$  con  $\dim Q = n$  y  $Q \neq \mathbb{R}^n$ .

Todo conjunto poliédrico  $Q$ , con  $Q \neq \mathbb{R}^n$ , tiene una representación de la forma

$$Q = \bigcap_{i=1}^m K(x_i, \alpha_i)$$

donde cada  $K(x_i, \alpha_i) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x_i, y \rangle \leq \alpha_i\}$  es un semiespacio cerrado.

Se asumirá además que  $K(x_i, \alpha_i) \neq K(x_j, \alpha_j)$  para  $i \neq j$  y  $x_i \neq 0$  para toda  $i = 1, \dots, m$ .

Si  $Q = \mathbb{R}^n$ ,  $Q$  tiene una representación  $Q \doteq K(0, \alpha)$  donde  $\alpha$  es cualquier número mayor o igual que cero. Por otro lado, si  $Q \neq \mathbb{R}^n$  existe un número infinito de representaciones de  $Q$ , ya que siempre podemos agregar semiespacios cerrados que contengan a  $Q$ .

Diremos que una representación del tipo

$$Q = \bigcap_{i=1}^m K(x_i, \alpha_i)$$

es *irreducible* si  $n = 1$  o  $n > 1$  y

$$Q \not\subseteq \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m K(x_i, \alpha_i)$$

para toda  $j = 1, \dots, m$ .

En caso contrario diremos que la representación es *reducible*. Es claro que de toda representación reducible podemos obtener una irreducible omitiendo algunos de los semiespacios  $K(x_i, \alpha_i)$ .

**PROPOSICION 5.1.** Sea  $Q$  un conjunto poliédrico en  $\mathbb{R}^n$  con  $\dim Q = n$  y  $Q \neq \mathbb{R}^n$ . Sea

$$Q = \bigcap_{i=1}^m K(x_i, \alpha_i)$$

una representación de  $Q$  con  $m > 1$ . Entonces la representación es irreducible si y sólo si

$$H(x_j, \alpha_j) \cap \text{int} \left( \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m K(x_i, \alpha_i) \right) \neq \emptyset$$

para cada  $j = 1, \dots, m$ .

**DEMOSTRACION.** Para cada  $j = 1, \dots, m$  definimos

$$M_j = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m K(x_i, \alpha_i).$$

Entonces  $Q = K(x_j, \alpha_j) \cap M_j$ . Como  $\dim Q = n$  se debe tener que  $\dim M_j = n$ . Por lo tanto  $\text{int} M_j = \text{int} M_j$  y  $M_j \not\subset H(x_j, \alpha_j)$ .

Como  $H \cap \text{int} C = \emptyset$  si y sólo si  $C$  está contenido en alguno de los semiespacios determinados por  $H$  pero no en  $H$ , de la observación hecha arriba se sigue que la condición que se desea probar es equivalente a las siguientes:

$$M_j \not\subset K(x_j, \alpha_j), \quad M_j \not\subset K(-x_j, -\alpha_j) \quad (*)$$

Si  $M_j \subset K(-x_j, -\alpha_j)$ , entonces se tendría que  $Q \subset K(x_j, \alpha_j) \cap K(-x_j, -\alpha_j) = H(x_j, \alpha_j)$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto la condición (\*) es equivalente a  $M_j \not\subset K(x_j, \alpha_j)$ .

Esta nueva condición es claramente equivalente a la condición de la irreducibilidad de la representación de  $Q$ ,

$$Q \not\subset \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m K(x_i, \alpha_i).$$

Con esto se termina la demostración. □

**TEOREMA 5.2.** Sea  $Q$  un conjunto poliédrico en  $\mathbb{R}^n$  con  $\dim Q = n$  y  $Q \neq \mathbb{R}^n$ . Sea

$$Q = \bigcap_{i=1}^m K(x_i, \alpha_i)$$

una representación de  $Q$ . Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

(a)  $\text{fr } Q = \bigcup_{i=1}^m (H(x_i, \alpha_i) \cap Q)$ .

(b) Toda faceta de  $Q$  es de la forma  $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ .

(c) Todo conjunto  $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$  es una faceta de  $Q$  si y sólo si la representación es irreducible.

**DEMOSTRACION.** (a)

$$\begin{aligned} \text{int } Q &= \text{int } \bigcap_{i=1}^m K(x_i, \alpha_i) \\ &= \bigcap_{i=1}^m \text{int } K(x_i, \alpha_i) \\ &= \bigcap_{i=1}^m (K(x_i, \alpha_i) - H(x_i, \alpha_i)) \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} \text{fr } Q = Q - \text{int } Q &= Q - \bigcap_{i=1}^m (K(x_i, \alpha_i) - H(x_i, \alpha_i)) \\ &= Q \cap \bigcup_{i=1}^m (K(x_i, \alpha_i)^c \cup H(x_i, \alpha_i)) \\ &= \left( Q \cap \bigcup_{i=1}^m K(x_i, \alpha_i)^c \right) \cup \left( Q \cap \bigcup_{i=1}^m H(x_i, \alpha_i) \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^m (H(x_i, \alpha_i) \cap Q). \end{aligned}$$

(b) Sea  $F$  una faceta de  $Q$  y sea  $x$  un punto en intrel  $F$ . Entonces  $F$  es la cara más pequeña de  $Q$  que contiene a  $x$ . Por la parte (a) se sigue que existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $x \in H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ . Esto implica que  $F \subset H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ . Como  $\dim F = n - 1$ , se tiene que

$$n - 1 \geq \dim H(x_j, \alpha_j) \cap Q \geq \dim F = n - 1.$$

Por el Corolario 3.5 se infiere que  $F = H(x_j, \alpha_j) \cap Q$  y (b) está probado.

(c) Para  $n = 1$  no hay nada que probar. Si la representación es irreducible entonces cada  $H(x_j, \alpha_j)$  es un hiperplano soporte de  $Q$ , por lo que  $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$  es una cara propia de  $Q$ , para  $j = 1, \dots, m$ . Se quiere demostrar que  $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$  tiene interior no vacío en  $H(x_j, \alpha_j)$ .

Por la Proposición 5.1 tenemos que

$$\begin{aligned} H(x_j, \alpha_j) \cap Q &= H(x_j, \alpha_j) \cap \bigcap_{i=1}^m K(x_i, \alpha_i) \\ &= H(x_j, \alpha_j) \cap M_j \\ &\supset H(x_j, \alpha_j) \cap \text{int } M_j \\ &\neq \emptyset, \end{aligned}$$

donde  $M_j$  está definido de la misma manera que en la Proposición 5.1.

Como  $H(x_j, \alpha_j) \cap \text{int } M_j$  es abierto en  $H(x_j, \alpha_j)$ , entonces  $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$  es de hecho una faceta, como se quería probar.

Supongamos ahora que la representación de  $Q$  es reducible. Entonces  $Q = M_j$  para alguna  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Si  $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$  fuera faceta de  $Q$ , tomamos  $x \in \text{intrel } H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ . Por la parte (a) existe  $i \neq j$  tal que  $x \in H(x_i, \alpha_i) \cap Q$ , pero entonces por el Corolario 3.5 se debe tener que

$$H(x_j, \alpha_j) \cap Q = H(x_i, \alpha_i) \cap Q$$

lo cual implica que  $K(x_j, \alpha_j) = K(x_i, \alpha_i)$  que es una contradicción. Por lo tanto  $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$  no es faceta de  $Q$  y el teorema está probado.  $\square$

Este teorema implica que la representación irreducible de un conjunto poliédrico es única.

**PROPOSICION 5.3.** *Sea  $F$  una cara propia de un conjunto poliédrico  $Q$  en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces existe una faceta  $G$  de  $Q$  que contiene a  $F$ .*

**DEMOSTRACION.** Podemos suponer que  $\dim Q = n$ . Sea

$$Q = \bigcap_{i=1}^m K(x_i, \alpha_i)$$

una representación irreducible. Sea  $x$  un punto en  $\text{intrel } F$ . Por el teorema anterior existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $x \in H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ . Si definimos a  $G$  como  $G := H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ , entonces  $G$  será una faceta de  $Q$  debido a que la representación es irreducible. Dado que  $F$  es la cara más pequeña de  $Q$  que contiene a  $x$  se tiene que  $F \subset G$  y la proposición está probada.  $\square$

**COROLARIO 5.4.** *Sea  $Q$  un conjunto poliédrico en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces toda cara de  $Q$  es un conjunto poliédrico.*

**DEMOSTRACION.** Por la proposición anterior sabemos que toda cara propia de  $Q$  es cara de una faceta de  $Q$ . Por el Teorema 5.2, las facetas de  $Q$  son conjuntos

poliédricos. La demostración se sigue ahora fácilmente por inducción, sobre la dimensión de  $Q$ .  $\square$

**COROLARIO 5.5.** *Sea  $Q$  un conjunto poliédrico. Entonces el número de caras de  $Q$  es finito.*

**DEMOSTRACION.** Por el Teorema 5.2, el número de facetas de  $Q$  es finito y como toda cara propia de  $Q$  es cara de alguna faceta de  $Q$ , nuevamente se prueba el resultado por inducción sobre la dimensión de  $Q$ .  $\square$

Cabe mencionar que en este momento ya podríamos probar la primera parte del teorema central de esta tesis. Es decir, que todo conjunto poliédrico acotado es un politopo. Sin embargo, pospondremos su demostración para una sección posterior, hasta que desarrollemos la teoría que nos permita probar la proposición recíproca del teorema.

## 6. POLARIDAD

Con el propósito de familiarizar al lector con el concepto de polaridad y de darle una visión geométrica más clara del mismo, comenzaremos esta sección introduciendo las nociones de polos y polares en el plano euclidiano. Tomemos una circunferencia  $S$  de radio  $r$  y centro  $O$  y sea  $P$  un punto del plano distinto de  $O$ , diremos entonces que un punto  $P'$  sobre la recta  $OP$  es el *inverso* de  $P$ , con respecto a la circunferencia  $S$ , si se cumple la siguiente igualdad:

$$(\overline{OP})(\overline{OP'}) = r^2.$$

La circunferencia  $S$  será llamada la *circunferencia de inversión* y su centro  $O$  será llamado el *centro de inversión*.

La siguiente figura muestra un método para hallar el inverso de un punto con respecto a una circunferencia con centro  $O$ . Si el punto  $P$  está dentro del círculo trazamos por  $P$  una perpendicular a la recta  $OP$ . Hallamos un punto  $Q$  donde esta perpendicular corte a la circunferencia. Por  $Q$  trazamos una tangente a la circunferencia, el inverso  $P'$  de  $P$  será el punto donde la tangente corte a la recta  $OP$ . Si el punto  $P$  está fuera de la circunferencia se sigue el mismo proceso en sentido contrario.

Si  $a$ ,  $b$  y  $r$  denotan las distancias medidas desde  $O$  a  $P$ ,  $P'$  y  $Q$ , respectivamente, entonces es fácil probar, con base en la semejanza de los triángulos rectángulos que se obtienen al unir  $P$  con  $Q$ , que  $P'$  es el inverso de  $P$  respecto a esta circunferencia si y sólo si  $a \cdot b = r^2$ .

Es claro que la relación de ser inverso es una relación simétrica, es decir,  $P'$  es

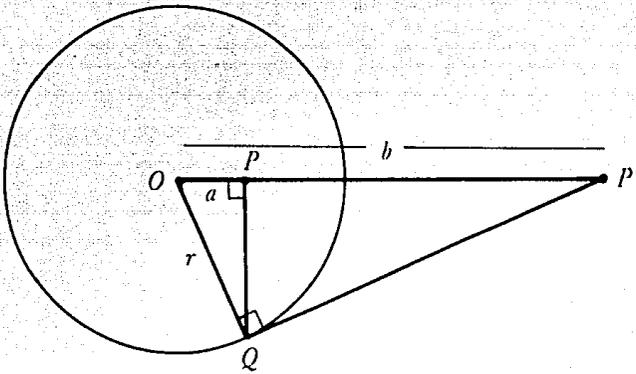


Figura 3.

el inverso de  $P$  si y sólo si  $P$  es el inverso de  $P'$ . Además, todo punto distinto del centro de inversión tiene un inverso.

Si  $P'$  es el inverso de  $P$  con respecto a una circunferencia dada, con centro en  $O$  y radio  $r$ , definiremos la *recta polar* de  $P$  con respecto a esta circunferencia, como aquella recta  $\ell$  que pasa por  $P'$  y es perpendicular a la recta  $OP$ , Diremos además que  $P$  es el *polo* de la recta  $\ell$ .

Es fácil probar que la recta polar de un punto, con respecto a una circunferencia, corta a ésta, es tangente a ella en dicho punto o no la corta, según que el punto sea exterior a la circunferencia, esté en ella o sea interior a la misma.

Un resultado básico en la teoría de polos y polares es el siguiente:

**TEOREMA 6.1.** *Si respecto a una circunferencia dada, la recta polar de un punto  $P$  pasa por el punto  $Q$ , entonces la recta polar de  $Q$  pasa por  $P$ .*

Estos mismos conceptos y resultados los podemos extender al espacio tridimen-

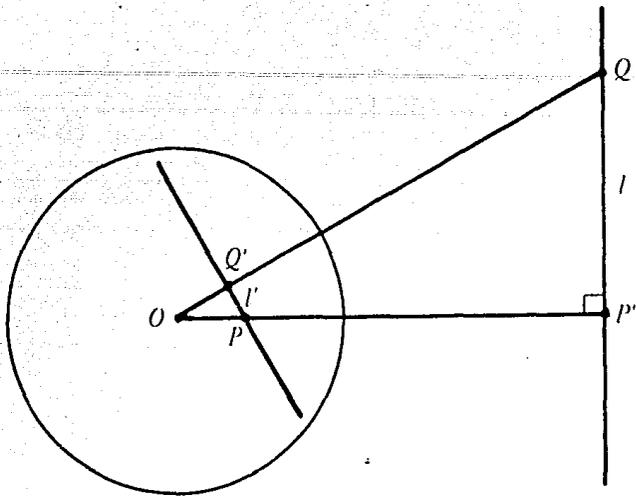


Figura 4.

sional, para lo cual solo tenemos que imaginarnos la primera figura de esta sección como si fuera un corte diametral de una esfera en  $\mathbb{R}^3$  con  $P$  en su interior,  $P'$  fuera de ella,  $Q$  sobre su superficie y  $O$  como su centro, de tal forma que  $OQ$  sea un radio de la esfera.

En este caso hablaremos del *plano polar* de  $P$  y éste será aquel plano que pase por  $P'$  y que sea perpendicular al segmento  $OP$ .

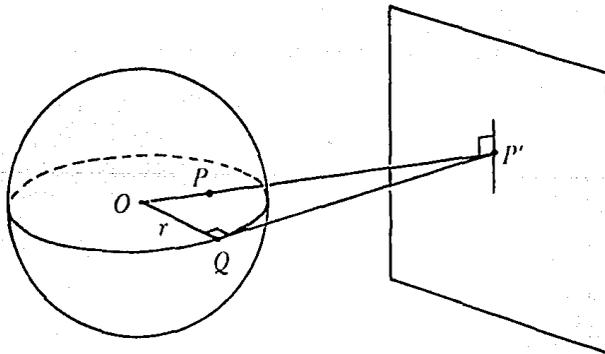


Figura 5.

Esta misma idea la podemos generalizar para cualquier espacio  $\mathbb{R}^n$  fijándonos en la esfera con centro  $O$  y radio  $r$ .

$$S(O, r) = \{ a \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r \}$$

En general para un punto  $P \neq O$  hablaremos del *hiperplano polar* de  $P$  con respecto a la esfera  $S(O, r)$ . Como en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , este hiperplano será aquel que pase por el inverso de  $P$  y que tenga como vector normal al vector determinado por el segmento  $OP$ .

Si utilizamos el producto interno canónico en  $\mathbb{R}^n$  entonces el hiperplano polar de un vector  $x \neq O$  con respecto a la esfera  $S(O, r)$  estará dado por el conjunto

$$H(x, r^2) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = r^2 \}$$

Esto se puede observar fácilmente ya que el inverso de  $x$  con respecto a la circunferencia  $S(O, r)$  es un punto de la forma  $cx$  con  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$  y tal que  $\|x\| \|cx\| = r^2$ . El hiperplano polar de  $x$  estará formado por los puntos  $y \in \mathbb{R}^n$  cuya proyección ortogonal sobre  $x$  sea precisamente el vector  $cx$ . La proyección ortogonal de  $y$  sobre  $x$  está dada por el vector

$$\frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} x$$

y lo que queremos es que

$$\frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} = c$$

es decir,

$$\langle y, x \rangle = c \|x\|^2 = r^2.$$

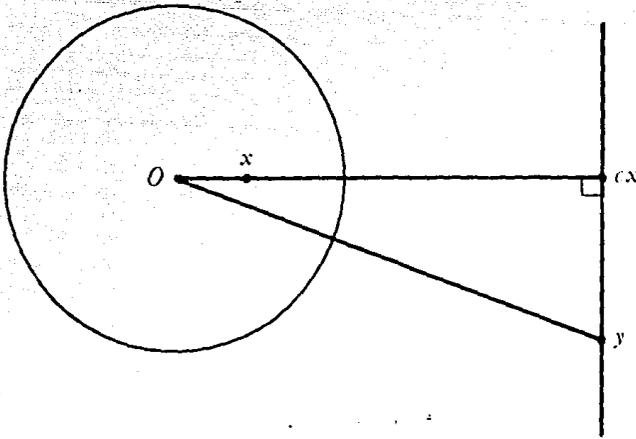


Figura 6.

Con esta idea en mente definiremos para un conjunto en  $\mathbb{R}^n$  su conjunto polar, tomando como esfera de inversión a la esfera  $S(O, 1)$  con centro en  $O$  y radio 1.

Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$ , se define el *conjunto polar*  $M^*$  de  $M$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} M^* &:= \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in M : \langle x, y \rangle \leq 1 \} \\ &= \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \sup_{x \in M} \langle x, y \rangle \leq 1 \} \\ &= \bigcap_{x \in M} K(x, 1). \end{aligned}$$

es decir, el conjunto polar de  $M$  será la intersección de todos los semiespacios  $K(x, 1)$ , determinados por los hiperplanos polares  $H(x, 1)$ , de puntos  $x \in M$ , con respecto a la esfera  $S(O, 1)$ .

Como  $y \in K(x, 1)$  si y sólo si  $x \in K(y, 1)$  se tiene entonces que  $y \in M^*$  si y sólo si  $M \subset K(y, 1)$ .

De la definición de  $M^*$  se sigue inmediatamente que  $M^*$  es un conjunto convexo cerrado que contiene al vector  $O$  de  $\mathbb{R}^n$ . Además si  $M_1 \subset M_2$ , entonces  $M_1^* \supset M_2^*$ .

Veamos ahora algunos ejemplos:

Si  $a$  es un punto en  $\mathbb{R}^n$  entonces

$$\{a\}^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq 1\}$$

es un semiespacio en  $\mathbb{R}^n$ . Veamos que con esta definición si podemos hablar del conjunto polar del origen  $O$ , en este caso tenemos  $\{O\}^* = \mathbb{R}^n$ .

El conjunto polar de un semiespacio  $K(a, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle \leq \alpha\}$  es el segmento

$$K(a, \alpha)^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = at : 0 \leq t \leq 1/\alpha\} \quad \text{si } \alpha > 0$$

y el rayo

$$K(a, \alpha)^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = at : t \geq 0\} \quad \text{si } \alpha \leq 0.$$

Para la esfera cerrada  $S(O, r)$  de radio  $r$  y centro  $O$  se tendrá que

$$S(O, r)^* = S(O, 1/r)$$

ya que

$$\sup_{z \in S(O, r)} \langle x, y \rangle = r \|y\|.$$

**PROPOSICION 6.2.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces se cumple lo siguiente:

(a) Si  $M$  es acotado, entonces  $O \in \text{int } M^*$ .

(b) Si  $O \in \text{int } M$ , entonces  $M^*$  es acotado.

**DEMOSTRACION.** (a) Si  $M$  es acotado, entonces  $M \subset S(O, r)$  para algún real  $r > 0$ . Por las observaciones hechas arriba se tiene entonces que  $S(O, 1/r) \subset M^*$  lo cual implica que  $O \in \text{int } M^*$  y (a) está probado.

(b) Si  $O \in \text{int } M$ , entonces existe un real  $r > 0$  tal que  $S(O, r) \subset M$ . Esto implica que  $M^* \subset S(O, 1/r)$ , es decir,  $M^*$  está acotado y con esto se prueba (b).  $\square$

La operación de tomar el conjunto polar de un conjunto  $M$  se puede iterar y por lo tanto podemos hablar del *conjunto bipolar*  $M^{**}$  de  $M$ . En este caso,  $M^{**}$  está definido como  $M^{**} := (M^*)^*$ .

**PROPOSICION 6.3.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces

$$M^{**} = \text{cconv}(\{O\} \cup M),$$

es decir,  $M^{**}$  es el conjunto convexo cerrado más pequeño que contiene a  $\{O\}$  y a  $M$ .

**DEMOSTRACION.** Por definición

$$M^{**} = \bigcap_{y \in M^*} K(y, 1) = \bigcap_{M \subset K(y, 1)} K(y, 1).$$

Esto implica que  $M^{**}$  es un conjunto convexo cerrado que contiene a  $\{O\}$  y a  $M$  y por lo tanto

$$\text{cconv}(\{O\} \cup M) \subset M^{**}.$$

Ahora, sea  $z \in \mathbb{R}^n$  tal que  $z \notin \text{cconv}(\{O\} \cup M)$ . Queremos probar que existe un semiespacio cerrado  $K(u, 1)$  tal que  $M \subset K(u, 1)$  y  $z \notin K(u, 1)$ .

Sea  $K(y, \alpha)$  un semiespacio soporte de  $\text{cconv}(\{O\} \cup M)$  tal que

$$z \notin K(y, \alpha).$$

Tenemos entonces que

$$\alpha = \max\{\langle x, y \rangle \mid x \in \text{cconv}(\{O\} \cup M)\}.$$

De aquí se sigue que  $\alpha < \langle z, y \rangle$  y como  $O \in \text{cconv}(\{O\} \cup M)$  entonces  $\alpha \geq 0$ .

Ahora escojamos  $\beta > 0$  tal que  $\alpha \leq \beta < \langle z, y \rangle$ . Multiplicando esta expresión por  $\beta^{-1}$  y haciendo  $u = y\beta^{-1}$  se obtiene

$$\max\{\langle x, u \rangle \mid x \in \text{cconv}(\{O\} \cup M)\} \leq 1 < \langle z, u \rangle.$$

Se sigue entonces que  $M \subset K(u, 1)$  y  $z \notin K(u, 1)$  con lo cual termina la prueba.  $\square$

De las dos proposiciones anteriores se infiere inmediatamente el siguiente:

**COROLARIO 6.4.** *Sea  $C$  un conjunto convexo compacto en  $\mathbb{R}^n$  con  $O \in \text{int } C$ . Entonces  $C^*$  es también un conjunto convexo compacto con  $O \in \text{int } C^*$  y  $C^{**} = C$ .*

A partir de este corolario se observa que si  $C$  es un conjunto convexo compacto con  $O \in \text{int } C$ , entonces  $C$  y  $C^*$  juegan papeles totalmente simétricos. Diremos que dos subconjuntos  $D$  y  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  son *mutuamente polares* si  $D^* = C$  y  $C^* = D$ .

**PROPOSICION 6.5.** *Sea  $C$  un conjunto convexo compacto con  $O \in \text{int } C$  y sea  $y \in \mathbb{R}^n$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a)  $H(y, 1)$  es hiperplano soporte de  $C$ .

(b)  $y \in \text{fr } C^*$ .

*Similarmente, sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(c)  $H(x, 1)$  es hiperplano soporte de  $C^*$ .

(d)  $x \in \text{fr } C$ .

**DEMOSTRACION.** Supongamos que se cumple (a). Esto implica que  $C \subset K(y, 1)$  y que  $\sup_{x \in C} \langle x, y \rangle = 1$ . De aquí se sigue que  $y \in C^*$ . Si  $y \in \text{int } C^*$  entonces existe  $\lambda > 1$  tal que  $\lambda y \in C^*$ . Por la definición de conjunto polar se tiene entonces que

$$\sup_{x \in C} \langle x, \lambda y \rangle \leq 1$$

y de aquí se sigue que

$$\sup_{x \in C} \langle x, y \rangle \leq \frac{1}{\lambda} < 1,$$

lo cual es una contradicción al hecho de que  $\sup_{x \in C} \langle x, y \rangle = 1$ . Por lo tanto  $y \in \text{fr } C^*$  y la primera implicación queda probada.

Recíprocamente, supongamos que se cumple (b). Como  $O \in \text{int } C^*$  y  $y \in C^* - \{O\}$  entonces  $0 < \sup_{x \in C} \langle x, y \rangle \leq 1$ . Si se tuviera que  $\sup_{x \in C} \langle x, y \rangle < 1$ , entonces existiría  $\lambda > 1$  tal que  $\sup_{x \in C} \langle x, \lambda y \rangle = 1$ . De aquí se sigue que  $\lambda y \in C^*$ . Como  $O \in \text{int } C^*$  y  $y \in (O, \lambda y)$ , se tiene que  $y \in \text{int } C^*$  contradiciendo nuestra hipótesis. Por lo tanto  $\sup_{x \in C} \langle x, y \rangle = 1$ . Como este supremo es de hecho un máximo, por la compacidad de  $C$  y la continuidad del producto interno, se tiene que  $H(y, 1)$  es hiperplano soporte de  $C$  y la primera parte de la proposición está probada.

La segunda parte de la proposición se obtiene de la primera, dada la simetría de  $C$  y  $C^*$ . □

**COROLARIO 6.6.** Sea  $C$  un conjunto convezo compacto con  $O \in \text{int } C$ . Para  $x, y \in \mathbb{R}^n$  son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(a)  $H(y, 1)$  es hiperplano soporte de  $C$  en  $x$ .

(b)  $H(x, 1)$  es hiperplano soporte de  $C^*$  en  $y$ .

(c)  $\langle x, y \rangle = 1$ ,  $x \in \text{fr } C$ ,  $y \in \text{fr } C^*$ .

(d)  $\langle x, y \rangle = 1$ ,  $x \in C$ ,  $y \in C^*$ .

**DEMOSTRACION.** La equivalencia de (a) y (c) se sigue de la proposición anterior, lo mismo que la equivalencia de (b) y (c).

Por otro lado, la implicación de (c) a (d) es trivial, por lo que solo faltaría probar que (d) implica (a).

Como  $y \in C^*$ , por la definición de  $C^*$  se tiene que  $C \subset K(y, 1)$ . Como  $\langle x, y \rangle = 1$  se sigue que  $x \in H(y, 1)$ . Además, como  $x \in C$ , se tiene entonces que  $H(y, 1)$  es hiperplano soporte de  $C$  en  $x$  y el resultado está probado.  $\square$

## 7. POLARIDAD DE POLITOPOS Y CONJUNTOS POLIEDRICOS

Aplicaremos ahora el concepto de polaridad a los politopos y a los conjuntos poliédricos y probaremos uno de los resultados principales de la teoría de politopos. Esto es el hecho de que los politopos son precisamente los conjuntos poliédricos acotados no vacíos. Con esto veremos que los conjuntos convexos compactos no vacíos con una representación "externa" finita coinciden con aquellos conjuntos convexos que tienen una representación "interna" finita.

**TEOREMA 7.1.** Sean  $x_1, \dots, x_m$ , con  $m \geq 1$ , puntos distintos de  $\mathbb{R}^n$ , y sean

$$P := \text{conv}\{x_1, \dots, x_m\}$$

y

$$Q := \bigcap_{i=1}^m K(x_i, 1).$$

Entonces se cumple lo siguiente:

(a)  $P^* = Q$ .

(b)  $Q^* = \text{conv}\{O, x_1, \dots, x_m\}$ .

(c)  $P$  y  $Q$  son mutuamente polares si y sólo si  $O \in P$ .

(d) Si  $Q$  es acotado, entonces  $P$  y  $Q$  son mutuamente polares si y sólo si  $O \in \text{int } P$ .

(e) Si  $Q$  es acotado y  $P$  y  $Q$  son mutuamente polares, entonces  $\text{ext } P = \{x_1, \dots, x_m\}$  si y sólo si la representación  $Q = \bigcap_{i=1}^m K(x_i, 1)$  es irreducible.

**DEMOSTRACION.** (a) De la definición de conjunto polar se sigue que

$$\{x_1, \dots, x_m\}^* = Q.$$

Dado que  $\{x_1, \dots, x_m\} \subset K(y, 1)$  si y sólo si  $\text{conv}\{x_1, \dots, x_m\} \subset K(y, 1)$ , se tiene que  $\{x_1, \dots, x_m\}^* = (\text{conv}\{x_1, \dots, x_m\})^*$  y por lo tanto

$$P^* = Q.$$

(b) Por la Proposición 6.3 y la parte (a) tenemos que

$$\begin{aligned} Q^* &= P^{**} \\ &= \text{cconv}\{O, x_1, \dots, x_m\} \\ &= \text{conv}\{O, x_1, \dots, x_m\}. \end{aligned}$$

(c) Es consecuencia inmediata de los incisos (a) y (b).

(d) Se sigue del inciso (c) y de la Proposición 6.2.

(e) Por hipótesis debe tenerse que  $m \geq 2$ . Para cada  $j = 1, \dots, m$  definimos

$$P_j := \text{conv}\{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m\}$$

y

$$Q_j = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m K(x_i, 1).$$

Aplicando la parte (a) a  $P_j$  y a  $Q_j$  obtenemos  $P_j^* = Q_j$ . Por otro lado, el Teorema 3.8 muestra que  $\text{ext}P \subset \{x_1, \dots, x_m\}$ . Si  $\text{ext}P$  fuera un subconjunto propio de  $\{x_1, \dots, x_m\}$ , entonces se tendría que  $P = P_j$  para alguna  $j \in \{1, \dots, m\}$ , de donde

$P^* = P_j^*$  y  $P^* = Q_j$ . Pero sabemos que  $P^* = Q$ . Esto implica que  $Q = Q_j$  y por lo tanto la representación de  $Q$  no es irreducible.

Recíprocamente, supongamos que la representación de  $Q$  no es irreducible. Entonces existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $Q = Q_j$  y consecuentemente  $Q^* = Q_j^*$ . Si aplicamos (b) al conjunto  $\{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m\}$ , vemos que

$$Q_j^* = \text{conv}\{O, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m\}.$$

Como  $Q^* = P$  y  $Q^* = Q_j^*$  se sigue que

$$P = \text{conv}\{O, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m\}.$$

Por el Teorema 3.8, sabemos que cualquier punto del conjunto

$$\{O, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m\}$$

que no sea punto extremo de  $P$  puede ser omitido. Como  $O$  no es punto extremo, ya que  $O \in \text{int } P$ , por (d) obtenemos

$$P = \text{conv}\{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m\}.$$

Nuevamente el Teorema 3.8 implica que  $\text{ext } P \subset \{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m\}$  y por lo tanto  $\text{ext } P$  es un subconjunto propio de  $\{x_1, \dots, x_m\}$ . Con esto se termina la prueba. □

**TEOREMA 7.2.** *Sea  $P$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $P$  es un polítopo si y sólo si  $P$  es un conjunto poliédrico acotado.*

**DEMOSTRACION.** Sea  $P$  un conjunto poliédrico acotado. Entonces  $P$  es un conjunto convexo compacto. Además, por el Corolario 5.5 se tiene que  $\text{ext } P$  es un conjunto finito y por la Proposición 4.1 se sigue que  $P$  es un politopo. Observemos que en esta primera parte de la demostración no utilizamos ninguno de los resultados de polaridad.

Recíprocamente, sea  $P = \text{conv}\{x_1, \dots, x_m\}$  un politopo en  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $O \in \text{int } P$ . Las partes (a) y (d) del teorema anterior muestran que  $P^* = Q$ , donde  $Q$  es el conjunto poliédrico acotado definido por

$$Q = \bigcap_{i=1}^m K(x_i, 1).$$

Además,  $Q^* = P$ . La afirmación recíproca muestra que  $Q$  es un politopo, digamos

$$Q = \text{conv}\{y_1, \dots, y_k\}.$$

Si ahora aplicamos la parte (a) del teorema anterior al conjunto  $\{y_1, \dots, y_k\}$ , se tiene que  $Q^* = R$ , donde  $R$  es un conjunto poliédrico acotado definido por

$$R = \bigcap_{i=1}^k K(y_i, 1).$$

Por otro lado, sabemos que  $Q^* = P$  lo cual implica que

$$P = R = \bigcap_{i=1}^k K(y_i, 1),$$

es decir,  $P$  es un conjunto poliédrico acotado. Con esto se termina la prueba del Teorema 7.2. □

## 8. DUALIDAD

En esta última sección introduciremos brevemente un concepto de fundamental importancia en la Teoría de Polítopos, llamado dualidad. Probaremos, utilizando los resultados de polaridad vistos anteriormente, que todo polítopo tiene un polítopo dual y veremos como se relacionan los conjuntos de caras de polítopos duales. Al final de esta sección utilizaremos los sólidos platónicos (poliedros regulares en  $\mathbb{R}^3$ ) para ilustrar geoméricamente algunos de los conceptos vistos en este trabajo.

Diremos que dos polítopos  $P$  y  $Q$  son *duales* (cada uno de ellos será dual del otro) si existe una función biyectiva  $\phi$ , entre el conjunto de caras de  $P$  y el conjunto de caras de  $Q$ , con la siguiente propiedad:

$$F_1 \subset F_2 \iff \phi(F_1) \supset \phi(F_2),$$

donde  $F_1$  y  $F_2$  son caras de  $P$ .

Una función de este tipo será llamada un *anti-isomorfismo* de caras.

Diremos también que dos polítopos son *equivalentes* si existe una función biyectiva  $\psi$ , entre los conjuntos de sus caras de tal forma que, a diferencia de un anti-isomorfismo, preserve la relación de contención entre las caras, es decir, que:

$$F_1 \subset F_2 \iff \psi(F_1) \subset \psi(F_2).$$

Dicha función será llamada un *isomorfismo* de caras.

Desde el punto de vista de la teoría combinatoria de polítopos que se ocupa del estudio de las caras de un polítopo, dos polítopos equivalentes podrán considerarse

como si de hecho fueran el "mismo". Es claro que dos politopos afinmente isomorfos serán equivalentes.

Probaremos ahora que todo politopo  $P$  tiene un politopo dual. Un candidato será precisamente su conjunto polar  $P^*$ . Debemos entonces construir un anti-isomorfismo de caras entre  $P$  y  $P^*$ .

Lo que haremos será "restringir" el concepto de polaridad a cada una de las caras de  $P$  para construir la correspondiente cara de  $P^*$ . Para una cara  $F$  de  $P$  definiremos:

$$\begin{aligned}\phi(F) &= \{y \in P^* \mid \langle x, y \rangle = 1 \quad \forall x \in F\} \\ &= P^* \cap \bigcap_{x \in F} H(x, 1),\end{aligned}$$

es decir, en lugar de tomar la intersección de los semiespacios polares de puntos en  $F$ , tomaremos únicamente la intersección de los hiperplanos polares de dichos puntos, para obtener puntos en la frontera de  $P^*$ . Esto está motivado por el hecho de que si  $F$  es una cara propia de  $P$  entonces un punto  $y \in \phi(F)$  si y sólo si  $H(y, 1)$  es un hiperplano soporte de  $P$  con  $F \subset H(y, 1)$ . Lo análogo puede decirse para una cara  $G$  de  $P^*$  ya que este mismo operador  $\phi$ , puede aplicarse a las caras del politopo  $P^*$ . Esto se sigue inmediatamente del Corolario 6.6.

**PROPOSICION 8.1.** *Sea  $F$  una cara del politopo  $P$ . Entonces  $\phi(F)$  es una cara del politopo  $P^*$ . De hecho, si  $F$  es una cara propia, entonces  $\phi(F)$  también lo es.*

**DEMOSTRACION.** Para las caras impropias  $P$  y  $\emptyset$  de  $P$ , la proposición se sigue directamente de la definición ya que  $\phi(P) = \emptyset$  y  $\phi(\emptyset) = P^*$ .

Si  $F$  es una cara propia, entonces cada  $x \in F$  está en  $\text{fr } P$  y por lo tanto  $H(x, 1)$  es un hiperplano soporte de  $P^*$  (ver Proposición 6.5). De aquí que cada conjunto  $P^* \cap H(x, 1)$  sea una cara propia de  $P^*$ . Como

$$\phi(F) = \bigcap_{x \in F} (P^* \cap H(x, 1))$$

se tiene entonces que  $\phi(F)$  es una intersección de caras de  $P^*$  y por lo tanto es una cara de  $P^*$ . Más aún,  $\phi(F)$  es una cara propia o es vacía, pero como  $F$  es una cara propia de  $P$  existe un hiperplano soporte  $H(y, 1)$  de  $P$  tal que  $F = P \cap H(y, 1)$ . Por una observación hecha anteriormente, tenemos que  $y \in \phi(F)$  y por lo tanto  $\phi(F) \neq \emptyset$ . □

Probaremos a continuación que si  $P$  es un politopo con  $O \in \text{int } P$ , entonces la función  $\phi$  será un anti-isomorfismo entre las caras de  $P$  y las caras de  $P^*$ . Por lo tanto  $P$  y  $P^*$  serán politopos duales. Como de hecho, todo politopo  $P$  tiene un politopo equivalente  $P'$  con  $O \in \text{int } P'$ , entonces el conjunto polar de  $P'$  será un politopo dual de  $P$  bajo el anti-isomorfismo que se obtiene al componer un anti-isomorfismo de  $(P')^*$  a  $P'$ , con un isomorfismo de  $P'$  a  $P$ . Esto probará que todo politopo tiene un politopo dual (es claro que dicho politopo no será único).

**TEOREMA 8.2.** *Sea  $P \subset \mathbb{R}^n$  un politopo con  $O \in \text{int } P$ . Entonces su conjunto polar  $P^*$  es un politopo dual de  $P$ .*

**DEMOSTRACION.** Como hemos observado, basta probar que la función  $\phi$  es un anti-isomorfismo. Probaremos primero que la función  $\phi$  es su propia inversa (abusando de la notación, emplearemos el mismo símbolo  $\phi$  para representar a la función que va de las caras de  $P^*$  a aquellas de  $P$ ), es decir, que  $\phi(\phi(F)) = F$ .

Por definición

$$\phi(\phi(F)) = \{ x \in P^{**} \mid \langle y, x \rangle = 1 \quad \forall y \in \phi(F) \}.$$

Como  $P^{**} = P$  se tiene que  $F \subset \phi(\phi(F))$ .

Sea  $H(a, 1)$  un hiperplano soporte de  $P$  tal que  $F = P \cap H(a, 1)$  y tal que  $P \subset K(a, 1)$ . Se tiene entonces que  $a \in \phi(F)$ . Si  $x_0 \in P - F$  entonces  $\langle a, x_0 \rangle < 1$  lo cual implica que  $x_0 \notin \phi(\phi(F))$ . Por lo tanto  $\phi(\phi(F)) \subset F$ .

El hecho de que  $F_1 \subset F_2 \iff \phi(F_1) \supset \phi(F_2)$  se sigue directamente a partir de la definición de la función  $\phi$  y de que ésta es su propia inversa.  $\square$

Finalmente probaremos una interesante relación entre las dimensiones de  $F$  y  $\phi(F)$  para lo cual emplearemos la siguiente :

**PROPOSICION 8.3.** *Sea  $P$  un  $n$ -politopo en  $\mathbb{R}^n$ . Sean  $F_j$  y  $F_k$  caras de  $P$  con  $F_j \subset F_k$  y*

$$\dim F_j = j, \quad \dim F_k = k$$

$$\text{donde } -1 \leq j < j+1 \leq k-1 < k \leq n.$$

*Entonces existen caras  $F_{j+1}, \dots, F_{k-1}$  de  $P$  con*

$$F_j \subsetneq F_{j+1} \subsetneq \dots \subsetneq F_{k-1} \subsetneq F_k \quad \text{y} \quad \dim F_i = i \quad i = j+1, \dots, k-1.$$

**DEMOSTRACION.** Supondremos primero que  $j \geq 0$ . Sabemos que  $F_j$  es una cara propia de  $F_k$ . Por la Proposición 5.3, sabemos que existe una faceta,  $F_{k-1}$ , de  $F_k$ , con  $F_j \subsetneq F_{k-1}$ . Si  $j = k-2$ , hemos terminado. Si  $j < k-2$ , aplicamos el

mismo argumento a  $F_{k-1}$  y a  $F_j$ . Continuando de esta manera llegaremos a obtener las caras  $F_i$  que deseamos.

Si  $j = -1$ , escogemos a  $F_0$  como cualquier vértice de  $F_k$ . Si  $k = 1$ , habremos terminado. Si  $k \geq 2$ , aplicamos el argumento anterior a las caras  $F_0$  y  $F_k$ .  $\square$

**TEOREMA 8.4.** Sean  $P$  y  $Q$  politopos duales con  $\dim P = n$ . Sea  $\Phi$  un anti-isomorfismo entre las caras de  $P$  y las caras de  $Q$ . Entonces, para cualquier cara  $F$  de  $P$  se tiene:

$$\dim \Phi(F) = n - 1 - \dim F \quad \text{y} \quad \dim Q = n.$$

**DEMOSTRACION.** Por la proposición anterior, cada cara  $F$  de  $P$  es miembro de una cadena de caras de  $P$

$$\emptyset = F_{-1} \subsetneq \cdots \subsetneq F_i \subsetneq \cdots \subsetneq F_n = P$$

$$\text{con } \dim F_i = i \quad i = -1, \dots, n.$$

Como  $\Phi$  es un anti-isomorfismo obtenemos la siguiente cadena:

$$Q = \Phi(F_{-1}) \supsetneq \cdots \supsetneq \Phi(F_i) \supsetneq \cdots \supsetneq \Phi(F_n) = \emptyset.$$

De aquí vemos que

$$\dim \Phi(F_i) \geq \dim \Phi(F_{i+1}) + 1 \quad i = -1, \dots, n-1 \quad (*)$$

y por lo tanto  $\dim Q \geq n = \dim P$ . Como  $P$  y  $Q$  juegan papeles simétricos, siguiendo un argumento análogo para las caras de  $Q$ , se obtiene la desigualdad

invertida y por lo tanto tendremos que  $\dim P = \dim Q = n$ . Esto implica que en la expresión (\*) se tiene la igualdad para toda  $i$ , de donde,

$$\begin{aligned} \dim \Phi(F_i) &= n - 1 - i \\ &= n - 1 - \dim F_i \quad i = -1, \dots, n. \end{aligned}$$

lo cual termina la demostración. □

Este teorema nos dice que para dos politopos duales, las facetas de uno corresponderán a los vértices del otro bajo cualquier anti-isomorfismo. Esto remarca el papel simétrico que juegan los vértices y las facetas de un politopo.

Ya en secciones anteriores vimos que un politopo está completamente determinado por sus vértices y también por los hiperplanos soportes generados por sus facetas. En esta sección hemos probado que un dual de un politopo podrá ser obtenido por la intersección de un conjunto de semiespacios cerrados cuyos vectores normales serán precisamente los vértices del primer politopo (ver teorema 7.1).

Unicamente nos resta ejemplificar geoméricamente algunos de estos conceptos, para lo cual, lo más ilustrativo será situarnos en el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$  donde podemos trabajar con figuras conocidas e incluso construir modelos de ellas.

Los cinco sólidos platónicos (poliedros regulares) nos serán muy útiles ya que las nociones de polaridad y dualidad se pueden ilustrar fácilmente con ellos.

Como ahora estamos en un espacio tridimensional, trabajaremos con 3-politopos, los cuales tienen caras propias únicamente de tres dimensiones distintas: los vértices con dimensión 0, aristas con dimensión 1 y sus facetas (que comúnmente se conocen como caras) con dimensión 2.

Recordemos que los sólidos platónicos son superficies sólidas limitadas por porciones de planos, que tienen la propiedad de que todas sus facetas, aristas y vértices son iguales entre sí. Entendemos que dos vértices serán iguales si concurren el mismo número de aristas en cada uno de ellos y los ángulos entre éstas son iguales.

Existen cinco sólidos platónicos. El tetraedro es el más sencillo de ellos ya que tiene solo cuatro facetas, cada una de las cuales es un triángulo equilátero. Tiene seis aristas en total y cuatro vértices, en cada uno de los cuales concurren tres aristas.

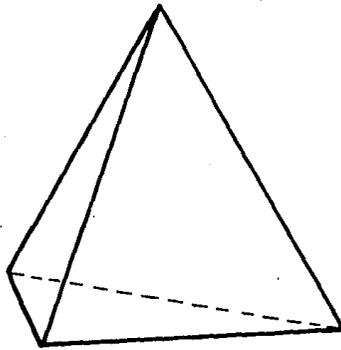


Figura 7. Tetraedro

El hexaedro o cubo tiene seis facetas y cada una de ellas es un cuadrado perfecto. Tiene doce aristas y ocho vértices, en cada uno de los cuales concurren tres aristas.

El octaedro tiene ocho facetas, cada una de las cuales es un triángulo equilátero. Tiene doce aristas y seis vértices, en cada uno de los cuales concurren cuatro aristas.

El dodecaedro tiene 12 pentágonos regulares como facetas, tiene treinta aristas

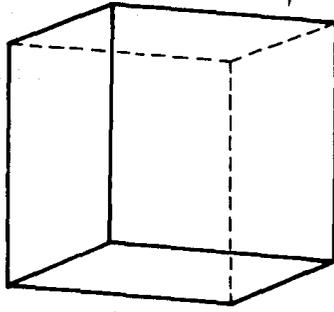


Figura 8. Hexaedro

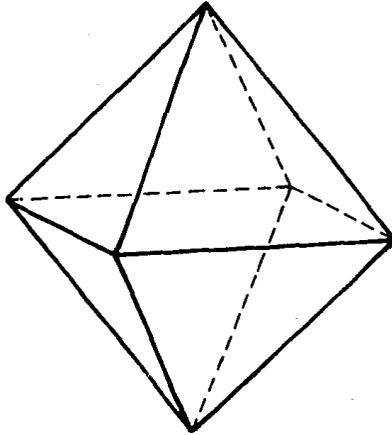


Figura 9. Octaedro

y veinte vértices, en cada uno de los cuales concurren tres aristas.

Finalmente, el icosaedro tiene veinte triángulos equiláteros como facetas, tiene treinta aristas y 12 vértices, en cada uno de los cuales concurren cinco aristas.

Como sabemos, los vértices de un politopo corresponden bajo un anti-isomorfismo a las facetas de su politopo dual. Como las caras de un 3-politopo pueden ser solo de tres tipos, se debe tener entonces que las aristas de un 3-politopo corresponderán

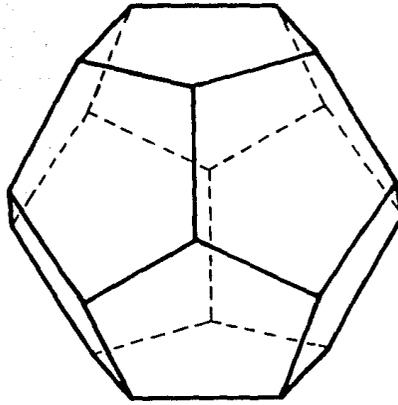


Figura 10. Dodecaedro

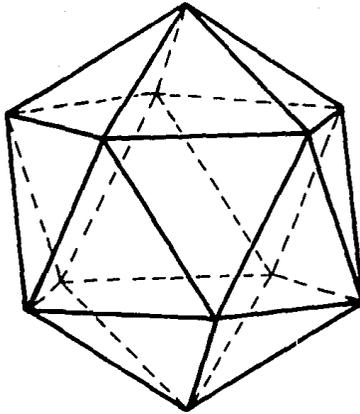


Figura 11. Icosaedro

bajo un anti-isomorfismo a las aristas de su dual.

Podemos decir, en términos generales, que el dual de un 3-politopo será otro 3-politopo con el mismo número de aristas que el original, pero habrá un intercambio en el número de vértices y de facetas de ambos.

Por las propiedades de un anti-isomorfismo, tendremos además que a un polígono de  $n$  lados, que sea faceta de uno de los politopos, corresponderá un vértice del

politopo dual, en el que concurren  $n$  aristas. Con estas observaciones en mente y recordando la descripción de los sólidos platónicos encontraremos el dual de cada uno de ellos.

Al tetraedro corresponderá un politopo que tenga tantas facetas como vértices tiene éste, es decir, cuatro. Así mismo, el dual tendrá tantos vértices como facetas tiene el tetraedro, que también son cuatro. Finalmente, tendrá el mismo número de aristas que el tetraedro, es decir, seis. Como en cada vértice del tetraedro concurren tres aristas, las facetas del politopo dual deberán ser triangulares y como las facetas del tetraedro son triangulares, en cada vértice del dual concurrirán tres aristas. De esta forma vemos que un dual del tetraedro será otro tetraedro, es decir, el tetraedro es su propio dual.

Si hacemos un análisis similar con cada uno de los sólidos platónicos restantes veremos que el octaedro y el hexaedro son duales entre sí, y de igual forma, el dodecaedro y el icosaedro serán duales uno del otro, de tal modo que los sólidos plátónicos tendrán duales dentro del mismo conjunto de sólidos platónicos. Esta dualidad se aprecia claramente en la siguiente tabla:

Sólidos	Vértices	Aristas	Facetas
Tetraedro	4	6	4
Hexaedro	8	12	8
Octaedro	6	12	8
Dodecaedro	20	30	12
Icosaedro	12	30	20

Estos mismos resultados los podemos obtener construyendo el conjunto polar de cada uno de los sólidos platónicos, para lo cual recordaremos que cada uno de estos sólidos puede inscribirse dentro de una esfera (esfera circunscrita) de tal forma que sus ejes de simetría pasen por el centro de la esfera. Además, se puede inscribir una esfera (esfera inscrita) en cada uno de ellos de tal forma que dicha esfera sea tangente a cada una de las facetas del sólido y el punto de tangencia sea el incentro de la faceta (el incentro es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos de la faceta).

Cabe mencionar que para cualquiera de estos sólidos los centros de las esferas inscrita y circunscrita coinciden. A este centro lo tomaremos como centro de inversión para encontrar el conjunto polar del sólido.

Recordemos que el conjunto polar de un politopo será otro politopo cuyas facetas tendrán como vectores normales a los vértices del politopo original.

Mostraremos dos procedimientos (dependiendo de cual sea la esfera que tomemos como esfera de inversión) para hallar los vértices del conjunto polar de un sólido platónico.

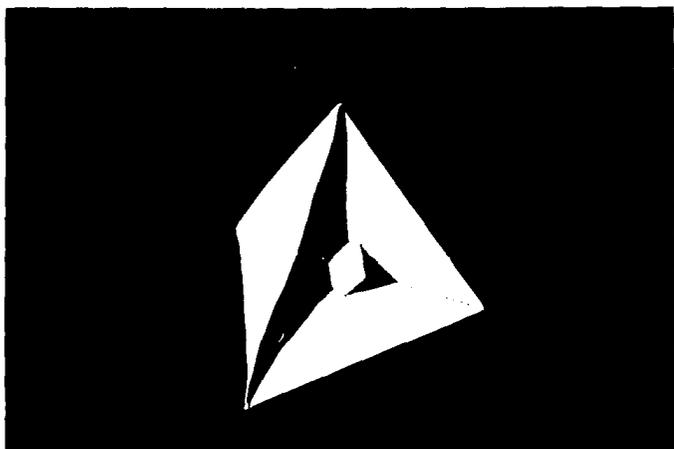
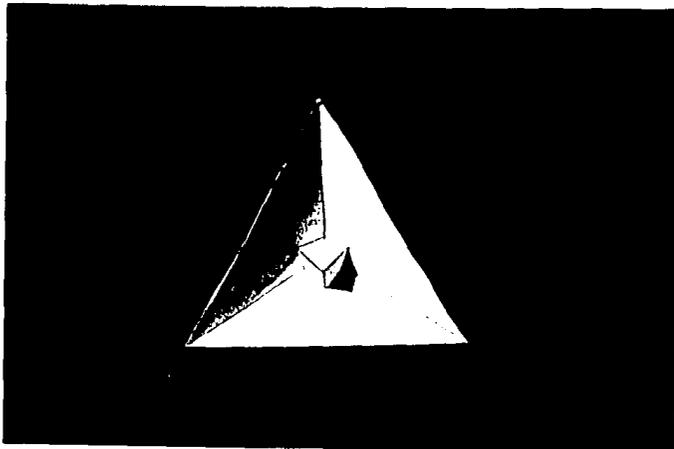
Si escogemos como esfera de inversión a la esfera inscrita y tomamos su radio como unidad, bastará fijarnos en el incentro de cada una de las facetas del sólido. Como la esfera es tangente al sólido en dicho punto, el vector correspondiente a este punto será precisamente el vector normal de la faceta. Por lo tanto los vértices del conjunto polar serán los incentros de las facetas del politopo original. De aquí que para construir el conjunto polar baste unir los incentros de facetas adyacentes (ver

figuras al final de la sección). En este caso la esfera inscrita del primer polítopo será igual a la esfera circunscrita del conjunto polar.

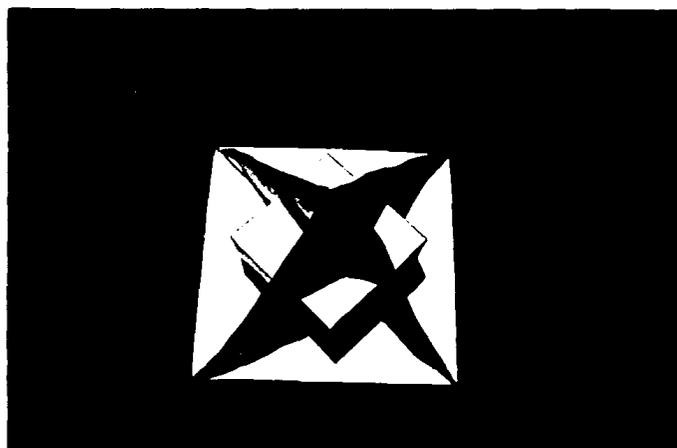
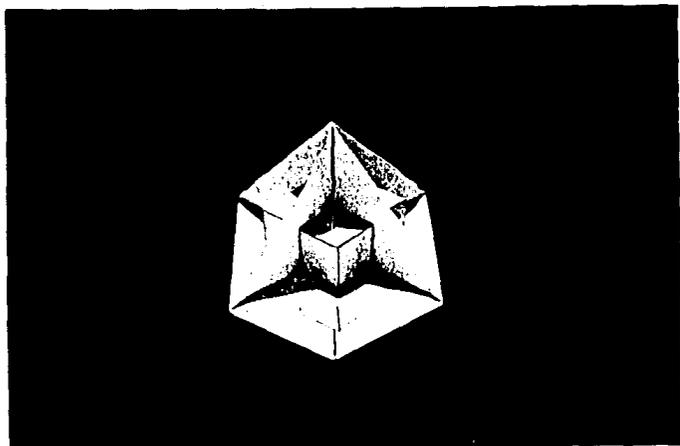
Si escogemos como esfera de inversión a la esfera circunscrita y tomamos su radio como unidad, nuevamente debemos fijarnos en el incentro de cada faceta y "moverlo" perpendicularmente a ésta, hacia afuera del sólido. Esta translación eventualmente llevará al punto a coincidir con un vértice del conjunto polar. El que tan lejos debemos mover ese punto nos lo dice la relación de polaridad. Si el incentro está representado por el vector  $x$ , debemos hallar otro vector de la forma  $\lambda x$  con  $\lambda > 1$  de tal forma que  $\langle \lambda x, x \rangle = 1$ . Uniendo los puntos así obtenidos, que correspondan a facetas adyacentes, podemos construir el conjunto polar (ver figuras al final de la sección). En este caso la esfera circunscrita del polítopo original coincidirá con la esfera inscrita del conjunto polar.

Es fácil ver que si se repiten estos procedimientos se obtendrán los sólidos originales aunque en versión más pequeña para el primer caso y más grande para el segundo.

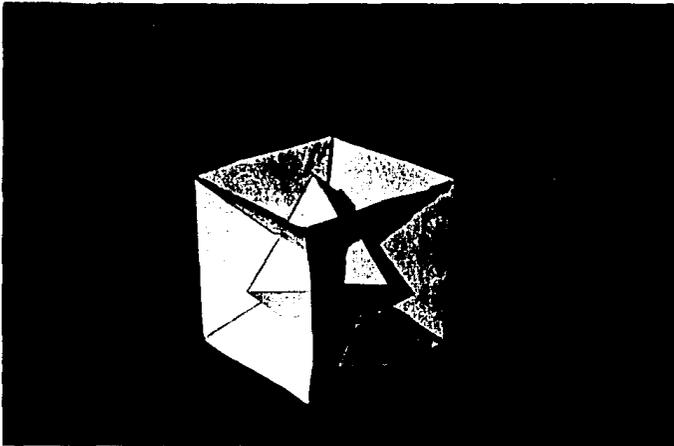
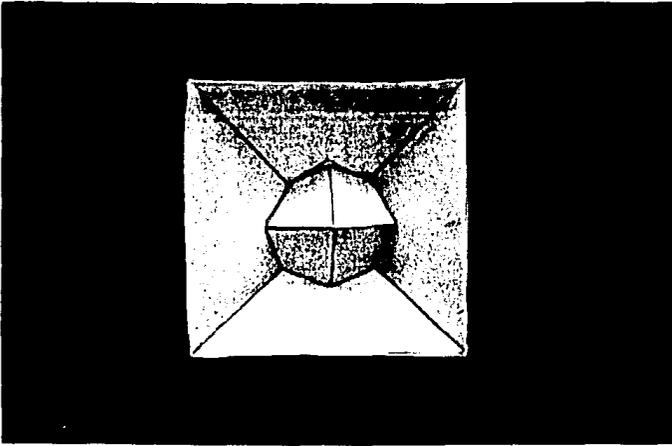
En las siguientes figuras se pueden apreciar los cinco sólidos platónicos inmersos dentro de su dual, de tal forma que cada vértice del sólido interior coincide con el incentro de una faceta del sólido exterior. Estas figuras sirven para ilustrar los dos procedimientos anteriores.



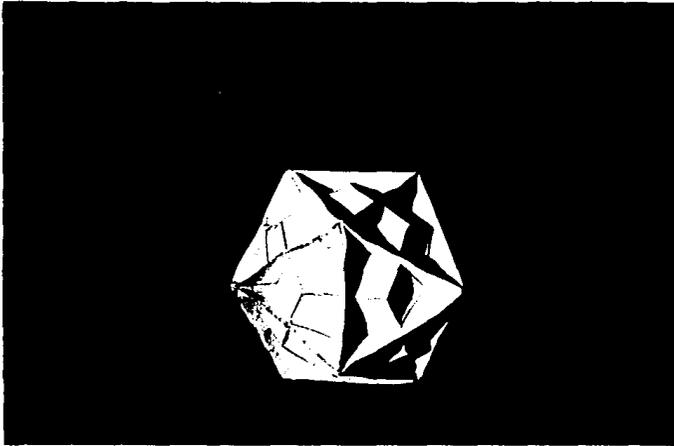
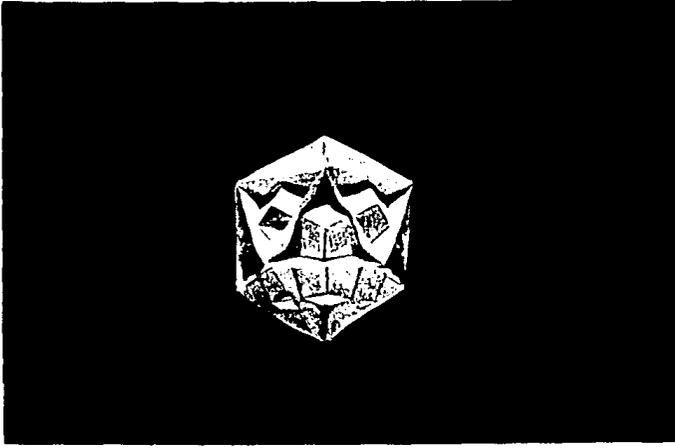
Figuras 12 y 13. Tetraedro dentro de otro tetraedro.



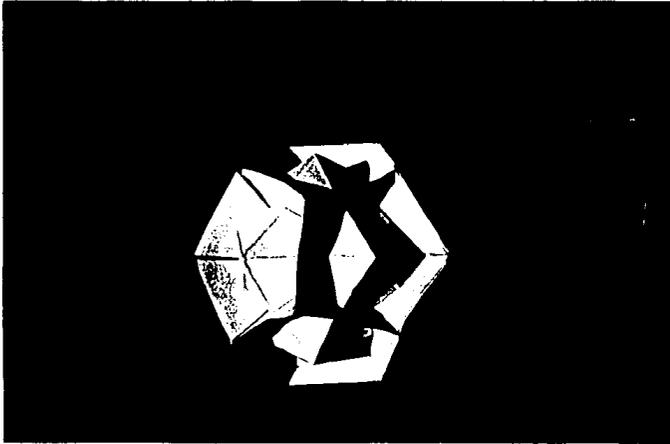
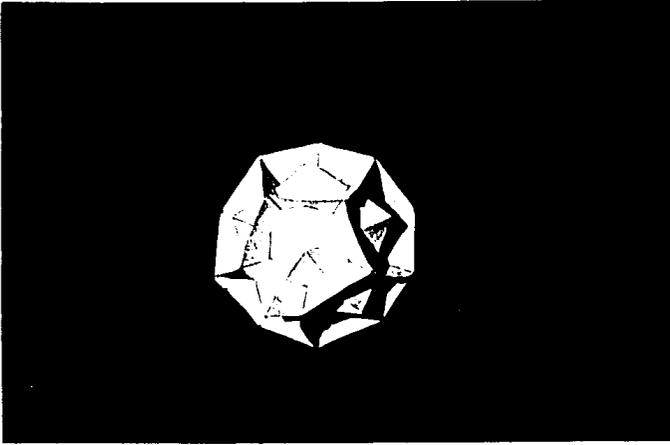
Figuras 14 y 15. Hexaedro dentro de un octaedro.



Figuras 16 y 17. Octaedro dentro de un hexaedro.



Figuras 18 y 19. Dodecaedro dentro de un icosaedro.



Figuras 20 y 21. Icosaedro dentro de un dodecaedro.

## BIBLIOGRAFIA.

- [1] Brøndsted, A. *An Introduction to Convex Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 90. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag. 1982.
- [2] Yemelichev, V. A., Kovalev, M. M., Kravtsov, M. K. *Polytopes, Graphs and Optimisation*. Cambridge: Cambridge University Press. 1984.
- [3] Grünbaum, B. *Convex Polytopes*. London-New York-Sidney: Wiley. 1967.
- [4] Eggleston, H. G. *Convexity*. Cambridge: Cambridge University Press. 1958.
- [5] McMullen, P., Shephard, G. C. *Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture*. London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 3. Cambridge: Cambridge University Press. 1971.
- [6] Yaglom, I. M., Boltyanskiĭ, V. G. *Convex Figures*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1961.
- [7] Benson, R. V. *Euclidean Geometry and Convexity*. New York: McGraw-Hill Book Company. 1966.
- [8] Wenninger, M. J. *Polyhedron Models*. Cambridge: Cambridge University Press. 1975.
- [9] Wenninger, M. J. *Dual Models*. Cambridge: Cambridge University Press. 1983.
- [10] Eves, H. *Estudio de las Geometrías*. México, D.F. : UTEHA. 1969.
- [11] Rees, E. *Notes on Geometry*. 1977.