UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

PROPUESTA PARA UN CURSO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

PRESENTA:

Esther Eunice López Carrasco

1989

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE

INTRODUCCION i

CAPITULO 1.

LA RECTA NUMERICA. 1

¿Qué es una construcción? 1

La regla y el compás 1

Problema 1. ¿Qué números podemos construir con regla y compás en una línea recta? 2

Construcción de la bisección de un segmento dado 3

Definición "intuitiva" de triángulos congruentes 6

Definicion de ángulo 10

¿Cómo copiar un ángulo igual a uno dado? 10

Desigualdad del triángulo 16

Criterios de congruencia de triángulos 26

¿Cómo bisectamos un ángulo? 28

Definición de tráíngulo isósceles 30

Construccion de una recta perpendicular a una recta l dada que pasa por un punto 0 que está sobre la recta l 35

Construcción de una recta perpendicular a una recta l dada que pasa por un punto 0 fuera de ella 36

Construcción del punto un medio y los puntos de la forma $\frac{m}{2^n}$ 37

Construcción del punto un tercio y los puntos de la forma $\frac{m}{3^n}$ 39

Construcción de una recta paralela a una recta dada que pase por un punto dado 40

Angulos internos, externos, alternos - internos, alternos - externos y correspondientes 42

Condiciones de paralelismo entre dos rectas 42

Otra construcción de una recta paralela a una recta dada 43

Demostración de que la suma de los angulos interiores de un triangulo es igual a dos rectos 44

Semejanza de triángulos 45

Construcción del punto $\frac{1}{n}$ y de los puntos de la forma $\frac{m}{n}$ 53

Operaciones con numeros racionales 54

Construcción del punto $\sqrt{2}$ 58

Construcción de la media proporcional de dos segmentos dados 60

Construcción del punto $\sqrt{n}$ 62

CAPITULO 2.

LA CUADRATURA 64

Problema 2. Cuadrar un polígono dada 64

Cuadratura de un rectángulo 64

Teorema de Pitágoras 67

Cuadratura de un triángulo 68

Cuadratura de un polígono 71

CAPITULO 3.

EL PENTAGONO REGULAR 75

Relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular 75

Problema 3. Construir con regla y compás un pentágono regular 76

Resolución de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$ 77

Resolución de la ecuación cuadrática $x^2 - bx - c = 0$ 79

Resolución de la ecuación cuadrática $x^2 + bx - c = 0$ 80

Resolución de la ecuación cuadrática $x^2 - bx + c = 0$ 82

Resolución de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$ 86

Construcción del pentágono regular con regla y compás 87

El rectángulo dorado 90

BIBLIOGRAFIA 91

INTRODUCCION.

El "desarrollo" de la matemática involucra dos procesos que en general se presentan en dos momentos distintos. Un primer proceso de descubrimiento (creativo) que, "avanzado" hasta cierto punto ese proceso se hace necesario un segundo proceso, el de sistematizar lo creado.

A veces entre los dos procesos pasa mucho tiempo ejemplo; Euclides (sistematiza varios siglos de Geometría), Peano (dos milenios de usar los números naturales), Dedekind y otros (siglos de usar los reales y conceptos como la continuidad de ellos).

En los dos procesos es muy distinto el método, en el primero se usa primordialmente el método inductivo, mientras que en el segundo el método deductivo.

En la enseñanza, en general, se hace hincapié en lo segundo, se presenta a la matemática como algo construido, prácticamente acabado, sistematizado y el proceso previo de creación es casi siempre olvidado.

En la enseñanza de la Geometría este fenómeno se presenta muy agudamente, a pesar de que todo mundo habla de la Geometría como una materia que desarrolla la intuición; su presentación tradicional parte de la sistematización euclidiana y del método deductivo euclidiano.

Esta presentación (axiomática y deductiva) indudablemente tiene un gran valor pues la Geometría viene a ser para el alumno el primer ejemplo de una Teoría axiomática.

Sin embargo esta presentación de la Geometría tiene, a mi modo de ver, también grandes desventajas, pues el alumno se enfrenta a un método (el deductivo) nuevo para él partiendo de la sistematización de conceptos que no conoce.

Para llegar a manejar este método deductivo es necesario haber pasado (como la humanidad en la historia) por el proceso de creación de resultados, que una vez entendidos son viables de sistematizarse y, entonces sí, regresar a sistematizarlos y demostrarlos partiendo de ciertos principios (axiomas) y usando el método deductivo.

La idea de este trabajo es hacer hincapié en el primer proceso, en el creativo, inductivo. Buscar que el alumno se entrene en Geometría, entendiendo y (por qué no) redescubriendo algunos conceptos geométricos sencillos a partir de su intuición. De modo que al llegar la hora de sistematizar, sistematice cosas que conoce y maneja va hasta cierto punto. Que aprenda el método deductivo con base en cosas que ya conoce.

La parte deductiva de la Geometría está ya muy tratada de aquí que en el presente trabajo no se le dé espacio a este segundo proceso. Me centro en el primero pues es ahí donde creo existe un gran hueco.

Desde luego que sin la segunda parte un curso de Geometría se quedaría a medias pero para esto hay muchísimo material escrito.

La forma en que se intenta desarrollar en el alumno la intuición, la creación en Geometría, es partiendo de algunos problemas sencillos usados como pretexto para que los resuelva con la herramienta que tiene de sus cursos anteriores, sin decirle qué camino debe seguir para hacerlo, aunque cuando llega a resolverlos, la mayoría de las veces lo hace con resultados aprendidos de memoria en sus cursos anteriores, sin saber argumentar lo que hace.

En el desarrollo de los problemas se van abriendo "paréntesis" con el fin de ir resolviendo los problemas geométricos con los que se va a encontrar para resolver el problema propuesto (tales paréntesis se distinguirán con márgenes diferentes del texto para que vaya quedando claro lo que se va haciendo).

El material es una propuesta para un curso propedéutico para los cursos de Geometría impartidos en la Facultad y para los cursos de bachillerato.

La finalidad de este material no es que sirva como "EL CURSO" sino que sirva de consulta al maestro para darle una manera diferente de explicar las construcciones y conceptos geométricos y para que el alumno pueda entender los argumentos para la axiomatización de la Geometría.

CAPITULO I.

LA RECTA NUMERICA

A partir del desarrollo de la matemática del siglo pasado, se sabe que puede establecerse una relación biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta. Asimismo, se sabe que no todos los números reales pueden construirse con regla y compás sobre la recta.

En este capítulo, apoyados en diversos resultados de la geometría, construiremos geométricamente diversos conjuntos de números sobre la recta real, tales como los números naturales, enteros, racionales y algunos irracionales, para ello es necesario saber

Que es una construccion

"Un problema de construcción se plantea de la siguiente manera: de elementos ya construidos (puntos, segmentos, rectas, ángulos, círculos, etc.) otros elementos deben derivarse bajo las siguientes reglas:

a) Solamente deben usarse ciertos instrumentos bien definidos.

b) Cada uno de los instrumentos puede usarse de manera previamente determinada.

c) La construcción debe terminarse en un número finito de pasos".

LA REGLA Y EL COMPAS

Los alcances constructivos de la regla y el compás, están caracterizados en los tres postulados de Euclides que se enumeran a continuación;

1. "Puede trazarse una recta de un punto a otro".
2. "Una recta finita puede prolongarse continuamente en una línea recta".
3. "Una circunferencia puede describirse tomando cualquier centro y (cualquier) distancia".

Construccion con regla y compas

"Cada construcción con regla y compás consiste en una sucesión de operaciones de las enumeradas a continuación:

1) Unir dos puntos por una recta.

2) Hallar el punto de intersección de dos rectas.

3) Trazar una circunferencia de radio y centro dados.

4) Hallar los puntos de intersección de una circunferencia con otra circunferencia o con una recta.

Un elemento (punto, recta, circunferencia) se considera conocido si se da desde el principio o si ha sido construido en algún paso previo".

Lo que haremos ahora será resolver el siguiente problema, con base en el cual se tratará de desarrollar algunos conceptos geométricos.

PROBLEMA:

¿Que números podemos construir con regla y compas en una línea recta?

Empezaremos ubicando en la recta un origen y eligiendo una unidad. Es decir, ubicaremos en la recta un punto cualquiera que jugará el papel de origen o cero. A partir de él, hacia la derecha, señalaremos cualquier punto tal que su distancia al origen será la longitud de nuestra unidad, a este punto le llamaremos uno. Una vez elegida dicha unidad podremos trasladarla hacia la derecha e izquierda tantas veces como queramos (para ello bastará abrir el compás tomando como referencia la unidad elegida); mediante este proceso podemos obtener cualquier número natural **n**, basta colocar el compás en el punto **n-1** y marcar la unidad. Haciendo la construcción simétrica se pueden construir todos los enteros.

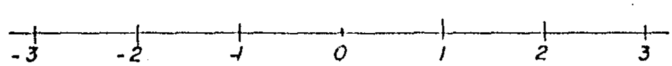

Figura 1

Lo que se ha hemos hecho es trasladar la unidad (a la derecha o izquierda del origen) tantas veces como se ha querido, en consecuencia los únicos números que se pueden construir de esta manera son aquellos que difieren del cero un número entero de veces la unidad, es decir, los enteros.

Así, para construir cualquier otro número que no sea entero habrá que hacer una construcción diferente. Todavía hay muchos números que no hemos construido, por ejemplo el número "un medio".

Para construir el número "un medio" debemos construir el punto medio del segmento elegido como unidad.

Vamos a plantear una construcción que es conocida por la mayoría de los estudiantes a este nivel pero cuya argumentación o justificación es desconocida por casi todos.

Haremos la construcción para un segmento AB de longitud arbitraria (para el segmento de longitud uno nos va a servir la misma construcción y en este caso habremos encontrado el punto un medio que es el punto que queremos encontrar en la recta dada).

Construccion de la biseccion de un segmento dado:

Tomemos el segmento AB

1. Tracemos dos círculos del mismo radio, uno con centro en A y el otro con centro en B, de tal manera que los dos círculos se corten en dos puntos C y D.
2. Tracemos la recta que pasa por C y D.
   El punto donde se cortan esta recta y el segmento AB es el punto medio del segmento AB.

Antes de justificar el porqué de esta construcción, veamos algunos detalles importantes. Empecemos por analizar el radio de los círculos construidos.

¿Será viable la construcción si elegimos arbitrariamente los radios? Es decir, ¿será cierto que, al tomar un radio arbitrario, los círculos así construidos se intersectan siempre en dos puntos? Si esto no ocurriera, no podríamos continuar nuestra construcción.

El primer caso que vamos a analizar es aquel en el que el radio de los círculos es igual a la longitud del segmento AB. Aquí los círculos se cortan en los puntos C y D , por tanto, es posible continuar la construcción.

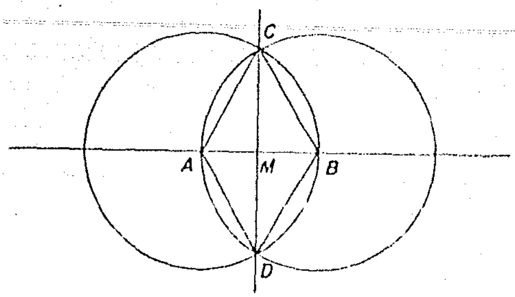

Figura 2

Pero, ¿qué sucede si tomamos el radio más pequeño, o más grande que la longitud **AB**?
Si el radio elegido resulta más pequeño que la mitad de la longitud del segmento **AB**, los círculos no se intersectan (fig. 3), por lo cual no es posible continuar con la construcción.

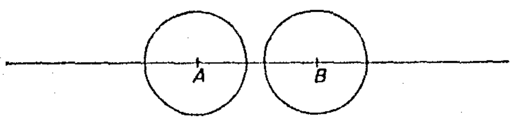

Figura 3

Si el radio es tal que los círculos se cortan en un único punto (fig. 4), habremos encontrado el punto medio del segmento **AB**, al que llamaremos **M**, pues AM = R, MB = R y por tanto AM = MB. Pero esto es muy poco probable (es decir, la probabilidad de abrir el compás con una longitud exactamente igual a la mitad de la longitud del segmento **AB** es cero).

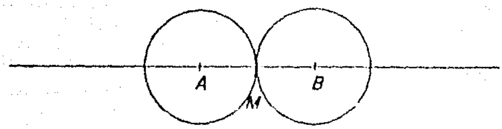

Figura 4

Si el radio es mayor que la longitud del segmento, los círculos se cortan en dos puntos a los que llamaremos **C** y **D** (fig. 5), otra vez trazamos la recta que los une y el punto de intersección de ésta con el segmento es el punto medio (**M**).

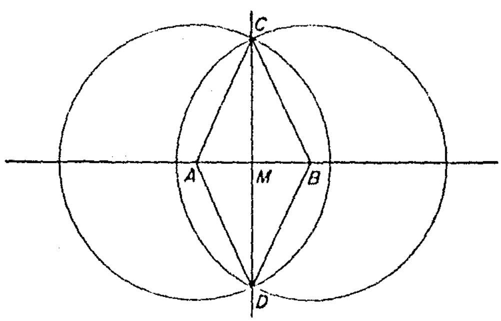

Figura 5

Así pues, la elección del radio no puede ser tan arbitraria. Necesitamos que los dos círculos se intersecten y para ello es un requisito que los radios sean de longitud mayor que la mitad de la distancia AB. Tomemos entonces un radio mayor que la mitad de la distancia **AB** y menor que ésta. La construcción es igual a la hecha para las figuras 2 y 5 (fig. 6).

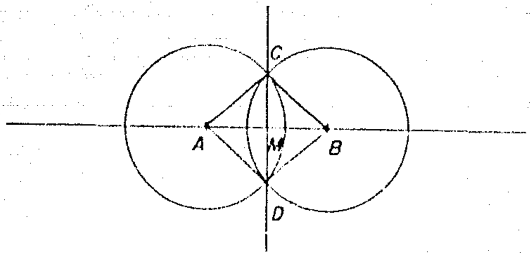

Figura 6

Ahora veamos qué pasa en las figuras 2, 5 y 6 que son las figuras donde afirmamos que hemos construido el punto medio del segmento.

En cada una de estas figuras hemos trazado los radios **AC, BC, BD** y **AD.**

Los triángulos **ABC** y **BAD**, tienen por lados los radios mencionados y un lado común (el segmento **AB**); lo mismo ocurre en los triángulos **ADC** y **DBC**, siendo el lado común el segmento **CD**.

Tenemos en las tres figuras un punto **M** que proponemos como el punto medio del segmento **AB**. Por tanto ahora habrá que ver que **AM** = **MB**.

¿Cómo hacerlo?

Como los segmentos AM y MB son lados de triángulos lo que haremos será ver que los lados correspondientes de los triángulos AMC y BMC son iguales.

Diremos que dos triángulos son iguales o congruentes si al sobreponer uno en el otro coinciden los lados y los ángulos correspondientes (fig. 7). Esta es una "definición intuitiva" que usaremos durante una parte del trabajo, no es la definición de triángulos congruentes.

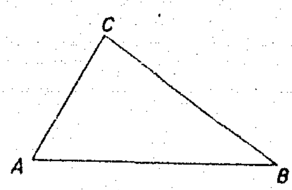

Figura 7

En las figuras 2, 5 y 6 podríamos verificar si los triángulos son "iguales" sobreponiendo los dibujos correspondientes, pero esto no constituye una demostración de este hecho.

Necesitamos, pues, dar criterios generales para determinar cuándo dos triángulos dados son "iguales".

Comenzaremos analizando un problema previo, a saber: ¿Con cuantos datos (y cuales) tengo determinado un unico triangulo?

Denotaremos a los vértices de un triángulo con letras mayúsculas **A**, **B**, **C**, los lados con letras minúsculas **a**, **b**, **c**, o bien como **AB**, **BC**, **CA**; los ángulos con letras griegas α, β, γ, enlistándolos de tal manera que sean recorridos en sentido contrario a las manecillas del reloj.

El triángulo será denotado por: triángulo **ABC** o bien simplemente como $\triangle$**ABC**.

El ángulo α también lo denotaremos como **CAB**, el ángulo β como el ángulo **ABC** y el ángulo γ como **BCA**.

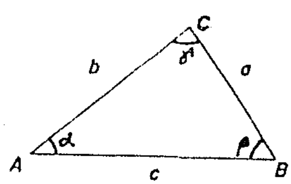

Figura 8

I. Un dato.

1) Si el dato dado es un lado del triángulo, hay una infinidad de triángulos que tienen como lado el dado.

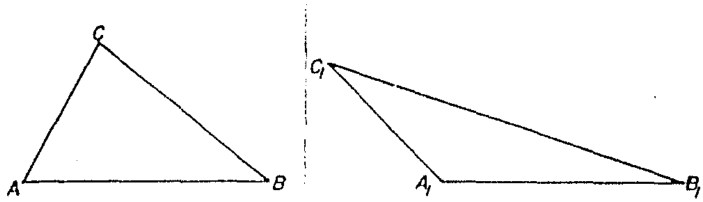

Figura 9

2) Si el dato dado es un ángulo del triángulo, también hay una infinidad de triángulos que tienen como uno de sus ángulos el dado.

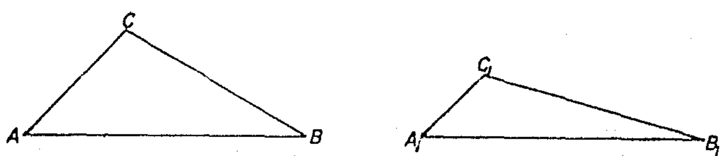

Figura 10

II. Dos datos.

1) Si los datos que nos dan son dos lados, digamos **b** y **c**, ¿cuántos triángulos podemos construir? (Denotaremos con **b** y **c** a los lados y con b y c a las longitudes de esos lados).

Trazamos el lado **c** y sobre uno de sus extremos, digamos el extremo izquierdo A, trazamos el círculo de radio b. Claramente cualquier punto sobre este círculo está a una distancia b del vértice A. Es decir, dados los lados **b** y **c** es posible construir una infinidad de triángulos, entre los que se encuentran los triángulos **ABC**$_1$, **ABC**$_2$, **ABC**$_3$, etc. de la fig. 12.

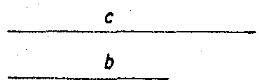

Figura 11

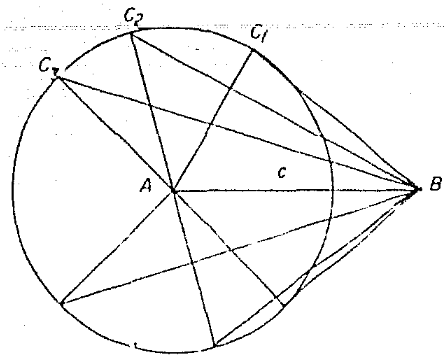

Figura 12

Si sólo nos fijamos en el semicírculo superior, "se ve" que todos los triángulos construidos son distintos. Aunque aún no tenemos forma de demostrarlo, se observa -por ejemplo- que los triángulos **ABC$_1$** y **ABC$_3$** no se pueden sobreponer de modo que coincidan (Fig. 13).

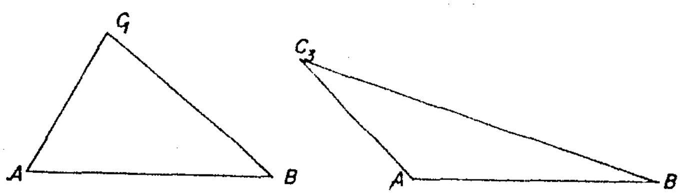

Figura 13

2) Si ahora nos dan como datos un lado c y un ángulo α adyacente a él, ¿cuántos triángulos podemos construir?

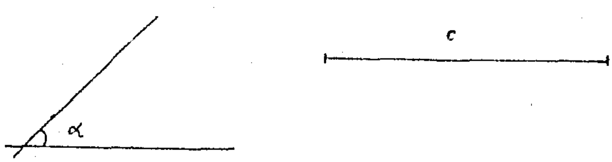

Figura 14

Teniendo como uno de los datos un ángulo necesitaremos copiar en otro plano un ángulo igual a uno dado, nos detendremos aquí para decir cómo hacerlo.

Aquí se puede dar un espacio para discutir con los alumnos el concepto de ángulo y llegar a una definición parecida a la que daremos aquí.

Definición de ángulo

"Es la inclinación de dos semirrectas que tienen un origen común". Este punto se denomina vértice del ángulo y las semirrectas reciben el nombre de lados del ángulo.

¿Cómo copiar un ángulo igual a uno dado?

Sea α el ángulo dado y l una semirrecta dada con un punto **O** como origen.

Una manera conocida de hacerlo es la siguiente:

1 Tracemos un arco cualquiera con centro en el vértice **A** del ángulo dado. Sean **B** y **C** los puntos de intersección del arco y de los lados del ángulo dado.

2 Tracemos un arco de radio **AB** con centro en el punto **O**. Indiquemos por B_1 el punto de intersección de este arco y de la semirrecta dada.

3 Tracemos un arco de radio **BC** con centro B_1. Llamemos C_1 al punto de intersección de los arcos.

Al unir los puntos **O** y C_1 obtengo el ángulo pedido. (La demostración de esta construcción se hará más adelante) (fig.16).

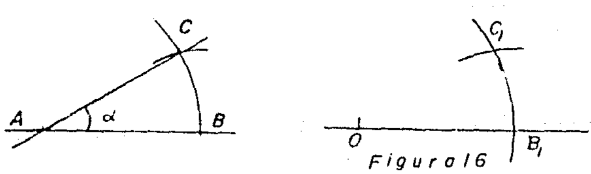

Figura 16

Regresemos entonces a construir el o los triángulos, dados los datos anteriores.

Copiemos el ángulo α.

Sobre uno de los lados del ángulo α tracemos con el compás la distancia c, desde el punto **A** (igual que trasladábamos la unidad), simplemente abriendo el compás con abertura igual a la distancia c. Llamemos **B** al otro extremo del segmento de longitud c. El tercer vértice puede ser cualquier punto en el otro lado del ángulo dado; ésto nos da una infinidad de triángulos, tantos como puntos hay en el lado del ángulo (fig.17).

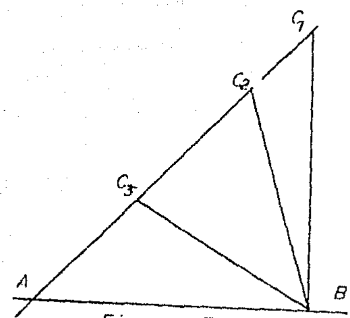

Figura 17

Al sobreponer el triángulo ABC_2 en el ABC_3 (fig. 18), "se ve " que no coinciden los otros dos ángulos ni los otros dos lados.

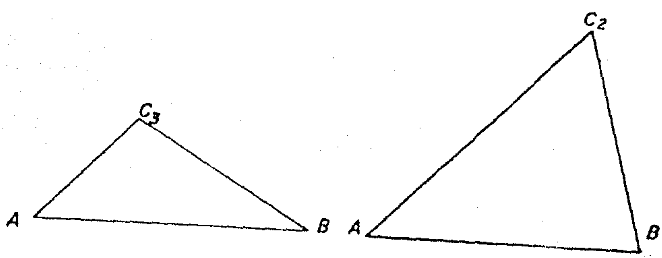

Figura 18

Es decir, estos datos no son suficientes para construir un único triángulo.

3) Si los datos dados son un lado a y un ángulo γ no adyacente a él, ¿cuántos triángulos podemos construir?

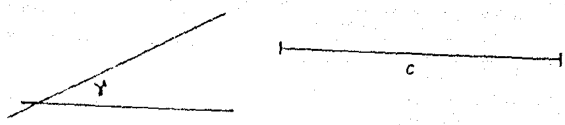

Figura 19

Copiemos el ángulo γ.

1 Sobre uno de los lados del ángulo tomemos un punto arbitrario, digamos A_1.

2 Sobre el otro lado, sea B_1 el punto en él que esté a una distancia c del punto A_1.

3 Uniendo los puntos A_1 y B_1 obtenemos el triángulo CA_1B_1. Esto podemos hacerlo con cualquier punto, digamos A_i, de uno de los lados del ángulo.

4 Tracemos arcos de radio c, con centro en A_i llamando B_i al punto de intersección del arco y el otro lado. Para cada punto A_i hay un punto B_i, entonces hay un triángulo CA_iB_i para cada punto A_i, y como hay una infinidad de puntos que pueden ser los A_i tenemos una infinidad de triángulos (fig. 20). Por tanto con los datos dados no podemos construir un único triángulo.

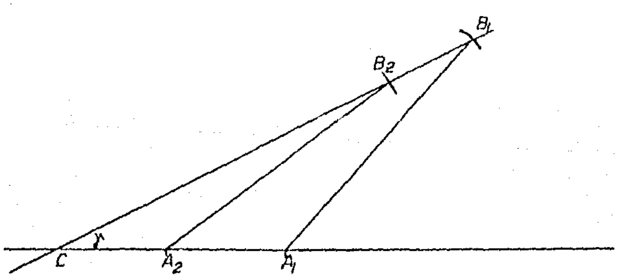

Figura 20

En la figura 20 "se ve" que todos los triángulos son diferentes; si quisiéramos sobreponer los triángulos CA_1B_1 y CA_2B_2 no podríamos hacerlos que coincidan (fig. 21).

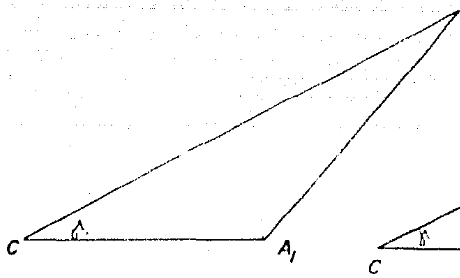

Figura 21

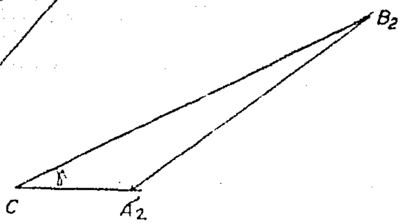

Figura 21

4) Si los datos dados son dos ángulos α y β, ¿cuántos triángulos podemos construir?

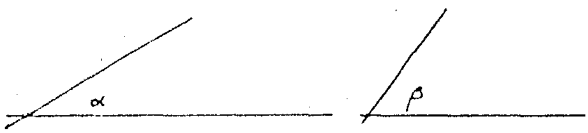

Figura 22

Como demostraremos más adelante, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180^0, es decir, $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, por lo que podemos encontrar la medida del tercer ángulo (fig. 23).

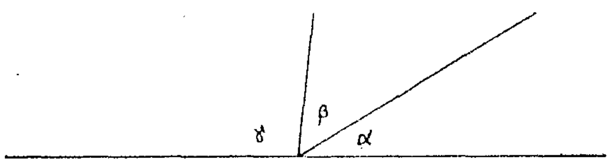

Figura 23

Esto es como tener tres datos, así que este caso lo consideraremos cuando veamos los casos en que nos dan tres condiciones para la construcción de triángulos.

III. Tres datos.

1) Supongamos que los datos dados son tres segmentos.

Figura 24

Llamemos **A** y **B** a los extremos del lado mayor **c**.

1 Tracemos dos círculos, uno con centro en **A** y radio b, y el otro con centro en **B** y radio a.

Podemos ver que éstos no se cortan, de modo que no podemos construir triángulo alguno.

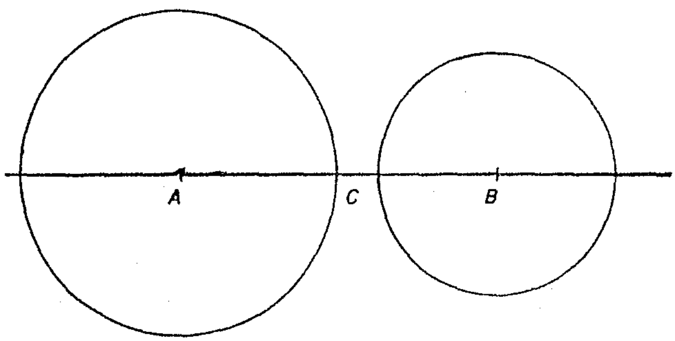

Figura 25

Esto es, si uno de los lados del triángulo es mayor que la suma de los otros dos, como en este ejemplo, entonces no podemos construir triángulo alguno. Nos preguntamos pues, ¿qué relación deben tener las longitudes de los tres segmentos para que determinen un triángulo?

Analicemos algunos casos;

Si la suma de los lados es igual a la longitud del tercer lado, ¿podremos construir algún triángulo?

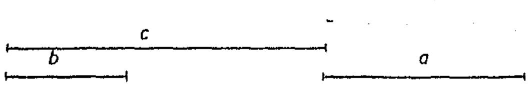

Figura 26

1 Tomemos nuevamente el lado mayor c y llamemos A y B a los extremos de este lado.

2 Tracemos dos círculos, uno con centro en A y radio b y el otro con centro en B y radio a.

El punto de intersección está sobre el segmento AB. En este caso decimos que el triángulo es "degenerado". (De hecho no hemos construido triángulo alguno).

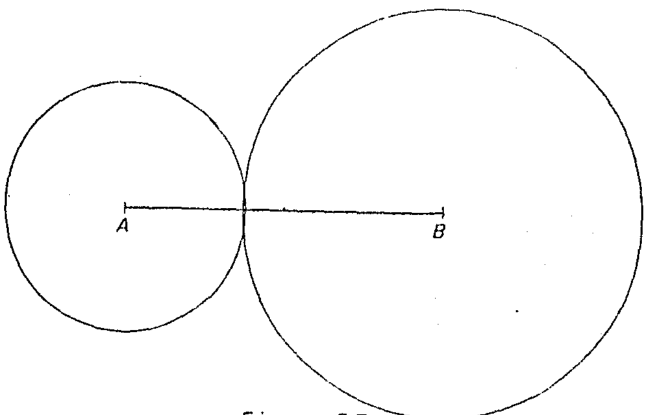

Figura 27

Veamos ahora qué sucede si la suma de dos segmentos cualesquiera es mayor que la longitud del otro segmento (fig. 28).

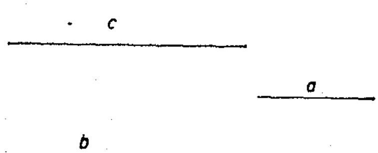

Figura 28

1 Sobre los extremos del lado c, tracemos círculos de radio a y b respectivamente.

2 Tracemos las rectas que unen los extremos de c con el punto de intersección de los círculos (fig. 29).

En este caso se pueden construir dos triángulos, aunque el que nos queda hacia abajo en la figura 29 es el simétrico del triángulo ABC . Por tanto, el triángulo es único.

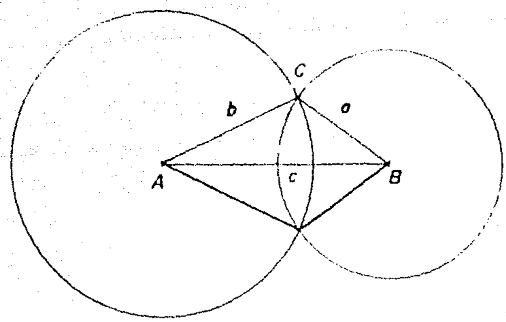

Figura 29

De lo anterior podemos concluir que:
Si nos dan tres segmentos, para construir un único triángulo debe ocurrir que *LA SUMA DE LAS LONGITUDES DE CUALESQUIERA DOS LADOS SEA MAYOR QUE LA LONGITUD DEL TERCER LADO.* A esta condición se le conoce como *LA DESIGUALDAD DEL TRIANGULO.*

Regresemos al problema de construir triángulos con tres datos:

2) Supongamos ahora que los datos dados son dos lados **a** y **b** y un ángulo α opuesto a uno de los lados dados **a**. ¿cuántos triángulos podemos construir?

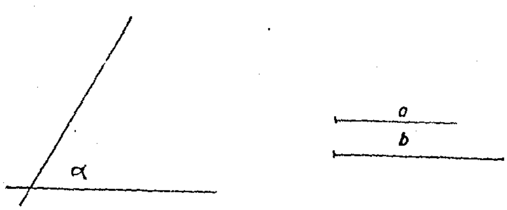

Figura 30

Copiemos el ángulo α y sea **A** su vértice.

1 Tracemos la distancia b sobre uno de sus lados, sea C el punto que cumple que AC = b.

2 Con centro en C tracemos otro círculo de radio a.
Si a es menor que b y menor que la altura que baja del vértice C, entonces el círculo no intersecta al otro lado del ángulo, por tanto no podemos construir triángulo alguno.

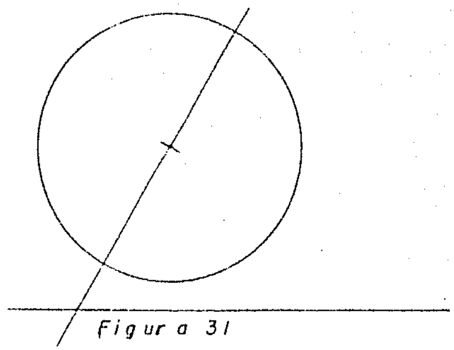

Figura 31

Si a es menor que b e igual a la altura que baja del vértice C, entonces el círculo corta al otro lado del ángulo en un único punto, es decir hemos construido un único triángulo con los datos dados.

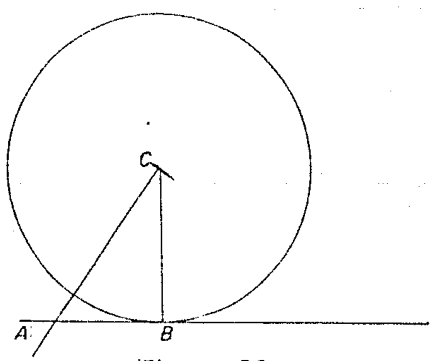

Figura 32

Si a es menor que b y mayor que la altura que baja del vértice C, el círculo intersecta al otro lado en dos puntos distintos, que sirven como el tercer vértice del triángulo buscado, sean B_1 y B_2 los puntos de intersección. Por lo tanto, hay dos triángulos, el triángulo AB_1C y el triángulo AB_2C que cumplen las condiciones pedidas.

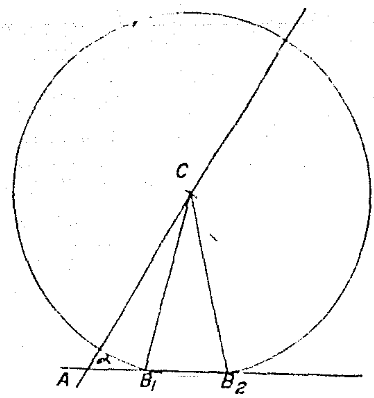

Figura 33

Si sobreponemos los triángulos AB_1C y AB_2C no coinciden todos sus lados ni todos sus ángulos, por tanto no son iguales.

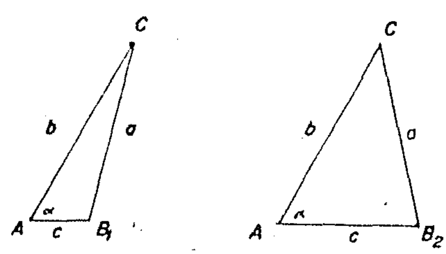

Figura 34

Si a es mayor que b entonces el círculo trazado intersecta al otro lado del ángulo en un solo punto que es el tercer vértice del triángulo solución.

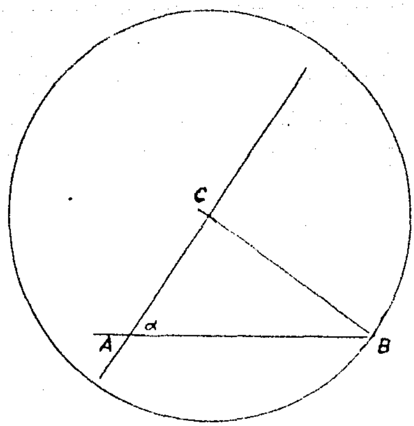

Figura 35

Todo lo anterior se concluyó tomando un ángulo que mide menos que un recto. Veamos que ocurre si el ángulo es recto.

Copiemos el ángulo dado.

1 Tracemos la distancia b sobre uno de los lados del ángulo y a este punto le llamamos **C**.

2 Consideremos el círculo de radio a con centro en **C**.

Si **a** es menor que **b** no hay intersección entre el círculo y el otro lado del ángulo. Por lo que no podemos construir triángulo alguno con las condiciones pedidas.

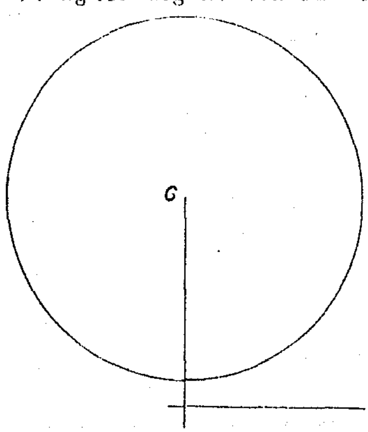

Figura 36

Si a es mayor que b, solo hay un punto de intersección del círculo con el segundo lado del ángulo. Por lo tanto, solo es posible construir un único triángulo que satisfaga las condiciones dadas.

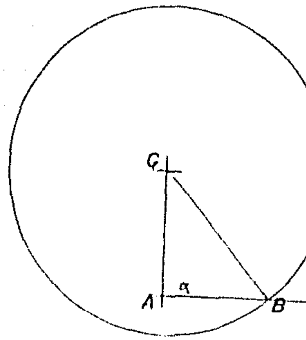

Figura 37

¿Qué ocurre si el ángulo dado es mayor que un recto?

Copiemos el ángulo α.

1 Tracemos la distancia b sobre uno de los lados del ángulo y a este punto le llamamos C.

2 Tracemos un círculo de radio a con centro C.

Si a es menor que b, el círculo no intersecta al otro lado del ángulo. No hay triángulo alguno que satisfaga las condiciones dadas.

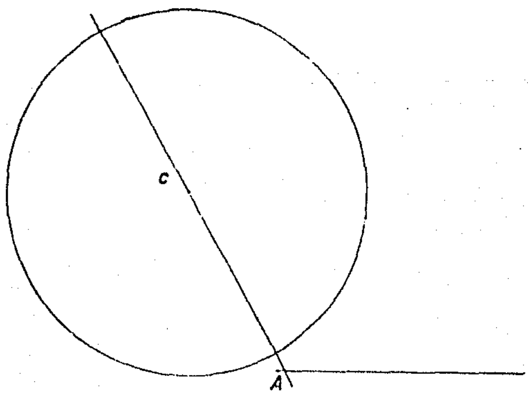

Figura 38

Si a es mayor que b, sólo hay un punto de intersección. Por tanto, existe un único triángulo que satisface las condiciones dadas.

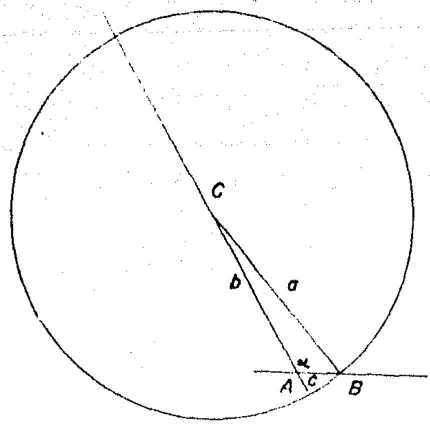

Figura 39

De lo anterior podemos concluir que;
Dados dos lados a y b y un ángulo α opuesto a uno de los lados dados a podremos construir un único triángulo siempre que el ángulo α sea mayor o igual que un ángulo recto y a mayor que b. O bien, si α es menor que un ángulo recto y a es mayor que b, también si a es menor que b pero igual a la altura que baja del vértice C.

3) Supongamos ahora que los datos dados son dos ángulos α y γ y un lado c, ¿cuántos triángulos podemos construir?

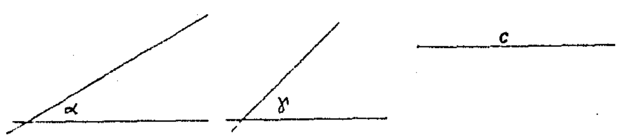

Figura 40

Como ya dijimos $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, por lo que β es también conocido. Podemos notar que en realidad tenemos cuatro datos, a saber, los tres ángulos y un lado. ¿Cómo construimos el o los triángulos que satisfagan las condiciones dadas?

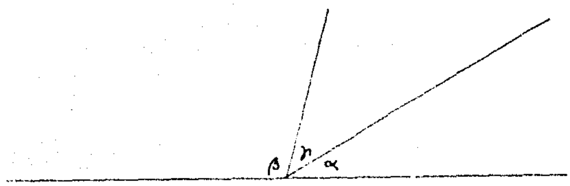

Figura 41

Llamemos **A** y **B** a los extremos del lado dado.

1 Con **A** como origen copiemos el ángulo α.

2 Con **B** como origen copiemos el ángulo β.

El punto donde se cortan los lados no comunes de los ángulos α y β será el punto **C**. Por tanto, hemos construido un único triángulo (fig. 42).

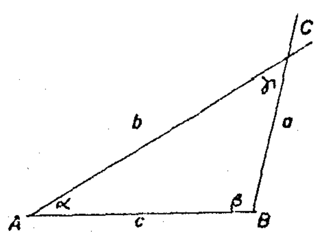

Figura 42

Si construimos otro triángulo con las mismas condiciones y lo sobreponemos en el ya construido, coincidirán los lados y los ángulos correspondientes (esto no es una demostración pero sirve como ilustración al alumno).

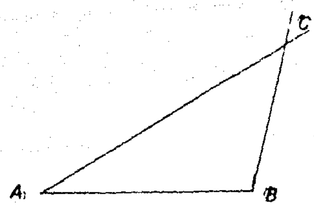

Figura 43

4) Si los datos dados son dos lados b y c y el ángulo α entre ellos, ¿cuántos triángulos podemos construir?

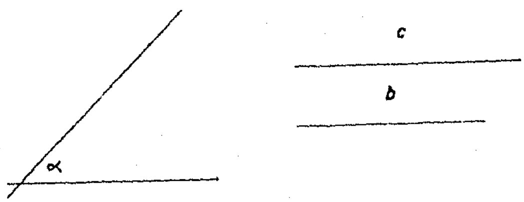

Figura 44

1 Sobre los lados del ángulo tracemos las distancias b y c respectivamente y llamemos a los extremos de estos segmentos B y C.

2 Unamos los puntos B y C.

Hemos construído un sólo triángulo (fig. 45).

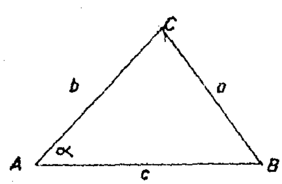

Figura 45

Si trazamos otro triángulo con las mismas condiciones y lo sobreponemos al ya construido, coincidirán los lados y los ángulos correspondientes (fig. 46).

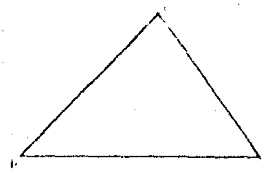

Figura 46

5) Dados los tres ángulos, ¿cuántos triángulos podemos construir?

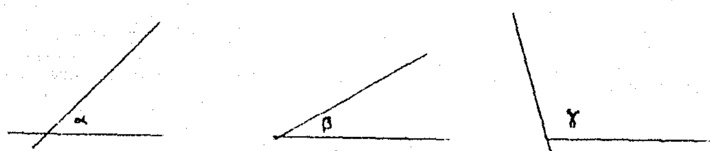

Figura 47

Como no tenemos lados dados, podemos escoger cualquier longitud para uno de ellos, por ejemplo, para el lado c. Como en el caso 3), podemos escoger los ángulos α y β (el ángulo γ ya está determinado), y entonces habremos construido un único triángulo, pero ésto es habiendo tomado la longitud para el lado c (fig. 48).

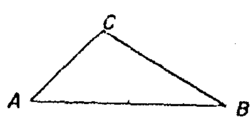

Figura 48

¿Qué ocurre si tomamos otra longitud?

Podemos tomar por ejemplo una longitud mayor, usamos los mismos ángulos α y β, hacemos la construcción como en 3) y nuevamente tenemos un único triángulo (fig. 49).

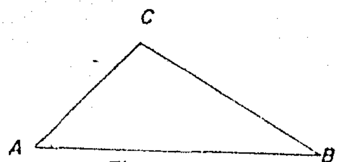

Figura 49

Así, podemos tomar otra longitud mayor o menor para el mismo lado c, tomemos nuevamente una longitud más grande que la de la figura 49 y los ángulos α y β dados y hagamos la construcción como en 3), obtenemos así un único triángulo (fig. 50).

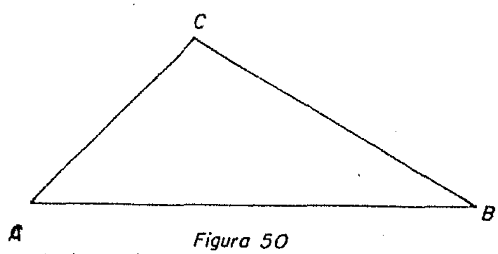

Figura 50

Al decir que tenemos un único triángulo en realidad lo que estamos diciendo es que tenemos un único triángulo dados los tres ángulos y un lado fijo. Como podemos escoger la longitud para el lado de manera arbitraria lo que tenemos entonces es una infinidad de triángulos que se construyen con los mismos ángulos pero con la longitud del lado escogido diferente.

Los triángulos construidos (en el caso 5) son parecidos pero no iguales, porque aunque sus ángulos son iguales sus lados no lo son.

Sin embargo podemos observar una propiedad importante de estos triángulos, que consiste en que si trazamos uno de los lados de un triángulo mayor que el del anterior, los,

otros dos lados son más grandes también.
Acerca de esta propiedad hablaremos más tarde.
De todo lo anterior podemos concluir que dos triángulos son iguales o congruentes si:

1 Tienen sus tres lados respectivos iguales.
2 Tienen dos lados y el angulo comprendido entre ellos respectivamente iguales.
3 Tienen dos angulos y el lado comprendido entre ellos respectivamente iguales.

Recordemos que cuando tenemos como datos dos ángulos cualesquiera y un lado, tenemos un único triángulo pero éste no lo incluimos como un criterio de congruencia de triángulos pues este caso puede reducirse al caso en que conocemos dos ángulos y el lado comprendido entre ellos ya que de los dos ángulos dados podemos deducir del tercero.
Cuando tenemos dos lados y un ángulo, no comprendido entre ellos, vimos que podemos construir un único triángulo como en las figuras 32, 35 y 37 ó bien, dos triángulos no congruentes como en la figura 33. Esto último nos impide utilizar dichos datos como un criterio de congruencia.

Veamos nuevamente *como copiamos un angulo igual a uno dado* (Repetiremos la construcción que ya estamos en condiciones de demostrar).
Sea α el ángulo dado y l una semirrecta con un punto **0** como origen.

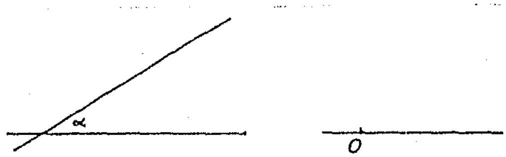

Figura 51

1 Tracemos un arco cualquiera con centro en el vértice A del ángulo dado. Sean B y C los puntos de intersección del arco y los lados del ángulo.

2 Tracemos un arco de radio AB con centro en el punto **O**. Indiquemos por B_1 el punto de intersección de este arco y la semirrecta dada.

3 Tracemos un arco de radio BC con centro B_1.

Llamemos C_1 al punto de intersección de los arcos. Al unir los puntos **O** y C_1 obtengo el ángulo pedido.

Si unimos el punto B con el C y el punto B_1 con el C_1 obtenemos dos triángulos que son congruentes.

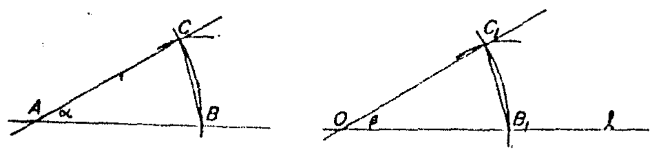

Figura 52

El lado **AC** del triángulo **ABC** es igual al lado **OC_1** del triángulo **OB_1C_1** pues son radios de arcos trazados con el mismo radio.

Los lados **AB** y **OB_1** también son iguales, por la misma razón que lo son los anteriores.

Los lados **BC** y **B_1C_1** también son iguales, también son radios de arcos construidos con el mismo radio.

Entonces, por el primer criterio de congruencia, tenemos que los triángulos son congruentes. Por lo tanto, el ángulo **BAC** es igual al ángulo **B_1OC_1**.

Cerremos por ahora este gran paréntesis y regresemos a nuestro problema inicial que era demostrar que M es el punto medio del segmento AB (fig. 2).

Allí tenemos triángulos con dos lados iguales, a saber, **CA** y **BC** (son radios del círculo). Estos triángulos son ISOSCELES pues *los triangulos isosceles tienen dos lados iguales*. Veamos cómo son sus ángulos. Para ello, usaremos la bisectriz de un ángulo (recta que divide al ángulo en dos ángulos iguales).

¿Como bisectamos un angulo?

Sea α el ángulo dado con vértice en A.

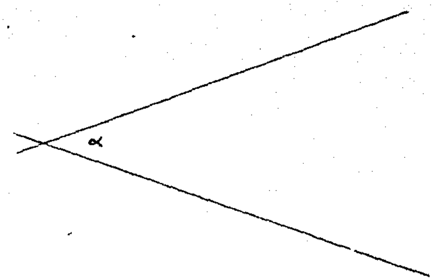

Figura 53

Consideremos el vértice A del ángulo dado como centro.

1 Tracemos un círculo de radio cualquiera. Sean B y C los puntos de intersección de este círculo con los lados del ángulo.

2 Tracemos otros círculos del mismo radio con centro en los puntos B y C. Estos círculos se intersectarán en dos puntos (uno de los cuales pudiera ser A). Elijamos uno de esos puntos de intersección y llamémoslo D (D no debe ser A).

La semirrecta AD divide al ángulo α en dos ángulos iguales.

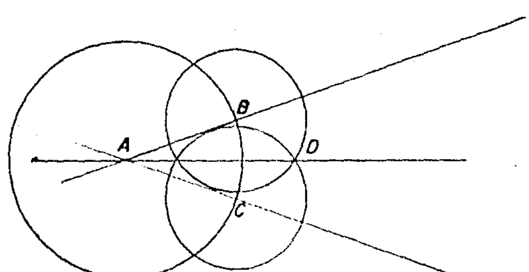

Figura 54

Veamos por qué;

Si nos fijamos en los triángulos que se forman uniendo los puntos **AB**, **BD**, **AD**, **AC** y **CD**, a saber los triángulos **ADB** y **ACD** tenemos que:

Los lados **AB** y **AC** son iguales pues son radios de círculos trazados con radios iguales.

Los lados **BD** y **DC** también son radios de círculos trazados con radios iguales.

El lado **AD** es común para ambos triángulos.

Como los tres lados son iguales se cumple el primer criterio de congruencia de triángulos, y por tanto $\triangle ADB = \triangle ACD$.

Por lo tanto todos los ángulos correspondientes del triángulo son iguales, en particular los ángulos **DAB** y **CAD** entonces el segmento **AD** divide en dos ángulos iguales al ángulo α y por tanto, el segmento **AD** es la bisectriz del ángulo α.

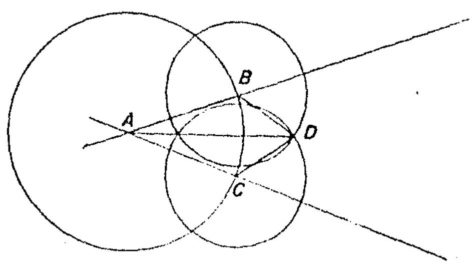

Figura 55

Veamos ahora que un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales;

Sea el triangulo ABC un triángulo isósceles; que se construye tomando el lado AB y trazando en cada uno de sus extremos un arco, ambos del mismo radio (figura 56).

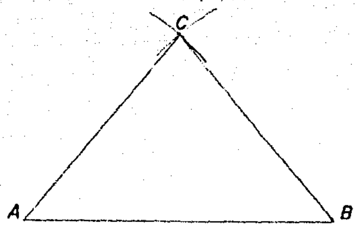

Figura 56

Bisectemos ahora el ángulo **ACB**. Llamemos **D** al punto de intersección de la bisectriz con el lado **AB**, y fijémonos en los triángulos **ADC** y **BDC**. Estos triángulos son congruentes pues:

1 Los lados **CA** y **CB** son iguales, ya que son radios de arcos trazados con radios iguales.

2 El lado **DC** es común.

3 Los ángulos **ACD** y **BCD** son iguales pues el segmento **CD** es la bisectriz del ángulo **ACB**.

Por tanto tenemos dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente iguales, así que los triángulos **ABC** y **BDC** son congruentes.

Entonces, los ángulos correspondientes son iguales; en particular, los ángulos **DAC** y **DBC** son iguales.

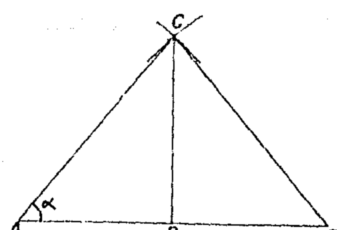

Figura 57

Un triangulo es isosceles, si los angulos opuestos a sus lados iguales son iguales entre si.

Vamos a regresar a las figuras [illegible], 5 y 6 para terminar de demostrar que el punto M es el punto medio del segmento AB.

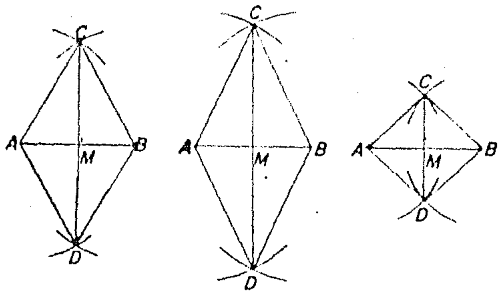

Figura 58

En las tres figuras tenemos triángulos isósceles pues los triángulos ABC, ABD de la figura 59 tienen dos lados iguales que son ; CA = BC y BD = DA.
Trabajaremos con la figura 2 (59) aunque los argumentos que se darán son válidos para las figuras 5 y 6 .

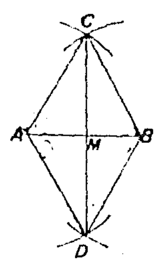

Figura 59

El triángulo ABC es isósceles, pues así lo construimos, entonces los ángulos BAC y CBA son iguales. Renombrémoslos como a (fig. 60).

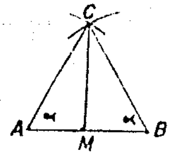

Figura 60

Si ahora nos fijamos en el triángulo **ABD**, (fig. 61) vemos que también es isósceles, entonces los ángulos **BAD** y **DBA** son iguales, renombrémoslos como β.

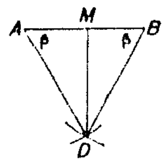

Figura 61

El triángulo **DCA** es isósceles. (fig .62) entonces los ángulos **CDA** y **ACD** son iguales. les llamaremos δ.

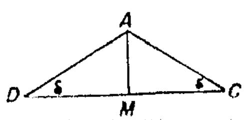

Figura 62

De igual manera se ve que el triángulo **DCB** es isósceles (fig. 63) por lo que los ángulos **CDB** y **BCD** son iguales, llamémosles γ.

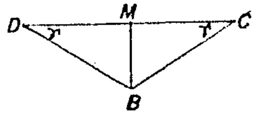

Figura 63

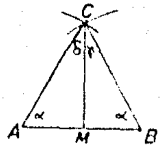

Figura 64

Del triángulo **ABC** tenemos que:

$$\alpha + \delta + \gamma + \alpha = 180^{\circ}$$

Del triángulo **ABD** tenemos que:

$$\beta + \delta + \gamma + \beta = 180^{\circ}$$

ésto es

$$2\alpha + \delta + \gamma = 2\beta + \delta + \gamma$$

entonces tenemos que:

$$2\alpha = 2\beta$$

y por tanto

$$\alpha = \beta$$

Haciendo el mismo razonamiento para los triángulos **DCA** y **DCB** con los ángulos respectivos tenemos que:

$$\delta = \gamma$$

Tenemos entonces que el segmento **CM** bisecta al ángulo **ACB** del triángulo **ABC** y el segmento **MD** bisecta al ángulo **ADB** del triángulo **ABD**.

Queremos demostrar que el punto **M** es el punto medio del segmento **AB**. Lo que haremos será ver que los lados **AM** y **MB** de los triángulos **AMC** y **BMC** son iguales (fig. 64).

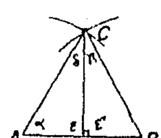

Figura 65

De los triángulos **AMC** y **BMC** tenemos que:

1 Los lados **CA** y **CB** son iguales.

2 El lado **MC** es común.

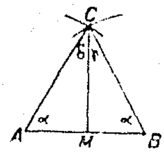

Figura 64

Del triángulo **ABC** tenemos que:

$$\alpha + \delta + \gamma + \alpha = 180^0$$

Del triángulo **ABD** tenemos que:

$$\beta + \delta + \gamma + \beta = 180^0$$

ésto es

$$2\alpha + \delta + \gamma = 2\beta + \delta + \gamma$$

entonces tenemos que:

$$2\alpha = 2\beta$$

y por tanto

$$\alpha = \beta$$

Haciendo el mismo razonamiento para los triángulos **DCA** y **DCB** con los ángulos respectivos tenemos que:

$$\delta = \gamma$$

Tenemos entonces que el segmento **CM** bisecta al ángulo **ACB** del triángulo **ABC** y el segmento **MD** bisecta al ángulo **ADB** del triángulo **ABD**.

Queremos demostrar que el punto **M** es el punto medio del segmento **AB**. Lo que haremos será ver que los lados **AM** y **MB** de los triángulos **AMC** y **BMC** son iguales (fig. 64).

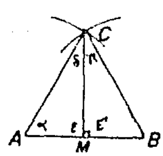

Figura 65

De los triángulos **AMC** y **BMC** tenemos que:

1 Los lados **CA** y **CB** son iguales.

2 El lado **MC** es común.

3 El ángulo δ es también el mismo en ambos.

Entonces por tener dos lados y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente iguales los triángulos **AMC** y **BMC** son congruentes. Por tanto sus lados correspondientes son iguales, en particular los lados **AM** y **MB** son iguales, por tanto **M** es el punto medio del segmento **AB** y esto era lo que queríamos demostrar.

Observemos que para hacer la demostración no usamos el hecho de que el radio del círculo fuera una cierta r = AB, por lo que el análisis desarrollado sirve para los otros dos casos que dibujamos y de hecho sirve para cualquier r mayor que la mitad de la distancia AB.

Ahora bien, como el segmento **MC** pasa por el punto medio del lado **AB** del triángulo **ABC** y por el vértice opuesto al lado, entonces este segmento es una mediana de dicho triángulo y, además, ya vimos que es bisectriz, ¿qué más podemos decir acerca de este segmento?

Fijémonos ahora en los ángulos **CMA** y **CMB** de los triángulos **AMC** y **BMC** (Fig. 65), renombrémoslos como ε y ε'.

Sabemos que:

$$\varepsilon + \varepsilon' = 180^{\circ}$$

a los ángulos ε y ε' se les llama ángulos suplementarios porque su suma es 180°, pero ε y ε' son ángulos correspondientes en los triángulos **AMC** y **BMC** por lo que

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

entonces

$$\varepsilon = \varepsilon' = 90^{\circ} = un\ recto$$

así que el segmento **MC** es perpendicular al lado **AB** y por tanto es una altura del triángulo **ABC**.

En el triangulo **ABD** tenemos que los ángulos **DMA** y **DMB** también son rectos y por tanto el segmento **MD** es altura del triángulo **ABD**.

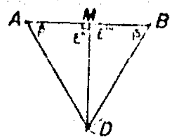

Figura 66

Como AM = MB y tanto AM como MB son alturas de los triángulos **DCA** y **DCB** respectivamente, podemos entonces concluir que *las alturas de dos triangulos isosceles congruentes son iguales.*

Nótese que hemos construido una perpendicular a un segmento dado que pasa por su punto medio, veamos ahora cómo se construye una perpendicular a una recta dada que pase por cualquier punto en ella (dado).

Construccion de una perpendicular a una recta l dada que pasa por un punto **O** *que esta sobre la recta l.*

1. Tracemos un círculo de radio cualquiera con centro en **O**, que corte a la recta en dos puntos, a saber, **A** y **B**.
2. Tracemos dos círculos de radio AB y con centros en los puntos **A** y **B**. Sea **C** uno de los puntos de intersección de los mismos.

La recta pedida es la que pasa por los puntos **O** y **C**.

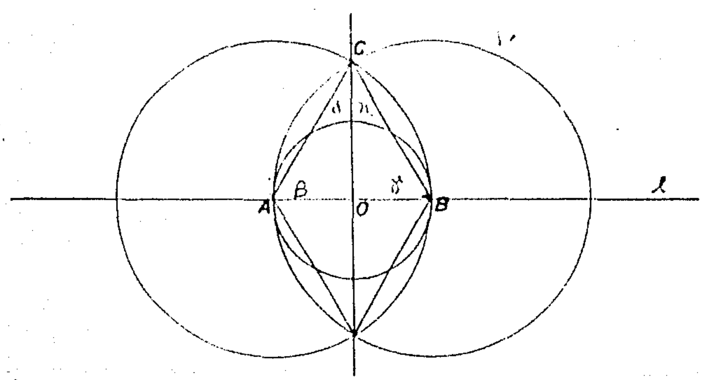

Figura 67

Veamos;

Tracemos los segmentos que unen los puntos **A** y **C**, **C** y **B** (fig. 67).

Vamos entonces a fijarnos en los triángulos **AOC** y **BOC**.

1 Los lados **CA** y **CB** son iguales por ser radios de los círculos.

2 Los lados **AO** y **BO** son iguales por ser **O** el punto medio del segmento **AB**.

3 El lado **OC** es común.

Como los dos triángulos tienen sus tres lados correspondientes iguales, entonces los triángulos son congruentes. Esto es, sus ángulos correspondientes son iguales. El ángulo **OAC** será denotado como β, el ángulo **OBC** será denotado como γ, el ángulo **ACO** como δ y el ángulo **BCO** como η.

Así que

$\beta = \gamma$ y $\delta = \eta$, pero $\delta + \eta = 180^o$, de donde $\delta = \eta = 90^o$.

Por lo tanto la recta **CO** es perpendicular a la recta l.

También podemos construir una recta perpendicular a una recta l dada que pasa por un punto **O** fuera de ella.

Construcción de una recta perpendicular a una recta l dada que pasa por un punto **O** *fuera de ella.*

1 Tracemos un círculo con centro en **O** y que corte a la recta l en más de un punto. Sean **A** y **B** esos puntos de intersección con la recta l.

2 Tracemos dos círculos, uno con centro en **A** y el otro con centro en **B** y del mismo radio. Sea $\mathbf{O_1}$ uno de los puntos de intersección de los círculos. (Si $\mathbf{O_1}$ coincidiera con **O** por haber tomado círculos centrados en A y B de radio OA = OB tomamos el otro punto).

La recta buscada es la que pasa por los puntos **O** y $\mathbf{O_1}$.

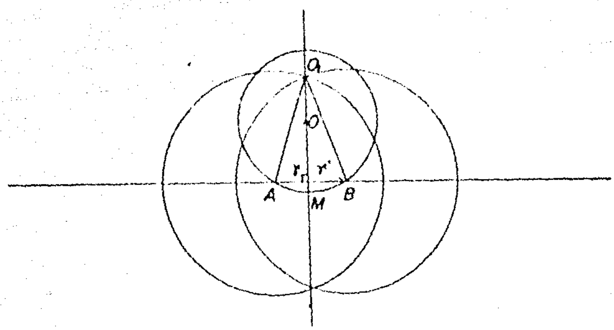

Figura 68

Obsérvese que para bisectar el segmento **AB** hicimos una construcción similar; desde **A** y **B** construíamos dos círculos del mismo radio y uníamos los puntos de intersección de ambos círculos. Si ahora suponemos que el radio tomado para dichos círculos es la distancia $OA = BO = r$, el segmento $\mathbf{OO_1}$ biseca al segmento **AB**, y tenemos entonces que:

Los triángulos $\mathbf{AMO_1}$ y $\mathbf{BMO_1}$ son congruentes pues:

1 Los lados $\mathbf{O_1A}$ y $\mathbf{O_1B}$ son iguales pues son radios de círculos iguales.

2 Los lados **AM** y **MB** también son iguales pues **M** es el punto medio del segmento **AB**.

3 El lado $\mathbf{MO_1}$ es común.

Luego entonces sus lados correspondientes son iguales, y por tanto si llamamos γ al ángulo $\mathbf{O_1MA}$, γ' al ángulo $\mathbf{O_1MB}$ tendremos que;

$$\gamma = \gamma' \quad y \quad \gamma + \gamma' = 180^{\circ} \quad y \qquad \gamma = \gamma' = 90^{\circ} = \text{un recto.}$$

Tenemos entonces que la recta que pasa por los puntos **O** y $\mathbf{O_1}$ es perpendicular a la recta l dada.

Regresemos al problema inicial de encontrar el punto "un medio" de la recta donde estamos construyendo los números. Tenemos el segmento de longitud la unidad que escogimos; bisectémoslo con el método usado para la bisección del segmento **AB** y entonces podemos pintar el "un medio" (fig. 69).

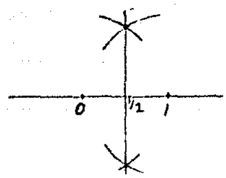

Figura 69

Ahora veamos ¿qué otros números podemos construir, usando esta misma construcción?
El método sirve para encontrar todos los puntos medios, es decir, los puntos medios de los segmentos de longitud uno (fig. 70).

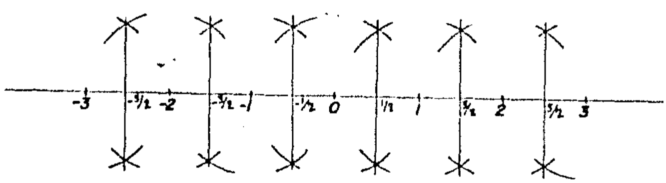

Figura 70

Esta es una forma de encontrar los puntos medios aunque, como ya conocemos el un medio, podemos abrir el compás con esta longitud e ir trasladándola en la recta y de este otro modo también encontramos los puntos medios (fig. 71).

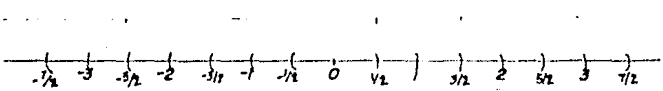

Figura 71

¿Qué otros números podemos construir con este método?
Pues los medios de los medios, es decir, los cuartos, ya que sabemos bisectar cualquier segmento no importando su longitud.
También podemos construir los octavos, pues son las mitades de los cuartos.
Así, con esta construcción podemos construir todos los números que tienen como denominador una potencia de dos, ya que podemos ir

dividiendo los segmentos en dos partes iguales. De esta forma hemos construido una infinidad de números.

Faltan aún números por construir, por ejemplo el "un tercio" que no tiene denominador una potencia de dos. ¿cómo lo construímos?

Construccion del numero un tercio.

1 Tracemos una recta *l* y marquemos la unidad sobre ella.

2 Tracemos otra recta *m* que corte a *l* en el origen.

3 Tracemos tres unidades sobre ella.

4 Unamos con una recta *l'*, el uno de *l* con el tres de *m*.

5 Tracemos una recta *m'* paralela a *l'* que pase por el uno de *m*; el punto donde se intersectan *m'* y *l* es el un tercio.

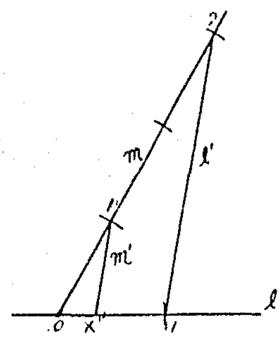

Figura 72

Aquí tenemos un problema ¿cómo construimos una recta paralela a una recta dada y que pase por un punto dado?

Primero habrá que ver qué es paralelismo. La idea de paralelismo que "maneja" el alumno es:

1 Que dos rectas son paralelas si la distancia entre ellas es siempre la misma.

2 Que dos rectas son paralelas si no se cortan.

Esto tiene un problema, para la primera idea lo que ocurre es que es complicado definir la distancia entre dos rectas y para la segunda, es difícil de verificar que en efecto dadas dos rectas (pintadas en el cuaderno o bien en el pizarrón) no se cortan, pueden no cortarse al dibujárseles pero podría ocurrir que si las prolongaramos (en caso de poder pintarlo) sí se intersectaran. Lo que haremos entonces es; partiendo de construcciones de rectas paralelas dar propiedades más manejables.

Veamos entonces algunas construcciones;

Construccion de una recta paralela a una recta dada que pase por un punto dado.

Sea l una recta dada y **P** el punto por donde queremos que pase la paralela.

1 Construimos una recta m perpendicular a l que pase por **P**.

2 Construimos una recta n perpendicular a m que pase por **P**.

n es la recta paralela a l (fig. 73).

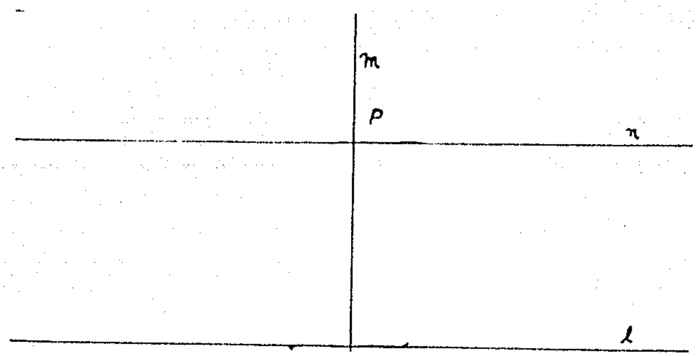

Figura 73

Obsérvese que para construir la paralela utilizamos dos veces el método para construir perpendiculares. Pero también podemos hacer otra construcción.

1 Tracemos un recta m que pase por el punto **P** y que corte a la recta l, llamamos **O** al punto de intersección de ambas rectas.

2 Con una distancia arbitraria, tracemos un arco con centro en **O**, tal que **B** y **C** sean los puntos donde el arco corta a l y m respectivamente.

3 Traslademos el ángulo **BOC**, al que renombraremos como α, al punto **P** (que será el vértice de éste), y con m como lado correspondiente a **OC**.

4 Tracemos un arco con centro en P y radio OB, de modo que la intersección de éste con π sea R.

5 Con centro en R tracemos otro arco de radio BC. Sea Q el punto que resulta de intersectar a los arcos. Renombremos por α' al ángulo QPR.

Sean:

B' un punto sobre l tal que B'D = DB

C' un punto sobre π tal que C'D = OC

Q' un punto sobre π tal que Q'P = PQ

R' un punto sobre π tal que R'P = PR.

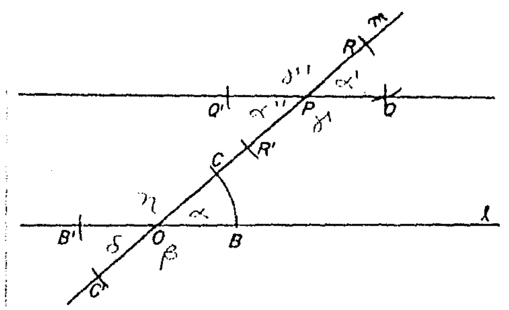

Figura 74

Afirmamos que la recta que pasa por los puntos P y Q es paralela a la recta l (fig. 74). Demos nombres a los ángulos formados en esta figura.

Tenemos:

El ángulo BOC será llamado también α, el ángulo C'OB β, el ángulo B'OC' δ, el ángulo COB' η, el ángulo QPR α' el ángulo R'PQ γ, el ángulo Q'PR' α'' y el ángulo RPQ' γ'.

$\alpha + \beta = 180^{o}$, pues son ángulos suplementarios y $\alpha' + \gamma = 180^{o}$ y $\alpha = \alpha'$ pues así lo construimos entonces $\beta = \gamma$.

Del mismo modo tenemos que:

$\delta + \beta = 180^{o}$ y como $\alpha + \beta = 180^{o}$, entonces $\delta = \alpha$ y además

$\eta + \alpha = 180^0$ y $\alpha + \beta = 180^0$, por lo que $\eta = \beta$

Esto quiere decir que los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Los ángulos α, η, α'' y γ se llaman ángulos internos; los ángulos β, δ, γ' y α' ángulos externos.

Tomados en pares, α y α'', η y γ se llaman ángulos alternos internos; β y γ', δ y α' alternos externos. α y α', β y γ, α'' y δ, η y γ' correspondientes.

De lo anterior podemos concluir que:

1 $\eta + \alpha' = 180^0$ y $\gamma' + \alpha = 180^0$ y como $\alpha = \alpha'$ entonces $\eta = \gamma'$.

2 $\eta + \delta = 180^0$ y $\gamma' + \alpha'' = 180^0$ y como $\eta = \gamma'$ entonces $\delta = \alpha''$.

3 $\alpha' + \beta = 180^0$ y $\alpha + \gamma = 180^0$ y como $\alpha = \alpha'$ entonces $\beta = \gamma$.

Con esta información podemos dar algunas propiedades para que dos rectas sean paralelas.

PROPIEDAD 1.

"SI DOS RECTAS SITUADAS EN UN PLANO FORMAN CON UNA TRANSVERSAL ANGULOS CORRESPONDIENTES IGUALES, ESTAS DOS RECTAS SON PARALELAS".

También tenemos:

1 $\eta = \beta$ por ser opuestos por el vértice y como sabemos $\beta = \gamma$ entonces $\eta = \gamma$.

2 $\alpha' = \alpha''$ por ser opuestos por el vértice y $\alpha = \alpha'$ por construcción, por tanto $\alpha' = \alpha''$.

PROPIEDAD 2.

"SI DOS PARALELAS SON CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL, LOS ANGULOS ALTERNOS - INTERNOS SON IGUALES".

$\delta = \alpha$ por ser opuestos por el vértice.

$\alpha = \alpha'$ por construcción, por tanto $\delta = \alpha'$.

$\beta = \eta$ por ser opuestos por el vértice.

$\eta = \gamma'$ por ser correspondientes, por tanto $\beta = \gamma'$.

PROPIEDAD 3.

"SI DOS PARALELAS SON CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL, LOS ANGULOS ALTERNOS - EXTERNOS SON IGUALES".

Hagamos ahora la construcción de una recta paralela a una *dada*.

Sea l la recta dada y **P** el punto por el que queremos que pase la paralela.

1 Tracemos un círculo con centro en **P** y que corte a l. Sean **A** y **B** los puntos de intersección del círculo con la recta l.

2 Unamos **A** con **P** y **B** con **P**. De este modo hemos construido un triángulo isósceles, tracemos la altura que baja del vértice **P** y llamemos **C** al punto de intersección de la recta l con esta altura (fig. 75).

3 Sobre l traslademos la distancia AB. Sean **A'** y **B'** los extremos del segmento de longitud AB que trasladamos.

4 Construyamos el triángulo **A'B'Q** congruente al triángulo ABP, tracemos la altura que baja del vértice **Q** y llamemos C' al punto de intersección de l con esta altura.

5 Tracemos ahora la recta que pasa por los puntos **P** y **Q**. Se forma un rectángulo y por tanto la recta que pasa por los puntos C y C' es paralela a la recta que pasa por los puntos **P** y **Q**.

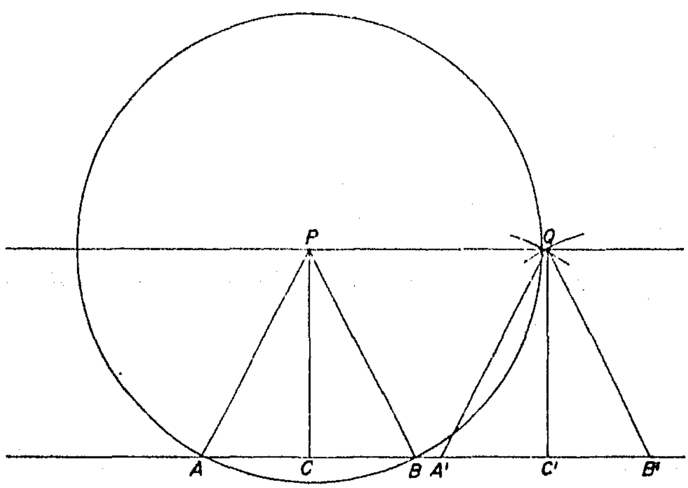

Figura 75

Los puntos P, C, C' y Q forman un rectángulo, éste tiene sus lados iguales, paralelos entre sí, por tanto, la recta que pasa por los puntos P y Q es paralela a la que pasa por C y C'.

Las dos propiedades primeras, son más manejables, pues es fácil verificar que dos rectas dadas cumplen tales propiedades haciendo las construcciones.

Ahora ya tenemos herramienta suficiente para demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es *dos rectos*. Sólo necesitamos construir una recta paralela, como ahora ya sabemos hacerlo, entonces haremos aquí la demostración;

Sea **ABC** un triángulo cualquiera.

Tracemos una recta paralela al lado **AB** que pase por el vértice **C**; las rectas que pasan por los puntos **A** y **C**, **C** y **B** son transversales a las paralelas (fig. 76).

Por los resultados anteriores tenemos que:

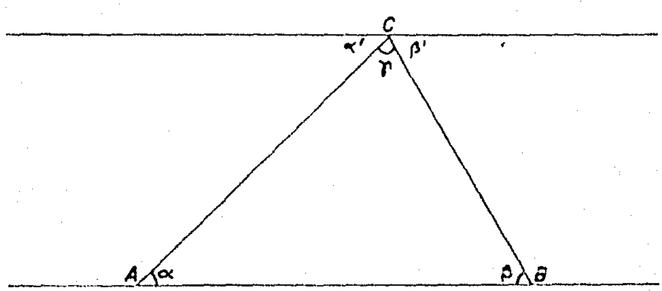

Figura 76

1 Los ángulos α y α', β y β', son alternos - internos y por tanto $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$.

2 Los ángulos α', γ y β' suman dos rectos por tanto $\alpha + \gamma + \beta = 180^0 =$ *dos rectos*.

Habiendo resuelto el problema de paralelismo podemos abordar nuevamente la propiedad que vimos de triángulos que tienen sus tres ángulos correspondientes iguales, a saber, si trazamos una de los lados del triángulo mayor que el de uno construido antes, los otros dos también resultan más grandes. Entonces veremos el siguiente concepto:

SEMEJANZA DE TRIANGULOS.

Cuando analizamos la posibilidad de construir un triángulo dados sus tres ángulos vimos que podíamos construir una infinidad de ellos variando tan sólo la longitud de los lados y en ese momento señalamos una propiedad de los triángulos así construidos, a la que llamaremos *SEMEJANZA, dos triangulos son semejantes si sus angulos son respectivamente iguales.* En ese momento no estabamos en posibilidad de estudiar esa propiedad. Pero ahora, con la herramienta desarrollada, vamos a hacerlo.

Si sobreponemos el triángulo de la figura 48 en la figura 50 haciendo coincidir el ángulo γ y el vértice **C** tenemos la figura 77; llamaremos **ABC** al triángulo de la figura 50 y **A'B'C'** al triángulo de la figura 48, entonces los vértices **C** y **C'** coinciden, el punto **A'** está en el lado **CA** y el punto **B'** está en el lado **BC**.

Como los ángulos α y α' son iguales y los ángulos β y β' también son iguales tenemos entonces que los segmentos **AB** y **A'B'** son paralelos.

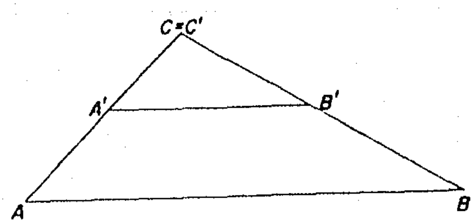

Figura 77

Tracemos el segmento que une los puntos **A'** y **B** y fijémonos en el triángulo **A'BB'**, a su altura, la llamaremos h (fig. 78).

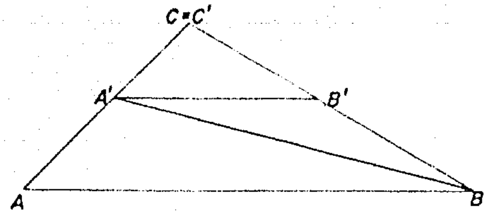

Figura 78

Ahora tracemos el segmento que une los puntos **A** y **B'** y fijémonos en el triángulo **AB'A'**, su altura es también la distancia *h* (fig. 79).

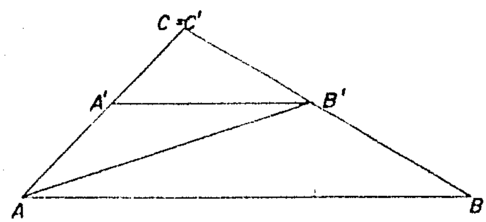

Figura 79

Como los triángulos **A'BB'** y **AB'A'** tienen un lado que mide lo mismo, a saber, el lado **A'B'** y la altura para este lado es la misma entonces estos triángulos tienen la misma área.

Así, los triángulos **A'BC** y **AB'C** tienen la misma área.

Veamos la proporción que hay entre las áreas de los triángulos: **A'B'C'** y **A'BC'**, **A'B'C'** y **AB'C**.

1 Tracemos la altura correspondiente al lado **B'C'** del triángulo **A'B'C'** y llamemos **X** al punto donde se intersecta la altura con el lado (en nuestro caso este punto es exterior al triángulo).

2 Tracemos también la altura correspondiente al lado **C'A'** y llamemos **Y** al punto de intersección de esta altura con el lado (fig. 80) (también en este caso el punto es exterior al triángulo).

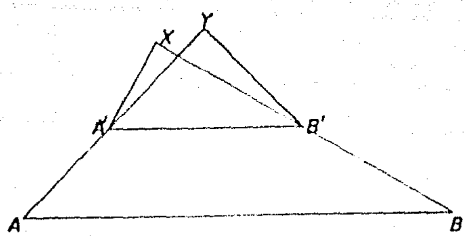

Figura 80

Como;

$$a(\Delta A'B'C') = \frac{1}{2}(B'C')(A'X)$$

$$a(\Delta A'BC) = \frac{1}{2}(BC)(A'X) \quad y$$

$$a(\Delta A'B'C') = \frac{1}{2}(A'C')(B'Y)$$

$$a(\Delta AB'C) = \frac{1}{2}(AC)(B'Y)$$

tomando el cociente de las dos primeras ecuaciones, tenemos;

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{a(\Delta A'B'C')}{a(\Delta A'BC)}$$

y como $a(\Delta A'BC) = a(\Delta AB'C)$ entonces

$$\frac{a(\Delta A'B'C')}{a(\Delta AB'C)} = \frac{a(\Delta A'B'C')}{a(\Delta A'BC)}$$

pero $\dfrac{a(\Delta A'B'C')}{a(\Delta A'BC)} = \dfrac{A'C'}{A'C}$

Es decir, $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'C'}{AC}$, esto es, $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$.

Esto significa que el punto **A'** divide al segmento **AC** en la misma proporción que el punto **B'** divide al segmento **BC**.

Ahora coloquemos el triángulo de la figura 48 al que llamaremos A''B''C'', para que no haya confusión con la figura 77, sobre el triángulo de la figura 80, a éste lo llamaremos ABC; al hacer coincidir los vértices A y A'', coincidirán los ángulos correspondientes a estos vértices; obtenemos así la figura 81.

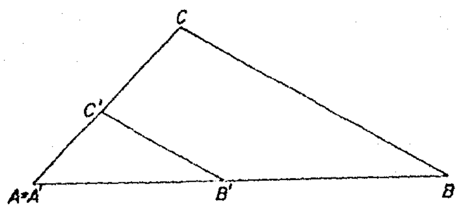

Figura 81

Usando los mismos argumentos que usamos para la figura 77. podemos asegurar que:

$$\frac{AC}{A''C''} = \frac{AB}{A''B''}$$

como A'' = A tenemos que

$$\frac{AC}{AC''} = \frac{AB}{AB''}$$

pero AC'' = AC por lo que

$$\frac{AC}{AC''} = \frac{AC}{AC'}$$

Esto es, el punto B'' divide al segmento AB en la misma proporción que el punto C'' al segmento AC.

De lo anterior concluimos que:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \quad y \quad \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Esto significa que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} .$$

Podemos concluir, pues, que si tenemos dos triángulos semejantes, sus lados guardan la relación:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

que se conoce como la proporción de sus lados. En este caso se dice que los triángulos semejantes (tienen sus ángulos correspondientes iguales) tienen sus lados proporcionales.

Antes de regresar a la construcción del punto un tercio veamos un ejemplo sobre semejanza de triángulos:

Tomemos un triángulo rectángulo con vértices **A**, **B** y **C**.

Supongamos que la hipotenusa del triángulo es el lado AB.

Tracemos la altura correspondiente a este lado, es decir, el segmento perpendicular al lado **AB** que pasa por **C** y llamemos **D** al punto donde se intersectan dicho lado y la altura.

Como la altura es perpendicular al lado, hemos construido dos nuevos triángulos rectángulos.

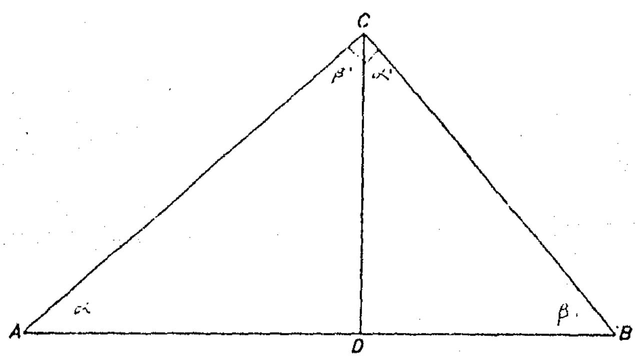

Figura 82

¿Qué relación hay entre los triángulos construidos?

Los nuevos triángulos son: el triángulo **ADC** y el triángulo **CDB**.

Del triángulo original **ABC** tenemos que:

$$\alpha + \frac{\pi}{2} + \beta = 180^{0}$$

donde α es el ángulo **DAC** y β es el ángulo **CBD**.

Del triángulo **ADC** tenemos que:

$$\alpha + \beta' + \frac{\pi}{2} = 180^{0}$$

donde β' es el ángulo **ACD**.

Así que

$$\beta = \beta'.$$

Por tanto, los triángulos son semejantes, pues tienen sus tres ángulos correspondientes iguales.

Si suponemos que las longitudes de los lados de los triángulos son:

AB = a, BC = c, CA = b, AD = e, DB = f y DC = d tenemos que la razón de proporcionalidad de los triángulos es:

$$\frac{AB}{CA} = \frac{CA}{AD}\ , \quad \text{esto es} \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{e}$$

$$\frac{AB}{CA} = \frac{BC}{DC}\ , \quad \text{esto es} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{CA}{AD} = \frac{BC}{DC}\ , \quad \text{esto es} \quad \frac{b}{e} = \frac{c}{d}$$

Fijémonos ahora en los triángulos **ABC** y **CDB**.

Del triángulo **CDB** tenemos que:

$$\alpha' + \frac{\pi}{2} + \beta = 180^{0}$$

donde α' es el ángulo **BCD**.

Por lo que

$$\alpha = \alpha'.$$

Y por tanto los triángulos **ABC** y **CDB** también son semejantes y su razón de proporcionalidad es:

$$\frac{CA}{BC} = \frac{BC}{DC}, \quad \text{esto es} \quad \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{CA}{AB} = \frac{BC}{DB}, \quad \text{esto es} \quad \frac{b}{a} = \frac{c}{f}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{DC}, \quad \text{esto es} \quad \frac{a}{c} = \frac{f}{d}.$$

De aquí podemos concluir que los triángulos **ABC**, **ADC** y **CDB** son semejantes entre sí.

Los triángulos **ADC** y **CDB** se encuentran en la proporción:

$$\frac{CA}{AD} = \frac{BC}{DC} \text{ , esto es } \frac{b}{e} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{CA}{DC} = \frac{BC}{DB} \text{ , esto es } \frac{b}{d} = \frac{c}{f}$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB} \text{ , esto es } \frac{e}{d} = \frac{d}{f}$$

lo que equivale a escribir:

$$\frac{f}{d} = \frac{d}{e}$$

Regresemos a la construcción del punto un tercio (fig. 83) y argumentemos por qué así encontramos el punto.

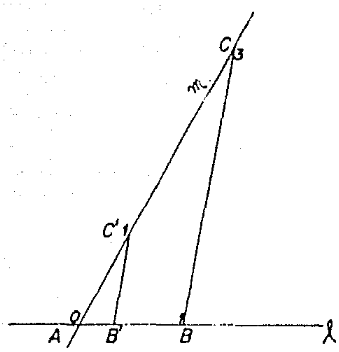

Figura 83

Llamemos **B** al punto uno de la recta l, **C** al punto tres de la recta m , **B'** al punto donde se intersectan las rectas l y m', **C'** al punto uno de la recta m y **A** al origen. Llamemos x a la longitud del segmento **AB'**.

Los triángulos **ABC** y **AB'C'** son semejantes pues tienen sus ángulos correspondientes iguales (recuérdese que m y m' son paralelas), por lo que sus lados son proporcionales, esto es:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$$

pero AB = 1, AB' = x, AC = 3 y AC' = 1, entonces

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{1}$$

Despejando tenemos que $x = \frac{1}{3}$; por lo que el punto B' es el punto un tercio de nuestra recta.

Con esta abertura del compás, podemos construir todos los tercios; colocando el compás después del un tercio tantas veces como queramos; esto nos da un método para construirlos aún cuando no podamos pintarlos todos.

Con esta misma construcción, ¿qué otros números podemos construir? Si tomamos el un tercio como unidad y hacemos la misma construcción, ahora el punto B' será el punto un noveno.

Otra vez tenemos que los segmentos BC y $B'C'$ son paralelos, esto quiere decir que los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes y entonces sus lados son proporcionales:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

pero ahora $AB = \frac{1}{3}$, $A'B' = x$, $AC = 1$ y $A'C' = \frac{1}{3}$.

Por lo que

$$\frac{\frac{1}{3}}{x} = \frac{1}{\frac{1}{3}}$$

y así,despejando tenemos:

$$x = \left(\frac{1}{3} \right)\left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{9}$$

Tomando esta abertura, podemos construir todos los novenos, aunque no podamos pintarlos todos con nuestro compás.

Podemos seguir así con la misma construcción y tendremos los números que tienen como denominador una potencia de tres. No haremos más construcciones pues cada vez los segmentos obtenidos son más pequeños y ésto no nos permite seguir dibujando como lo hemos hecho hasta ahora.

Veamos. Hasta aquí, ya construimos todos los enteros, todos los medios y los números con denominador una potencia de dos, todos los tercios y todos los números con denominador una potencia de tres, y todos los números de la forma $\frac{a}{2^p\,3^q}$ con a, p y q enteros, ¿con estos números hemos cubierto toda la recta? No, pues al menos nos faltan aquellos con denominador distinto de potencias de dos y tres.

Sin embargo esta misma construcción nos va a servir para construir cualquier número de la forma $\frac{1}{n}$ con n un natural.

Hagamos la construcción como antes:

1 Tracemos una recta l y marquemos sobre ella la distancia uno con el compás, renombremos como B al punto uno.

2 Tracemos otra recta, digamos m que pase por el origen de la recta l y marquemos sobre ella las distancias uno y n. Renombremos como C al punto n y como C' al punto uno de la recta m.

3 Tracemos una recta l' que una los puntos B y C.

4 Tracemos una recta m' paralela a l' que pase por el punto C'. Llamemos B' al punto donde se intersectan las rectas l y m'.

Los triángulos ABC y AB'C' son semejantes; por tanto sus lados se encuentran en la proporción:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$$

Si llamamos x a la distancia AB' entonces
AB = 1 , AC = n y AC' = 1

por lo tanto $$\frac{1}{x} = \frac{n}{1}$$

así que, despejando tenemos: $$x = \frac{1}{n}$$

Construimos así cualquier número de la forma $\frac{1}{n}$ y con esta abertura del compás podemos construir todos los números de la forma $\frac{m}{n}$ con m cualquier número entero y n cualquier natural, estos son los números que conocemos como números racionales. Igual que antes, podemos construir todos los números cuyo denominador sea una potencia de n aunque tampoco podemos pintarlos todos, ya que son una infinidad.

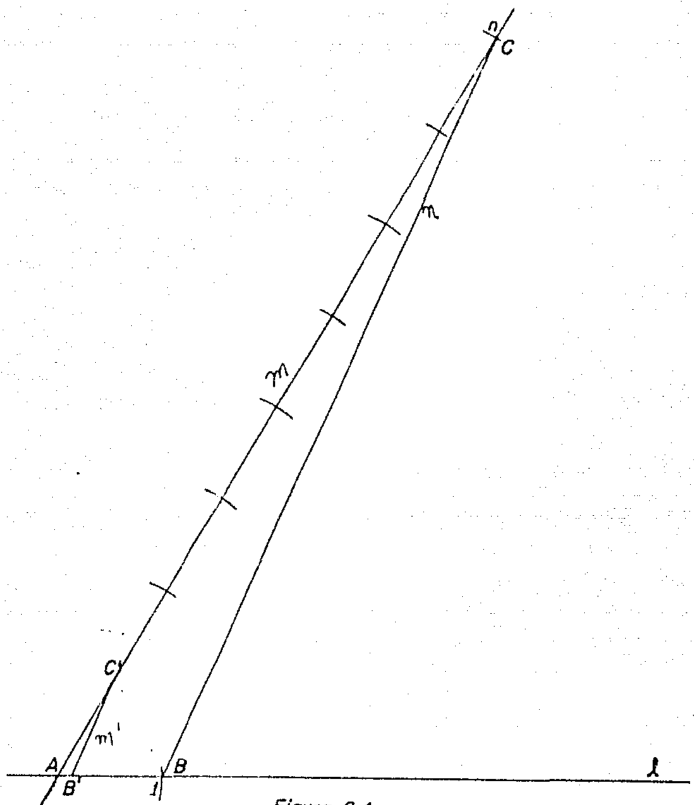

Figura 84

¿Ahora sí hemos terminado? Ya construimos una infinidad de puntos correspondientes a los números racionales.

De alguna manera, en el desarrollo hemos operado con racionales, hagámoslo explícito.

Empecemos sumando dos racionales cualesquiera:

Sean $\frac{p}{q}$ y $\frac{m}{n}$ dos racionales.

Para sumarlos, lo que hay que hacer es tomar la abertura del compás con longitud $\frac{p}{q}$ y trasladarla a partir del punto $\frac{m}{n}$,hacia la

derecha o izquierda, dependiendo de si es positivo o negativo.
Si ambos son positivos tenemos:

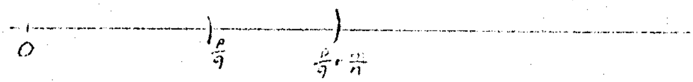

Figura 85

Si ahora tomamos la abertura $\frac{m}{n}$, con el compás la trasladamos a partir del punto $\frac{p}{q}$, la distancia $\frac{p}{q} + \frac{m}{n}$ coincide con la distancia $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$; esto es, la suma es conmutativa.

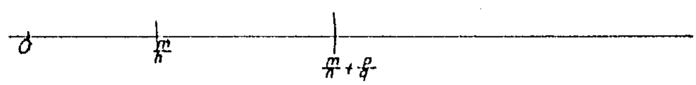

Figura 86

Podemos usar esto para convencer al alumno de algunas propiedades de los números, tales como conmutatividad, asociatividad, etc. insistiéndole (al alumno) que ésto no es un demostración sino una ilustración.
¿Qué ocurre si alguno de los dos es negativo?

No resulta el mismo punto al tomar primero $\frac{m}{n}$ y después $\frac{p}{q}$ que tomar primero $\frac{p}{q}$ y después $\frac{m}{n}$ el punto $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ no coincide con el punto $\frac{p}{q} + \frac{m}{n}$.

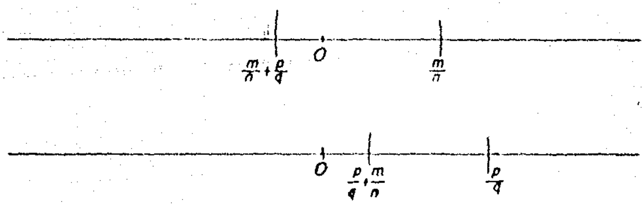

Figura 87

Veamos ahora cómo multiplicar con regla y compás los números racionales.

1 Tracemos una recta l, tomemos un origen A sobre ella y el punto $\frac{m}{n}$ (renombrémoslo como B).

2 Tracemos otra recta m que pase por A y marquemos sobre ella los puntos uno y $\frac{p}{q}$. Renombremos como C al punto uno y como C' al punto $\frac{p}{q}$.

3 Unamos B y C con una recta n' y tracemos una recta l' paralela a n', que pase por el punto C'. Llamemos B' al punto de intersección de las rectas l y l'.

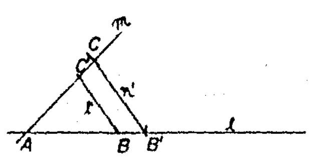

Figura 88

Los triángulos ABC y AB'C' son semejantes, entonces:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$$

sabemos que

$AC = 1$, $AB = \frac{m}{n}$, $AC' = \frac{p}{q}$ y $AB' = x$

por tanto, tenemos que

$$\frac{\frac{m}{n}}{x} = \frac{1}{\frac{p}{q}}$$

si despejamos, obtenemos $x = \left[\frac{m}{n} \right] \left[\frac{p}{q} \right] = \frac{mp}{nq}$

que es el producto de $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$.

Obsérvese que este número también es un racional pues mp es un entero y nq también lo es, por tanto no hemos agregado más números al hacer las operaciones anteriores.

Por último veamos cómo se dividen los racionales.

1 Tracemos una recta l, sobre ella tomemos dos puntos, un punto A como origen y un punto B tal que $AB = \frac{m}{n}$.

2 Por el origen de l tracemos una recta m y marquemos sobre ella los puntos C y C' tales que $AC = \frac{p}{q}$ y $AC' = 1$

3 Unamos los puntos B y C con una recta l' y tracemos la recta m' paralela a l' , que pase por el punto C' y al punto donde corte a l le llamaremos B'.

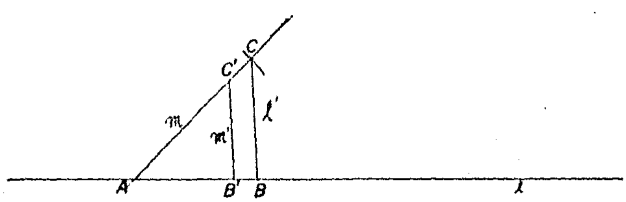

Figura 8 9

Los triángulos ABC y AB'C' son semejantes, con razón de proporcionalidad:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$$

si llamamos x a la distancia AB'

$AC = \frac{p}{q}$, $AB = \frac{m}{n}$ y $AC' = 1$

tenemos que:

$$\frac{\frac{m}{n}}{x} = \frac{\frac{p}{q}}{1}$$

despejando:

$$x = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}} = \frac{mq}{np}$$

Es decir, el segmento de longitud x es el cociente de $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$.

Vemos que al operar con los racionales obtenemos siempre racionales; de esta forma no podemos construir uno que no lo sea.

Con estos números, ¿cubrimos todos los puntos de la recta?

No, faltan los números que no son racionales. Vamos a demostrar que nos faltan puntos por construir. Por ejemplo, si tomamos un triángulo rectángulo tal que ambos catetos miden uno, ¿cuánto mide su hipotenusa?

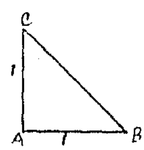

Figura 90

Hay un resultado de Geometría llamado el Teorema de Pitágoras que dice:

"El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo, es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos".

Esto es, el área del cuadrado que se puede construir sobre la hipotenusa del triángulo de la figura 90 es 1 + 1 = 2, entonces el lado de dicho cuadrado mide $\sqrt{2}$.

Así construimos $\sqrt{2}$ y con esta abertura podemos pintarlo en nuestra recta , y también podemos pintar $n(\sqrt{2})$ con n un entero cualquiera.

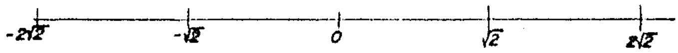

Figura 91

Veamos que $\sqrt{2}$ no es un número racional:

Supongamos que sí lo es, es decir, que existen m y n números naturales tales que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, donde m y n no tienen factores comunes. Así, $2 = (\frac{m}{n})^2$, por tanto $m^2 = 2n^2$ y por ello m es un número par de la forma 2p, entonces $4p^2 = 2n^2$. Si dividimos entre dos, tenemos que $2p^2 = n^2$, por lo que n también es un número par, lo que contradice el hecho de que m y n no tienen factores comunes.

Si usamos el mismo teorema podremos construir raices cuadradas de cualesquiera enteros positivos. Veamos:

1 Tracemos un triángulo rectángulo cuyos catetos midan uno y sean **A, B, y C** sus vértices.

2 Tracemos un segmento de longitud uno perpendicular a la hipotenusa del triángulo anteriormente trazado.

3 Unamos el vértice **B** con el extremo del segmento trazado en el punto dos;tenemos así un nuevo triángulo (el triángulo **BDC**) cuyos catetos miden uno (el **CD**) y $\sqrt{2}$ (el **BC**), por lo que la hipotenusa mide $\sqrt{3}$.

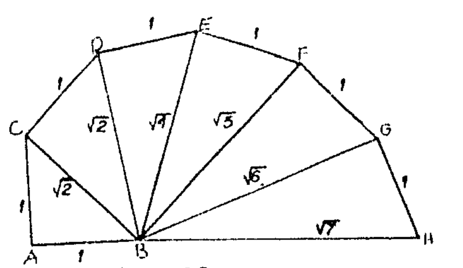

Figura 92

Podemos así seguir construyendo las raíces cuadradas de los números enteros positivos que queramos, aunque esta construcción tiene dos defectos:

1) Es muy larga y complicada para n muy grande.
2) Estamos usando el Teorema de Pitágoras, un resultado que no hemos demostrado.

¿Habrá otra forma de construir la raíz cuadrada de cualquier natural sin usar este resultado y que no sea tan larga para n grande?

Veamos el siguiente resultado que nos ayudará a la construcción que queremos hacer.

¿Cómo es un triángulo que tiene por lado el diámetro de un círculo y el otro vértice está sobre el círculo también?

1 Llamemos **AB** al lado del triángulo que es el diámetro del círculo y sea **O** el punto medio de **AB**.
2 Llamemos **C** al otro vértice.
3 Tracemos el radio **OC**.

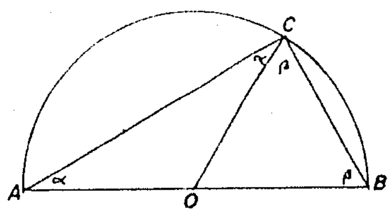

Figura 93

Tenemos el triángulo **AOC** y el triángulo **OBC**; ambos triángulos son isosceles pues dos de sus lados, a saber **OA** y **OC** en uno y **OB** y **OC** en el otro, son radios del círculo, por lo que cada uno de ellos tiene dos ángulos iguales. Los ángulos **OAC** y **ACO** son iguales, denotémoslos por α; los ángulos **OCB** y **BCO** son iguales, denotémoslos por β (fig. 93).

Del triángulo **ABC** tenemos que:

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180^0$$

esto es

$$2\alpha + 2\beta = 180^0$$

por tanto

$$\alpha + \beta = 90^0$$

De aquí, concluimos que el triángulo construido es un triángulo rectángulo.

Es decir, todo triángulo que tiene por lado el diámetro de un círculo y el otro vértice también está sobre el círculo, es rectángulo.

Nuestro problema es construir el número $\sqrt{n}$, es decir, encontrar un número x tal que $x^2 = n$, esto es, $(x)(x) = n$, lo que se puede replantear como

$$\frac{x}{1} = \frac{n}{x}.$$

Veamos un resultado que resuelve un problema más general; Se llama *media proporcional de* dos segmentos a y b al segmento x tal que;

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

¿Cómo construimos x con regla y compás?

En el ejemplo que vimos en semejanza de triángulos teníamos que la proporción de los lados de los triángulos ABC y DBC es $\frac{f}{d} = \frac{d}{e}$,de aquí, la media porporcional de los segmentos e y f es d, esto se hizo con triángulos rectángulos, vamos a hacer nuestra construcción de manera similar.

1. Tracemos el segmento AB de longitud a + b, donde a y b son las longitudes de los segmentos a y b respectivamente. Sea D el punto tal que AD = a.
2. Por el punto D tracemos una perpendicular al segmento AB.
3. Tracemos un semicírculo de radio $\frac{a + b}{2}$ con centro en el punto medio del segmento AB. Sea C el punto de intersección del semicírculo con la perpendicular.
4. Unamos los puntos A y B con el punto C.

El triángulo así construido es rectángulo y los triángulos ADC y DBC son semejantes (por el ejemplo de semejanza visto antes), por tanto

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

donde x es la longitud del segmento **CD**.

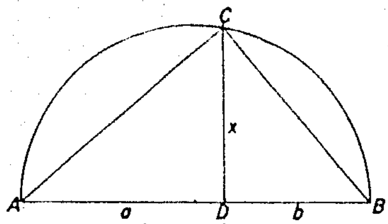

Figura 94

Regresemos a nuestro caso donde debemos encontrar la media proporcional de n y 1 que nos da la construcción de $\sqrt{n}$.

Tracemos el segmento de longitud n + 1 y hagamos la construcción anterior.

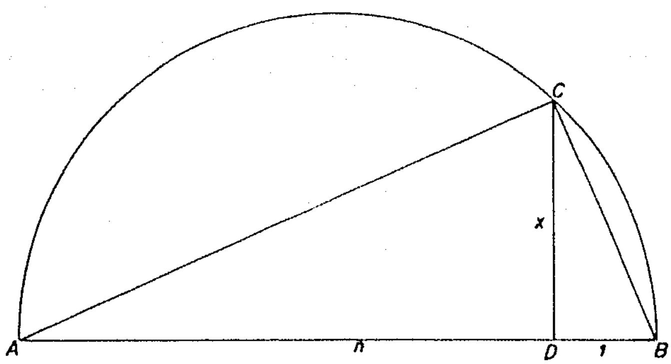

Figura 95

En este caso el segmento **AB** tiene por longitud n + 1, el segmento **AD** tiene por longitud n y el segmento **DB** tiene por longitud 1.

Si nos fijamos en los triángulos **ADC** y **CDB** de la figura 95, que son semejantes, tenemos que:

$$\frac{n}{x} = \frac{x}{1}$$

esto es,

$$x^2 = n ,$$

despejando tenemos

$$x = \sqrt{n}$$

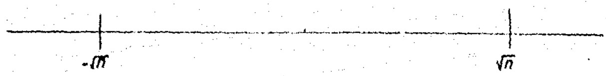

Figura 96

Con esta misma construcción podemos encontrar $\sqrt[4]{n}$, $\sqrt[8]{n}$ y así todas las raíces con radical 2^n.
Faltan por construir todavía muchos números que corresponden a puntos de la recta, entre ellos por ejemplo se encuentra $\sqrt[3]{2}$ cuya construcción con regla y compás es imposible.
De hecho la construcción con regla y compás de este número es uno de los problemas que se plantearon los griegos bajo la siguiente forma; sabiendo que el volumen de un cubo cuya arista mide una unidad (lineal), es una unidad (de volumen), encontrar la longitud de la arista x de un cubo cuyo volumen sea exactamente el doble del cubo unitario. Dicha arista satisfará la sencilla ecuación cúbica;

$$x^3 - 2 = 0$$

Concluimos este capítulo diciendo, aunque no lo hemos demostrado ni lo demostraremos, que los números construibles con regla y compás son los racionales y las raíces con radical 2^n y todos los números que se pueden construir a partir de operar con ellos.
Este problema puede verse en (5) pág. 138, aunque está desarrollado de manera diferente.

CAPITULO 2.

LA CUADRATURA

En este capítulo nos plantearemos el problema de encontrar áreas de polígonos, partiendo del conocimiento del área de un cuadrado únicamente.

El problema se aborda de manera similar a como lo hacían los griegos, construyendo un cuadrado con la misma área que la del polígono dado; a este procedimiento le llamaremos cuadratura, para ello usaremos tan sólo regla y compás.

Entonces el problema será

PROBLEMA:

Cuadrar un polígono dado.

Comencemos con figuras sencillas, el rectángulo por ejemplo.

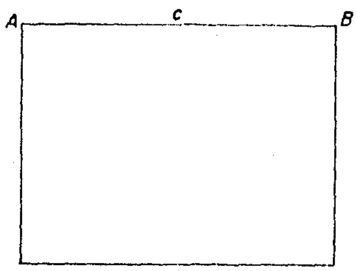

Figura 1

Daremos dos construcciones que servirán para resolver nuestro problema.

La primer construcción es similar a la construcción de la media proporcional entre dos segmentos.

Llamemos **ABCD** al rectángulo. Sean a y b las longitudes de los lados del rectángulo, siendo a la longitud del lado mayor y b la del menor.

1. Prolonguemos uno de los lados del rectángulo, por ejemplo el lado **AD** y sobre esta recta marquemos con el compás la longitud del lado **AB**, fijándolo en el vértice **D** del rectángulo, llamemos

B' al punto que cumple que $AB' = a + b$.

2 Tracemos un semicírculo de radio $\frac{a+b}{2}$ y con centro el punto medio del segmento AB'.

3 Prolonguemos el lado CD del rectángulo hasta que corte al semicírculo y llamemos E al punto de intersección del lado prolongado y el semicírculo.

4 Unamos los puntos A y B' con el punto E.
Hemos construido dos triángulos rectángulos y semejantes, a saber los triángulos EDB' y ADE.

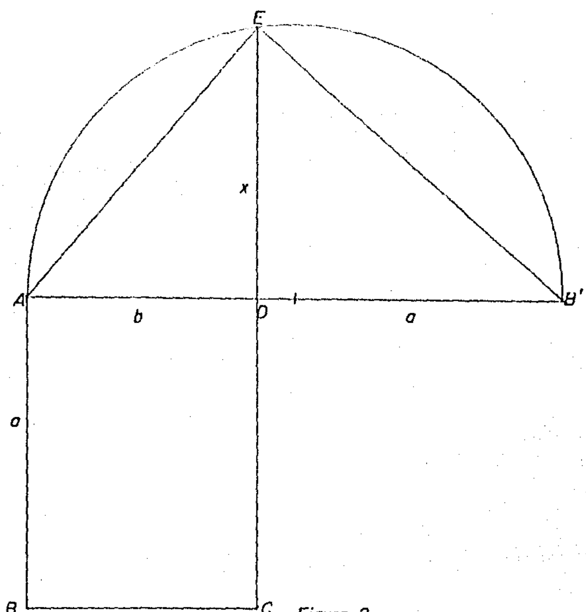

Figura 2

Por tanto sus lados se encuentran en la proporción $\frac{b}{x} = \frac{x}{a}$ es decir, $ab = x^2$ y esta es el área del rectángulo, por tanto, hemos encontrado el lado del cuadrado que tiene por área la del rectángulo dado.
Veamos ahora la segunda construcción que nos servirá también para

dar otros resultados.

1 Prolonguemos el lado AD del rectángulo y sobre esta recta marquemos con el compás la longitud a, fijándolo en el vértice A del rectángulo. Llamemos AB' al segmento así construido.

2 Tracemos un semicírculo con centro en el punto medio del segmento AB' y radio $\frac{a}{2}$.

3 Prolonguemos el lado CD del rectángulo hasta que corte al semicírculo en un punto, al cual llamaremos E.

4 Tracemos los segmentos AE y EB' de longitudes x, y y respectivamente.

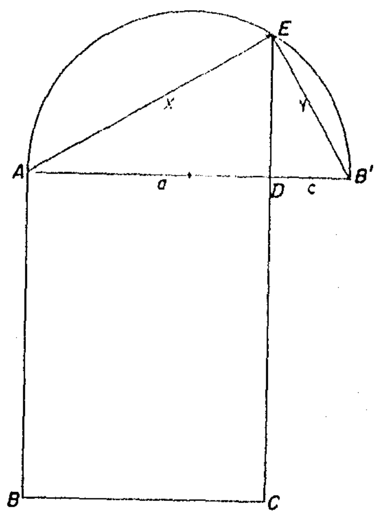

Figura 3

Los triángulos AB'E y AED son semejantes pues el triángulo AB'E es un triángulo rectángulo "inscrito" en un semicírculo (la demostración de esto la vimos en el capítulo uno), por lo que tenemos las siguientes relaciones;

$$\frac{AB'}{EA} = \frac{EA}{AD}$$

Como las longitudes de los lados de los triángulos son;
AB' = a, AD = b y EA = x, entonces tenemos que;

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Despejando x de esta ecuación, tenemos que

$$ab = x^2 \qquad (1)$$

y por tanto ya tenemos el lado del cuadrado buscado. Tenemos el siguiente cuadrado.

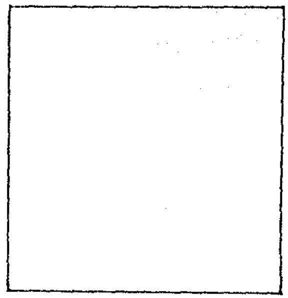

Figura 4

De esta construcción podemos concluir cosas interesantes, por ejemplo:

Los triángulos ADE y EDB' si sus lados miden AB' = a, EB' = y y B'D = c , entonces tenemos la relación:

$$\frac{a}{y} = \frac{y}{c}$$

Despejando a y de la ecuación anterior, tenemos que

$$ac = y^2 \ .$$

De las relaciones (1) y (2) tenemos que:

$$x^2 + y^2 = ab + ac = a\ (b + c) = a\ (a) = a^2 \ .$$

Con lo que tenemos un importante resultado de Geometría, conocido como el Teorema de Pitágoras que se enuncia enseguida:

EL CUADRADO CONSTRUIDO SOBRE LA HIPOTENUSA DE UN TRIANGULO, ES EQUIVALENTE A LA SUMA DE LOS CUADRADOS CONSTRUIDOS SOBRE LOS CATETOS.

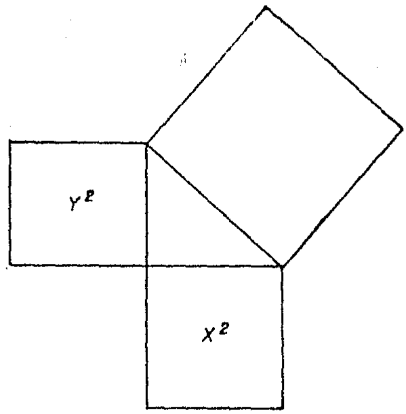

Figura 5

Así pues, ahora que ya sabemos cuadrar rectángulos, preguntémonos si podemos hacer lo equivalente con un triángulo; es decir, tratemos de encontrar la cuadratura del triángulo.
Consideremos un triángulo ABC.

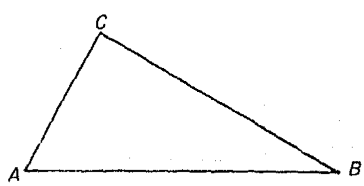

Figura 6

Construyamos un rectángulo de tal modo que uno de sus lados sea el lado de mayor del triángulo y el otro sea la altura correspondiente.

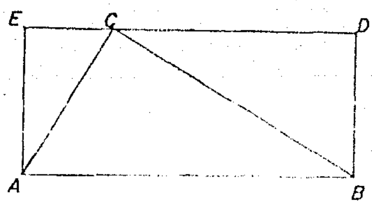

Figura 7

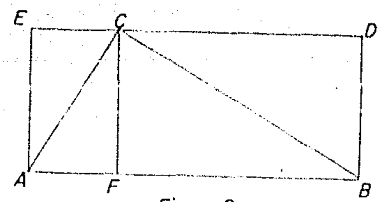

Figura 8

El rectángulo así construido tiene el doble del área del triángulo dado.¿Por qué? Veamos, si trazamos la altura correspondiente al lado **AB** del triángulo de la figura 8 "se ve" que los triángulos en los que queda dividido el triángulo **ABC** sólo ocupan la mitad del área total del rectángulo. Esto, aunque no lo demuestra, deja ver por qué la fórmula para encontrar el área de un triángulo es tomar el área del rectángulo y dividirla entre dos.

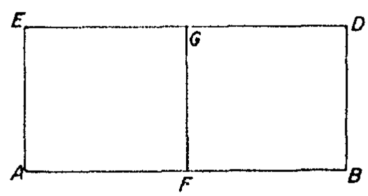

Figura 9

Vamos ahora a demostrar que efectivamente el área del triángulo es la mitad del área del rectángulo;
Llamemos **ABDE** al rectángulo de la figura 8 y **F** al punto donde la altura del triángulo corta al lado **AB** del rectángulo. Fijémonos primero en los triángulos **AFC** y **CEA**, éstos tienen un lado común y los dos lados correspondientes iguales, por lo que son triángulos congruentes y entonces tienen la misma área. Como las áreas de los triángulos son iguales y la suma de ellas es el área del rectángulo, entonces el área de cada triángulo es la mitad del área del rectángulo. Lo mismo ocurre con los triángulos **CFB** y el **BDC**. De aquí concluimos que el área del triángulo **ABC** es la mitad del área del rectángulo **ABDE**.

Y por tanto el área de un triángulo la encontramos dividiendo entre dos el área del rectangulo que tiene por base un lado del triángulo y por altura, la altura correspondiente a ese lado. Así, el problema de cuadrar un triángulo se reduce al problema de cuadrar un rectángulo.

Sigamos con nuestra construcción.

Usando un rectángulo que tenga la misma área que el triángulo podremos construir el cuadrado equivalente al triángulo ABC, utilizando la construcción anterior.

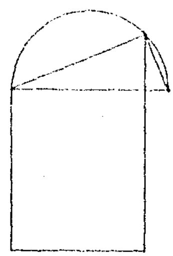

Figura 10

Hagamos lo mismo pero ahora con polígonos convexos cualesquiera. Consideremos un polígono convexo arbitrario.

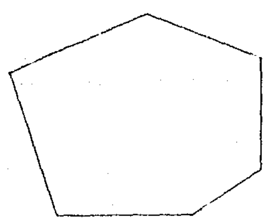

Figura 11

Tracemos diagonales desde un vértice cualquiera del polígono hacia los demás vértices (excepto los adyacentes); de este modo, el polígono queda dividido en triángulos ajenos. (Si el polígono no fuera convexo tal vez searía un poco complicado el dividirlo en triángulos ajenos, aunque es posible hacerlo).

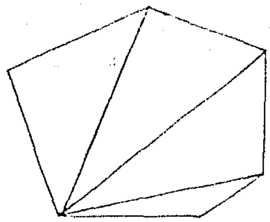

Figura 12

Con cada triángulo podemos construir un rectángulo, como lo hicimos antes, y así construir los cuadrados correspondientes. Tendremos pues, tantos cuadrados como triángulos ajenos haya.

Sin embargo no habremos encontrado un único cuadrado cuya área sea la del polígono original. Lo que habremos conseguido es un conjunto de cuadrados cuyas áreas, al ser sumadas, nos dan el área del polígono. Así pues, ahora nuestro problema consiste en construir un solo cuadrado cuya área sea la misma que la del polígono dado.

Hagamos un ejemplo más sencillo, con un polígono que podamos dividir en sólo dos triángulos.

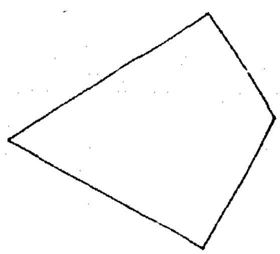

Figura 13

1 Tracemos la diagonal que divide al polígono en dos triángulos.

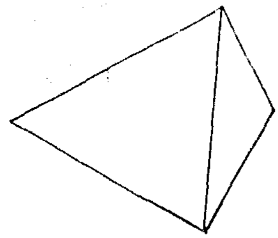

Figura 14

2 Construyamos los rectángulos correspondientes para cada triángulo.

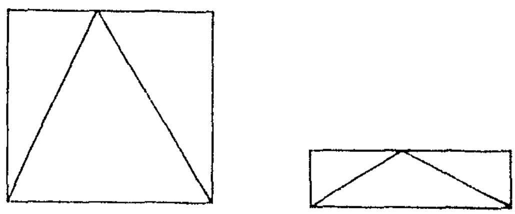

Figura 15

3 Cuadremos estos rectángulos.

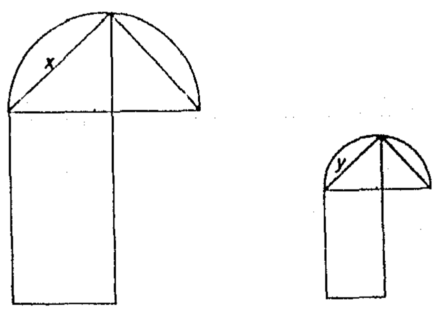

Figura 16

Ahora nuestro problema es encontrar un cuadrado cuya área sea la suma de las áreas de los cuadrados obtenidos previamente.
Sean x, y y los lados de los cuadrados.

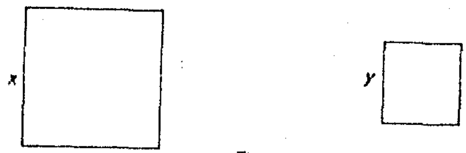

Figura 17

Si construimos un triángulo rectángulo cuyos catetos tengan longitudes x , y, por el Teorema de Pitágoras tenemos la figura 18.

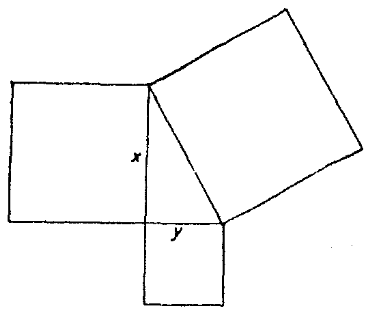

Figura 18

Como el ángulo es recto y conocemos los catetos, el triángulo que podemos construir es único. (La demostración se hizo en el capítulo 1).

Así, el cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo tendrá por área la suma de los cuadrados construidos sobre cada cateto, con lo que queda resuelto nuestro problema.

Ahora bien, si al triangular el polígono obtenemos más de dos triángulos, repetimos el procedimiento anterior tantas veces como sea necesario y de este modo obtenemos un único cuadrado cuya área es precisamente el área del polígono original.

El problema de encontrar el área de figuras planas de lados no rectos no se resuelve en este capítulo pues se requiere de herramienta que no trataremos en éste curso. Uno de los tres problemas griegos trata precisamente de encontrar, con regla y compás, el área del círculo. Este problema es conocido como el problema de la cuadratura del círculo;

Como un círculo de radio r tiene área πr^2 , el problema de construir un cuadrado de área igual a la de un círculo de radio unidad, equivale a la construcción de un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$ lado del cuadrado pedido. Este segmento será construible sí y sólo sí, el número π es construible con regla y compás, pero ya en el capítulo 1 dijimos que este número no podía ser construido y por tanto no podemos construir el cuadrado pedido haciendo uso solamente de la regla y el compás. El problema de la cuadratura del círculo es, pues, irresoluble de este modo.

Si se desea ver la demostración de esto se pueden consultar (8) pág. 79 y (5) pág. 152.

CAPITULO 3.

EL PENTAGONO REGULAR.

Si tenemos un pentágono regular sabemos que sus cinco lados tienen la misma longitud, digamos l, y sus cinco diagonales tienen también una misma longitud, digamos d; entonces tenemos la razón $\frac{d}{l}$, llamemos ϕ a esta razón.

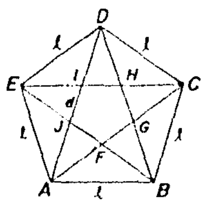

Figura I

(Nótese que en el pentágono de la figura 1 los triángulos ABD y BGA son semejantes e isósceles de donde el lado GA del triángulo BGA mide l y nótese también que los triángulos ABC y CGB también son semejantes e isósceles de donde $\frac{d}{l} = \frac{l}{d - l}$. Se deja al lector verificar los detalles).

Supongamos que $l = 1$ y veamos cuánto mide d. Tomemos la relación

$$\frac{d}{1} = \frac{1}{d - 1}$$

para encontrar la longitud buscada.

De la igualdad anterior se tiene que $d\,(d - 1) = 1$, ésto es, $d^2 - d = 1$. Por lo tanto, $d^2 - d - 1 = 0$ (1)

Así obtenemos una ecuación de segundo grado que podemos resolver con la fórmula general para la resolución de ecuaciones de segundo grado de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Dicha fórmula es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \qquad (*).$$

En este caso particular tenemos:

$$d = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \,,$$

cómo estamos tomando distancias y por convención éstas se consideran positivas, sólo tomaremos $+\sqrt{5}$ ya que si tomamos $-\sqrt{5}$ obtenemos una d negativa, pues $\sqrt{5}$ es mayor que uno.

Así,

$$d = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \,.$$

Este número es llamado LA RAZON DORADA O PROPORCION DIVINA.

Nuestro interés en este capítulo es resolver el siguiente *PROBLEMA:*

Construir con regla y compás un pentágono regular.

Para ello será necesario saber resolver una ecuación de segundo grado con regla y compás. (en particular la ecuación que resolvimos al principio cuando tomamos el lado del pentágono de longitud uno) por lo que abordaremos aquí el problema de resolver ecuaciones de segundo grado con regla y compás. Si a d le llamamos x la ecuación (1) la podemos reescribir como;

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad (2)$$

es decir, $x(x-1) - 1 = 0$, esto es, $x(x-1) = 1$ entonces

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \,.$$

Resolver esta ecuación con regla y compás equivale a encontrar la media proporcional entre los segmentos x y x − 1; como lo hicimos para dos segmentos a y b en el capítulo 1.

1 Trazamos un segmento de longitud a + b. Llamamos **AD** al segmento de longitud a.

2 Por el punto **D** trazamos una perpendicular al segmento **AB**.

3 Trazamos un semicírculo de radio $\frac{a+b}{2}$ y con centro en el punto medio del segmento **AB**. Sea **C** el punto de intersección del semicírculo con la perpendicular.

4 Unimos los puntos **A** y **B** con el punto **C**.

El triángulo así construido es rectángulo y los triángulos **ADC** y **DBC** son semejantes. Por lo tanto,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \,.$$

Primero vamos a suponer que conocemos la longitud x, y trataremos de encontrar la media proporcional entre x y x − 1.

1 Tomemos un segmento AB de longitud $x + (x - 1) = 2x - 1$.

2 Tomemos un punto **D** sobre AB tal que **AD** mida x.

3 Tracemos l perpendicular a **AB** que pase por **D**.

4 Tomemos el punto medio del segmento **AB** y llamémosle **O**.

5 Tracemos un semicírculo con centro **O** y radio AO. Sea **F** el punto de intersección de l con el semicírculo.

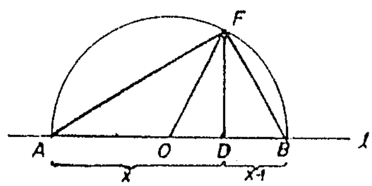

Figura 2

El triángulo **ADF** es semejante al triángulo **FDB**

de aquí $\quad \dfrac{AD}{FD} = \dfrac{FD}{DB}$

sustituyendo $\quad \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{x - 1}$, donde $y = FD$.

Sabemos que $AO = \dfrac{2x - 1}{2} = x - \dfrac{1}{2} = OB$

luego, $OD = AD - AO = x - (x - \dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$

Si nos fijamos en el triángulo (rectángulo) **ODF**, y usamos el Teorema de Pitágoras tenemos $OD^2 + DF^2 = OF^2$ sustituyendo

$\left[\dfrac{1}{2}\right]^2 + DF^2 = \left[x - \dfrac{1}{2}\right]^2$, pues $OF = AO$ (por ser radios del mismo semicírculo).

Despejando tenemos que

$$DF = \sqrt{x^2 - x} = \sqrt{1} = 1 \text{ por la ecuación } (2) .$$

Esto, lo hicimos suponiendo que conocíamos la longitud x, ahora vamos a hacerlo al revés, es decir, tratando de construir x con regla y compás, sabiendo que la media proporcional es uno.

1 Tracemos una recta l. Sobre ella tracemos un punto C que será

nuestro origen.

2 Tomemos un punto D en l de modo que CD mida uno.

3 Construyamos una recta m perpendicular a l que pasa por D.

4 Tomemos un punto F en m tal que DF mida uno.

5 Tomemos el punto medio del segmento CD al que llamaremos O.

6 Tracemos un semicírculo con centro O y radio la distancia OF.
Sean A y B los puntos de intersección del semicírculo con l.

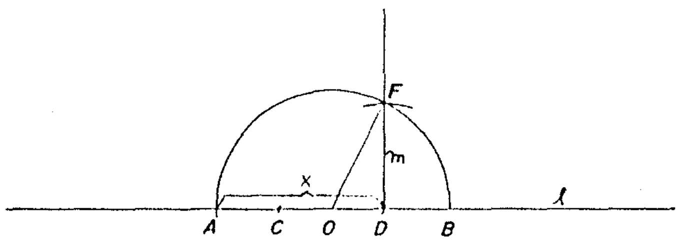

Figura 3

De esta manera hemos obtenido x que es la longitud del segmento **AD**.

Si nos fijamos en el triángulo rectángulo **ODF**, podemos conocer la magnitud de OF, veamos

$$OF^2 = OD^2 + DF^2$$

sustituyendo

$$OF^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

por lo tanto

$$OF = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ y } AO = OF$$

por ser ambos radios del mismo circulo.

Así que

$$AD = AO + OD = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = x.$$

Que es la razón dorada.

Si usamos la fórmula (8) se tiene que las únicas soluciones son

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad y \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Esto es, con regla y compás obtenemos sólo una solución, la positiva.

Hemos dado solución con regla y compás a una ecuación de segundo grado; ¿qué otras ecuaciones podemos resolver usando estas herramientas?

Veamos la siguiente ecuación;

$$x^2 - bx - c = 0 \qquad (3)$$

esta ecuación se puede reescribir de la forma:

$$x^2 - bx - (\sqrt{c}\,)^2 = 0 \quad ,$$

así la ecuación es de la forma

$$x\,(x - b) = \sqrt{c}^{\,2} \quad ,$$

despejando tenemos

$$\frac{x}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{x - b}$$

(suponiendo que $x - b \neq 0$ y c estrictamente positivo).

En este caso tenemos que la media proporcional es $\sqrt{c}$. Entonces podemos preguntarnos cuánto mide x.

Tenemos una ecuación parecida a la anterior, por lo que para resolverla con regla y compás usamos la misma construcción que antes.

1 Tracemos una recta l. Sobre ella tracemos un punto **C** que será nuestro origen.
2 Tomemos un punto **D** en l de modo que **CD** mida b.
3 Construyamos una recta m perpendicular a l que pasa por **D**.
4 Tomemos un punto **F** en m tal que **DF** mida $\sqrt{c}$.
5 Tomemos el punto medio del segmento **CD** al que llamaremos **O**.
6 Tracemos un semicírculo con centro en **O** y radio la distancia **OF**. Sean **A** y **B** los puntos de intersección del semicírculo con l.

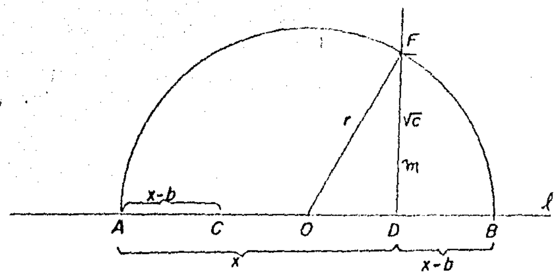

Figura 4

Consideremos el triángulo rectángulo **ODF**. Por el Teorema de Pitágoras:

$$OF^2 = OD^2 + DF^2 \ ,$$

y por construcción

$$CO = OD = \frac{b}{2} \ .$$

Así, se tiene que

$$OF^2 = \frac{b^2}{4} + (\sqrt{c}\,)^2 = \frac{b^2}{4} + c = \frac{b^2 + 4c}{4} \ .$$

Es decir,

$$OF = \sqrt{\frac{b^2 + 4c}{2}} \ .$$

Como **OF** y **AO** son radios del mismo semicírculo tienen la misma longitud entonces

$$AD = AO + OD = OF + OD = \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2} + \frac{b}{2} = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2} \ .$$

Usando la fórmula (*) se tiene que

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$$

es una de las soluciones de la ecuación (3). De esta forma hemos resuelto con regla y compás tal ecuación.

Observemos que AC = AD − CD = x − b = DB.

Para la ecuación

$$x^2 + bx - c = 0 \qquad\qquad (4)$$

la construcción de una de sus soluciones es análoga a la dada para la ecuación (3), como se verá a continuación.

Como $$x^2 + bx - c = x\,(x + b) - (\sqrt{c}\,)^2 .$$

De la ecuación (4) se tiene que

$$x\,(x + b) = (\sqrt{c}\,)^2.$$

De donde

$$\frac{x}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{x + b}$$

(suponiendo que $x + b \neq 0$ y c estrictamente positivo).

Por lo anterior $\sqrt{c}$ es la media proporcional entre x y $x + b$.

Construyamos con regla y compás a x.

1 Tracemos una recta l. Sobre ella consideremos un punto **C** que será nuevamente nuestro origen.

2 Consideremos un punto **D** sobre la recta tal que **CD** mida b.

3 Construyamos una recta m perpendicular a l que pase por **D**.

4 Tomemos un punto **F** en m tal que el segmento **DF** mida $\sqrt{c}$.

5 Tomemos el punto medio del segmento **CD** al que llamaremos **O**.

6 Tracemos un semicírculo con centro **O** y radio la distancia **OF**. Sean **A** y **B** los puntos de intersección del semicírculo con l.

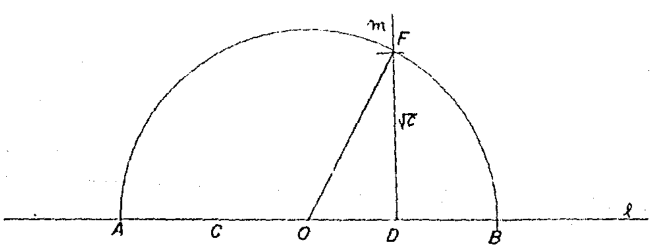

Figura 5

Consideremos el triángulo rectángulo **ODF**. Por el Teorema de Pitágoras,

$$OF^2 = OD^2 + DF^2,$$

y por construcción

$$CO = OD = \frac{b}{2}.$$

Así, se tiene que

$$OF^2 = \frac{b^2}{4} + [\sqrt{c}]^2 = \frac{b^2}{4} + c = \frac{b^2 + 4c}{4}.$$

Es decir,

$$OF = \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2}.$$

Pero

$$OF = AO = AC + CO = AC + \frac{b}{2}.$$

Por lo tanto

$$AC = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}.$$

Es fácil verificar que

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$$

es una de las soluciones de la ecuación (4). De esta forma hemos resuelto con regla y compás tal ecuación.

Observemos que

$$AC = AD - CD,$$

de donde

$$AD = AC + CD = x + b.$$

Para la ecuación

$$x^2 - bx + c = 0 \qquad (5)$$

Como

$$x^2 - bx + c = x(x - b) + (\sqrt{c})^2.$$

De la ecuación (5) se tiene que

$$x(x - b) = -(\sqrt{c})^2.$$

De donde

$$\frac{x}{\sqrt{c}} = -\frac{\sqrt{c}}{x - b}$$

es decir,

$$\frac{x}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{b - x}$$

(suponiendo que $b - x \neq 0$ y c estrictamente positivo).

Por lo anterior $\sqrt{c}$ es la media proporcional de x y $b - x$.

Construyamos con regla y compás a x.

1 Tracemos una recta l. Sobre ella tracemos un segmento **AB** de longitud b. Llamemos **0** al punto medio del segmento.

2 Tracemos un semicírculo con centro **0** y radio $\frac{b}{2}$.

3 Tracemos una recta m perpendicular a l que no corte al semicírculo, sobre ella tracemos la distancia $\sqrt{c}$, llamemos **H** al punto de intersección de l y m , sea **I** el punto que cumple que $HI = \sqrt{c}$.

4 Tracemos una recta n paralela a la recta l, de tal manera que la recta n pase por el punto I.

Tenemos tres casos:

I) Que la recta n intersecte al semicírculo en dos puntos (G y F), es decir, que la longitud del radio del semicírculo sea mayor que $\sqrt{c}$, esto es,

$$\frac{b}{2} > \sqrt{c}$$

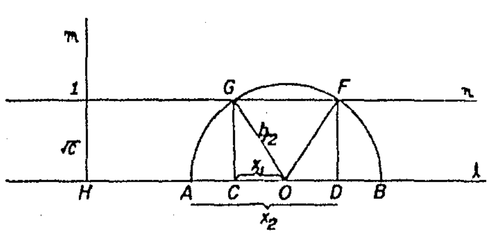

Figura 6

Tracemos una recta perpendicular a ℓ que pase por F y llamemos **D** al punto de intersección de ésta con el segmento **AB**. También consideremos una recta perpendicular a ℓ que pase por G. Llamemos C al punto de intersección entre ambas rectas.

Consideremos el triángulo rectángulo **ODF**. Por el Teorema de Pitágoras,

$$OF^2 = OD^2 + DF^2$$

entonces

$$OD^2 = OF^2 - DF^2 .$$

Dado que

$$OF = AO = \frac{b}{2} \quad \text{y } DF = \sqrt{c} \ ,$$

tenemos que

$$OD^2 = \frac{b^2}{4} - (\sqrt{c}\ )^2 = \frac{b^2}{4} - c = \frac{b^2 - 4c}{4}$$

de donde

$$OD = \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Como

$$AO = AC + CO = AC + OD .$$

Entonces

$$\frac{b}{2} = AC + \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} ,$$

por lo tanto

$$AC = \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} .$$

No es difícil verificar que

$$x_1 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

es una de las soluciones de la ecuación (5).

Para hallar la otra solución consideremos el segmento AD. Por construcción AD = AO + OD . Por lo que

$$AD = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} .$$

Si tomamos a x_2 como este último número, se tiene que x_2 satisface la ecuación (5).

Así, hemos construido las dos soluciones posibles de la ecuación (5) con regla y compás.

II) Que la intersección de la recta n con el semicírculo sea un solo punto, al que denotaremos por F.

Tracemos el segmento OF que es perpendicular a la recta l.

Por construcción $AO = \frac{b}{2} = \sqrt{c}$. Si tomamos

$$x = \frac{b}{2} = \sqrt{c} ,$$

este valor satisface la ecuación (5). En este caso obtenemos una única solución para (5).

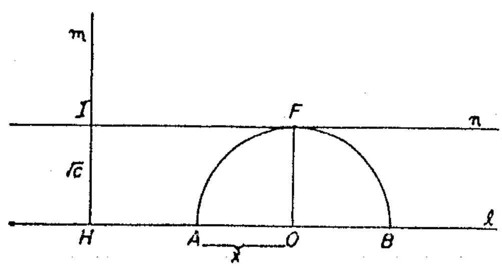

Figura 7

III) Que la intersección de la recta n con el semicírculo sea vacía.

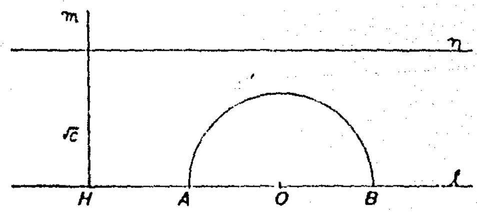

Figura 8

En este caso $\frac{b}{2} < \sqrt{c}$. Por lo tanto, no hay solución, ya que

$$b^2 - 4c < 0$$

y por ello no es posible sacar raíz cuadrada.

Finalmente, consideremos la ecuación

$$x^2 + bx + c = 0 \qquad (6)$$

Como $\qquad x^2 + bx + c = x(x + b) + (\sqrt{c})^2$,

entonces $\qquad x(x + b) = -(\sqrt{c})^2$.

Por lo tanto,

$$\frac{x}{\sqrt{c}} = -\frac{\sqrt{c}}{x + b} .$$

Es decir, $\frac{x}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{-x - b}$.

Esta ecuación no se puede resolver usando el método anterior, ya que la construcción se haría en un segmento de longitud $x + (-x - b) = -b$, y hemos considerado que b y c son números positivos entonces sería necesario un segmento de longitud negativa, lo cual imposibilita la construcción.

Con la fórmula (*) obtenemos dos soluciones, que son las mismas que las de la ecuación (5) pero con signo contrario.

Hasta aquí hemos dado solución a todas las ecuaciones de segundo grado donde el coeficiente de x^2 es uno. Si tuviéramos la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lo que haríamos para darle solución sería dividir simplemente entre el coeficiente de x^2 toda la ecuación, obteniendo

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0$$

y las construcciones se harían de manera semejante.

Ahora podemos construir el pentágono regular.

1 Tracemos una recta λ. Sobre ella consideremos los puntos A y B, de modo que el segmento AB mida uno.

2 Con centro en A tracemos dos semicírculos, el primero de radio uno y el segundo de radio x (la razón dorada).

3 Con centro en B tracemos dos arcos, el primero de radio uno tal que corte al semicírculo de radio x , el segundo de radio x (la razón dorada), tal que corte al semicírculo de radio uno. Llamemos C al punto de intersección del semicírculo de radio x con el arco de radio uno, y E al punto de intersección del semicírculo de radio uno y el arco de radio x.

4 Con centro en C tracemos un arco de radio uno tal que corte al semicírculo de radio x, llamemos D al punto deonde se cortan este arco y el semicírculo de radio uno.

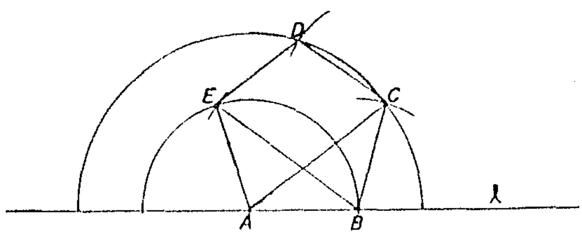

Figura 9

Veamos que efectivamente el pentágono así construido es regular. Para ello debemos ver que todos sus lados miden lo mismo y que sus ángulos también.

Los triángulos ABC y BAE son congruentes e isósceles, por construcción sus lados correspondientes son iguales (entonces los ángulos BAC, ACB, ABE, BEA miden lo mismo, digamos α.

Tracemos las alturas de ambos triángulos correspondientes al lado AB (que es común), llamemos RE a la altura del triángulo BAE y SC a la altura del triángulo ABC.

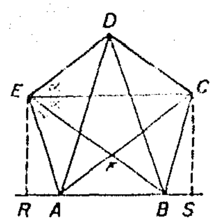

Figura 10

Tracemos el segmento CE, éste es paralelo a la recta l, pues las distancias RE y SC son iguales (son alturas de triángulos congruentes). Por construcción todos los lados del pentágono miden uno, por lo que sólo falta demostrar que los cinco ángulos miden todos, lo mismo. Entonces podemos preguntarnos si el triángulo CDE es congruente a los triángulos ABC y BAE; de ser así, el ángulo **EDC** medirá lo mismo que los ángulos EAB y CBA. Como los lados CD y DE del triángulo CDE, ambos miden uno, falta entonces demostrar que el lado EC mide x (la razón dorada) y entonces será congruente a los triángulos antes mencionados.

Llamemos F al punto donde se intersectan los segmentos CA y EB. Los triángulos ABC y BFA son semejantes, pues sus ángulos correspondientes son iguales. Siendo su razón de proporcionalidad

$$\frac{CA}{AB} = \frac{AB}{BF}.$$

Si llamamos y a la magnitud del segmento BF tendremos que

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{y},$$

y de la ecuación (2) tenemos la relación

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x - 1}.$$

Tomamos la raíz positiva para esta ecuación, por lo que podemos asegurar que y = x - 1 y por tanto el segmento CF mide uno (CA mide x).

Entonces los triángulos se encuentran en proporción la razón dorada.

Los triángulos BFA y EFC son semejantes pues;

i El segmento AB es paralelo al segmento CE.

ii El ángulo BAF es igual al ángulo ECF por ser alternos internos (miden α).

iii El ángulo FBA es igual al ángulo FEC por ser alternos internos (miden α).

iv El ángulo AFB es igual al ángulo CFE por ser opuestos por el vértice.

Entonces su razón de proporcionalidad es

$$\frac{CE}{AB} = \frac{EF}{BF}$$

si llamamos z a la longitud del segmento CE tenemos la relación

$$\frac{z}{1} = \frac{1}{x-1}$$

de la ecuación (2) tenemos la relación

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

podemos asegurar nuevamente que $z = x$ (ya que z es positiva y x es la raíz positiva de la ecuación 2) y por lo tanto el segmento CE mide x (la razón dorada). Si ahora nos fijamos en el triángulo ECD tenemos que es congruente a los triángulos ABC y BAE pues sus lados correspondientes son iguales, por tanto el ángulo EDC es igual al ángulo EAB.

Hasta aquí hemos demostrado que el pentágono tiene tres ángulos iguales, falta por demostrar que los ángulos DCB y AED también son iguales a los tres anteriores.

i El ángulo DCB mide 3α, pues es la suma de los ángulos BAC, ECF y DCE y cada uno de ellos mide α.

ii El ángulo AED también mide 3α, pues es la suma de los ángulos AEB, FEC y CED y cada uno de ellos mide α.

Habrá entonces que demostrar que los ángulos CBA, BAE y EDC también miden 3α.

Fijémonos en el triángulo ACE, este triángulo es isósceles pues sus lados CE y AC miden ambos x, por lo que los ángulos CAE y AEC son iguales. Sabemos que el ángulo AEC es la suma de los ángulos AEB y FEC y cada uno de ellos mide α, por lo que el ángulo AEC mide 2α y por tanto el ángulo CAE también mide 2α.

De lo anterior se deduce que el ángulo BAE mide 3α (es la suma de los ángulos BAC y CAE), como el ángulo BAE es igual al ángulo CBA entonces el ángulo CBA también mide 3α; pero el ángulo EEC también es igual al ángulo CBA, por lo tanto también mide 3α.

De todo lo anterior podemos decir que cada uno de los lados del pentágono mide uno y cada uno de los ángulos mide 3α, por lo tanto el pentágono construido es regular.

Todos los triángulos que se pueden trazar son isósceles. Arriba demostramos que los triángulos formados por dos lados del pentágono y una diagonal son congruentes. Claramente los triángulos formados por dos diagonales y un lado son congruentes entre sí. Se deja al lector verifique lo anterior.

Construyamos un rectángulo tal que sus lados se encuentren en la razón ϕ, si construimos un cuadrado de lado l, obtenemos dos rectángulos que son semejantes y se encuentran relacionados en la razón dorada, esto es, tenemos que la relación entre sus lados es:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{DE}$$

como AC = d, CD = l y DE = d − l entonces tenemos que

$$\frac{d}{l} = \frac{l}{d - l}$$

luego, podemos construir ahora un cuadrado de lado d − l (dentro del rectángulo FCDE) y tenemos dos rectángulos semejantes también y por tanto la razón de proporcionalidad entre sus lados es nuevamente la razón dorada, así, podemos construir un nuevo cuadrado de lado $2l$ − d (dentro del rectángulo GDEH) y estos rectángulos también son semejantes, su razón de proporcionalidad es también la razón dorada. Si con nuestra regla y compás pudiéramos seguir construyendo cuadrados dentro del rectángulo que nos va quedando de la vez anterior, obtendríamos cada vez rectángulos semejantes con razón de proporcionalidad la razón dorada. Es por esto, que a este rectángulo se le llama el rectángulo dorado.

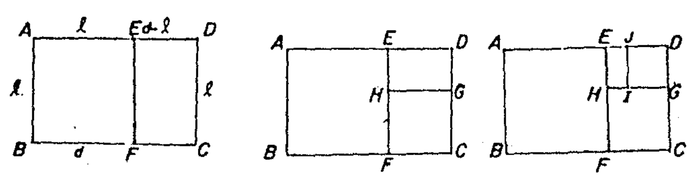

Figura II

BIBLIOGRAFIA

1 ALEKSANDROV, A. D.

La matemática;

su contenido, métodos y significado

Vol. 1

5ª Edición. Alianza Universidad, 1981. Madrid.

2 ALEKSANDROV, A. D.

La matemática;

su contenido, métodos y significado

Vol. 3

5ª Edición. Alianza Universidad, 1981. Madrid.

3 CASTELNUOVO, E.

Didáctica de la Matemática Moderna

8ª Edición. Trillas, 1985. México.

Serie de Matemáticas.

4 COLMENARES, D. A.

Algunas curiosidades en las Matemáticas.

Curiosidades en la naturaleza.

Revista Matemática, Matemáticas y Enseñanza.

Sociedad Matemática Mexicana.

Núm. 15, Vol. V, Núm. 3, Oct. 1980. México.

5 COURANT Y ROBINS

¿Qué es la matemática?

5ª Edición. Aguilar, 1979. Madrid.

6 GHYKA, M.

The Geometry of art and life

DOVER PUBLICATIONS, INC. , 1977. NEW YORK.

7 LUCIO, G. y otros

Un poco de Geometría

Comunicaciones internas. Facultad de Ciencias UNAM.

Núm. 3, 1979.

8 MARTINEZ DE LA ESCALERA, N.

Construcciones con regla y compás.

Tesis de Licenciatura.

9 POGORELOV, A. V.

Geometría Elemental.

MIR, 1974. URSS.

10 RIVAUD, J. J.

Algunas ideas sobre la enseñanza de la Geometría.

Revista Matemática, Matemáticas y Enseñanza.

Sociedad Matemática Mexicana.

Núm. 1, Dic. 1974. México.

11 SMITH, D. E.

History of Mathematics

Vol. II.

DOVER, 1958

12 WENWORTH Y SMITH

Geometría plana y del espacio.

GINN Y COMPAÑIA, 1915.

Serie matemática, Wenworth y Smith.