

28 24



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# ALGUNAS APLICACIONES DE LA VARIABLE COMPLEJA

T E S I S

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a :

LUIS RAMIREZ FLORES

México, D.F.

1988



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE.

PAGINA

Capítulo 1. Ecuaciones Cuadráticas, Cúbicas y Cuárticas.....	2
Capítulo 2. Algunas aplicaciones de los números complejos en la Geometría Analítica y en el Cálculo Diferencial e Integral.....	12
Capítulo 3. Orbitas de satélites .....	20
Capítulo 4. Vectores complejos en la Cinemática.....	31
Capítulo 5. Ecuaciones Diferenciales .....	54
Capítulo 6. La transformada de Fourier .....	70
Capítulo 7. Hidrodinámica .....	93
Capítulo 8. Circuitos simples como ejemplos de sistemas oscilantes, oscilaciones libres en un circuito ideal simple .....	176
Capítulo 9. La transformada de Laplace y los circuitos eléctricos .....	189
Capítulo 10. Potencial Electrostático .....	197
Capítulo 11. Problemas diversos .....	219

PAGINA

Capítulo 12. Superficies de Riemann . . . . .	235
Capítulo 13. Conclusión . . . . .	251
Capítulo 14. Bibliografía . . . . .	253

## PROLOGO

Este trabajo consta de 14 apartados, incluyendo una lista de referencias mínima; con la idea de mostrar con él que la Variable Compleja, lejos de ser una invención del espíritu puro, está como debía esperarse impregnada de ramificaciones hacia casi todas las ramas del conocimiento científico, donde se nutre y a la vez arroja luz sobre nuevos modelos matemáticos que ayudan a resolver problemas prácticos los cuales se plantean por necesidades concretas.

Se recorren áreas del conocimiento científico que van desde el Algebra, hasta problemas sobre distribución de calor en una lámina pasando por supuesto por el diseño del ala de un avión, del cual se hace un extenso análisis.

La idea del trabajo es en principio, obtener el Título de Matemático, luego lo más importante, elaborar junto con mis directores de tesis, unas notas de clase para la asignatura de Variable Compleja I. Esta materia se imparte en la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M.

En dicha Facultad se trabaja, sábado con sábado, en un Seminario de Enseñanza y Titulación, en donde se ha discutido la necesidad de unas notas de clase que salgan de los caminos trillados, pues lo que se desea, es que cada capítulo de las mismas inicie con bosquejos históricos del tema en cuestión, así como las aplicaciones que éste pudiese tener en la práctica, y después y sólo después, tratar de "formalizar" los conceptos ahí introducidos; pues al menos para mí es lema la declaración del eminente matemático Felix Klein; "siempre hay gente que asemejándose a los escolásticos medievales, empieza la enseñanza con las ideas más generales defendiendo este método como si fuera única-

mente científico". Entre tanto esta sugerencia tampoco es cierta, pues enseñar científicamente significa instruir a un ser humano a pensar científicamente y no aturdirlo desde el mismo principio con una sistematización fría aunque tuviera ésta, el aspecto científico.

Finalmente, quisiera dejar claro que no pretenda cubrir todos los campos donde puede aplicarse la Variable Compleja, pues ha medida que se profundiza en ello, más y más perspectivas se abren de investigaciones y como consecuencia de ello más descubrimientos. De hecho, sólo se toca una mínima parte, aquellos que a mi juicio fueron los más representativos, sin que ello indique necesariamente que sean los de mayor importancia. También es oportuno mencionar que no pretendo ser original en cuanto a la selección y solución de los problemas, pues no es el objeto de estas notas. Los errores son mi responsabilidad directamente, mas la crítica constructiva es siempre bienvenida.

## INTRODUCCION

La teoría de funciones de Variable Compleja surgió en relación con el problema de resolución de ecuaciones algebraicas, pero a medida que fue desarrollándose se relacionó constantemente con cada vez más nuevas ramas de las matemáticas, arrojó luz sobre las clases fundamentales de funciones del Análisis, la Mecánica y la Física Matemática. Muchos de los hechos centrales del Análisis pudieron aclararse en último término pasando al plano complejo; las funciones analíticas recibieron una interpretación física inmediata en los importantes campos vectoriales de la Hidrodinámica y la Electrodinámica, proporcionaron una notable herramienta para la solución de los problemas que surgen en estas ramas de la ciencia; se descubrieron relaciones entre la teoría de funciones y los problemas de la teoría de propagación del calor etc.

Las cuestiones generales de la teoría de Ecuaciones Diferenciales y métodos especiales para su resolución, se han basado siempre en gran parte sobre la teoría de funciones de Variable Compleja. Las funciones analíticas se introdujeron de una manera natural en la teoría de Ecuaciones Integrales y en la teoría general de Operadores Lineales, además se descubrieron estrechas relaciones entre la teoría de funciones analíticas y la Geometría. Todas estas conexiones cada vez más amplias de la teoría de funciones con nuevas áreas de las matemáticas y otras ciencias, muestran la vitalidad de la teoría y el continuo enriquecimiento de su gama de problemas.

Intentaremos dar una idea de la naturaleza sumamente variada de sus problemas, indicando los hechos básicos de las distintas direcciones fundamentales en las cuales se mueve la teoría. Mas, esperamos que este trabajo dará al lector una idea general del carácter y significado de la Teoría de funciones de Variable Compleja.

«El número  $i$  es tan importante que no debemos desperdiciar cuanta oportunidad tengamos de usarlo y ver cómo podemos operar con él».

## 1. ECUACIONES CUADRATICAS, CUBICAS Y CUARTICAS.

Si  $f$  es un polinomio de grado  $n \geq 1$  con coeficientes complejos, la ecuación  $f(z)=0$  significa encontrar todos los números complejos  $z$  tales que  $f(z) \equiv 0$ . Esos números  $z$  son llamados las raíces o ceros de la ecuación  $f(z)=0$ .

Considerese la ecuación:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

donde  $0 \neq a_0, a_1, \dots, a_n$  son números complejos dados y  $n$  es un entero positivo. Entonces  $n$  es llamado el orden de la ecuación.

Un teorema muy importante llamado el Teorema Fundamental del Algebra (probado por Gauss en su tesis doctoral en 1799), establece que cualquier polinomio de grado  $n$  tiene al menos una raíz compleja. De esto se sigue entonces que cualquier polinomio de grado  $n$  tiene exactamente  $n$  raíces algunas de las cuales pueden ser repetidas o múltiples. La demostración la haremos posteriormente.

En esta sección resolveremos las ecuaciones algebraicas de grado 2, 3 y 4 (las ecuaciones de grado 1 son fácilmente solubles en cualquier campo). Cualquier método que reduce la solución de una ecuación algebraica a una sucesión de operaciones racionales (suma, resta, multiplicación y división) y la extracción de raíces enésimas de cantidades conocidas, es llamada una solución por radicales.

La razón para que nos restrinjamos a resolver ecuaciones de grado  $\leq 4$ , es que las ecuaciones de grado  $\geq 5$  en general no son solubles por radicales; esto fue probado a principios del siglo XIX por Abel y Galois (Niels Henrik Abel, 1802-1826, noruego y Évariste Galois, 1811-1832, francés).

La solución de ecuaciones cuadráticas resolubles en el campo



de los números reales, fue conocida por los hindúes y los griegos. La ecuación cúbica fue resuelta por Scipione del Ferro (1465-1526, italiano) en 1515; mas no fue conocida sino hasta la publicación de la Ars Magna (1545) de Gerónimo Cardano (1501-1576, italiano) con la promesa de guardar el secreto. Cardano también publicó en el Ars Magna la solución de la ecuación cuártica, la cual fue encontrada por su alumno Ludovico Ferrari (1522-1565, italiano).

### ECUACIONES CUADRATICAS.

Considerese la ecuación cuadrática

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (a \neq 0), a, b, c \text{ complejos}$$

multiplicando ambos miembros por  $4a$ , obtenemos:

$$4a^2z^2 + 4abz = -4ac$$

completando el cuadrado, sumando  $b^2$  a ambos miembros

$$4a^2z^2 + 4abz + b^2 = b^2 - 4ac$$

es decir:

$$(2az + b)^2 = b^2 - 4ac$$

tomando raíces cuadradas a ambos miembros

$$2az + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

(el doble signo  $\pm$  antes de la raíz es innecesario, puesto que en la raíz cuadrada del número complejo  $b^2 - 4ac$  tiene dos valores), por tanto:

$$z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Problema 1.1 Resolver  $4z^2 + 4(2-i)z + (9-12i) = 0$

Solución: utilizando la fórmula, con  $a=4$ ,  $b=4(2-i)$  y  $c=9-12i$

$$z = \frac{-4(2-i) + \sqrt{(4(2-i))^2 - 4(4)(9-12i)}}{2(4)} = \frac{-4(2-i) + \sqrt{16(4-4i-1) - 16(9-12i)}}{8}$$

$$z = \frac{-4(2-i) + \sqrt{3-4i-9-12i}}{8} = \frac{-(2-i) + \sqrt{-6+8i}}{2}$$

Ahora bien para obtener la raíz, sea  $a+ib = \sqrt{-6+8i}$ ,  
 $a^2-b^2+2abi = -6+8i$ ;  $a^2-b^2 = -6$ ,  $2ab = 8$ , luego las raíces son  $a = \pm\sqrt{2}$  y  $b = \pm 2\sqrt{2}$ .

Así pues la solución en definitiva es:

$$z = \frac{-(2-i) \pm \sqrt{2}(1+2i)}{2}$$

### ECUACIONES CUBICAS.

Considerese la ecuación

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \quad (a \neq 0) \dots \dots \dots (1)$$

la transformación  $z = w - \frac{b}{3a}$  reduce la ecuación (1) a una ecuación de la forma:

$$w^3 + pw + q = 0 \dots \dots \dots (2)$$

y claramente, es suficiente con resolver (2) con respecto a  $w$ . Para ello introducimos dos incógnitas  $u$  y  $v$  con la propiedad de que

$$u + v = w \quad \text{y} \quad uv = -\frac{p}{3} \dots \dots \dots (3)$$

entonces,

$$u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) = w^3 + pw = -q \quad \text{y} \quad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27},$$

de esto se sigue que  $u^3$  y  $v^3$  son raíces de la ecuación cuadrática:

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

si  $t_1$  y  $t_2$  denotan las raíces de (4). Si  $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$  denota una de las raíces cuadráticas del número complejo  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ , entonces:

$$t_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{y} \quad t_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Ahora sin pérdida de generalidad tenemos:

$$u^3 = t_1 \text{ y } v^3 = t_2$$

si  $\sqrt[3]{t_1}$  denota una de las raíces cúbicas de  $t_1$ , entonces los tres valores de  $u$  son:

$$u = \sqrt[3]{t_1}, \quad u = \omega \sqrt[3]{t_1}, \quad u = \omega^2 \sqrt[3]{t_1}$$

donde  $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ . Recordando de la ecuación (3) que  $uv = -\frac{p}{3}$  y denotando por  $\sqrt[3]{t_2}$  la raíz cúbica de  $t_2$ , la cual satisface la relación

$$\sqrt[3]{t_1} \sqrt[3]{t_2} = -\frac{p}{3}$$

es fácil verificar que las tres raíces de la ecuación (2) están dadas por:

$$w_1 = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}, \quad w_2 = \omega \sqrt[3]{t_1} + \omega^2 \sqrt[3]{t_2}, \quad w_3 = \omega^2 \sqrt[3]{t_1} + \omega \sqrt[3]{t_2}$$

estas expresiones para las raíces de una ecuación cúbica son conocidas como las fórmulas de Cardano.

### ECUACIONES CUARTICAS.

Considere se la ecuación cuártica

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \dots\dots\dots (1)$$

pasando al segundo miembro los últimos tres términos y sumando a ambos miembros  $\left(\frac{az}{2}\right)^2$ , obtenemos:

$$\left(z^2 + \frac{a}{2}z\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)z^2 - cz - d \dots\dots\dots (2)$$

si el segundo miembro de la ecuación (2), es un cuadrado perfecto, podemos extraer raíz cuadrada a ambos miembros de (2) y la solución de (1) se reduce a resolver dos ecuaciones cuadráticas. Si no, sumando a ambos miembros de (2) el término

$$\omega^2 + 2\left(z^2 + \frac{a}{2}z\right)\omega$$

obtenemos:

$$\left(z^2 + \frac{a}{2}z + w\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + 2w\right)z^2 + (aw - c)z + (w^2 - d) \dots\dots\dots (3)$$

para resolver (3) es suficiente elegir  $w$  tal que el segundo miembro de (3) sea un cuadrado perfecto. (Claramente este es el caso

$$(aw - c)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + 2w\right)(w^2 - d) = 0 \dots\dots\dots (4)$$

la ecuación (4) es una ecuación cúbica en  $w$ , y es llamada la resolvente de la ecuación cuártica (1). Eligiendo cualquier raíz de (4) y sustituyendo en (3). El segundo miembro de (3) es ahora un cuadrado perfecto. Extrayendo raíz cuadrada a ambos lados de (3) para obtener dos ecuaciones cuadráticas que dan las cuatro raíces de (1).

Problema 1.2 La arista de un cubo de 5 cm., se desea incrementar para que el volumen del cubo sea de 142 cm<sup>3</sup>. ¿cuánto debe ser dicho incremento?

Solución: sea  $x$  el incremento deseado, entonces  $(5+x)^3 = 142$  luego extrayendo raíz cúbica obtenemos  $5+x = 5.2171034$ , de donde:  $x = 0.2171034$  cm.

Problema 1.3 Las dimensiones de una caja rectangular son de 8 por 10 por 12 cm. ¿Qué cantidad correcta hasta tres lugares decimales, debe incrementarse cada arista, para que el volumen se incremente en 300 cm<sup>3</sup>?

Solución: el volumen original es de  $8 \cdot 10 \cdot 12 = 960$  cm<sup>3</sup>. Ahora como cada arista se desea incrementar en cierta cantidad  $x$  tenemos:

$$(8+x)(10+x)(12+x) = 960 + 300, \quad x^3 + 30x^2 + 296x + 960 = 960 + 300$$

$$\text{o sea: } x^3 + 30x^2 + 296x - 300 = 0$$

sea  $x = y - \frac{1}{3}b = y - 10$ , que al sustituir en la ecuación nos da:

$$y^3 - 4y - 1260 = 0$$

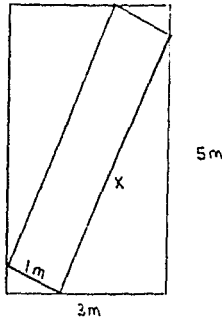
tomando  $y = z - \frac{p}{3z} = z + \frac{4}{3z}$ , nos lleva a  $27z^6 - 34020z^3 + 64 = 0$ ,  
tomando  $z^3 = t$ , obtenemos  $27t^2 - 34020t + 64 = 0$ , la cual tiene las raíces:

$$t_1 = 1259.998 \quad \text{y} \quad t_2 = 0.00188$$

tomemos  $z^3 = t_1$  (la otra dará el mismo resultado).

$z = 10.800818$ , como  $y = z + \frac{4}{3z}$  resulta  $y = 10.922$ ; finalmente  $x = 10.922 - 10 = 0.922$  cm. Por tanto, cada arista debe incrementarse en 0.922 cm.

Problema 1.4 Por una puerta rectangular de 3m. por 5m, se desea introducir un cierto anaquel, como se muestra en la figura; puede demostrarse que la altura  $x$  de dicho anaquel satisface la ecuación  $x^4 - 36x^2 + 60x - 33 = 0$ . Encuentre la altura  $x$  correcta hasta dos decimales.



Solución:  $x^4 = 36x^2 - 60x + 33$ , sumando  $Kx^2 + \frac{K^2}{4}$  a ambos miembros:

$$\left(x^2 + \frac{K}{2}\right)^2 = (36+K)x^2 - 60x + \frac{K^2}{4} + 33$$

luego la resolvente de esta ecuación es:

$$K^3 + 36K^2 + 132K + 1152 = 0$$

$$\text{si } K = y - 12, \quad y^3 - 300y + 3024 = 0$$

$$\text{si } y = z + \frac{100}{z}, \quad z^6 + 3024z^3 + 10^6 = 0$$

$$\text{si } z^3 = t, \quad t^2 + 3024t + 10^6 = 0$$

$$t = -377.91, \quad z = -7.2298, \quad y = -21.06 \quad \therefore K = -33.06$$

$$(x^2 - 16.53)^2 = 2.94x^2 - 60x + 306.24 = (1.7146x - 17.499)^2$$

de aquí resultan las ecuaciones

$$x^2 - 16.53 = \pm (1.7146x - 17.499)$$

con el signo + las raíces son complejas, tomemos pues el signo (-) de donde obtenemos:

$$x^2 + 1.7146x - 34.029 = 0$$

$$x = \frac{-1.71 \pm \sqrt{(1.71)^2 - 4(1)(-34.029)}}{2} = \frac{-1.71 \pm \sqrt{2.9241 + 136.116}}{2}$$

$$= \frac{-1.71 \pm \sqrt{139.04}}{2} \quad \frac{-1.71 \pm 11.7915}{2}$$

tomando la positiva  $x = 5.0407633 \text{ m.}$

Problema 1.5 La distancia entre dos fuentes caloríficas A y B, con intensidades  $a$  y  $b$ , respectivamente, es  $l$ . La intensidad total de calor en un punto P entre A y B está dada por la fórmula

$$I = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(l-x)^2}$$

donde  $x$  es la distancia de P a A. Determine la localización del punto P para  $I = 2$ ,  $a = 20$ ,  $b = 30$  y  $l = 10$ .

Solución: Sustituyendo los datos, obtenemos la ecuación:

$$2 = \frac{20}{x^2} + \frac{30}{(10-x)^2} \quad \text{o sea } 1 = \frac{10}{x^2} + \frac{15}{(10-x)^2};$$

$$x^2(10-x)^2 = 10(10-x)^2 + 15x^2; \quad x^4 - 20x^3 + 75x^2 + 200x - 100 = 0$$

claramente  $x = 5$  es una raíz, luego:

$$X^4 - 20X^3 + 75X^2 + 200X - 1000 = (X-5)(X^3 - 15X^2 + 200) = 0$$

luego basta con resolver la ecuación:

$$X^3 - 15X^2 + 200 = 0$$

Nota: no es recomendable usar fórmulas de Cardano.

La raíz aproximada es  $X = 4.3295$ ; las otras dos son  $X = 13.97$

y  $X = -3.305$ ; luego las únicas aceptables son:

$$X = 5 \quad \text{y} \quad X = 4.3295$$

Problema 1.6\* En la Astronomía existe un problema famoso que requiere el uso no trivial de métodos numéricos, en él aparece la ecuación:

$$z^3 + pz + 2 = 0$$

donde  $P$  es real. Muestre que esta ecuación tiene tres raíces reales cuando y solo cuando  $P \leq -3$ .

Solución: si  $P = -3$ , entonces  $t_1 = t_2 = -1$  y por las fórmulas de Cardano

$$w_1 = \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1} = -2$$

$$w_2 = w \sqrt[3]{t_1} + w^2 \sqrt[3]{t_2} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} (-1) + \left( \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^2 (-1) = w_3 = 1$$

Si  $P < -3$ , entonces  $t_1$  y  $t_2$  son complejos, el uno conjugado del otro, puesto que la ecuación cuadrática que determina a  $t_1$  y  $t_2$  es con coeficientes reales, y si  $\sqrt[3]{t_1} = a + ib$ , entonces  $\sqrt[3]{t_2} = a - ib$ , luego  $w_1 = 2a$ , y  $w_2 = w(a + ib) + w^2(a - ib) = -a - b\sqrt{3}$  y  $w_3 = -a + b\sqrt{3}$  como se pretendía demostrar.

Problema 1.7 En el estudio de órbitas parabólicas aparece la siguiente ecuación:

$$\tan \theta + \frac{1}{3} \tan^3 \theta = t \quad (\theta \text{ y } t \text{ son números reales})$$

muestre que esta ecuación tiene solamente una raíz real.

Solución: tomemos  $z = \tan \theta$ , sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$z^3 + 3z - 3t = 0$$

\*) El Problema de los Tres cuerpos.

entonces  $t_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \frac{3t}{2} + \sqrt{\frac{9t^2}{4} + 1}$  y

$t_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \frac{3t}{2} - \sqrt{\frac{9t^2}{4} + 1}$  son reales.

Si  $\sqrt[3]{t_1}$  y  $\sqrt[3]{t_2}$  denotan las raíces reales de  $t_1$  y  $t_2$  respectivamente, entonces:

$w_1 = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}$  es real, en tanto que

$w_2 = w_1 \sqrt[3]{t_1} + w_2 \sqrt[3]{t_2} = \frac{\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}}{2} + i\sqrt{3} \frac{\sqrt[3]{t_1} - \sqrt[3]{t_2}}{2} = w_3,$

no están en  $\mathbb{R}$ .

Problema 1.8 El Teorema Fundamental del Algebra.

Este resultado famoso, fue primero enunciado por D'Alambert en 1746, pero demostrado parcialmente. La primera demostración rigurosa fue dada en 1799 por Gauss, cuando tenía 21 años, en su disertación doctoral «*Demonstratio nova teorematum omnium functionum algebraicarum rationally integrarum unius variabilis in factores reales primo vel secundi gradus resolvé passu*» (Helmstaedt, 1799). Posteriormente, Gauss dió otras tres demostraciones de este teorema; las cuatro se pueden encontrar en el tercer volumen de sus trabajos, como también en el volumen 14 del *Klassiker der exakten wissenschaften* de Ostwald. Otros autores después de Gauss, incluyendo, Argand, Cauchy, Ullherr, Weierstrass y Kronecker, también dieron demostraciones del Teorema Fundamental.

Su enunciado es:

Un polinomio P de grado  $\geq 1$  tiene al menos una raíz.

Demostración: Por contradicción

Si:  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, a_n \neq 0$

es un polinomio de grado (n) para el cual el Teorema es falso. Entonces  $P(z) \neq 0$  para toda  $z$ , por consiguiente la función F definida por  $F(z) = \frac{1}{P(z)}$  es una función entera,



(aquella que es analítica en todo el plano, analítica para cada valor finito de  $z$ ). Probaremos ahora que  $F$  es acotada en el campo complejo; para probar esto, observese que:

$$P(z) = z^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right)$$

para  $|z|$  suficientemente grande, claramente

$$\left| \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| < \frac{|a_n|}{2}$$

aunque por otro lado y en consecuencia de lo anterior:

$$\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq |a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| > |a_n| - \frac{|a_n|}{2} = \frac{|a_n|}{2}$$

entonces existe un  $r > 0$  tal que si  $|z| \geq r$

$$|F(z)| = \frac{1}{|P(z)|} < \frac{2}{|a_n||z|^n} < \frac{2}{|a_n|r^n}$$

por tanto,  $|F(z)| < K$  si  $K = \frac{2}{|a_n|r^n}$  en el conjunto compac-

to  $|z| \leq r$ ; así pues  $|F(z)|$  es acotada por una constante  $L$ . Si  $M = \max(K, L)$  se sigue que  $|F(z)| < M$  para toda  $z$  compleja.

Entonces  $F$  es una función entera y acotada. Por el Teorema de Liouville (una función entera y acotada necesariamente es una función constante),  $F(z) = \text{cte}$ . Por tanto  $P$  es constante; esta contradicción prueba el resultado deseado.

2. ALGUNAS APLICACIONES DE LOS NUMEROS COMPLEJOS, EN LA GEOMETRIA ANALITICA Y EN EL CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

Sean  $z_1 = a_1 + ib_1$  y  $z_2 = a_2 + ib_2$  dos números complejos, como se sabe, éstos tienen una representación trigonométrica, sea pues  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  y  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ , multiplicando  $z_1 \cdot z_2$ , obtenemos:  $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))$ ; es decir, si multiplicamos dos números complejos, debemos multiplicar los módulos y sumar los argumentos.

Esto último permite simplificar cálculos engorrosos en geometría analítica, veamos los siguientes ejemplos.

Problema 2.1 Sean  $A = (0,0)$  y  $B = (a,b)$ , las coordenadas de dos vértices de un triángulo equilátero, se pide encontrar las coordenadas del tercer vértice.

Solución: como se sabe, el desarrollo con los métodos convencionales nos lleva a cálculos engorrosos, que no es oportuno hacer aquí, y lo que se desea es usar números complejos para resolver el problema. Tomemos pues:

$$z_1 = 0 + 0i \quad \text{y} \quad z_2 = a + ib$$

para calcular las coordenadas del tercer vértice, sea  $z_3 = x + iy$ ; ahora como cada uno de los ángulos interiores del triángulo es de  $\pi/3$  o  $60^\circ$ ,  $z_3$  se obtiene multiplicando  $z_2$  por el factor  $z = \cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3 = (\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2})$ ; observese que  $|z| = 1$  y  $\arg(z) = \pi/3$ , luego:

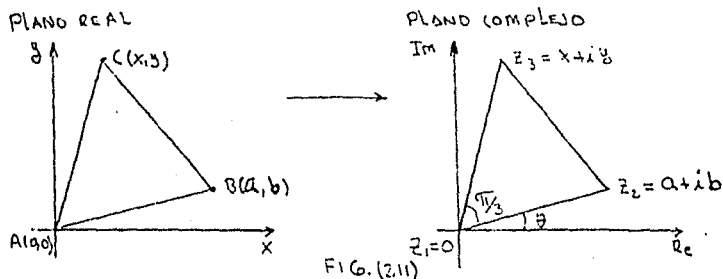
$$z_3 = z \cdot z_2 = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(a + ib) = \left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + i\left(\frac{1}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\right)$$

es decir, si C es el tercer vértice, su coordenadas

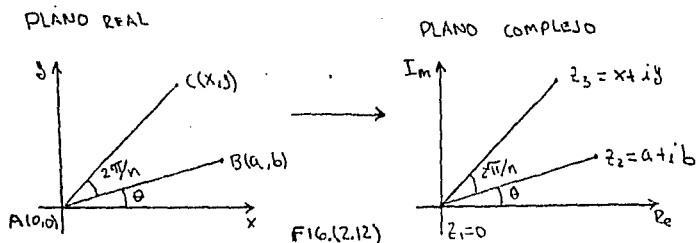
son:

$$c = \left( \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{1}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}a \right) \quad (\text{figura 2.11})$$

como puede verificarse con los métodos usuales.



Como se sabe cualquier polígono regular, se puede inscribir en una circunferencia; supongamos que el centro de dicha circunferencia sea el origen y  $A=(a,b)$  uno de los vértices, podemos calcular con base a lo anterior las coordenadas de los restantes vértices del polígono regular, para ello basta con observar que el ángulo  $AOB$ , donde  $B$  es el segundo vértice, está dado por  $2\pi/n$ , donde  $n$  es el número de lados del polígono en cuestión, (véase figura (2.12)).



El mismo método puede usarse para rotar cónicas como se muestra en los siguientes ejemplos:

Problema 2.13 Sea la ecuación  $x^2 - y^2 = 16$ , supongamos que giramos los ejes coordenados  $45^\circ$ . ¿Cuál es la ecuación en el nuevo sistema?

Solución: se sabe que  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  y  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ , cuando  $z = x + iy$ , luego:

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 = \frac{2z^2 + 2\bar{z}^2}{4} = 16 \quad ; \quad z^2 + \bar{z}^2 = 32$$

sea  $z' = x' + iy'$  y tomamos  $z = e^{\frac{\pi}{4}i} z'$ , sustituyendo en la ecuación  $z^2 + \bar{z}^2$  obtenemos:

$$e^{\frac{\pi}{2}i} z'^2 + e^{-\frac{\pi}{2}i} \bar{z}'^2 = 32$$

$$z'^2 i - \bar{z}'^2 i = 32$$

$$-z'^2 + \bar{z}'^2 = 32i$$

Como  $z' = x' + iy'$  obtenemos:

$$-(x'^2 - y'^2 + 2x'y'i) + (x'^2 - y'^2 - 2x'y'i) = 32i$$

$$4x'y' + 32 = 0$$

por tanto  $x'y' + 8 = 0$  es la ecuación buscada, como es fácil verificar con los métodos convencionales.

Problema 2.14 Sea la ecuación  $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 60x - 80y = 0$ , girar los ejes un ángulo igual a  $\arccos 4/5$  y obtener la ecuación en el nuevo sistema.

Solución: como el ángulo es  $\arccos 4/5$ , entonces tomemos  $z = \frac{1}{5}(4 + 3i)w$ , donde  $w = x' + iy'$  son las coordenadas del punto P en el sistema girado. Primero observemos que:

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 + 60x - 80y = 0$$

$$(4x + 3y)^2 + 20(3x - 4y) = 0$$

luego sustituyendo obtenemos:

$$\begin{aligned} & \left( 4 \frac{\frac{1}{5}(4+3i)w + \frac{1}{5}(4-3i)\bar{w}}{2} + 3 \frac{\frac{1}{5}(4+3i)w - \frac{1}{5}(4-3i)\bar{w}}{2i} \right)^2 + \\ & 20 \left( 3 \frac{\frac{1}{5}(4+3i)w + \frac{1}{5}(4-3i)\bar{w}}{2} - 4 \frac{\frac{1}{5}(4+3i)w - \frac{1}{5}(4-3i)\bar{w}}{2i} \right) = 0 \\ & \frac{1}{25} \left( 2(4+3i)w + 2(4-3i)\bar{w} - \frac{3}{4}i(4+3i)w + \frac{3}{2}i(4-3i)\bar{w} \right)^2 + \\ & 4 \left( \frac{3}{2}(4+3i)w + \frac{3}{2}(4-3i)\bar{w} + 2i(4+3i)w - 2i(4-3i)\bar{w} \right) = 0 \\ & \frac{1}{25} \left( (4+3i)(2-\frac{3}{2}i)w + (4-3i)(2+\frac{3}{2}i)\bar{w} \right)^2 + 4 \left( (4+3i)(\frac{3}{2}+2i)w \right. \\ & \left. + (4-3i)(\frac{3}{2}-2i)\bar{w} \right) = 0 \\ & \frac{1}{100} \left( (4+3i)(4-3i)w + (4-3i)(4+3i)\bar{w} \right)^2 + 2 \left( (4+3i)(3+4i)w \right. \\ & \left. + (4-3i)(3-4i)\bar{w} \right) = 0 \\ & \frac{1}{100} (25w + 25\bar{w})^2 + 2(25iw - 25i\bar{w}) = \frac{625}{100} (w+\bar{w})^2 - 100 \left( \frac{w-\bar{w}}{2i} \right) = 0 \\ & 25x'^2 - 100y' = 0 \end{aligned}$$

por tanto  $x'^2 - 4y' = 0$  es la ecuación buscada.

En el cálculo diferencial, puede ayudar la variable compleja para simplificar cálculos.

Problema 2.15 Sean  $y_1 = e^{ax} \cos bx$  y  $y_2 = e^{ax} \sin bx$ , se pide encontrar  $y_1^{(n)}$  y  $y_2^{(n)}$  las derivadas n-ésimas.

Solución: sea  $z = y_1 + iy_2 = e^{ax} \cos bx + ie^{ax} \sen bx$ , es decir:

$$z = e^{ax} (\cos bx + i \sen bx)$$

$$z = e^{ax + ibx} = e^{(a+ib)x}$$

luego:  $z^{(n)} = (a+ib)^n e^{(a+ib)x}$

sea  $r = |a+ib|$  y  $\phi = \arg(a+ib)$ ; luego:

$$z^{(n)} = (r(\cos \phi + i \sen \phi))^n e^{(a+ib)x}$$

$$= r^n (\cos n\phi + i \sen n\phi) e^{ax} (\cos bx + i \sen bx)$$

$$z^{(n)} = r^n e^{ax} (\cos(n\phi + bx) + i \sen(n\phi + bx))$$

Por lo tanto:

$$y_1^{(n)} = r^n e^{ax} \cos(n\phi + bx)$$

$$y_2^{(n)} = r^n e^{ax} \sen(n\phi + bx)$$

debe entenderse la simplificación de los cálculos.

Problema 2.16 De manera análoga si se nos pide encontrar las integrales  $\int (e^{ax} \cos bx) dx$  y  $\int (e^{ax} \sen bx) dx$

Solución: para ello:

$$\int (e^{ax} \cos bx + i e^{ax} \sen bx) dx = \int e^{(a+ib)x} dx = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + C_1 + C_2$$

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2} e^{(a+ib)x} + C_1 + iC_2$$

$$= \frac{(a-ib) e^{ax} (\cos bx + i \sen bx)}{a^2+b^2} + C_1 + iC_2$$

$$= \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + i \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C_1 + i C_2$$

$$\therefore \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} + C_1$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} + C_2$$

resultado muy conocido.

Aunque despues será ampliado, vamos a deducir una fórmula para calcular la curvatura de una curva dada en forma paramétrica usando variable compleja.

Problema 2.17 Sean  $x(t)$ ,  $y(t)$  las ecuaciones paramétricas de una curva en el plano  $xy$ ; como se sabe del cálculo diferencial la curvatura  $K$  esta dada por:

$$K = \frac{|y''x' - x''y'|}{[x'^2 + y'^2]^{3/2}} = \frac{|\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}} \dots \dots \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } z(t) &= x(t) + iy(t), & \bar{z}(t) &= x(t) - iy(t) \\ \dot{z}(t) &= \dot{x}(t) + i\dot{y}(t), & \dot{\bar{z}}(t) &= \dot{x}(t) - i\dot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) &= \ddot{x}(t) + i\ddot{y}(t), & \ddot{\bar{z}}(t) &= \ddot{x}(t) - i\ddot{y}(t) \end{aligned}$$

$$\text{ahora } \dot{x}(t) = \frac{\dot{z}(t) + \dot{\bar{z}}(t)}{2}, \quad \dot{y}(t) = \frac{\dot{z}(t) - \dot{\bar{z}}(t)}{2i}$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{\ddot{z}(t) + \ddot{\bar{z}}(t)}{2}, \quad \ddot{y}(t) = \frac{\ddot{z}(t) - \ddot{\bar{z}}(t)}{2i}$$

donde se ha supuesto que las funciones  $x(t)$  y  $y(t)$

son dos veces diferenciables.

Sustituyendo en (1):

$$k = \frac{|\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{\left(\frac{\ddot{z} - i\ddot{\bar{z}}}{2i}\right)\left(\frac{\dot{z} + i\dot{\bar{z}}}{2}\right) - \left(\frac{\dot{z} + i\dot{\bar{z}}}{2i}\right)\left(\frac{\ddot{z} + i\ddot{\bar{z}}}{2}\right)}{\left[\left(\frac{\dot{z} + i\dot{\bar{z}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{z} - i\dot{\bar{z}}}{2i}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{|2\ddot{z}\dot{\bar{z}} - 2\dot{z}\ddot{\bar{z}}|}{[4\dot{z}\dot{\bar{z}}]^{3/2}} = \frac{|\ddot{z}\dot{\bar{z}} - \dot{z}\ddot{\bar{z}}|}{2(\dot{z}\dot{\bar{z}})^{3/2}} = \frac{|\operatorname{Im}(\ddot{z}\dot{\bar{z}})|}{(\dot{z})^3}$$

Como ejemplos de aplicaciones:

Problema 2.18 Sean  $x(t) = a(t - \operatorname{sen} t)$ ,  $y(t) = a(1 - \operatorname{cos} t)$  las ecuaciones paramétricas de la cicloide; se desea determinar la curvatura en cualquier  $t$ .

Solución:

$$z(t) = a[(t - \operatorname{sen} t) + i(1 - \operatorname{cos} t)]$$

$$\dot{z}(t) = a[(1 - \operatorname{cos} t) + i \operatorname{sen} t]$$

$$\ddot{z}(t) = a[\operatorname{sen} t - i \operatorname{cos} t]$$

$$\ddot{\bar{z}}(t) = a[\operatorname{sen} t + i \operatorname{cos} t]$$

$$|\operatorname{Im}(\ddot{z}\dot{\bar{z}})| = |a^2(\operatorname{cos} t - 1)|$$

$$|\dot{z}| = |a|\sqrt{2(1 - \operatorname{cos} t)}$$

$$\therefore k = \frac{|a^2(\operatorname{cos} t - 1)|}{|a|^3 2\sqrt{2}(\sqrt{1 - \operatorname{cos} t})^3} = \frac{1}{4a|\operatorname{sen} \frac{t}{2}|}$$

Problema 2.19 Calcular la curvatura de la curva  $x(t) = 3t^2$ ,  $y(t) = 3t - t^3$  en  $t = 1$ .



Solución:  $z(t) = 3t^2 + i(3t - t^3)$

$$\dot{z}(t) = 6t + i(3 - 3t^2)$$

$$\dot{z}(1) = 6 + i(0)$$

$$\ddot{z}(t) = 6 - i(3 - 3t^2)$$

$$\ddot{z}(t) = 6 - i(0)$$

$$\ddot{z}(t) = 6 - 6it$$

$$\ddot{z}(t) = 6 - 6i$$

$$\therefore k = \frac{|\operatorname{Im}(\ddot{z} \dot{z})|}{|\dot{z}(t)|} = \frac{|\operatorname{Im} 6(6-6i)|}{|6|^3} = \frac{36}{|6|^3} = \frac{1}{6}$$

### 3. ORBITAS DE SATELITES.

Como se sabe todo número complejo  $z$  lo podemos representar como  $z = re^{i\theta}$ . Si  $z(t)$ ,  $r(t)$  y  $\theta(t)$  son funciones del tiempo  $t$ , tenemos que:

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt} e^{i\theta} + ri e^{i\theta} \frac{d\theta}{dt} = \left[ \frac{dr}{dt} + ir \frac{d\theta}{dt} \right] e^{i\theta} \dots \dots \dots (1)$$

$$y \quad a = \frac{d^2z}{dt^2} = i \left[ \frac{dr}{dt} + ir \frac{d\theta}{dt} \right] e^{i\theta} \frac{d\theta}{dt} + \left[ \frac{d^2r}{dt^2} + ir \frac{d^2\theta}{dt^2} + i \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right] e^{i\theta} \\ = \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2i \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} + ir \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] e^{i\theta} \dots \dots \dots (2)$$

Ahora la rapidez, que no es otra cosa que la magnitud de la velocidad, es decir:

$$|v| = \sqrt{\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( r \frac{d\theta}{dt} \right)^2} \dots \dots \dots (3)$$

puesto que  $|e^{i\theta}| = 1$

Observación: quienes esten familiarizados con el Análisis Vectorial, podrán observar que si  $\bar{e}_1$  y  $\bar{e}_2$  representan los vectores unitarios ortogonales en los sentidos positivos de los ejes  $x$  e  $y$ , por lo que podemos escribir la fórmula  $z = re^{i\theta}$  como  $z = (r \cos \theta) \bar{e}_1 + (r \sin \theta) \bar{e}_2$ . Que derivándola da fórmulas equivalentes a las (1) y (2), pero mucho más complicadas. A medida que la ciencia se desarrolla, ingenieros, físicos y matemáticos aprenden rápidamente que muchos problemas se simplifican grandemente usando exponenciales complejas.

Con este esquema estamos en condiciones de poder atacar el problema de las órbitas de los satélites.

Supongamos que  $z$ ,  $v$  y  $a$  son el desplazamiento, la

velocidad y la aceleración del satélite respectivamente, cuya masa es  $m$ , con relación a un cuerpo que tiene una masa  $M$ , localizado en el origen. Despreciando todas las fuerzas, excepto la de Newton, la fuerza  $E = -Kmr^{-2}e^{i\theta}$  de magnitud  $Kmr^{-2}$ , que atrae al satélite hacia el origen, encontramos fórmulas en que interviene la órbita del satélite. De acuerdo a la ley de la gravitación universal de Newton que afirma: dos cuerpos esféricos de masas  $m$  y  $M$  se atraen con una fuerza de magnitud,  $GmMr^{-2}$ , donde  $r$  es la distancia que separa a sus centros y  $G$  es la constante universal de gravitación, cuyo valor sólo depende de las unidades empleadas. Hemos visto que la fuerza tiene una magnitud  $Kmr^{-2}$  ( $= GmMr^{-2}$ ). Cuando  $r$  es el radio  $R$  de la tierra, la magnitud de la fuerza es el peso  $mg$  del satélite, así que  $mg = K \frac{m}{R^2}$  y  $K = gR^2$ , siendo  $g$  la aceleración de la gravedad.

Utilizando la segunda ley de Newton  $F=ma$  tenemos:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -Kr^{-2}e^{i\theta} \dots \dots \dots (4)$$

esto y la ecuación (2) nos lleva a:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2i \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + ir \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Kr^{-2} \dots \dots (5)$$

Esta es la ecuación diferencial que rige el movimiento de este satélite, con lo cual, la primera fase de nuestro trabajo, esto es plantear el modelo, está terminada. El paso siguiente consiste en extraer información de ella.

Igualando las partes correspondientes de esta ecuación obtenemos:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -Kr^{-2}$$

y 
$$2 \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

multiplicando la segunda ecuación por  $r$ , tenemos:

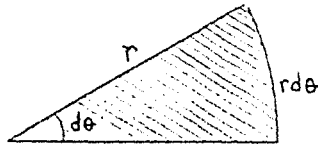
$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \dots \dots \dots (6)$$

por lo que para alguna constante real,  $C_1$

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C_1 \dots \dots \dots (7)$$

Es fácil ver que éste es un enunciado analítico de la famosa Ley de Kepler (1571-1630), que afirma que el satélite se mueve siguiendo una órbita tal, que el vector que va desde el cuerpo central hasta el satélite, barre regiones de áreas iguales en intervalos iguales de tiempo.

En efecto, véase la siguiente figura:



El área del sector circular es  $ds = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ , esto es

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Ahora comparando con la ecuación (7) vemos pues que, el cambio en el área  $\frac{ds}{dt}$  es una constante y de ahí el resultado.

Observación

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} C_1 = \frac{C_1}{2}$$

se conoce como velocidad areolar.

Consideremos sólo el caso en el cual  $c_1 > 0$ , lo que significa que el satélite gira en el sentido positivo; usemos la ecuación (7) para cancelar la variable  $r$  de la ecuación (4) de donde  $r^{-2} = \frac{1}{c_1} \frac{d\theta}{dt}$ , que sustituida en  $\frac{d^2x}{dt^2} = -Kr^{-2}e^{i\theta}$  nos lleva a:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -K \frac{1}{c_1} \frac{d\theta}{dt} e^{i\theta} = -\frac{K}{c_1} e^{i\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

es decir  $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{c_1} e^{i\theta} \frac{d\theta}{dt} \dots \dots \dots (8)$

que por integración, conduce a:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{iK}{c_1} e^{i\theta} + iC_2 e^{i\theta_0} \dots \dots \dots (9)$$

donde  $C_2$  y  $\theta_0$  son constantes reales y  $C_2 \geq 0$ . Hay varias maneras para combinar las fórmulas anteriores y obtener otras. Por ejemplo, podemos igualar los segundos miembros de (1) y (9) multiplicando el resultado por  $e^{-i\theta}$ , para obtener:

$$\frac{dr}{dt} + ir \frac{d\theta}{dt} = \frac{iK}{c_1} + iC_2 e^{-i(\theta - \theta_0)}$$

es decir  $\frac{dr}{dt} + ir \frac{d\theta}{dt} = \frac{iK}{c_1} + iC_2 \cos(\theta - \theta_0) + C_2 \text{Sen}(\theta - \theta_0) \dots (10)$

igualando las partes correspondientes obtenemos, las dos ecuaciones:

$$\frac{dr}{dt} = C_2 \text{Sen}(\theta - \theta_0) \dots \dots \dots (11)$$

$$r \frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{c_1} + C_2 \text{Cos}(\theta - \theta_0) \dots \dots \dots (12)$$

multiplicando (12) por  $r$  y recordando que  $r^2 \frac{d\theta}{dt} = C_1$ , tenemos que:

$$C_1 = r \left( \frac{K}{C_1} + C_2 \cos(\theta - \theta_0) \right)$$

despejando a  $r$ , nos da:

$$r = \frac{C_1}{\frac{K}{C_1} + C_2 \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{C_1^2}{K + C_1 C_2 \cos(\theta - \theta_0)} \dots \dots \dots (13)$$

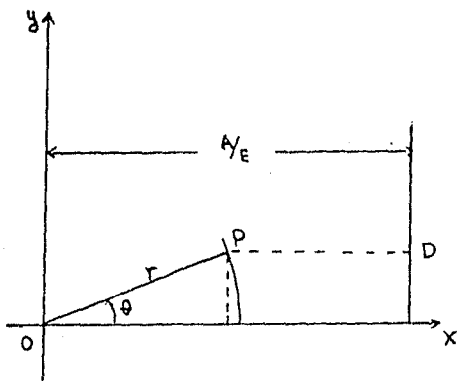
Según la velocidad y la posición del satélite en un instante particular, digamos  $t=0$ , la órbita del satélite es toda o parte de la gráfica de esta ecuación ordinaria en coordenadas polares. Supongamos para simplificar que los ejes están orientados en tal forma que  $\theta_0=0$ . Podemos poner esta ecuación en la forma:

$$r = \frac{A}{1 + E \cos \theta} \dots \dots \dots (14)$$

donde  $A = \frac{C_1^2}{K} > 0$  y  $E = \frac{C_1 C_2}{K} \geq 0$

Cuando  $E=0$ , la órbita es una circunferencia. En efecto, de la ecuación (14) tenemos  $r=A$ , es decir  $x^2+y^2=A^2$ .

Cuando  $E > 0$ , la gráfica de (14) es la gráfica de los puntos  $P$ , (véase figura) con coordenadas rectangulares  $(x, y)$  y en coordenadas polares  $(\theta, r)$  tales que  $x < \frac{A}{E}$  y  $OP = E \cdot PD$ , donde  $OP$  es la distancia  $r$  desde el origen a  $P$  y  $PD$  es la distancia  $\frac{A}{E} - r \cos \theta$ , de  $P$  a la recta  $x = \frac{A}{E}$ . Así pues cuando  $E > 0$ , la gráfica de (14) es una cónica de excentricidad  $E$ , estando uno de los focos en el origen y la línea recta  $x = \frac{A}{E}$  como directriz.



La cónica es una elipse cuando  $0 < E < 1$  ; una parábola cuando  $E = 1$  y una rama de una hipérbola cuando  $E > 1$ .

Varias de las fórmulas citadas antes son útiles para diversos propósitos. Por ejemplo, si se conocen los valores numéricos de las constantes  $C_1$  y  $C_2$  y  $\theta_0$  en (7) y (11), y si además se conocen también los valores de  $\theta$  y  $r$  para un cierto tiempo  $t_0$ , entonces computadores electrónicos pueden usar (7) y (11) para encontrar aproximaciones numéricas de  $\theta$  y  $r$  en tiempos posteriores. Se requieren métodos numéricos, porque excepto en los casos en que las órbitas son una circunferencia o una parábola,  $\theta$  y  $r$  no son funciones elementales de  $t$ .

Todos deberíamos saber algo de historia. Antes de la época de Newton, Kepler descubrió sus famosas leyes valiéndose para ello de notables observaciones de los planetas (satélites del sol), que habían sido hechas por Tycho Brahe (1546 - 1601).

La primera ley de Kepler dice:

"Las órbitas de los planetas son elipses con el sol en uno de sus focos."

La segunda ley dice:

"Los cuadrados de los períodos son proporcionales a los cubos de las distancias medias."

Así pues Newton conocía las fórmulas

$$r = \frac{A}{1 + E \cos \theta} , r^2 \frac{d\theta}{dt} = C_1 \dots \dots \dots (15)$$

A partir de ellas, Newton dedujo la ley de los inversos de los cuadrados que describe las fuerzas que ejerce el sol sobre sus satélites. El resultado condujo a Newton a dar nacimiento a su Ley de la Gravitación Universal.

Ahora nuestra tarea consiste en ver cómo es que Newton pudo extraer información a partir de la ecuación (15) en caso de que hubiera tenido conocimiento de exponenciales complejas. Empecemos con  $z = r e^{i\theta}$ ,  $z$  también se puede expresar como  $z = A e^{i\theta} / (1 + E \cos \theta)$  y como  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , tenemos que:

$$z = A \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{1 + E \cos \theta}$$

derivando con respecto a  $t$

$$\frac{dz}{dt} = A \frac{(1 + E \cos \theta)(-\sin \theta + i \cos \theta) - (\cos \theta + i \sin \theta)(-E \sin \theta)}{(1 + E \cos \theta)^2} \frac{d\theta}{dt}$$

$$= A \frac{i(\cos \theta + i \sin \theta + E)}{(1 + E \cos \theta)^2} \frac{d\theta}{dt}$$

pero sabemos que  $r^2 \frac{d\theta}{dt} = C_1$ ;  $r^2 = \frac{C_1}{\frac{d\theta}{dt}}$  y también que

$$r^2 = \frac{A^2}{(1 + E \cos \theta)^2} ;$$

así pues

$$\frac{dz}{dt} = \left( A i \frac{e^{i\theta}}{(1 + E \cos \theta)^2} + \frac{A E i}{(1 + E \cos \theta)^2} \right) \frac{d\theta}{dt} = \left( \frac{i e^{i\theta}}{A} \cdot \frac{A^2}{(1 + E \cos \theta)^2} + \frac{E i}{A} \cdot \frac{A^2}{(1 + E \cos \theta)^2} \right) \frac{d\theta}{dt}$$



$$\frac{dz}{dt} = \left( \frac{ie^{i\theta}}{A} r^2 + \frac{Ei}{A} r^2 \right) \frac{d\theta}{dt} = \left( \frac{ie^{i\theta}}{A} + \frac{Ei}{A} \right) r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

es decir

$$V = \frac{dz}{dt} = \left( \frac{ie^{i\theta}}{A} + \frac{Ei}{A} \right) C_1 \dots \dots \dots (16)$$

Volviendo a derivar respecto a t, obtenemos

$$a = \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{e^{i\theta}}{A} C_1 \frac{d\theta}{dt} = -\frac{C_1}{A} \cdot \frac{C_1}{r^2} e^{i\theta} = -\frac{C_1^2}{A} \cdot \frac{1}{r^2} e^{i\theta} \dots \dots (17)$$

por tanto, el satélite se acelera hacia el origen, y la magnitud de esta aceleración es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del origen al satélite. Se dice que Newton retrasó la publicación de su Teoría de Atracción (o de la gravitación) 20 años en vista de que su propia teoría no le satisfizo completamente, hasta que fue capaz de demostrar el hecho siguiente:

Dos esferas radialmente homogéneas en el sentido de que las densidades en ellas, dependen solamente de las distancias a sus centros, se atraen como si sus masas totales estuvieran concentradas en sus centros.

Usando las ecuaciones  $K = gR^2$ ,  $r^2 \frac{d\theta}{dt} = C_1$ ,  $\frac{dr}{dt} = C_2 \text{Sen}(\theta - \theta_0)$  y  $r \frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{C_1} + C_2 \text{cos}(\theta - \theta_0)$ ; se pueden determinar las constantes  $C_1$ ,  $C_2$  y  $\theta_0$ . Cuando se trata de un satélite que se desprende en el instante  $t=0$ , con  $\theta_0=0$ ,  $r=r_0$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0$  y  $\frac{dr}{dt} = \Omega_0$ .

En efecto  $r_0^2 \omega_0 = C_1$ ,  $\Omega_0 = C_2 \text{sen} \theta$  y  $r_0 \omega_0 = \frac{gR^2}{r_0^2 \omega_0} + C_2 \text{cos} \theta$

$r_0 \omega_0 - \frac{gR^2}{r_0^2 \omega_0} = C_2 \text{cos} \theta$ ;  $\Omega_0^2 + \left( r_0 \omega_0 - \frac{gR^2}{r_0^2 \omega_0} \right)^2 = C_2^2$ , por tanto

$$C_1 = r_0^2 \omega_0 \quad \text{y} \quad C_2 = \sqrt{\Omega_0^2 + \left( r_0 \omega_0 - \frac{gR^2}{r_0^2 \omega_0} \right)^2}$$

y en el caso de que  $C_2 \neq 0$ ,  $\theta_0$  se determina a partir de las dos fórmulas

$$\text{sen } \theta_0 = -\frac{\Omega_0}{C_2}, \quad \text{cos } \theta_0 = \frac{r_0 \omega_0 - gR^2/r_0^2 \omega_0}{C_2}$$

En caso de que  $C_2 = 0$ , la órbita es una circunferencia, y  $\theta_0$  es no sólo inaplicable, sino también indeterminado. La órbita será una circunferencia si y solo si  $\Omega_0 = 0$  y  $r_0^3 \omega_0^2 = gR^2$ .

Caso particular: Encontrar el número de minutos necesarios para que un satélite complete un circuito cerrado siguiendo una órbita circular (o casi circular) de 480 Km. por encima de la superficie de la tierra.

Solución: sabemos que  $r_0^3 \omega_0^2 = gR^2$ , despejando a  $\omega_0$  obtenemos:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0^3}} = \frac{R}{r_0} \sqrt{\frac{g}{r_0}}$$

Tomando  $g = 9.8 \text{ m/seg}^2$ ,  $R = 64 \times 10^5 \text{ m}$  y  $r_0 = 688 \times 10^4 \text{ m}$ , tenemos  $\omega_0 = 1.1 \times 10^{-3}$  lo cual equivale a 910 segundos por radián, o sean 5700 segundos por revolución completa, o lo que es lo mismo: 95 minutos por revolución. La historia nos dice que el primer satélite lanzado por el hombre, en 1957, el "Sputnik" soviético, completó un circuito de su órbita elíptica, pero casi circular, en 96 minutos.

Ahora nos proponemos deducir la Tercera Ley de Kepler, la cual da el periodo  $T$  de un satélite cuya órbita es una elipse. Suponiendo que  $0 < C_1, C_2 < K$  y que el sistema de coordenadas se encuentra orientado en tal forma que  $\theta_0 = 0$ , para deducir que en efecto se trata de una elipse.

Usemos la ecuación (13), o sea

$$r = \frac{C_1^2}{K + C_1 C_2 \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{C_1^2}{K + C_1 C_2 \cos \theta}$$

como la ecuación se encuentra en coordenadas polares,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , que al sustituir obtenemos

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{C_1^2}{K + C_1 C_2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

de aquí que  $K\sqrt{x^2 + y^2} = C_1(C_1 - x)$ ; hagamos algunos pasos algebraicos:

$$\frac{K^2 - C_1^2 C_2^2}{C_1^2} \left( x^2 + \frac{2C_1^3 x C_2}{K^2 - C_1^2 C_2^2} + \frac{C_1^6 C_2^2}{(K^2 - C_1^2 C_2^2)^2} \right) + \frac{K^2 y^2}{C_1^2} = C_1^2 + \frac{C_1^4 + C_2^2}{K^2 - C_1^2 C_2^2}$$

es decir

$$\frac{K^2 - C_1^2 C_2^2}{C_1^2} \left( x + \frac{C_1^3 C_2}{K^2 - C_1^2 C_2^2} \right)^2 + \frac{K^2 y^2}{C_1^2} = \frac{C_1^2 K^2}{K^2 - C_1^2 C_2^2}$$

la cual se reduce a

$$\frac{(x+h)^2}{\frac{C_1^4 K^2}{(K^2 - C_1^2 C_2^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{C_1^4 K^2}{K^2 (K^2 - C_1^2 C_2^2)}} = 1$$

donde

$$h = \frac{C_1^3 C_2}{K^2 - C_1^2 C_2^2}, \text{ tomando } a^2 = \frac{C_1^4 K^2}{(K^2 - C_1^2 C_2^2)^2} \text{ y } b^2 = \frac{C_1^4 K^2}{K^2 (K^2 - C_1^2 C_2^2)}$$

la ecuación se reduce sencillamente a  $\frac{(x+h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , que no es otra cosa que una Elipse.

Ahora

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\frac{C_1^4 K^2}{K^2 (K^2 - C_1^2 C_2^2)}}{\frac{C_1^4 K^2}{(K^2 - C_1^2 C_2^2)^2}}} = \sqrt{1 - \frac{C_1^2 C_2^2}{K^2}}$$

y como hemos supuesto que  $0 < C_1, C_2 < K$ , esto significa que  $0 < b < a$ , así pues  $a$  es la longitud del semieje mayor, en tanto que  $b$  es la longitud del semieje menor.

Veamos, para terminar esta sección, la Tercera Ley de Kepler. Sabemos que el área de una elipse es  $\pi ab$ ; así pues:

$$A = \pi ab = \pi \frac{C_1^2 K}{K^2 - C_1^2 C_2^2} \cdot \frac{C_1^2 K}{K \sqrt{K^2 - C_1^2 C_2^2}} = \pi \frac{C_1^4 K}{(K^2 - C_1^2 C_2^2)^{3/2}}$$

como el radio vector del origen al satélite barre un área a velocidad constante  $C_1/2$  ( $r^2 \frac{d\theta}{dt} = C_1$  y  $\frac{ds}{dt} = \frac{C_1}{2}$ )

El número  $T$  es unidades de tiempo que emplea el satélite para completar una revolución de la órbita elíptica deberá ser  $T = \frac{2A}{C_1}$ ; así pues

$$T = \frac{2\pi}{C_1} \cdot \frac{C_1^4 K}{(K^2 - C_1^2 C_2^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{K^{1/2}} \cdot \frac{C_1^3 K^{3/2}}{(K^2 - C_1^2 C_2^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{K^{1/2}} \left( \frac{C_1^2 K}{K^2 - C_1^2 C_2^2} \right)^{3/2} = \frac{2\pi}{K^{1/2}} a^{3/2}$$

de donde finalmente tenemos el resultado deseado

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{K} a^3$$

la constante  $K$  sólo depende de la masa del cuerpo central y de las unidades usadas en las mediciones.

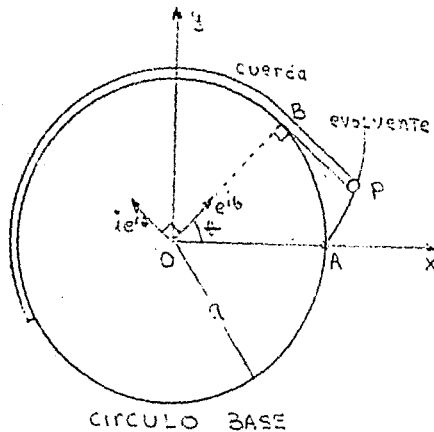
#### 4. VECTORES COMPLEJOS EN LA CINEMATICA.

Problema 4.1 La envolvente de un círculo de radio  $a$ , es trazada por el extremo de una cuerda, la cual ha sido tensada sobre éste y después se desenvuelve del círculo. Muestre que la ecuación de la envolvente está dada por:

$$z = ae^{i\theta} (1 - i\theta)$$

donde  $\theta$  es real.

Solución: antes de desenvolver la cuerda, su extremo es un punto A sobre el círculo de centro O, como se ve en la figura siguiente.



Después de que la cuerda ha sido desenrollada sobre el arco  $\widehat{AB}$  del círculo, el extremo P estará a una distancia  $BP = \widehat{AB} = a\theta$  desde el punto de tangencia B. El radio vector a P es  $z = \overline{OP} = \overline{OB} + \overline{BP}$ , donde  $\overline{OB} = ae^{i\theta}$ ; para encontrar  $\overline{BP}$ , notemos que éste tiene magnitud  $a\theta$  y que está a  $90^\circ$  de  $\overline{OB}$ ; pero  $ie^{i\theta}$  está también a  $90^\circ$  de  $\overline{OB}$ ; luego  $\overline{BP}$  tiene la dirección  $-ie^{i\theta}$ . Esto es:

$$\overline{BP} = a\theta (-ie^{i\theta})$$

luego al sustituir en  $z = \overline{OB} + \overline{BP}$ , obtenemos que:

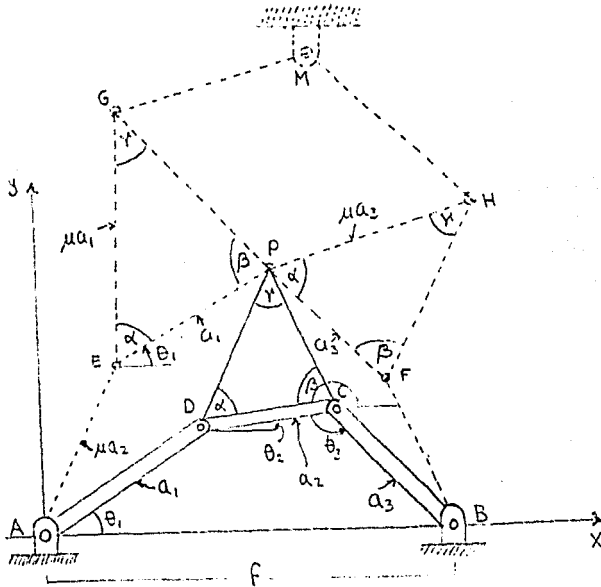
$$z = a e^{i\theta} + a\theta (-i e^{i\theta}) = a e^{i\theta} (1 - i\theta)$$

que es la ecuación de la envolvente. La ecuación última da la localización de un punto P, para cualquier ángulo específico t. Las partes real e imaginaria de z son:

$$x = a(\cos\theta + \theta \sin\theta) \quad y = a(\sin\theta - \theta \cos\theta)$$

éstas son las ecuaciones paramétricas de la envolvente.

Problema 4.2 La potencia de un número complejo en Cinemática, se usa para demostrar el teorema de Chebyshev-Roberts, el cual establece que tres barras diferentes, articuladas en 4 puntos, trazarán curvas de acople idénticas.



En la figura anterior se muestran tres barras articuladas en 4 puntos, ABCD con un punto P rígidamente sujeto al eslabón acoplador DC. La trayectoria trazada por el punto acoplador es llamada una curva de acople. Demostraremos que existen dos barras de tres tramos articuladas en 4 puntos (AEGM y BFHM) que trazan la misma curva de acople.

Para encontrar los así llamados mecanismos análogos, sumemos los eslabones PE y EA a los eslabones dados tales que ADPE forme un paralelogramo. Después sumamos los eslabones PF y FB tal que PFBC sea un paralelogramo. Luego, los triángulos EPG y PFH que son semejantes al triángulo dado DCP, están fijos a los eslabones EP y PF, respectivamente (observese el orden en los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  en cada triángulo). Finalmente los eslabones GM y HM se suman para completar el paralelogramo GPHM.

Puede verse intuitivamente que el único grado de libertad del sistema no se altera por la formación de los tres paralelogramos. En consecuencia esperamos que cuando el punto P describe la curva de acople determinada por el mecanismo ABCD, el punto M traza alguna curva bien definida. No obstante, como demostraremos el punto M permanece inalterado; luego el sistema AEGM constituye un sistema de 3 barras con 4 articulaciones; y el sistema BFHM también constituye un sistema de 3 barras con 4 articulaciones. El punto P puede ser visto como un punto de acople ya sea de esos mecanismos o del mecanismo original ABCD.

Para demostrar que el punto M permanece estacionario, demostraremos que el vector complejo:

$$Z_M = \overline{AE} + \overline{EG} + \overline{GM}$$

no sufre variaciones cuando lo hace el punto P.

Introducimos la siguiente notación

$$\overline{AD} = a_1 e^{i\theta_1} \quad \overline{DC} = a_2 e^{i\theta_2} \quad \overline{CB} = a_3 e^{i\theta_3}$$

De la semejanza de los triángulos EPG, PFH, DPC tenemos:

$$\mu = \frac{DP}{DC} = \frac{EG}{EP} = \frac{PH}{PF}$$

estas últimas relaciones, pueden expresarse en la forma:

$$DP = \mu DC = \mu a_2; \quad EG = \mu EP = \mu a_1; \quad PH = \mu PF = \mu a_3$$

de aquí se sigue que los vectores complejos deseados están dados por:

$$\overline{AE} = \overline{DP} = \mu a_2 e^{i(\theta_2 + \alpha)}; \quad \overline{EG} = \mu a_1 e^{i(\theta_1 + \alpha)}$$

$$\overline{GM} = \overline{PH} = \mu a_3 e^{i(\theta_3 + \alpha)}$$

donde los ángulos de cada vector con respecto al eje real, han sido usados como argumentos de los correspondientes números complejos.

Después de sustituir estas relaciones en la expresión para  $Z_M$  encontramos que

$$Z_M = \mu e^{i\alpha} (a_2 e^{i\theta_2} + a_1 e^{i\theta_1} + a_3 e^{i\theta_3})$$

no obstante, la cantidad que aparece en este paréntesis es la suma vectorial

$$\overline{DC} + \overline{AD} + \overline{CB} = \overline{AB}$$

más  $\overline{AB}$  es una constante vectorial, cuya representación compleja es igual al número real  $f$ , y vemos que:

$$Z_M = \mu f e^{i\alpha} = \text{cte.}$$



luego el punto M permanece estacionario, como pretendíamos demostrar y el teorema ha sido demostrado.

En el apartado (3) hemos visto, que la posición de una partícula, se expresa mediante un número complejo como

$$z = r e^{i\theta}$$

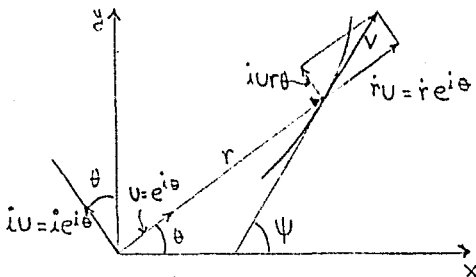
donde  $r$  y  $\theta$  son las coordenadas polares de la partícula. También vimos que derivando esta expresión, encontramos la velocidad  $V$  de esta partícula, es decir:

$$V = \left( \frac{dr}{dt} + ir \frac{d\theta}{dt} \right) e^{i\theta}$$

si ahora introducimos vectores unitarios

$$u = e^{i\theta}, \quad iu = ie^{i\theta}$$

de un punto en las direcciones radial y tangencial como se muestra en la figura



vemos que la expresión para  $V$  también puede ser expresada en forma polar como

$$V = r' u + r \theta' (iu)$$

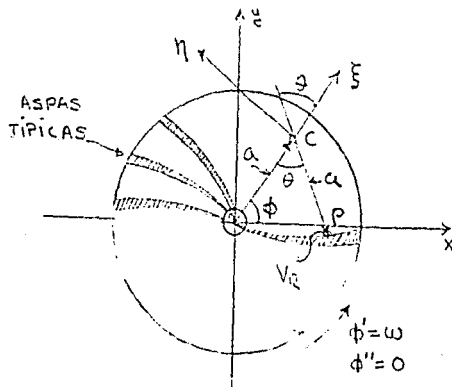
De manera análoga; la aceleración  $a$  está dada como

$$a = \underbrace{\left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right)}_{a_r} \underbrace{e^{i\theta}}_u + \underbrace{\left( r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right)}_{a_\theta} \underbrace{i e^{i\theta}}_{iu}$$

esta última ecuación, muestra claramente dos componentes, las cuales constituyen la aceleración radial ( $a_r$ ) y la aceleración transversal ( $a_\theta$ ) en coordenadas polares.

Con este panorama, pasamos a revisar un problema concreto donde se haga uso de lo anterior.

Problema 4.3 Cierta depósito de agua es descargado con rapidez constante  $V_R$  relativa a las aspas de una bomba centrífuga de desagüe. Una aspa típica, es un arco circular de radio  $a$  y centro en  $C$ , localizado a una distancia  $a$  desde el eje  $O$  del centrifugador. Las aspas están soldadas a la rueda centrifugadora, la cual gira con velocidad angular constante  $\omega$ . Se pide encontrar la velocidad absoluta y aceleración de una partícula en un punto  $P$ , localizado por los ángulos  $\phi$  y  $\theta$  como se muestra en la figura.



El vector de posición de la partícula P está dado por

$$z = \overline{OC} + \overline{CP} = a e^{i\varphi} - a e^{i(\varphi+\theta)}$$

la velocidad es en consecuencia

$$V = z' = a i \frac{d\varphi}{dt} e^{i\varphi} - a i \left( \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \right) e^{i(\varphi+\theta)}$$

observando que  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$  y  $a \frac{d\theta}{dt} = v_R$

vemos que el vector velocidad puede expresarse como

$$V = i [a\omega e^{i\varphi} - (a\omega + v_R) e^{i(\varphi+\theta)}]$$

el vector aceleración en consecuencia

$$a = \frac{dV}{dt} = i^2 a \omega \frac{d\varphi}{dt} e^{i\varphi} - i (a\omega + v_R) e^{i(\varphi+\theta)}$$

$$a = [-a\omega^2 + a(\omega + \frac{v_R}{a}) e^{i\theta}] e^{i\varphi}$$

Si deseamos poder encontrar los componentes de la aceleración a lo largo de varias direcciones. Por ejemplo, las componentes  $(a_\xi, a_\eta)$  a través de los ejes  $\xi, \eta$  los cuales giran con la rueda, pueden fácilmente calcularse, notando que  $e^{i\theta} = v_\xi$  y  $i e^{i\theta} = u_\eta$  son vectores unitarios paralelos a  $\xi$  y  $\eta$ , respectivamente. Por eso, podemos usar la fórmula de Euler.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

luego la aceleración toma la forma

$$a = a_\xi u_\xi + a_\eta u_\eta = a_\xi e^{i\varphi} + a_\eta i e^{i\varphi}$$

donde 
$$a_{\xi} = -a\omega^2 + a\left(\omega + \frac{v_R}{a}\right)^2 \cos\theta$$

$$a_{\eta} = a\left(\omega + \frac{v_R}{a}\right)^2 \sin\theta$$

Si lo que deseamos fuesen las componentes de la aceleración ( $a_x, a_y$ ) a lo largo de los ejes fijos  $x$  e  $y$ , encontramos exactamente las partes real e imaginaria de  $a$ , después de sustituir  $\cos\varphi + i\sin\varphi$  por  $e^{i\varphi}$  en la expresión

$$a = a_{\xi} u_{\xi} + a_{\eta} u_{\eta}$$

para obtener

$$a_x = \operatorname{Re}(a) = a_{\xi} \cos\varphi - a_{\eta} \sin\varphi$$

$$a_y = \operatorname{Im}(a) = a_{\xi} \sin\varphi + a_{\eta} \cos\varphi$$

Problema 4.4. Veamos ahora el siguiente problema, donde analizamos la siguiente situación: Los remolinos producen fuerzas. Si la fuerza neta que actúa sobre una partícula de masa  $m$  puede ser expresada como un vector complejo

$$F = F_x + iF_y = F(z, z')$$

la cual es una función de la posición  $z$  y la velocidad  $z'$ , la aceleración puede ser expresada en la forma

$$F(z, z') = m z''$$

esta ecuación es una ecuación diferencial ordinaria en la variable compleja  $z$ .

Supongamos que una partícula de masa  $m$  está sujeta a una fuerza de magnitud  $KmV$  (donde  $K$  es constante y  $V$  es la velocidad de la partícula) dirigida  $90^\circ$  en sentido antihorario del vector velocidad. Encontrar la trayectoria de la partícula, si ésta inicia desde el origen con velocidad inicial  $u$ , dirigida a lo largo del eje  $x$ .

Solución: La fuerza dada es  $F = kmiz'$ ; luego

$$z'' = \frac{1}{m} F(z, z') = ikz'$$

integrando una vez, encontramos

$$z' - z'_0 = ik(z - z_0)$$

las condiciones iniciales

$$z'(0) = z'_0 = u$$

y

$$z(0) = z_0 = 0$$

luego 
$$\frac{dz}{dt} = z' = u + ikz = ik\left(z - \frac{i u}{k}\right)$$

esta es una ecuación diferencial del tipo variables separables, que puede ser expresada como:

$$\frac{d\left(z - \frac{i u}{k}\right)}{z - \frac{i u}{k}} = ik dt$$

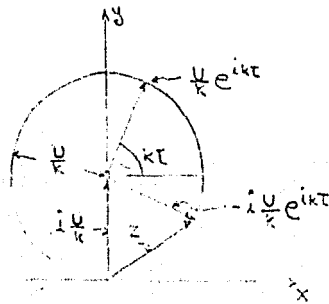
la cual integrándola nos da

$$z - \frac{i u}{k} = C e^{ikt}$$

la constante  $C$ , se calcula sabiendo que  $z(0) = 0$ ; luego

$$z - \frac{i u}{k} = -\frac{i u}{k} e^{ikt}$$

Esta última ecuación nos dice que la partícula describe un círculo de radio  $u/k$ , en el sentido antihorario alrededor de un centro localizado en  $u/k$ , como se muestra en la siguiente figura.



En términos reales, la última ecuación de las coordenadas de la curva:

$$x = \text{Re}(Z) = \frac{U}{k} \text{sen } kt$$

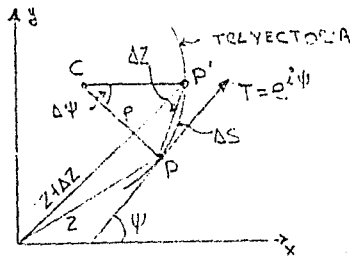
$$y = \text{Im}(Z) = \frac{U}{k} (1 - \cos kt)$$

Los resultados anteriores nos ayudan a explicar la causa de "movimientos en remolino", en una película de fluido que rodea a un eje. Análisis hidrodinámicos de lubricantes, muestran que cuando en un eje se mueve radialmente una película de fluido que lo rodea, el fluido ejerce una componente de fuerza que actúa en ángulo recto a la dirección del movimiento. La ecuación  $z - \frac{iU}{k} = \frac{iU}{k} e^{ikt}$  indica que el eje sufrirá un movimiento circular de orbitación. Esto significa que una perturbación instantánea como un golpe al eje, sacará de su posición de equilibrio y tenderá a producir un remolino indeseable en el centro del eje, a menos que suficiente cantidad de fluido presente, moje para controlar la amplitud de los remolinos. Los remolinos producen fuerzas (normales a la velocidad). Estos aparecen en una gran variedad de mecanismos.

COORDENADAS INTRINSECAS Y CURVATURA DE UNA CURVA.

Conviene frecuentemente, trabajar con un conjunto de ejes coordenados móviles, orientados a lo largo de la tangente y la normal a la trayectoria de una partícula móvil; tales ejes definen un sistema coordenado intrínseco. Las propiedades geométricas y cinemáticas de tal sistema serán ahora estudiadas.

Para estudiar la velocidad en términos de coordenadas intrínsecas, observemos de la figura que cuando una partícula se mueve de la posición P a P', en un tiempo  $\Delta t$ , ésta recorre un arco  $\Delta S$ , y su vector de posición cambia de  $Z$  a  $Z + \Delta Z$ .



Por definición, el vector velocidad es:

$$V = Z' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Z}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dZ}{dS} \frac{dS}{dt}$$

de la figura vemos que:

$$\frac{dZ}{dS} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Z}{\Delta S} = T = e^{i\psi}$$

El ángulo  $\Psi$ , puede ser encontrado de las expresiones:

$$\Psi = \arg z' = \arg (x'(t) + iy'(t))$$

La forma intrínseca del vector aceleración se encuentra derivando la expresión para  $V$ , en la forma:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} T + \frac{ds}{dt} \frac{dT}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} e^{i\Psi} + \frac{ds}{dt} \frac{d\Psi}{dt} i e^{i\Psi}$$

Si ahora definimos el vector unitario normal:

$$N = iT = ie^{i\Psi}$$

el cual obviamente tiene longitud unitaria y puntos a  $90^\circ$  en el sentido antihorario de  $T$ ; con esta notación la aceleración será

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} T + \frac{ds}{dt} \frac{d\Psi}{dt} N$$

Ahora expresemos la velocidad angular  $\frac{d\Psi}{dt}$  del vector tangente unitario en la forma:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi}{ds} \frac{ds}{dt} = \kappa \frac{ds}{dt}$$

donde

$$\kappa = \frac{d\Psi}{ds}$$

define la curvatura de la curva en un punto  $P$ .

De acuerdo a lo anterior, la aceleración es:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} T + \kappa \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 N$$

la cantidad

$$\rho = \left| \frac{1}{\kappa} \right| = \left| \frac{ds}{d\Psi} \right|$$

es llamada el radio de curvatura de la trayectoria en un punto  $P$ .



De la definición anterior vemos que  $\rho$  es el límite de la razón

$$\rho = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta s}{\Delta \psi} \right|$$

el cual como se muestra en la figura, es el límite del radio del círculo que es tangente a la trayectoria en  $P$ , y que pasa por una vecindad del punto  $P'$  sobre la trayectoria. Cuando  $P'$  se aproxima a  $P$ , el círculo antes descrito se aproxima a un círculo límite, llamado círculo de curvatura o círculo osculador, el centro del cual es llamado centro de curvatura.

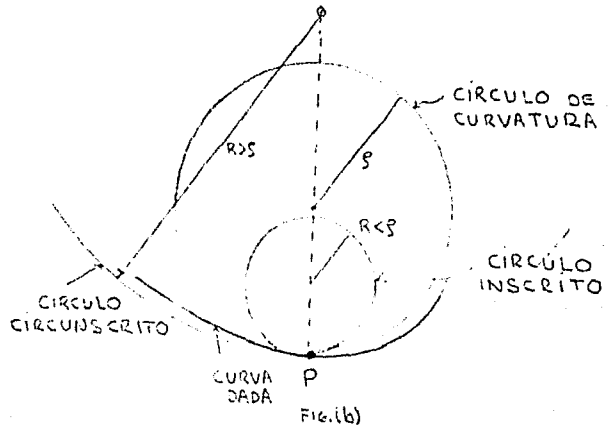
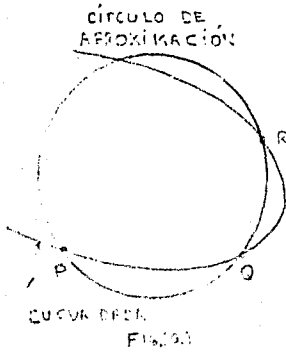
Observese que  $\rho$ , es por definición positivo y la aceleración puede expresarse en la forma:

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} T \pm \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \left( \frac{1}{\rho} \right) N$$

donde el signo (+) o (-) se toma de acuerdo como  $\frac{d\psi}{dt}$  es positivo o negativo. El primer término de la última ecuación es llamado la aceleración tangencial, en tanto que el segundo término es llamado la aceleración centrípeta, porque ésta siempre está dirigida hacia el centro de curvatura.

### CURVATURA.

Recordemos que la dirección del vector tangente  $T$  en un punto  $P$ , es aquella línea límite  $PQ$ , que pasa por dos puntos cercanos  $P$  y  $Q$  de la curva. Luego, el círculo de curvatura antes definido, puede ser descrito como el límite del círculo a través de tres puntos cercanos ( $P$ ,  $Q$  y  $R$ ) sobre una curva, cuando  $Q$  y  $R$  convergen a  $P$ ; los tres puntos se muestran en la siguiente figura. Esta definición con tres puntos del círculo de curvatura, puede verse que es totalmente equivalente a la definición dada anteriormente.



Este resultado, es algunas veces mencionado por el siguiente enunciado: El círculo de curvatura es el límite de los círculos a través de tres puntos muy cercanos en una curva. La figura (a) muestra que es necesario para un círculo cortar a la curva dada en Q, si ésta pasa por tres puntos cercanos. En el límite cuando Q y R convergen a P, llegamos a que el teorema geométrico de que la curva corta a su círculo de curvatura en el punto de tangencia.

Observación: Este teorema no se cumple en puntos aislados de la curva tal como sucede en los vértices de una elipse o más generalmente cuando la curva es cortada por un eje de simetría. De hecho el teorema no vale si la curva dada es un círculo, pues cualquier normal del círculo es un eje de simetría.

Este teorema se ilustra en la figura (b) la cual sugiere también como conclusión verificable, que todos los círculos tangentes (con centros en la parte cóncava de la curva) en un punto de la curva, aquellos que tienen me-

nor radio que el del círculo de curvatura, estarán inscritos en la curva en la vecindad del punto de contacto, y aquellos que lo tengan mayor, estarán en la parte externa de la curva en la vecindad del punto de contacto.

Para expresar la curvatura de una curva en función de componentes cartesianas de velocidad y aceleración, podemos usar la ecuación:

$$\Psi = \arctan(y', x')$$

luego,

$$\frac{1}{\rho} = |K| = \left| \frac{d\Psi}{ds} \right| = \left| \frac{d\Psi/dt}{ds/dt} \right| = \left| \frac{\Psi'}{s'} \right| = \left| \frac{1}{s'} \frac{d}{dt} \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right) \right|$$

usando la regla para derivar arctan y recordando que  $s' = |v| = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$  llegamos al resultado

$$\frac{1}{\rho} = |K| = \frac{(1 + y'^2/x'^2)^{-1} (x'y'' - y'x'')/x'^2}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}} = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

Esta ecuación, nos da un medio para calcular la curvatura de una curva cuando  $x$  e  $y$  son funciones del tiempo.

Análogamente, si una curva se da en la forma  $y = f(x)$  entonces, esto implica (tomando  $t=x$ ) que:

$$\frac{1}{\rho} = |K| = \left| \frac{f''(x)}{[1 + f'(x)^2]^{3/2}} \right|$$

Si la curva esta dada en coordenadas polares ( $r = f(\theta)$ ) entonces

$$\frac{1}{\rho} = |K| = \frac{2(f'(\theta))^2 - f(\theta)(f''(\theta)) + f^2(\theta)}{[f^2(\theta) + (f'(\theta))^2]^{3/2}}$$

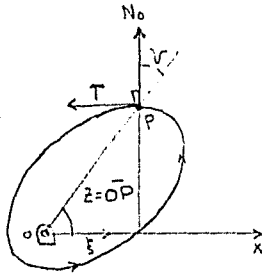
## VECTORES TANGENTES Y NORMALES

Cuando las coordenadas cartesianas de un punto sobre una curva son funciones dadas de un parámetro  $t$ , los vectores unitarios tangente y normal pueden calcularse según las ecuaciones

Frecuentemente, no obstante, el radio  $r$  de un punto es una función dada del ángulo polar  $\varphi$  de la forma:

$$r = F(\varphi)$$

Esta representación polar, es especialmente conveniente, para describir el contorno de un disco de leva, como se ilustra en la siguiente figura, donde  $\varphi$  se mide a partir de un eje  $x$  fijo.



Veremos como encontrar expresiones para el vector unitario tangente  $T$ , el vector unitario normal hacia afuera  $N_o$  y el ángulo  $V$  entre el radio vector y  $N_o$ .

Si  $T$  representa un vector tangente, descrito por un punto  $P$ , que es la traza del perfil dado en la dirección tomada mediante el incremento de la longitud de arco  $s$ . El radio vector complejo  $\overline{OP}$  se da como

$$z = r e^{i\varphi} = F(\varphi) e^{i\varphi}$$

Si un observador viajando hacia P viera el material de la leva (o el interior de una curva arbitraria cerrada) a su izquierda, como en la figura anterior, la normal exterior  $N_0$  quedaría a su derecha, y el vector unitario tangente puede representarse como:

$$T = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \left( \frac{dF}{d\varphi} + iF \right) e^{i\varphi} \frac{d\varphi}{ds}$$

donde  $dz/d\varphi$  se encuentra de la expresión  $z = re^{i\varphi} = F(\varphi)e^{i\varphi}$

De la figura anterior, vemos que, la normal unitaria exterior está dada por  $N_0 = -iT$ , luego

$$N_0 = \left( -i \frac{dF}{d\varphi} + F \right) e^{i\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = e^{i\varphi} \left( F \frac{d\varphi}{ds} - i \frac{dF}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} \right)$$

entonces el ángulo que  $N_0$  forma con el eje x es:

$$\arg N_0 = \varphi + \arctan \left( - \frac{\frac{d\varphi}{ds} \frac{dF}{d\varphi}}{\frac{d\varphi}{ds} F} \right)$$

si ahora introducimos el indicador de signo  $\Gamma$  definido como:

$$\Gamma = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \text{ si } \frac{d\varphi}{ds} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$$

vemos que

$$\arg N_0 = \varphi + \arctan \left( -\Gamma \frac{dF}{d\varphi}, \Gamma F \right)$$

de la misma figura, también vemos que

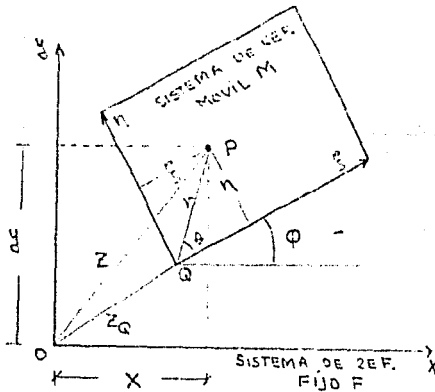
$$\arg N_0 = \varphi + \nu$$

de estas dos últimas expresiones, concluimos que:

$$\nu = \arctan \left( -\Gamma \frac{dF}{d\varphi}, \Gamma F \right)$$

### MOVIMIENTO RELATIVO A UN SISTEMA DE REFERENCIA MOVIL.

Supongamos que un punto  $P$  momentaneamente ocupa una posición con coordenadas  $(\xi, \eta)$  en un sistema de referencia  $M$ , el cual a su vez, se está moviendo como un cuerpo rígido con respecto a un sistema de referencia fijo  $F$ , como se muestra en la figura siguiente. El movimiento del sistema de referencia móvil, está completamente definido por el vector de posición  $Z_Q$  de un punto  $Q$  fijo en  $M$  y por el ángulo  $\varphi$  entre el eje móvil  $\xi$  y el eje fijo  $x$  en el sistema  $F$ .



Un observador estacionado en el sistema móvil deberá expresar el vector de posición compleja  $\mathcal{P}$  de la partícula  $P$  por:

$$\mathcal{P} = \xi + i\eta$$

llamaremos a  $\mathcal{P}$  el vector de posición relativo al sistema de referencia móvil, o sencillamente, vector de posición relativo.

Un observador estacionado en un sistema fijo debe representar al vector de posición absoluta  $\overline{OP}$  como:

$$z = \overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{QP}$$

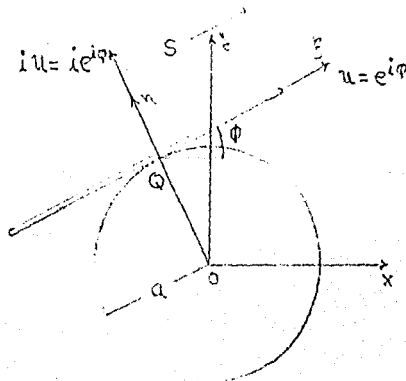
En notación compleja podemos escribir:

$$\begin{aligned} \overline{OQ} &= z_Q \\ \overline{QP} &= \xi e^{i\varphi} + \eta i e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi} \end{aligned}$$

luego el vector de posición absoluta es:

$$z = z_Q + \rho e^{i\varphi}$$

Problema 4.5 Una barra rígida resbala sobre un círculo fijo de radio  $a$ . La distancia desde una punta de la barra hasta el punto de contacto  $Q$ , es denotada por  $s$ , y la barra hace un ángulo  $\varphi$  con el eje  $x$  fijo. Se pide encontrar las componentes de la aceleración  $(a_x, a_y)$  del punto  $P$  con respecto al sistema de referencia fijo  $(x, y)$ . También encontrar las componentes  $(a_\xi, a_\eta)$  de la aceleración en la dirección de los ejes móviles  $(\xi, \eta)$ .



Solución: el vector complejo de posición del punto P es:

$$z = \overline{OQ} + \overline{QP} = a e^{i(\varphi + \pi/2)} + s e^{i\varphi} = (s + ia) e^{i\varphi}$$

la velocidad

$$v = z' = \frac{ds}{dt} e^{i\varphi} + i \frac{d\varphi}{dt} (s + ia) e^{i\varphi} = \left( \frac{ds}{dt} - a \frac{d\varphi}{dt} \right) e^{i\varphi} + s \frac{d\varphi}{dt} i e^{i\varphi}$$

la aceleración

$$a = \frac{dv}{dt} = \left( \frac{d^2s}{dt^2} - a \frac{d^2\varphi}{dt^2} - s \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) e^{i\varphi} + \left( 2 \frac{ds}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - a \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + s \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) i e^{i\varphi} \dots (*)$$

Podemos, si lo deseamos, encontrar las componentes de la aceleración en diversas direcciones. Por ejemplo, los vectores unitarios a lo largo de los ejes  $\xi, \eta$ , respectivamente; es decir:

$$a_{\xi} = \frac{d^2s}{dt^2} - a \frac{d^2\varphi}{dt^2} - s \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

$$a_{\eta} = s \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - a \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

Si deseamos encontrar las componentes de la aceleración en las direcciones  $x$  e  $y$ , basta con encontrar las partes real e imaginaria de  $a$ . Esto es fácil si recordamos que:  
 $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  y reescribiendo la ecuación (\*) en la forma

$$a = a_{\xi} (\cos \varphi + i \sin \varphi) + a_{\eta} (i \cos \varphi - \sin \varphi)$$

por lo tanto

$$a_x = \operatorname{Re}(a) = a_{\xi} \cos \varphi - a_{\eta} \sin \varphi$$

$$a_y = \operatorname{Im}(a) = a_{\xi} \sin \varphi + a_{\eta} \cos \varphi$$



## TEOREMA DE CORIOLIS

Un teorema famoso sobre movimiento relativo, es debido a G. G. de Coriolis, quien lo descubrió (en términos velados) en su investigación sobre la teoría de la rotación del agua en 1832. En la sección anterior vimos que el vector de posición absoluta, estaba dado como:

$$z = z_q + \zeta e^{i\varphi}$$

derivando ésta, encontramos la velocidad en la forma

$$v = \frac{dz}{dt} = z'_q + i\varphi' \zeta e^{i\varphi} + \zeta' e^{i\varphi} \dots \dots \dots (*)$$

el último término en la ecuación (\*) es debido estrictamente al movimiento del punto P en el sistema móvil y acordamos en llamarlo velocidad relativa.

$$v_{rel} = \zeta' e^{i\varphi}$$

Para interpretar el significado de los otros términos en la ecuación (\*) supondremos por el momento que el punto P está permanentemente sujeto al sistema móvil M (es decir  $\zeta' = 0$ ) tal punto será referido como un punto básico, y su velocidad está dada por:

$$v_{bas} = z'_q + i \zeta \varphi' e^{i\varphi}$$

Esta velocidad básica es también conocida en la literatura con nombres como; velocidad de transporte, velocidad restringida, velocidad de arrastre, velocidad vehicular, etc.

Brevemente, vemos que la velocidad absoluta consta de dos términos

$$V = v_{bas} + v_{rel}.$$

Para encontrar la aceleración absoluta  $a$ , derivamos (\*) y obtenemos

$$a = v' = z''_q + i\dot{\gamma}(\dot{\varphi}'' + i\dot{\varphi}'^2)e^{i\varphi} + 2i\dot{\gamma}\dot{\varphi}'e^{i\varphi} + \ddot{\gamma}e^{i\varphi} \dots \dots (*)$$

la ecuación (\*\*) expresa el teorema de Coriolis:

$$a = a_{base} + a_{cor} + a_{rel}$$

donde

$$a_{base} = z''_q + (i\dot{\gamma}\dot{\varphi}'' - \dot{\gamma}\dot{\varphi}'^2)e^{i\varphi}$$

es la aceleración del punto básico (previamente definido) y es llamada aceleración básica.

$$a_{rel.} = \ddot{\gamma}e^{i\varphi}$$

es la aceleración relativa, y

$$a_{cor.} = i2\dot{\varphi}'\dot{\gamma}'e^{i\varphi} = i2\dot{\varphi}'V_{rel.}$$

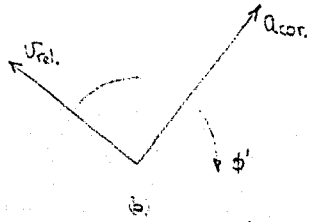
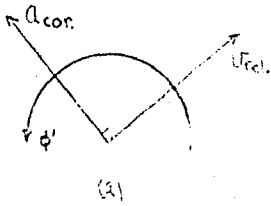
es la aceleración de Coriolis.

En resumen, la aceleración absoluta de un punto sobre un sistema de referencia móvil, es la suma vectorial de la aceleración básica, aceleración relativa y la aceleración de Coriolis.

Obsérvese que si  $\dot{\varphi}'$  es positivo la aceleración de Coriolis está a  $90^\circ$  en sentido antihorario del vector  $V_{rel.}$  como se muestra en la figura (a).

Si  $\dot{\varphi}'$  es negativo,  $a_{cor.}$  está dirigida a  $90^\circ$  en el sentido horario de  $V_{rel.}$  como se muestra en la figura (b).

Una regla simple que conviene recordar es que la dirección de  $a_{cor.}$ , se obtiene girando el vector  $V_{rel.}$   $90^\circ$  en la dirección de  $\dot{\varphi}'$ .



Los problemas en donde se incluyen sistemas de referencia móviles, pueden ser resueltos siempre con ayuda del teorema de Coriolis. No obstante, una gran ventaja con la notación vectorial compleja obtenemos para resolver tales problemas directamente, sin hacer referencia a este teorema, como fue hecho en la sección.

## 5. ECUACIONES DIFERENCIALES.

Las ecuaciones diferenciales, aparecen en una multitud de áreas como en Física, en particular en la Teoría de Circuitos Eléctricos, en Mecánica del Medio Continuo, en Teoría Cuántica, en Biología, etc.

Mediante algunas técnicas, muchas de esas ecuaciones diferenciales pueden ser reducidas a ecuaciones diferenciales de segundo orden, de la forma:

$$w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0 \dots\dots\dots (1)$$

donde  $P$  y  $Q$  son funciones analíticas en una (posiblemente agujerada) vecindad del origen.

Una función  $w$  que satisface (1) en un dominio  $D$  es llamada una solución de (1) en  $D$ . Dos soluciones  $w_1$  y  $w_2$  de la ecuación (1) en un dominio  $D$ , son llamadas linealmente dependientes en  $D$  si existen constantes  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  complejas, no cero ambas tales que:

$$\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) = 0$$

para toda  $z$  en  $D$ .

De otra forma las dos soluciones son llamadas linealmente independientes. Si  $w_1$  y  $w_2$  son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (1), entonces cualquier solución de (1) es de la forma  $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0$  para algunas constantes  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  complejas.

Cuando los coeficientes  $P$  y  $Q$  de la ecuación (1) son funciones analíticas en una vecindad del cero y por consiguiente tienen un desarrollo en serie de Taylor alrededor del cero con radio  $R^* > 0$ ; puede ser demostrado mediante sustitución directa que (1) tiene dos soluciones linealmente independientes  $w_1$  y  $w_2$ , teniendo desarrollos  
\*) De convergencia

en serie de Taylor alrededor del cero con radio de convergencia igual a  $R$ , esto es:

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad W_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \text{para } |z| < R$$

Problema 5.1 El movimiento de un péndulo simple de longitud variable. El propósito de este ejercicio es dar un ejemplo, entre otros, de una aplicación de las funciones de Bessel a un problema de Mecánica. El problema que deseamos tratar es con un péndulo, cuya longitud varía proporcionalmente con el tiempo. No es difícil encontrar en la práctica tal péndulo\*, y deseamos encontrar las oscilaciones cuyo período y amplitud varían como una función de la longitud del péndulo, esto es como una función del tiempo.

De lo que se trata, es de un péndulo que consta de una masa unitaria, sujeta por un extremo de una cuerda de masa despreciable pero flexible de longitud  $\rho$ . Las unidades elegidas son tales que la relación entre  $\rho$  y  $t$  es:

$$\rho = gt$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad. Mostraremos que la ecuación diferencial para pequeñas oscilaciones puede ser escrita como:

$$t \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} + \theta = 0 \dots\dots\dots (1)$$

donde  $\theta$  es el ángulo que la cuerda flexible hace con la vertical, además veremos que una solución particular de esta ecuación es:

$$\theta_1 = \frac{J_1(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \dots\dots\dots (2)$$

donde  $J_1$  es una función de Bessel de orden 1. Conociendo esta solución  $\theta_1$ , deseamos también expresar la solución\*) como por ejemplo, el caso de una excavadora de brazo móvil

ción general de la ecuación diferencial en cuadraturas, que ésta es acotada en una vecindad de  $t=0$  y finalmente que es el producto de  $\theta$ , por una constante.

Solución: Para obtener la ecuación para el movimiento del punto M, necesitamos únicamente escribir la ecuación fundamental de la cuerda flexible. La tensión sobre la dirección de la cuerda flexible deberá dar la tensión sobre ésta.

La proyección de la aceleración del punto M es:

$$P_{\theta} = 2 \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \rho \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

La proyección de la fuerza es  $-g \sin \theta$ , entonces tenemos:

$$2g \frac{d\theta}{dt} + g t \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

de esto obtenemos la ecuación diferencial del movimiento:

$$t \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta = 0$$

La ecuación para pequeñas oscilaciones (esto es, con valores pequeños de  $\theta$ ), se obtiene reemplazando  $\sin \theta$  por  $\theta$

$$t \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} + \theta = 0$$

puesto que  $t$  es no negativo, el cambio de variable  $u = 2\sqrt{t}$  nos da

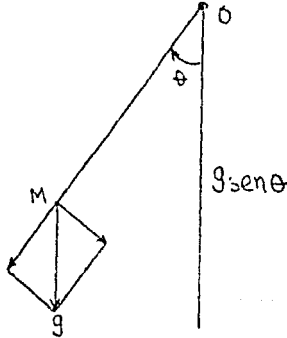
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{du} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{u} \frac{d\theta}{du}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{du} \left( \frac{2}{u} \frac{d\theta}{du} \right) \frac{du}{dt} = \frac{4}{u^2} \left( \frac{d^2\theta}{du^2} - \frac{1}{u} \frac{d\theta}{du} \right)$$

y la ecuación se reduce a

$$\frac{d^2 \theta}{du^2} + \frac{3}{u} \frac{d\theta}{du} + \theta = 0$$

la cual es una ecuación que se deduce de la ecuación de Bessel



la sustitución  $\theta = \frac{z}{u}$  reduce la ecuación de Bessel de orden 1

$$u^2 z'' + u z' + (u^2 - 1) z = 0$$

Una solución particular de esta ecuación es la función de Bessel  $J_1(t)$ , luego la solución particular de la ecuación diferencial (1) es:

$$\theta_1(t) = \frac{J_1(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$$

El desarrollo en serie de potencias de  $J_1(t)$ , nos llevará a hacer más precisas algunas propiedades de  $\theta_1(t)$ :

$$\theta_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} (\sqrt{t}) \left[ 1 - \frac{(\sqrt{t})^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} (\sqrt{t})^{2n} + \dots \right]$$

$$= 1 - \frac{t}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} t^n + \dots$$

La función  $\theta_1(t)$  es una función entera ; en particular  $\theta_1(t)$  es continua en  $t=0$  y  $\theta_1(0)=1$ .

Para obtener la solución general de la ecuación diferencial, tomemos

$$\theta(t) = w(t)\theta_1(t)$$

entonces

$$\theta(t) = w(t)\theta_1(t), \quad \theta'(t) = w'\theta_1 + w\theta_1', \quad \theta''(t) = w''\theta_1 + 2w'\theta_1' + w\theta_1''$$

Cuando sustituimos los valores de  $\theta$  y sus derivadas en (1), recordando que  $\theta_1$  es una solución de (1) obtenemos:

$$2w'\theta_1 + tw''\theta_1 + 2tw'\theta_1' = 0$$

o sea:

$$\frac{w''}{w'} = -2 \frac{\theta_1 + t\theta_1'}{t\theta_1} = -\frac{2}{t} - \frac{2\theta_1'}{\theta_1}$$

tenemos:

$$\log w' = -2\log t - 2\log \theta_1 + K, \quad w' = \frac{C}{t^2\theta_1^2},$$

donde  $C$  y  $K$  son constantes, en consecuencia:

$$w(t) = C \int_{t_0}^t \frac{dv}{v^2\theta_1^2(v)} + A \quad (t_0 > 0)$$

la cual nos da la solución de (1) para un valor fijo no cero de  $t_0$ . Por lo tanto, la solución general de (1) es:

$$\theta(t) = C\theta_1(t) \int_{t_0}^t \frac{dv}{v^2\theta_1^2(v)} + A\theta_1(t) \dots \dots (3)$$

cuando  $t$  tiende a cero,  $\theta_1(t)$  tiende a 1. Puesto que la integral diverge, para valores no cero de  $C$ , la solución (3) de la ecuación diferencial es no acotada en una vecindad del cero. Luego las únicas soluciones aco-



tadas son de la forma

$$\theta(t) = A\theta_1(t)$$

ellas son continuas y  $\theta(0) = A$

Con la ayuda de tablas de funciones, podemos fácilmente construir la curva para  $\theta(t)$ ; esta tiene la apariencia de una senoide amortiguada.

En particular, si  $X$  es suficientemente grande los ceros de  $J_1(x)$  están muy cercanos a puntos de la forma  $\frac{\pi}{4} + n\pi$  ( $n$  entero). Luego, los ceros de  $J_1(2\sqrt{t})$  están aproximadamente en los puntos  $\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4} + n\pi)^2$ .

La distancia entre dos ceros consecutivos varía linealmente con el orden de  $n$ . De aquí se sigue que, la longitud del péndulo se acorta, el periodo de oscilaciones se incrementa linealmente con el tiempo, esto es, de la longitud; esta regla es más y más cercana al problema real en la medida que la longitud del péndulo es mayor.

Veamos más de cerca la ecuación diferencial de Bessel y estudiemos con más detalle sus propiedades. Dicha ecuación es:

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) w = 0 \dots\dots\dots (1)$$

se dice que dicha ecuación tiene una singularidad de primera clase en el origen y es de orden  $p$ .

Propongamos como solución de la ecuación (1) la función

$$w(z) = z^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \dots\dots\dots (2)$$

donde  $z^\lambda = e^{\lambda \log z}$ , para alguna rama del logaritmo.

Primero observamos que en la ecuación diferencial:  $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ , el método de serie de potencias, ofrece una técnica potente para encontrar las soluciones linealmente independientes, cuando los coe-

ficientes  $p$  y  $q$  son de la forma:

$$P(z) = \frac{p-1}{z} + p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$$

$$q(z) = \frac{q-2}{z^2} + \frac{q-1}{z} + q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots$$

En una vecindad agujerada  $N_R(0) - \{0\}$  del origen; cuando los coeficientes antes mencionados cumplen con  $|p-1| + |q-2| \neq 0$ , decimos que  $0$  es una singularidad de primera clase.

Luego  $\lambda$  de la ecuación (2) debe satisfacer la ecuación cuadrática

$$\lambda(\lambda + p_1 - 1) + q_{-2} = 0$$

la cual es conocida como la ecuación indicativa (o característica) de la ecuación (1). Si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son las raíces de la ecuación indicativa; los siguientes resultados deben ser observados:

a) Si  $\lambda_1 - \lambda_2$  no es un entero, entonces la ecuación (1) tiene dos soluciones linealmente independientes "cerca" del cero (donde "cerca" significa en el dominio del logaritmo) de la forma:

$$w_1(z) = z^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad w_2(z) = z^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (\text{con } a_0 b_0 \neq 0)$$

b) Si  $\lambda_1 = \lambda_2$ , entonces la ecuación (1) tiene dos soluciones linealmente independientes cerca del origen, de la forma:

$$w_1(z) = z^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad w_2(z) = z^{\lambda_1} \left( \ln z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right)$$

c) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 + m$ , donde  $m$  es un entero positivo, entonces la ecuación (1) tiene dos soluciones linealmente independientes, de la forma:

$$w_1(z) = z^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad w_2(z) = c z^{\lambda_1} \ln z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + z^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

Así pues, para el caso que nos interesa, la ecuación indicativa de (1) es:

$$\lambda(\lambda+1) - p^2 = 0$$

entonces  $\lambda_1 = p$  y  $\lambda_2 = -p$ . Supongamos que las raíces han sido ordenadas de forma que  $\text{Re } \lambda_1 \geq 0$ . De las observaciones (a), (b) y (c) vemos que la ecuación diferencial (1) deberá tener una solución de la forma:

$$w_1(z) = z^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

de aquí que:

$$w_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+p}$$

$$w_1'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+p) a_n z^{n+p-1}$$

$$w_1''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (n+p)(n+p-1) a_n z^{n+p-2}$$

luego substituyendo en (1), tenemos que después de multiplicar por  $z^2$ :

$$z^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n+p)(n+p-1) a_n z^{n+p-2} + z \sum_{n=1}^{\infty} (n+p) a_n z^{n+p-1} + (z^2 - p^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+p} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+p)(n+p-1) a_n z^{n+p} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+p) a_n z^{n+p} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+p+2} - p^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+p} = 0$$

si convenimos en que  $a_n = 0$ , cuando  $n$  es negativa, tenemos que la última igualdad se reduce a:

$$a_n (n+p)(n+p-1) + a_n (n+p) + a_{n-2} - p^2 a_n = 0$$

y simplificando

$$a_n [(n+p)^2 - p^2] + a_{n-2} = 0$$

ésta última es válida para toda  $n$ . Para  $n$  negativa la última igualdad es válida automáticamente, en virtud de que  $a_n = 0$ . El primer caso no trivial es llamado la ecuación indicial; esto se obtiene en el caso que tenemos, cuando ponemos  $n=0$  y toma la forma:

$$a_0 (p^2 - p^2) + 0 = 0 \text{ (ecuación indicial)}$$

la elección de  $n=1$ , da  $a_1 = 0$ ; luego  $a_n = 0$  para toda  $n$  impar, si  $n=2$ ,

$$a_2 = -\frac{a_0}{(2+p)^2 - p^2}, \quad a_4 = \frac{a_2}{(4+p)^2 - p^2} \text{ etc..}$$

De esta manera es fácil verificar que la serie correspondiente a  $P$  es:

$$w_1(z) = a_0 z^p \left[ 1 - \frac{z^2}{2(2p+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 (2p+2)(2p+4)} - \dots \right]$$

cuando  $P$  es un entero no negativo, la expresión puede ser simplificada con el uso de factoriales, como sigue; factorizamos 2 de cada término del denominador y colocamos la  $z$  en el numerador, obteniendo:

$$w_1(z) = a_0 z^p \left[ 1 - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{1 \cdot (p+1)} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{1 \cdot 2 (p+1)(p+2)} - \dots \right]$$

si los denominadores son multiplicados por  $P!$

$$w_1(z) = a_0 P! z^p \left[ \frac{1}{P!} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{1! (p+1)!} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{2! (p+2)!} - \dots \right]$$

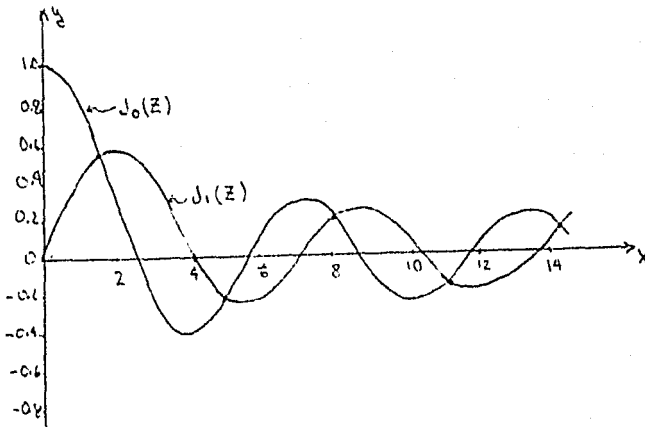
Y puesto que  $z^p = 2^p \left(\frac{z}{2}\right)^p$ , esto nos da:

$$W_1(z) = a_0 P! z^P J_P(z)$$

donde

$$J_P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+P}}{n! (P+n)!}$$

la función  $J_P(z)$  es llamada la función de Bessel de orden  $P$ . Las gráficas de  $J_0(z)$  y  $J_1(z)$  se muestran en la figura siguiente:



Algo sobre el carácter oscilatorio de las soluciones de las ecuaciones de Bessel.

Deseamos analizar el carácter oscilatorio de la ecuación de Bessel:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - P^2) y = 0 \text{ para } x > 0 \dots\dots\dots (1)$$

primero llevémosla a su forma canónica mediante la transformación:

$$y = \frac{z}{\sqrt{x}} \dots\dots\dots (2)$$

la cual se obtiene a partir de lo siguiente:

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

$$\begin{aligned} \text{sea } y &= e^{-\int \frac{p(x)}{x} dx} z = e^{-\int \frac{dx}{2x}} z = e^{-\frac{1}{2} \ln x} z = e^{\ln \frac{1}{x^{1/2}}} z = \frac{z}{x^{1/2}} = \\ &= \frac{z}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} z \end{aligned}$$

ahora

$$y' = x^{-1/2} z' - \frac{1}{2} x^{-3/2} z ; y'' = x^{-1/2} z'' - \frac{1}{2} x^{-3/2} z' - \frac{1}{2} x^{-3/2} z' + \frac{3}{4} x^{-5/2} z$$

estos valores se sustituyen en (1) para obtener:

$$x^2(x^{-1/2} z'' - x^{-3/2} z' + \frac{3}{4} x^{-5/2} z) + x(x^{-1/2} z' - \frac{1}{2} x^{-3/2} z) + (x^2 - p^2)x^{-1/2} z = 0$$

o sea:

$$\begin{aligned} x^{3/2} z'' - x^{1/2} z' + \frac{3}{4} x^{-1/2} z + x^{1/2} z' - \frac{1}{2} x^{-1/2} z + x^{3/2} z - p^2 x^{-1/2} z &= \\ = x^{3/2} z'' + \frac{1}{4} x^{-1/2} z + x^{3/2} z - p^2 x^{-1/2} z &= \\ = z'' + \frac{z}{4x^2} + z - \frac{p^2 z}{x^2} &= \\ = z'' + \left(\frac{1 + 4x^2 - p^2}{4x^2}\right) z = 0 & \end{aligned}$$

sencillamente

$$z'' + \left(1 - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) z = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Ahora ya podemos analizar el caracter oscilatorio de (1), pero a partir de la ecuación (3), pues el coeficiente de z, de dicha ecuación:

$$1 - \frac{p^2 - 1/4}{x^2} \begin{cases} > 1, & \text{si } p^2 < 1/4 \\ = 1, & \text{si } p^2 = 1/4 \\ < 1, & \text{si } p^2 > 1/4 \end{cases} \quad \text{para toda } x > 0$$

por lo cual resulta natural comparar con la ecuación con coeficiente en Z igual a 1, es decir con:

$$z'' + z = 0 \dots\dots\dots (4)$$

cuya distancia entre dos ceros consecutivos de cualquiera de las soluciones no triviales es  $\pi$ .

En efecto, pues las soluciones son  $Z_1 = \cos x$ ,  $Z_2 = \sin x$ ; ahora  $Z_1 = 0$  cuando  $x = -\pi/2$  ó  $x = \pi/2$  por ejemplo, en cuyo caso  $\pi/2 - (-\pi/2) = \pi$ ; análogamente  $Z_2 = 0$  cuando por ejemplo  $x = 0$ ,  $x = \pi$ , en cuyo caso  $\pi - 0 = \pi$ .

Luego la distancia entre dos ceros de las funciones de Bessel es:

$$\text{distancia} \begin{cases} > \pi, & \text{si } |p| < 1/2 \\ = \pi, & \text{si } |p| = 1/2 \\ < \pi, & \text{si } |p| > 1/2 \end{cases}$$

o sea, la distancia  $\begin{cases} > \pi, & \text{si } -1/2 < p < 1/2 \\ = \pi, & \text{si } p = \pm 1/2 \\ < \pi, & \text{si } p > 1/2 \text{ ó } p < -1/2 \end{cases}$

En particular el caso  $p = \pm 1/2$ , es decir el caso en que la ecuación analizada (3) coincide con (4); la distancia entre dos ceros consecutivos de la función de Bessel de primera clase (solución de (4) es exactamente  $\pi$ ). Este resultado es evidente si recordamos que las soluciones linealmente independientes de la ecuación (4) (funciones de Bessel de primera clase) tienen la forma:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \dots\dots\dots (5)$$

Pues la ecuación (1) para  $P = \pm \frac{1}{2}$  es:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

la cual con la transformación  $y = X^{-1/2} z$  se reduce a:

$$z'' + z = 0$$

y dado que esta ecuación tiene las soluciones:

$$z_1 = \cos x \quad \text{y} \quad z_2 = \sin x$$

luego entonces, las soluciones linealmente independientes serán,

$$y_1 = X^{-1/2} \cos x, \quad y_2 = X^{-1/2} \sin x \quad (\text{donde } y_1(x) \rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow 0).$$

Estas soluciones siguen siéndolo si multiplicamos por una constante; sea  $\sqrt{\frac{x}{\pi}}$  dicha constante, obtenemos así las funciones de Bessel dadas por (5)

A este resultado se llega para las funciones de Bessel de primera clase, cuando el valor de  $P$  no es entero. Si se buscan las soluciones cuando  $P = \pm \frac{1}{2}$  como series de potencias, o sea como

$$y_1(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p X^{p+k}$$

que sustituida con sus derivadas en:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

obtenemos:

$$x^2 \sum_{p=2}^{\infty} a_p (p+k)(p+k-1) X^{p+k-2} + x \sum_{p=1}^{\infty} a_p (p+k) X^{p+k-1} + (x^2 - \frac{1}{4}) \sum_{p=0}^{\infty} a_p X^{p+k} = 0$$

Para que esta identidad se cumpla es necesario y suficiente que los coeficientes cumplan la condición de ser cero, es decir:

$$a_0 [(k^2 - \frac{1}{4})] = 0, \quad a_1 [(k+1)^2 - \frac{1}{4}] = 0, \quad a_2 [(k+2)^2 - \frac{1}{4}] + a_0 = 0,$$

$$a_3 [(k+3)^2 - \frac{1}{4}] + a_1 = 0 \text{ etc.} \quad a_p [(k+p)^2 - \frac{1}{4}] + a_{p-2} = 0 \text{ etc.}$$



Como  $a_0$  podemos considerarla  $\neq 0$ , tenemos que  $K = \pm \frac{1}{2}$ , con el fin de fijar ideas, consideremos el caso  $K = \frac{1}{2}$ . Entonces  $a_1 [(1/2+1)^2 - 1/4] = 0$  o sea  $2a_1 = 0$ , es decir  $a_1 = 0$ , mas por la forma que tienen las fórmulas de recurrencia,  $a_{2p+1} = 0$ , los coeficientes con índices pares nos quedan dados por:

$$a_2 = \frac{-a_0}{(1/2+2)^2 - 1/4} = \frac{-a_0}{2^2(1/2+1)} ; \quad a_4 = -\frac{a_2}{(1/2+4)^2 - 1/4} = -\frac{a_2}{2^2(1/2+2)^2} = \frac{a_0}{2^4(1/2+1)(1/2+2) \cdot 1 \cdot 2}$$

$$\text{etc.} \quad a_{2p} = \frac{(-1)^p \cdot X^{2p+1/2}}{2^{2p} (\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2) \dots (\frac{1}{2}+p) P!}$$

la solución toma la forma:

$$y_1(x) = a_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p X^{2p+1/2}}{2^{2p} (\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2) \dots (\frac{1}{2}+p) P!}$$

tomando

$$a_0 = \frac{1}{2^{1/2} \Gamma(\frac{1}{2}+1)} , \quad \text{donde} \quad \Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$$

es la función gamma, para  $p > 0$  tal que  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ , luego la función  $y_1(x)$  que se denota usualmente por:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1/2}}{p! \Gamma(\frac{1}{2}+p+1)}$$

que transformada a través de la función gamma, puede expresarse como en (5). Análogamente se obtiene

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-1/2}}{p! \Gamma(-\frac{1}{2}+p+1)} \quad (x \neq 0)$$

La independencia lineal de  $J_{1/2}(x)$  y  $J_{-1/2}(x)$  se justifica de que sus desarrollos en serie, comienzan con potencias distintas.

Finalmente observamos que en la ecuación transformada

$$z'' + \left(1 - \frac{p^2 - 1/4}{x^2}\right) z = 0$$

el coeficiente de  $z$ :  $1 - \frac{n^2 - 1/4}{x^2}$ , tiende a 1 si  $x \rightarrow \infty$  y consecuentemente la distancia entre dos ceros consecutivos, de cualquier función de Bessel de primera especie, tiende a ser  $\pi$  cuando  $x$  crece indefinidamente.

En efecto, para  $p$  entero, hay que buscar otra solución  $J_{-p}(x)$  que sea linealmente independiente de  $J_p(x)$ ; dicha función puede obtenerse de maneras distintas; por ejemplo ya conociendo una solución particular  $J_p(x)$  o reducir el orden de la ecuación (3) mediante la transformación:

$$z(x) = J_p(x) \int u(x) dx \quad \left( \left( \frac{z}{J_p} \right)' = u \right);$$

ó también buscar la solución como el producto de  $mx$ , por la serie de potencias generalizada. A esta nueva función de Bessel se le llama de segunda especie y usualmente se denota por  $Y_n(x)$ ; otra forma de obtener  $Y_n(x)$  consiste en considerar a  $k$  no entero, obteniendo para tal  $k$  a  $J_k(x)$  y  $J_{-k}(x)$ , con ellos se forma la combinación lineal:

$$\frac{J_k(x) \cos kx - J_{-k}(x)}{\sin kx}$$

luego pasando al límite cuando  $k \rightarrow n$ , donde  $n$  es un entero, definimos a:

$$Y_n(x) = \lim_{k \rightarrow n} \frac{J_k(x) \cos kx - J_{-k}(x)}{\sin kx}$$

Las soluciones generales son:

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 J_n(x), \text{ si } n \text{ no es entero}$$

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 J_n(x), \text{ si } n \text{ es entero}$$

Este resultado se compagina con la fórmula aproximada, ampliamente conocida, para  $x$  positivas suficientemente grandes:

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (x > 0)$$

la cual es exacta para  $n = \pm \frac{1}{2}$

Observación: La ecuación (1) conocida como ecuación de Bessel de orden  $P$  ( $\geq 0$ ), es una de las ecuaciones más importantes de las matemáticas aplicadas. Dicha ecuación fue estudiada inicialmente por Jacob Bernoulli en 1703; en relación con el movimiento oscilatorio de una cadena colgante, y más tarde Friedrich Wilhelm Bessel en sus estudios del movimiento planetario. Desde entonces las funciones de Bessel se han usado al investigar; la elasticidad, el movimiento de los fluidos, la teoría del potencial, la difusión y la propagación de ondas.

## 6. LA TRANSFORMADA DE FOURIER

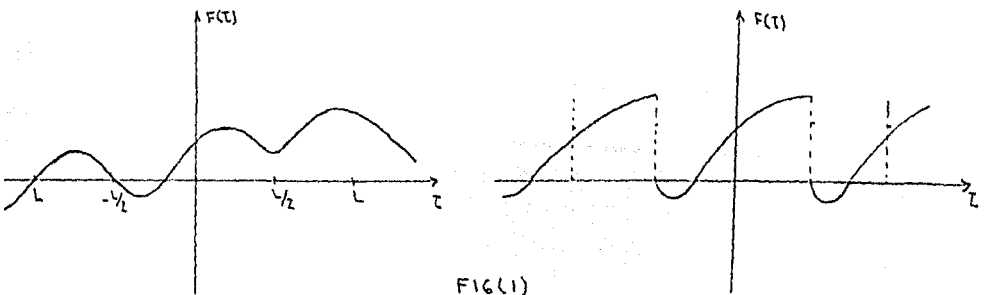
Empezaremos con suponer que nos es dada una función no periódica  $F(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , la cual es digamos, continuamente diferenciable. Entonces sobre un intervalo de la forma  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , podemos representar a  $F(t)$  mediante una serie de Fourier para  $t$  en este intervalo

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in2\pi t/L}, \quad -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \dots (1)$$

con coeficientes  $C_n$  dados por:

$$C_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} F(t) e^{-in2\pi t/L} dt \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \dots (2)$$

De hecho la serie en la ecuación (1), define una función periódica  $F_L(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ ; la cual coincide con  $F(t)$  en  $(-L/2, L/2)$ , ver figura (1). [Observese que  $F_L(t)$  puede ser discontinua, aunque  $F(t)$  sea suave].



Luego tenemos una representación sinusoidal de  $F(t)$  en un intervalo de longitud  $L$ . Si ahora hacemos que  $L \rightarrow \infty$ , vemos que es razonable la posibilidad de desarrollar a  $F(t)$  en una representación sinusoidal, válida

para toda  $t$ , exploremos pues esta posibilidad.

Iniciaremos reescribiendo las ecuaciones y como veremos en primer lugar ésta es algo burda, más esto nos ayudará a interpretarlas cuando  $L \rightarrow \infty$ . Definimos  $g_n$  como  $C_n \frac{1}{2\pi}$ , e introducimos el factor  $[(n+1)-n] \equiv 1$  en la serie (1). Luego tenemos

$$F_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{in2\pi t/L} \frac{[(n+1)-n]}{L} \dots \dots \dots (3)$$

$$g_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} F(t) e^{-in2\pi t/L} dt \dots \dots \dots (4)$$

Si ahora tomamos  $W_n = \frac{n2\pi}{L}$ , nos da:

$$F_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_L(W_n) e^{iW_n t} (W_{n+1} - W_n)$$

donde la función  $G_L(W)$ , puede ser definida para cualquier real  $w$  mediante:

$$G_L = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} F(t) e^{iwt} dt \dots \dots \dots (5)$$

Cuando  $L$  corre a infinito,  $G_L(w)$  se aproxima naturalmente a una función  $G(w)$ , la cual es conocida como la transformada de Fourier de  $F$ .

$$G(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-iwt} dt \dots \dots \dots (6)$$

Además, puesto que  $\Delta W_n = W_{n+1} - W_n$ , tiende a cero cuando  $L \rightarrow \infty$  y dado que  $W_n$  corre de  $-\infty$  a  $+\infty$ , la ecuación (3) guarda mucha semejanza con una suma de Riemann, para la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(w) e^{iwt} dt$$

De aquí que, proponemos que la igualdad

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} dt \dots \dots \dots (7)$$

para una función F no periódica, cuando G está definida por la ecuación (6) es llamada la transformada inversa de Fourier.

Las ecuaciones (6) y (7) son esenciales para la teoría de la transformada de Fourier. Como se sugiere de esta discusión, es más útil frecuentemente acceder a caprichos y pensar en la integral (7) como una "suma" generalizada de senoides, que se suman sobre un continuo de frecuencias. La relación (5) nos da entonces los "coeficientes" G(ω), en la suma.

A manera de fijar ideas, encontramos la transformada de Fourier y verificar la fórmula para la inversa de la función

$$F(t) = \frac{1}{t^2 + 9}$$

observese que

$$F(t) = \frac{1}{(t+3i)(t-3i)}$$

es analítica, excepto en los polos simples  $t = \pm 3i$ , usaremos teoría de los residuos para evaluar la transformada de Fourier, interpretando la integral, como un valor principal:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} (\text{Val. principal}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^2 + 9} dt$$

si  $\omega \geq 0$ , encerramos el contorno con un semicírculo en el semiplano inferior, encontrando:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} (-2\pi i) \text{Res} \left( \frac{e^{-i\omega t}}{t^2 + 9}, -3i \right)$$

$$G(\omega) = -i \lim_{t \rightarrow -3i} \frac{e^{-i\omega t}}{t - 3i} = \frac{e^{-3\omega}}{6} \quad (\omega \geq 0)$$

análogamente, para  $\omega < 0$ , encerramos en el semiplano superior y encontramos:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} (2\pi i) \operatorname{Res} \left( \frac{e^{-i\omega t}}{t^2 + 9}, 3i \right) = \frac{e^{3\omega}}{6} \quad (\omega < 0)$$

brevemente

$$G(\omega) = \frac{e^{-3|\omega|}}{6}$$

Para verificar la fórmula de inversión de Fourier, calculemos:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-3|\omega|}}{6} e^{i\omega t} d\omega$$

por la simetría, la parte imaginaria se anula y esta integral es igual a

$$\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-3|\omega|}}{6} e^{i\omega t} d\omega = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{e^{-3\omega}}{6} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{e^{(-3+it)\omega}}{-3+it} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{t^2 + 9} \quad ; \quad \text{por tanto:}$$

$$\frac{1}{t^2 + 9} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-3|\omega|}}{6} e^{i\omega t} d\omega$$

Como en el caso de series de Fourier, una riqueza de teoremas ha sido descubierta, empezando con condiciones bajo las cuales las integrales de Fourier (6) y (7) son válidas. Es muy útil en las aplicaciones, trabajar con funciones  $F(t)$  suaves a pedazos; esto es, en cualquier intervalo acotado  $F(t)$  es continuamente diferenciable en casi todo, excepto un número finito de valores de  $z$

=  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_n$ , y en cada  $\bar{\sigma}_i$  los límites laterales de  $F(t)$  y  $F'(t)$  deben existir.

Subsiste el siguiente Teorema: Supongamos que  $F(t)$  es suave a pedazos en cualquier intervalo acotado, y que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt$$

existe, entonces la transformada de Fourier,  $G(w)$  de  $F(t)$  existe y:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(w) e^{iwt} dw = \begin{cases} F(t) & \text{donde } F \text{ es continuo} \\ \frac{F(t+) + F(t-)}{2} & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Un ejemplo de lo anterior, encontrar la transformada de Fourier de la función:

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi < t < \pi \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

véase la figura (2). Expresa la fórmula de inversión.

Tenemos que:

$$G(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1) e^{-iwt} dt = \frac{\text{sen } w\pi}{w\pi}$$

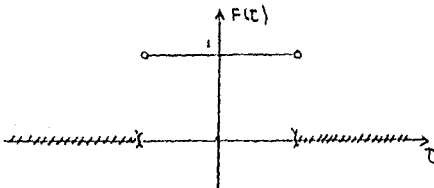


FIG.(2)



luego el teorema anterior nos da que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } \omega t}{\omega t} d\omega = \begin{cases} 1, & |t| < \pi \\ 1/2, & t = \pm \pi \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}$$

Un ejemplo más complicado que el anterior nos lo ofrece el encontrar la transformada de Fourier de la función:

$$F(t) = \begin{cases} \text{sen } t, & |t| < 6\pi \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases}$$

véase figura (3), y exprese la fórmula de inversión (los físicos llaman a esta función un "tren finito de onda").

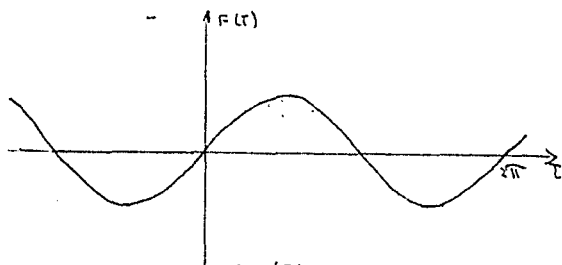


FIG.(3)

Tenemos:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-6\pi}^{6\pi} (\text{sen } t) e^{-i\omega t} dt = \frac{i \text{sen } 6\pi\omega}{\pi (1 - \omega^2)}$$

puesto que  $F(t)$  es continua en todo el eje real,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i \text{sen } 6\pi\omega}{\pi (1 - \omega^2)} e^{i\omega t} d\omega = F(t)$$

La transformada de Fourier, se usa igual que las series de Fourier, para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales; como una ilustración considere el si-

quiente ejemplo.

Encontrar la función que satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2 \frac{df(t)}{dt} + 2 f(t) = \begin{cases} \text{sen } t, & |t| < 6\pi \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Sea  $g(t) = A e^{i\omega t}$ , una solución de la ecuación diferencial, la cual al sustituir nos da:

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} + 2i\omega A e^{i\omega t} + 2A e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

resolviendo para A, tenemos que

$$A = \frac{1}{-\omega^2 + 2i\omega + 2}$$

luego, una solución para la ecuación  $f'' + 2f' + 2f = e^{i\omega t}$  es:

$$g(t) = \frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + 2i\omega + 2}$$

Ahora, el miembro derecho de la ecuación diferencial es la función  $F(t)$  en el ejemplo anterior y:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i \text{sen } 6\pi w}{6w} e^{i\omega t} dw = F(t)$$

puede ser interpretada, como una "superposición" de senoides de la forma  $e^{i\omega t}$ , de la función  $F(t)$ . Luego proponemos que las superposiciones correspondientes de las soluciones

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i \text{sen } 6\pi w}{\pi(1-w^2)} \left( \frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + 2i\omega + 2} \right) dt$$

sean la solución de la ecuación dada.

Podemos ver que esta integral converge, que puede derivarse dos veces bajo el signo de integral y además que usando residuos

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < -6\pi \\ \frac{2}{5} (e^{-6\pi-t} - 1) \cos t + \frac{1}{5} (e^{-6\pi-t} + 1) \sin t & , -6\pi < t < 6\pi \\ -(e^{6\pi} - e^{-6\pi}) e^{-t} \left( \frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t \right) & , t > 6\pi \end{cases}$$

es la solución buscada.

### INTERPRETACION FISICA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

Considere la transformada de Fourier

$$\bar{G}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-iwt} dt$$

y su transformación inversa

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(w) e^{iwt} dw$$

En general,  $\bar{G}(w)$  es una función compleja de  $w$  y puede por consiguiente escribirse en forma polar como

$$\bar{G}(w) = r(w) e^{-i\varphi(w)}$$

donde  $r(w) = |\bar{G}(w)|$  y  $\varphi(w) = -\arg[\bar{G}(w)]$  son funciones reales de  $w$ .

Supongamos que  $t$  representa el tiempo y  $w$  una frecuencia angular  $w = 2\pi f$ . Si trazamos una gráfica con la amplitud  $r(w)$  como ordenada, y la frecuencia angular como abscisa, entonces la curva resultante es llama-

da el "espectro de amplitud" de  $G(t)$ . En general,  $r(\omega)$  es una función continua de  $\omega$ , y en consecuencia el espectro de amplitud de una función definida sobre un intervalo infinito  $-\infty \leq t \leq +\infty$  un "espectro continuo" una gráfica de  $\varphi(\omega)$  contra  $\omega$  es llamado un "espectro de fase" de  $G(t)$ . Este también es un espectro.

La transformada inversa puede ser escrita como:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\omega) e^{i[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega \dots\dots (a)$$

lo cual nos muestra que  $G(t)$  es una superposición de oscilaciones armónicas simples de amplitud variable  $r(\omega)$ , fase  $\varphi(\omega)$  y frecuencia angular  $\omega$ .

Supongamos que la energía total de la señal  $G(t)$  es igual a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(t)|^2 dt$$

de acuerdo a la identidad de Parseval; tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r^2(\omega) d\omega \dots\dots\dots (b)$$

La ecuación (a) representa a  $G(t)$  como la superposición de oscilaciones armónicas continuas, en tanto que (b) establece que un oscilador armónico de frecuencia angular  $\omega$  y amplitud  $r(\omega)$  contribuye con una cantidad de energía  $r^2(\omega)d\omega$  a la energía total de la señal  $G(t)$ .

La transformada de Fourier es una de las herramientas más poderosas de la matemática, esencialmente, porque reduce las operaciones de derivación e integración a multiplicaciones y divisiones respectivamente. Veamos algunos ejemplos concretos de aplicación de la transformada de Fourier.

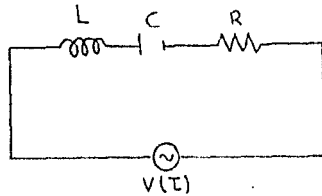
Problema 6.1 Circuito eléctrico en serie, con resonancia.

Considere una corriente  $I$  que fluye en un circuito eléctrico en serie con resonancia, compuesto de una inductancia  $L$ , una resistencia  $R$  y una capacitancia  $C$ , todas en serie con un generador cuyo voltaje es  $V(t)$ . La corriente  $I(t)$  satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dv}{dc} \dots\dots\dots(c)$$

La solución general de la ecuación consiste de la suma

$$I(t) = I_h(t) + I_p(t)$$



CIRCUITO a-c SERIE RESONANTE

El primer término  $I_h(t)$  satisface

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \dots\dots\dots(d)$$

y el segundo término satisface (c). La suma  $I(t)$  satisface (1) que es una ecuación diferencial lineal, definimos un operador  $G$  por:

$$G \equiv L \frac{d}{dt^2} + R \frac{d}{dt} + \frac{1}{C} , \quad L, R, C = \text{ctes.}$$

entonces la ecuación (c) será

$$G(I) = \frac{dv}{dt}$$

**ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA**

$$y \quad G(I) = G(I_h + I_p) = G(I_h) + G(I_p) = \frac{dy}{dt}$$

pero  $G(I_h) = 0$  ; esto es:

$$G(I) = G(I_p) = \frac{dy}{dt}$$

El término  $I_h(t)$  que satisface la ecuación homogénea (d) es llamada la "función complementaria". Esta representa la corriente transitoria que fluye en el circuito después de abrir o cerrar un interruptor.

El término  $I_p(t)$  es llamada una integral particular de la ecuación (c); ésta representa la corriente constante que fluye en el circuito; es decir, la corriente que fluye en un tiempo, después de que el circuito ha sido cerrado.

La corriente  $I_p(t)$  se hace circular alrededor del circuito mediante la acción del generador. Resolvemos para  $I_p(t)$  usando la transformada de Fourier de las derivadas.

Sea  $G(x)$  una función, denotemos con:

$$\mathcal{F}(G(x)) = \bar{G}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{-ikx} dx$$

la transformada de Fourier, si integramos por partes la ecuación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x} e^{-ikx}$$

obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x} e^{-ikx} dx = G(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + ik \int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{-ikx} dx$$

y si  $\lim_{|k| \rightarrow \infty} G(x) = 0$

entonces 
$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) = ik \mathcal{F}(G(x))$$

Análogamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} e^{-ikx} dx = \frac{\partial G}{\partial x} e^{-ikx} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + ik \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x} e^{-ikx} dx$$

usando la parte anterior nos da:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} e^{-ikx} dx = \left( \frac{\partial G}{\partial x} + ikG \right) e^{-ikx} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + (ik)^2 \int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{-ikx} dx$$

y si

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial G}{\partial x} + ikG(x) \right] = 0$$

entonces

$$\mathcal{F} \left( \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) = (ik)^2 \mathcal{F}(G(x))$$

En general

$$\mathcal{F} \left( \frac{\partial^n G}{\partial x^n} \right) = (ik)^n \mathcal{F}(G(x))$$

De aquí pues que tengamos que examinar  $\left( \frac{\partial I}{\partial t} + i\omega t \right) e^{-i\omega t}$  y,  $I(t) e^{-i\omega t}$ , cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ ; es importante observar que estas dos últimas expresiones no se anulan cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , cuando  $\omega$  es real puro. La corriente constante y sus derivadas no se aproximan a cero, cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , en tanto que el generador continúe trabajando desde el inicio hasta el final. Una manera de librar este dilema es suponer que el circuito fue cerrado en un tiempo pasado, digamos  $t = -T$ , y que éste, es abierto otra vez en un tiempo posterior, digamos  $t = +T$ . En este caso, toda la corriente transitoria será amortiguada para  $t \gg T$  y no habrá corriente para  $t \ll -T$ . Como resultado:

$$\left( \frac{\partial I}{\partial t} + i\omega t \right) e^{-i\omega t} \quad \text{y} \quad I(t) e^{-i\omega t}$$

se anulan cuando  $t \rightarrow \pm\infty$

en consecuencia la ecuación (c) será

$$\left[ L(i\omega)^2 + (i\omega)R + \frac{1}{C} \right] \bar{I}(\omega) = i\omega \bar{V}(\omega)$$

donde

$$\bar{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{y} \quad \bar{V}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) e^{-i\omega t} dt$$

despejando a  $\bar{I}(\omega)$ , encontramos

$$\bar{I}(\omega) = \frac{\bar{V}(\omega)}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

si  $X_L = \omega L$  y  $X_C = \frac{1}{\omega C}$ , entonces en forma polar;

$$R + i(X_L - X_C) = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} e^{i \tan^{-1}(X_L - X_C)/R}$$

esto es, la ecuación para

$$\bar{I}(\omega) = \frac{\bar{V}(\omega)}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

será

$$\bar{I}(\omega) = \frac{\bar{V}(\omega)}{\bar{Z}(\omega)} e^{-i\phi(\omega)}$$

donde

$$\bar{Z}(\omega) = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \text{y} \quad \phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R}$$

Observación:  $\bar{Z}(\omega)$  se conoce como la impedancia de un circuito en serie, en tanto que  $X_L$  y  $X_C$  son conocidas como las reactancias inductivas y capacitivas, respectivamente. El cambio de fase en el circuito está dado por  $\phi(\omega)$ . La respuesta constante en el tiempo, se obtiene mediante la transformada de Fourier, aplicada a:

$$\bar{I}(\omega) = \frac{\bar{V}(\omega)}{\bar{Z}(\omega)} e^{-i\phi(\omega)}$$



el resultado es:

$$I_P(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{V}(\omega)}{\bar{Z}(\omega)} e^{i[\omega t - \phi(\omega)]} d\omega$$

De aquí vemos como el espectro generador  $\bar{V}(\omega)$  se combina con la impedancia y cambio de fase del circuito, para darnos una corriente constante  $I_P(t)$ .

Problema 6.2 Espectro de un pulso rectangular. Si  $G(t)$  es un pulso rectangular de duración  $T$  definido por:

$$G(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| < T/2 \\ 0, & \text{si } |t| > T/2 \end{cases}$$

El espectro de  $G(t)$  está dado como:

$$\bar{G}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt = T \frac{\text{sen } \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$$

si graficamos  $\bar{G}(\omega)$  como una función de  $\omega$ , vemos que  $\bar{G}(\omega)$  tiene una cima de valor  $T$  centrado en  $\omega=0$ . Esta cima central cruza el eje  $\omega$  en  $\omega = \pm 2\pi/T$ ; cuando  $T$  crece sin cota el pulso crece, incrementándose con el tiempo, en consecuencia, la cima central en el espectro (pulso - amplitud) crece en altura y se ensancha. Gran parte de la energía del pulso está en la cima central; por tanto a medida que el pulso dura más, es más estrecha la banda espectral y su energía se concentra ahí (véase figura (4)). Si elegimos la banda  $\Delta\omega$  del pulso, donde el intervalo separa la frecuencia angular máxima en  $\omega=0$ , desde el primer cero hasta  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , entonces,  $\Delta\omega = 2\pi/T$ . De cualquier modo,  $T$  representa la duración del pulso en el tiempo, y en consecuencia, escribimos  $\Delta\tau = T$  en  $\Delta\omega = 2\pi/T$ , obteniéndose  $\Delta\omega \cdot \Delta\tau = 2\pi$  o sea  $\Delta f \cdot \Delta\tau = 1$ , las últimas ecuaciones nos dan una

relación entre el tiempo de duración del pulso y la frecuencia con que aparece la banda; tales relaciones entre la duración del pulso y la frecuencia de la banda, expresa de manera general el hecho de que la forma de un pulso en el tiempo y la forma de su espectro de amplitud no son independientes.

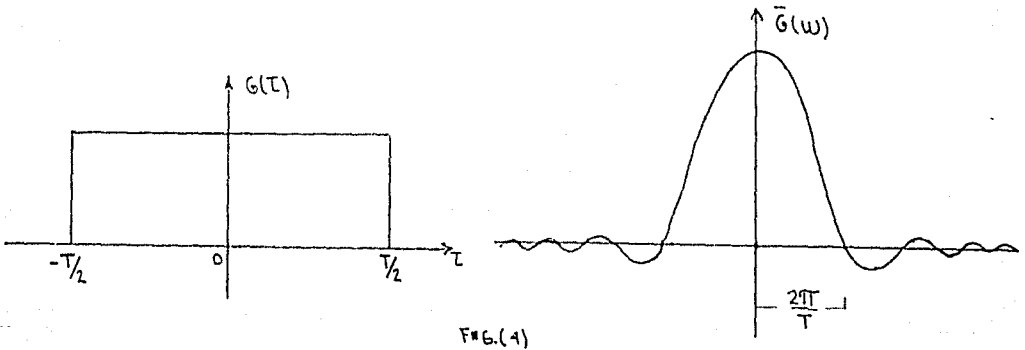


Fig. (4)

En Mecánica Cuántica, las relaciones tales como  $\Delta f \cdot \Delta G = 1$ , forman la base de los llamados principios de incertidumbre. La magnitud de la constante en el segundo miembro de dicha ecuación, depende de los detalles precisos de como la banda de un pulso ha sido definida.

Nuevamente consideremos la transformada de Fourier:

$$\bar{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-i\omega t} dt$$

y su transformada inversa

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(\omega) d\omega$$

la transformada de Fourier existe solo para funciones

$G(t)$  que satisfacen la condición:

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} |G(t)| dt \leq M < \infty$$

en casos tan simples como  $G(t)=1$  ó  $G(t)=e^{i\omega t}$ , la integral anterior no converge, consecuentemente hay funciones que no tienen transformada de Fourier en el sentido clásico. De hecho podemos decir que:

$$2\pi \delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt$$

es la transformada de Fourier de  $G(t)=1$ . No obstante, un resultado formal tal como la transformada de  $G(t)=1$ , debe dársele mucha atención matemática antes de darle un significado preciso. Aceptaremos la idea de que la transformada de Fourier clásica, está definida sólo cuando la integral que la define es convergente, con lo cual podemos disponer de cualquier contradicción asociada con la ecuación que define la transformada de  $G(t)=1$ .

El problema de qué hacer con  $G(t)=1$  y  $G(t)=e^{i\omega t}$  puede ser resuelto de la siguiente manera. En primer lugar, podemos observar que la mayoría de los procesos físicos, se inician en algún tiempo definido, el cual podemos suponer es  $t=0$ ; entonces el intervalo de tiempo en cuestión será  $0 \leq t \leq \infty$  en lugar de  $-\infty \leq t \leq \infty$ , la función  $G(t)$  está definida sólo para  $0 \leq t \leq \infty$ , si ahora queremos calcular la transformada de Fourier de  $G(t)$ , pero no podemos hacerlo a menos que sepamos quién es  $G(t)$ , para valores negativos del tiempo definiendo  $G(t)$  para  $t < 0$ , entonces:

$$G(t) = \begin{cases} G(t), & 0 \leq t \leq \infty \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

luego la transformada de Fourier será:

$$\bar{G}(\omega) = \int_0^{\infty} G(t) e^{-i\omega t} dt$$

pero esta última también es no convergente, para cuando

$$G(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \infty \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

y

$$G(t) = \begin{cases} e^{i\omega t}, & 0 \leq t \leq \infty \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Aquí emplearemos un artificio en lugar de considerar  $G(t)$ , consideremos una familia entera de funciones de la forma:

$$F(t) = \begin{cases} e^{-\Gamma t} G(t), & 0 \leq t \leq \infty \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

donde el parámetro real  $\Gamma$  toma todos los valores  $\Gamma \geq \Gamma_0 > 0$ , la transformada de Fourier para la función  $F(t)$  será:

$$\bar{G}_{\Gamma}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} [e^{-\Gamma t} G(t)] dt \dots \dots \dots (e)$$

en la ecuación (e) el subíndice  $\Gamma$  en  $\bar{G}_{\Gamma}(\omega)$  indica que esta transformada de Fourier depende tanto de  $\Gamma$  como de  $\omega$ . Ahora la ecuación (e) converge para

$$G(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \infty \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad G(t) = \begin{cases} e^{i\omega t}, & 0 \leq t \leq \infty \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

para el primer caso:

$$\bar{G}_{\Gamma}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(\Gamma+i\omega)t} dt = \left. \frac{-e^{-(\Gamma+i\omega)t}}{\Gamma+i\omega} \right|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{\Gamma+i\omega}$$

en tanto que la segunda

$$\bar{G}_\sigma(\omega) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} dt = -\frac{1}{\sigma} e^{-\sigma t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{\sigma}$$

Más generalmente, la ecuación (e) converge para cualquier función que dependa del tiempo  $G(t)$  la cual no crezca más rápidamente en tiempo que  $e^{at}$ ,  $a > 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , por supuesto siempre que

$$\sigma \geq \sigma_0 > a > 0$$

En este caso, que veremos como sigue. Supongamos que  $G(t)$  es continua a pedazos en cualquier intervalo finito y que  $|G(t)| \leq M e^{at}$ , para algunas constantes  $M$  y  $a$ , entonces:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T e^{-i\omega t} [e^{-\sigma t} G(t)] dt \right| &\leq \int_0^T e^{-\sigma t} |G(t)| dt \leq \\ \int_0^T M e^{-(\sigma-a)t} dt &\leq \int_0^\infty M e^{-(\sigma-a)t} dt = \frac{M}{\sigma-a} \dots \dots \dots (f) \end{aligned}$$

siempre que  $\sigma - a > 0$ , puesto que ésta desigualdad es válida para cualquier  $t > 0$  y

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t} [e^{-\sigma t} G(t)] dt \leq \left| \int_0^\infty e^{-i\omega t} [e^{-\sigma t} G(t)] dt \right|$$

concluimos que la ecuación (e) converge, además absolutamente. También puede demostrarse que la convergencia de (e) es uniforme para cualquier  $\sigma_0$  fija tal que  $\sigma \geq \sigma_0 > a$ .

Usando (e) y (f) tenemos que:

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{G}_\sigma(\omega) = 0$$

lo cual es cierto siempre que (e) sea convergente para cualquier  $\sigma = \sigma_0$  finito, aún si la desigualdad  $|G(t)| \leq M e^{at}$

no es aplicable. Recordemos que  $G(t) = 0$  para  $t < 0$  y

$$\bar{G}_\sigma(w) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} [e^{-\sigma t} G(t)] dt$$

usando la transformada inversa nos queda

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}_\sigma(w) e^{i\omega t} d\omega = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\sigma t} G(t), & \text{si } G(t) \text{ es continua en } t \dots (9) \\ \frac{1}{2} e^{-\sigma t} (G(t+0) + G(t-0)), & G(t) \text{ tiene dis-} \\ & \text{continuidad finita en } t. \end{cases}$$

podemos también escribir las ecuaciones (e) y (9) ligeramente diferente, como sigue:

$$\bar{G}_\sigma(w) = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+i\omega)t} G(t) dt \dots \dots \dots (h)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}_\sigma(w) e^{(\sigma+i\omega)t} d\omega = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ G(t) & \text{si } G(t) \text{ es continua en } t \dots (i) \\ \frac{1}{2} (G(t+0) + G(t-0)) & \text{si } G(t) \text{ tiene} \\ & \text{discontinuidad finita en } t \end{cases}$$

La cantidad  $\sigma+i\omega$  que aparece en ambas ecuaciones, es particular aparenta que  $G(t)$  no depende de  $\sigma$  y  $\omega$  en forma arbitraria, mas sólo en suma

$$s = \sigma + i\omega \dots \dots \dots (j)$$

esto significa que la sucesión de amplitudes espectrales  $\bar{G}_\sigma(w)$  que corresponde a diferentes valores de  $\sigma$

se unen de tal manera que ellas pueden ser representadas como una función de variable compleja. Entonces escribimos:

$$\bar{G}_\Gamma(w) = \bar{G}(\Gamma + iw) = \bar{G}(s)$$

se sigue de la desigualdad  $\Gamma \geq \Gamma_0 > a$ , que podemos tomar  $\Gamma = \Gamma_0 = \text{cte.}$  y de la ecuación (j) que:

$$ds = i dw$$

en tanto que los límites de integración  $w = -\infty$  y  $w = \infty$  corresponden a  $s = \Gamma - iw$  y  $s = \Gamma + iw$ , respectivamente. En términos de la variable  $s$ , las ecuaciones (h) y (i) toman la forma

$$\bar{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} G(t) dt \dots \dots \dots (k)$$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma - i\infty}^{\Gamma + i\infty} \bar{G}(s) e^{st} ds \dots \dots \dots (l)$$

donde  $F(t) = 0$ ,  $t < 0$  y  $F(t) = G(t)$  cuando  $G(t)$  es continua en  $t$ , y  $F(t) = \frac{1}{2} (G(t+0) + G(t-0))$  cuando  $G(t)$  tiene discontinuidad finita en  $t$ . La trayectoria de integración para la ecuación (l) en el plano complejo  $s$  es una línea vertical con abscisa  $\Gamma = \Gamma_0$ ; la integral (k) es llamada la Transformada de Laplace de  $G(t)$  y la integral (l) su inversa correspondiente.

En términos físicos, la transformada de Laplace

$$\bar{G}(s) = \bar{G}_\Gamma(w) = \bar{G}(\Gamma + iw)$$

es la amplitud espectral a frecuencia  $w$  de una señal amortiguada  $e^{-\Gamma t} G(t)$ , la cual se inicia en un tiempo  $t=0$ , y decae a  $1/e$  de su valor inicial en un tiempo  $t = 1/\Gamma$ . La transformada inversa de Laplace, representa esta señal amortiguada como una superposición de oscilaciones

armónicas de frecuencia  $\omega$  y amplitud  $\bar{G}(\omega)$ . Por otro lado la transformada inversa representa únicamente la función  $G(t)$  como una superposición de oscilaciones armónicas de diferentes frecuencias. La amplitud de cada una de esas oscilaciones armónicas crece exponencialmente con el tiempo. La razón de crecimiento es tal que cada amplitud es multiplicada por un factor de  $e$ , después de un intervalo de tiempo  $t = 1/\sigma$ .

La transformada de Laplace comparte con la transformada de Fourier, la propiedad de reducir la derivación e integración a multiplicaciones y divisiones en el espacio transformado. Además la transformada de Laplace, es particularmente adecuada para aplicarla a una función que se anula para  $t < 0$ , y las cuales conjuntamente con sus derivadas deben cumplir algunas condiciones iniciales en  $t=0$ .

Problema 6.2 Oscilaciones forzadas en un resorte.

Considere un resorte, cuyo desplazamiento inicial desde una posición estable de equilibrio es  $X(0) = X$  en  $t=0$ , y cuya velocidad está dada por:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=0} = x'(0)$$

cuando una fuerza actúa sobre una unidad de masa atada al resorte, la ecuación del movimiento será:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F(t) \dots \dots \dots (*)$$

si multiplicamos (\*) por  $e^{-st}$ , e integramos por partes con respecto al tiempo desde  $t=0$  hasta  $t=\infty$ , tendremos que analizar.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{dx}{dt} + sx(s) \right] e^{-st}$$



si suponemos que  $|x(t)| < Me^{at}$ , para algunas constantes  $M$  y  $a$ , entonces la expresi3n en el limite se anular3, y la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \bar{x}(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

ser3 convergente siempre que  $Re(s) > a$ . En este caso podemos usar algunas f3rmulas que f3cilmente se deducen para llegar a

$$s^2 \bar{x}(s) - sx(0) - x'(0) + w^2 \bar{x}(s) = \bar{F}(s)$$

siempre que

$$\bar{F}(s) = \int_0^{\infty} F(t) e^{-st} dt$$

sea convergente. Resolviendo para  $\bar{x}(s)$  obtenemos:

$$\bar{x}(s) = \frac{sx(0) + x'(0)}{s^2 + w^2} + \frac{\bar{F}(s)}{s^2 + w^2}$$

la transformada inversa de Laplace, nos permite calcular  $x(t)$  de nuestra  $x(s)$  conocida, entonces:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{sx(0) + x'(0) + \bar{F}(s)}{s^2 + w^2} e^{st} ds \dots \dots \dots (**)$$

donde  $\sigma_0$  es cualquier real, tal que  $Re(s) \geq \sigma_0 > a$ .

Es costumbre escribir la ecuaci3n (\*\*\*) como la suma de una funci3n complementaria  $x_h(t)$ , la cual satisface (\*\*\*) cuando  $F(t) = 0$  e incluye las condiciones iniciales y una integral particular (soluci3n constante)  $x_p(t)$ , la cual representa los efectos de la fuerza  $F(t)$  solamente.

Escribimos pues:

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

donde

$$X_h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0 - i\omega}^{\Gamma_0 + i\omega} \frac{sX(0) + X'(0)}{s^2 + \omega^2} e^{st} \quad \text{y} \quad X_p(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0 - i\omega}^{\Gamma_0 + i\omega} \frac{\bar{F}(s)}{s^2 + \omega^2} e^{st} ds$$

estas integrales pueden evaluarse directamente, mediante residuos. Dado que las transformadas de Laplace son de gran utilidad conviene tener una tabla de ellas. Nos da:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\text{sen } \omega t}{\omega} dt = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

luego pues -

$$X_h(t) = X(0) \cos \omega t + X'(0) \frac{\text{sen } \omega t}{\omega}$$

y usando el teorema de convolución, la función cuya transformada de Laplace es  $\bar{F}(s)/s^2 + \omega^2$  es:

$$X_p(t) = \int_0^T F(\tau) \frac{\text{sen}(t-\tau)}{\omega} d\tau$$

entonces la solución general de la ecuación diferencial, con las condiciones iniciales señaladas es:

$$X(t) = X(0) \cos \omega t + X'(0) \frac{\text{sen } \omega t}{\omega} + \frac{1}{\omega} \int_0^T F(\tau) \text{sen } \omega(t-\tau) dt.$$

## 7. HIDRODINAMICA.

### 7.1 Movimiento de sólidos en líquidos y gases.

Durante el movimiento de un sólido en un líquido ó un gas\*, acción fuerzas cuya resultante vamos a designar con la letra R, fig (7.11). La fuerza R puede ser descompuesta en dos componentes, una de las cuales es Q, está dirigida en sentido opuesto al movimiento del sólido (o bien en dirección del movimiento del flujo que rodea al sólido), mientras que la segunda P es perpendicular a dicha dirección. Las componentes Q y P reciben correspondientemente el nombre de resistencia frontal y fuerza de sustentación (ascensional).

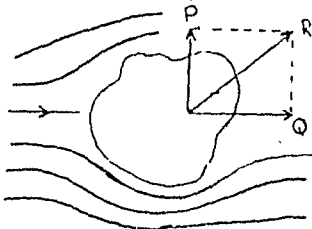


FIG. (7.11)

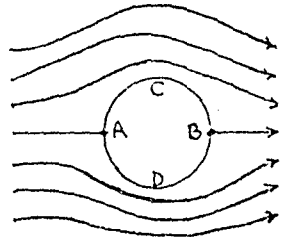


FIG. (7.12)

Es evidente, que sobre un sólido simétrico respecto de la dirección del movimiento, sólo puede actuar la resistencia frontal; en lo que se refiere a la fuerza sustentadora; en este caso ésta será nula.

\* cabe señalar que a velocidad constante del movimiento del sólido respecto del líquido, la fuerza que actúa sobre el cuerpo será; de acuerdo con el principio de la relatividad de Galileo, la misma cuando el líquido se mueve con relación a un sólido inmóvil a la misma velocidad. La figura (7.11) corresponde a este último caso.

Como muestran los cálculos, el movimiento uniforme de sólidos en un líquido perfecto debe transcurrir sin resistencia frontal. Como el líquido perfecto carece de viscosidad, debe deslizarse libremente por la superficie del sólido rodeándolo por completo. En la figura (7-12) se muestran las líneas de corriente al pasar un líquido perfecto alrededor de un cilindro muy largo (infinito).

A causa de que el líquido rodea por completo al sólido, el cuadro de las líneas de corriente resulta ser simétrico en absoluto, tanto respecto de una recta que pasa por los puntos A y B, como con relación a la recta que pasa por los puntos C y D. Por esta razón, la presión en la vecindad de los puntos A y B será igual, (y mayor que en un flujo no perturbado, ya que la velocidad junto a dichos puntos es menor); del mismo modo junto a los puntos C y D la presión será también igual, (y menor que el flujo no perturbado, ya que la velocidad junto a estos puntos es mayor). Por consiguiente, la resultante de las fuerzas de presión en la superficie del cilindro (que al no haber viscosidad podría condicionar la resistencia frontal), con evidencia, es igual a cero.

Para sólidos de otras formas obtendremos el mismo resultado. De forma completamente diferente transcurren los fenómenos durante el movimiento de un sólido en un líquido que posee viscosidad. En tal caso, una capa muy fina del líquido se adhiere a la superficie del cuerpo, la velocidad de las capas disminuye y, por fin, a corta distancia de la superficie el líquido resulta estar prácticamente no perturbado por el movimiento del sólido, de modo que el sólido se encuentra rodeado por una capa del líquido en la que hay un gradiente de velocidad; ésta capa se denomina límite. En ella actúan las fuerzas de rozamiento que, al fin de

cuentas, resultan aplicadas al sólido y provocan el surgimiento de la resistencia frontal.

Pero la cosa no termina aquí. La frecuencia de la capa límite, varía radicalmente el carácter de la corriente del líquido alrededor del sólido; el rodeo completo se hace imposible. La acción de la fuerza de rozamiento sobre la capa superior, conduce a que el flujo se separe de la superficie del sólido, como resultado, por la parte posterior del sólido se crean torbellinos o vórtices (véase la figura (7.13), en la que está mostrando cómo un líquido viscoso rodea un cilindro). Los torbellinos son arrastrados por el flujo y se extinguen gradualmente a causa del rozamiento; con esto, la energía de los torbellinos se consume para calentar el líquido.

La presión en la zona de torbellinos, creada tras el sólido, es reducida, por lo que la resultante de las fuerzas de presión será diferente de cero condicionando a su vez la resistencia frontal.

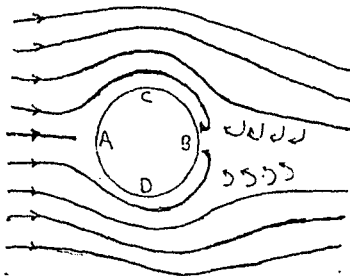


FIG.(7.13)

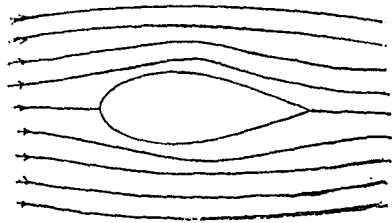


FIG.(7.14)

Así pues, la resistencia frontal se compone de la resistencia de rozamiento y de la resistencia de presión. Con las dimensiones transversales dadas del sólido, la resistencia de presión depende en alto grado de la

forma del sólido. Por esta causa, ésta también recibe el nombre de resistencia de la forma. Tienen la resistencia de presión mínima, los sólidos bien fuselados, en forma de gota fig (7.14); de forma semejante se tiende a dar al fuselaje y a las alas de aviones, a la carrocería de los automóviles etc.

La correlación entre la resistencia de rozamiento y la resistencia de presión se determina por el valor del número de Reynolds. En el caso dado,  $l$  es cierta dimensión característica del sólido (por ejemplo, el radio de un cuerpo esférico),  $V$  la velocidad del cuerpo respecto del líquido.

El científico inglés Reynolds estableció que el carácter de la corriente depende del valor de una magnitud adimensional.

$$Re = \frac{\rho V l}{\eta}$$

donde  $\rho$  es la densidad del líquido (o del gas),  $V$  la velocidad media del flujo (por la sección del tubo),  $\eta$  el coeficiente de viscosidad del líquido,  $l$  una dimensión característica para la sección transversal.

Con pequeños  $Re$ , desempeña el papel fundamental la resistencia de rozamiento, de forma que la resistencia de presión puede no tomarse en consideración. Al aumentar  $Re$  el papel de la resistencia de presión crece en mayor grado. Con grandes valores de  $Re$  en la resistencia frontal predominan las fuerzas de presión.

Al determinar el carácter de las fuerzas que actúan sobre el sólido en el flujo, el número de Reynolds también puede ser en este caso criterio de semejanza de los fenómenos. Esta circunstancia se utiliza durante la modelación; por ejemplo, el modelo de un avión se comportará en un flujo de gas de la misma manera que

su prototipo, si además de la semejanza geométrica entre modelo y avión, en ellos también se observa la igualdad de los números de Reynolds.

Fórmula de Stokes. Con pequeños  $Re$ , o sea con grandes velocidades de movimiento (y pequeñas  $l$ ) la resistencia del medio está sólo condicionada, prácticamente, por las fuerzas de rozamiento. Stokes estableció que la fuerza de resistencia es proporcional, en tal caso, al coeficiente de viscosidad dinámica  $\eta$ , a la velocidad  $V$  del movimiento del sólido respecto del líquido y a la dimensión característica  $l$  del sólido:  $F \sim \eta l V$  (se supone que la distancia desde el sólido hasta el límite del líquido, por ejemplo hasta las paredes del recipiente, es mucho mayor que las dimensiones del sólido). El coeficiente de proporcionalidad depende de la forma del cuerpo. Para una esfera, si se toma en calidad de  $l$  el radio  $r$ , el coeficiente de proporcionalidad será  $6\pi$ . Por consiguiente, la fuerza de resistencia al movimiento a pequeñas velocidades de la esfera en los líquidos, en correspondencia con la fórmula de Stokes, será igual a:

$$F = 6\pi\eta Vr$$

Fuerza de sustentación. Para el surgimiento de la fuerza de sustentación, la viscosidad del líquido no tiene gran importancia. En la figura (7.15) se muestran las líneas de corriente al ser rodeado un semicilindro por un líquido perfecto. A causa del rodeo completo, las líneas de corriente serán simétricas con relación a la recta CD. No obstante respecto de la recta AB, el cuadro será asimétrico. Las líneas de corriente se condensan junto al punto C, por lo que aquí la presión será menor que junto al punto D y surge la fuerza de sustentación P. De forma análoga surge dicha fuerza en un líquido viscoso.

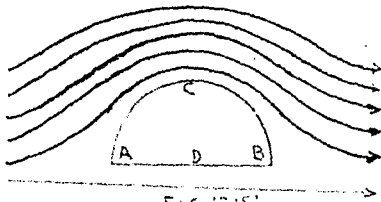


FIG. (7.15)

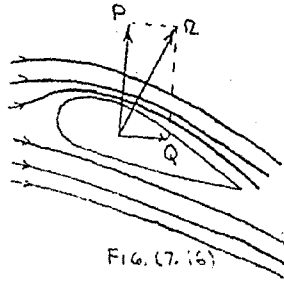


FIG. (7.16)

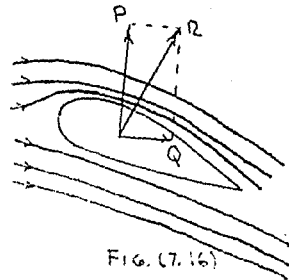
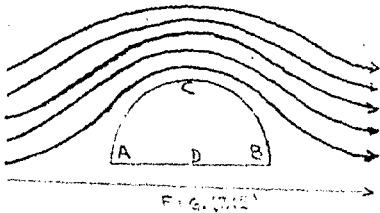
La fuerza que sustenta un avión en el aire es la fuerza de sustentación que actúa sobre sus alas. Durante el vuelo del avión la resistencia frontal desempeña un papel nocivo; por esta razón, las alas y el fuselaje del avión tienen forma fuselada. Al mismo tiempo, el perfil del ala debe asegurar una fuerza de sustentación de suficiente magnitud. El perfil óptimo del ala se muestra en la figura (7.16), el cual fue creado por el eminente científico ruso N. E. ZHUKOVSKII (1847-1921), los trabajos de ZHUKOVSKII y de su alumno S. A. CHAPLIGIN, fueron la base de la aerodinámica contemporánea.

### 7.2 Movimiento bidimensional. Movimiento en dos dimensiones.

El movimiento de un fluido se dice que es bidimensional, cuando la velocidad en cualquier punto es paralela a un plano fijo, y es la misma en cualquier punto a una normal arbitraria al plano.

En particular consideraremos el movimiento bidimensional de aire, pensando que es un fluido ideal no viscoso, cuya compresibilidad es despreciable; aire incompresible. Es útil frecuentemente formarse una idea geométrica del fenómeno, y suponer que el fluido se mueve entre dos planos paralelos al plano del movimiento,





La fuerza que sustenta un avión en el aire es la fuerza de sustentación que actúa sobre sus alas. Durante el vuelo del avión la resistencia frontal desempeña un papel nocivo; por esta razón, las alas y el fuselaje del avión tienen forma fuselada. Al mismo tiempo, el perfil del ala debe asegurar una fuerza de sustentación de suficiente magnitud. El perfil óptimo del ala se muestra en la figura (7.16), el cual fue creado por el eminente científico ruso N. E. ZHUKOVSKII (1847-1921), los trabajos de ZHUKOVSKII y de su alumno S. A. CHAPLIGIN, fueron la base de la aerodinámica contemporánea.

### 7.2 Movimiento bidimensional. Movimiento en dos dimensiones.

El movimiento de un fluido se dice que es bidimensional, cuando la velocidad en cualquier punto es paralela a un plano fijo, y es la misma en cualquier punto a una normal arbitraria al plano.

En particular consideraremos el movimiento bidimensional de aire, pensando que es un fluido ideal no viscoso, cuya compresibilidad es despreciable; aire incompresible. Es útil frecuentemente formarse una idea geométrica del fenómeno, y suponer que el fluido se mueve entre dos planos paralelos al plano del movimiento,

separados a una unidad de distancia, el fluido se supone, que corre libremente entre esos planos, sin encontrar resistencia de naturaleza friccional.

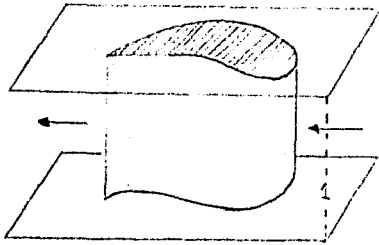


FIG.(7.21)

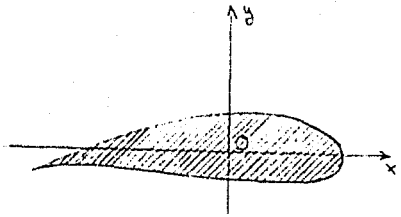


FIG.(7.22)

Esta idea corresponde, con el caso de un túnel de viento bidimensional. Aquí el perfil sobre el cual experimentamos es un cilindro que se estrecha desde una pared a la siguiente, figura (7.21); para completar el dibujo elegimos como plano representativo del movimiento, el plano paralelo que está entre los planos hipotéticos. Llamaremos a este plano, el plano  $xy$ , y la sección del ala cortada por este plano será el perfil, figura (7.22).

Podemos usar entonces el lenguaje de la geometría plana y hablar del flujo que circunda a la curva. En el uso de esta terminología el estado de hechos convencionalmente dibujados en la figura (7.22) deberá siempre poderse referir a él, como el de la figura (7.21).

7.3 Función de corriente. En el movimiento bidimensional de aire (recuerdese como un fluido incompresible).

Si  $A$  es un punto fijo en el plano del movimiento, y  $ABP$ ,  $ACP$  dos curvas también en el plano que unen el punto  $A$  con el  $P$  arbitrario. Supondremos que el aire no es creado o destruido dentro de la región  $R$  limitada por las curvas; entonces la condición de continuidad puede expresarse de la siguiente manera: La razón en la cual el aire fluye dentro de la región  $R$  de derecha a izquierda, a través de la curva  $ABP$  es igual a la razón en la cual este fluye hacia afuera de derecha a izquierda, a través de la curva  $ACP$ . Usaremos el término gasto, para denotar razón de flujo.

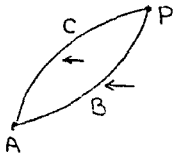


FIG. (7.31)

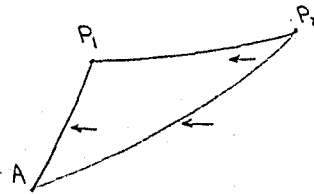


FIG. (7.32)

El término de derecha a izquierda es relativo a un observador, quien se desplaza a lo largo de la curva desde el punto fijo  $A$  en la dirección en la cual el arco  $s$  de la curva se mide desde  $A$  incrementándose.

Entonces el gasto de derecha a izquierda a través de  $ACP$ , es igual al gasto de derecha a izquierda a través de cualquier curva que una a  $A$  con  $P$ . Solamente el punto  $A$ , ha quedado fijo, el gasto por consiguiente depende únicamente de

la posición de  $P$  y el tiempo  $t$ . Si denotamos el gasto por  $\Psi$ , ésta será una función que depende de la posición de  $P$  y del tiempo. En coordenadas cartesianas, por ejemplo

$$\Psi = \Psi(x, y)$$

La función  $\Psi$  es llamada la función de corriente. La existencia de esta función es consecuencia inmediata de la continuidad del aire que es incompresible.

Si ahora tomamos dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ , y si  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  son los valores correspondientes de la función de corriente; entonces del mismo principio, el gasto a través de  $AP_2$  es igual al gasto a través de  $AP_1$  más el gasto a través de  $P_1P_2$ . Luego el gasto a través de  $P_1P_2$  de derecha a izquierda =  $\Psi_2 - \Psi_1$ , figura (7.32). Se sigue de esto que si tomamos un punto base diferente a  $A$ ; digamos, la función de corriente cambia con la magnitud del gasto de derecha a izquierda a través de  $AA'$ . Más aún, si  $P_1$  y  $P_2$  son puntos de la misma línea de corriente, el gasto de derecha a izquierda a través de  $P_1P_2$  es igual al gasto de derecha a izquierda a través de la parte de la línea de corriente entre  $P_1$  y  $P_2$ ; luego  $\Psi_1 - \Psi_2 = 0$ , por tanto: «La función de corriente es constante a lo largo de una línea de corriente».

Las ecuaciones de las líneas de corriente, se obtienen en consecuencia de  $\Psi = \text{cte.}$ , dando valores arbitrarios a la constante; cuando el movimiento es constante, el patrón de líneas de corriente es fijo. Cuando el movimiento no es constante, el patrón cambia de instante en instante. Las dimensiones de la función de corriente son  $L^2 T^{-1}$ .

7.4 La deducción de la velocidad, a partir de la función de corriente.

Si  $P_1 P_2 = \delta s$  es un arco infinitesimal de curva, puede muy bien ser considerada como una recta. La velocidad del fluido a través de este arco, puede ser descompuesta en componentes a lo largo y perpendiculares a  $\delta s$ ; la componente a lo largo de  $\delta s$ , contribuye poco al flujo transversal. La componente vertical en ángulo recto a  $\delta s =$  gasto transversal, dividido por  $\delta s = (\psi_2 - \psi_1) / \delta s$ , donde  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son los valores de las funciones de corriente en  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente, entonces la velocidad de derecha a izquierda a través de  $\delta s$  será en el límite  $\partial\psi / \partial s$ .

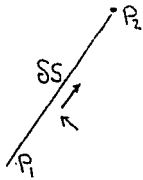


FIG.(7.41)

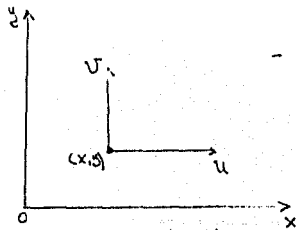


FIG.(7.42)

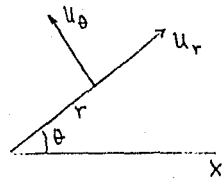


FIG.(7.43)

En coordenadas cartesianas, considerando incrementos infinitesimales  $\delta x$ ,  $\delta y$ , las componentes  $u, v$  de la velocidad paralelas a los ejes están dados por:

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

En coordenadas polares, obtenemos análogamente:

$$u_r = - \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \quad , \quad u_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

para las componentes radial y transversal, figura (7.43), ya que  $ds$  debe ser  $sr$  y  $r\delta\theta$  para los incrementos radial y transverso respectivamente.

### 7.5 La función de corriente para un viento uniforme.

Supongamos cualquier partícula de aire que se mueve con velocidad constante  $u$ , paralela al eje  $x$ .

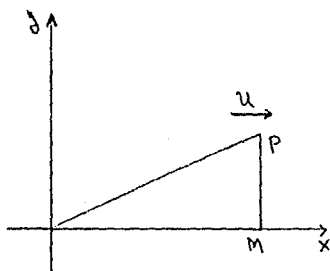


FIG. (7.51)

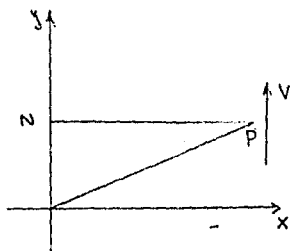


FIG. (7.52)

Si  $P$  es el punto  $(x, y)$ , el gasto de derecha a izquierda a través de  $OP$ , es el mismo que el gasto de derecha a izquierda a través de  $PM$ , donde  $PM$  es la perpendicular al eje  $x$ , entonces el gasto es  $-uy$ , y en consecuencia

$$\psi = -uy$$

es la función de corriente para este movimiento. En coordenadas polares,

$$\psi = -ur \sin \theta$$

análogamente, para un viento uniforme en la dirección  $\theta$  y de velocidad  $V$ , obtenemos:

$$\psi = vx = Vr \cos \theta$$

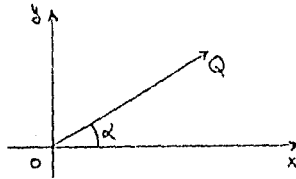
si superponemos los dos vientos, obtenemos un viento de rapidez  $\sqrt{u^2 + v^2}$  inclinada al eje  $x$ , en un

ángulo  $\alpha = \tan^{-1} v/u$ , y para este viento:

$$\Psi = -Uy + Vx_0$$

Escribiendo  $u = Q \cos \alpha$ ,  $v = Q \sin \alpha$ , obtenemos la función de corriente para un viento uniforme  $Q$ , que hace un ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$ , a saber

$$\Psi = Q(x \sin \alpha - y \cos \alpha)$$



o en coordenadas polares  $\Psi = -Qr \sin(\theta - \alpha)$  y en todos los casos las líneas de corriente son rectas, lo cual es completamente obvio. La línea de corriente que pasa por el origen corresponde a  $\Psi = 0$  y es en consecuencia la línea  $\theta = \alpha$

### 7.6 Cilindro circular.

Considere la siguiente función de corriente, la cual da el flujo de un viento uniforme que circunda a un cilindro circular, como fácilmente puede verificarse para  $\Psi = 0$  en el círculo  $r = a$ , el movimiento es irrotacional.

$$\Psi = V(r \sin \theta - \frac{a^2}{r} \sin \theta) = Vy \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) = \Psi_1 + \Psi_2$$

donde  $\Psi_1 = Vy$ ,  $\Psi_2 = -\frac{a^2 Vy}{x^2 + y^2}$ , tomando  $\Psi_1 = mVa$ ,

$\Psi_2 = -nVa$ , obtenemos:

$$y = ma, \quad x^2 + \left(y - \frac{a}{2a}\right)^2 = \frac{a^2}{4n^2}$$

esto es las líneas que corresponden a  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$ , son rectas paralelas al eje X y círculos que tocan al eje X en el origen.

Las líneas de corriente son simétricas con respecto al eje Y, puesto que cambiando el signo de  $n$ , no se altera la ecuación. Las líneas de corriente arriba del eje X, son la reflexión en este eje de las líneas de corriente abajo de éste, como resulta fácil de observar de la simetría; si la velocidad  $V$  se invierte, el patrón de líneas de corriente no se altera.

Escribiendo  $\Psi = KVa$ , la ecuación de las líneas de corriente es

$$Ka = y \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

esto es cuando  $r \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow Ka$  y por consiguiente  $y = Ka$  es la asíntota de la línea de corriente. También si  $K > 0$ , entonces  $y > Ka$  y en consecuencia la línea de corriente se aproxima a su asíntota desde arriba.

### 7.7 La línea de corriente frontera.

En el flujo que circunda cualquier cilindro, el contorno del cilindro debe formar parte de una línea de corriente, puesto que la función de corriente del cilindro circular (7.6) es:

$$\Psi = Uy \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

y puesto que sobre el cilindro tenemos  $r = a$ , se sigue que el contorno es parte de la línea de corriente  $\Psi = 0$ .

La línea de corriente completa  $\Psi = 0$  consta en consecuencia del círculo  $r = a$ , y de la parte  $y = 0$



externa al cilindro, véase figura (7.71).

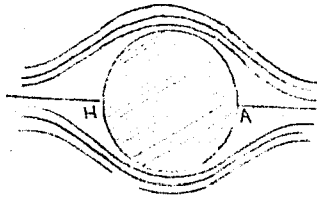


FIG.(7.71)

Entonces las corrientes avanzan hacia el cilindro a lo largo del eje  $x$ , hasta alcanzar el punto  $A$ , después se dividen y regresan en sentido opuesto rodeando el cilindro, llegando otra vez a  $H$  y moviéndose hacia afuera a lo largo del eje  $x$ . Esta línea de corriente que divide el contorno es llamada la línea de corriente frontera.

La línea frontera es importante, pues un conocimiento de su posición nos da una idea de como dibujar la forma general del patrón de flujo; para las líneas sucesivas, en principio cerca de ésta, y después alejándose influenciadas menos y menos por su forma.

### 7.8 Circulación.

Considere una curva cerrada  $C$ , sumergida totalmente en el fluido. Obsérvese que tal curva cerrada, o circuito, es un concepto puramente geométrico; ésta no es una barrera que interfiera con el flujo.

Si  $A$  es un punto fijo sobre la curva, y si  $P$  es cualquier otro punto de  $C$ . La posición de  $P$  está determinada si conocemos la longitud del arco  $AP$  en el sentido digamos contra-hora, en el cual este arco, es medido. La velocidad del fluido  $\bar{q}$

en P deberá hacer un ángulo  $\alpha$ , digamos, con la tangente en P, dibujado en el sentido en el cual s crece, entonces

$$q_s = q \cos \alpha$$

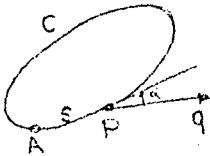


FIG. (7.81)

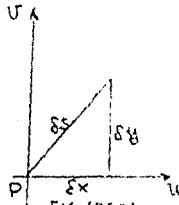


FIG. (7.82)

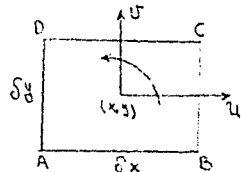


FIG. (7.82)

será la componente a lo largo de la tangente de la velocidad  $\vec{q}$ .

Observación: La circulación en el circuito cerrado C, es la integral de línea, de la componente tangencial de la velocidad tomada rodeando el circuito, en el sentido en el cual el arco s crece.

Entonces podemos escribir:

$$\text{circ}(C) = \int_{(C)} q \cos \alpha \, ds = \int_{(C)} q_s \, ds = \int_{(C)} \vec{q} \cdot d\vec{r} \dots \dots (7.81)$$

la última, es la forma vectorial de su enunciado.

Si la curva está en el plano xy, la componente tangencial de la velocidad es:

$$u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds}$$

y en este caso:

$$\text{circ}(C) = \int_{(C)} (u \, dx + v \, dy)$$

si en particular, tomamos para C un rectángulo infinitesimal ABCD, cuyo centro es el punto  $xy$ , y cuyos lados AB, BC son paralelos a los ejes y tienen longitudes  $\delta x$ ,  $\delta y$  respectivamente,

$$\text{Circ}(ABCD) = U_{AB} \cdot AB + V_{BC} \cdot BC - U_{CD} \cdot CD - V_{DA} \cdot AD,$$

donde  $U_{AB}$ , significa el valor promedio de  $U$  sobre AB, análogamente los demás, entonces

$$\text{Circ}(ABCD) = \delta x \delta y \left( \frac{V_{BC} - V_{DA}}{\delta x} - \frac{U_{CD} - U_{AB}}{\delta y} \right)$$

Ahora, el primer sumando, por el teorema de Taylor para dos variables:

$$V_{BC} = V + \frac{1}{2} \delta x \frac{\partial V}{\partial x}, \quad V_{DA} = V - \frac{1}{2} \delta x \frac{\partial V}{\partial x}$$

puesto que, en cualquier punto  $(x + \frac{1}{2} \delta x, y + \eta)$  de BC, la componente  $V$  es  $V + \frac{1}{2} \delta x \frac{\partial V}{\partial x} + \eta \frac{\partial V}{\partial y}$ , y el valor promedio del último término es cero, cuando  $\eta$  va de  $-\frac{1}{2} \delta y$  a  $\frac{1}{2} \delta y$ . Luego podemos escribir:

$$\text{Circ}(ABCD) = \delta x \delta y \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = ABCD \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \dots (7.82)$$

Así pues, la circulación en un rectángulo infinitesimal debe ser proporcional a su área.

Ahora cualquier circuito simple C en un plano, puede dividirse en líneas paralelas a los ejes, para formar rectángulos infinitesimales, y la circulación que rodea C, es claramente, la suma de las circulaciones en las mallas de la red así obtenida, la circulación en la frontera común entre dos mallas, se cancelarán, luego:

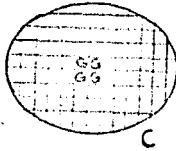


FIG. (7.84)

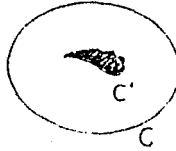


FIG. (7.85)

$$\text{circ}(C) = \iint \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{ó}$$

$$\int_{(C)} (u dx + v dy) = \iint \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \dots \dots \dots (7.83)$$

la integral de superficie se calcula sobre toda la región encerrada por C. Es oportuno observar, que la anterior demostración supone que el líquido está distribuido sobre toda la región interior del circuito C. Si por ejemplo, el circuito C debe encerrar un cilindro o un ala C', la demostración anterior, tiene que incluir la demostración de

$$\text{circ}(C) - \text{circ}(C') = \iint \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \dots \dots \dots (7.84)$$

la integral debe tomarse sobre la región entre C y C'.

También observese que si P y Q son dos funciones continuas y diferenciables de x e y, sobre la región encerrada por C, un argumento análogo muestra que:

$$\int_{(C)} (P dx + Q dy) = \iint \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \dots \dots \dots (7.85)$$

y cambiando  $-Q$  por  $P$  y  $P$  por  $Q$  nos queda que:

$$\int_{(c)} (Pdy - Qdx) = \iint (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}) dx dy \dots \dots \dots (7.86)$$

estos resultados constituyen la forma bidimensional del teorema de Stokes.

### 7.9 Vorticidad.

Hemos visto en la sección anterior, que la circulación en un circuito plano infinitesimal es proporcional al área del circuito.

Observación: En un movimiento bidimensional, el vector en un punto  $P$  que es perpendicular al plano del movimiento, y cuya magnitud es igual al límite de la razón de su circulación en un circuito infinitesimal que encierra  $P$ , al área del circuito, es llamada la vorticidad en  $P$ .

Si denotamos la magnitud de la vorticidad por  $w$ , vemos que de la ecuación (7.82) que:

$$w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

en tanto que la vorticidad es el vector  $w\bar{k}$ , donde  $\bar{k}$  es un vector unitario perpendicular al plano. En el caso general de un movimiento tridimensional, la vorticidad, es el vector cuyas componentes,  $(\xi, \eta, \zeta)$  paralelas a los ejes  $x, y, z$ , están dadas por:

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

en el caso bidimensional  $w=0$  y  $u$  y  $v$  son por definición independientes de  $z$ , luego:

$$\xi = 0 \quad , \quad \eta = 0 \quad , \quad \zeta = w$$

### 7.10 Movimiento de un elemento de fluido.

Considere una gota circular de fluido de radio infinitesimal, cuyo centro está en el punto  $(x, y)$  y tiene la velocidad  $(u, v)$ . Si  $(u', v')$  es la velocidad de cualquier punto  $P$  de la gota, cuyas coordenadas son  $(x+x', y+y')$ ; puesto que  $x', y'$  son infinitesimales, el teorema de Taylor nos da:

$$u' = u + x' \frac{\partial u}{\partial x} + y' \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$v' = v + x' \frac{\partial v}{\partial x} + y' \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\text{si } \chi = -\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} x'^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) x' y' - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) y'^2$$

la vorticidad en el centro de la gota es de magnitud

$$\omega = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}$$

puede fácilmente verificarse que:

$$u' = u - \frac{\partial \chi}{\partial x'} - \frac{1}{2} y' \omega \quad , \quad v' = v - \frac{d\chi}{dy'} + \frac{1}{2} x' \omega$$

Esto muestra que la gota se mueve como un cuerpo rígido, con velocidad de translación de su centro  $(u, v)$ , y velocidad angular de rotación  $\frac{1}{2}\omega$  alrededor de un eje perpendicular a su plano, y que sobre este movimiento, se superpone una velocidad de deformación en el que el punto  $(x', y')$  se mueve relativamente al centro, con una velocidad cuyas componentes son  $-\partial\chi/\partial x'$ ,  $-\partial\chi/\partial y'$ .

El resultado anterior, es conocido como el primer teorema Helmholtz; este es válido igualmente para movimientos tridimensionales de una gota esférica y el análisis es análogo.

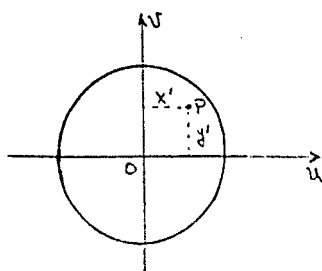


FIG. (7.101)

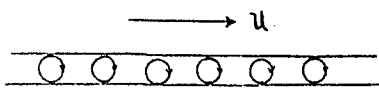


FIG. (7.102)

Es precisamente esta velocidad de deformación la que es característica de la "fluidéz" del medio; si la gota fuese repentinamente congelada sería un sólido sin cambio en el momento angular, y así empezaría a girar con velocidad angular  $\frac{1}{2}\omega$ . También puede observarse que si la vorticidad es cero, la gota congelada se moverá con velocidad de translación únicamente. En un fluido ideal, la presión real en la frontera de una gota circular es normal a la frontera y en consecuencia pasa por el centro; esta presión no puede incrementar ni disminuir el momento angular de la gota.

Observación: el movimiento en el que la vorticidad no es cero, es llamado rotacional.

En un fluido ideal, el movimiento rotacional persiste porque su caracter rotacional no se altera por la presión; en consecuencia el fluido que inicia su movimiento rotacional continuará éste felizmente en su camino.

En la figura (7.102) se muestra la vorticidad entre dos planos paralelos a la dirección de  $u$ .

### 7.11 Movimiento Irrotacional.

Un movimiento en el que la vorticidad es cero,

se llama irrotacional. En un fluido no viscoso el movimiento irrotacional es permanente, en el sentido de que el fluido, que en cualquier instante no tiene vorticidad, no puede nunca adquirirla; ni tampoco puede tener menor vorticidad en un tiempo previo. Puesto que un fluido en reposo no tiene vorticidad, de aquí se sigue que un fluido no viscoso puesto en movimiento desde el reposo se moverá irrotacionalmente. Lo mismo es válido para el movimiento inicial de viscosidad pequeña, tal como aire o agua; entonces por ejemplo, en el caso de una línea de corriente que circunda un cilindro circular; una fotografía muestra que los estados iniciales del movimiento, conforman el patrón de flujo de un fluido no viscoso.

La razón para este hecho, es que por la teoría de las capas límites, el único fluido que sufre efecto apreciable por la viscosidad, es aquel que pasa cerca del borde del cilindro; y cuando el coeficiente de viscosidad es pequeño correspondientemente un gran volumen de fluido deberá pasar por el borde antes de que un efecto visible pueda observarse.

### 7.12 Potencial de Velocidad.

Refiriéndonos a la figura (7.31) si suponemos que ABP, ACP son dos curvas que unen a A con P, estas curvas y la región entre ellas, fluye un fluido en el que la vorticidad es en todas partes cero, es decir:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

de acuerdo con (7.83), se sigue que  $\text{cir}(ABPCA) = 0$ ,



y en consecuencia:

$$\int_{(ABP)} \mathcal{V}_s ds = \int_{(ACP)} \mathcal{V}_s ds$$

es decir, la integral de línea de A a P, es independiente de la trayectoria particular que se tome de A a P; esto es, si A es un punto fijo, el valor de la integral depende de P solamente. Si escribimos:

$$\phi = \phi_P = - \int_{(AP)} \mathcal{V}_s ds$$

la función  $\phi$  es llamada potencial de velocidad. Si deseamos enfatizar el punto particular P en el cual el potencial de velocidad va a ser evaluado, usaremos la notación  $\phi_P$  en lugar de  $\phi$ . Así mismo, sobre la función de corriente, el potencial de velocidad es en general una función de  $(x, y, t)$ . Cuando el movimiento es constante el potencial de velocidad es una función de  $(x, y)$  únicamente.

Si  $P_1$  y  $P_2$  son puntos adyacentes figura (7.41), tenemos:

$$\phi_{P_2} - \phi_{P_1} = - \int_{(P_1 P_2)} \mathcal{V}_s ds = -P_1 P_2 \mathcal{V}_s \text{ (aproximadamente)}$$

entonces, la componente de la velocidad en la dirección  $P_1 P_2$  es:

$$\mathcal{V}_s = - \lim_{P_2 \rightarrow P_1} \frac{\phi_{P_2} - \phi_{P_1}}{P_2 P_1} = - \frac{\partial \phi}{\partial s}$$

el signo negativo, no tiene un significado esencial, es una adopción convencional, aquí significa que el fluido se mueve en la dirección en la cual el po-

tencial de velocidad decrece, y además con la convención adoptada para la deducción de otras cantidades desde funciones de potencial en física y matemáticas.

Con referencia a las figuras (7.42) y (7.43), tenemos en coordenadas cartesianas:

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad , \quad v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \dots\dots\dots(7.121)$$

y en coordenadas polares:

$$u_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \quad , \quad u_\theta = -\frac{\partial\phi}{r\partial\theta} \quad \dots\dots\dots(7.122)$$

es importante observar que, siempre que el movimiento sea irrotacional un potencial de velocidad existe, sea el fluido compresible o no. Por otro lado, la función de corriente existe únicamente cuando la compresibilidad es despreciable, y no corresponde al caso cuando el movimiento es rotacional o irrotacional.

En el caso de un movimiento irrotacional de un fluido incompresible, tanto  $\phi$  como  $\psi$  existen, y si igualamos los valores de las componentes de la velocidad  $(u, v)$  deducidas de ellas, obtenemos las relaciones:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \dots\dots\dots(7.123)$$

El potencial de velocidad cuando es univaluado, tiene una interpretación física interesante. Supongamos la existencia de un movimiento irrotacional de un fluido incompresible, que es generado instantáneamente desde el reposo, mediante la aplicación de una presión impulsiva  $\bar{w}$ , entonces la ley de la

dinámica del impulso, aplicado a un pequeño volumen  $d\tau$  nos da:

$$-\frac{\partial \bar{w}}{\partial s} d\tau = \beta d\tau \phi_s$$

el miembro de la izquierda da la presión resultante real impulsiva en la dirección de  $ds$ ; y el miembro de la derecha da el momento generado. Luego:

$$\phi_s = -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\bar{w}}{\beta} \right)$$

esto es, el potencial de velocidad es  $\bar{w}/\beta$ . Entonces  $\beta\phi$  es la presión impulsiva requerida, para generar el movimiento instantáneo desde el reposo. Inversamente, un movimiento generado desde el reposo por una presión impulsiva exclusivamente es por necesidad irrotacional; el potencial de velocidad es  $\bar{w}/\beta$ . La irrotacionalidad es la característica de cualquier movimiento que se inicia desde el reposo, como por ejemplo cuando un aeroplano inicia su vuelo en el aire; el argumento es válido aún para fluidos viscosos cuando se observa el movimiento inicial; pero un vórtice puede formar una lámina aun en el aire, debido a la generación de corrientes de aire, que previamente fueron separados y las cuales se mueven con diferentes velocidades. La presencia aun de mínima viscosidad puede causar que las láminas se enrollen y formen vórtices concentrados.

### 7.13 La ecuación de Laplace.

En el caso de un movimiento irrotacional, se sigue de (7.123) que:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

y consecuentemente:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

ésta es la conocida ecuación de Laplace (en su forma bidimensional), podemos demostrar análogamente que  $\Psi$  también satisface dicha ecuación. En tres dimensiones, la ecuación es  $\nabla^2 \phi = 0$  es decir:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

### 7.14 Movimiento Cíclico.

La existencia de un potencial de velocidad no es incompatible con la coexistencia de la circulación. Observando la figura (7.85), si el aire entre el circuito C y el ala C' se debe a la vorticidad, entonces hay un potencial de velocidad  $\phi$ , y:

$$\text{circ}(C) = \int_{(C)} -\frac{\partial \phi}{\partial s} ds = [-\phi]_{C'}$$

donde la notación significa el cambio en  $-\phi$ , es decir, el decremento en  $\phi$ , cuando rodeamos una vez el circuito C. Por otro lado, de (7.84), vemos que:

$$\text{circ}(C) = \text{circ}(C')$$

esto es,  $\phi$  decrece en la misma proporción cuando rodeamos sobre cualquier circuito que encierre al ala una vez. En este caso  $\phi$  es una función multivaluada. Por ejemplo, supongamos que:

$$\phi = -\kappa \tan^{-1} \frac{y}{x} = -\kappa \theta$$

entonces:

$$u = -\frac{Ky}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{Kx}{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

mas si rodeamos sobre el circuito C, que encierre el origen una vez,  $\theta$  se incrementa en  $2\pi$  y  $\phi$  decrece en  $2\pi K$ ; esto es, hay una circulación de esta cantidad en el circuito.

### 7.15 El Potencial Complejo.

Si  $\phi$  y  $\psi$  son el potencial de velocidad y la función de corriente, de una corriente de aire bidimensional considerado incompresible; igualando las componentes de la velocidad, tenemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \dots\dots\dots(7.151)$$

definimos el potencial complejo del movimiento mediante la relación:

$$w(z) = w = \phi + i\psi$$

como veremos posteriormente,  $w$  es una función holomorfa de la variable compleja  $z = x + iy$ , en cualquier región, donde  $\phi$  y  $\psi$  son univaluadas. Inversamente, si suponemos que  $w$  es una función holomorfa de  $z$ , las partes correspondientes real e imaginaria, dan el potencial de velocidad y la función de corriente de un movimiento bidimensional irrotacional, porque éstas satisfacen (7.151) y la ecuación de Laplace; si por ejemplo  $w = z^2$ , entonces  $\phi = x^2 - y^2$  y  $\psi = 2xy$ . Puesto que  $iw$  es también una función de  $z$ , luego  $-\psi$  y  $\phi$  son el potencial de velocidad y la función de corriente de otro movimiento, en el que las líneas de corriente de igual potencial de velocidad son intercambiadas.

Las dimensiones del potencial complejo son las de la velocidad multiplicados por una longitud; es decir,  $L^2 T^{-1}$ .

Ilustraremos lo anterior con los ejemplos siguientes:

Problema 7.151  $w = ve^{i\alpha} z$ .

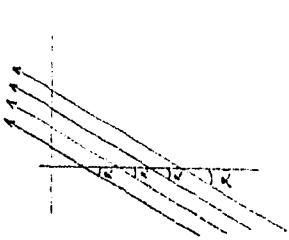


FIG.(7.151)

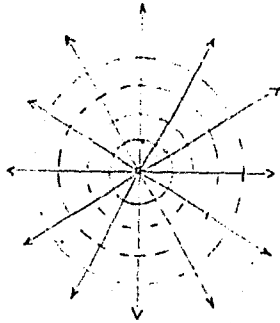


FIG.(7.152)

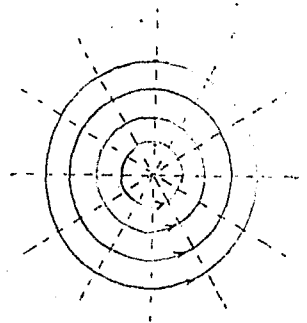


FIG.(7.153)

Aquí  $\Psi = V(y \cos \alpha + x \sin \alpha)$  y las líneas de corriente son en consecuencia rectas. Tenemos un viento uniforme  $V$ , que incide bajo un ángulo  $\alpha$  con el eje  $X$ .

Problema 7.152  $w = -m \log z$ ,  $\phi = -m \log r$ ,  $\Psi = -m\theta$   
Las líneas de corriente son rectas y salen radialmente del origen. Este movimiento es debido a un manantial simple, o punto donde el fluido emerge radialmente hacia afuera; en el origen tal movimiento es el resultado que se obtiene de un cilindro que se expande uniformemente en aire tranquilo. Análogamente  $w = m \log z$  es el potencial complejo para un sumidero o punto donde el fluido se sumerge radialmente.

Problema 7.153  $w = ik \log z$ ,  $\phi = -k\theta$ ,  $\Psi = k \log r$   
Las líneas de corriente son círculos concéntricos con centro en el origen. Este movimiento es debido a un vórtice rectilíneo en el origen.

Problema 7.154.  $w = \frac{\mu}{z}$  ,  $\psi = -\frac{\mu y}{x^2+y^2}$

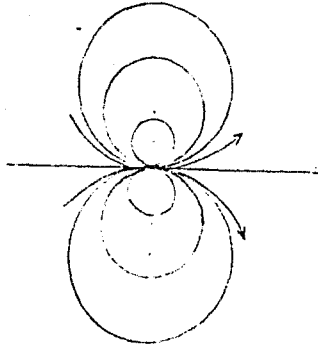


FIG.(7.154)

Las líneas de corriente son círculos que tocan al eje  $x$ , el movimiento es debido a un doblete en el origen dirigido a lo largo del eje  $x$ ; tal doblete surge como caso límite de la superposición de un manantial idéntico a un sumidero.

7.16 Velocidad Compleja.

Del potencial complejo  $w = \phi + i\psi$  obtenemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

consecuentemente  $u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$  ,  $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$

$$u - iv = -\frac{\partial w}{\partial z} \dots \dots \dots (7.161)$$

llamaremos a  $u - iv$  la Velocidad Compleja y notamos que ésta se obtiene directamente del potencial complejo como se mostró en (7.161). Gráficamente el vector que representa la velocidad compleja es la

reflexión, en la línea que pasa por el punto considerado paralelo al eje  $x$ , del vector que representa la velocidad  $u + iV$ .

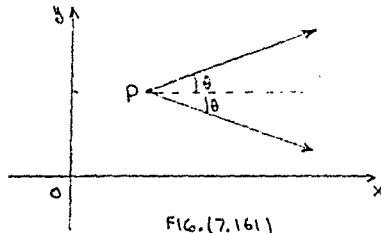


FIG.(7.161)

La relación se muestra en la figura (7.161). Es muy importante observar que  $-\partial w / \partial \bar{z}$  da  $u - iV$  y no  $u + iV$ ; entonces si por ejemplo  $w = iz^2$ , tenemos  $u - iV = -2iz$ ,  $u + iV = 2i\bar{z}$ , en ambos llegamos a  $u = 2y$ ,  $V = 2x$ .

En un punto de estancamiento la velocidad es cero; esto es,  $u = 0$ ,  $V = 0$ , luego los puntos de estancamiento se dan por  $\partial w / \partial \bar{z} = 0$ ; si por ejemplo:

$$w = Vz + \frac{V_0 a^2}{z} \dots \dots \dots (7.162)$$

los puntos de estancamiento se dan por  $1 - a^2/z^2 = 0$ ; es decir,  $z = a$  y  $z = -a$ . Ahora, (7.162) es el potencial complejo de un cilindro circular en un viento uniforme (véase figura (7.71)). Los puntos de estancamiento son en consecuencia, aquellos donde el viento choca directamente con el cilindro y el punto diametralmente opuesto.

Para calcular la rapidez del aire  $q$  en cualquier punto tenemos:

$$q = \sqrt{(u^2 + V^2)} = \left| \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right| \dots \dots \dots (7.163)$$



un método alterno es el siguiente:

$$q^2 = u^2 + v^2 = (u - iv)(u + iv) = \frac{\partial w(z)}{\partial z} \times \frac{\partial w(\bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \dots\dots(7.164)$$

como un ejemplo tomemos (7.162)

$$q^2 = \left(v - \frac{va^2}{z^2}\right) \left(v - \frac{va^2}{\bar{z}^2}\right) = v^2 \left(1 - \frac{a^2 e^{-2i\theta}}{r^2}\right) \left(1 - \frac{a^2 e^{2i\theta}}{r^2}\right) \\ = v^2 \left(1 - \frac{2a^2 \cos 2\theta}{r^2} + \frac{a^4}{r^4}\right)$$

7.17 Una aplicación del mapeo conforme.

Considere una aplicación del plano  $z$  en el plano  $w$  dada por:

$$w = f(z) \dots\dots\dots(7.171)$$

tal que la región  $R$  exterior a  $C$  en el plano  $z$  se mapea en la región  $S$  exterior a  $A$  en el plano  $w$ . Entonces el contorno  $C$  se mapea en el contorno  $A$ .

Si un fluido en movimiento en la región  $R$  del plano  $z$  está dado por el potencial complejo:

$$w(z) = w = \phi + i\psi \dots\dots\dots(7.172)$$

entonces en los puntos correspondientes  $z$  y  $w$  dados por (7.171);  $w$  y en consecuencia  $\phi$  y  $\psi$  toman los mismos valores. Ahora si  $C$  es un borde, también una línea de corriente; luego  $\psi = K$  una constante en todos los puntos de  $C$ , puesto que  $A$  corresponde punto por punto con  $C$ ,  $\psi = K$  en todos los puntos  $A$ ; luego  $A$  es una línea de corriente del movimiento dado por (7.171) y (7.172) conjuntamente en el plano  $w$ .

La forma del potencial complejo en términos de  $w$ , deberá obtenerse eliminando  $z$  entre (7.171) y (7.172); mas es preferible observar a  $z$  como un parámetro y trazar la eliminación; entonces para encontrar la velocidad en  $Q$  en el plano  $w$ , correspondiente a  $P$  en el plano  $z$ , tenemos:

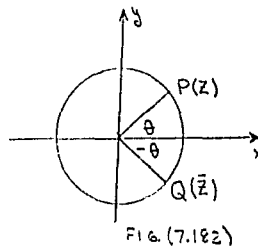
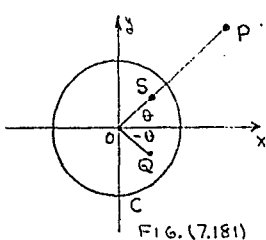
$$\frac{dw}{dz} = \frac{dv}{dw} \times \frac{dw}{dz}$$

y por tanto:

$$u_Q - iV_Q = (u_P - iV_P) / f'(z)$$

Ahora, vamos a considerar las propiedades de una corriente de aire bidimensional, que circunda a un cilindro circular; se considerará que el aire es no viscoso e incompresible; también que un cilindro circular es de forma adecuada para un ala, mas es fácil transformar un círculo en un perfil de ala, con el mapeo conforme y del flujo que circunda a un cilindro, puede deducirse el correspondiente flujo que pasa por una ala. Por esta razón, una cuidadosa consideración del perfil circular es un útil requisito.

### 7.18 Los puntos $z$ y $a^2/z$ .



Si  $C$  es un círculo  $|z|=a$ , en el plano  $z$ ; si  $P$  es el punto  $z=re^{i\theta}$ , entonces si  $Q$  es el punto  $a^2/z$ , tenemos:

$$\frac{a^2}{z} = \frac{a^2}{re^{i\theta}} = \frac{a^2}{r} e^{-i\theta}$$

si marcamos el punto  $S$ , sobre  $OP$ , entre  $O$  y  $P$  de tal forma que  $OS = OQ = a^2/r$ , vemos que:

$$OS \cdot OP = a^2 \dots \dots \dots (7.181)$$

esto es,  $S$  y  $P$  son puntos inversos con respecto al círculo  $C$ , y el punto  $Q$  es la reflexión óptica de  $S$  en el eje  $x$ , pensándolo como un espejo. Es claro de (7.181) que si  $P$  está fuera del círculo ( $OP > a$ ), entonces  $S$  y en consecuencia  $Q$  estarán dentro del círculo; no obstante, si  $P$  está en la circunferencia del círculo,  $S$  coincide con  $P$ , y  $Q$  también está sobre la circunferencia; esto es, si  $z$  está sobre la circunferencia:

$$\bar{z} = \frac{a^2}{z} \dots \dots \dots (7.182)$$

Si  $f(z)$  es una función de  $z$ , la cual es holomorfa en todo el plano excepto en ciertos puntos singulares aislados, todos ellos están a una distancia mayor que  $a$  desde el origen; podemos ahora formar la función  $\bar{f}(z)$  asociada, para ello considere la pareja de funciones

$$f(z) \quad , \quad \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right)$$

en la que la segunda se ha obtenido de  $\bar{f}(z)$  sus-

tituyendo  $a^2/z$  en lugar de  $z$ . Si el punto  $z$  está fuera del círculo  $C$ , el punto  $a^2/z$  estará dentro de  $C$ , de aquí que todos los puntos singulares de  $\bar{f}(a^2/z)$  están dentro de  $C$ , puesto que por hipótesis todos los de  $f(z)$  están fuera de  $C$ ; también si  $z$  está en  $C$ , esto es  $\bar{z} = a^2/z$ , luego la función

$$f(z) + \bar{f}(a^2/z)$$

es tal que todas las singularidades que están fuera del círculo  $C$  son las mismas de  $f(z)$ , en tanto que  $z$  este sobre el círculo el valor de la función será:

$$f(z) + \bar{f}(\bar{z})$$

la cual como es la suma de dos números conjugados tiene su parte imaginaria igual a cero.

### 7.19 El Teorema del Círculo.

Ahora probaremos un teorema que será de vital importancia en lo sucesivo.

Teorema del Círculo: Sea un flujo laminar irrotacional de un fluido incompresible no viscoso en el plano  $z$ , si no hay bordes rígidos y si el potencial complejo del flujo es  $f(z)$ , donde las singularidades de  $f(z)$  están dadas a una distancia mayor que  $a$  desde el origen. Si un cilindro circular de sección transversal (el círculo  $|z|=a$ ), se introduce en el campo de flujo el potencial complejo es:

$$w = f(z) + \bar{f}(a^2/z) \dots \dots \dots (7.191)$$

Demostración: puesto que no hay bordes rígidos, el flujo dado por  $f(z)$  está definido en cualquier punto del plano  $z$ , excepto posiblemente en las singularidades de  $f(z)$ , las cuales surgen de vórtices,

manantiales, dobletes, corrientes, etc. a los cuales se debe el flujo.

Antes de introducir el cilindro,  $C$  debe ser una línea de corriente  $\Psi = \text{cte.}$ , y sin pérdida de generalidad podemos suponer que ésta es la línea de corriente  $\Psi = 0$ . Vemos que las singularidades de  $w$  en la región externa a  $C$  son las mismas que las de  $f(z)$ , así pues no se introducen nuevas singularidades en esta región. En particular puesto que por hipótesis  $f(z)$  no tiene singularidad en  $z=0$ ,  $\bar{f}(a^2/z)$  no tiene singularidad en el infinito. Ahora  $w$  es puramente real en el cilindro, porque ahí  $w = f(z) + \bar{f}(\bar{z})$  y en consecuencia  $\Psi = 0$  en  $C$ , entonces  $C$  es una línea de corriente y todas las condiciones se satisfacen.

#### Aplicaciones:

(a) Un viento uniforme en la dirección negativa del eje  $X$ . Aquí  $f(z) = Vz$ , cuando el cilindro es insertado  $w = Vz + Va^2/z$

(b) Un viento uniforme incidiendo bajo un ángulo  $\alpha$  con el eje  $X$ .  $f(z) = Ve^{i\alpha}z$  y en consecuencia  $w = e^{i\alpha}z + Va^2e^{-i\alpha}/z$ .

(c) El cilindro es introducido en el mismo viento uniforme (b) pero el centro del cilindro es el punto  $z = z_0$ , entonces:

$$w = Ve^{i\alpha}(z - z_0) + \frac{a^2Ve^{-i\alpha}}{z - z_0} = Ve^{i\alpha}z + \frac{a^2Ve^{-i\alpha}}{z - z_0} + \text{cte.}$$

y la constante puede ser omitida, puesto que ésta no contribuye sustancialmente a la velocidad  $-dw/dz$ .

(d) Un vórtice de intensidad  $K$  en el punto  $z_0$ . El centro del cilindro está en el origen. Aquí  $f(z) = iK \log(z - z_0)$  y en consecuencia si  $|z_0| > a$ , entonces:

$$w = i\kappa \log(z - z_0) - i\kappa \log(a^2/z - \bar{z}_0),$$

luego:  $w = i\kappa \log z - i\kappa \log(z - z_0) - i\kappa \log(z - a^2/\bar{z}_0) + \text{cte.}$   
 el punto  $a^2/\bar{z}_0$  es el inverso de  $z_0$  con respecto al círculo.

(e) Un par de vórtices  $\kappa$  en  $z_0$ ,  $-\kappa$  en  $z'_0$ , ambos fuera del cilindro cuyo centro es el origen.

Usando (d)

$$w = i\kappa \log(z - z_0) - i\kappa \log(z - z'_0) - i\kappa \log(z - \frac{a^2}{\bar{z}_0}) + i\kappa \log(z - \frac{a^2}{\bar{z}'_0})$$

(f) Par de vórtices en el interior del cilindro. La solución es la misma que en (e); en efecto si  $z_0, z'_0$  están en el interior del cilindro  $a^2/\bar{z}'_0, a^2/\bar{z}_0$  están fuera y el cilindro es una línea de corriente.

### 7.20 Circulación que circunda a un cilindro circular.

El potencial complejo de un vórtice de intensidad  $\kappa$  en el origen es:

$$w = i\kappa \log z = i\kappa \log r - \kappa \theta$$

entonces  $\phi = -\kappa \theta$ ,  $\Psi = \kappa \log r$

Se sigue que las líneas de corriente  $\Psi = \text{cte.}$  son los círculos  $r = \text{cte.}$ , cualquiera de esos círculos, digamos  $a = r$  puede ser tomado como un borde rígido. Ahora, tomamos un circuito que rodee el círculo una vez, si rodeamos este circuito  $\theta$  se incrementa en  $2\pi$  y  $\theta$  decrece en  $2\pi\kappa$ ; lo cual significa que hay una circulación  $2\pi\kappa$  en cualquier circuito que encierre al círculo, entonces  $w$  es el potencial complejo de un movimiento irrotacional circular que circunda al cilindro de radio  $a$ .

7.21 Un cilindro circular en un viento con circulación.

Considere un viento uniforme cuyo potencial complejo es  $Vz$ ; si insertamos el cilindro circular tipificado por el círculo  $|z|=a$ , el potencial complejo será:

$$Vz + V \frac{a^2}{z}$$

para incluir la circulación  $2\pi k$ , agregamos el término  $i k \log z$ , el cual nos da finalmente:

$$w = Vz + V \frac{a^2}{z} + i k \log z \dots \dots \dots (7.211)$$

Es fácil verificar que el círculo es aún una línea de corriente, pues tomando  $z = ae^{i\theta}$ , obtenemos:

$$\psi = k \log a$$

que es una constante.

Para encontrar los puntos de estancamiento, igualamos  $dw/dz$  a cero, para dar:

$$V - \frac{Va^2}{z^2} + \frac{ik}{z} = 0$$

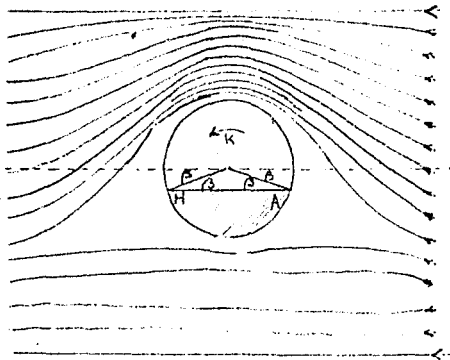


FIG.(7.211)

resolviendo esta ecuación para  $z$ , obtenemos:

$$z = a \left[ -i \frac{k}{2aV} \pm \sqrt{1 - \frac{k^2}{4a^2V^2}} \right]$$

Hay tres casos que se deben considerar

$$k < 2aV, \quad k = 2aV, \quad k > 2aV$$

el único caso de interés aerodinámico es el primero, tomando

$$\frac{k}{2aV} = \text{sen } \beta \dots \dots \dots (7.212)$$

obtenemos para los puntos de estancamiento:

$$z = a(\pm \cos \beta - i \text{sen } \beta) = a e^{-i\beta} - a e^{i\beta}$$

entonces los puntos de estancamiento, están sobre el cilindro y sobre una recta paralela a la corriente de aire no turbada (en este caso paralelo al eje  $x$ ). La figura (7.211) muestra los puntos de estancamiento  $A$  y  $H$ , la interpretación del ángulo  $\beta$  y la disposición de las líneas de corriente. El efecto general de la circulación es incrementar la velocidad del aire en los puntos del arco mayor  $AH$  y disminuir la velocidad en los puntos del arco menor  $AH$ ; luego por el teorema de Bernoulli, la presión arriba disminuye y la presión abajo crece; esto es, habrá una fuerza resultante sobre el cilindro perpendicular al viento, en otras palabras un levantamiento.

De (7.211) obtenemos la función de corriente

$$\Psi = Vy \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + k \log r \dots \dots \dots (7.213)$$



la cual no se altera cuando  $-x$  se sustituye por  $x$ , y por tanto las líneas de corriente son simétricas con respecto al eje  $y$ ; esto es, no habrá resultante en la dirección del viento.

Debe observarse que (7.212) da la circulación, la cual forma un punto de estancamiento sobre el cilindro; también se muestra que cuando no hay circulación los puntos de estancamiento están en los extremos de un diámetro y (7.213) muestra que en este caso las líneas de corriente son también simétricas, figura (7.21). Alrededor del eje  $x$  dicho levantamiento desaparece.

Si tomamos el centro del cilindro en el punto  $z=s$ , y el viento incidiendo bajo un ángulo  $\alpha$ , el potencial complejo (7.211) es sustituido por:

$$w = vze^{i\alpha} + \frac{Va^2 e^{-i\alpha}}{z-s} + 2aiV \operatorname{sen} \beta \log(z-s) \dots (7.214)$$

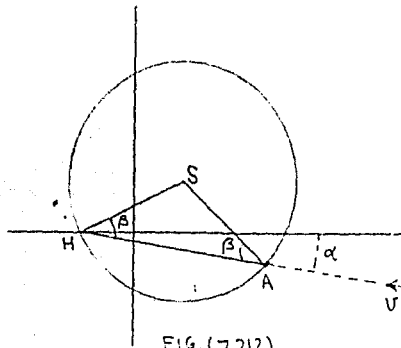


FIG. (7.212)

En la figura (7.212) el punto de estancamiento H posterior se muestra sobre el eje real. Esta es la disposición usual, pero esto no afecta la forma de (7.214); de hecho el patrón de flujo es indepen-

diente de la elección de los ejes.

7.22 Dado un punto de estancamiento

Para encontrar la circulación que hará un punto  $z_0$ , dado un punto de estancamiento del cilindro circular.

Usaremos el teorema del círculo; si  $f(z)$  es el potencial complejo, antes de que el cilindro  $|z|=a$  sea insertado, después de que el cilindro es insertado con circulación  $2\pi k$ , tenemos:

$$w = f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right) + i k \log z$$

y puesto que  $z_0$  es un punto de estancamiento  $\frac{dw}{dz} = 0$  cuando  $z = z_0$ , luego:

$$f'(z_0) - \frac{a^2}{z_0^2} \bar{f}'\left(\frac{a^2}{z_0}\right) + \frac{i k}{z_0} = 0$$

Ahora, puesto que  $z_0$  está sobre el cilindro  $\frac{a^2}{z_0} = \bar{z}_0$  luego:

$$k = i z_0 f'(z_0) - i \bar{z}_0 \bar{f}'(\bar{z}_0) = \text{Re}(-2i z_0 (u_0 - i v_0))$$

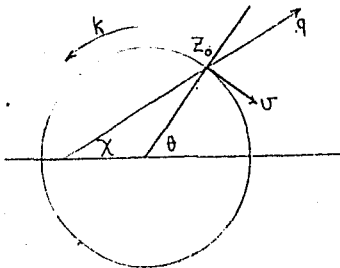


FIG. (7.221)

donde  $u_0 - i v_0 = -f'(z_0)$  es la velocidad compleja en  $z_0$  en el flujo tranquilo; es decir, cuando el cilindro y la circulación están ausentes.

Si  $z_0 = a e^{i\theta}$ ,  $u_0 - i v_0 = \varphi e^{i\alpha}$ , entonces:

$$K = \operatorname{Re}(2i a \varphi e^{i(\theta-\alpha)}) = 2a\varphi \operatorname{sen}(\theta-\alpha) = 2a v$$

donde  $v = \varphi \operatorname{sen}(\theta-\alpha)$  es la componente en  $z_0$  de la corriente tranquila a lo largo de la tangente al círculo. Observe que  $K$  y  $v$  están en sentido opuesto.

### 7.23 La presión sobre el cilindro.

En puntos sobre el cilindro (7.211)

$$\frac{dw}{dz} = v(1 - e^{2i\theta}) + \frac{iK}{a} e^{-i\theta} = e^{-i\theta} \left[ 2i v \operatorname{sen} \theta + \frac{iK}{a} \right]$$

$$\text{luego: } \varphi^2 = \left( 2v \operatorname{sen} \theta + \frac{K}{a} \right)^2 = 4v^2 (\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \beta)^2$$

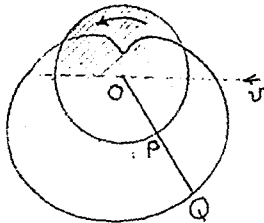


FIG.(7.231)

y por consiguiente si  $\Pi$  es la presión a una gran distancia del cilindro, el teorema de Bernoulli da:

$$\frac{p}{\rho} + 2v^2 (\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \beta)^2 = \frac{\Pi}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \dots \dots \dots (7.231)$$

esto es:

$$\frac{P}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}\rho V^2} + 1 - 4(\text{sen}\theta + \text{sen}\beta)^2 \dots\dots\dots (7.232)$$

En la figura (7.231) tenemos un diagrama polar en el que el radio vector OQ representa la presión en el punto P del cilindro. Para dibujar tal diagrama debemos conocer los valores de  $\pi/\frac{1}{2}\rho V^2$  y  $\text{sen}\beta$ ; OQ es ahora dibujado para que represente  $P/\frac{1}{2}\rho V^2$ .

7.24 Fuerza sobre el cilindro.

Si X e Y denotan las resultantes reales, en las direcciones positivas de los ejes X e Y, debido a la presión del aire tenemos:

$$X = -\int_0^{2\pi} P \cos \theta a \, d\theta, \quad Y = -\int_0^{2\pi} P \text{sen} \theta a \, d\theta$$

ahora, de (7.23) vemos que:

$$P = P_i - 4\rho V^2 \text{sen}\beta \text{sen}\theta,$$

donde 
$$P_i = \pi + \frac{1}{2}\rho V^2 - 2\rho V^2 \text{sen}^2\theta - 2\rho V^2 \text{sen}^2\beta$$

y es claro que la presión real resultante debida a  $P_i$  se anula, puesto que si  $P_i$  permanece inalterada cuando  $\theta$  se reemplaza por  $\theta + \pi$ ; esto es, la presión real debida a  $P_i$  en puntos diametralmente opuestos se cancelan, luego:

$$X = 4\rho a V^2 \text{sen}\beta \int_0^{2\pi} \text{sen}\theta \cos\theta \, d\theta, \quad Y = 4\rho a V^2 \text{sen}\beta \int_0^{2\pi} \text{sen}^2\theta \, d\theta$$

así pues:

$$X = 0, \quad Y = 4\pi \rho a V^2 \text{sen}\beta = 2\pi K \rho V$$

Entonces, la fuerza aerodinámica sobre el cilindro es un levantamiento igual a:

Circulación  $\times$  Densidad del aire  $\times$  velocidad del viento.

El cálculo anterior es simple, debido a la forma del borde del cilindro. En el caso general de un ala de sección circular distinta, la integración directa de las componentes de la presión real, puede hacerse excesivamente difícil; no obstante, hay un método simple, el cual puede usarse en todos los casos, los cuales forman el sustrato de la siguiente sección.

### 7.25 El Teorema de Blasius.

Considere un cilindro de cualquier sección transversal, colocado en una corriente de aire constante e irrotacional. Si el origen  $O$  se toma como punto fundamental, la fuerza aerodinámica (por unidad de longitud del cilindro) puede reducirse a una fuerza  $(x, y)$ , y un momento sesgado  $M$  alrededor del  $O$ .

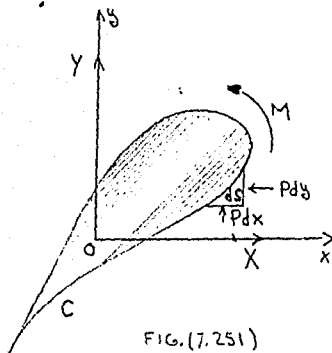


FIG. (7.251)

Si  $w$  es el potencial complejo, el teorema de Blasius es como sigue:

$$X - iY = \frac{1}{2} i \rho \int \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz, \quad M = \text{Re} \left[ -\frac{1}{2} \rho \int z \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz \right] \dots (7.251)$$

donde las integrales se toman rodeando el contorno del perfil o bordeando cualquier contorno rectificable, con  $C$  fuera de una singularidad de los integrandos.

Demostración: la presión real sobre un elemento  $ds$  del contorno da una elevación al sistema de fuerzas  $(dx, dy)$  y al momento  $dM$ , donde:

$$dx = -P dy, \quad dy = P dx, \quad dM = P(x dx + y dy)$$

Ahora, la ecuación de presión nos da:

$$P = P_0 - \frac{1}{2} \rho q^2$$

donde  $P_0$  es una presión constante y el efecto resultante de ésta es cero, luego podemos despreciar  $P_0$  y así escribir:

$$d(X - iY) = \frac{1}{2} \rho q^2 (dy + i dx), \quad dM = -\frac{1}{2} \rho q^2 (x dx + y dy)$$

ahora,  $dy + i dx = i d\bar{z}$ ,  $x dx + y dy = \text{Re}(z d\bar{z})$

y  $q^2 = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \dots (7.252)$

entonces:  $d(X - iY) = \frac{1}{2} \rho i \frac{dw}{dz} d\bar{w}$ ,  $dM = \text{Re} \left( -\frac{1}{2} \rho z \frac{dw}{dz} d\bar{w} \right)$

Ahora, sobre el cilindro la función de corriente  $\Psi$  es constante y por tanto  $d\Psi = 0$ , así pues:

$$d\bar{w} = d(\phi - i\Psi) = d(\phi + i\Psi) = dw = \frac{dw}{dz} dz$$

y también:

$$d(X - iY) = \frac{1}{2} \oint i \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz, \quad dM = \operatorname{Re} \left( -\frac{1}{2} \oint z \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz \right)$$

integrando sobre  $C$ , el teorema se sigue cuando  $C$  es el contorno de integración y por el teorema de Cauchy: El contorno puede ser agrandado o acortado siempre que ninguna singularidad del integrando sea cruzada.

Observaciones de este teorema:

(a) Las singularidades en cuestión, surgen en aquellos puntos donde  $dw/dz$  se hace infinita y en ninguna parte más. En tal singularidad hay en consecuencia, un manantial o vórtice ó una combinación de ellos.

(b) Las singularidades de  $w$  no son problema; es el comportamiento de  $dw/dz$  el que interesa, y aún a pesar de que  $w$  tenga singularidades en los mismos puntos que  $dw/dz$ , esto como veremos después es lo que determina la fuerza aerodinámica.

(c) Es ventajoso frecuentemente tomar como trayectoria de integración un círculo de gran radio, incluyendo al origen. Esto siempre puede hacerse cuando no hay fuentes o vórtices en el fluido.

(d) El cálculo de la fuerza aerodinámica se reduce al cálculo de residuos.

### 7.26 El Teorema de Blasius en términos de la función de corriente.

El teorema de Blasius se aplica sólo a movimientos irrotacionales, ahora obtendremos una forma en términos de la función de corriente, puesto que en dos dimensiones una función de corriente siempre existe, la nueva forma la aplicaremos también a mo-

vimiento rotacional.

Usaremos las notaciones de (7.25) y la figura (7.251) de (7.251)

$$d(x-iy) = \frac{1}{2} \int \varphi^2 i dz, \quad \varphi^2 = u^2 + v^2 = (u+iv)(u-iv)$$

luego usando coordenadas conjugadas:

$$d(x-iy) = 2i \int \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

Ahora, si  $\Psi$  es constante sobre el borde, tenemos:

$$0 = d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

esto es

$$d(x-iy) = -2i \int \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} \right)^2 dz$$

y por tanto

$$x-iy = -2i \int \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} \right)^2 dz \dots \dots \dots (7.261)$$

donde la integral se toma rodeando el borde ó cualquier contorno rectificable. Análogamente, probaremos que para el momento M alrededor del origen

$$M = \text{Re} \left[ 2 \int z \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} \right)^2 dz \right] \dots \dots \dots (7.262)$$

observe también que sobre el borde,  $\bar{z}$  es una función de  $z$  y también las integrales pueden ser evaluadas por el teorema del residuo.

### 7.27 El Teorema de KUTTA y ZHUKOVSKII

Un ala en reposo en un viento uniforme de velocidad  $V$ , con circulación  $K$  bordeando el ala, sufre un levantamiento  $KSV$  perpendicular al viento.



La dirección del vector levantamiento, se obtiene rotando el vector velocidad de viento un ángulo recto, en el sentido opuesto a la circulación.

Demostración: puesto que hay un viento uniforme, la velocidad a una gran distancia del ala debe tender simplemente a la velocidad del viento, y por consiguiente si  $|z|$  es suficientemente grande podemos escribir:

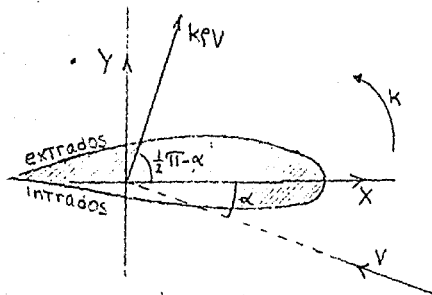
$$-\frac{dw}{dz} = -Ve^{i\alpha} + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots \quad (7.271)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de incidencia, entonces:

$$w = Ve^{i\alpha} z - A \log z + \frac{B}{z} + \dots$$

y puesto que hay circulación  $K$  tenemos:

$$-A = \frac{iK}{2\pi} \quad \text{-----} \quad (7.272)$$



FIG(7.271)

como  $\log z$  se incrementa en  $2\pi i$  cuando bordeamos una vez el ala en sentido positivo. De (7.271) y (7.272) obtenemos:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = v^2 e^{2i\alpha} + \frac{ikv e^{i\alpha}}{\pi z} - \frac{k^2 + 8\pi^2 B v e^{i\alpha}}{4\pi^2 z^2} - \dots \quad (7.273)$$

si ahora integramos sobre el círculo cuyo radio es suficientemente grande, para que el desarrollo (7.273) sea válido, el teorema de Blasius da:

$$x - iy = \frac{1}{2} i \oint \left[ 2\pi i \left( \frac{ikv e^{i\alpha}}{\pi} \right) \right] = ik \oint v e^{i\alpha}$$

luego, cambiando el signo de  $i$

$$x + iy = ik \oint v e^{-i\alpha} = k \oint v e^{i(\frac{1}{2}\pi - \alpha)} \dots (7.274)$$

comparando con la figura (7.271), muestra que esta fuerza tiene todas las propiedades establecidas en el enunciado.

Observaciones:

(a) El teorema fue descubierto independientemente por KUTTA (1902) y por ZHUKOVSKII (1906).

(b) El levantamiento es independiente de la forma del perfil.

(c) Debe observarse que al aplicar la regla para encontrar la dirección del levantamiento, el vector velocidad debe dibujarse desde el origen, en dirección de la velocidad

(d) Si el ala se observa como moviéndose en el aire, contrario al reposo, el levantamiento se obtiene rotando el vector velocidad del ala a un ángulo recto, en el mismo sentido que la circulación.

(e) Si el teorema de Blasius se aplica a (7.273),

entonces el momento alrededor del origen es:

$$M = \operatorname{Re} (2\pi i \int B V e^{i\alpha}) \dots\dots\dots(7.275)$$

7.28 El segundo teorema del Círculo.

Este teorema que enunciaremos se aplica a movimientos en los cuales la vorticidad es constante. Su enunciado es:

Si un flujo bidimensional con vorticidad constante  $w$ , en el plano  $z$ , es dado por la función de corriente:

$$\Psi_0(z, \bar{z}) = F(z) + \bar{F}(\bar{z}) + \frac{1}{4} w z \bar{z} \dots\dots(7.281)$$

si no hay bordes rígidos, si todas las singularidades de  $F(z)$  están a una distancia mayor a  $a$  del origen, y si un cilindro circular tipificado por un círculo (como sección transversal)  $|z|=a$ , es introducido en el campo del flujo, entonces la función de corriente del flujo perturbado será:

$$\Psi(z, \bar{z}) = F(z) - F\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right) + \bar{F}(\bar{z}) - \bar{F}\left(\frac{a^2}{z}\right) + \frac{1}{4} w z \bar{z} \dots\dots(7.282)$$

Demostración: puesto que sobre  $C$ ,  $z\bar{z}=a^2$ , la función de corriente  $\Psi(z, \bar{z}) = \frac{1}{4} w a^2$  en  $C$ , la cual es constante; esto es,  $C$  es una línea de corriente para el movimiento dado por (7.282). Puesto que todas las singularidades de  $F(z)$  y también de  $\bar{F}(\bar{z})$  están fuera de la circunferencia  $C$ , todas las singularidades de  $F(a^2/\bar{z})$  y de  $\bar{F}(a^2/z)$  están dentro de  $C$ ; esto es, nuevas singularidades no serán introducidas en el infinito, y el movimiento dado por (7.282) en el infinito es el mismo que el dado por (7.281).

La vorticidad del flujo dado por (7.282) es:

$$4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \bar{z}} = w$$

luego (7.282) satisface todas las condiciones y en consecuencia la función de corriente del movimiento perturbado.

Como un corolario: Si en (7.281) reemplazamos  $\frac{1}{4} w z \bar{z}$  por  $\frac{1}{4} w z \bar{z} + \frac{1}{2} \log(z \bar{z})$  obtenemos para el flujo perturbado:

$$\Psi(z, \bar{z}) = F(z) - F(\alpha^2/\bar{z}) + \bar{F}(\bar{z}) - \bar{F}(\alpha^2/z) + \frac{1}{4} w z \bar{z} + \frac{1}{2} \log(z \bar{z})$$

esto da una circulación de  $2\pi K$  alrededor de  $C$ .

### 7.29 Flujo uniforme cortante.

Si el eje  $x$  es horizontal, digamos a nivel de piso, y el eje  $y$  vertical hacia arriba; la distribución de velocidad

$$u = -wy, \quad v = 0, \quad w = \text{constante} \dots (7.291)$$

es aquella en la cual la velocidad es proporcional a la distancia desde el piso, y decrece a cero cuando el piso es acercado. Este tipo de distribución de velocidad es frecuentemente observada en un viento natural, y es conocido como un flujo uniforme cortante.

Más precisamente: "Un flujo bidimensional en el que la velocidad en un punto es paralela a una línea fija, y proporcional a la distancia del punto a la línea es llamado un flujo uniforme cortante".

La función de corriente para el flujo (7.291) es:

$$\frac{1}{2} \omega y^2 = -\frac{1}{8} \omega (z - \bar{z})^2$$

luego, mediante una simple rotación de los ejes, un ángulo  $\beta$ , encontramos que si la velocidad de corte del flujo es paralela a la recta  $y \cos \beta - x \sin \beta = 0$ , la función de corriente es:

$$\Psi_0 = -\frac{1}{8} \omega (z e^{-i\beta} - \bar{z} e^{i\beta})^2 \dots \dots \dots (7.292)$$

luego la vorticidad es:

$$\frac{4 \partial^2 \Psi_0}{\partial z \partial \bar{z}} = \omega \dots \dots \dots (7.293)$$

esto es, la vorticidad en un flujo uniforme cortante es constante.

La función de corriente  $\Psi_0$  de (7.292) puede también escribirse como:

$$\Psi_0 = -\frac{1}{8} \omega z^2 e^{-2i\beta} - \frac{1}{8} \omega \bar{z}^2 e^{2i\beta} + \frac{1}{4} \omega z \bar{z} \dots (7.294)$$

comparando ésta con (7.291), por el teorema del segundo círculo vemos que:

$$F(z) = -\frac{1}{8} \omega z^2 e^{-2i\beta} \dots \dots \dots (7.295)$$

si en adición, para flujos cortantes queremos tener circulación también, escribimos  $\Psi_1$  en lugar de  $\Psi_0$  en (7.294) dando:

$$\Psi_1 = -\frac{1}{8} \omega z^2 e^{-2i\beta} - \frac{1}{8} \omega \bar{z}^2 e^{2i\beta} + \frac{1}{4} \omega z \bar{z} + \frac{1}{2} K \log(z \bar{z}) \dots (7.296)$$

7.30 Un cilindro circular en un flujo uniforme cortante.

Consideremos un flujo que consta de una corriente uniforme  $V$  incidiendo a un ángulo  $\alpha$ , y un flujo uniforme cortante paralelo a  $y \cos \beta - x \sin \beta = 0$  de circulación  $2\pi\kappa$ ; la función de corriente para el flujo no perturbado es:

$$\psi_0 = -\frac{1}{2} iVz e^{i\alpha} + \frac{1}{2} iV\bar{z} e^{-i\alpha} - \frac{1}{8} w z^2 e^{-2i\beta} - \frac{1}{8} w \bar{z}^2 e^{2i\beta} + \frac{1}{4} w z \bar{z} + \frac{1}{2} \kappa \log(z \bar{z}) \dots \dots \dots (7.301)$$

para esto, apliquemos el segundo teorema del círculo, con:

$$F(z) = -\frac{1}{2} iVz e^{i\alpha} - \frac{1}{8} w z^2 e^{-2i\beta} \dots \dots \dots (7.302)$$

de modo que la función de corriente para el movimiento perturbado es:

$$\psi = -\frac{1}{2} iVz e^{i\alpha} - \frac{1}{8} w z^2 e^{-2i\beta} - \frac{1}{2} iV \frac{a^2}{z} + \frac{1}{8} w \frac{a^4}{z^2} e^{2i\beta} + \frac{1}{2} iV \bar{z} e^{-i\alpha} - \frac{1}{8} w \bar{z}^2 e^{2i\beta} + \frac{1}{2} iV \frac{a^2}{\bar{z}} e^{i\alpha} + \frac{1}{8} w \frac{a^2}{\bar{z}^2} e^{-2i\beta} + \frac{1}{4} w z \bar{z} + \frac{1}{2} \kappa \log(z \bar{z}) \dots \dots \dots (7.303)$$

notemos que ésta cumple todas las condiciones y se reduce a (7.301) cuando  $z \rightarrow \infty$ . Para encontrar la fuerza sobre el cilindro, usaremos el teorema de Blasius en la forma dada como se ve en (7.261); entonces encontrando  $\partial\psi/\partial z$  de (7.303) y despues tomando  $\bar{z} = a^2/z$ , obtenemos sobre  $C$ :

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{1}{4} w e^{-2i\beta} z - \frac{1}{2} iV e^{i\alpha} + \frac{a^2 w + 2\kappa}{4z} + \frac{1}{2} i \frac{Va^2 e^{-i\alpha}}{z^2} - \frac{1}{4} \frac{a^4 w e^{2i\beta}}{z^3}$$

luego de (7.261), usando el teorema del residuo:

$$x - iy = -\pi \int \nu i \{ 2k e^{i\alpha} + a^2 w (e^{i\alpha - 2i\beta} + e^{i\alpha}) \} \dots (7.304)$$

esto da el levantamiento de Kutta - Zhukovskii cuando  $w=0$ , pero notemos ahora que aun cuando  $k=0$ , hay una fuerza sobre el cilindro.

Si el eje  $x$  es paralelo al piso y  $\alpha, \beta$  son cero, la fuerza dada por (7.304) es el levantamiento:

$$Y = 2\pi \int V (k + a^2 w)$$

luego, el flujo cortante incrementa o decrementa el levantamiento  $2\pi \int V k$  de acuerdo a como  $w$  sea positivo o negativo; además si  $w = -k/a^2$  el levantamiento desaparece, revelando un posible peligro en el aterrizaje de un cierto tipo de flujo cortante.

Con todo lo anterior, pasemos a tratar uno de los puntos principales de este trabajo; sin duda alguna en la mayoría de los cursos sobre Variable Compleja, en el tema de aplicaciones, los perfiles de Zhukovskii - Chaplignin, son lo más preferido; así pues entremos en materia.

### 7.31 La transformación de Zhukovskii - Chaplignin.

La transformación:

$$w = z + \frac{l^2}{z} \dots \dots \dots (7.311)$$

tiene una serie de propiedades interesantes, veamos algunas de ellas.

Es de observarse que  $w$  es infinita cuando  $z=0$ , además:

$$\frac{dw}{dz} = 1 - \frac{l^2}{z^2}$$

se anula cuando  $z = \pm l$ , los puntos  $z = \pm l$  juegan un papel fundamental en esta transformación; observese también que la escala

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| \rightarrow 1 \text{ cuando } z \rightarrow \infty$$

luego una figura lejos del origen en el plano  $z$ , es transformada en casi una figura idéntica en el plano  $w$ . Sustituyendo  $z$  por  $\bar{z}$  en (7.311), obtenemos:

$$\bar{z} + \frac{l^2}{\bar{z}} = \overline{\left( z + \frac{l^2}{z} \right)} = \bar{w}$$

Esto nos lleva a la siguiente conclusión: si un punto  $z$  es transformado en un punto  $w$ , entonces  $\bar{z}$  es transformado en  $\bar{w}$ ; esto es, puntos conjugados son transformados en puntos conjugados; por consiguiente, si conocemos la imagen del semiplano superior del plano  $z$  podemos obtener la imagen del semiplano inferior  $z$ . Además si sustituimos  $l^2/z$  por  $z$  en (7.311) otra vez obtenemos  $l^2/\bar{z} + \bar{z} = \bar{w}$ ; es decir, si  $z$  se transforma en  $w$ , su inverso  $l^2/z$  con respecto al círculo  $|z|=l$  se transforma en  $\bar{w}$ ; dicho con otras palabras, puntos inversos se transforman en puntos conjugados, luego si conocemos la imagen del exterior al círculo  $|z|=l$  también conocemos la imagen del interior del círculo  $|z|=l$ .

También si sustituimos  $-\bar{z}$  por  $z$  en (7.311),



obtenemos  $-\bar{w}$ , esto nos lleva a lo siguiente: puntos que son simétricos con respecto al eje  $y$  se transforman en puntos que son simétricos con respecto al eje  $v$  ( $w = u + iv = z + l^2/z$ ;  $l > 0$ ,  $z = x + iy$ ).

Ahora, mostraremos que el conjunto  $Az$ , que consta de los puntos en el primer cuadrante del plano  $z$ , exteriores al círculo  $|z|=l$  son transformados de manera inyectiva por la aplicación (7.311) en el conjunto que consta de los puntos en el primer cuadrante del plano  $w$ .

Consideremos el punto:

$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0 \dots \dots \dots (7.312)$$

entonces su imagen bajo (7.311) está dada por:

$$w = u + iv = re^{i\theta} + \frac{l^2}{r} e^{-i\theta} = \left(r + \frac{l^2}{r}\right) \cos\theta + i \left(r - \frac{l^2}{r}\right) \text{sene}$$

luego:

$$u = a \cos\theta, \quad v = b \text{sene} \dots \dots \dots (7.313)$$

donde

$$a = \frac{r^2 + l^2}{r}, \quad b = \frac{r^2 - l^2}{r} \dots \dots \dots (7.314)$$

Si  $R_1$  y  $R_2$  son dos números reales positivos tales que  $l < R_1 < R_2$ , si  $r = R_2$  y  $\theta$  crece de cero a  $\pi/2$ ; entonces el punto  $z$  recorre en dirección contra-reloj un cuadrante del círculo  $|z|=R_2$ , iniciando en  $A$  ( $z=R_2$ ) y terminando en  $B$  ( $z=iR_2$ ), en tanto que la imagen  $w$  describe contra-reloj el cuadrante  $A'B'$  de la elipse (7.313) con  $a$  y  $b$  dadas por:

$$a = \frac{R_2^2 + l^2}{R_2} \quad \text{y} \quad b = \frac{R_2^2 - l^2}{R_2}$$

ver figura (7.311)

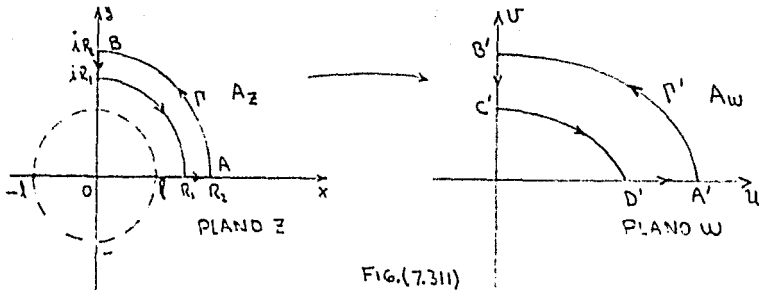


FIG.(7.311)

Si ahora fijamos el valor de  $\theta$  en  $\theta = \pi/2$  y si  $r$  decrece de  $r = R_2$  a  $r = R_1$ , vemos que la imagen del punto  $z = r e^{i\theta}$  describe hacia abajo el segmento  $B'C'$ , donde

$$B' = i \frac{R_2^2 - l^2}{R_2}, \quad C' = i \frac{R_1^2 - l^2}{R_1}$$

Ahora, si  $r = R_1$  y  $\theta$  decrece de  $\pi/2$  a 0, el punto  $z$  recorre en el sentido reloj el cuadrante CD del círculo  $|z| = R_1$ , en tanto que el punto imagen  $w$ , describe en el sentido del reloj el cuadrante  $C'D'$  de la elipse (7.313) con  $a$  y  $b$  dadas por:

$$a = \frac{R_1^2 + l^2}{R_1} \quad b = \frac{R_1^2 - l^2}{R_1}$$

Finalmente tomemos  $\theta = 0$ , si  $r$  crece de  $R_1$  a  $R_2$ ,

Vemos que  $z$  viaja por el segmento  $DA$  de izquierda a derecha, así pues la imagen  $w$  recorre el segmento  $D'A'$  de izquierda a derecha.

Si los contornos  $ABCD$  y  $A'B'C'D'A'$ , son denotados respectivamente por  $\Gamma$  y  $\Gamma'$ . De la discusión anterior vemos que la imagen del contorno cerrado simple  $\Gamma$ , bajo la transformación (7.311) es el contorno cerrado simple  $\Gamma'$ ; puesto que  $w = z + \ell^2/z$  es una función analítica dentro y sobre  $\Gamma$ , tenemos que la región acotada por el contorno  $\Gamma$ , es transformada en la región acotada por el contorno cerrado  $\Gamma'$  de manera inyectiva.

Es claro de (7.232), (7.233) y (7.234) que bajo la transformación (7.231) cada punto del conjunto  $Az$ , que consta de los puntos  $|z| > \ell$  en el primer cuadrante, es transformado en un punto del primer cuadrante de  $Aw$  en el plano  $w$ . Demostraremos ahora que esta transformación es suprayectiva. Si  $w_0$  es cualquier punto en  $Aw$ , entonces para  $R_1$  suficientemente cercano a  $\ell$ , y  $R_2$  suficientemente grande,  $w_0$  está en el interior a  $\Gamma'$ , luego  $w_0$  es la imagen de algún punto  $z_0$  interior a  $\Gamma$ . Esto nos muestra que cualquier punto en  $Aw$  es la imagen de algún punto en  $Az$  y (7.231) es suprayectiva.

Ahora demostraremos que la transformación de  $Az$  en  $Aw$  dada por (7.311) es inyectiva; supongamos pues, que no es el caso, y que existieran dos puntos  $z_1$  y  $z_2$  distintos en  $Az$ , cuya imagen fuera  $w_0$  en  $Aw$ ; entonces si elegimos  $R_1$  suficientemente cercano a  $\ell$  y  $R_2$  suficientemente grande,  $z_1$  y  $z_2$  serán interiores a  $\Gamma$ ; en tanto que su imagen  $w_0$  será interior a  $\Gamma'$ ; pero esto

contradice el hecho de que el interior de  $\Gamma$  es transformado en el interior de  $\Gamma'$  de manera inyectiva.

Resumiendo, bajo la transformación (7.311) las regiones exteriores al círculo  $|z|=l$  (tanto superior como inferior), son transformadas respectivamente sobre regiones exteriores (tanto superiores como inferiores). En tanto que regiones interiores al círculo  $|z|=l$  (tanto superiores como inferiores) son transformadas en regiones interiores (tanto superior como inferiormente).

Observación: Es fácil ver que los ejes positivos  $x$  e  $y$  exteriores al círculo  $|z|=l$ , son transformados respectivamente sobre las semirectas  $v=0$ ,  $u > 2l$  y  $u=0$ ,  $v < 0$ .

Para ver cómo el círculo  $|z|=l$  es transformado por (7.311); poniendo  $r=l$  en (7.314) obtenemos  $a=2l$  y  $b=0$ , entonces  $w=2l \cos \theta$ . Como el punto  $z$  viaja en dirección contraria al reloj, el semicírculo superior de  $|z|=l$  la  $\theta$  varía de  $0$  a  $\pi$ ; la imagen  $w$  recorre el segmento  $-2l < u < 2l$  en el eje  $u$  de derecha a izquierda, como se muestra en la figura (7.312)

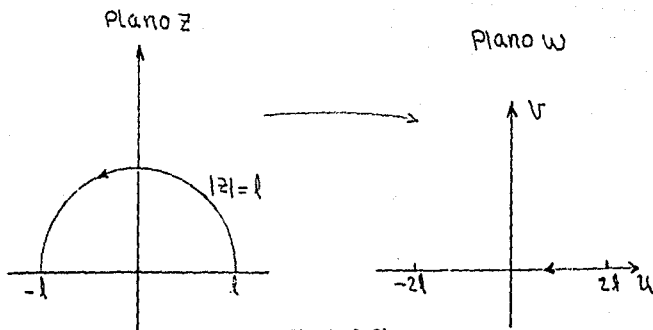


FIG.(7.312)

De manera análoga, cuando  $z$  recorre el semicírculo inferior  $|z|=l$  en dirección antihorario,  $\theta$  variará de  $\pi$  a  $2\pi$  y  $w$  describirá el mismo segmento de recta de izquierda a derecha. También observese que  $z=0$ ,  $z=\infty$ , cada uno se transforma en  $w=\infty$ ; luego (7.311) transforma el plano ampliado  $z$  en el plano  $w$  ampliado. Veamos ahora un poco más detalladamente la transformación (7.311).

### 7.32 Geometría de la transformación de Zhukovskii.

Como hemos visto en (7.31) la transformación de Zhukovskii es:

$$w = z + \frac{l^2}{z} \dots \dots \dots (7.321)$$

donde  $l$  es una constante real. Mediante ésta podemos transformar cualquier región del plano  $z$  en el plano  $w$ .

En aerodinámica práctica la región transformada es generalmente el exterior a un círculo en el plano  $z$ .

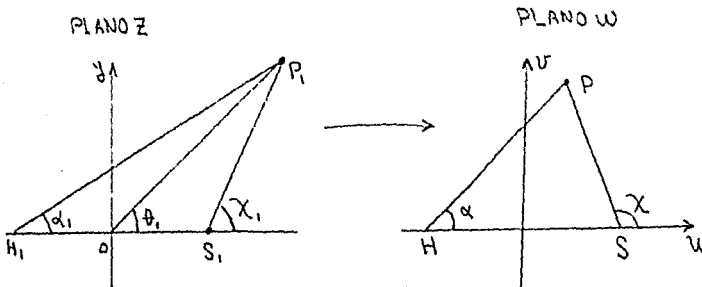


FIG.(7.321)

Si denotamos los puntos correspondientes en los planos  $z$  y  $w$  con la misma letra, con y sin indice 1. En particular los puntos  $S_1$  y  $H_1$  dados cuando  $z=l$  y  $z=-l$  serán transformados en los puntos  $S$  y  $H$ , con coordenadas  $w=2l$  y  $w=-2l$ ; en efecto,  $w = l + \frac{l^2}{l} = 2l$ ; cuando  $z=l$  y  $w = -l + \frac{l^2}{-l} = -2l$ ; cuando  $z=-l$ . Estos puntos juegan un papel importante en la geometría del mapeo.

De (7.321) podemos obtener restando  $2l$

$$w - 2l = z - 2l + \frac{l^2}{z} = \frac{z^2 - 2zl + l^2}{z} = \frac{(z-l)^2}{z} \dots\dots\dots (7.322)$$

de aquí que  $\text{Arg}(w-2l) = 2\text{Arg}(z-l) - \text{Arg}(z)$  y  $|w-2l| = |z-l|^2/z$ , de lo cual, con la notación de la figura (7.321) significa que:

$$\chi = 2\chi_1 - \theta_1, \quad SP = \frac{S_1P_1^2}{OP_1} \dots\dots\dots (7.323)$$

entonces, si  $\chi_1$  y  $\theta_1$  crecen de 0 a  $2\pi$ , también  $\chi$  tiene igual variación. Análogamente, si sumamos  $2l$  a ambos miembros de (7.321) obtenemos:

$$w + 2l = z + 2l + \frac{l^2}{z} = \frac{z^2 + 2zl + l^2}{z} = \frac{(z+l)^2}{z}$$

y consecuentemente

$$\alpha = 2\alpha_1 - \theta_1, \quad HP = \frac{H_1P_1^2}{OP_1} \dots\dots\dots (7.324)$$

De las relaciones (7.323) y (7.324) tenemos que:

$$\angle SPH = \chi - \alpha = 2(\chi_1 - \alpha_1) = 2\angle S_1P_1H_1 \dots\dots\dots (7.325)$$

$$SP + HP = \frac{S_1P_1^2 + H_1P_1^2}{OP_1} = \frac{2(OS_1^2) + 2(OP_1^2)}{OP_1} \dots\dots\dots (7.326)$$

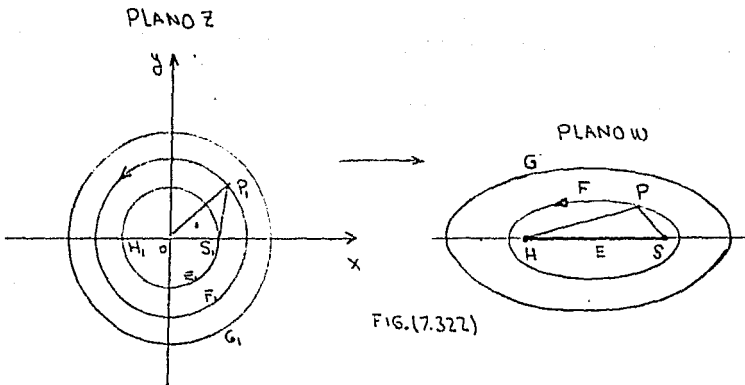
por el teorema de Apolonio, puesto que  $OP_1$  es mediana del triángulo  $S_1P_1H_1$ .

Observemos también que para valores grandes de  $|z|$ , tenemos  $w \approx z$  aproximadamente; esto es, las partes distantes de los planos no son deformados por la aplicación. Esta propiedad es importante, porque esto implica, que un viento uniforme en un plano aparecerá como viento uniforme en el otro.

La escala de la transformación está dada por:

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| 1 - \frac{l^2}{z^2} \right|$$

la cual se anula cuando  $z = l$  ó  $z = -l$ ; esto es, los puntos  $S_1$  y  $H_1$  son puntos donde el mapeo deja de ser conforme, esto es, no aplica cualquier región para la cual los puntos sean interiores, a pesar de que ellos estén en la frontera.



### 7.33 Círculos con centro en el origen.

Si aplicamos la transformada de Zhukovskii a círculos cuyo centro es el origen, en el plano  $z$ . Consideraremos únicamente círculos para los cuales los puntos  $S_1, H_1$  no son extremos.

Si  $P_1$  está en uno de los círculos, digamos en  $F_1$ , tenemos de (7.326)

$$SP + HP = \text{constante}$$

puesto que  $OP_1$  es constante, entonces describe una elipse, cuyos focos son  $S$  y  $H$ . Análogamente si  $P_1$  describe un círculo mayor tal como  $G_1$ ,  $P$  describe una elipse mayor  $G$ , con lo cual tenemos que puntos exteriores a  $F_1$  se transforman en puntos exteriores a  $F$ .

Por lo tanto, la transformación de Zhukovskii, transforma círculos en el plano  $z$  cuyo centro es el origen, en elipses confocales en el plano  $w$ . Como caso particular el círculo  $E_1$  con diámetro  $S_1H_1$ , se transforma en la recta  $SH$ , como hemos tenido ocasión de demostrar; además, de otra forma, puesto que la ecuación (7.325) para este caso  $\angle S_1P_1H_1 = \pi/2$  y por tanto  $\angle SPH = \pi$ ; esto es,  $P$  se mueve sobre la recta  $SH$ .

### 7.34 Alas, timones y montantes de Zhukovskii.

En lugar de transformar círculos cuyo centro es el origen, tomemos un círculo cuyo centro es  $C$ , en el eje real, que corta al eje real en  $H_1$  y que circunda a  $S_1$ , después son trazados los círculos  $E_1$  y  $G_1$  con centro en el origen, tocando al círculo  $R_1$  en  $H_1$  y en  $A_1$  el segundo punto donde  $R_1$  corta al eje real.



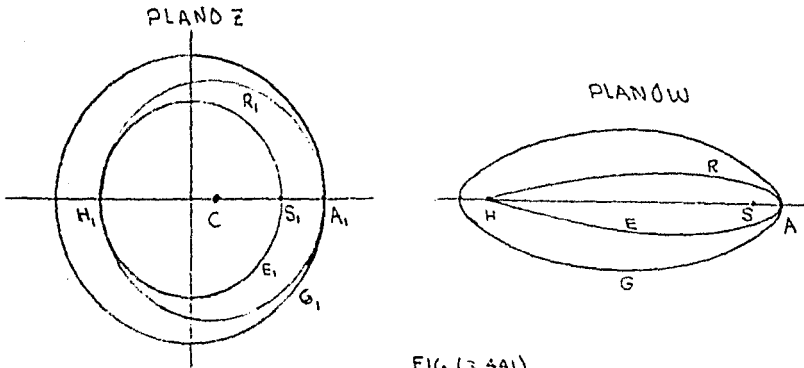


FIG. (3.441)

Obviamente la transformación de  $R_1$ , deberá quedar entre las transformaciones de  $E_1$  y  $G_1$ ; entonces el círculo  $R_1$  se transforma en un perfil simétrico, con borde de ataque en A y borde de salida en H. Tales perfiles son adecuados para diseñar alas, timones y montantes, donde la simetría es deseable.

### 7.35 Perfiles arco-circulares.

Si transformamos un círculo cuyo radio es  $a$  y centro en C en el eje imaginario, y que pasa por los puntos  $S_1$  y  $H_1$ . Si introducimos la práctica útil de marcar la transformación en el mismo diagrama coordenado; esto es, la figura mostrará ambos planos Z y W. Si  $\angle CS_1H_1 = E$ , tenemos de (7.325);  $\angle SPH = 2\angle S_1P_1H_1 = \pi - 2E$ , puesto que  $\angle S_1CH_1$  es ángulo central y es igual a  $2\angle S_1P_1H_1$  en la circunferencia.

Luego cuando P describe el arco mayor  $S_1B_1H_1$ , figura (7.351), el  $\angle SPH$  permanece constante, de aquí que P describe un arco circular SBH.

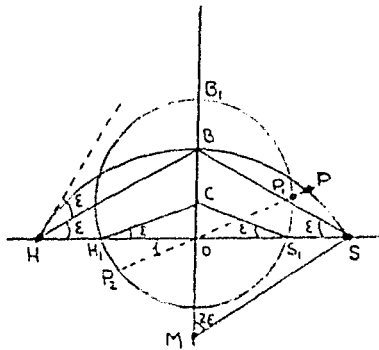


FIG. (7.351)

Cuando  $P_1$  describe el arco menor de  $H_1$  a  $S_1$ ,  $P$  se mueve otra vez a lo largo de  $HBS$ . De esta manera obtenemos un perfil, el cual consta de un arco circular  $SBH$  descrito dos veces. De la igualdad de ángulos, es obvio de la figura que  $CH_1$  es paralela a  $BH$ .

Si  $M$  es el centro del arco  $SBH$

$$SM = \frac{2l}{\sin 2\epsilon} = \frac{a}{\sin \epsilon} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - l^2}}$$

la comba\* de este perfil es:

$$\frac{OB}{4l} = \frac{1}{2} \frac{OB}{OH} = \frac{1}{2} \tan \epsilon = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{l}$$

esto es, para una comba pequeña,  $\epsilon$  es pequeña, lo cual significa que  $OC$  es pequeño comparado con  $l$ ;

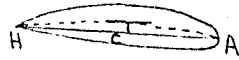
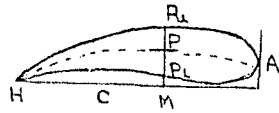
es decir,  $c$  se transforma cerca de 0.

\* Considere un perfil y su cuerda, si  $y_u, y_l$  son las ordenadas de los puntos sobre las partes superior e inferior del perfil respectivamente, para el mismo valor de  $x$ , y si  $c$  es la cuerda tomada como eje  $x$ , definimos:

$$\text{comba sup.} = (y_u)_{\text{máx}}/c$$

$$\text{comba inf.} = (y_l)_{\text{máx}}/c$$

donde la notación se refiere a esa ordenada que es numéricamente mayor. La comba tiene signo positivo ó negativo de acuerdo al signo de  $(y_u)_{\text{máx}}$  o  $(y_l)_{\text{máx}}$ . Observemos también que la abscisa de los puntos que corresponden a  $(y_u)_{\text{máx}}$  y  $(y_l)_{\text{máx}}$  puede ser diferente.



### 7.36 El perfil general de Zhukovskii.

Este se obtiene transformando un círculo de radio  $a$  que pasa por el punto  $H_1$ , pero cuyo centro  $C$  no está ni en el eje  $x$ , ni en el  $y$ .

Si  $CH_1$  corta al eje imaginario en  $C'$ , el círculo cuyo centro  $C'$  y radio  $C'H_1$ , será transformado en un arco circular como se muestra en la figura (7.361). Este arco circular forma el esqueleto del perfil, éste se obtiene del círculo con centro en  $C$ ; si  $C$  está cercano a  $C'$ , este perfil encerrará el arco  $SH$ , y no se separará de éste en cualquier instante, dicho perfil será delgado; además, si mayor es la distancia  $CC'$ , más grueso es el perfil.

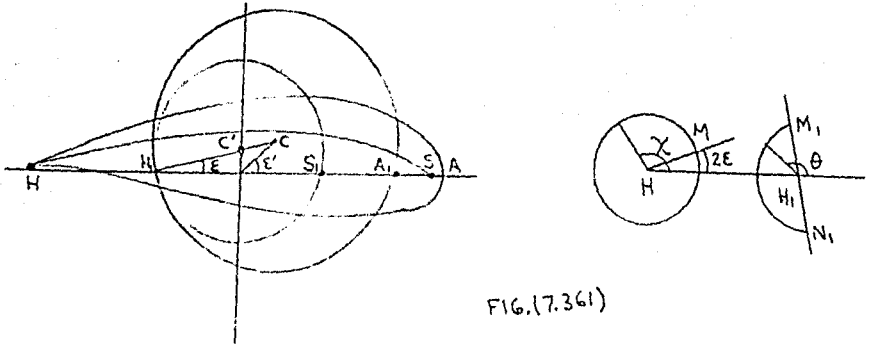


FIG.(7.361)

Para examinar la naturaleza del perfil en H, obsérvese que la transformación puede ser escrita:

$$\frac{w+2l}{w-2l} = \frac{(z+l)^2}{(z-l)^2} \dots \dots \dots (7.361)$$

cerca de H<sub>1</sub> y H podemos escribir:

$$z+l = re^{i\theta} \quad , \quad w+2l = Re^{i\chi}$$

donde R y r son infinitesimales y (7.361) nos da:

$$-Re^{i\chi} = \frac{r^2 e^{2i\theta}}{l}$$

tomando argumentos, esto es aproximadamente:

$$\chi + \pi = 2\theta \dots \dots \dots (7.362)$$

Si dibujamos un semicírculo con centro en  $H_1$  y radio  $r$ , sobre la tangente al círculo en  $H_1$  y fuera del círculo, podemos rodear  $H_1$  sobre este semicírculo de  $M_1$  a  $N_1$  en la figura (7.361). En este paseo  $\theta$  crece hasta  $\pi$ , y en consecuencia  $X$  se incrementa en  $2\pi$ ; entonces hay un borde de fuga en  $H$ , y dos ramas tocando la misma tangente; también en  $M_1$   $\theta = \pi/2 + \epsilon$  y por consiguiente de (7.362)  $X = 2\epsilon$ , que no es otra cosa que la inclinación de la tangente en el borde a  $H_1 S_1$ .

7.37 Construcción geométrica.

La transformación de Zhukovskii

$$w = z + \frac{l^2}{z} \dots \dots \dots (7.371)$$

puede ser llevada a cabo mediante las transformaciones sucesivas:

$$w_1 = \frac{l^2}{z}, \quad w = z + w_1$$

si marcamos todos los números complejos  $z$ ,  $w_1$  en el mismo sistema coordenado, figura (7.371), si  $P_1$  es el punto  $z_1$ ,  $P_1'$  el punto  $w_1$  y  $P$  el punto  $w$ ; si

$$z = re^{i\theta}, \text{ entonces } w_1 = \frac{l^2}{r} e^{-i\theta}$$

dibujemos  $P_1' P_1''$  perpendicular al eje real, cortando a  $OP_1$  en  $P_1''$ , de aquí que:

$$OP_1'' = OP_1' = \frac{l^2}{r^2}, \quad OP_1 \cdot OP_1'' = l^2$$

luego  $P_1, P_1''$  son puntos inversos respecto a  $O$ ,

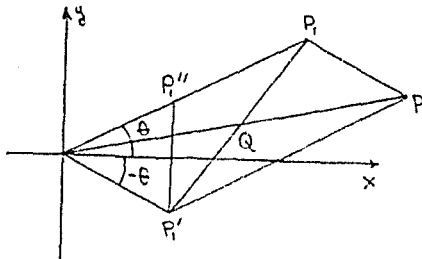


FIG. (7.371)

y para obtener  $P'$  primero encontramos el punto inverso  $P''$  y despues reflejamos  $OP''$  en el eje real. El punto  $P$  se obtiene entonces completando el paralelogramo  $OP'PP''$ ; observemos también que si las diagonales se cortan en  $Q$ , entonces  $OQ = \frac{1}{2}OP$ ; esto es, el lugar geométrico de los puntos  $Q$  es semejante, y está semejántemente situado al lugar geométrico de los puntos  $P$ , solo reducido a la mitad.

En la mayoría de las aplicaciones, el punto  $P$  se hará que describa un círculo; el punto  $P''$  describirá entonces el inverso de un círculo, el cual como demostraremos enseguida será también un círculo, y  $P'$  describirá un círculo que se obtiene reflejando la gráfica de  $P''$  en el eje real.

De (7.371) tenemos, para la escala de la transformación:

$$M = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| 1 - \frac{l^2}{z^2} \right| = \left| z - \frac{l}{z} \right| \div z = \frac{P_1 P_1'}{OP_1} \dots (7.372)$$

esto significa, que todas las longitudes en una

región  $R$  que rodea a  $P$ , deberá ser  $m$  veces las longitudes correspondientes en la región  $R_1$  que rodea a  $P_1$ , de la cual  $R$  es la imagen. Veamos pues, como se transforma un círculo.

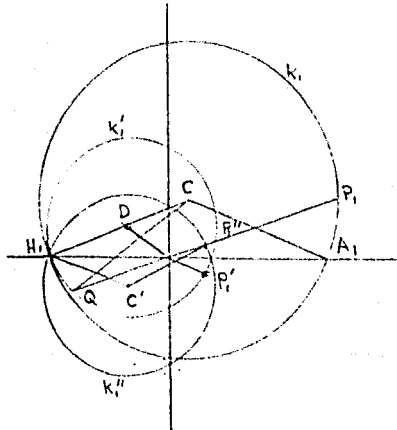


FIG. (7.372)

Considere el círculo de centro en  $C$  y radio  $a$ , el cual corta al eje real en  $H_1$  y  $A_1$ , fig. (7.372) tomando  $l = OH_1$ ; si  $P_1''$  es el inverso de  $P_1$  en dicho círculo, tal que  $OP_1'' \cdot OP_1 = OH_1^2 = l^2$ , si  $OP_1$  corta al círculo  $K$  en  $Q$  otra vez, y dibujamos  $P_1''C'$  paralela a  $CQ$ , para cortar a la prolongación de  $CO$  en  $C'$ . Por la propiedad rectangular del círculo, tenemos  $OP_1 \cdot OQ = OH_1 \cdot OA_1$ , por tanto el cociente:

$$\frac{OP_1''}{OQ} = \frac{OH_1}{OA_1}$$

es constante. Puesto que los triángulos  $OP_1''C'$ ,  $OQC$  son semejantes,

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{C'P''}{CQ} = \frac{OP''}{OQ} = \frac{OH_1}{OA_1}$$

En vista de que  $OC/OC'$  es constante,  $C'$  es un punto fijo; y también como  $C'P''/CQ$  es constante,  $C'P''$  tiene longitud constante, luego  $P''$  describe un círculo  $K''$  cuyo centro es  $C'$ . El punto  $H_1$  es su propio inverso, puesto que  $OH_1 \cdot OH_1 = l^2$ , y en consecuencia la gráfica de  $P''$  pasa por  $H_1$ . Además como  $OC'/OC = OH_1/OA_1$ , los triángulos  $OC'H_1$ ,  $OCA_1$  son semejantes y están semejantemente situados, luego  $CA_1$  es paralela a  $C'H_1$  y

$$\angle CH_1O = \angle CA_1H_1 = \angle C'H_1O$$

Se deduce de lo anterior que el círculo  $K'_1$ , que es reflexión de la gráfica de  $P''$  en el eje real, tendrá su centro  $D$  en  $CH_1$  y pasará por  $H_1$ . Esto es, los círculos  $K_1$  y  $K'_1$  se tocan en el punto  $H_1$ .

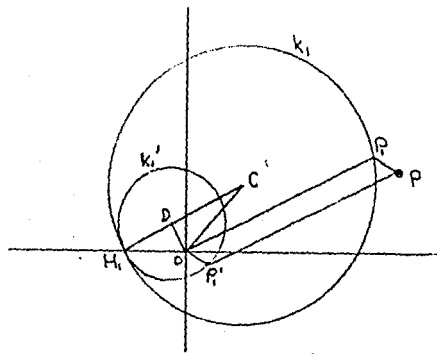


FIG. (7.373)

Este círculo  $K'_1$  es el lugar geométrico de  $P'_1$ , que



es la reflexión de  $P_i''$ . Puesto que  $OD$  es la reflexión de  $OC'$ , de aquí que  $OD$  y  $OC$  estén igualmente inclinados respecto al eje  $X$ . La construcción completa se muestra en la figura (7.373). Empezando con el círculo  $K_1$ , el cual pasa por  $H_1$ , encontramos el punto  $D$  en  $CH_1$ , tal que  $OC, OD$  están igualmente inclinados al eje imaginario. El círculo  $K_i$  con centro en  $D$  es dibujado; para transformar el punto  $P_i$  de  $K_1$ , unimos  $OP_i$  y encontramos el punto  $P_i'$  en  $K_i$ , tal que  $OP_i, OP_i'$  están igualmente inclinados respecto al eje  $X$ ; completando el paralelogramo  $OP_i'P_i$ , el punto  $D$  es la imagen de  $P_i$ . La figura (7.374) muestra los detalles de la construcción.

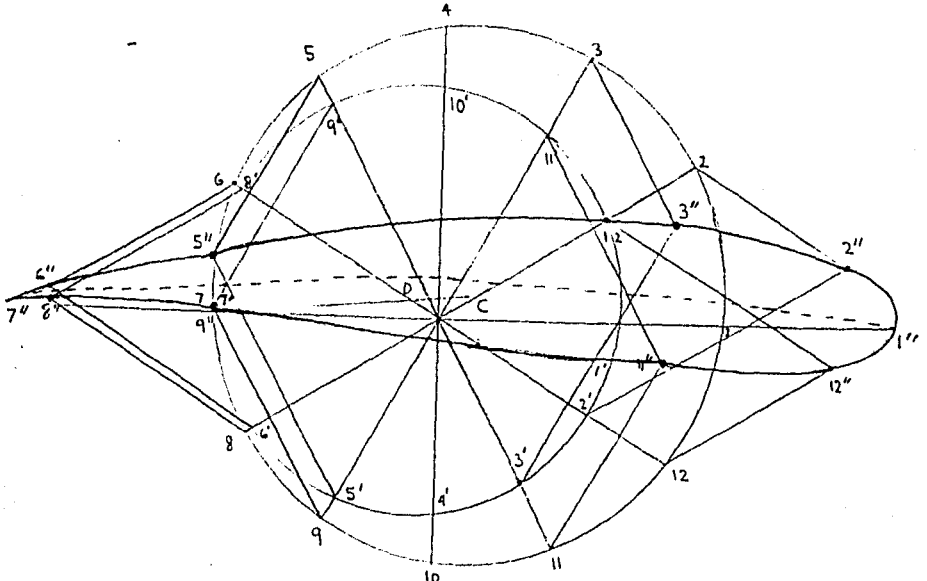


FIG. (7.374)

El perfil se ha bosquejado con puntos que se obtienen dibujando los radios vectores a intervalos de  $30^\circ$ ; los puntos correspondientes en el círculo y en el perfil son etiquetados con el mismo numeral. El arco circular punteado, muestra el esqueleto corregido mediante la transformación del círculo a través de  $Z$ , cuyo centro es el punto donde  $CD$  corta al eje  $Y$ , éste con frecuencia puede reemplazar la línea de combadura, en trabajo teórico.

7.38 La transformación inversa de Zhukovskii.

Para encontrar el punto  $P_i$  del plano  $Z$ , que corresponde con un punto  $P$  del plano  $w$ , consideremos la función asociada:

$$W = \frac{1}{2}w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{l^2}{z} \right) \dots \dots \dots (7.381)$$

Refiriéndonos a la figura (7.374),  $W$  es el punto medio  $Q$  de  $P_i P_i'$  en la figura (7.381). Si  $PO$  corta al círculo  $K$ , que pasa por  $S_1, P_i, H_1$  en  $R$ , entonces  $P_i'$  es la imagen de  $R$  en el eje imaginario, puesto que  $OP_i \cdot OP_i' = l^2 = OH_1 \cdot OS_1 = OP_i \cdot OR$ .

Otra vez regresamos a la figura (7.351), cuando  $P_i$ , es decir  $z$ , está en el arco  $S_1 B_1 H_1$ , el punto  $P$ , es decir  $w$ , está sobre el arco  $BH$  y consecuentemente  $Q$ , es decir  $W$ , está en el arco del círculo que pasa por  $S_1, C, H_1$ ; puesto que  $OC = \frac{1}{2}OB$  y  $W = \frac{1}{2}w$ .

Así pues en la figura (7.381), cuando  $P_i$  describe el arco superior del círculo  $K$ , el punto  $Q$  describirá el arco superior del círculo  $l$ , que pasa por  $S_1, M, H_1$ ; donde  $M$  es el cen-

tro del círculo  $K$ . Ahora  $MQ$  es mediatriz de  $PP'$ , esto es, si  $PP'$  corta al eje imaginario en  $N$ ,  $\angle MQN$  es un ángulo recto, luego el punto  $N$  está en el círculo  $l$  en el otro extremo del diámetro que pasa por  $M$ .

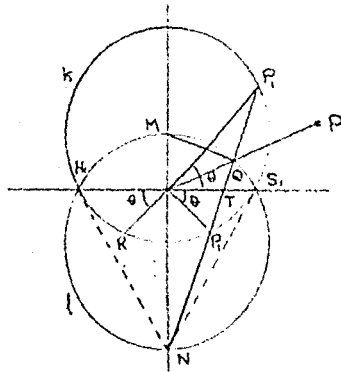


FIG. (7.381)

De estos resultados deducimos la siguiente construcción para encontrar  $P_i$  cuando  $P$  es conocido:

Encontrar  $Q$ , el punto medio de  $OP$  y dibujar el círculo  $S_1QH_1$ ; este determina  $M$  y  $N$ ,  $M$  está en el mismo lado de  $S_1H_1$  y  $Q$ . El círculo  $K$ , centrado en  $M$  y radio  $MS_1$  puede ahora dibujarse. La recta  $NQ$  corta a  $K$  en  $P_i$  y  $P'_i$ ; de esta construcción, sucederá que de los dos puntos  $P_i$  y  $P'_i$ , únicamente uno está en el mismo lado de  $S_1H_1$  y  $P$ , y la elección de uno de ellos determina una función bivaluada.

En la transformación, la región externa a cualquier círculo que encierre a  $S_1$  y pase o encierre a  $H_1$ , no es ambigua; pues uno de los puntos  $P_1, P_1'$  estará siempre en el círculo y no tendrá problemas de definición la región para ser transformada.

### 7.39 La corriente de aire.

Hemos considerado con detalle la construcción geométrica de la transformación de Zhukovskii, ahora analizaremos su aplicación a una corriente de aire que circunda a un perfil de Zhukovskii.

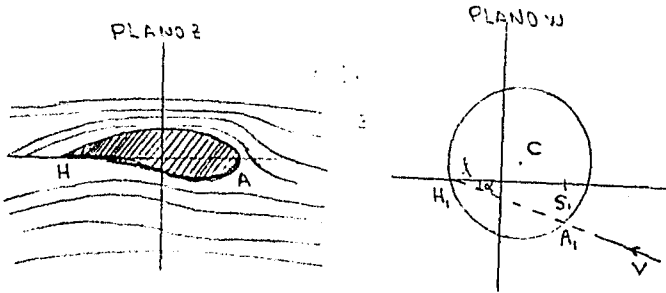


FIG. (7.391)

Si el perfil de la figura (7.391) se obtiene transformando el círculo  $|z-s|=a$ , mediante la transformación de Zhukovskii

$$w = z + \frac{a^2}{z} \dots \dots \dots (7.391)$$

si además una corriente de aire  $V$  incide bajo un ángulo  $\alpha$  con el eje real, en el plano  $Z$ , el potencial complejo es:

$$w = vze^{i\alpha} + \frac{Va^2 e^{-i\alpha}}{z-s} + 2aiv \operatorname{sen} \beta \log(z-s) \dots (7.392)$$

esto nos define un potencial complejo en el plano w, en el plano del perfil. Obsérvese que todas las cantidades son dadas, excepto el ángulo  $\beta$ , de (7.392):

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= ve^{i\alpha} + \frac{2aiv \operatorname{sen} \beta}{z-s} - \frac{Va^2 e^{-i\alpha}}{(z-s)^2} \\ &= v \left( e^{i\alpha} + \frac{ae^{i\beta}}{z-s} \right) \left( 1 - \frac{ae^{-i(\alpha+\beta)}}{z-s} \right) \dots (7.393) \end{aligned}$$

para encontrar la velocidad en el plano w, tenemos:

$$\frac{dw}{dw'} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dw'} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{z^2}{z^2-l^2} \dots (7.394)$$

puesto que  $z^2-l^2$  se anula en  $z=-l$  (y también en  $z=l$ , el cual está en el círculo y en consecuencia no es transformado), veremos que la velocidad en el borde de fuga H, será en general infinita. No obstante, si nos las arreglamos para que  $H_1(z=-l)$  sea un punto de estancamiento en el círculo,  $dw/dw'$ , en H tomará una forma indeterminada del tipo  $0/0$ , y probaremos que esto nos da una velocidad finita en H. Para hacer que  $H_1$  sea un punto de estancamiento, vemos de la figura (7.392) que  $\angle CH_1S_1 = \beta - \alpha$  y en consecuencia:

$$-l = s - ae^{-i(\beta-\alpha)} \quad \text{o} \quad ae^{i\beta} = e^{i\alpha}(l+s) \dots (7.395)$$

esta ecuación determina  $\beta$  y entonces:

$$e^{i\alpha} + \frac{ae^{i\beta}}{z-s} = e^{i\alpha} \left( 1 + \frac{l+s}{l-s} \right) = e^{i\alpha} \frac{z+l}{z-l}$$

esto es, de (7.393), (7.394) dan, despues de algunas reducciones:

$$\frac{dw}{dw'} = Ve^{i\alpha} (z+l - 2ae^{-i\alpha} \cos\beta) \frac{z^2}{(z-s)^2(z-l)} \dots (7.396)$$

el factor que anula  $z+l$  ha sido cancelado. Tomando  $z=-l$ , obtenemos de (7.396)

$$u_H - iV_H = \left( \frac{dw}{dw'} \right)_{z=-l} = \frac{2aVe^2 \cos\beta}{(l+s)^2 (-2l)} = - \frac{lV \cos\beta}{ae^{2i(\beta-\alpha)}}$$

de (7.395) cambiando el signo de  $i$ , tenemos:

$$u_H + iV_H = \frac{lV \cos\beta}{a} e^{i(\pi+2\beta-2\alpha)}$$

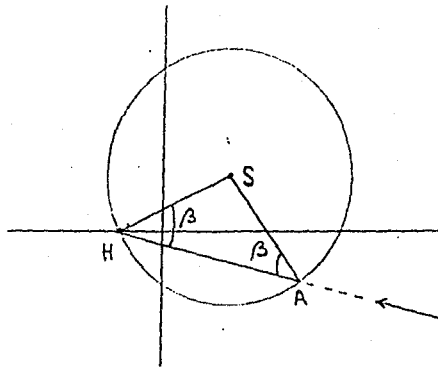


FIG.(7.392)

Ahora de la figura (7.391), la tangente en el borde de salida hace un ángulo  $2\beta - 2\alpha$  con el eje real, y en consecuencia la corriente de aire pasa suavemente por este borde, con velocidad  $lv \cos \beta / a$ .

El otro punto de estancamiento  $A_1$  sobre el círculo, se transforma en el punto de estancamiento  $A$  del perfil, como se ve de (7.394). Veamos también de (7.393) que a grandes distancias, cuando  $|z|$  es grande  $dw/dz = Ve^{i\alpha}$  aproximadamente, y entonces de (7.394)  $dw/dz = dw/dw' = Ve^{i\alpha}$ , esto es, el mismo viento uniforme  $V$ , incidiendo igual en ambos ejes reales, de los dos planos. La forma general de algunas líneas de corriente, se muestran en la figura (7.211).

Observaciones: el problema de elegir un perfil de Zhukovskii es puramente geométrico, cualquier círculo se transforma en algún perfil. La cuestión del flujo de aire no entra en esta discusión. Naturalmente, no obstante, la elección será guiada por el conocimiento de las formas que han sido demostradas, son las más adecuadas.

La elección de la rapidez e incidencia del viento, en los cuales el perfil será usado, es libre y no se modifica con la transformación. Tomando en cuenta lo anterior, en el mismo orden, si se requiere investigar matemáticamente el caso de un flujo suave, que rodea el borde de salida, es necesario arreglar el ángulo  $\beta$  para que la circulación sea tal, que el punto  $H_1$ , el cual será transformado en el borde, sea un punto de estancamiento en el círculo.

Finalmente, tomemos el mismo viento uniforme en el infinito de ambos planos, esto realmente

es consecuencia inmediata del siguiente hecho: cuando  $|z|$  es grande, (7.391) nos da que  $w = z$ ; esto es, el potencial complejo en el infinito es el mismo en ambos planos.

#### 7.40 La fuerza aerodinámica.

La fuerza aerodinámica en el perfil, es debida a la presión aerodinámica real sobre los elementos de su periferia. Es sabido que un sistema de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido (y supondremos que nuestro perfil aerodinámico es rígido), puede ser reemplazado en cualquier punto básico elegido, por una fuerza en el punto básico, lo mismo un par; además, la magnitud y dirección de la fuerza, es la misma para todos los puntos básicos, en tanto que los pares, dependen de la elección particular de los puntos básicos.

Para la presente investigación tomaremos como punto básico el centro  $C$  del círculo; este punto es llamado el centro del perfil; la posición que éste ocupa con respecto al perfil, se muestra cuando los puntos del círculo y los puntos correspondientes del perfil son marcados en el mismo sistema coordenado. En este caso tomaremos el origen en el centro de ambos diagramas figura (7.401).

Si el viento  $V$  incide bajo un ángulo  $\alpha$ , el potencial complejo para el flujo que circunda el círculo es:

$$Ve^{i\alpha}z + a^2Ve^{-i\alpha}/z$$

Si además tenemos una circulación  $2\pi K$  de intensidad  $K$ , obtenemos:

$$w = Ve^{i\alpha}z + \frac{a^2Ve^{-i\alpha}}{z} + iK \log z \dots \dots (7.401)$$



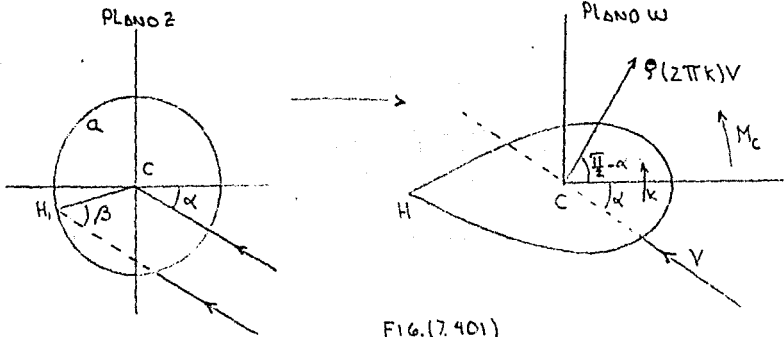


FIG.(7.401)

Para valores suficientemente grandes de  $|z|$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
 w &= ve^{i\alpha} \left( z - \frac{a_1}{z} - \dots \right) + \frac{ve^{i\alpha}}{z} \left( 1 - \frac{a_1}{z^2} - \dots \right) + ik \left[ \log z + \log \left( 1 - \frac{a_1}{z^2} - \dots \right) \right] \\
 &= ve^{i\alpha} z + ik \log z + \frac{ve^{-i\alpha} - ve^{-i\alpha} a_1}{z} + \dots \quad (7.402)
 \end{aligned}$$

comparando con (7.27) llegamos a que:

$$A = -ik, \quad B = ve^{-i\alpha} a^2 - ve^{i\alpha} a_1,$$

y de aquí que

$$x + iy = 2\pi ik \beta ve^{-i\alpha} = 2\pi k \beta ve^{i(\pi/2 - \alpha)}$$

$$M_c = \text{Re}(-2\pi \beta v^2 i a_1 e^{2i\alpha})$$

Hipótesis de Zhukovskii. Si  $H_1$  (véase figura (7.401)) es el punto que se transformará en el borde de salida  $H$  del perfil; si  $\varphi_1$  es la rapidez del viento en  $H_1$  en el plano del círculo (plano  $z$ ), y si  $\varphi$  es la rapidez del viento en  $H$  en el plano del perfil (plano  $w$ ), tenemos:

$$q_1 = \left| \frac{dw}{dw'} \right| = \left| \frac{dw}{dz} \right| \times \left| \frac{dz}{dw'} \right| = q \left| \frac{dz}{dw'} \right|$$

Ahora, en un borde de salida  $dz/dw' = 0$ . De esto se sigue que si  $q$  es finito, debemos tener  $q_1 = 0$ ; en otras palabras,  $H_1$  debe ser un punto de estancamiento para el flujo que circunda al círculo. La hipótesis de Zhukovskii es que la circulación, en el caso de un perfil propiamente diseñado en su rango de maniobra, siempre se ajusta a sí mismo, tal que la rapidez del aire en el borde de salida es finito.

Adoptando este punto de vista, debemos elegir la circulación de forma que  $H_1$  sea un punto de estancamiento. Si  $\beta$  es el ángulo entre la normal en  $H_1$  al círculo y la dirección de  $V$ ; de aquí, que la circulación debe tener una intensidad  $K = 2aV \sin \beta$ .

#### 7.41 El Levantamiento.

De la relación  $X + iY = \beta \cdot 2\pi \cdot K \cdot V e^{i(\pi/2 - \alpha)}$ ; desprendemos la siguiente conclusión: la fuerza, cuyas componentes son  $(X, Y)$  tiene magnitud:

(Densidad de aire)  $\times$  (circulación)  $\times$  (rapidez).

y es perpendicular a la dirección del movimiento del ala (o a la velocidad asintótica, si el ala se toma en reposo), y tiene en consecuencia un levantamiento. Este es el teorema de Kutta - Zhukovskii. Los detalles se ilustran en la figura (7.401).

La relación entre la dirección del levantamiento, el viento relativo y el sentido de la circu-

lación, esta dada por la siguiente regla:

Para obtener la dirección del levantamiento, rotamos el vector velocidad del viento relativo un ángulo recto, en el sentido opuesto al de la circulación. La magnitud del levantamiento es independiente de la forma del ala, mas para una  $V$  dada, decrece, con un incremento de la altura, mas  $\beta$  decrece.

La magnitud del levantamiento es fuerza por unidad de dilatación; pero ahora hemos tratado solo con movimiento bidimensional, y en consecuencia, solo nos referiremos con una parte de un cilindro infinitamente largo como ala, y éste está limitado entre dos planos paralelos separados una unidad de distancia. Si la distancia entre los planos fuese  $h$ , el levantamiento debe ser  $\int (2\pi K) V h$ ; este es el caso, cuando el ala es un tunel de viento "bidimensional"; es decir, cuando el ala es un cilindro que se extiende rectamente a través del tunel, desde una pared a la otra pared paralela.

#### 7.42 El coeficiente de levantamiento.

Si dibujamos el círculo y el perfil en el mismo diagrama como se ve en la figura (7.421), la recta que une el centro del perfil, al punto posterior de estancamiento del círculo, es llamado el primer eje del perfil o eje I. Comparando las figuras (7.211) con (7.421), vemos que la intensidad de la circulación como se calculó en (7.21) es:

$$K = 2\alpha V \sin \beta$$

donde  $\beta$  es el ángulo entre el eje I y la di-

rección del movimiento.

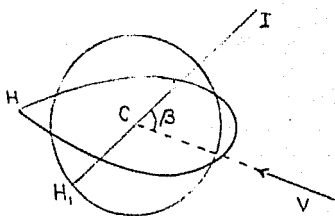


FIG. (7.421)

Observación: el ángulo  $\beta$  es llamado incidencia absoluta; luego la incidencia absoluta es la incidencia cuando la cuerda del perfil es considerada a lo largo del eje I, y el levantamiento es:

$$L = 4\pi\beta\alpha V^2 \text{ sen}\beta$$

El número adimensional:

$$CL = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 C}$$

donde C es la cuerda, es llamado el coeficiente de levantamiento del perfil, luego:

$$CL = \frac{8\pi\alpha}{C} \text{ sen}\beta$$

la gráfica de CL, contra la incidencia absoluta es por tanto, la curva seno.

El rango práctico de incidencia  $\beta$  es suficientemente pequeño, esto lleva a la aproximación  $\text{sen}\beta = \beta$  y la gráfica en consecuencia es una recta, cuyo gradiente convencionalmente es de-

notado por  $\alpha_0$ , luego  $CL = \alpha_0 \beta$ . El valor teórico de  $\alpha_0$  es  $8\pi a/c$ , y en general  $c = 4a \alpha$  aproximadamente; esto es,  $\alpha_0 = 2\pi$ .

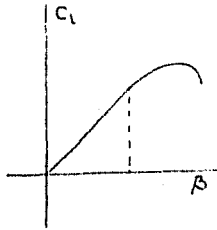


FIG. (7.422)

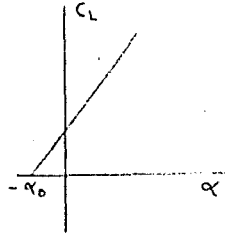


FIG. (7.423)

Si en lugar de incidencia absoluta usamos incidencia geométrica  $\alpha$ , medida desde la cuerda, tendremos  $\beta = \alpha_0 + \alpha$ , donde  $\alpha_0$  es una constante. La gráfica  $(CL, \alpha)$  es una recta suave de la misma pendiente  $\alpha_0$ , y claramente cuando la gráfica es dibujada,  $\alpha_0$  puede medirse, y entonces la dirección del eje I, puede ser deducida.

También resulta de las consideraciones anteriores, que el levantamiento y  $CL$ , ambos se anulan cuando  $\beta = 0$ ; es decir, cuando la dirección del movimiento es paralelo al eje I. Luego inferimos que el eje I da la dirección del movimiento, el cual no hereda levantamiento; por esta razón, el eje I puede también llamarse eje de levantamiento cero.

Considero oportuno cerrar esta discusión, pues lo que debía seguir, sería otros perfiles como los de Kármán-Trefftz, Von Mises Carofoli, etc.; además de discusiones técnicas más profundas sobre diseños de aviones, etc.

Espero haya sido suficiente la información vertida, pues el objeto de estas notas no es un estudio exhaustivo de los temas tratados, sino de dar una idea general de dónde es posible aplicar la variable compleja. Además existen otras áreas que nos falta considerar. Para más detalles consulte la bibliografía indicada al final de este trabajo.

8. CIRCUITOS SIMPLES COMO EJEMPLOS DE SISTEMAS OSCILANTES. OSCILACIONES LIBRES EN UN CIRCUITO IDEAL SIMPLE.

Iniciaremos con un circuito eléctrico lo más simple posible, para analizar las oscilaciones eléctricas, dicho circuito consta de un capacitor ideal en serie, con una bobina ideal. Considérese primero oscilaciones libres, suponga que una cantidad de energía ha sido administrada a la combinación en algún instante (por ejemplo, colocando una carga en el capacitor), y después de este instante, no hay conexión con el exterior. La energía puede ser almacenada en el sistema de dos maneras:

a) La energía magnética en la bobina, puede ser considerada a su análogo, de energía cinética en mecánica, y tiene su valor

$$U_c^{\text{mec}} = \frac{1}{2} m v^2, \quad U_L^{\text{mag}} = \frac{1}{2} L I^2$$

donde  $I$  es la corriente que fluye por la bobina.

b) La energía eléctrica en el capacitor; ésta puede ser considerada a su análogo, energía potencial mecánica:

$$U_c = \frac{1}{2} C V^2$$

donde  $V$  es el voltaje, a través del capacitor  $C$ .

La presencia de energía en el capacitor, implica una caída de voltaje a través del capacitor, y en consecuencia fluye corriente y se almacena energía magnética en la bobina. Análogamente, la presencia de energía magnética

tica, requiere de una corriente eléctrica, que fluya por la bobina, una consecuente caída de potencial y una energía eléctrica almacenada en el capacitor. Esperamos en primer lugar, oscilaciones, puesto que la presencia de energía, de alguna forma requiere un cambio de energía del otro; también es necesario que la energía total en el sistema sea constante, la misma en todo momento, puesto que no hay conexión con el exterior y la condición de no disipación se ha supuesto.

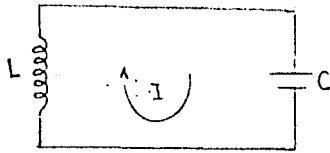


FIG. (8.1)

Antes de iniciar los razonamientos puramente físicos, escribiremos una ecuación para la corriente instantánea en el circuito. Por la ley de Kirchoff, la suma del voltaje inducido  $L \frac{dI}{dt}$  y el voltaje en el capacitor  $q/c$  debe ser cero:

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{c} \int I dt = 0$$

si derivamos esta ecuación con respecto al tiempo, tendremos la ecuación diferencial:

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{I}{C} = 0$$

ó

$$\frac{d^2I}{dt^2} = -\frac{I}{LC} \dots \dots \dots (8.1)$$



Esta última ecuación es llamada la ecuación del movimiento armónico simple. Esta es una de las ecuaciones diferenciales más conocidas.

La ecuación diferencial anterior es de segundo orden y es lineal, en el sentido de que la suma de dos soluciones es también una solución; esto se sigue del hecho de que únicamente la primera potencia de  $I$  y su derivada aparecen en dicha ecuación; la ecuación también es homogénea, esto porque todos los términos contienen a la variable  $I$  o sus derivadas. Esta ecuación es de coeficientes constantes, puesto que los múltiplos de  $I$  y sus derivadas no son funciones de la variable independiente  $t$ ; los métodos que se ilustrarán, se darán suponiendo una forma funcional como solución, verificando y evaluando constantes, sustituyendo en la ecuación, tal método es llamado heurístico.

Solución: por el método de series. Primero supondremos que la ecuación (8.1) tiene una solución, que viene expresada en serie de potencias respecto a  $t$ .

$$I = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

derivando dos veces:

$$\frac{dI}{dt} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 t + 4 \cdot 3 a_4 t^2 + \dots$$

Estas relaciones pueden sustituirse en (8.1) para determinar los coeficientes, de aquí pues:

$$2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 + 4 \cdot 3 a_4 + \dots = \frac{1}{LC} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots)$$

un pequeño análisis nos muestra que si la ecuación anterior es válida para todos los valores de  $t$ , los coeficientes de potencias iguales de  $t$ , deben ser iguales; esto es,

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 1 LC} \quad , \quad a_3 = -\frac{a_1}{3 \cdot 2 LC} \quad , \quad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3 LC} = \frac{a_0}{4! (LC)^2}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4 LC} = \frac{a_1}{5! (LC)^2}$$

generalizando:

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{(2n)(2n-1)LC} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)! (LC)^n}$$

$$a_{2n+1} = -\frac{a_{2n-1}}{(2n+1)(2n)LC} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)! (LC)^n}$$

obsérvese que los coeficientes dependen únicamente de  $a_0$  y de  $a_1$ , esto nos lleva a dos soluciones, como se requiere para una ecuación de segundo orden; ahora escribimos la solución general para  $I$

$$I = a_0 \left[ 1 - \frac{t^2}{2! LC} + \frac{t^4}{4! (LC)^2} - \frac{t^6}{6! (LC)^3} + \dots \right] \\ + a_1 \sqrt{LC} \left[ \frac{t}{(LC)^{1/2}} - \frac{t^3}{3! (LC)^{3/2}} + \frac{t^5}{5! (LC)^{5/2}} - \dots \right]$$

comparando con tablas de series, nos muestra

que el primer paréntesis, corresponde al desarrollo en serie de Taylor para la función coseno, en tanto que el segundo paréntesis corresponde a la función seno; esto es:

$$I = a_0 \cos \left( \frac{t}{\sqrt{LC}} \right) + a_1 \sqrt{LC} \operatorname{sen} \left( \frac{t}{\sqrt{LC}} \right)$$

puesto que  $a_1$  es arbitraria, la cantidad  $a_1 \sqrt{LC}$  puede escribirse sencillamente como  $C_2$ , así mismo  $a_0$  como  $C_1$ , y definiendo  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  tenemos:

$$I = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_0 t .$$

Esta expresión que es la solución de la ecuación (8.1), tiene dos soluciones independientes y dos constantes arbitrarias; estas constantes no pueden ser determinadas, a menos que tengamos información acerca de la manera en como inician las oscilaciones en el circuito (condiciones iniciales).

#### Solución suponiendo senos y cosenos.

Con algunos conocimientos físicos, puede suponerse que la solución es oscilante, entonces tenemos derecho a suponer que

$$I = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_0 t$$

es una posible solución de la ecuación (8.1). Debemos conocer que seno y coseno son linealmente independientes, y entonces deben ser nuestros candidatos como soluciones linealmente independientes de (8.1). La derivación de  $I$  y la sustitución en (8.1) debe verificar lo que hemos supuesto; así mismo, la frecuencia  $\omega_0$  puede fácilmente verificarse.

Solución suponiendo exponenciales con exponentes complejos.

Estrechamente relacionado con el anterior, el más importante es su extensión a la forma compleja, para representar senos y cosenos como hipótesis de solución en términos de exponenciales, el cual es un método estandar, para ecuaciones diferenciales lineales, con coeficientes constantes; supongamos cierto:

$$I = A_1 e^{pt} + A_2 e^{-pt} \dots \dots \dots (8.2)$$

entonces

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = p^2 (A_1 e^{pt} + A_2 e^{-pt})$$

sustituyendo en (8.1)

$$p^2 (A_1 e^{pt} + A_2 e^{-pt}) = -\frac{1}{LC} (A_1 e^{pt} + A_2 e^{-pt})$$

$$p^2 = -\frac{1}{LC}$$

o sea 
$$p = i\sqrt{\frac{1}{LC}} = i\omega_0$$

Esta sustitución indica que (8.2) es una solución de la ecuación del movimiento armónico simple, siempre que  $p = i\omega_0$

$$I = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} \dots \dots \dots (8.3)$$

usando la identidad de Euler,  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ,  $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ ; nos lleva a:

$$I = (A_1 + A_2) \cos \omega_0 t + i(A_1 - A_2) \sin \omega_0 t$$

puesto que  $A_1$  y  $A_2$  son constantes arbitrarias, haciendo  $C_1 = A_1 + A_2$  y  $C_2 = i(A_1 - A_2)$ , obtenemos nuevamente:

$$I = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

Si un voltaje  $V \cos \omega t$  se aplica ahora a un circuito que contiene una resistencia  $R$ , una bobina  $L$  y un capacitor  $C$  en serie, la ecuación que se requiere resolver es:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = V_m \cos \omega t \dots \dots (8.4)$$

como se sabe

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

si suponemos que la corriente, tiene una solución

$$I = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \dots \dots \dots (8.5)$$

al sustituir en la ecuación (8.4) tenemos

$$i\omega L (Ae^{i\omega t} - Be^{-i\omega t}) + R(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) + \frac{1}{i\omega C} (Ae^{i\omega t} - Be^{-i\omega t}) = \frac{V_m}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

siguiendo los razonamientos anteriores, esta ecuación puede ser cierta para todos los valores del tiempo, únicamente si los coeficientes de  $e^{i\omega t}$  son los mismos en ambos miembros de la ecuación, y análogamente para  $e^{-i\omega t}$ .

$$A[R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})] = \frac{V_m}{2}, \quad B[R - i(\omega L - \frac{1}{\omega C})] = \frac{V_m}{2}$$

la cantidad compleja en el paréntesis, puede ser llamada  $Z$  y escribir:

$$Z = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = |Z| e^{i\psi}$$

donde  $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$ ;  $\psi = \tan^{-1}(\omega L - \frac{1}{\omega C})/R$ ,  
análogamente  $R - i(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = |Z| e^{-i\psi}$   
entonces:

$$A = \frac{V_m}{2|Z|} e^{-i\psi}$$

$$y \quad B = \frac{V_m}{2|Z|} e^{i\psi}$$

( $A$  y  $B$  son conjugados: tienen la misma parte real y signo opuesto en la parte imaginaria). Sustituyendo en (8.5)

$$I = \frac{V_m}{|Z|} \left[ \frac{e^{i(\omega t - \psi)} + e^{-i(\omega t - \psi)}}{2} \right]$$

comparando con  $\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$

tenemos

$$I = \frac{V_m}{|Z|} \cos(\omega t - \psi)$$

Este resultado final da la magnitud deseada y el ángulo base de la corriente con respecto al voltaje aplicado. De este modo la información está contenida en la constante  $A$

o en la constante  $B$ , y ninguna información está en una que no esté en la otra. La constante  $B$  es por necesidad la conjugada de  $A$ , ya que esta es la única manera en la cual las dos pueden ser sumadas, para darnos una corriente real, y la respuesta final exacta para la corriente, es que debe ser real, luego pues la mitad del trabajo fue innecesario. Podemos iniciar únicamente con  $V_m e^{i\omega t}$  en lugar de una expresión con dos términos, la que como sabemos es equivalente a  $V_m \cos \omega t$ , para la corriente tenemos pues, solamente:

$$I = \frac{V_m}{|Z|} e^{i(\omega t - \psi)}$$

Aunque esta expresión nos da la corriente, puesto que es un número complejo y no una cantidad real, ésta contiene toda la información que deseamos conocer: La magnitud de la corriente  $V/|Z|$  y su base con respecto al voltaje aplicado  $\psi$ . Este procedimiento, puede hacerse exactamente escribiendo:

$$V(t) = \text{Re} [V_m e^{i\omega t}]$$

$$I(t) = \text{Re} \left[ \frac{V_m}{|Z|} e^{-i(\omega t - \psi)} \right]$$

A causa de la inconveniencia de usar esta notación, es común no escribirla explícitamente para entenderla; esto es, cualquier frecuencia simple sinusoidal  $f(t)$ , se expresa por su magnitud y su base  $M e^{i\theta}$ , o por  $\text{Re}$  e  $\text{Im}$  de

$A + iB$  (en ase) y (fuera de ase) respectivamente, la expresión instantánea, puede encontrarse multiplicando por  $e^{i\omega t}$ , y tomando la parte real:

$$f(t) = \text{Re}[M e^{i(\omega t + \theta)}] = \text{Re}[(A + iB) e^{i\omega t}]$$

El uso de exponenciales complejos para calcular la potencia.

Dado un voltaje senoidal a través de una bobina

$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_1)$$

y una corriente senoidal que fluye a través de la misma bobina

$$I(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_2)$$

la expresión para calcular la potencia instantánea, está dada al multiplicar entre sí  $V(t) \cdot I(t)$ ; es decir:

$$w(t) = V(t) \cdot I(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi_1) \cos(\omega t + \phi_2)$$

más,  $\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$ ; esto es

$$w(t) = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2) + \frac{V_m I_m}{2} \cos(\phi_1 + \phi_2)$$

Esta tiene una parte que es promedio del semiproducto de las amplitudes máximas y el coseno de la diferencia de los ángulos ase, y tiene una parte que es de doble frecuencia senoidal de corriente alterna (C.A.), dado por el segundo término.

Una expresión idéntica, de hecho se obtiene si uno utiliza la notación compleja en la forma completa  $f(t) = \text{Re}[M e^{i(\omega t + \theta)}]$  ya que son



exáctamente equivalentes:

$$w(t) = \left\{ \operatorname{Re} [V_m e^{i(\omega t + \phi_1)}] \right\} \left\{ \operatorname{Re} [I_m e^{i(\omega t + \phi_2)}] \right\}$$

La expresión exacta para la potencia instantánea, puede también ser escrita en notación compleja; para esto observemos:

$$\operatorname{Re} A = \frac{1}{2} (A + \bar{A})$$

también:

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} A)(\operatorname{Re} B) &= \frac{1}{4} (A + \bar{A})(B + \bar{B}) = \frac{1}{4} (A\bar{B} + \bar{A}B) + \frac{1}{4} (AB + \bar{A}\bar{B}) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [A\bar{B} + \bar{A}B] \end{aligned}$$

Entonces, si  $V$  e  $I$  son considerados ahora como factores complejos de  $e^{i\omega t}$ ;  $w(t)$  puede ser escrita como:

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V\bar{I} + VI e^{2i\omega t}]$$

La más importante es la parte promedio de ésta:

$$W_{\text{prom}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V\bar{I}]$$

9. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE Y LOS CIRCUITOS ELECTRICOS.

La ecuación auxiliar para un circuito L, R, C.

Considérese el circuito de la figura (9.1), el cual consta de una bobina L, una resistencia R y un capacitor C en serie, con un voltaje  $V(t)$  aplicado a sus terminales A y B, para  $t > 0$ .

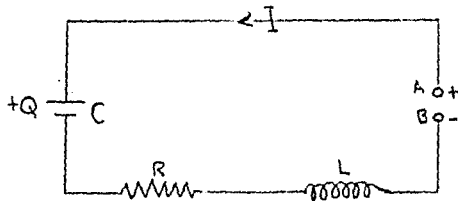


FIG.(9.1)

Si  $I$  es la corriente en el circuito, y  $Q$  es la carga en el condensador, esto es:

$$I = \frac{dQ}{dt} \dots \dots \dots (9.1)$$

la ecuación fundamental para el circuito, se obtiene igualando al voltaje  $V$ , la suma de las caídas de los voltajes en la bobina, la resistencia y el capacitor; es decir:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = V, \quad t > 0 \dots \dots \dots (9.2)$$

El problema es resolver (9.1) y (9.2) con condiciones iniciales

$$I = I_0 \quad \text{y} \quad Q = Q_0 \quad \text{cuando} \quad t = 0 \dots \dots \dots (9.3)$$

Es bien importante observar que la convención del signo está implícita en (9.2) y en (9.3): una de las terminales A, B; digamos A se selecciona con signo positivo y el voltaje aplicado  $V$ , es considerado positivo cuando A está a más potencial que B; la corriente  $I$  es positiva cuando fluye a partir de la terminal positiva A; finalmente por (9.2) cuando  $I$  es positiva, la carga  $Q$  se incrementa; esto es, la dirección positiva de la corriente se dirige hacia la placa positiva del condensador. Cuando estas condiciones han sido aceptadas,  $I_0, Q_0$ , deben tener los signos de acuerdo con lo anterior, y en consecuencia los valores resultantes de  $I$  y de  $Q$ , deberán ser interpretados de acuerdo con esto.

Formemos pues la ecuación auxiliar, usando la transformada de Laplace, en la ecuación (9.2)

$$(LS + R)\bar{I} + \frac{\bar{Q}}{C} = LI_0 + \bar{V} \dots \dots \dots (9.4)$$

$$\bar{Q} = \frac{\bar{I}}{S} + \frac{Q_0}{S} V \dots \dots \dots (9.5)$$

la sustitución de  $\bar{Q}$  en (9.4) nos da:

$$(LS + R + \frac{1}{CS})\bar{I} = \bar{V} + LI_0 - \frac{Q_0}{S} \dots \dots (9.6)$$

esto nos da  $\bar{I}$ , y debe ser recordada como la ecuación fundamental para un circuito L, R, C.  $\bar{Q}$  si es requerida se encuentra de (9.5) usando (9.6).

Para un circuito que consta de una resistencia

y de bobina únicamente, la ecuación auxiliar es:

$$(LS + R)I_0 = \bar{V} + LI_0 \dots \dots \dots (9.7)$$

Esta contiene únicamente la condición inicial  $I_0$ , puesto que ésta viene de una ecuación diferencial de primer orden para la corriente. Análogamente, para un circuito que contiene resistencia y capacitor únicamente, la ecuación auxiliar es:

$$\left(R + \frac{1}{CS}\right)\bar{I} = \bar{V} - \frac{Q_0}{CS} \dots \dots \dots (9.8)$$

Tanto (9.7) como (9.8) están incluidas en (9.6), o pueden ser deducidas directamente. Para terminar, existe una extensión útil de (9.5) y (9.6); sea una resistencia inductiva  $L, R$ , en serie con un condensador permeable de capacidad  $C$  y conductancia permeable  $1/G$ , las ecuaciones auxiliares son:

$$\left(LS + R + \frac{1}{G + CS}\right)\bar{I} = \bar{V} + LI_0 - \frac{Q_0}{G + CS} \dots \dots (9.9)$$

$$Q = \frac{C(I_0 + Q_0)}{G + CS} \dots \dots \dots (9.10)$$

Regresando a la ecuación (9.6) observamos que ésta incluye la corriente inicial en la bobina, y la carga inicial en el condensador (estos se relacionan con la energía cinética y potencial respectivamente, de la corriente).

Problema 9.1 Un voltaje constante  $E$ , se aplica en  $t=0$ , a un circuito  $L, C, R$ , con carga y corriente cero inicialmente.

Solución: aquí la ecuación auxiliar (9.6) es:

$$(Ls + R + \frac{1}{Cs}) \bar{I} = \frac{E}{s}$$

entonces

$$\bar{I} = \frac{E}{L[s^2 + (\frac{R}{L})s + (\frac{1}{LC})]} = \frac{E}{L[(s+\mu)^2 + \eta^2]}$$

donde  $\mu = \frac{R}{2L}$ ,  $\eta^2 = \frac{1}{LC} - \mu^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$

usando convolución (transformada inversa de Laplace), encontramos:

$$I = \begin{cases} \frac{E}{\eta L} e^{-\mu t} \operatorname{sen} \eta t, & \text{si } \eta^2 > 0 \\ \frac{E}{L} t e^{-\mu t}, & \text{si } \eta^2 = 0 \\ \frac{E}{kL} e^{-\mu t} \operatorname{senh} kt, & \text{si } \eta^2 = -k^2 < 0 \end{cases}$$

Problema 9.2 Un condensador de capacidad  $C$ , cargado con un voltaje  $E$ , es descargado en  $t=0$ , con una resistencia inductiva  $LR$

Solución: aquí  $Q_0 = CE$ ,  $I_0 = 0$ ,  $V = 0$  y (9.6) será:

$$(Ls + R + \frac{1}{Cs}) \bar{I} = -\frac{E}{s} \dots \dots \dots (9.11)$$

la cual es la misma que en el ejemplo 1, excepto por el signo negativo. Esto implica que la corriente inicial fluye desde la placa positiva del condensador. Usando (9.5) y (9.11) la transformación de la carga sobre el condensador, se encuentra que es:

$$\bar{Q} = \frac{CE}{s} = -\frac{CE}{s(LCs^2 + R(st+1))} = \frac{CE(s+2\mu)}{(s+\mu)^2 + \eta^2}$$

donde hemos usado la notación del problema 9.1, en el caso de que  $\eta^2 > 0$  tenemos:

$$Q = CE e^{-\mu t} (\cos \eta t + \frac{\mu}{\eta} \text{sen } \eta t)$$

Problema 9.3 Una corriente constante  $E/R$ , fluye desde una batería de voltaje  $E$ , a través de una combinación en paralelo de un condensador  $C$  y una resistencia inductiva  $LR$  (figura 9.2), cuando  $t=0$  el interruptor  $S$  es abierto. Se requiere encontrar el potencial a través de las terminales del condensador.

Solución: Después de que el interruptor  $S$ , sea abierto, el circuito consiste de  $LRC$  en serie, la carga inicial  $Q_0$  en el condensador es  $CE$ , y la corriente inicial  $I_0$  en la bobina es  $-E/R$ , el signo menos ha sido tomado así de las condiciones del problema; esto es, fluye desde la placa positiva del condensador. Con esos valores iniciales (9.6) será:

$$(Ls + R + \frac{1}{Cs}) \bar{I} = -\frac{LE}{R} - \frac{E}{s}$$

entonces

$$\bar{I} = - \frac{E(s + 2\mu)}{R[(s + \mu)^2 + \eta^2]}$$

luego, considerando únicamente el caso de que  $\eta^2 > 0$

$$I = -\frac{E}{R} e^{-\mu t} (\cos \eta t + \frac{\mu}{\eta} \text{sen } \eta t)$$

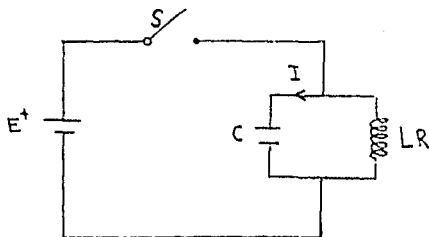


FIG. (9.2)

si  $V = Q/C$  es el voltaje a través de las terminales del condensador, de aquí que usando (9.5)

$$\bar{V} = \frac{\bar{Q}}{C} = \frac{E}{s} - \frac{E(Ls + R)}{Rs(LCs^2 + R(s+1))} = \frac{E(s + \frac{R}{L}) - (\frac{1}{RC})}{(s + \mu)^2 + \eta^2}$$

$$V = E e^{-\mu t} \left\{ \cos \eta t + \frac{1}{\eta} \left( \frac{R}{2L} - \frac{1}{RC} \right) \text{sen } \eta t \right\}$$

Este es el tipo más simple de un circuito disyuntor, restringido a un problema, en el que se requiere encontrar el voltaje a través de los contactos de un interruptor después de que éste ha sido abierto; en este caso el voltaje a través del interruptor  $S$  es  $E - V$ .

Problema 9.4 Un voltaje alterno  $E \text{ sen}(wt + \phi)$  es aplicado en  $t=0$ , a un circuito LRC, con corriente y carga  $Q$  cero, inicial.

Solución: Puesto que  $\sin(\omega t + \phi) = \sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi$ , su transformada es:

$$\frac{s \sin \phi + \omega \cos \phi}{s^2 + \omega^2}$$

luego, usando las notaciones, la ecuación auxiliar es en este caso:

$$\bar{I} = \frac{E}{L} \cdot \frac{s^2 \sin \phi + \omega s \cos \phi}{(s^2 + \omega^2)((s + \mu)^2 + \eta^2)}$$

Consideraremos solamente, el caso interesante  $\eta^2 > 0$ . Para encontrar  $I$  podemos expresar (9.6) en fracciones parciales, con denominadores cuadráticos reales, u observando que su denominador es  $(s - i\omega)(s + i\omega)(s + \mu - i\eta)(s + \mu + i\eta)$ , así pues:

$$I = \frac{E}{L} \left\{ \frac{-\omega^2 \sin \phi + i\omega^2 \cos \phi}{2i\omega [(\mu + i\omega)^2 + \eta^2]} e^{i\omega t} + \text{conjugado} \right\} +$$

$$\frac{E}{L} \left\{ \frac{(-\mu + i\eta)^2 \sin \phi + \omega(-\mu + i\eta) \cos \phi}{2i\eta [(-\mu + i\eta)^2 + \omega^2]} e^{-\mu t + i\omega t} + \right.$$

$$\left. \text{conjugado} \right\}$$

Para reducir a su forma real, hagamos los siguientes cambios:

$$\frac{L}{\omega} [2\mu\omega + i(\omega^2 - \mu^2 - \eta^2)] = z e^{i\delta}$$

$$(\omega^2 + \mu^2 - \eta^2) + 2i\mu\eta = z_1 e^{i\delta_1}$$



$$[(\mu^2 - \eta^2) \operatorname{sen} \phi - \mu \omega \cos \phi] + i[\eta \omega \cos \phi - 2\mu \eta \operatorname{sen} \phi] = Z_2 e^{i\delta_2}$$

entonces I es:

$$I = \frac{E}{Z} \operatorname{sen}(\omega t + \phi - \delta) + \frac{E Z_2}{\eta L Z_1} e^{-\mu t} \operatorname{sen}(\eta t + \delta_1 + \delta_2)$$

## 10. POTENCIAL ELECTROSTATICO.

### 10.1 Funciones potenciales para problemas electrostáticos bidimensionales.

Recordemos las condiciones de D'Alambert-Euler (Cauchy-Rieman):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \dots \dots \dots (10.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y} \dots \dots \dots (10.12)$$

si la ecuación (10.11) es derivada con respecto a  $x$ , la ecuación (10.12) con respecto a  $y$ , y las ecuaciones resultantes se suman, resulta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \dots \dots \dots (10.13)$$

análogamente, si el orden de derivación es invertido, resulta:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \dots \dots \dots (10.14)$$

Estas ecuaciones son conocidas como ecuaciones de Laplace en dos dimensiones; entonces tanto la parte real como la parte imaginaria de una función analítica de variable compleja, satisfacen la ecuación de Laplace, y deben ser adecuadas para usarlas como funciones potenciales, para problemas electrostáticos bidimensionales. La forma en que esto se hace,

en problemas específicos, y las limitaciones de su utilidad, serán mostradas con ejemplos.

En un problema en el que una de las partes  $u$  o  $V$ , es elegido como la función potencial, la otra será proporcional a la función de flujo; para demostrar esto, supongamos que  $u$  es la función de potencial en voltios, para un problema particular. El campo eléctrico que se obtiene como el gradiente negativo de  $u$  nos da:

$$E_x = - \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad E_y = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

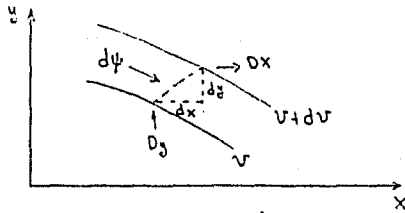


FIG. (10.11)

La diferencial total de la función  $V$  (el cambio de  $V$  que corresponde a cambios en las coordenadas  $x$  e  $y$  de  $dx$  y  $dy$ ) es:

$$\partial V = \frac{\partial V}{\partial x} \partial x + \frac{\partial V}{\partial y} \partial y$$

mas, de acuerdo a las condiciones de D'Alambert-Euler:

$$-\partial V = \frac{\partial u}{\partial y} \partial x - \frac{\partial u}{\partial x} \partial y = -E_y dx + E_x dy$$

$$\text{ó} \quad -\epsilon \partial V = -D_y dx + D_x dy$$

Analizando la figura (10.11) reconocemos justamente el flujo eléctrico  $d\psi$  entre las curvas  $V$  y  $V+dv$ , con la dirección positiva como lo muestra la flecha, entonces:

$$-d\psi = \epsilon dv$$

y excepto por una constante, la cual puede tomarse igual a cero, eligiendo el sistema de referencia de manera que el flujo  $v=0$ ,

$$-\psi = \epsilon V \frac{\text{coulombios}}{\text{metro}}$$

Análogamente, si  $V$  se elige como la función de potencial en voltios, para algún problema,  $\epsilon U$  es la función flujo en coulombios por metro, con una elección apropiada de la dirección para que el flujo sea positivo.

Hemos visto que  $U$  o  $V$ , puede ser usada como la función de flujo, ya que ambas satisfacen la ecuación de Laplace. La utilidad del concepto, no obstante, lo importante es que seamos capaces de encontrar la función analítica  $w=f(z)$ , tal que  $U$  y  $V$  también satisfagan las condiciones en frontera, para el problema en consideración.

Como un ejemplo, supongamos que se desean los potenciales de distribución en el plano  $z$ , cuando las condiciones en la frontera son:

$$V = X^{4/3}, \quad y=0$$

tomemos

$$W = Z^{4/3}$$

Es claro que para  $y=0$ , la parte real de  $W$  es  $U = X^{4/3}$ ; además vemos que  $dw/dz$  existe y es única, excepto en  $z=0$ ; entonces  $U$  es una fun-

ción de potencial adecuada para este problema. Es más conveniente para esta función particular, expresar  $z$  en coordenadas polares.

$$w = u + iV = r^{4/3} e^{i4/3\theta}$$

entonces  $u = r^{4/3} \cos\theta$ ,  $V = r^{4/3} \sin\theta$

Las líneas equipotenciales, se encuentran tomando  $u$  igual a una constante, como se muestra en la figura (10.12) para  $u=0$  y  $u=1$ . Es interesante observar que la frontera de la función  $u = x^{4/3}$ ,  $y=0$ , tiene forma análoga a la de un diodo, con su cátodo en  $y=0$ . Usando estas ideas, un diodo plano puede ser truncado, y las líneas potenciales correctas prolongadas sobre la arista libre, colocándose electrodos a lo largo de las líneas equipotenciales como se muestra en la figura (10.13).

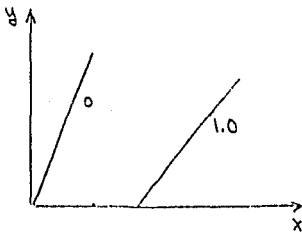


FIG. (10.12)

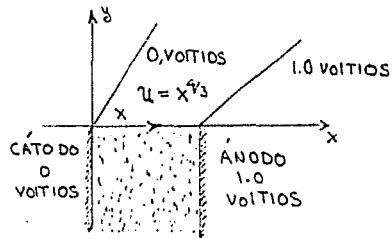


FIG. (10.13)

Este procedimiento es muy importante en el diseño de cañones electrónicos con flujo regular, y el resultado es conocido como cañón de Pierce.

### 10.2 Mapeo conforme

Un punto de vista un poco diferente al em-

pleado anteriormente, se sigue si nos referimos a los planos  $z$  y  $w$ ; puesto que la relación funcional fija un valor de  $w$ , correspondiendo a un valor de  $z$ , para una función dada

$$w = f(z)$$

cualquier punto  $(x, y)$  en el plano  $z$ , le corresponde algún punto  $(u, v)$  en el plano  $w$ ; cuando este punto se mueve a lo largo de alguna curva  $x = F(y)$  en el plano  $z$ , el punto correspondiente en el plano  $w$  traza una  $u = F_1(v)$ . Si este se mueve en una región en el plano  $z$ ; el punto correspondiente en  $w$ , se moverá a través de alguna región en el plano  $w$ . En general, un punto en el plano se transforma en un punto en el plano  $w$ , una curva en el plano  $z$  se transforma en una curva en el plano  $w$ ; y una región en el plano  $z$  se transforma en una región en el plano  $w$ .

Cuando la función  $F(z)$  es analítica, la derivada  $dw/dz$  en un punto es independiente de la dirección de cambio  $dz$  del punto. La derivada puede ser escrita en términos de su magnitud y fase:

$$\frac{dw}{dz} = M e^{i\alpha}$$

$$dw = M e^{i\alpha} dz$$

la magnitud  $dw$  es  $M$  veces la magnitud de  $dz$ , y el ángulo de  $dw$  es  $\alpha$ , mas el ángulo  $dz$  etc.; ya hemos tenido ocasión de hablar de la ortogonalidad de las funciones  $u$  y  $v$ , puesto que las líneas  $v = \text{cte.}$  son líneas de flujo, cuando las líneas  $u = \text{cte.}$  son líneas de igual poten-

cial y viceversa. Desde este punto de vista la transformación conforme puede entenderse como aquella que toma un campo uniforme en el plano  $w$  (representado por la constante  $u$ , igualmente espaciada y líneas  $v = \text{cte.}$ ) y transforma a aquellas regiones conservando las propiedades del campo electrostático.

Frecuentemente la transformación se hace paso a paso; esto es, el campo uniforme es transformado primero en algún plano complejo intermedio, mediante  $z_1 = f(w)$ , después en un segundo plano intermedio  $z_2 = g_2(z_1)$ , y finalmente en un plano  $z_3 = h(z_2)$ , en el cual las condiciones en la frontera se satisfacen.

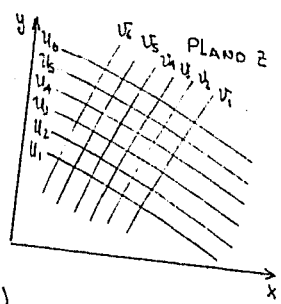
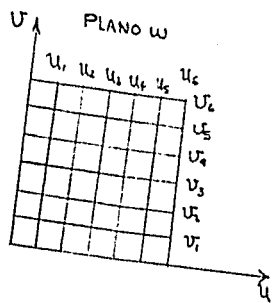


FIG. (10.21)

10.3 La función potencia, campo próximo a una esquina conductora.

Como un primer ejemplo consideremos

$$w = z^p$$

es conveniente usar la forma polar para  $z$

$$w = (re^{i\theta})^p = r^p e^{ip\theta}$$

$$U = r^p \cos p\theta, \quad V = r^p \sin p\theta$$

Desde el punto de vista del mapeo conforme, el campo en el plano  $w$  es uniforme; las líneas de igual potencial (digamos  $V = \text{cte.}$ ) en el plano  $w$  pueden ser transformadas en el plano  $z$ , tomando  $V = \text{cte.}$  en  $V = r^p \sin p\theta$ . De acuerdo con lo antes expuesto, no tomamos consideraciones explícitas de la existencia del plano  $w$ , sino simplemente reconocemos que  $V$  es una solución de la ecuación de Laplace, y tratar de ajustar las constantes, de tal forma que  $V$  sea igual a una constante, las líneas equipotenciales de ataque del problema.

Si  $v$  se elige como la función de potencial, la forma de la curva  $v = \text{cte.}$  (igual potencial) es evidente por inspección, porque  $v$  es cero en  $\theta = 0$  y también en  $\theta = \pi/p$ ; luego si dos planos semiinfinitos conductores con potencial cero intersecándose a un ángulo  $\alpha$ , donde

$$p = \frac{\pi}{\alpha}$$

coinciden con su equipotencial y las condiciones en frontera se satisfacen. La forma de las curvas  $U = \text{cte.}$  y  $V = \text{cte.}$  dentro del ángulo, nos dan entonces la configuración cerca de una esquina conductora, las fuentes presumiblemente emergen siempre que no se perturbe el campo.

Las líneas equipotenciales en la vecindad de la esquina pueden ser dibujadas eligiendo valores de  $V$  y graficando la ecuación polar de  $r$  contra  $\theta$ , con  $p = \pi/\alpha$ . Análogamente el flujo o líneas de campo, pueden ser trazadas dando diversos valores de  $U$  y graficando  $U = r^p \cos p\theta$ .



La forma del campo graficando de esta manera, para esquinas con  $\alpha = \pi/4$ ,  $\pi/2$  y  $3/2\pi$  se muestran en las figuras (10.31, 10.32, 10.33) respectivamente. Estos esquemas son de considerable ayuda para opinar sobre la forma correcta del campo, en un mapa de campo que tiene una o más fronteras conductoras.

Este es uno de pocos ejemplos, en los cuales la forma propia de la función a usar debía concebirse, para llegar acorde si las fronteras fueron dadas así como el punto inicial; porque si  $z$  es elevada a la potencia  $\pi/\alpha$ , todos los ángulos son multiplicados por este factor, y la condición en la frontera se extiende fuera de la recta  $V=0$ , en el plano  $w$ ; luego  $V$  satisface la ecuación de Laplace en  $x$  e  $y$ , y la condición de potencial sobre la frontera, esto es la solución única para el potencial interno.

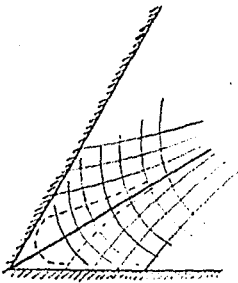


FIG. (10.31)

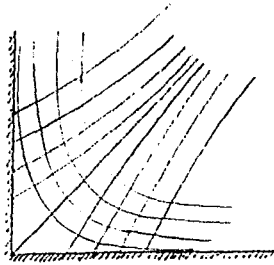


FIG. (10.32)

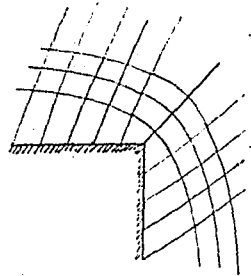


FIG. (10.33)

### 10.4 La transformación logarítmica.

Considere la función:

$$w = C_1 \ln z + C_2$$

la función logaritmo de un número complejo es fácil de calcular, si el número complejo se expresa en forma polar:

$$\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$$

esto es

$$w = C_1(\ln r + i\theta) + C_2$$

tomando las constantes  $C_1$  y  $C_2$  como reales, entonces

$$u = C_1 \ln r + C_2$$

$$v = C_1 \theta$$

si  $u$  se toma como la función potencial, reconocemos la forma del potencial logarítmico, encontrando previamente el potencial alrededor de una línea de carga, un cilindro cargado, o entre dos cilindros coaxiales. La función de flujo,  $\psi = -Ev$ , es entonces proporcional al ángulo  $\theta$ , como lo es para un problema de líneas para un campo eléctrico radial.

Para calcular las constantes en un problema particular tomemos una línea coaxial con un conductor interno de radio  $a$ , a potencial cero, y un conductor externo de radio  $b$ , a potencial  $V_0$ ; sustituyendo en  $u = C_1 \ln r + C_2$  tenemos:

$$0 = C_1 \ln a + C_2$$

$$V_0 = C_1 \ln b + C_2$$

resolviendo obtenemos:

$$C_1 = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \quad ; \quad C_2 = -\frac{V_0 \ln a}{\ln(b/a)}$$

esto es  $w = C_1 \ln z + C_2$  puede ser escrito como

$$w = V_0 \left[ \frac{\ln(z/a)}{\ln(b/a)} \right]$$

$$\phi = u = V_0 \left[ \frac{\ln(z/a)}{\ln(b/a)} \right] \text{ voltios}$$

$$\psi = -\varepsilon V = -\frac{\varepsilon V_0 \theta}{\ln(b/a)} \frac{\text{coulombios}}{\text{metro}}$$

### 10.5 La transformación coseno inverso.

Considere la función:

$$w = \cos^{-1} z$$

ó  $x + iy = \cos(u + iv) = \cos u \cosh v - i \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v$

$$x = \cos u \cosh v$$

$$y = -\operatorname{sen} u \operatorname{senh} v$$

de aquí obtenemos

$$\frac{x^2}{\cosh^2 v} + \frac{y^2}{\operatorname{senh}^2 v} = 1 \quad ; \quad \frac{x^2}{\cos^2 u} - \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2 u} = 1$$

La primera ecuación, cuando  $V$  es constante es un conjunto de elipses confocales con focos en  $\pm 1$ ; y la segunda, cuando  $u$  es constante representa un conjunto de hipérbolas confocales ortogonales a las elipses, figura (10.51).

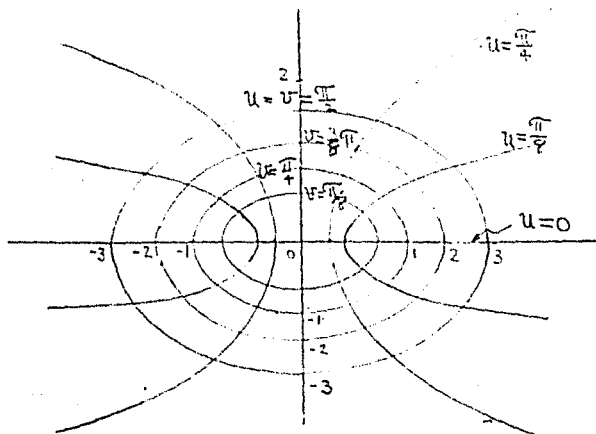


FIG. (10.51)

Con una selección apropiada de la región, y la función (y sea  $u$  ó  $v$ ) que sirva como la función potencial, transformación anterior, puede ayudar a dar solución a los siguientes problemas:

(1) El campo alrededor de un cilindro elíptico cargado, incluyendo el caso límite de una banda plana.

(2) El campo entre dos cilindros hiperbólicos confocales, o entre un cilindro elíptico y una banda delgada conductora que se extiende entre los focos.

(3) Campo entre dos cilindros hiperbólicos confocales, o entre un cilindro hiperbólico y un conductor plano que se extiende desde el foco hasta el infinito.

(4) Campo entre dos placas conductoras semiinfinitas coplanaras, y con una ranura que las separe (este es el caso límite de (3)).

(5) Campo entre un conductor plano infinito y un plano perpendicular semiinfinito, separados entre sí por una ranura.

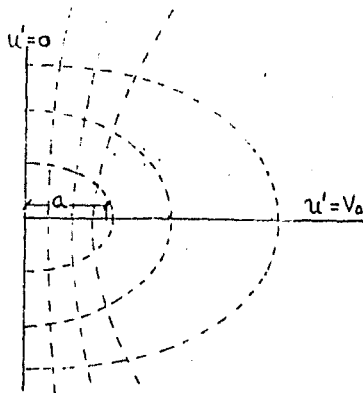


FIG. (10.52)

Para demostrar como obtenemos el resultado para uno de ellos en particular, considérese el ejemplo (5), que se ilustra en la figura (10.52). El plano infinito se toma como potencial cero, y el plano semiinfinito perpendicular a un potencial  $V_0$ ; para los resultados de la transformación general anterior, debemos poner factores de escala para evitar confusiones, con lo anterior denotemos las variables para este problema específico con

primas:

$$w' = C_1 \cos^{-1} k z' + C_2$$

la constante  $C_1$ , es puesta para fijar la escala propia del potencial, la constante  $k$  para fijar la escala del tamaño, y la constante aditiva  $C_2$  para fijar la referencia del potencial; comparando con  $w = \cos^{-1} z$ ,  $z = k z'$ ,  $w' = C_1 w + C_2$ , las constantes  $C_1$  y  $C_2$  pueden tomarse como reales para este problema, entonces:

$$U' = C_1 U + C_2$$

comparando las figuras (10.41) y (10.42) queremos que  $z'$  sea  $a$  cuando  $z$  es la unidad; esto es,  $k = 1/a$ ; también cuando  $U = 0$  queremos  $U' = V_0$ ; y cuando  $U = \pi/2$ ,  $U' = 0$ . Sustituyendo estos valores en  $U'$  obtenemos:

$$C_1 = -\frac{2V_0}{\pi}, \quad C_2 = V_0$$

luego, la transformación con factores de escala propia para este problema es:

$$w' = U' + iV' = V_0 \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{z'}{a} \right) \right]$$

donde  $U'$  es la función de potencial en voltios, y  $V'$  es la función flujo en coulombios por metro, algunas líneas de flujo y algunas líneas de igual potencial se ilustran en la figura (10.52); con sus correspondientes factores de escala.

### 10.6 Cilindros conductores en paralelo.

Considere la siguiente función:

$$w = c \ln \frac{z-a}{z+a}$$

ésta, puede ser escrita en la forma

$$w = c [\ln(z-a) - \ln(z+a)]$$

comparándola con la transformación logarítmica, la cual entre otras cosas, representará el campo alrededor de una línea simple cargada, de aquí que esta expresión puede representar el campo alrededor de dos líneas cargadas, una en  $z = a$  y la otra de igual potencia pero de signo opuesto en  $z = -a$ ; no obstante, es más interesante mostrar que esta forma puede también llevar al campo alrededor de dos cilindros paralelos de cualquier radio. Tomando  $c$  como real:

$$u = \frac{c}{2} \ln \left[ \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} \right] \dots \dots \dots (10.61)$$

$$v = c \left[ \tan^{-1} \frac{y}{x-a} - \tan^{-1} \frac{y}{x+a} \right] \dots \dots \dots (10.62)$$

entonces las líneas para  $u = \text{cte.}$  se obtienen de (10.61), tomando el argumento del logaritmo igual a una constante:

$$\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} = k$$

como esta puede ser puesta en la forma:

$$\left[ x - \frac{a(1+k)}{1-k} \right]^2 + y^2 = \frac{4a^2k}{(1-k)^2}$$

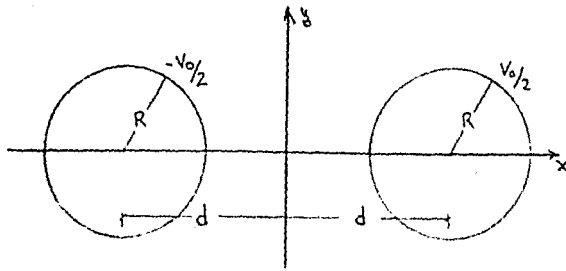


FIG. (10.61)

Las curvas para  $u = \text{cte.}$  son círculos con centro en  $x = a(1+k)/(1-k)$  y radio  $(2a\sqrt{k}/(1-k))$ . Si se toma como la función potencial, cualquiera de los círculos cuando  $u = \text{cte.}$ , puede reemplazarse por un cilindro conductor de igual potencial; entonces, si  $R$  es el radio de tal conductor con centro en  $x = d$ , figura (10.61), los valores de  $a$  y el valor particular de  $k$  (denotado como  $k_0$ ) puede obtenerse tomando

$$\frac{a(1+k_0)}{1-k_0} = d, \quad \frac{2a\sqrt{k_0}}{1-k_0} = R$$

resolviendo;

$$a = \sqrt{d^2 - R^2}$$

$$\sqrt{k_0} = \frac{d}{R} + \sqrt{\frac{d^2}{R^2} - 1}$$

la constante  $C$  en la transformación, depende del potencial del cilindro conductor; si este es  $V_0/2$ , entonces según la definición de  $k$ :

$$\frac{V_0}{2} = C \ln \sqrt{k_0} = C \ln \left( \frac{d}{R} + \sqrt{\frac{d^2}{R^2} - 1} \right)$$



$$\phi = \frac{V_0}{2 \ln \frac{d}{R} + \sqrt{\frac{d^2}{R^2} - 1}} = \frac{V_0}{2 \cosh^{-1}\left(\frac{d}{R}\right)}$$

sustituyendo en  $u = \frac{C}{2} \ln \left[ \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} \right]$ , el potencial en cualquier punto  $(x, y)$  es:

$$\phi = u = \frac{V_0}{4 \cosh^{-1}\left(\frac{d}{R}\right)} \ln \left[ \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

y la función de flujo EV es:

$$\psi = EV = \frac{EV_0}{2 \cosh^{-1}\left(\frac{d}{R}\right)} \left[ \tan^{-1} \frac{y}{x-a} - \tan^{-1} \frac{y}{x+a} \right]$$

Aunque no hemos puesto atención en el cilindro izquierdo explícitamente, la simetría impar del potencial de  $\phi$  causará esta condición de frontera, que debe también satisfacer si el cilindro de la izquierda de radio  $R$  con centro en  $x = -d$  está a un potencial  $-V_0/2$ .

Si deseamos usar este resultado, para obtener la capacitancia por unidad de longitud de alambres en paralelo, basta con obtener la carga sobre el conductor de la derecha; usemos la ley de Gauss para encontrar el flujo total en el extremo de éste. Al pasar la corriente una vez por el conductor, el primer término de  $\psi$  cambia a  $2\pi$  y el segundo a cero, esto es:

$$q = 2\pi \frac{EV_0}{2 \cosh^{-1}\left(\frac{d}{R}\right)} \frac{\text{coulombio}}{\text{metro}}$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\pi \epsilon}{\cosh^{-1}\left(\frac{d}{R}\right)} \frac{\text{Faradio}}{\text{metro}}$$

10.7 La transformación de Schwarz para polígonos en general.

En todos los ejemplos anteriores las funciones específicas han sido dadas, y los problemas electrostáticos se han resuelto por deducción, del conocimiento de sus propiedades. En un problema práctico, usualmente se requiere el procedimiento inverso, para un conductor específico de potencial las fronteras deben ser dadas, y se desea encontrar el potencial complejo útil para resolver el problema.

Para algunos de los problemas anteriores, es válido que la función de poder haya sido deducida como si uno hubiese dado el problema primero, y usamos un buen dibujo físico combinado con una pizca de ingenuidad. La gran limitación de este método de transformaciones conformes, no obstante, es que para fronteras bien definidas, no hay un procedimiento directo por el cual podamos llegar a la transformación deseada, si el problema físico bidimensional es dado; hay sin embargo un tal procedimiento, no obstante, cuando las fronteras son rectas con intersecciones en ángulo, deseamos describir esto brevemente:

Supongamos que un polígono es dado en el plano  $z$ , figura (10.71), con vértices en  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , y con ángulos internos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  correspondientes. Supongamos que se desea transformar esta frontera en una recta  $y'=0$ , en algún otro plano  $z'$ , con  $P_1$  yendo al punto  $z'=x'_1$ ,  $P_2$  a  $x'_2$  etc.

La transformación de Schwarz, establece que la función propia puede obtenerse integrando la derivada:

$$\frac{dz}{dz'} = K (z' - x'_1)^{\left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right)} (z' - x'_2)^{\left(\frac{\alpha_2}{\pi} - 1\right)} \dots (z' - x'_n)^{\left(\frac{\alpha_n}{\pi} - 1\right)} \dots \quad (10.71)$$

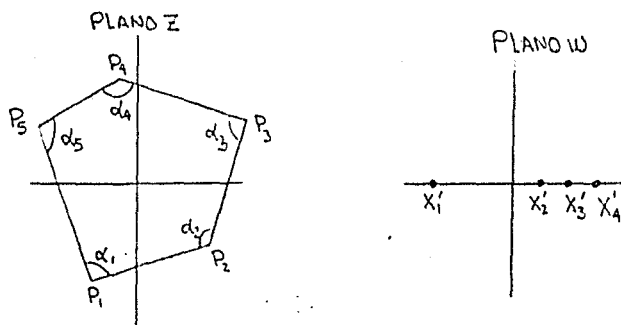


FIG.(10.71)

No es el momento de detenerse en probar esto, (véase [32]), pero cada factor en (10.71) puede entenderse como algo que endereza la frontera en cada vértice, como en el caso que analizamos cuando teníamos un campo que rodea a una esquina; esto es, si  $dz'$  esta cambiando siempre en la misma dirección a lo largo de la recta  $y'=0$ ;  $dz$  permanece en la misma dirección (fase), excepto cuando pasamos por un punto que corresponde a un vértice, digamos  $x'_m$ . Aquí el factor  $(z' - x'_m)$  cambia su fase por el factor  $\pi$ , y el factor  $(z' - x'_m)^{\alpha_m/\pi - 1}$  cambia su fase con el factor  $\alpha_m - \pi$ ; esto es, la dirección de  $dz$  cambia con  $\alpha_m - \pi$  y pasa al siguiente lado del polígono.

Aunque hemos hablado de la figura que será transformada (como un polígono en las aplicaciones prácticas del método), uno o más de los vértices están frecuentemente en el infinito, y parte de la frontera puede estar a diferentes potenciales de la parte restante, entonces la recta  $y'=0$  en el plano  $z'$  consta de dos partes a diferentes potenciales. Si este último problema electrostático ha sido resuelto, puede considerarse que ha habido una transformación del plano  $z$  en el plano  $w$ , y entonces la transformación de  $z$  en  $w$  está dada con el plano  $z'$  como paso intermedio.

Otro problema breve en el cual el método es útil, es aquel en el cual un alambre delgado cargado, está en el interior de un polígono conductor paralelo a los elementos del polígono. Mediante la transformación de Schwarz, la frontera del polígono se transforma en la recta  $y'=0$ , y el alambre corresponderá entonces, a algún punto del semiplano superior del plano  $z$ . Este problema electrostático puede ser resuelto mediante el método de imágenes, y así el problema original puede ser resuelto también en este caso.

Para aclarar un poco los enunciados generales, consideremos uno de los ejemplos estándar más simples para la transformación de Schwarz; este es, el problema del efecto de la arista para un condensador plano paralelo, y es uno de los primeros tipos descritos en el párrafo anterior, el problema es idealizado tomando el plano infinito  $y=0$  a un potencial  $V_0$ , y a potencial cero un plano semiinfinito paralelo extendiéndose desde  $x=0, y=h$  a  $x=\infty, y=h$  (véase figura (10.72)); en este ejemplo, los vértices (dos de los cuales

están en el infinito) tienen ángulos  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 2\pi$ ,  $\alpha_3 = \pi$ . Escogemos para transformar el primer vértice en el origen del plano  $z'$ , con la abertura que separa a los dos conductores, iniciando con una abertura infinitesimal en el origen. El segundo vértice es transformado en  $x'_2$ , y el tercer vértice en  $x'_3 = \infty$ ; el factor que transforma el punto al infinito no está incluido en la ecuación (10.71), luego:

$$\frac{dz}{dz'} = K(z'-0)^{\frac{0}{\pi}-1} (z'-1)^{\frac{2\pi}{\pi}-1} = K \frac{z'-1}{z'} \dots \dots \dots (10.72)$$

$$\text{ó } z = K \int \left(1 - \frac{1}{z'}\right) dz = K(z' - \ln z') + C \dots \dots \dots (10.73)$$

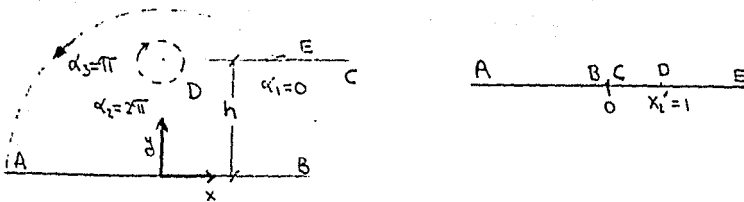


FIG. (10.72)

Para evaluar las constantes  $K$  y  $C$  notemos primero que  $z = 0 + ih$  cuando  $z' = 1$ .

$$\begin{aligned} ih &= K + C \\ z &= K(z' - 1 - \ln z') + ih \dots \dots \dots (10.74) \end{aligned}$$

En seguida, menos directo, una condición puede imponerse para integrar entre  $B$  y  $C$ , aproximándose al infinito en el plano  $z$  y a cero en el plano  $z'$ :

$$\int_B^C dz = \int_B^C \frac{dz}{dz'} dz' \dots\dots\dots (10.75)$$

pero de (10.72), cuando  $z' \rightarrow 0$ ,  $\frac{dz}{dz'} \rightarrow -\frac{K}{z'}$   
 si el miembro de la derecha de (10.75) es integrado  
 alrededor de un círculo de radio  $r'$ :

$$dz' = d(r' e^{i\theta'}) = i r' e^{i\theta'} d\theta' = i z' d\theta'$$

luego

$$\int_{0+i0}^{\infty+i0} dz = \int_{\pi}^0 \left(-\frac{K}{z'}\right) i z' d\theta'$$

ó

$$ih = iK\pi ; K = \frac{h}{\pi}$$

y la transformación es:

$$z = \frac{h}{\pi} (z' - 1 - \ln z' + i\pi) \dots\dots\dots (10.76)$$

y puede demostrarse que el problema transforma-  
 do en el plano  $z'$ , el cual consta del semiplano  
 izquierdo a un potencial  $V_0$ , y en el semiplano de-  
 recho a un potencial cero, puede ser resuelto por  
 la función:

$$w = u + iv = \frac{V_0}{\pi} \ln z'$$

ó

$$z' = e^{\pi w / V_0}$$

En lo anterior  $V$  representa la función de po-  
 tencial y la referencia para una función de flujo  
 cero, se toma en el punto  $D$  ( $r'=1$ ), substituyendo  
 en (10.76) tenemos:

$$z = \frac{h}{\pi} \left( e^{\pi w/v_0} - 1 - \frac{\pi w}{v_0} + i\pi \right)$$

Esta última ecuación es la solución al problema, en el que es dada la función de potencial y flujo, como funciones implícitas de las coordenadas  $x$  e  $y$ ; usando esta misma técnica en algunos problemas importantes, obtenemos:

$z = x + iy$ ;  $w = u + iv$ , donde  $u$  es la función de flujo,  $v$  = potencial.

	$z = \frac{b}{\pi} \cosh^{-1} \left( \frac{\alpha^2 + 1 - 2\alpha^2 e^{Kw}}{1 - \alpha^2} \right) - \alpha \cosh^{-1} \left( \frac{2e^{-Kw} - (\alpha^2 + 1)}{1 - \alpha^2} \right) ; \alpha = \frac{a}{b} \quad K = \frac{\pi}{v_0}$
	$z = \frac{b}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{1+s}{1-s} \right) - 2\alpha \tan^{-1} \left( \frac{s}{\alpha} \right) \right]$ $\alpha = \frac{a}{b} \quad s = \sqrt{\frac{e^{Kw} + \alpha}{e^{K\alpha} - 1}}$

II. PROBLEMAS DIVERSOS.

11.1 Estudiar el movimiento laminar de un fluido ideal en un canal de sección transversal variable, como se muestra en la figura (11.1)

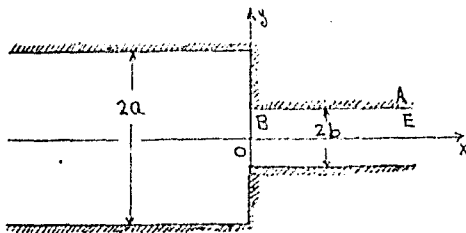


FIG. (11.1)

suponiendo que en el infinito la dirección del flujo coincide con el eje x y tiene los valores:

$$\begin{aligned} V_x &= V_a \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \\ V_x &= V_b \text{ cuando } x \rightarrow +\infty \quad (aV_a = bV_b) \end{aligned}$$

se trata de encontrar la velocidad de distribución a lo largo del eje de simetría del flujo.

Solución: el problema se reduce a determinar el potencial complejo  $w = \phi + i\psi$ , cuya parte imaginaria es una función armónica, la cual tiende a cero sobre el eje de simetría y toma el valor  $\psi = -V_a a$  sobre las paredes del canal. Para determinar  $w$ , necesitamos encontrar únicamente un mapeo conforme de la región ABCDE sobre el semiplano superior de la variable  $\zeta = \xi + i\eta$ ; usando para ello la transformación Schwarz - Cristoffel, de manera que los puntos B, C y D se transformen en los puntos  $\zeta = -1$ ,  $\zeta = -\lambda$  y  $\zeta = 0$ , donde  $0 \leq \lambda \leq 1$ , el cual pos-



teriormente veremos que es igual a  $b^2/a^2$ .

Así pues la relación entre  $z$  y  $\xi$  se obtiene integrando la ecuación

$$\frac{dz}{d\xi} = M(\xi+1)^{1/2} (\xi+\lambda)^{-1/2} \xi^{-1}$$

donde  $M$  es una constante que se determinará posteriormente, teniendo en mente que  $z = ib$  si  $\xi = -1$ , encontramos que:

$$z = M \int_{-1}^{\xi} \left( \frac{\xi+1}{\xi+\lambda} \right)^{1/2} \frac{d\xi}{\xi} + ib$$

donde la trayectoria de integración es arbitraria, y debe unir al punto  $-1$  con un punto dado  $\xi$  en el semiplano superior. De la condición:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ z_{\xi=-\varepsilon} - z_{\xi=\varepsilon} \right] = ia$$

se sigue que  $M = a\sqrt{\lambda}/\pi$ , y en consecuencia solo nos resta determinar el valor del parámetro  $\lambda$ ; esto lo hacemos usando la correspondencia entre los puntos  $z=ia$  y  $\xi=-\lambda$ , puesto que evaluando la integral con  $\xi=-\lambda$  como su límite superior, podemos integrar a lo largo de la recta que une los puntos  $\xi=-1$  y  $\xi=-\lambda$  sobre los cuales

$$\xi+1 = 1-\xi, \quad \xi+\lambda = e^{i\pi} (\xi-\lambda) \quad \xi = -\xi \quad (\lambda \leq \xi \leq -1)$$

los últimos requisitos nos llevan a la fórmula:

$$1 - \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \int_{\lambda}^1 \left( \frac{1-s}{1+\lambda} \right)^{1/2} \frac{ds}{s}$$

calculemos la integral:

$$\text{sean } u^2 = \frac{s-\lambda}{1-s}, \quad s = 1 + \frac{\lambda-1}{s^2+1}$$

$$ds = \frac{-2u(\lambda-1)du}{(u^2+1)^2}$$

si  $s=1$ ,  $u=\infty$ ; si  $s=\lambda$ ,  $u=0$  luego:

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^1 \left( \frac{1-s}{s-\lambda} \right)^{1/2} ds &= 2(1-\lambda) \int_0^{\infty} \frac{du}{(u^2+\lambda)(u^2+1)} = 2 \int_0^{\infty} \frac{du}{u^2+\lambda} - 2 \int_0^{\infty} \frac{du}{u^2+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{\pi}{2} \right) - 2 \frac{\pi}{2} = \pi \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 1 \right) \end{aligned}$$

de aquí que:

$$1 - \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \int_{\lambda}^1 \left( \frac{1-s}{s-\lambda} \right)^{1/2} ds$$

se reduce a:

$$1 - \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) \pi; \quad \lambda = \left( \frac{b}{a} \right)^2$$

$$\text{luego } M = a \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} = a \frac{b \cdot 1}{a\pi} = \frac{b}{\pi}$$

Así pues en definitiva el potencial complejo en el plano  $\zeta$  es:

$$w = -\frac{\sqrt{a} a}{\pi} \ln \zeta$$

la cual conjuntamente con la transformación  $z = z(\zeta)$  recién deducida, nos da la solución paramétrica del problema.

Para calcular la velocidad a lo largo del eje de simetría ( $\xi \geq 0, \eta = 0$ ), tenemos que usar la fórmula

$$V_x - i V_y = - \frac{dw}{dz}$$

la cual implica:

$$\frac{V_x(\eta=0)}{V_a} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{\xi+\lambda}{\xi+1} \right)^{1/2}$$

donde la relación entre  $x$  y  $\xi$  deberá establecerse usando la transformación  $z = z(\xi)$ . Eligiendo la trayectoria de integración como la curva que consta del segmento  $(-1, -R)$  del eje real, un arco de circunferencia de radio  $R$  y el segmento  $(R, \xi)$ , y tomando el límite cuando  $R \rightarrow \infty$ , encontramos que:

$$x = \frac{a\sqrt{\lambda}}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_1^R \left( \frac{\xi-1}{\xi-\lambda} \right)^{1/2} \frac{d\xi}{\xi} - \int_{\xi}^R \left( \frac{\xi+1}{\xi+\lambda} \right)^{1/2} \frac{d\xi}{\xi} \right]$$

con cálculos análogos a los dados anteriormente, nos llevan a:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\pi} \ln \left[ \frac{1 - \sqrt{\lambda} \sqrt{(\xi+1)/(\xi+\lambda)}}{1 + \sqrt{\lambda} \sqrt{(\xi+1)/(\xi+\lambda)}} \right] + \sqrt{\lambda} \ln \left[ \frac{\sqrt{(\xi+1)/(\xi+\lambda)} + 1}{\sqrt{(\xi+1)/(\xi+\lambda)} - 1} \right]$$

si ahora introducimos el parámetro  $t$ , definiéndolo como:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{\xi+\lambda}{\xi+1}} \quad (1 \leq t \leq \frac{a}{b})$$

se reduce la expresión a:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\pi} \left[ \ln \frac{t-1}{t+1} + \frac{b}{a} \ln \frac{1 + (\frac{b}{a})t}{1 - (\frac{b}{a})t} \right]$$

11.2 Investigar el flujo en chorro de un líquido a través de una ranura de longitud  $2a$ , en una pared plana (ver figura (11.21)), suponiendo que la cantidad de flujo que fluye a través de la ranura por unidad de tiempo, (en una laja de unidad de espesor paralela al plano  $X$  e  $Y$ ) es igual a  $Q$ , encuentre la forma del chorro.

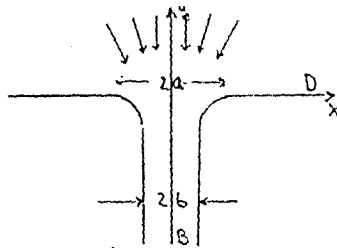


FIG.(11.21)

Este problema pertenece a una categoría, el cual es de gran interés matemático y de mucha importancia en las aplicaciones, dicho de otra manera, problemas que incluyen la formación de un chorro en la frontera de un obstáculo, colocado en un flujo estacionario plano paralelo de un líquido ideal. En tales problemas, la forma del chorro no es conocido de antemano, pero puede ser determinado de la condición de que el vector velocidad tiene un valor constante sobre la superficie libre del chorro. Para el caso donde las paredes del obstáculo impiden el flujo son segmentos de recta, un método efectivo para resolver el problema, se basa sobre la posibilidad de establecer una conexión entre el potencial complejo  $w$  y la derivada  $dw/dz$ , partiendo del examen del bosquejo cinemático del movimiento del fluido.

Así pues, considerar la parte de la región ocupada por el flujo el cual está limitado por el eje de simetría AB, el borde libre del flujo BC y la pared CD. Las direcciones de las componentes de la velocidad  $V_x$  y  $V_y$  a lo largo del borde de esta región, se determinan por las siguientes relaciones (donde  $V_b = Q/2b$  y  $2b$  es el ancho del chorro a una gran distancia de la ranura AB):

$$\text{en AB, } V_x = 0, \quad -V_b \leq V_y \leq 0$$

$$\text{en BC, } V_x^2 + V_y^2 = V_b^2$$

$$\text{en CD, } -V_b \leq V_x \leq 0, \quad V_y = 0$$

Introducimos la variable compleja auxiliar  $\zeta = dw/dz$  y tomando en cuenta la fórmula:

$$V_x - iV_y = - \frac{dw}{dz}$$

encontramos sobre la base del esquema anterior del flujo, que la región ABCD es mapeada conformemente sobre el interior del sector circular

$$|\zeta| \leq V_b, \quad -\pi/2 \leq \arg \zeta \leq 0$$

en el plano  $\zeta$ , con el borde del chorro, yendo al arco del círculo, bajo la transformación\*:

$$\zeta = V_b (\sqrt{t} - \sqrt{t-1})$$

\* Para obtener esta expresión es conveniente primero transformar el sector en una semibanda, usando la transformación  $s = \pi/2 - i \ln(\zeta/V_b)$  con la transformación de Schwarz-Cristoffel aplicada a las paredes interiores.

este sector es mapeado en el semiplano superior de la variable compleja  $t$ , con las curvas AB, BC y CD en el plano original, al eje real negativo, el segmento  $(0, 1)$  y el segmento  $(1, \infty)$ . En el plano  $t$ , el cálculo del potencial complejo se reduce a la construcción de una función analítica en el semiplano superior, cuya parte imaginaria toma el valor cero sobre el eje real negativo, y el valor constante  $-Q/2$  sobre el eje real positivo.

Es fácil ver que la solución de este problema es:

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln t - \frac{Qi}{2}$$

el cual conjuntamente con el resultado encontrado anteriormente nos da:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dw}{dt} = \frac{Q}{2\pi V_0} \frac{\sqrt{t} + \sqrt{t-1}}{t} \dots \dots (11.21)$$

integrando, y teniendo en mente que el punto  $z=a$  debe corresponder al punto  $t=1$ , obtenemos:

$$z = \frac{Q}{\pi V_0} \left[ \sqrt{t} - 1 + \sqrt{t-1} + \arctan \sqrt{t-1} \right] + a \dots \dots (11.22)$$

donde se ha elegido la rama del arctan, la cual se anula cuando  $t \rightarrow 1$ .

Las funciones  $w = w(z)$  y  $z = z(t)$ , establecen la conexión requerida entre la variable compleja  $w$  y la variable  $z$  en forma paramétrica. Para determinar la forma del borde del chorro necesitamos separar las partes reales e imaginaria en (11.22), suponiendo que la variable  $t$  pertenece al intervalo  $(0, 1)$ . Esto da la siguiente repre-

sentación paramétrica de la curva que bordea al chorro:

$$x = \frac{a}{\pi V_b} (\sqrt{t} - 1) + a, \quad y = \frac{a}{\pi V_b} \left[ \sqrt{1-t} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{1-t}} \right], \quad 0 \leq t \leq 1$$

El ancho  $2b$  del chorro a una gran distancia de la ranura, y el valor correspondiente de la velocidad  $V_b = a/2b$ , se calculan de la condición  $x=b$  para  $t=0$  lo cual implica:

$$b = \frac{a}{1 + \frac{2}{\pi}}, \quad \sqrt{b} = \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \frac{a}{2a}$$

Así pues en definitiva:

$$2b = \frac{2a}{1 + \frac{2}{\pi}}, \quad \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{t} + \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi}{2}} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2}} \left[ \sqrt{1-t} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{1-t}} \right]$$

11.3 Encontrar la distribución del flujo de temperatura, en la placa que se muestra en la figura (11.31), cuando las temperaturas externa e interior son diferentes y se mantienen constantes.

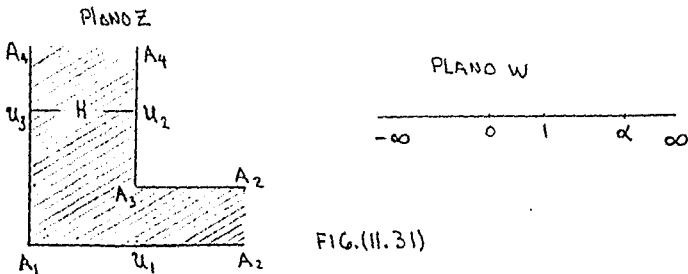


FIG.(11.31)

Solución: debemos mapear el polígono  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_1$  con vértices en  $A_1=0$ ,  $A_2=\infty$ ,  $A_3=H+ih$ ,  $A_4=\infty$ , y ángulos correspondientes  $\alpha_1=\pi/2$ ,  $\alpha_2=0$ ,  $\alpha_3=3/2\pi$ ,  $\alpha_4=0$ , usando para ello la fórmula de Schwarz. Por conveniencia los datos se listan en la siguiente tabla, en la cual tres de los cuatro puntos sobre el eje real son dados arbitrariamente.

$n$	$A_n$	$\alpha_n$	$a_n$
1	0	$\pi/2$	0
2	$\infty$	0	1
3	$H+ih$	$3/2\pi$	$a$
4	$\infty$	0	$\infty$

entonces la fórmula de Schwarz será:

$$w = K \int_0^z \frac{\sqrt{z-a}}{\sqrt{z}(z-1)} dz + C_1 \dots \dots \dots (11.31)$$

para encontrar las constantes  $K$ ,  $C_1$  y  $a$ , son necesarias tres ecuaciones, dos de las cuales se obtienen de las correspondientes condiciones de restricción.  $a_1 \rightarrow A_1$ ,  $a_3 \rightarrow A_3$ , puesto que:

$$w = 2K \left[ \sqrt{a-1} \tan^{-1} \sqrt{\frac{z(a-1)}{z-a}} + \tanh^{-1} \sqrt{\frac{z}{z-a}} \right] + C_1$$

entonces  $C_1=0$ ;  $H+ih = K\pi(\sqrt{a-1} - i)$ .

Para encontrar la tercera ecuación haremos uso de la siguiente consideración: cuando pasamos con un rayo de  $A_1 A_2$  a  $A_2 A_3$  en el plano  $z$ , la función  $w$  se incrementa en  $\Delta w = ih + o(\delta)$ , donde  $o(\delta)$  es una función compleja que es infinitesimal



cuando  $\vartheta \rightarrow 0$ . Esto corresponde a bordear un semicírculo de radio infinitesimal con centro en el punto 0 en el plano  $w$ ; sustituyendo  $z = 1 + \vartheta e^{i\theta}$  en (11.31) y el cálculo sobre el semicírculo cuando  $\vartheta \rightarrow 0$  nos da:

$$\Delta w = -K \pi \sqrt{a-1}$$

pero  $\Delta w = ih + o(\vartheta)$ , luego:

$$K = -\frac{ih}{\pi \sqrt{a-1}}$$

después de que las constantes han sido calculadas, la expresión final para la transformación del semiplano en el polígono  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_1$  se obtiene como:

$$w = \frac{2i}{\pi} \left[ h \tan^{-1} \frac{h}{H} \sqrt{\frac{z}{z-a}} + H \tanh^{-1} \sqrt{\frac{z}{z-a}} \right] \dots \dots (11.32)$$

Es fácil observar de la expresión anterior, que el borde interno del "polígono"  $A_2 A_3 A_4$  será la parte negativa del eje real, es el borde externo  $A_1 A_2$  la parte positiva. Ahora seleccionaremos una función analítica en el semiplano superior, cuya parte imaginaria en el intervalo  $(-\infty, 0)$  tiene un valor  $u_2$ ; en el intervalo  $(0, 1)$ ,  $u_1$  y finalmente en  $(1, \infty)$   $u_2$ . Tal función tiene la forma:

$$u = C_1 \arg(-z) + C_2 \arg(z-1) + C_3$$

donde  $\arg(y) = 0$  si  $y > 0$ ,  $\arg(y) = \pi$  si  $y < 0$ ; las constantes las determinamos haciendo referencia a las condiciones en frontera anteriores:

$$C_1 = \frac{u_1 - u_3}{\pi} ; \quad C_2 = \frac{u_1 - u_2}{\pi} ; \quad C_3 = u_3 - u_1 + u_2$$

luego:

$$u = \frac{u_1 - u_3}{\pi} \arg(-z) + \frac{u_1 - u_2}{\pi} \arg(z-1) + u_3 - u_1 + u_2$$

Ahora una función analítica con parte imaginaria  $u$ , puede elegirse por ejemplo la siguiente función, puede tomarse

$$\Psi(z) = \frac{u_1 - u_3}{\pi} \ln(-z) + \frac{u_1 - u_2}{\pi} \ln(z-1) + u_3 - u_1 + u_2$$

La solución final del problema tomará la forma:

$$u = \text{Im} \left[ \frac{u_1 - u_3}{\pi} \ln(-z) + \frac{u_1 - u_2}{\pi} \ln(z-1) \right] + u_3 - u_1 + u_2$$

donde  $z$  se expresa en términos de  $w$  por la ecuación (11.32).

11.4 Encontrar la función de distribución de temperatura, en un plano limitado por un "pentágono"  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_1$ , con las siguientes condiciones en la frontera:  $u = u_1$  sobre la quebrada  $A_2 A_3$ ;  $u = u_3$  sobre la quebrada  $A_3 A_4 A_5$ , figura (11.41).

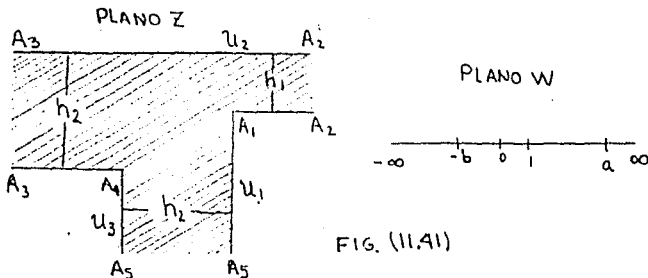


FIG. (11.41)

Solución: como en el ejemplo previo, representaremos conformemente el semiplano superior con configuración  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_1$ , usando la transformación de Schwarz, los datos como antes se dan en la tabla siguiente:

n	$A_n$	$\alpha_n$	$a_n$
1	0	$3/2 \pi$	0
2	$\infty$	0	1
3	$\infty$	0	a
4	$-h_3 - i(h_2 - h_1)$	$3/2 \pi$	$\infty$
5	$\infty$	0	-b

en la tabla, los puntos  $a_n$  son también dados, tres de los cuales fueron tomados arbitrariamente, a saber  $a_1=0$ ,  $a_2=1$ ,  $a_4=\infty$ ; los restantes  $a_3=a$ ,  $a_5=-b$  sobre el eje real son incógnitas, y las encontraremos después; en este caso la transformación de Schwarz toma la forma:

$$w = k \int_0^z \frac{\sqrt{z_1} dz_1}{(z_1-1)(z_1-a)(z_1-b)} \dots \dots \dots (11.41)$$

Para encontrar las constantes  $k, a, b$ , debemos tomar en cuenta lo siguiente: cuando pasamos con un rayo de  $A_1 A_2$  en el plano  $z$  resulta un incremento en la función  $w$ .

$$\Delta w = ih_1 + o(\rho)$$

donde  $o(\rho)$  es una función compleja tal que  $w$  es infinitesimal cuando  $\rho \rightarrow 0$ . Esto conforma un rodeo sobre un semicírculo de radio infinitesimal, con centro en el punto 1 en el plano  $w$ . Sustituyendo

$z = 1 + \zeta e^{i\theta}$  en (11.41), y calculando la integral sobre el semicírculo cuando  $\zeta \rightarrow 0$ , nos da:

$$\Delta W = \frac{K \pi i}{(1-a)(1+b)}$$

luego:

$$h_1 = \frac{K \pi}{(1-a)(1+b)}$$

Análogamente, pasando con rayos en el plano  $z$  de  $A_2A_3$  y  $A_4A_5$  a  $A_3A_4$  y  $A_5A_1$  respectivamente, (los cuales conforman un rodeo de un semicírculo de radio infinitesimal, alrededor de los puntos  $a$  y  $-b$  respectivamente en el plano  $w$ ). resulta en:

$$h_2 = \frac{K \pi \sqrt{a}}{(a+b)(a-1)} \quad ; \quad h_3 = \frac{K \pi \sqrt{b}}{(a+b)(b+1)}$$

calculando la integral (11.) nos lleva a:

$$W(z) = \frac{2K}{a+b} \left[ \frac{\sqrt{a}}{2(a-1)} \ln \frac{\sqrt{z} - \sqrt{a}}{\sqrt{z} + \sqrt{a}} - \frac{\sqrt{b}}{1+b} \tan^{-1} \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{b}} \right. \\ \left. + \frac{a+b}{2(1-a)(1+b)} \ln \frac{\sqrt{z} - 1}{\sqrt{z} + 1} \right] \dots \dots \dots (11.42)$$

cuando la transformación (11.42) se aplica al pentágono  $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$ , las quebradas  $A_5A_1, A_2, A_1A_3, A_3A_4A_5$  que lo bordean, cambian en secciones del eje real del plano, a saber  $[-b, 1], [1, a], [-\infty, -b], [a, +\infty]$ . Para encontrar una función analítica en el semiplano superior, cuya parte ima-

ginaria toma los valores en el eje real  $u_1, u_2$  y  $u_3$  respectivamente, se encuentra de manera análoga a como se hizo anteriormente:

$$u = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ (u_3 - u_1) \ln(z+b) + (u_1 - u_2) \ln(z-1) \right. \\ \left. + (u_2 - u_3) \ln(z-a) \right] + u_3$$

11.5 Encontrar la distribución de temperatura en un plano definido por un rombo  $A_1A_2A_3A_4$ , figura (11.51), cuyos lados adyacentes  $A_4A_1$ ,  $A_1A_2$  y  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$  tienen las temperaturas dadas  $u_1$  y  $u_2$  respectivamente.

Solución: la transformación de Schwarz se usa para transformar  $A_1A_2A_3A_4$  sobre el semiplano superior; la conformidad de los puntos está dada como:

$$z [A_1=0, A_2=d, A_3=d(1+e^{i\pi\alpha}), A_4=d e^{i\pi\alpha}] \rightarrow w$$

$(0, 1, \infty, b)$ ; en este caso la integral de Schwarz toma la forma:

$$w = k \int_0^z z_1^{\alpha_1-1} (z_1-1)^{-\alpha} (z_1-b)^{-\alpha} dz_1 + C_2$$

Como en los ejemplos previos, arbitrariamente elegimos tres puntos en el plano  $w$ :  $a_1=0$ ,  $a_2=1$ ,  $a_3=\infty$ ; el cuarto punto  $a_4=b$  se encuentra por la simetría. Dado que la configuración es simétrica relativa a la diagonal  $A_1A_3$ , y el punto  $A_3$  es mapeado a  $i\infty$  en el plano  $w$ , entonces de la simetría el triángulo  $A_1A_2A_3$  es mapeado en el lado derecho del semiplano superior, y el trián-

gulo  $A_3A_4A_1$  en su lado izquierdo.

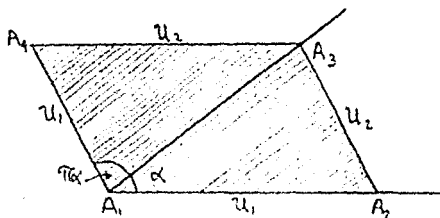


FIG.(11.51)

Ahora podemos inferir que  $b=-1$ , las constantes  $K$  y  $C_1$  se pueden calcular de las condiciones de conformidad de los puntos  $A_1=0$  y  $A_2=d$  en el plano  $z$  a puntos  $a_1=0$ ,  $a_2=1$  en el plano  $w$ .

$$C_1 = 0 ; \quad K = 2 \left( \int_0^1 (1-z_1)^{\alpha/2-1} z_1^{-\alpha} dz_1 \right)^{-1} = \frac{2d}{B(1-\alpha; \alpha/2)}$$

donde  $B$  es la función beta. La función analítica que mapea el semiplano superior en el rombo  $A_1A_2A_3A_4$ , es escrita como:

$$w(z) = \frac{2d}{B(1-\alpha; \alpha/2)} \int_0^z z_1^{\alpha-1} (1-z_1^2)^{-\alpha} dz_1$$

las condiciones en frontera despues de mapear el plano  $w$  son escritas como:  $u_1 = u_2$  ( $-\infty < x < -1$ );  $u = u_1$  ( $-1 < x < 1$ );  $u = u_2$  ( $1 < x < \infty$ ); luego:

$$u = C_1 \arg(z+1) + C_2 \arg(z-1) + C_3$$

para encontrar estas constantes haremos uso de las condiciones:  $C_1 \pi + C_2 \pi + C_3 = u_2$ ;  $C_2 \pi + C_3 = u_1$ ;  $C_3 = u_2$ ; luego:

$$C_3 = u_2, \quad C_1 = (u_1 - u_2) / \pi, \quad C_2 = (u_2 - u_1) / \pi$$

en definitiva

$$u = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} [(u_2 - u_1) \ln(z+1) + (u_1 - u_2) \ln(z-1)] + u_2$$

Observación: Es necesario recalcar que la técnica del mapeo conforme, se aplica únicamente a problemas de transferencia constantes y no puede ser usada para problemas donde esto no se cumple.

## 12. SUPERFICIES DE RIEMANN.

12.1 La teoría de Riemann de las funciones de variable compleja en su parte geométrica, admite una interpretación física muy importante. Considere un fluido incompresible que fluye a razón constante sobre el plano  $xy$ ; puesto que el fluido es incompresible, y suponiendo que no hay fuentes ni sumideros del fluido en cualquier región  $A$  del plano  $xy$ , se sigue que:

$$\iint_A \nabla \cdot V \, dx \, dy = 0$$

(la cantidad de fluido que llega a  $A$ , es igual a la cantidad de fluido que sale de  $A$ ; principio de continuidad), sobre cualquier región  $A$ , y en consecuencia:

$$\nabla \cdot V = \frac{dV_x}{dx} + \frac{dV_y}{dy} = 0$$

entonces el potencial de velocidad del flujo es senoidal. La circulación de un fluido alrededor de una curva cerrada es por definición:

$$\oint V \cdot dv = \oint V_x dx + V_y dy$$

El flujo del fluido definido por  $V$  es irrotacional, si su circulación alrededor de cualquier curva cerrada es cero; en este caso:

$$V_x dx + V_y dy$$

es una diferencial exacta y entonces existe una función  $u(x,y)$  tal que:

$$V_x = \frac{du}{dx}, \quad V_y = \frac{du}{dy}$$



Así pues obtenemos que:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

esta es la famosa ecuación de Laplace. Cualquier solución de la ecuación de Laplace es llamada una función armónica, y la solución particular  $u$ , la cual genera el vector velocidad  $v$ . Las relaciones  $V_x$  y  $V_y$  son conocidas como potencial de velocidad del flujo; las curvas  $u(x,y) = \text{cte}$  son llamadas "curvas de nivel" o "líneas equipotenciales". Para encontrar el ángulo que la tangente a una línea equipotencial forma con el eje  $x$ , observese que sobre  $u(x,y) = \text{cte}$ .

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \nabla \cdot u \cdot dr = 0$$

entonces

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha = - \frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y}$$

siguiendo la expresión para  $du$ , siempre que:

$$(\nabla u)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = V_x^2 + V_y^2 = |V|^2 \neq 0$$

el vector velocidad  $v = (V_x, V_y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \nabla u$ , forma un ángulo  $\beta$  con el eje  $x$ , dado por:

$$\tan \beta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{\partial u / \partial y}{\partial u / \partial x}$$

de aquí que:

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \cdot \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = -1$$

Se observa que  $\alpha$  y  $\beta$  difieren en  $\pi/2$ , y que el flujo es perpendicular a las líneas equipotenciales en el sentido creciente de  $u$ . Dada la función armónica  $u$ , podemos definir la función conjugada armónica  $v$ , mediante las condiciones de D'Alembert-Euler, entonces:

$$w = u(x, y) + i v(x, y) = f(z)$$

es una función analítica de  $z$ , y es llamada el potencial complejo del flujo; la tangente a la curva  $v(x, y) = \text{cte.}$  forma un ángulo  $\gamma$  con el eje  $x$ , dado por:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \gamma = - \frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{dv}{dy}}$$

usando nuevamente las condiciones de D'Alembert-Euler obtenemos:

$$\tan \gamma = - \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \tan \beta$$

ó  $\tan \gamma = \tan \beta$ . Puesto que  $\beta$  es el ángulo con el cual el vector velocidad  $V$  forma con el eje  $x$ ; concluimos que el flujo del fluido va en la dirección de las curvas  $v(x, y) = \text{cte.}$ , las cuales son en consecuencia llamadas "líneas de corriente"; observese que:

$$f'(z) = \frac{du}{dx} + i \frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} - i \frac{du}{dy}$$

luego la hipótesis de que:

$$|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \neq 0$$

es equivalente a la condición:  $|f'(z)| \neq 0$ ; esto significa que las líneas de corriente son ortogonales a las líneas equipotenciales, excepto en puntos donde  $f'(z) = 0$ .

Observese que si  $u + iv$  es analítica, entonces las condiciones de D'Alambert-Euler:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

pueden ser escritas como:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-u), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(-u)$$

lo cual significa que  $v - iu$  es también analítica; entonces las curvas  $v = \text{cte.}$  pueden ser líneas equipotenciales, y las curvas  $u = \text{cte.}$  pueden ser líneas de corriente. El flujo dado por  $v - iu$  es llamado el flujo "conjugado" a  $u + iv$ ; si la función analítica  $w = f(z)$  es finita y diferenciable en  $z_0$ , pero  $f'(z_0) = 0$ , entonces  $z = z_0$  es llamado un "punto silla" o "punto estacionario" de  $f(z)$ . Las curvas  $u = \text{cte.}$  y  $v = \text{cte.}$  no se intersectan ortogonalmente en puntos silla; por ejemplo si:

$$f(z) = a_0 + a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots$$

donde  $a_k \neq 0$ , entonces hay  $k$  líneas equipotenciales y  $k$  líneas de corriente que pasan por  $z_0$ ; el ángulo entre las líneas equipotenciales es  $\pi/k$ ; y el ángulo entre las líneas de corriente es también  $\pi/k$ .

Las líneas de corriente y las líneas equipotenciales se bisecan mutuamente; esto es, las líneas  $u = \text{cte.}$ ,  $v = \text{cte.}$  se cortan bajo un ángulo de  $\pi/2k$  en  $z_0$ .

El punto  $z_0$  en  $f(z) = a_0 + a_k (z-z_0)^k + a_{k+1} (z-z_0)^{k+1} + \dots$  es llamado un punto silla de orden  $k-1$  de  $f(z)$ ; como fácilmente puede verificarse, sustituyendo  $z-z_0 = re^{i\theta}$  y analizar el comportamiento de  $\operatorname{Re} f(z)$  e  $\operatorname{Im} f(z)$  cuando  $z \rightarrow z_0$ .

## 12.2 Funciones definidas sobre superficies curvas.

Puede establecerse una correspondencia uno a uno entre los puntos  $(x,y)$  en un plano extendido y el plano de los números complejos, de acuerdo con la relación  $z = x + iy$ . La función compleja  $w = f(z)$ , entonces asigna un número complejo  $w$  para cualquier punto  $z$  del plano  $xy$ . Hemos visto que las curvas  $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y) = \text{cte}$  e  $\operatorname{Im} f(z) = v(x,y) = \text{cte}$ . pueden dibujarse sobre el plano  $xy$  y físicamente, pueden interpretarse como líneas equipotenciales y líneas de corriente de un fluido que fluye en el plano  $xy$ , en un patrón dictado por la elección de  $f(z)$ .

No obstante, un fluido puede fluir sobre una superficie curvada en el espacio, tal como en una esfera o en un toro, como también en el plano extendido. Además el flujo de un fluido sobre una superficie cerrada curva en el espacio, tiene asociada una función de potencial complejo  $f(z)$ , cuya parte real da las curvas equipotenciales sobre la superficie y cuya parte imaginaria da las líneas de corriente.

Riemann descubrió que hay una estrecha relación entre la naturaleza del flujo, que es posible sobre una superficie dada, y cuando la superficie es simplemente conexa o no.

En el caso de una superficie cerrada en el espacio, decimos que la superficie es simplemente conexa si cualquier curva cerrada dibujada sobre la superficie, separa a ésta en dos partes desconexas. Por ejemplo una esfera es una superficie cerrada simplemente conexa, en tanto que el toro o una esfera con varias asas sobre ésta, no lo son.

Riemann se aproximó analizando sistemáticamente superficies cerradas en el espacio, tales como esferas con cero, una, dos, tres, etc.,  $n$  asas sujetas a ella; ver figura (12.21); determinó después cuáles funciones sobre la superficie dada, corresponden a funciones analíticas en el plano  $z$ ; de esta clase de funciones, él seleccionó aquellas que son univaluadas sobre la superficie. De esta manera él llegó a una clasificación de las funciones analíticas de acuerdo a sus "superficies de Riemann"; Riemann fue capaz de demostrar que sobre una esfera  $S$ , con  $g < m$  asas, hay al menos una función univaluada de potencial complejo  $w$ , cuyas partes real e imaginaria, generan las líneas equipotenciales y líneas de corriente, para un flujo hidrodinámico sobre  $S$ . Él demostró que si el flujo tiene un número total de fuentes y sumideros igual a  $m$ , arreglados de forma que sus potencias equilibren para conservar la masa, entonces la función de potencial complejo univaluada  $w$ , toma cualquier valor complejo dado, digamos  $2+3i$ , exactamente  $m$  veces sobre  $S$ , en cada uno de los  $m$  diferentes lugares sobre  $S$ .

Ahora considere  $m$  planos complejos apilados uno arriba del otro; la manera de hacer una superficie conexa de esas  $m$  láminas separadas, se deben seleccionar  $r$  puntos en los cuales dos o más de las

m láminas pueden ser soldadas entre sí. Haremos esto de tal manera que cualquiera de las m láminas separadas, esté unida al menos una vez, con al menos una de las otras m-1 láminas. Denotaremos a la superficie soldada resultante con  $S^*$ , y los puntos en los cuales están las soldaduras, los puntos de ramificación de  $S^*$ .

Riemann demostró que el número de puntos de ramificación en  $S^*$ , está relacionado con el número total de sumideros y fuentes sobre S y el número total de asas sobre S de acuerdo con la fórmula:

$$r = 2m + 2g - 2$$

Además, demostró que el potencial complejo univaluado  $w$  sobre S, establece una correspondencia uno a uno conformemente entre los puntos sobre S y los puntos sobre  $S^*$ . Cada punto silla de  $w$  en S, le corresponde alguno de los r puntos de ramificación en  $S^*$ ; esta correspondencia es tal que un punto de  $w$  de orden  $k-1$  sobre S, le corresponde un punto de ramificación sobre  $S^*$ , en el cual  $k$  de las m láminas están soldadas entre sí; obviamente  $k < m$ .

Hay una razón para soldar entre sí  $k$  de las m láminas de  $S^*$  a un punto de ramificación de orden  $k-1$  en  $S^*$ , hay un punto silla de orden  $k-1$  sobre S, y en este punto silla la función univaluada  $w$ , adquiere el valor único  $w_0$  exactamente  $k$  veces. Esto puede observarse en la ecuación:

$$f(z) = a_0 + a_k (z - z_0)^k + a_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \dots$$

La superficie de Riemann original S, que es una esfera con g asas atadas a ésta, es después

conformemente equivalente a una superficie m-laminada de Riemann  $S^*$ , compuesta de láminas delgadas unidas a sí mismas en  $r=2m+2g-2$  puntos de ramificación.

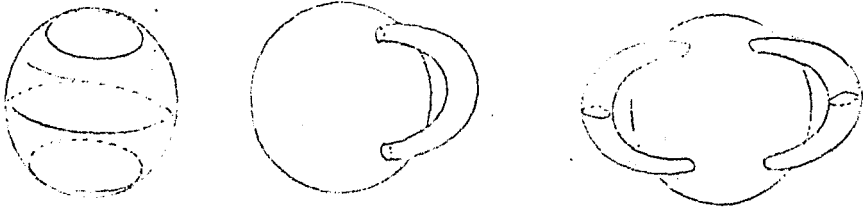


FIG.(12.21). ESFERAS (CON 0 1 y 2 ASAS.

Frecuentemente en física teórica, es necesario examinar el comportamiento de una función de una variable compleja, definida sobre una superficie de Riemann. Podemos usar indistintamente a  $S$  ó a  $S^*$  como la superficie de Riemann; por una función univaluada definida sobre una superficie de Riemann, tendremos en mente la asignación de una serie de potencias definida para cualquier punto  $P$  de  $S$ . Esta función univaluada, entonces consta de la totalidad de series de potencias que se obtienen, asignando una serie para cada punto  $P$  de  $S$ . Sea pues, la función resultante es denotada como:

$$Z = Z(P) \quad P \in S$$

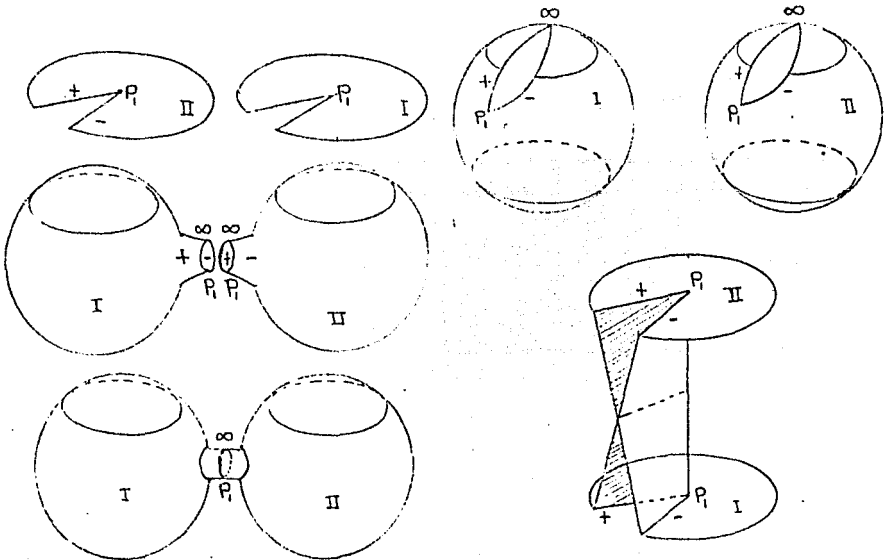
Hay ahora dos funciones univaluadas definidas sobre la superficie de Riemann  $S$ ; la primera de ellas es:

$$w = w(P)$$

que es el potencial complejo, que aplica  $S$  conformemente y uno a uno sobre  $S^*$ , donde  $S^*$  es la superficie de m-láminas de Riemann, la cual está

unida a los puntos de ramificación. La existencia de  $w$  sobre  $S$  nos la garantiza Riemann; la segunda función univaluada  $z=z(P)$  la tenemos recién construida, asignamos una serie de potencias a cada punto  $P$  de  $S$ . ¿Cómo están relacionados  $z$  y  $w$  una con otra? Para contestar esta pregunta, seleccionemos un punto  $P_1$  de  $S$  que no sea un punto silla de  $w$ , y este corresponde a un punto de  $S^*$  que no es un punto de ramificación. Si el valor de  $w$  en  $P_1$  es denotado por  $w_0$ , el valor  $w_0$  será también tomado por  $w$  en  $m-1$  puntos distintos de  $S_1$ , digamos  $P_2, P_3, \dots, P_m$ .

Por analogía la función  $\text{sen } x$  toma el valor 0 en  $x_1=0$  y también en  $m-1$  puntos distintos, a saber  $x_2=\pi, x_3=2\pi, \dots, x_m=(m-1)\pi$  en el eje  $x$ , que en este caso juega el papel de  $S$ . Dado que  $z=z(P)$  es también una función univaluada en  $S$ , entonces  $z$  tendrá  $m$  valores  $z(P_1), z(P_2), \dots, z(P_m)$  que corresponden a un valor de  $w$ , este es  $w_0$ .



F16. (12.22)



Dos láminas soldadas a puntos de ramificación  $P_i$  y  $\infty$  e interconectadas a lo largo de aristas de corte, que terminan en  $P_i$  y  $\infty$ , desde una superficie de Riemann topológicamente equivalentes a una esfera con cero asas.

Por esta razón decimos que  $z$  es una función  $m$ -valuada de  $w$ , e indicamos esto escribiendo  $m$  series de potencias separadas de  $z$ , usando  $w$  como variable independiente, entonces:

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kq} w^k, \quad q = 1, 2, \dots, m$$

representa a  $z$  como una función  $m$ -valuada de  $w$ . No obstante  $z$  es univaluada en  $S$ , en el sentido de que en cualquier punto  $P$  de  $S$  hay un único valor de  $z$ , a saber  $z = z(P)$ .

Puesto que  $w$  aplica  $S$  inyectiva y conformemente sobre la  $m$ -laminada superficie de Riemann  $S^*$ , de esto se sigue que  $z$  es también univaluada sobre  $S^*$ . Luego, hemos llegado a la conclusión de que la función compleja  $z$ , aún cuando es  $m$ -valuada se considera una función de  $w$ , y es univaluada sobre la superficie  $m$ -laminada  $S$  de Riemann.

El descubrimiento hecho por Riemann, es que una función  $m$ -valuada debe hacerse univaluada sobre una superficie multilaminada o sobre una esfera con asas, fue uno de los grandes avances en matemáticas.

Supongamos que tanto  $z$  como  $w$  son funciones potenciales, dando flujos hidrodinámicos sobre la esfera con  $g$  asas, denotada por  $S$ . Si el número total de sumideros y fuentes asociado con  $w$ , es dado por  $m$ , y la misma cantidad para  $z$  es dado por  $n$ ; podemos entonces demostrar

que  $z$  y  $w$  satisfacen una ecuación algebraica de grado  $m$  en  $z$  y de grado  $n$  en  $w$ ; ésta tiene la forma:

$$f(z,w) = a_0(w)z^m + a_1(w)z^{m-1} + \dots + a_{m-1}(w)z + a_m(w) = 0$$

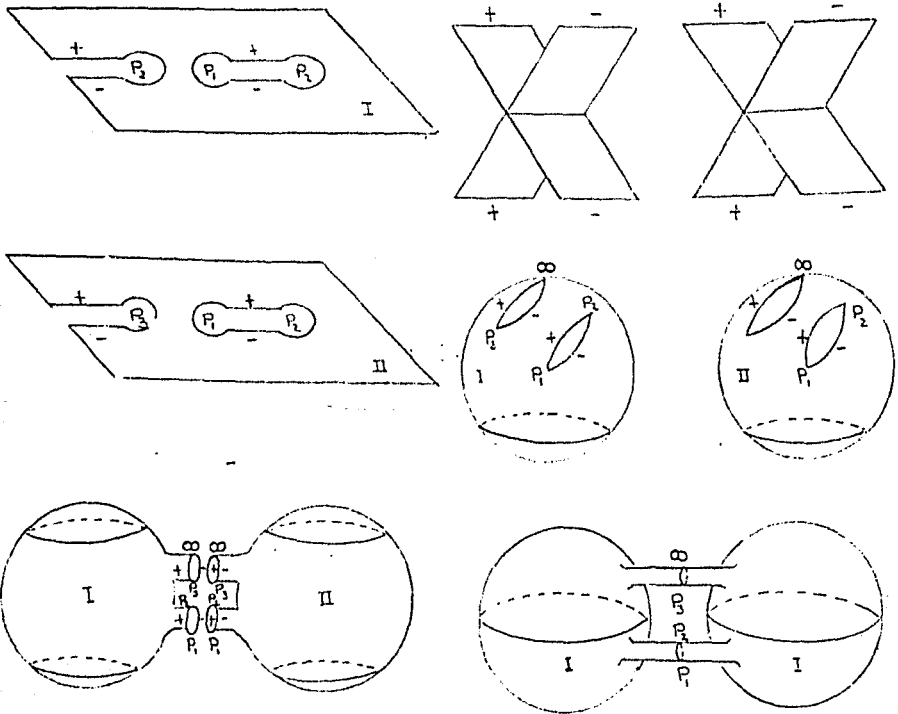


FIG. (12.23)

Dos láminas soldadas a cuatro puntos de ramificación  $P_1, P_2, P_3$  y  $\infty$ , forman una superficie de Riemann, que es topológicamente equivalente a una esfera con un asa; es decir, un toro.

Para cada punto en  $S^*$  o  $S$ , corresponde una

que  $z$  y  $w$  satisfacen una ecuación algebraica de grado  $m$  en  $z$  y de grado  $n$  en  $w$ ; ésta tiene la forma:

$$f(z,w) = a_0(w)z^m + a_1(w)z^{m-1} + \dots + a_{m-1}(w)z + a_m(w) = 0$$

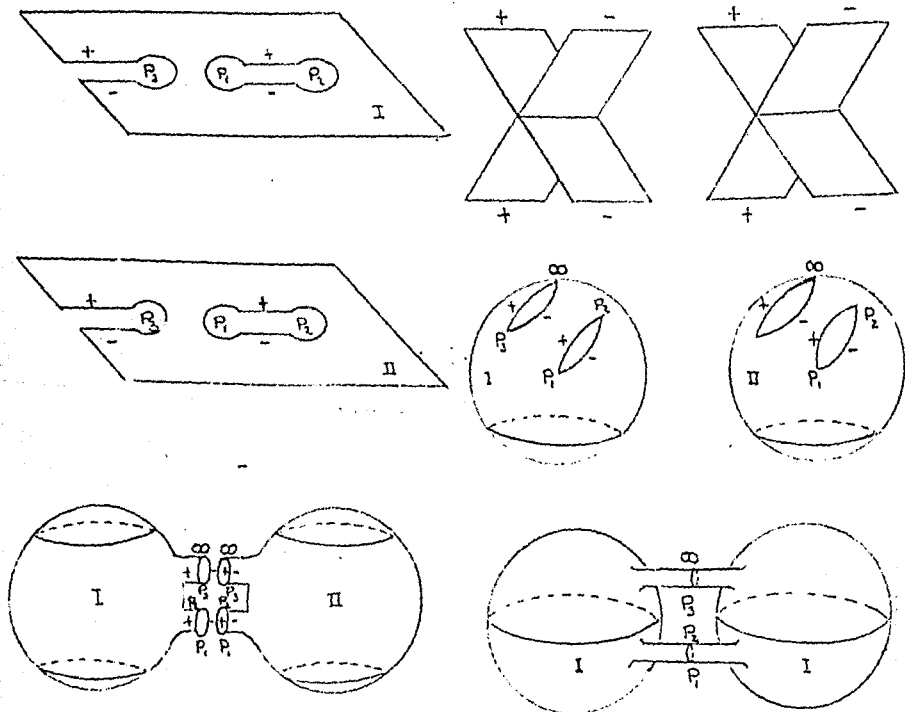


FIG. (12.23)

Dos láminas soldadas a cuatro puntos de ramificación  $P_1, P_2, P_3$  y  $\infty$ , forman una superficie de Riemann, que es topológicamente equivalente a una esfera con un asa; es decir, un toro.

Para cada punto en  $S^*$  o  $S$ , corresponde una

pareja de valores  $(z, w)$ , que satisface la ecuación  $f(z, w) = 0$  e inversamente, para cada  $(z, w)$  corresponde en general un punto sobre la superficie  $S$  o  $S^*$ , entonces  $S$  o  $S^*$  es la superficie de Riemann de la función algebraica  $f(z, w)$ . Digamos que  $w = f(z)$  es una función algebraica de  $z$  y que  $z = z(w)$  es una función algebraica de  $w$ ; tanto  $z$  como  $w$  son funciones univaluadas sobre la superficie de Riemann  $S$  o  $S^*$  asociado con  $f(z, w) = 0$ .

Dado el potencial complejo  $w = w(P)$  sobre  $S$ , con sus  $m$ -sumideros y fuentes, éste permanece fijo a una considerable latitud, en nuestra elección de la segunda función univaluada  $z = z(P)$  definida sobre  $S$ . Esto puede mostrarse si  $z = z(P)$  es cualquier otra función de potencial complejo sobre  $S$ , entonces  $z$  satisface una ecuación algebraica de grado  $m$  en  $z$  de la forma:

$$f(z, w) = z^m + r_1(w)z^{m-1} + \dots + r_{m-1}(w)z + r_m(w) = 0$$

donde  $r_k(w)$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ , son funciones racionales de  $w$ . Además si  $w = w(P)$  es una función de potencial complejo dado sobre  $S$ , tomando en cada valor  $N$ .

Hay una segunda función de potencial complejo  $z = z(P)$ , tal que la ecuación algebraica de grado  $m$ , que satisface  $z$  en términos de  $w$  es irreducible; ser irreducible significa que  $f(z, w)$  no puede ser factorizada, como el producto de otras dos funciones algebraicas de grado positivo en  $z$ , ambas deben tener coeficientes que son funciones racionales de  $w$ ; en otras palabras, no podemos encontrar una pareja de funciones algebraicas  $f_1(z, w)$  y  $f_2(z, w)$  tal que:

$$f(z, w) = f_1(z, w) \cdot f_2(z, w)$$

Si hay un total de  $n$  sumideros y fuentes asociados con  $z = z(P)$ , entonces  $f(z, w)$  es de grado  $n$  en  $w$ , y la ecuación para  $f(z, w)$  puede ser escrita también como:

$$f(z, w) = w^n + R_1(z)w^{n-1} + \dots + R_{n-1}(z)w + R_n(z) = 0$$

donde los  $R_k(z)$ ,  $k=1, 2, \dots, n$  son funciones racionales de  $z$ .

Cada una de las  $m$  series de potencias, es llamada una "rama distinta" de la función algebraica  $m$ -valuada  $z = z(w)$ ; estas series de potencias representan las  $m$  soluciones de la ecuación:

$$f(z, w) = z^m + r_1(w)z^{m-1} + \dots + r_{m-1}(w)z + r_m(w) = 0$$

en el sentido de que  $f(z, w) \equiv 0$ .

Pues del total de  $n$  sumideros y fuentes que hemos supuestamente asociado con  $z = z(P)$ , podemos suponer que  $z = z(P)$  toma un valor  $z = a$  exactamente  $n$  veces en  $S$ ; consecuentemente ésta toma cualquier valor  $z = a$  exactamente  $n$  veces. Se sigue que  $z = z(P)$  da una aplicación inyectiva y conforme de  $S$  sobre la  $n$ -laminada superficie ramificada de Riemann  $S^*$ , los  $n$  puntos sobre  $S^*$  en los cuales  $z(P) = a$  no necesariamente son distintos. Si en un punto  $P_0$  en  $S^*$ ,  $z(P)$  toma el valor de  $a$ ,  $r$  veces, en términos de un parámetro local  $t$  alrededor de  $P_0$  tenemos:

$$z(t) - a = C_r t^r + C_{r+1} t^{r+1} + C_{r+2} t^{r+2} + \dots$$

el parámetro  $t$  es llamado el "uniformizador local" de  $P_0$  sobre  $S^*$ .

En general  $w(P)$  es univaluada y analítica sobre la superficie de Riemann  $S^*$ ; esto significa que es una función analítica del parámetro uniformizador local  $t$ , en cualquier punto sobre  $S^*$ . Por ejemplo en el punto  $P_0$ ,  $w$  toma el valor  $b$  una vez, y tenemos que  $w(t) - b = g_1 t + g_2 t^2 + \dots + g_n t^n + \dots$ ; observese que  $\sqrt[r]{z-a}$  puede tomarse como un parámetro local alrededor de  $P_0$ . El punto  $P_0$  es un punto de ramificación de orden  $(r-1)$  de  $S^*$ ; esto significa que en la vecindad del punto de ramificación  $P_0$  de  $S^*$ , donde  $z$  toma el valor  $a$ ,  $r$  veces,  $w-b$  se expresa como una serie de potencias no en  $(z-a)^{1/r}$ , sino en términos de la raíz  $r$ -ésima  $(z-a)^{1/r}$ ; entonces:

$$w-b = d_1(z-a)^{1/r} + d_2(z-a)^{2/r} + \dots + d_n(z-a)^{n/r} + \dots$$

donde hemos supuesto que  $w$  toma el valor  $b$  una vez en  $P_0$ . Si  $w$  toma el valor de  $b$ ,  $k$  veces en  $P_0$ , entonces la ecuación anterior será:

$$w-b = d_k(z-a)^{k/r} + d_{k+1}(z-a)^{(k+1)/r} + \dots$$

si el valor  $z=\infty$  es tomado  $s$  veces en el punto  $P_0$ , entonces:

$$z(t) = C_{-s} t^{-s} + C_{-s+1} t^{-s+1} + \dots$$

podemos también tomar como parámetro local de uniformización a  $\sqrt[s]{1/z}$ ; observese que  $z=\infty$  es un punto de ramificación de orden  $(s-1)$  en  $S^*$

Es importante recalcar, que la superficie de Rie-

mann  $S$  o  $S^*$  dada, asociada con la función algebraíca  $f(z,w)=0$ , podemos siempre encontrar un parámetro local  $t$  de uniformización alrededor de cualquier punto de  $S$ , tal que  $f(z(t),w(t))=0$  y tal que  $z(t)$  y  $w(t)$  sean series de potencias en  $t$ .

Resumiendo, la esencia del método de Riemann consiste en tomar una superficie bidimensional, e imaginar una familia de curvas dibujadas sobre ella. Uno entonces puede clasificar las funciones univaluadas analíticas geoméricamente, de acuerdo a como tales funciones mapeen la primera superficie con su familia de curvas, sobre la segunda superficie con una correspondiente familia de curvas. La caracterización geométrica del mapeo, dicta entonces la forma analítica que el mapeo debe tomar; luego una función analítica puede ser representada por una integral, puede desarrollarse en serie de potencias y dar un mapeo conforme de una superficie sobre la otra.

### Un comentario final sobre su famoso teorema del mapeo.

Una función analítica univaluada, puede geoméricamente caracterizarse, por el hecho de que mapea un círculo infinitesimal, en una superficie sobre una elipse infinitesimal sobre una segunda superficie. Esto se hace de tal manera que los interiores de las dos curvas se corresponden; con el centro del círculo se mapea el centro de la elipse; luego una pareja de rectas que se cortan en ángulo recto en el centro del círculo, son mapeadas sobre una pareja de rectas intersecándose en ángulo recto en el centro de la elipse.

El mapeo es pues conforme, no obstante la cir-

circunferencia de la elipse no es en general igual a la circunferencia del círculo, y en consecuencia, podemos decir que un mapeo conforme, en general no es una isometría; es decir, no preserva distancias.



### 13. CONCLUSION.

El concepto de número complejo surge inicialmente de la necesidad de automatizar cálculos; aún - las operaciones algebraicas más elementales que incluyen números reales, salen del alcance de los números reales. Hemos visto que no cualquier ecuación algebraica puede ser resuelta en términos de números reales; luego es necesario ya sea dar métodos rutinarios de solución, y en cada caso llevar a cabo una detallada investigación sobre la posibilidad de su aplicación, o extender el dominio de los números reales de forma que las operaciones algebraicas básicas puedan siempre emplearse. Los números complejos son justamente tal extensión del dominio de los números reales; una propiedad notable de los números complejos, es que las operaciones matemáticas que los incluyen no salen del dominio de los números complejos.

La introducción de los números complejos y funciones de variable compleja es muy conveniente - cuando integramos funciones, cuando resolvemos ecuaciones diferenciales y en otros casos cuando - uno frecuentemente tiene que moverse en el dominio de los números complejos. La notación compleja es también conveniente en la formulación matemática de muchas proposiciones físicas (por ejemplo en ingeniería eléctrica, ingeniería electrónica, electrodinámica, etc.).

Una clase principal de funciones de variable compleja, la comprenden las funciones analíticas estrechamente ligadas con la solución de la ecuación de Laplace, en el caso bidimensional, para el cual un gran número de problemas de la mecánica y la fi-

sica se reducen. Por esta razón, los métodos de esta teoría tienen fundamento y uso efectivo en la solución de una gran variedad de problemas como hemos podido constatar.

"Solo ensuciándose las manos" es como realmente se aprende una asignatura tan fascinante como lo es la Variable Compleja.

#### 14. BIBLIOGRAFIA.

[1] LA MATEMATICA SU CONTENIDO , METODOS Y SIGNIFICADO. Tres tomos.

A.D Aleksandrov A.N. Kolmogorov M.A. Laurentiev y otros.

Alianza Universidad 1973.

[2] TEORIA DE LAS FUNCIONES ANALITICAS . Dos tomos.

A. Markushevich.

Editorial MIR Moscú 1970.

[3] NUMEROS COMPLEJOS Y REPRESENTACIONES CONFORMES. 2ª Edición.

A.I. Markushevich.

Editorial MIR Moscú 1984.

[4] THE THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE . Second Edition.

A. Sveshnikov A. Tikhonov

MIR Publishers Moscow 1978.

[5] THEORETICAL AERODYNAMICS . Fourth Edition.

L.M. Milne - Thomson.

Dover Publications , Inc. New York 1973.

[6] AERODINAMIC THEORY . Volume I.

William Frederick Durand.

Dover Publications , Inc. New York 1963.

[7] WORKED PROBLEMS IN APPLIED MATHEMATICS.

N.N. Lebedev I.P. Skalskaya Y. S. Uflyand.

Dover Publications, Inc. New York 1979.

[8] FUNDAMENTALS OF MATHEMATICAL PHYSICS.

Edgar A. Krant.

Mc Graw-Hill Book Company 1967.

[9] PRINCIPLES OF IDEAL-FLUID AERODYNAMICS.

Krishnamurty Karamcheti.

Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington,  
New York 1980.

[10] FUNDAMENTALS OF COMPLEX ANALYSIS.

E. B. Saff A.D. Snider.

Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1976.

[11] INTRODUCTION TO COMPLEX VARIABLES.

E.A. Grove G. Ladas

Houghton Mifflin Company Boston 1974.

[12] MATHEMATICAL METHODS IN THE PHYSICAL SCIENCES.

M.L. Boas

John Wiley & sons, Inc., New York 1966.

[13] FIELDS AND WAVES IN COMMUNICATION ELECTRONICS.

Simon Ramo John R. Whinnery Theodore Van Duzer.

John Wiley & sons, Inc., New York 1965.

[14] A COURSE OF THEORETICAL PHYSICS. Two Volume

A.S. Kompanejets.

MIR Publishers Moscow 1978.

[15] HEAT AND MASS TRANSFER.

A.V. Luikov.

MIR Publishers Moscow 1980

[16] COMPLEX ANALYSIS WITH APPLICATIONS.

Richard A. Silverman.

Prentice - Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1974.

[17] VARIABLE COMPLEJA.

Polya y Latta.

Editorial Limusa México 1976.

[18] ECUACIONES DIFERENCIALES.

Ralph Palmer Agnew.

Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana  
México 1968.

[19] CURSO DE FISICA GENERAL . Tres tomos.

I.V. Savéliev.

MIR Moscú 1984.

[20] MATHEMATICS OF PHYSICS AND MODERN ENGINEERING. 2ª Edición.

Sokalnikoff - Redheffer.

Mc Graw - Hill International Book Company 1966.

[21] PROYECCION ESTEREOGRAFICA.

B.A. Rosenfeld N.D. Sergeeva.

MIR Moscú 1977.

[22] FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA , CALCULO OPERACIONAL.

M.L. Krasnov A.I. Kiselev G.I. Makarenko.

MIR Moscú 1983.

[23] TRANSFORMADAS DE LAPLACE PARA INGENIEROS EN

ELECTRONICA. James G. Holbrook.

Editorial Limusa México 1979.

[24] CALCULO INFINITESIMAL.

Jean Diodonne.

Ediciones Omega S.A. Barcelona 1971.

[25] COMPLEX FUNCTION THEORY.

Maurice Heins.

Academic Press New York and London 1968.

[26] AN INTRODUCTION TO THE THEORY OF FUNCTIONS  
OF A COMPLEX VARIABLE.

E.T. Copson.

Oxford at the clarendon press 1976.

[27] CURSO DE FISICA MECANICA Y ONDAS.

Julien Bok Pierre Morel.

Ediciones Omega S.A. Barcelona 1972.

[28] FUNCTIONS OF ONE COMPLEX VARIABLE.

J.B. Conway.

Springer-Verlag New York Inc. 1973.

[29] ELEMENTARY REAL AND COMPLEX ANALYSIS.

Georgi E. Shilov.

The Mit Press Cambridge 1973.

[30] ELEMENS OF COMPLEX VARIABLES.

Louis L. Pennisi, Louis I. Gordon and Sim Lasher.

Holt, Rinehart and Winston New York 1967.

[31] BASIC COMPLEX ANALYSIS.

Terrold E. Marsden.

W. H. Freeman and Company, San Francisco 1973.