2/2
23

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

EFECTO HALL EN EL EQUILIBRIO MAGNETOHIDRODINAMICO

TESIS PROFESIONAL

Para obtener el Título de:

FISICO

Presenta:

JESUS POMPEYO LEONEL GOMEZ

México, D.F., 1989.

I N D I C E

Capítulo I

I N T R O D U C C I O N

La teoría Magnetohidrodinámica [M H D], llamada frecuentemente hidromagnetismo, constituye una de las ramas de la física en la que confluyen dos, la hidrodinámica y el electromagnetismo, y que tiene como estudio la dinámica de los fluidos en presencia de campos electromagnéticos. Así, en física de plasmas, M H D juega un papel muy importante en el desarrollo de esta rama al considerar al plasma como un fluido conductor.

De acuerdo a las consideraciones que se hacen en la derivación de las ecuaciones magnetohidrodinámicas, se dice que se trabaja en la aproximación de M H D Ideal cuando los efectos disipativos así como el término de corriente Hall y el gradiente de presión de electrones más otros elementos son ignorados en la Ley de Ohm. Es decir, la validéz de las ecuaciones de M H D Ideal, impone restricciones sobre el fluido, tales que se satisfacen las siguientes condiciones:

a) Se supone que el plasma es cuasi-neutro, es decir $n_i \simeq n_e = n$, donde n_i, n_e son las densidades de iones y electrones respectivamente.

b) Los efectos inerciales de los electrones son ignorados haciendo la masa de los electrones $m_e \to 0$.

c) La corriente de desplazamiento se elimina en la Ley de Ampére, considerando solamente oscilaciones de baja frecuencia.

d) El término de Hall y el gradiente de presión de electrones son del mismo orden y se pueden eliminar si $\omega_e \ll \nu_{ei}$ y $r_L \ll L$, es decir, si la frecuencia de colisión ν_{ei} es mucho mayor que la frecuencia de ciclotrón de electrones ω_e , y el radio finito de Larmor es pequeño en comparación con la dimensión característica del plasma L .

Es conveniente mencionar que la región donde la teoría M H D Ideal es válida, queda excluída de la zona de interés en plasmas de fusión, a pesar de que da una descripción adecuada del comportamiento global del plasma [Freidberg 1982]. Es posi ble extender esta región y caer en la de los plasmas de fusión, relajando algunas de las condiciones.

Por otra parte, efectos de asimetría en la aceleración de partículas aceleradas por las inestabilidades $m=0$ en los Z-Pinch y los focos de plasma, no pueden ser explicadas mediante el modelo M H D. Estas asimetrías pueden ser explicadas a través de la inclusión del término de Hall y el gradiente de presión de electrones en las ecuaciones de M H D Ideal, y de esta forma tener un esquema más general en la descripción del problema [Haines 1983].

Con estas consideraciones en mente, es necesario incluir el término de Hall en las ecuaciones de M H D Ideal como primera instancia, por lo que se denominará a esta representación magnetohidrodinámica Hall [M H D H], con lo cual se puede hacer un estudio de la modificación de las ecuaciones de equilibrio, así como de ciertas cantidades conservadas que son necesarias en su derivación, tales como la helicidad cruzada, momento angular, etc. Básicamente, este trabajo se reduce a encontrar las ecuaciones de equilibrio en la aproximación de M H D H, y tratar de exhibir alguna solución a este problema.

La metodología seguida para encontrar estas ecuaciones se realiza de la siguiente manera:

- Se escriben las ecuaciones de M H D H partiendo del modelo de dos fluidos, exhibiendo su diferencia con el caso de M H D.

- Se muestran cuales son las cantidades que se conservan en el caso general (independientemente de la geometría), y para un caso particular, en geometría toroidal (en términos de funciones de flujo ψ y ψ^*), las cuales se utilizarán como constricciones al problema

- Se muestran diversos principios variacionales que generan ecuaciones de equilibrio. Como un antecedente se presenta el trabajo de Woltjer para M H D Ideal [Woltjer 1958], y el de Turner para M H D H bajo la aproximación de incompresibilidad [Turner 1986]. Ambos trabajos son independientes de la geometría.

- Más adelante se muestra como la ecuación de Grad Shafranov para el problema de geometría toroidal axisimétrico se puede obtener de un principio variacional en términos de funciones de flujo ψ y ψ^*. Con estos antecedentes se muestra como obtener ecuaciones de equilibrio generalizadas para el problema de M H D H toroidal axisimétrico.

De las ecuaciones encontradas para la representación de geometría toroidal en M H D H, se muestra que se pueden recuperar como caso particular de las ecuaciones de Turner como prueba de consistencia, cuando algunas constricciones son eliminadas. Se exhibe una forma alternativa de atacar el problema propuesto por Turner quedando abierto el problema de determinar las soluciones para el caso generalizado.

Capítulo II

Ecuaciones M H D H.

En este capítulo se derivan las ecuaciones de Magnetohidrodinámica Ideal M H D, -partiendo del modelo de dos fluidos. Asimismo, se discuten las condiciones bajo las cuales se conserva el término de Hall en la Ley de Ohm, en cuyo caso se denominará a esta nueva representación magnetohidrodinámica Hall MHDH.

Finalmente, se obtienen las ecuaciones en forma conservativa dentro de este nuevo contexto, las cuales permitirán formular un principio variacional.

2.1 Modelo de dos Fluidos.

Considérese un plasma isotrópico completamente ionizado, compuesto solamente por iones y electrones, donde se han eliminado efectos de viscosidad, de tal forma -- que la evolución del sistema se rige por el modelo le dos fluidos dado por las -- ecuaciones de continuidad, momento, energía y las ecuaciones de Maxwell respectivamente.

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla\cdot(n_e \vec{v}_e) = 0 , \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla\cdot[n_i \vec{v}_i] = 0, \tag{2.2}$$

$$m_e n_e \left\{\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_e\cdot\nabla\right\} \vec{v}_e = -\nabla P_e - q_e n_e \left\{\vec{E} + \frac{\vec{v}_e \times \vec{B}}{c}\right\} + \vec{R}_e , \tag{2.3}$$

$$m_i n_i \left\{\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_i\cdot\nabla\right\} \vec{v}_i = -\nabla P_i + q_i n_i \left\{\vec{E} + \frac{\vec{v}_i \times \vec{B}}{c}\right\} + \vec{R}_i , \tag{2.4}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_e\cdot\nabla\right\} S_e = 0 ; \qquad S_e = \frac{P_e}{(m_e n_e)^\gamma} , \tag{2.5}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_i\cdot\nabla\right\} S_i = 0 ; \qquad S_i = \frac{P_i}{(m_i n_i)^\gamma} , \tag{2.6}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad , \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c\, \nabla \times \vec{E} \quad , \tag{2.8}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.9}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \tag{2.9.a}$$

donde $n_e, n_i, m_e, m_i, \vec{v}_e, \vec{v}_i, P_e, P_i, \vec{E}, \vec{B}, \vec{J}, q, \gamma, \vec{R}_e, \vec{R}_i$ representa el número de partícu las por unidad de volumen, la masa, velocidad y presión para cada especie, así co mo los campos eléctrico y magnético, la densidad de corriente, la carga, la razón de calores específicos, y la ganancia de momento debido a la fricción por colisio nes entre iones y electrones respectivamente.

En el caso incompresible, se tendrá $\nabla\cdot\vec{v}_i = 0 = \nabla\cdot\vec{v}_e$ en lugar de (2.5) y (2.6).

Por otra parte, se define la densidad de masa total ρ, la velocidad del centro de masa $\vec{v}$, la densidad de carga ρ_q y la densidad de corriente $\vec{J}$ como:

$$\rho = n_e m_e + n_i m_i \quad , \tag{2.10}$$

$$\vec{v} = \left[n_e m_e \vec{v}_e + n_i m_i \vec{v}_i \right] / \rho \quad , \tag{2.11}$$

$$\rho_q = -e n_e + Z e n_i \quad , \tag{2.12}$$

$$\vec{J} = -e n_e \vec{v}_e + Z e n_i \vec{v}_i \quad . \tag{2.13}$$

Ahora se obtendrán las ecuaciones del sistema por iones y electrones como un solo fluido.

a) Conservación de la Masa.

Multiplíquense las Ecs. (2.1) y (2.2) por m_e y m_i respectivamente. Al sumar -

y utilizar las Ecs. (2.10) y (2.11) se encuentra

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \quad , \tag{2.14}$$

b) Conservación de Carga.

La ecuación de conservación de carga se obtiene al multiplicar por $-e$ y Ze las Ecs. (2.1) y (2.2) como corresponde. Sumando y al usar las Ecs. (2.12) y (2.13) se tiene que:

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec{J} \quad . \tag{2.15}$$

c) Ecuaciones de Movimiento.

Para encontrar la ecuación de movimiento del plasma en el contexto de la aproximación magnetohidrodinámica, se supone que el plasma es cuasi-neutro, es decir, $n_i \simeq n_e = n$, $q_e = -q_i = e$, $Z = 1$.

Entonces, las Ecs. (2.10) a (2.13) toman la forma

$$\rho = n(m_i + m_e) \quad , \tag{2.16}$$

$$\vec{v} = \frac{m_e\vec{v}_e + m_i\vec{v}_i}{m_e + m_i} \quad , \tag{2.17}$$

$$\rho_q = -e\Delta n \simeq 0 \quad , \tag{2.18}$$

$$\vec{J} = en[\vec{v}_i - \vec{v}_e] \quad . \tag{2.19}$$

Así, cuando se suman las Ecs. (2.3) y (2.4) usando (2.19) se obtiene

$$nm_i\left\{\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial t} + \frac{m_e}{m_i}\frac{\partial\vec{v}_e}{\partial t}\right\} + nm_i\left\{\vec{v}_i\cdot\nabla\vec{v}_i + \frac{m_e}{m_i}\vec{v}_e\cdot\nabla\vec{v}_e\right\} = -\nabla P + \frac{\vec{J}\times\vec{B}}{c} \quad , \tag{2.20}$$

donde $P = P_e + P_i$ y haciendo uso del hecho de que $\vec{R}_e = -\vec{R}_i$ debido a la -.-

conservación de momento.

Si se impone la condición de que la inercia de los electrones sea despreciable, haciendo $\frac{m_e}{m_i} \longrightarrow 0$ y observando que bajo esta aproximación las Ecs. (2.16) y (2.17) se reducen a

$$\rho \simeq n\, m_i \quad , \tag{2.21}$$

$$\vec{v} \simeq \vec{v}_i \quad , \tag{2.22}$$

la ecuación (2.20) quedará

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right\} \vec{v} = - \nabla P + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} \quad . \tag{2.23}$$

De esta manera, la Ec. (2.23) es la ecuación de movimiento del sistema visto globalmente bajo estas aproximaciones.

d) Energía Interna.

De las Ecs. (2.5) y (2.6) se obtienen las ecuaciones de estado dadas por

$$P_e = S_e \left(m_e n_e \right)^{\gamma} \quad , \tag{2.24}$$

$$P_i = S_i \left[m_i n_i \right]^{\gamma} \quad , \tag{2.25}$$

puesto que $P = P_e + P_i$, entonces sumando (2.24) y (2.25) se tiene

$$P = \left(n\, m_i \right)^{\gamma} \left\{ S_i + \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{\gamma} S_e \right\} \quad . \tag{2.26}$$

Al suponer que los efectos inerciales de los electrones han sido eliminados, en la ecuación (2.26) el término $\frac{m_e}{m_i} \longrightarrow 0$ · por lo tanto, la ecuación de estado del sistema bajo esta aproximación será

$$P = [nm_i]^{\gamma} S_i \tag{2.27}$$

en cuyo caso la ecuación de energía para el fluido quedará

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right\}\frac{P}{\rho^{\gamma}} = 0 \, . \tag{2.28}$$

c) Ley de Ohm.

Finalmente, para tener un sistema autoconsistente con el modelo de dos fluidos se escribirá la ecuación para el campo eléctrico.

Multiplicando las Ecs. (2.3) y (2.4) por m_i y m_e respectivamente, si a (2.4) - se le resta (2.3) con la suposición de cuasi-neutralidad y usando (2.16) y - - (2.17) se encuentra

$$m_i m_e n\left\{\frac{\partial(\vec{v}_i-\vec{v}_e)}{\partial t} + \vec{v}_i\cdot\nabla\vec{v}_i - \vec{v}_e\cdot\nabla\vec{v}_e\right\} = -m_e\nabla P_i + m_i\nabla P_e + \rho e\vec{E} - m_i\vec{R}_e + m_e\vec{R}_i + \frac{ne}{c}[m_i\vec{v}_e + m_e\vec{v}_i]\times\vec{B} \, . \tag{2.29}$$

Al usar la igualdad $m_i\vec{v}_e + m_e\vec{v}_i = m_i\vec{v}_i + m_e\vec{v}_e + m_e(\vec{v}_i-\vec{v}_e) + m_i(\vec{v}_e-\vec{v}_i)$ substituyendo en (2.29), con (2.16), (2.17) y (2.19) se obtiene

$$m_i m_e n\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\vec{v}_i-\vec{v}_e) + \vec{v}_i\cdot\nabla\vec{v}_i - \vec{v}_e\cdot\nabla\vec{v}_e\right\} = -m_e\nabla P_i + m_i\nabla P_e + \rho\frac{e}{c}(\vec{v}\times\vec{B}) + \rho e\vec{E} + \frac{(m_e-m_i)}{c}\vec{J}\times\vec{B} - m_i\vec{R}_e + m_e\vec{R}_i \tag{2.30}$$

La ecuación (2.30) se simplifica al multiplicar por e/m_i, de esta manera los - términos cuya relación es $\frac{m_e}{m_i}$ se eliminarán al hacer tender $\frac{m_e}{m_i} \rightarrow 0$ quedando:

$$m_e n e\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\vec{v}_i-\vec{v}_e) + \vec{v}_i\cdot\nabla\vec{v}_i - \vec{v}_e\cdot\nabla\vec{v}_e\right\} = e\nabla P_e + \rho\frac{e^2}{cm_i}(\vec{v}\times\vec{B}) + \rho\frac{e^2}{m_i}\vec{E} - \frac{e}{c}(\vec{J}\times\vec{B}) - e\vec{R}_e \, , \tag{2.31}$$

al substituir la ecuación (2.21) en (2.31) y desarrollar se tiene

$$m_e\left\{\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + n e\, \vec{v}_i\cdot\nabla\vec{v}_i + \vec{v}_i\, \nabla\cdot(e n \vec{v}_i) - n e\, \vec{v}_e\cdot\nabla\vec{v}_e - \vec{v}_e\, \nabla\cdot(e n \vec{v}_e)\right\} = +e\nabla P_e + \frac{n e^2}{c}(\vec{v}\times\vec{B}) + n e^2 \vec{E} - \frac{e}{c}(\vec{J}\times\vec{B}) - e\vec{R}_e \, . \tag{2.32}$$

Por otra parte se puede recordar que $\vec{R}$ representa la ganancia de momento del fluido debido a las colisiones entre iones y electrones, entonces, por conservación de momento se debe cumplir $\vec{R}_e = -\vec{R}_i$, por lo tanto se puede escribir en función de la velocidad relativa $(\vec{v}_i - \vec{v}_e)$, como

$$\vec{R}_e = + m_e n_e(\vec{v}_i - \vec{v}_e)\,\nu_{ei} = m_e \frac{\vec{J}}{e}\nu_{ei} \, , \tag{2.32.a}$$

donde ν_{ei} es la frecuencia de colisiones.

Puesto que las colisiones son esencialmente coulombianas se tiene

$$\vec{R}_e = \eta\, e^2 n^2(\vec{v}_i - \vec{v}_e) = \eta\, e n \vec{J} \tag{2.32.b}$$

siendo η la resistividad, así de las Ecs. (2.32.a) y (2.32.b) $\nu_{ei} = \frac{e^2 n}{m_e}\eta$, por lo tanto $\frac{\vec{R}_e}{e^2 n} = \eta\vec{J}$, con ésto la Ec. (2.32) finalmente quedará

$$\vec{E} = -\frac{(\vec{v}\times\vec{B})}{c} + \frac{(\vec{J}\times\vec{B})}{enc} - \frac{\nabla P_e}{ne} + \eta\vec{J} + \frac{m_e}{ne^2}\left\{\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} + \nabla\cdot(en\vec{v}_i\vec{v}_i) - en\vec{v}_e\nabla\vec{v}_e - \vec{v}_e\nabla\cdot(en\vec{v}_i)\right\} . \tag{2.33}$$

De esta forma la Ec. (2.33) se denomina Ley de Ohm generalizada, la cual describe las propiedades eléctricas del fluido en el caso conservativo.

Esta ecuación se puede reducir bajo las siguientes consideraciones:

Si se impone la condición de que la inercia de los electrones sea enteramente despreciable, en comparación con el término que se encuentra entre paréntesis en (2.33) o de otra forma poder acotarlo, entonces para efectos macroscópicos el último término del lado derecho de la Ec. (2.33) desaparece, quedando

$$\vec{E} = -\frac{(\vec{v}\times\vec{B})}{c} + \frac{(\vec{J}\times\vec{B})}{nec} - \frac{\nabla P_e}{ne} + \eta\vec{J} \, . \tag{2.33.a}$$

Dado que en este trabajo interesa estudiar el efecto del campo eléctrico de Hall sobre el equilibrio, se analizará bajo qué condiciones es retenido.

Una manera de abordar el problema consiste en estimar la forma de la Ley de Ohm generalizada cuando el número de Reynolds magnético tiende a infinito. Este se define como $R_m = \frac{v L}{c^2 \eta}$, donde v y L son la velocidad y longitud características del plasma respectivamente, c es la velocidad de la Luz y η la resistividad.

Al multiplicar por c^2/vL la Ec. (2.33.a)

$$\frac{c^2}{vL}\vec{E} = -\frac{c^2}{vL}\frac{(\vec{v}\times\vec{B})}{c} + \frac{c^2(\vec{J}\times\vec{B})}{vL\, nec} + \frac{\vec{J}}{R_m} - \frac{c^2}{vL}\frac{\nabla P_e}{ne} \quad . \tag{2.33.b}$$

De esta forma al tomar el término $\frac{c^2}{vL}\frac{(\vec{v}\times\vec{B})}{c}$ como referencia se compara con los términos de la Ec. (2.33.b) los cuales se escriben en la siguiente tabla.

Tabla (2.1)

Término con el que se compara	Orden de Magnitud	Término de Referencia	Cociente	
$\frac{\vec{J}}{R_m}$	$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_m}\frac{cB}{L}$	$\frac{c^2}{vL}\frac{(\vec{v}\times\vec{B})}{c}$	$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_m}$	(A-1)
$\frac{c^2}{vL}\frac{(\vec{J}\times\vec{B})}{nec}$	$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_m}\left(\frac{\omega_e}{\nu_{ei}}\right)\frac{cB}{L}$		$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_m}\left(\frac{\omega_e}{\nu_{ei}}\right)$	(A-2)
$\frac{c^2}{vL}\frac{\nabla P_e}{ne}$	$\frac{1}{R_m}\left(\frac{\omega_e}{\nu_{ei}}\right)\left(\frac{r_L}{L}\right)^2 e\, n\, L\, \omega_e$		$\frac{1}{R_m}\left(\frac{\omega_e}{\nu_{ei}}\right)\left(\frac{e}{c}\right)^2\frac{n}{m_e}\left(\frac{r_L}{L}\right)^2$	(A-3)

De la tabla anterior se tiene la condición bajo la cual cada uno de los términos de (2.33.b) se eliminará en comparación con $(\vec{v}\times\vec{B})$ para obtener la Ley de Ohm en el esquema de M H D Ideal. Así de (A-1) se tiene que el término --

resistivo se eliminará si

$$\frac{1}{4\pi} << R_m \quad . \tag{B-1}$$

De (A-2) se encuentra

$$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_m}\left(\frac{\omega_e}{\nu_{ei}}\right) << 1 \quad . \tag{B-2}$$

Esto significa que para valores de $R_m >> \frac{1}{4\pi}$ el término de Hall $(\vec{J}\times\vec{B})$ -- se desprecia en comparación con $(\vec{U}\times\vec{B})$, siempre que la frecuencia de ciclotrón de electrones sea menor que la frecuencia de colisiones.

Finalmente de (A-3) queda la siguiente condición

$$\frac{1}{R_m}\left(\frac{\omega_e}{\nu_{ei}}\right)\left(\frac{eL}{c}\right)^2\frac{n}{m_e}\left(\frac{r_L}{L}\right)^2 << 1 \tag{B-3}$$

Este resultado muestra que ∇P_e se eliminará en comparación con $(\vec{U}\times\vec{B})$, -- cuando la longitud característica del plasma sea mayor que el término del lado izquierdo en (B-3).

Para estas aproximaciones se han usado las siguientes definiciones.

$\omega_e = \frac{eB}{m_e c}$	Frecuencia de ciclotrón de electrones
$r_L = \frac{V_{\theta e}}{\omega_e}$	Radio finito de Larmor
$R_m = \frac{UL}{c^2\eta}$	Número de Reynolds magnético
$V_{\theta e} = \left[\frac{KT_e}{m_e}\right]^{1/2}$	Velocidad térmica de electrones
$\nu_{ei} = \frac{ne^2}{m_e}\eta$	Frecuencia de colisiones

Por lo tanto de las condiciones encontradas en (B-1), (B-2) y (B-3) la Ecuación (2.33.a) finalmente se escribe

$$\vec{E} = -\frac{(\vec{v} \times \vec{B})}{c} \quad . \tag{2.34}$$

Esta ecuación corresponde a la Ley de Ohm en la aproximación de M H D Ideal. Por otra parte, de (B-2) se tiene que si $\frac{1}{4\pi} \frac{1}{k_{n1}} \left(\frac{\omega_e}{\nu_{ei}}\right) \tilde{v} |$, el término correspondiente al efecto Hall deberá ser retenido en la Ec. (2.34). Este caso es el motivo de este trabajo, entonces (2.33.a) queda

$$\vec{E} = -\frac{(\vec{v} \times \vec{B})}{c} + \frac{(\vec{J} \times \vec{B})}{n_e e} \quad . \tag{2.35}$$

Para resumir, se han obtenido las ecuaciones de evolución del plasma en el modelo de un fluído, mostrando como éstas se simplifican bajo ciertas aproximaciones. Así, se tendrá el sistema en forma cerrada al incluir las ecuaciones de Maxwell. Si se consideran oscilaciones de baja frecuencia tales que la corriente de desplazamiento $\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ en la Ec. (2.7) puede ser ignorada siempre que ($\omega L \ll c$), entonces

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla\cdot(\rho \vec{v}) , \tag{2.36}$$

$$\rho \left\{\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right\} \vec{v} = - \nabla P + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} \tag{2.37}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right] \frac{P}{\rho^{r}} = 0 \quad , \tag{2.38}$$

$$\vec{E} = -\frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{nec} \quad , \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - c\, \nabla \times \vec{E} \quad , \tag{2.40}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} , \qquad (2.41)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 , \qquad (2.42)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 . \qquad (2.42.a)$$

Ahora, al tomar en cuenta el término de corriente Hall $\vec{J} \times \vec{B}$, al conjunto de ecuaciones (2.36) a (2.42.a) se designará como Magnetohidrodinámica Hall -- (MHDH).

La importancia de conservar este nuevo término en (2.39), permite explicar fenómenos importantes que surgen al tener inestabilidades de tipo $m=0$ relacionado directamente con el radio finito de Larmor, tomando gran interés en los - mecanismos de aceleración de iones y producción de neutrones [Haines 1983], para el caso de los Z-Pinch y los experimentos en focos de plasma denso. Por -- otra parte, al tener la Ley de Ohm de esta manera se modificarán las cantidades conservadas con el fin de encontrar las condiciones que permitan obtener - las ecuaciones de equilibrio modificadas.

2.2 Ecuaciones de Conservación M H D H.

Cuando se tiene una ecuación escrita como la razón de cambio en el tiempo de un - conjunto de cantidades iguales a la divergencia en un flujo, se dice que se ha escrito en forma conservativa. Bajo esta definición, se escribirán las ecuaciones M H D H en forma conservativa.

a) Conservación de Masa.

De la Ec. (2.36) se ve inmediatamente que ésta cumple con lo definido anteriormente, teniendo así la ecuación de conservación para la densidad de masa.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla\cdot(\rho \vec{v}) \ . \tag{2.43}$$

b) Conservación de Momento.

Multiplíquese la ecuación (2.43) por $\vec{v}$ y sumémosla a la ecuación (2.37), -- donde se encuentra

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} = - \nabla\cdot(\rho \vec{v}\vec{v}) - \nabla P + \frac{\vec{J}}{c}\times\vec{B} \ . \tag{2.44}$$

El último término de la ecuación (2.44) se puede escribir
$(\vec{J}\times\vec{B}) = \nabla\cdot\left[\frac{\vec{B}\vec{B}}{4\pi} - \frac{B^2}{8\pi}\overline{\overline{I}}\right]$ siendo $\overline{\overline{I}}$

Un tensor unitario. Substituyendo en (2.44) se tendrá

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} = - \nabla\cdot\left\{\rho\vec{v}\vec{v} + \frac{\vec{B}\vec{B}}{4\pi} + \left[P + \frac{B^2}{8\pi}\right]\overline{\overline{I}}\right\} . \tag{2.45}$$

De esta manera la ecuación (2.45) representa la conservación del momento.

c) Conservación de Inducción Magnética.

En el caso de la ecuación de inducción magnética, la Ec. (2.40) se escribe -- utilizando (2.39) bajo las aproximaciones dadas por (2.19) y (2.22) como

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla\times(\vec{v}_e\times\vec{B}) \ . \tag{2.46}$$

Así, la Ec. (2.46) muestra que las líneas de campo magnético están congeladas al movimiento del fluído de electrones cuando se toma en consideración el término de Hall en la Ley de Ohm, a diferencia de lo que ocurre en M H D Ideal, cuando éstas siguen el flujo de iones.

Por otra parte, el término $\nabla\times(\vec{v}_e\times\vec{B}) = \nabla\cdot[\vec{v}_e\vec{B} - \vec{B}\vec{v}_e]$ así

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla\cdot\left[\vec{v}_e\vec{B} - \vec{B}\vec{v}_e\right] . \tag{2.47}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$[illegible] \qquad (2.48)$$

[illegible]

$$[illegible] \qquad (2.49)$$

El primer término de (2.49) se puede escribir como [illegible] substituyendo en (2.49) se tiene

$$[illegible] \qquad (2.50)$$

Ahora, de la Ec. (2.37) se toma ∇B y al sustituir en (2.50) se obtiene

$$[illegible] \qquad (2.51)$$

Por otra parte [illegible] y $\nabla\cdot(\vec{J}\times\vec{B}) = \nabla\cdot[\ldots]$ [illegible]. Al substituir (2.51) y combinar términos se encuentra

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{(\gamma-1)} + \frac{B^2}{8\pi}\right\} = \nabla\cdot\left\{[illegible]\right\} \qquad (2.52)$$

La ecuación (2.52) representa la conservación para la densidad de energía.

Para resumir, se han escrito las ecuaciones de conservación de masa (2.43), momento (2.45), inducción magnética (2.47) y densidad de energía (2.52), en la aproximación de M H D H.

Mostrando que sólamente la ecuación de inducción magnética (2.46) cambia en esta aproximación dado que ahora las líneas de campo magnético se moverán con el fluído de electrones a diferencia del caso M H D Ideal.

Capítulo III

Cantidades Conservadas

En este capítulo se mostrará cuáles son las cantidades conservadas en la aproxi-- mación de magnetohidrodinámica ideal, así como en el caso de magnetohidrodinámica Hall. Del mismo modo se escriben en geometría cilíndrica y geometría toroidal y se muestra que pueden ser pesadas por funciones arbitrarias dependientes de fun-- ciones de flujo.

3.1 Cantidades Conservadas de M H D Ideal.

Las nuevas cantidades que se incluyen en el esquema de las ecuaciones magneto-hidrodinámicas, ecuaciones (2.36) a (2.42.a) son dadas por [Woltjer 1958].

$$K_1 = \int_D (\vec{A}\cdot\vec{B})\, d\vec{x}^3 \quad , \tag{3.1}$$

$$K_2 = \int_D (\vec{v}\cdot\vec{B})\, d\vec{x}^3 \quad , \tag{3.2}$$

$$K_{3i} = \int_D (\vec{r}\times\rho\,\vec{v})\cdot\vec{a}_i\, d\vec{x}^3 \quad , \tag{3.3}$$

con condiciones a la frontera tales que

$$\vec{B}\cdot\vec{n}\Big|_{\partial D} = 0 \quad ; \quad \vec{v}\cdot\vec{n}\Big|_{\partial D} = 0 \quad , \tag{3.4}$$

o con mayor generalidad

$$\vec{E}\times\vec{n}\Big|_{\partial D} = 0 \quad , \tag{3.5}$$

lo cual se satisface si dicha frontera es una superficie de campo magnético - además se pedirá que no actúen fuerzas externas sobre el sistema.

En las ecuaciones anteriores k_1 , representa la helicidad magnética, donde $\vec{A}$ es el potencial vectorial y $\vec{B}$ el campo magnético. K_2 se denomina helicidad cruzada y k_3 es la proyección del momento angular, con $\vec{r}$ un radio vector y $\hat{a}_u$ un vector unitario para un sistema coordenado arbitrario.

a) Conservación de Helicidad Magnética en M H D Ideal.

Tómese $\frac{\partial k_1}{\partial t}$ de la ecuación (3.1). Al desarrollar el integrado se encuentra que

$$\frac{\partial(\vec{A}\cdot\vec{B})}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \tag{3.6}$$

donde

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\left\{c\ \vec{E} + c\nabla\varphi\right\} \quad , \tag{3.7}$$

φ es el potencial electrostático.

Si se considera la Ley de Ohm sin el término de Hall, Ec. (2.34) $\vec{E} = -\frac{(\vec{v}\times\vec{B})}{c}$.

Al substituir (3.7) y la Ley de Fáraday, Ec. (2.40), con (2.34) en (3.6), se tiene que al desarrollar e integrar en todo el espacio quedará

$$\int_D \frac{\partial(\vec{A}\cdot\vec{B})}{\partial t}\, d^3x = -\int_D \left[2(\vec{E}\cdot\vec{B}) + \nabla\cdot\left\{\left[c\varphi - (\vec{A}\cdot\vec{v})\right]\vec{B} + (\vec{A}\cdot\vec{B})\,\vec{v}\right\}\right] d^3x \ . \tag{3.8}$$

Por el teorema de Gauss y las condiciones a la frontera dadas por (3.4) el segundo término de la integral desaparece, quedando $\int_D (\vec{E}\cdot\vec{B})\, d^3x$ que se anula, ya que por la Ley de Ohm $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son ortogonales si se ignora la resistividad, $\nabla P_1 - \frac{(\vec{J}\times\vec{B})}{c}$. De esta manera se ha mostrado que la helicidad magnética es una constante y por lo tanto es una cantidad conservada en M H D Ideal.

b) Helicidad Cruzada.

Ahora se demostrará que K_2 se conserva.

Al tomar $\frac{\partial K_2}{\partial t}$ en la ecuación (3.2) se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{v}\cdot\vec{B}) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\cdot\vec{B} + \vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad . \tag{3.9}$$

La ecuación (2.37) se puede expresar como

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\vec{J}\times\vec{B}}{\rho c} - \frac{\nabla P}{\rho} - \nabla\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) \, , \tag{3.10}$$

con $\quad \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = \nabla\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})$.

Cuando se substituye la Ley de Faraday, Ec. (2.40), con (2.34) y (3.10), en (3.9) se obtiene

$$\frac{\partial(\vec{v}\cdot\vec{B})}{\partial t} = \frac{(\vec{J}\times\vec{B})\cdot\vec{B}}{\rho c} - \frac{\nabla P}{\rho}\cdot\vec{B} + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{B} - \nabla\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)\cdot\vec{B} + \vec{v}\cdot\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B}) \tag{3.11}$$

El primer término de (3.11) se elimina ya que $\vec{J}\times\vec{B}$ es un vector perpendicular a $\vec{B}$. Los demás términos se pueden desarrollar de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\nabla P}{\rho}\cdot\vec{B} &= \nabla\cdot\left[\frac{\vec{A}}{\rho}\times\nabla P\right] - \vec{A}\cdot\left[\nabla P\times\nabla\left(\tfrac{1}{\rho}\right)\right] \\
\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{B} &= (\nabla\times\vec{v})\cdot(\vec{v}\times\vec{B}) \\
\vec{v}\cdot\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B}) &= (\nabla\times\vec{v})\cdot(\vec{v}\times\vec{B}) - \nabla\cdot\left[\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{B})\right] \\
\nabla\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)\cdot\vec{B} &= \nabla\cdot\left[\tfrac{1}{2}v^2\vec{B}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Al substituir (3.12) en (3.11)

$$\frac{\partial(\vec{v}\cdot\vec{B})}{\partial t} = -\nabla\cdot\left[\tfrac{1}{2}v^2\vec{B} + (\vec{v}\cdot\vec{B})\vec{v} - v^2\vec{B}\right] + \nabla\cdot\left[\frac{\vec{A}}{\rho}\times\nabla P\right] - \vec{A}\cdot\left[\nabla P\times\nabla\left(\tfrac{1}{\rho}\right)\right] . \tag{3.13}$$

Integrando (3.13) en todo el espacio, por el teorema de Gauss los dos primeros términos quedan como:

$$\frac{\partial K_2}{\partial t} = \int_S \left[-\frac{1}{2} v^2 \vec{B} + (\vec{v} \cdot \vec{B}) \vec{v} \right] \cdot \hat{n}\, ds + \int_S \left[\frac{\vec{A}}{\rho} \times \nabla P \right] \cdot \hat{n}\, ds \quad . \qquad (3.14)$$

La primera integral se elimina de acuerdo a las condiciones dadas por (3.4). - Puesto que se ha dicho que no actúan fuerzas externas sobre el sistema, entonces se puede elegir $\vec{A}$ de tal forma que se anule en la superficie, de acuerdo a ésto, la integral $\int_S \left[\frac{\vec{A}}{\rho} \times \nabla P \right] \cdot \hat{n}\, ds$ también desaparece. Para evaluar la última integral es necesario imponer condiciones sobre ∇P y $\nabla \rho$. Si se pide que ∇P y $\nabla \rho$ sean paralelos, entonces se debe de cumplir que la presión sea una función de la densidad, es decir $P = f(\rho)$, con ésto la integral $\int_D \vec{A} \cdot \left[\nabla P \times \nabla \frac{1}{\rho} \right] d^3x$ se eliminará en todo el volumen.

Por lo tanto, bajo las aproximaciones citadas anteriormente, se cumple que -- $\frac{\partial K_2}{\partial t} = 0$, de donde se observa que la helicidad cruzada se conserva en la - - aproximación de M H D Ideal.

c) Momento Angular.

Para mostrar la conservación del momento angular se hará de la siguiente manera. Sea $\vec{L} = \int_D (\vec{r} \times \rho \vec{v})\, d^3x$, que al tomar $\frac{\partial \vec{L}}{\partial t}$ y utilizar la Ec. (2.44) - se tiene

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = \int_D \left[\vec{r} \times \left\{ -\nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} - \nabla P \right\} \right] d^3x \quad . \qquad (3.15)$$

Ahora (3.15) se puede expresar como sigue

como $\vec{r} \times \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = - \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \times \vec{r} = \rho \vec{v} \cdot \nabla (\vec{r} \times \vec{v}) = \nabla \cdot [\rho \vec{v} (\vec{r} \times \vec{v})] - (\vec{r} \times \vec{v}) \nabla \cdot (\rho \vec{v})$

entonces $\vec{r} \times \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = (\vec{r} \times \vec{v}) \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot [\rho \vec{v} (\vec{r} \times \vec{v})] - (\vec{r} \times \vec{v}) \nabla \cdot (\rho \vec{v})$.

$$\therefore \quad \vec{r} \times \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \nabla \cdot [\rho \vec{v} (\vec{r} \times \vec{v})] \; , \qquad (3.16)$$

$$\vec{r} \times \nabla P = - \nabla \times (P \vec{r}) \; , \qquad (3.17)$$

$$\vec{r} \times \left(\frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} \right) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \nabla \cdot [\vec{B} (\vec{r} \times \vec{B})] - (\vec{r} \times \vec{B}) \nabla \cdot \vec{B} + \nabla \times \left[\frac{1}{2} B^2 \vec{r} \right] \right\} \; , \qquad (3.18)$$

al substituir (3.16), (3.17) y (3.18) en (3.15) se tiene

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t} = \int_D \left\{ -\nabla \cdot \left[\rho \vec{v}(\vec{r}\times\vec{B}) - \frac{\vec{B}}{4\pi}(\vec{r}\times\vec{B}) \right] + \nabla \times \left[\left(\tfrac{1}{2}B^2 + P \right)\vec{r} \right] - (\vec{r}\times\vec{B})\, \nabla\cdot\vec{B} \right\} d^3x \,. \quad (3.19)$$

Al realizar la integración, por el teorema de Gauss el término de la divergencia lleva a una integral de superficie la cual se anula en la frontera de acuerdo a (3.4). La segunda integral también lleva a una integral de superficie $\int_S \left[\frac{1}{2}B^2 + P\right]\vec{r}\times\hat{n}\, ds$ que se anulará si se considera una superficie tal que $\vec{r} \parallel \hat{n}$, es decir, si se elige sólamente geometría esférica: De esta última condición se observa que en general, el momento angular no se conserva cuando el término magnético es incluído en (3.15). Sin embargo, para condiciones adecuadas del problema se puede asegurar la conservación de esta cantidad. El último término se suprime puesto que $\nabla\cdot\vec{B}=0$.

Con ésto se ha mostrado que en el caso de simetría esférica la contribución del término magnético no afecta la conservación del momento angular mecánico. Por lo tanto, esta demostración se puede hacer para cada una de las proyecciones de K_{3i}, con lo cual se tiene que es una variable conservada.

3.2 Cantidades Conservadas para M H D H.

En esta sección, se procederá a demostrar cuáles son las cantidades que se conservan cuando el término de Hall ha sido incluído en las ecuaciones magnetohidrodinámicas. Así, estas cantidades en M H D H serán:

$$K_1 = \int_D (\vec{A}\cdot\vec{B})\, d^3x \,, \quad (3.20)$$

$$\underset{\sim}{K_2} = \int_D (\vec{V}\cdot\vec{\Omega})\, d^3x \quad (3.21)$$

$$K_{3i} = \int_D (\vec{r}\times \rho\vec{v})\cdot \hat{a}_i\, d^3x \quad (3.22)$$

donde k_1 , es la helicidad magnética, $\underset{\sim}{k}_2$ es la helicidad generalizada que se - denominará helicidad híbrida, con $\vec{V}$ la velocidad generalizada y $\vec{\Omega}$ vorticidad generalizada, las cuales se definirán más adelante, L_{3i} es el momento angular.

a) Helicidad Magnética en M H D H.

para demostrar que k_1 se conserva en estas representaciones, se procederá como en los casos anteriores.

Así, cuando se toma $\frac{\partial k_1}{\partial t}$, utilizando el resultado de (3.6) al substituir la ecuación (3.7) y (2.40) con (2.39) quedará

$$\frac{\partial(\vec{A}\cdot\vec{B})}{\partial t} = \frac{(\vec{J}\times\vec{B})}{ne}\cdot\vec{B} + (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{B} + \nabla\cdot\left\{(\vec{A}\cdot\vec{B})\frac{\vec{J}}{en} - (\vec{A}\cdot\frac{\vec{J}}{en})\vec{B} + (\vec{A}\cdot\vec{v})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{v}\right\}. \tag{3.23}$$

Los primeros dos términos de (3.23) se eliminan por ser perpendiculares a $\vec{B}$. Integrando sobre todo el volumen, el término de la divergencia por el teorema de Gauss lleva a una integral de superficie la cual desaparece de acuerdo a - las condiciones a la frontera dadas por (3.4) y además con $\vec{A}=0$ en la superficie, por tener libertad de elección de norma. Por lo tanto se tiene que $\frac{\partial k_1}{\partial t}=0$.

Esto implica la conservación de la helicidad magnética en la aproximación de M H D H.

b) Helicidad Híbrida M H D H.

Ahora, se demostrará como esta nueva cantidad la cual se denominará helicidad híbrida, completa el papel formal de la helicidad cruzada en el esquema de -- M H D H.

Para ésto se definirán nuevas cantidades análogas a $\vec{v}$ y $\vec{B}$ en este nuevo contexto. Se reemplaza el término $\vec{J}\times\vec{B}$ de la Ley de Ohm en la ecuación (2.37):

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \frac{ne}{\rho}\vec{E} + \frac{ne}{\rho c}(\vec{v}\times\vec{B}) - \frac{\nabla P}{\rho} + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) - \nabla(\tfrac{1}{2}v^2) \ . \tag{3.24}$$

Substituyendo la Ec. (2.21) en (3.24) y al tomar el rotacional empleando la - Ley de Fáraday para cambiar el rotacional del campo eléctrico por la derivada del tiempo de $\vec{B}$ queda

$$\frac{\partial(\vec{\omega}+\vec{\omega}_c)}{\partial t} = \nabla \times \left\{ \vec{v} \times (\vec{\omega}+\vec{\omega}_c) \right\} , \tag{3.25}$$

donde la vorticidad del fluido se da como $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ y la frecuencia del ciclo trón de iones será $\vec{\omega}_i = \frac{e\vec{B}}{m_i c}$.

Si se define la vorticidad generalizada $\vec{\Omega}$ como la vorticidad del fluido más - la frecuencia del ciclotrón de iones, entonces

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \vec{\omega}_c , \tag{3.26}$$

finalmente (3.25) quedará como

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \nabla \times \left[\vec{v} \times \vec{\Omega} \right] . \tag{3.27}$$

De la Ec. (3.27) se ve que la vorticidad generalizada está congelada al fluido cuando el término de Hall ha sido incluído teniendo que el flujo de vorticidad generalizada reemplaza el flujo de Alfvén de M H D Ideal como flujo invariante - [Turner 1986].

Por otra parte, se puede definir un potencial vectorial generalizado por analogía al potencial vectorial magnético, tal que se satisface

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V} . \tag{3.28}$$

De la definición de $\vec{\Omega}$ Ec. (3.26), al substituir las expresiones para $\vec{\omega}$ y $\vec{\omega}_i$ - en (3.28) y hacer la integración con $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ se encuentra

$$\vec{V} = \vec{v} + \frac{e}{mc}\vec{A} + \nabla \phi_1 , \tag{3.29}$$

donde $\vec{V}$ representa la velocidad generalizada y $\bar{\phi}_1$ un potencial escalar, el -- cual puede ser determinado mediante el conocimiento del campo de velocidades.

Como se necesita conocer la evolución en el tiempo de $\vec{V}$ para llevar a cabo - la demostración, al integrar la ecuación (3.27) con (3.28), se obtiene

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{v} \times \vec{\Omega} + \nabla \chi \, . \qquad (3.30)$$

Con χ un potencial escalar que se encuentra al tomar la derivada de $\vec{V}$ con respecto al tiempo Ec. (3.29), substituyendo las ecuaciones de movimiento y la -- Ley de Ohm generalizada, Ecs. (2.37), (2.39) y la Ec. (3.7) respectivamente.

Ahora, se define la helicidad híbrida como

$$\underset{\sim}{k}_2 = \int_D (\vec{V} \cdot \vec{\Omega})\, d^3x \quad . \qquad (3.31)$$

Para evaluar $\frac{\partial \underset{\sim}{k}_2}{\partial t}$ se toman las expresiones para $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ Ec. (3.30), $\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t}$ Ec. (3.27), $\vec{V}$ Ec. (3.29) y $\vec{\Omega}$ Ec. (3.28), que al desarrollar (3.31) se encuentra

$$\frac{\partial \underset{\sim}{k}_2}{\partial t} = \int_D \Big[(\vec{v} \times \vec{\Omega}) \cdot \vec{\Omega} + \nabla \chi \cdot \vec{\Omega} + (\vec{v} \times \vec{\Omega}) \cdot \vec{\Omega} - \nabla \cdot \big[\vec{V} \times (\vec{v} \times \vec{\Omega})\big] \Big] d^3x \, . \qquad (3.32)$$

Se observa que el primer y tercer término de (3.32) se eliminan ya que los -- factores son ortogonales.

El segundo término de (3.32), junto con el cuarto se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{\partial \underset{\sim}{k}_2}{\partial t} = -\int_D \nabla \cdot \left[\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - 2(\vec{v} \times \vec{\Omega}) \right] \times \vec{V} \right] d^3x \, . \qquad (3.33)$$

Al hacer la integración por Gauss, lleva a una integral de superficie de tal manera que es necesario pedir condiciones a la frontera para $\vec{\Omega}$. De la - definición de $\vec{\omega}$ se puede imponer la condición inicial de que la componente - normal a la superficie se suprima, es decir $\vec{\omega}(\vec{r}, t=0) \cdot \hat{n} = 0$, bajo esta condición se tiene que si en un tiempo la componente normal de $\vec{\Omega}$ se elimina en todos los puntos en la frontera, ésta se eliminará para todo tiempo teniendo

$$\vec{\omega}(\vec{r}, t=0)\cdot\hat{n}\Big|_{\partial D} = 0 \quad ; \quad \vec{\Omega}\cdot\hat{n}\Big|_{\partial D} = 0 \quad . \tag{3.34}$$

Así, la integral de superficie se hace cero, para las condiciones a la frontera dadas por (3.4) y (3.34).

Por otra parte, el término $\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\times\vec{V}$ se hace cero igualmente, por lo tanto, se tendrá $\frac{\partial \underset{\sim}{K}_2}{\partial t}=0$, con ésto se ha demostrado que la helicidad híbrida se conserva en el esquema de M H D H. Se puede comprobar y por esta razón es necesario modificar la imagen de la helicidad cruzada en el esquema de M H D H debido a que esta cantidad no se conserva al pasar de M H D Ideal a M H D H.

c) Momento Angular M H D H.

Para finalizar se probará que el momento angular se conserva en M H D H. Se mostró anteriormente que la fuerza magnética no afecta la conservación del momento angular mecánico en M H D Ideal, es decir, en este caso se está considerando sólamente la fuerza debido al movimiento de las partículas. Para M H D H además se considera la fuerza producida por la corriente generada por este movimiento, y puesto que es de origen magnético no afectará al momento angular mecánico. Por lo tanto K_{3i} se conserva en M H D H.

Hasta aquí se ha mostrado que las nuevas cantidades se conservan en M H D H, habiendo definido una nueva cantidad en M H D H que toma el papel de la helicidad cruzada en M H D Ideal, llamándola helicidad híbrida, puesto que la helicidad cruzada no se conserva en M H D H.

3.3 Geometría Cilíndrica.

En esta representación, se elige una expresión para el campo magnético y el potencial vectorial en términos de funciones de flujo ψ . En este caso particular, se mostrará sólamente la conservación de masa cuando estas cantidades son pesadas con funciones que dependen de las funciones de flujo. Esto se hace con la finalidad de mostrar la diferencia que se obtiene en las ecuaciones de equilibrio de acuerdo a distintas formas al aplicar el principio variacional en el siguiente capítulo.

a) Helicidad Magnética M H D.

Supóngase que se tiene un plasma cuya configuración es un cilindro recto axialmente simétrico de tal forma que se puede elegir una representación para el campo magnético $\vec{B}$ y el potencial vectorial $\vec{A}$ como:

$$\vec{B} = \nabla\psi \times \nabla z + B_z \nabla z, \tag{3.35}$$

$$\vec{A} = \psi \nabla z + (\nabla z \times \vec{c}) , \tag{3.36}$$

donde ψ es la función de flujo axial, B_z es la componente en la dirección $\vec{z}$ del campo y $\vec{c}$ es un vector tal que $\nabla\cdot\vec{c} = B_z$.

Como primer paso se calcula $(\vec{A}.\vec{B})$ substituyendo las expresiones para $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de las Ecs. (3.35) y (3.36).

$$(\vec{A}\cdot\vec{B}) = [\psi \nabla z + (\nabla z \times c)]\cdot[\nabla\psi \times \nabla z + B_z \nabla z], \tag{3.37}$$

desarrollando, con $\nabla z = \hat{z}$ se tiene

$$(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \psi \nabla z\cdot(\nabla\psi \times \nabla z) + B_z \psi + \nabla\cdot[\nabla z(\psi \nabla z\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,\psi] + \psi \nabla z\cdot\nabla\times(\nabla z \times \vec{c}) + (\nabla z \times \vec{c})\cdot B_z \nabla z . \tag{3.38}$$

El primer y último términos de (3.38) se anulan ya que los factores son perpendiculares. De la Ec. (3.36) se tiene $\nabla\times(\nabla z \times \vec{c}) = B_z \nabla z$. Finalmente, se pue de escribir

$$(\vec{A}\cdot\vec{B}) = 2B_2\,\psi - \nabla\cdot(\vec{C}\,\psi) \quad , \tag{3.39}$$

habiendo eliminado el término $\nabla z(\psi\,\nabla z\cdot\vec{C})$ en la divergencia Ec. (3.38), debido a que $\vec{C}$ no contiene parte axial. De aquí se tiene que la helicidad - magnética en esta nueva imagen quedará como

$$K_1 = \int_D 2B_2\,\psi\,d^3x \tag{3.40}$$

donde se ha eliminado el término de la divergencia de (3.39), ya que al integrar, por el teorema de Gauss se obtiene una integral de superficie, la cual se elimina considerando condiciones de frontera tales que $\hat{c}\cdot\hat{n}\,\big|_{\partial D} = 0$.

Así, se ha escrito la helicidad en geometría cilíndrica en términos de una -- función de flujo. Por otra parte, como un problema diferente, se mostrará que la helicidad se conserva cuando es pesada por ψ para posteriormente pesarla con una función $E(\psi)$ la que dará estados de equilibrio más generales.

Al calcular $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}\cdot\vec{B})\psi)$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\{(\vec{A}\cdot\vec{B})\psi\} = \frac{\partial(\vec{A}\cdot\vec{B})}{\partial t}\psi + (\vec{A}\cdot\vec{B})\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad . \tag{3.41}$$

De la Ec. (3.8) se puede escribir $\frac{\partial(\vec{A}\cdot\vec{B})}{\partial t} = -\nabla\cdot\left[[c\varphi - (\vec{A}\cdot\vec{v})]\vec{B} + (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{v}\right]$, y con ésto (3.41) queda

$$\frac{\partial[(\vec{A}\cdot\vec{B})\psi]}{\partial t} = -\nabla\cdot\left\{[c\varphi - (\vec{A}\cdot\vec{v})]\vec{B} + (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{v}\right\}\psi + (\vec{A}\cdot\vec{B})\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad . \tag{3.42}$$

Por otra parte, la Ley de Fáraday se expresa en la nueva representación utilizando las Ecs. (3.35), (3.36) y la Ley de Ohm (en este caso sin el término de Hall) como

$$\nabla\times\left\{\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla z\times\frac{\partial\vec{C}}{\partial t}\right\} = -\nabla\times\left\{\nabla\psi(\vec{v}\cdot\nabla z) - \nabla z(\vec{v}\cdot\nabla\psi) + \vec{v}\times B_2\nabla z\right\} . \tag{3.43}$$

Al realizar la integración y reagrupar términos se encuentra

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\psi\right]\nabla z+\nabla z\times\left[\frac{\partial\vec{c}}{\partial t}+B_z\,\vec{v}\right]-(\vec{v}\cdot\nabla z)\nabla\psi=\nabla g \tag{3.44}$$

donde g es una función escalar de tal forma que escogiendo una norma adecuada se puede hacer $\nabla g=0$.

Como estos tres vectores Ec. (3.44) son linealmente independientes, en particular se tiene que

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\psi=0\,, \tag{3.45}$$

de la Ec. (3.45) se puede observar que al hacer la suposición de tener un - - plasma sin flujo en estado estacionario con $\vec{v}=0$ entonces $\frac{\partial\psi}{\partial t}=0$.

En el otro caso se tiene que $\left(d\psi/dt=0\right)$. De tal forma que ψ se conserva localmente cuando no hay flujos y globalmente en el caso general.

Regresando a la Ec. (3.42), al substituir (3.45) y desarrollar, se puede ex-- presar como una divergencia

$$\frac{\partial[(\vec{A}\cdot\vec{B})\psi]}{\partial t}=-\nabla\cdot\left\{\psi\left[\left(c\varphi-(\vec{A}\cdot\vec{v})\right)\vec{B}+(\vec{A}\cdot\vec{B})\,\vec{v}\right]\right\}\,, \tag{3.46}$$

donde $\left[c\varphi-(\vec{A}\cdot\vec{v})\right]\vec{B}\cdot\nabla\psi=0$, por ser perpendiculares $\vec{B}$ y $\nabla\psi$.

Al integrar (3.46), por el teorema de Gauss se tiene una integral de superficie la cual se anula de acuerdo a las condiciones a la frontera dadas por (3.4) Por lo tanto la helicidad se conserva en esta representación.

Considérese ahora el caso generalizado al tomar una función $E(\psi)$ como función de peso de la helicidad magnética de tal forma que se mostrará que esta cantidad se sigue conservando al ser pesada por la nueva función.

Siguiendo los mismos pasos que en el ejemplo anterior, al tomar

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(\vec{A}\cdot\vec{B})\, E(\psi)\right] = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}\cdot\vec{B})\, E(\psi) + (\vec{A}\cdot\vec{B})\,\frac{\partial}{\partial t}(E(\psi)) \quad , \tag{3.47}$$

substituyendo (3.45) en (3.47) y usando (3.8) se encuentra

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(\vec{A}\cdot\vec{B})\, E(\psi)\right] = -\nabla\cdot\left\{\left[\left[c\varphi - (\vec{A}\cdot\vec{v})\right]\vec{B} + (\vec{A}\cdot\vec{B})\,\vec{v}\right] E(\psi)\right\} \quad . \tag{3.48}$$

De la misma manera, al integrar (3.48) por el teorema de Gauss se tendrá una integral de superficie la cual se eliminará de acuerdo a (3.4). Con ésto se ha mostrado que la helicidad magnética se conserva cuando es pesada por una función que depende de las funciones de flujo.

De esta manera la Ec. (3.40) se escribirá como

$$K_1' = \int_D B_z\, E(\psi)\, d^3x \quad . \tag{3.49}$$

b) <u>Conservación de Masa.</u>

Como en el capítulo anterior se encontró la ecuación de conservación de masa, en esta sección se mostrará que la masa se conserva cuando es pesada por una función $G(\psi)$ que depende de las funciones de flujo.

Así, la ecuación de masa se puede dar como:

$$K_4 = \int_D \rho\, d^3x \quad . \tag{3.50}$$

Por lo tanto, cuando (3.50) es pesada por $G(\psi)$ se tiene

$$K_4' = \int_D \rho\, G(\psi)\, d^3x \quad . \tag{3.51}$$

Con ésto, al tomar $\frac{\partial K_4}{\partial t}$ y desarrollar quedará

$$\frac{\partial k_\psi}{\partial t} = -\int_D [\nabla\cdot(\rho\vec{v})\ G(\psi) + \rho\vec{v}\cdot\nabla\psi\ G'(\psi)]\, d^3x \quad , \qquad (3.52)$$

habiéndose usado los resultados dados por (2.43) y (3.45)

Finalmente, (3.52) se puede expresar

$$\frac{\partial k_\psi}{\partial t} = -\int_D \nabla\cdot[\rho\vec{v}\ G(\psi)]\ d^3x \ . \qquad (3.53)$$

Así, por el teorema de la divergencia esta integral se anulará para las condiciones a la frontera dadas por (3.4). De esta manera se ha mostrado que (3.51) se conserva cuando es pesada por la función $G(\psi)$.

3.4 Geometría Toroidal.

En esta sección se escriben las cantidades conservadas en la aproximación de M H D H en términos de las funciones de flujo en la representación de Geometría Toroidal. Asimismo, se mostrará la conservación de las mismas cuando son pesadas con funciones de flujo. De igual manera se mostrará la conservación de masa cuando es pesada por una función más general que el caso anterior, es decir, se tomará una función tal que sea de la forma $G(\psi,S)$, donde S es la entropía específica. Por lo tanto, el campo magnético $\vec{B}$, el campo de velocidades $\vec{v}$ y el potencial vectorial $\vec{A}$ se pueden dar en simetría toroidal axisimétrica como

$$\vec{B} = \nabla\psi\times\nabla\theta + b\,\nabla\theta \qquad (3.54)$$

$$\vec{A} = \psi\,\nabla\theta + \nabla\theta\times\vec{C} \qquad (3.55)$$

$$\vec{v} = \nabla\phi\times\nabla\theta + u\,\nabla\theta \qquad (3.56)$$

donde ψ,ϕ se consideran funciones de flujo, b la componente en la dirección $\hat{\theta}$

del campo magnético, $\vec{C}$ es el vector tal que $b = r^2 \nabla\cdot(r^{-2}\vec{C})$ y u la componente de velocidad en la dirección $\hat{\theta}$, con $\nabla\theta = r^{-1}\hat{\theta}$.

a) <u>Helicidad Magnética M H D H.</u>

Como primer paso se escribirá la Ec. (3.20) en esta representación.

Para desarrollar $(\vec{A}.\vec{B}.)$ se usan las Ecs. (3.54) y (3.55) tal que

$$(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \psi\,\nabla\theta\cdot(\nabla\psi\times\nabla\theta) + \psi\,\nabla\theta\cdot b\nabla\theta + (\nabla\theta\times\vec{C})\cdot b\,\nabla\theta + \psi\,\nabla\theta\cdot b\nabla\theta - \nabla\cdot\{r^{-2}\psi\vec{C} + \nabla\theta(\psi\,\nabla\theta\cdot\vec{C})\} \quad . \tag{3.57}$$

De (3.57) se observa que el primer y tercer términos se eliminarán por ser -- perpendiculares los factores entre si.

Ahora al integrar (3.57) en todo el espacio, el quinto término por el teorema de la divergencia se eliminará de acuerdo a las condiciones a la frontera tales que $\vec{C}\cdot\vec{n}\big|_{\partial D} = 0$; y $\nabla\theta\cdot\vec{n}\big|_{\partial D} = 0$ quedando

$$k_1 = \int_D (\vec{A}\cdot\vec{B})\, d^3x = \int_D 2\, r^{-2} b\, \psi \;\, d^3x \quad . \tag{3.58}$$

De esta forma (3.58) representa la helicidad magnética escrita en geometría - toroidal en términos de las funciones de flujo.

En lo que sigue se mostrará que esta cantidad se conserva cuando es pesada por una función $\mu(\psi)$. Entonces se tendrá que

$$\frac{\partial[(\vec{A}\cdot\vec{B})\mu(\psi)]}{\partial t} = \frac{\partial(\vec{A}\cdot\vec{B})}{\partial t}\mu(\psi) + (\vec{A}\cdot\vec{B})\frac{\partial}{\partial t}\mu(\psi) \quad . \tag{3.59}$$

Empleando (3.23) se tiene $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \nabla\cdot\left[(\vec{A}\cdot\vec{B})\,\vec{v} - (\vec{A}\cdot\vec{v})\frac{\vec{J}}{en} - (\vec{A}\cdot\vec{v})\vec{B} + (\vec{A}\cdot\frac{\vec{J}}{en})\vec{B}\right]$
usando (2.19) y reagrupar se puede expresar como

$$\frac{\partial(\vec{A}\cdot\vec{B})}{\partial t} = -\,\nabla\cdot\left\{(\vec{A}\cdot\vec{B})\,\vec{v}_e - (\vec{A}\cdot\vec{v}_e)\,\vec{B}\right\} \quad , \tag{3.60}$$

Por otra parte la Ley de Fáraday en esta representación al substituir la Ec. (3.54), la Ley de Ohm generalizada Ec. (2.39) y (2.19) quedará

$$\nabla\times\left\{\frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla\theta+\nabla\theta\times\frac{\partial\vec{c}}{\partial t}\right\}=\nabla\times\left\{\vec{v}_e\times(\nabla\psi\times\nabla\theta)+\vec{v}_e\times b\,\nabla\theta\right\} \quad . \tag{3.61}$$

Al integrar y agrupando términos se encuentra

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}+\vec{v}_e\cdot\nabla\psi\right]\nabla\theta+\nabla\theta\times\left[\frac{\partial\vec{c}}{\partial t}+b\,\vec{v}_e\right]-(\vec{v}_e\cdot\nabla\theta)\nabla\psi=\nabla\xi \quad . \tag{3.62}$$

Puesto que estos vectores son linealmente independientes y eligiendo $\nabla\xi=0$ - en particular, se tiene

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\vec{v}_e\cdot\nabla\psi=0 \quad , \tag{3.63}$$

Regresando a la Ec. (3.59), substituyendo (3.60) y (3.63) da como resultado

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(\vec{A}\cdot\vec{B})\mu(\psi)\right]=-\nabla\cdot\left[(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{v}_e-(\vec{A}\cdot\vec{v}_e)\vec{B}\right]\mu(\psi)-(\vec{A}\cdot\vec{B})\mu'(\psi)\,\vec{v}_e\cdot\nabla\psi \quad , \tag{3.64}$$

finalmente (3.64) se puede expresar

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(\vec{A}\cdot\vec{B})\mu(\psi)\right]=-\nabla\cdot\left\{\left[(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{v}_e-(\vec{A}\cdot\vec{v}_e)\vec{B}\right]\mu(\psi)\right\} \quad . \tag{3.65}$$

De esta manera (3.58) se ha escrito en forma conservativa exhibiendo que la - helicidad magnética puede ser pesada por una función $\mu(\psi)$, donde finalmente - se podrá escribir como

$$K_1'=\int_D 2\,r^{-2}b\,\mu(\psi)\,d\overset{3}{x} \quad . \tag{3.66}$$

b) <u>Helicidad Híbrida Generalizada</u>

Ahora se encontrarán las expresiones para la vorticidad generalizada $\vec{\Omega}$ y - la velocidad generalizada $\vec{V}$ en términos de las funciones de flujo.

Tómese $\vec{B}^* = \vec{\Omega}$ y $\vec{A}^* = \vec{V}$. de tal forma que las Ecs. (3.28) y (3.29) quedan

$$\vec{B}^* = \nabla \times \vec{A}^* \quad , \tag{3.67}$$

$$\vec{A}^* = \vec{v} + a\,\vec{A} \quad , \tag{3.68}$$

donde $a = \frac{e}{mc}$ y haciendo $\nabla \vec{\Phi}_1 = 0.$ Substituyendo (3.55) y (3.56) en (3.68)

$$\vec{A}^* = \Psi^* \nabla\theta + (\nabla\phi - a\,\vec{c}) \times \nabla\theta \quad . \tag{3.69}$$

Así, Ψ^* se considerará una función de flujo generalizada que tiene la forma

$$\Psi^* = \mathcal{U} + a\,\Psi \quad . \tag{3.70}$$

Al tomar en rotacional de $\vec{A}^*$ Ec. (3.69) se encuentra

$$\vec{B}^* = \nabla\Psi^* \times \nabla\theta + b^* \nabla\theta \quad , \tag{3.71}$$

con

$$b^* = -\,\Delta^*\phi + a\,b \quad , \tag{3.72}$$

donde $\Delta^* = \left\{ r\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}$.

Ahora se desarrollará $(\vec{A}^* \cdot \vec{B}^*)$ en esta representación.

Al utilizar las Ecs. (3.69) y (3.71)

$$\begin{aligned}(\vec{A}^* \cdot \vec{B}^*) = {} & \Psi^* \nabla\theta \cdot (\nabla\Psi^* \times \nabla\theta) + \Psi^* \nabla\theta \cdot b^* \nabla\theta + (\nabla\phi - a\vec{c}) \cdot (\nabla\Psi^* \times \nabla\theta) \\ & + [(\nabla\phi - a\vec{c}) \times \nabla\theta] \cdot b^* \nabla\theta \quad .\end{aligned} \tag{3.73}$$

De (3.73) se observa que el primer y cuarto términos se anulan por ser perpendiculares los factores, quedando:

$$\vec{A}^{*}\cdot\vec{B}^{*} = \Psi^{*}\nabla\theta\cdot b^{*}\nabla\theta + \Psi^{*}\nabla\theta\cdot b^{*}\nabla\theta + \nabla\cdot\left[(\Psi^{*}\nabla\theta)\times(\nabla\phi - a\vec{c})\times\nabla\theta\right] . \qquad (3.74)$$

Cuándo se integra (3.74) en todo el espacio, el tercer término por el teorema de Gauss, lleva una integral de superficie la cual se anulará de acuerdo a -- las condiciones a la frontera tales que $\nabla\phi\cdot\vec{n}\big|_{\partial D} = 0$; $\vec{c}\cdot\vec{n}\big|_{\partial D} = 0$. Por otra parte el término $\Psi^{*}\nabla\theta\cdot b^{*}\nabla\theta = \vec{B}^{*}\cdot\Psi^{*}\nabla\theta$, con ésto la helicidad híbrida generalizada finalmente se puede expresar como

$$\underset{\sim}{K}_{2}' = \int_{D}\vec{A}^{*}\cdot\vec{B}^{*}d^{3}x = \int_{D}2\Psi^{*}\nabla\theta\cdot\vec{B}^{*}\,d^{3}x . \qquad (3.75)$$

De la misma manera que en los casos interiores, se mostrará que esta cantidad se conserva cuando es pesada por una función $\lambda(\Psi^{*})$, entonces se tendrá que - al desarrollar

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(\vec{A}^{*}\cdot\vec{B}^{*})\lambda(\Psi^{*})\right] = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}^{*}\cdot\vec{B}^{*})\,\lambda(\Psi^{*}) + (\vec{A}^{*}\cdot\vec{B}^{*})\frac{\partial}{\partial t}\lambda(\Psi^{*}) . \qquad (3.76)$$

Aprovechando la Ec. (3.27) con $\vec{\Omega} = \vec{B}^{*}$ al substituir la Ec. (3.71) desarrollando y al utilizar los mismos argumentos que en los casos anteriores - se encuentra

$$\frac{\partial\Psi^{*}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\Psi^{*} = 0 . \qquad (3.77)$$

Ahora de (3.33) se puede escribir

$$\frac{\partial(\vec{A}^{*}\cdot\vec{B}^{*})}{\partial t} = -\nabla\cdot\left[\vec{A}^{*}\times(\vec{v}\times\vec{B}^{*})\right] . \qquad (3.78)$$

Así, al substituir (3.77) y (3.78) en (3.76) y desarrollar se puede dar finalmente el resultado

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(\vec{A}^{*}\cdot\vec{B}^{*})\lambda(\Psi^{*})\right] = -\nabla\cdot\left\{\left[(\vec{A}^{*}\cdot\vec{B}^{*})\vec{v} - (\vec{A}^{*}\cdot\vec{v})\vec{B}^{*}\right]\lambda(\Psi^{*})\right\} . \qquad (3.79)$$

Cuando se integra (3.79) en todo el espacio por el teorema de la divergencia se obtiene una integral de superficie la cual se elimina de acuerdo a las condiciones a la frontera dadas por (3.4) y (3.34). Con ésto, se ha mostrado -- que la helicidad híbrida generalizada se conserva cuando es pesada por una -- función $\lambda(\psi^*)$ entonces (3.75) se puede dar como

$$K_2' = \int_D 2(\vec{B}^* \cdot \nabla\theta)\, \lambda(\psi^*)\, d^3x \,. \qquad (3.80)$$

c) Momento Angular.

En lo que corresponde a la proyección del momento angular, la Ec. (3.3) al - substituir (3.56) y desarrollar se encuentra

$$K_{3i} = \int_D \left[-\rho u z F' \hat{r} - \nabla\theta(\vec{r}\cdot\rho\nabla\phi) + \rho u \hat{z} \right] \cdot \hat{a}_i\, d^3x \qquad (3.81)$$

Dado que en el sistema toroidal axisimétrico la componente que se conserva es la proyección del momento angular sobre el eje $\hat{z}$ debido a la simetría del -- sistema, entonces en la Ec. (3.81) al tomar $\hat{a}_i = \hat{z}$ esta quedará

$$K_{3i} = \int_D \rho u \, d^3x \,. \qquad (3.81.a)$$

Ahora se procederá a mostrar que esta cantidad se conserva cuando es pesada por una función $F(\psi)$, así al tomar

$$\frac{\partial K_3}{\partial t} = \int_D \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho u F(\psi)\right] d^3x \,, \qquad (3.81.b)$$

desarrollando se encuentra

$$\frac{\partial[\rho u F(\psi)]}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} F(\psi) + \rho u \frac{\partial F(\psi)}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} u F(\psi) + \rho \frac{\partial u}{\partial t} F(\psi) + \rho u \frac{\partial F(\psi)}{\partial t} \,, \qquad (3.81.c)$$

de la ecuación de movimiento se puede encontrar la expresión para $\frac{\partial u}{\partial t}$ como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \vec{v}\cdot\nabla u + \rho^{-1}\nabla\theta\cdot(\nabla\psi \times \nabla b) \quad , \tag{3.81.d}$$

substituyendo las expresiones para la conservación de masa, Ec. (3.45) y (3.81.d) en (3.81.c) se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho u F(\psi)\right] = - \nabla\cdot(\rho\vec{v})\, u\, F(\psi) - \rho\vec{v}\cdot\nabla u\; F(\psi) - \nabla\theta\cdot(\nabla\psi\times\nabla b)\, F(\psi) - \rho u\, F'(\psi)\, \vec{v}\cdot\nabla\psi \; , \tag{3.81.e}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho u\; F(\psi)\right] = - \nabla\cdot\left\{\left[\rho u\,\vec{v} + b\,\vec{B}\right] F(\psi)\right\} \tag{3.81.f}$$

donde $\nabla\cdot(b\,\vec{B}) = \nabla\theta\cdot(\nabla\psi\times\nabla b)$ por lo tanto

$$\frac{\partial k_3}{\partial t} = -\int_D \nabla\cdot\left[\left[\rho u\;\vec{v} + b\,\vec{B}\right] F(\psi)\right]\, d^3x \;\; . \tag{3.81.g}$$

Por el teorema de Gauss esta integral se eliminará para las condiciones de -- frontera (3.4), mostrando que el momento angular se puede pesar por una fun-- ción de flujo $F(\psi)$.

de esta forma k_3 ahora se escribirá como

$$k_3' = \int_D \rho u\; F(\psi)\; d^3x \;\; . \tag{3.82}$$

d) Conservación de Masa.

Para concluir se mostrará que la ecuación de masa se conserva cuando es pesada por una función de forma $G(\psi, S)$, entonces la Ec. (3.50) se escribirá

$$k_4' = \int_D \rho\; G(\psi, S)\;\; d^3x \;\; . \tag{3.83}$$

Así, al tomar $\dfrac{\partial k_4'}{\partial t}$ se tiene.

$$\frac{\partial K_4'}{\partial t} = \int_D \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}\, G(\psi, S) + \rho \frac{\partial}{\partial t}\{G(\psi, S)\}\right] d^3x \, . \tag{3.84}$$

De la Ec. (2.28) se observa que $\frac{\partial S}{\partial t} = -\vec{v}\cdot\nabla S$. Con este resultado y de las Ecs. (2.36) y (3.45), se puede expresar (3.84) de la siguiente forma

$$\frac{\partial K_4'}{\partial t} = \int_D \left[\nabla\cdot(\rho\vec{v})\, G(\psi, S) + G_\psi'(\psi, S)\rho\vec{v}\cdot\nabla\psi + G_S'(\psi, S)\rho\vec{v}\cdot\nabla S\right] d^3x \, . \tag{3.85}$$

Finalmente (3.85) se escribirá

$$\frac{\partial K_4'}{\partial t} = -\int_D \nabla\cdot\left[(\rho\vec{v})\, G(\psi, S)\right] d^3x \, . \tag{3.86}$$

De esta forma, cuando se realiza la integración en (3.86), por el teorema de la divergencia se obtiene una integral de superficie la cual se anula de acuerdo a (3.4). Así, se ha mostrado que la masa se conserva cuando es pesada por la función $G(\psi, S)$.

Para concluir, se ha mostrado que las nuevas cantidades incluidas en las aproximaciones de M H D y M H D H se conservan. Asimismo, se mostró que estas cantidades pueden ser pesadas con funciones que dependen de las funciones de flujo teniendo así un esquema completo con lo cual se podrá aplicar un principio variacional que es el objetivo del siguiente capítulo.

Capítulo IV

Ecuaciones de Equilibrio

En este capítulo se obtendrán las ecuaciones de equilibrio que serán derivadas de un principio variacional.

Para dar un ejemplo y mostrar la diferencia en las ecuaciones que se obtienen, se resuelve el problema aplicando el principio variacional generalizado por Woltjer en un caso. En el otro, se toma una representación en geometría cilíndrica en términos de las funciones de flujo donde ahora las constricciones serán pesadas con funciones de flujo. Ambos problemas se resuelven en la aproximación de M H D Ideal.

Una vez que se ha exhibido la diferencia en las ecuaciones que se obtienen, se tomará una representación en geometría toroidal y en la aproximación de M H D Ideal se obtendrá la ecuación de Grad Shafranov.

Para finalizar, al imponer mayores constricciones al problema y trabajar en la aproximación de M H D H, se obtendrá una ecuación generalizada de Grad Shafranov que será el resultado importante de este trabajo.

4.1 Estados de Equilibrio M H D Ideal.

Un estado de equilibrio es aquél en el cual la energía toma su valor extremal. De acuerdo a ésto, se puede aplicar el método variacional para caracterizar los estados de equilibrio al tomar la primera variación de la funcional, considerando que las integrales de las ecuaciones magnetohidrodinámicas junto con las cantidades conservadas actuarán como constricciones al problema.

a) Método de Woltjer.

Supóngase que se tiene un plasma en estado estacionario donde la energía está dada por

$$U = \int_D \left[\frac{B^2}{8\pi} + \rho\, e(\rho) \right] d^3x \,, \tag{4.1}$$

donde e se define como la densidad de energía interna, la cual es una función de la presión, habiéndose eliminado el término de energía cinética debido a -- que no hay flujos. De esta manera la condición para que U sea un extremal - sujeto a las constricciones dadas por las Ecs. (3.1) y (3.50) será

$$\delta\left[U - \alpha K_1 - \beta K_4\right] = 0, \tag{4.2}$$

donde α y β son multiplicadores de Lagrange constantes.

En forma explícita se tiene

$$\delta \int_D \left\{ \frac{B^2}{8\pi} + \rho\, e(\rho) - \alpha(\vec{A}\cdot\vec{B}) - \beta \rho \right\} d\overset{3}{x} = 0, \tag{4.3}$$

al desarrollar quedará

$$0 = \int_D \left[\frac{\vec{B}}{4\pi}\cdot(\nabla\times\delta\vec{A}) + \rho\,\delta e + e\,\delta\rho - \alpha\left[\delta\vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\nabla\times\delta\vec{A}\right] - \beta\,\delta\rho \right] d\overset{3}{x}, \tag{4.4}$$

finalmente al reagrupar términos se obtiene

$$\int_D \left\{ \left[\frac{\nabla\times\vec{B}}{4\pi} - 2\alpha\vec{B} \right]\cdot\delta\vec{A} - \nabla\cdot\left(\frac{\vec{B}}{4\pi}\times\delta\vec{A}\right) - \alpha\,\nabla\cdot(\vec{A}\times\delta\vec{A}) + (h-\beta)\,\delta\rho \right\} d\overset{3}{x} = 0, \tag{4.5}$$

donde $h = \delta e + \rho \dfrac{\partial e}{\partial \rho}$ que se denomina entalpía específica.

De esta integral se observa que el segundo y tercer términos se eliminarán ya que se ha impuesto la condición de que $\vec{A}$ y $\delta\vec{A}$ se anulan en la superficie, al suponer que se tiene una pared completamente conductora.

Por lo tanto, como las variaciones $\delta\vec{A}$ y $\delta\rho$ son completamente arbitrarias e -- independientes, cada uno de los términos en el integrando se hacen cero separadamente encontrando

$$\frac{1}{4\pi}\nabla\times\vec{B} - 2\alpha\,\vec{B} = 0 \tag{4.6}$$

$$h - \beta = 0 \; . \qquad (4.7)$$

De esta forma las Ecs. (4.6) y (4.7) representan las ecuaciones de equilibrio de un plasma en estado estacionario libre de fuerzas.

Como siguiente paso se desarrollará el mismo problema tomando ahora una representación en geometría cilíndrica.

b) Estados de Equilibrio Geometría Cilíndrica.

Para encontrar los estados de equilibrio se tiene ahora que resolver el problema variacional en geometría cilíndrica en términos de las funciones de flujo. Entonces la funcional en esta representación se dará como

$$H_T = \int_D \left[\frac{B^2}{8\pi} + \int \mathcal{e}(\rho) + B_z\, E(\psi) + \rho\, G(\psi)\right] d\vec{x}^3 \; . \qquad (4.8)$$

Habiéndose tomado como la suma de la energía del sistema Ec. (4.1), más las constricciones dadas por la helicidad magnética Ec. (3.49) y la ecuación de masa Ec. (3.51), las cuales han sido pesadas por las funciones $E(\psi)$ y $G(\psi)$ respectivamente.

Tómese la primera variación de la Ec. (4.8) haciendo $\delta H_T = 0$ para encontrar los valores extremos.

$$\delta H_T = \int_D \Big\{ \vec{B}\cdot\delta\vec{B} + h\,\delta\rho + B_z\, E'(\psi)\,\delta\psi + E(\psi)\,\delta B_z + \rho\, G'(\psi)\,\delta\psi + G(\psi)\,\delta\rho \Big\}\, d\vec{x}^3 = 0 \; . \qquad (4.9)$$

Al substituir la expresión del campo Ec. (3.35) en $\vec{B}\cdot\delta\vec{B}$ se tiene

$$\vec{B}\cdot\delta\vec{B} = \left[\nabla\psi\times\nabla z + B_z\nabla z\right]\cdot\left[\nabla\delta\psi\times\nabla z + \delta B_z\,\nabla z\right] \; . \qquad (4.10)$$

Al desarrollar (4.10) quedará

$$\vec{B}\cdot\delta\vec{B} = \nabla\cdot\left\{\nabla\psi(\delta\psi\nabla z\cdot\nabla z)-\nabla z(\delta\psi\nabla z\cdot\nabla\psi)\right\}+\delta\psi\nabla z\cdot\nabla\times[\nabla\times(\psi\nabla z)] + (\nabla\psi\times\nabla z)\cdot\delta B_z\nabla z + B_z\nabla z\cdot(\nabla\delta\psi\times\nabla z) + B_z\,\delta B_z\ , \tag{4.11}$$

De (4.11) se observa que el tercer y cuarto términos se anulan por ser perpendiculares entre si. Así como el término de la divergencia se anulará cuando se realiza la integración para condiciones a la frontera tales que $\nabla\psi\cdot\vec{n}\Big|_{\partial D}=0$.

Por lo tanto $\vec{B}\cdot\delta\vec{B}$ quedará como:

$$\vec{B}\cdot\delta\vec{B} = -\Delta\psi\,\delta\psi + B_z\,\delta B_z\ , \tag{4.12}$$

con $\delta\psi\nabla z\cdot\nabla\times[\nabla\times(\psi\nabla z)] = -\Delta\psi\,\delta\psi$.

Ahora al substituir (4.12) en (4.9) y reagrupar se tiene

$$\int_D\left\{\left[-\frac{1}{4\pi}\Delta\psi + B_z E'(\psi)+\rho\, G'(\psi)\right]\delta\psi + \left[\frac{B_z}{4\pi}+E(\psi)\right]\delta B_z + \left[h+G(\psi)\right]\delta\rho\right\}d\vec{x}^3 = 0\ . \tag{4.13}$$

El hecho de que las variaciones $\delta\psi$, δB_z y $\delta\rho$ sean independientes, implica que cada uno de los productores se anule separadamente en (4.13) teniendo así

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta\psi + B_z E'(\psi) + \rho\, G'(\psi) = 0\ , \tag{4.14}$$

$$\frac{B_z}{4\pi} + E(\psi) = 0\ , \tag{4.15}$$

$$h + G(\psi) = 0\ . \tag{4.16}$$

De (4.15) se tiene $E'(\psi) = -\frac{1}{4\pi}B_z'(\psi)$ y de (4.16) $G'(\psi) = \rho^{-1}P'(\psi)$ donde se han utilizado la primera Ley de la termodinámica y $dh = \rho^{-1}dP + TdS$ que al substituir las expresiones $E'(\psi)$ y $G'(\psi)$ en (4.14) se obtiene

$$\Delta \Psi + B_z(\Psi) B_z'(\Psi) = 4\pi P'(\Psi) \,. \qquad (4.17)$$

Por lo tanto la Ec. (4.17) representa la ecuación de equilibrio para un plasma en estado estacionario. En este caso se obtiene una ecuación la cual permite obtener superficies de presión constantes, de esta forma se obtendrán estados de equilibrio más generales de los que se encuentran a partir del método seguido por Woltjer, Ecs. (4.6) y (4.7) en la aproximación de M H D Ideal. Se puede observar que la Ec. (4.6) no incluye el término de presión cuando se escribe en esta representación para el campo magnético.

4.2 Geometría Toroidal.

En los casos anteriores se obtuvieron las ecuaciones de equilibrio en la aproximación de M H D Ideal para un plasma sin flujo, mostrando la diferencia que se obtiene respecto a las ecuaciones de equilibrio de acuerdo al método seguido.

Ahora, se elige una representación en geometría toroidal en la cual se obtendrá la ecuación de Grad Shafranov para el caso simple. Es decir, se resuelve el problema en M H D Ideal donde los flujos y algunas constricciones no son consideradas. De la misma manera, se encontrará una ecuación generalizada de Grad Shafranov al trabajar en la aproximación de M H D H dentro de esta representación al imponer mayores constricciones al problema.

a) Ecuaciones de Equilibrio en M H D Ideal.

Supóngase que se tiene un plasma confinado en un toro axisimétrico de tal forma que el campo magnético $\vec{B}$ y el potencial vectorial $\vec{A}$ están dados por las Ecs. (3.54) y (3.55) respectivamente.

La energía del sistema se dá como la energía magnética más la energía interna ésta última se expresa en función de la densidad de masa y la entropía.

$$E = \int_D \left[\frac{B^2}{8\pi} + \rho\, e(\rho, s) \right] d^3x \,. \qquad (4.18)$$

Para aplicar el principio variacional se define la energía total como

$$H_T = \int_D \left[\frac{B^2}{8\pi} + \rho\, e(\rho,s) + 2r^{-2} b\,\mu(\psi) + \rho\, G(\psi)\right] d^3x \ . \tag{4.19}$$

Definida como la energía del sistema Ec. (4.18), más las constricciones dadas por la helicidad magnética Ec. (3.66) y por la densidad de masa Ec. (3.51). - Se puede observar que la energía cinética no aparece en (4.18) puesto que no se están considerando flujos.

Tómese ahora la primera variación de H_T para encontrar los valores externos, de tal forma que haciendo $\delta H_T = 0$ se tiene.

$$\delta H_T = \int_D \Big\{ \frac{1}{4\pi}\vec{B}\cdot\delta\vec{B} + e\,\delta\rho + \rho\frac{\partial e}{\partial \rho}\delta\rho + \rho\frac{\partial e}{\partial s}\delta s + 2r^{-2}\mu(\psi)\, b\,\delta\psi + \rho\, G'(\psi)\,\delta\psi + 2r^{-2}\mu(\psi)\,\delta b + G(\psi)\,\delta\rho \Big\} d^3x = 0 \ . \tag{4.20}$$

Desarrollando el término $\vec{B}\cdot\delta\vec{B}$ al utilizar la Ec. (3.54) quedará

$$\vec{B}\cdot\delta\vec{B} = (\nabla\psi\times\nabla\theta)\cdot\nabla\times(\delta\psi\nabla\theta) + (\nabla\psi\times\nabla\theta)\cdot\delta b\nabla\theta + b\nabla\theta\cdot(\nabla\delta\psi\times\nabla\theta) + b\nabla\theta\cdot\delta b\nabla\theta \ , \tag{4.21}$$

finalmente (4.21) se puede expresar como

$$\vec{B}\cdot\delta\vec{B} = \nabla\cdot\left[\delta\psi\nabla\theta\times(\nabla\psi\times\nabla\theta)\right] - r^{-2}\Delta^*\psi\,\delta\psi + b\,r^{-2}\delta b \ , \tag{4.22}$$

donde se han eliminado el segundo y tercer términos de (4.21) por ser perpendiculares los factores.

Así, al substituir (4.22) en (4.20) y reagrupar se obtiene

$$\int_D \Big\{ \left[\frac{r^{-2}}{4\pi}\Delta^*\psi + 2r^{-2}\mu'(\psi)\, b + \rho\, G'(\psi)\right]\delta\psi + \left[2r^{-2}\mu(\psi) + \frac{r^{-2}b}{4\pi}\right]\delta b + (h+G)\,\delta\rho + \rho\frac{\partial e}{\partial s}\delta s \Big\} d^3x = 0 \ , \tag{4.23}$$

donde el término de la divergencia Ec. (4.22) se ha eliminado, al ser evaluado en la superficie de acuerdo a las condiciones a la frontera al aplicar el teorema de Gauss.

Como las variaciones son arbitrarias e independientes, cada uno de los productos se eliminará separadamente quedando:

$$-\frac{r^{-2}}{4\pi}\Delta^* \Psi + 2r^{-2}\mu'(\Psi)\, b + \rho\, G'(\Psi) = 0\,, \tag{4.24}$$

$$2r^{-2}\mu(\Psi) + \frac{r^{-2}}{4\pi} b = 0\,, \tag{4.25}$$

$$h + G(\Psi) = 0\,, \tag{4.26}$$

$$\rho T = 0\,, \tag{4.27}$$

donde $\frac{\partial e}{\partial s} = T$. De (4.25) se tiene $\mu'(\Psi) = -\frac{b'(\Psi)}{8\pi}$ y de (4.26) $G'(\Psi) = \rho^{-1} P'(\Psi)$ - que al substituir estas expresiones en (4.24) se obtiene

$$\Delta^* \Psi + b\, b'(\Psi) = 4\pi r^2 P'(\Psi)\,. \tag{4.28}$$

De esta forma (4.28) representa la ecuación de Grad Shafranov para un plasma sin flujo en estado estacionario.

b) <u>Ecuaciones de Equilibrio M H D H.</u>

En el inciso anterior se encontró la ecuación de equilibrio (Ec. de Grad Shafranov) para un plasma sin flujo en estado estacionario en M H D Ideal. Ahora, se tomará un caso más general al hacer este desarrollo en la aproximación de M H D H e imponer mayores constricciones al problema. Así, bajo estas condiciones la energía del sistema se puede dar como

$$E=\int_D\left[\frac{1}{2}\rho v^2+\frac{B^2}{8\pi}+\rho\, e(\rho,s)\right]d^3x \qquad (4.29)$$

Se observa que en (4.29) se ha incluido el término de energía cinética ya que ahora si se considerará que hay flujos. Para aplicar el principio variacional se define la funcional H_T de la siguiente manera

$$H_T=\int_D\Big\{\frac{1}{2}\rho v^2+\frac{B^2}{8\pi}+\rho\, e(\rho,s)+2r^{-2}b\,\mu(\psi)+\rho u\,F(\psi)$$
$$+2\lambda(\psi^*)\left[\nabla\theta\cdot(\nabla\times\vec{v})+ar^{-2}b\right]+\rho\, G(\psi,s)\Big\}\,d^3x. \qquad (4.30)$$

Definida como la suma de la energía del sistema Ec. (4.29), más las constricciones dadas por la helicidad magnética Ec. (3.66), momento angular Ec. (3.82) helicidad híbrida Ec. (3.80), la cual se ha expresado en esta forma al utilizar las Ecs. (3.67), (3.68) y (3.55); y la ecuación de masa Ec. (3.82). Todas estas cantidades se han dado en términos de funciones de flujo.

Cuando se toma la primera variación de H_T se encontrarán los valores extremos de tal forma que al hacer $\delta H_T=0$ y desarrollar se encontrará

$$\int_D\Big\{\left[\frac{1}{2}v^2+h+G(\psi,s)+u\,F(\psi)\right]\delta\rho+\rho\left[T+G_s'(\psi,s)\right]\delta s$$
$$+\vec{B}\cdot\delta\vec{B}+\rho\,F(\psi)\,\delta u+\left[\rho u\,F'(\psi)+2r^{-2}b\,\mu'(\psi)+\rho\, G_\psi'(\psi,s)\right]\delta\psi$$
$$+2r^{-2}\left[\mu(\psi)+a\,\lambda(\psi^*)\right]\delta b+2\left[\nabla\theta\cdot(\nabla\times\vec{v})+ar^{-2}b\right]\delta\lambda(\psi^*)$$
$$+2\lambda(\psi^*)\,\nabla\theta\cdot(\nabla\times\delta\vec{v})+\rho\vec{v}\cdot\delta\vec{v}\Big\}\,d^3x=0, \qquad (4.31)$$

donde $\dfrac{\partial e}{\partial s}=T$, $G_s'(\psi,s)=\dfrac{\partial G}{\partial s}$, $G_\psi'(\psi,s)=\dfrac{\partial G}{\partial \psi}$,

como $\psi^*=u+a\,\psi$ entonces el séptimo término de (4.31) se dará como

$$2\left[\nabla\theta\cdot(\nabla\times\vec{v})+a\,r^{-2}b\right]\delta\lambda(\psi^*)=2\nabla\theta\cdot\vec{B}^*\lambda'(\psi)(\delta u+a\,\delta\psi). \tag{4.32}$$

Por otra parte $\vec{B}^*\cdot\delta\vec{B}$ al substituir (3.54) y desarrollar queda

$$\vec{B}\cdot\delta\vec{B}=(\nabla\psi\times\nabla\theta)\cdot(\nabla\delta\psi\times\nabla\theta)+b\nabla\theta\cdot(\nabla\delta\psi\times\nabla\theta)+b\,\nabla\theta\cdot\delta b\,\nabla\theta$$
$$+(\nabla\psi\times\nabla\theta)\cdot\delta b\,\nabla\theta\;. \tag{4.33}$$

Finalmente (4.33) se puede escribir

$$\vec{B}\cdot\delta\vec{B}=\nabla\cdot\left[\delta\psi\nabla\theta\times(\nabla\psi\times\nabla\theta)\right]-r^{-2}\Delta^*\psi\,\delta\psi+b\,r^{-2}\delta b\,, \tag{4.34}$$

habiéndose eliminado el segundo y cuarto términos de (4.33) por ser perpendiculares los factores.

Análogamente, el desarrollo del término $\lambda(\psi^*)\nabla\theta\cdot\nabla\times\delta\vec{v}$ será

$$\lambda(\psi^*)\nabla\theta\cdot\nabla\times\delta\vec{v}=\nabla\times(\lambda(\psi^*)\nabla\theta)\cdot\delta\vec{v}-\nabla\cdot\left[\lambda(\psi^*)(\nabla\theta\times\delta\vec{v})\right], \tag{4.35}$$

pero $\nabla\times(\lambda(\psi^*)\nabla\theta)=\nabla\lambda(\psi^*)\times\nabla\theta+\lambda(\psi^*)\nabla\times(\nabla\theta)$ donde $\nabla\times(\nabla\theta)=0$ con ésto (4.35) quedará

$$\lambda(\psi^*)\nabla\theta\cdot\nabla\times\delta\vec{v}=\lambda'(\psi^*)(\nabla\psi^*\times\nabla\theta)\cdot\delta\vec{v}-\nabla\cdot\left[\lambda(\psi^*)\nabla\theta\times\delta\vec{v}\right]. \tag{4.36}$$

Así, al substituir en (4.31) los términos desarrollados en (4.32), (4.34) y (4.36) se tiene

$$\int_D\Big\{\left[\tfrac{1}{2}v^2+h+G(\psi,s)+u\,F(\psi)\right]\delta\rho+\rho\left[T+G_s'(\psi,s)\right]\delta s$$
$$\left[\rho u\,F(\psi)+2r^{-2}b\,\mu'(\psi)+\rho\,G_\psi'(\psi,s)-\frac{r^{-2}}{4\pi}\Delta^*\psi+2a\,\lambda'(\psi^*)\nabla\theta\cdot\vec{B}^*\right]\delta\psi$$
$$+\left[\rho\,F(\psi)+2\,\lambda'(\psi^*)\nabla\theta\cdot\vec{B}^*\right]\delta u+2r^{-2}\left[\mu(\psi)+a\,\lambda(\psi^*)+\frac{b}{8\pi}\right]\delta b$$
$$+\left[2\,\lambda'(\psi^*)\nabla\psi^*\times\nabla\theta+\rho\,\vec{v}\right]\cdot\delta\vec{v}\Big\}\,d^3x=0\,, \tag{4.37}$$

donde se han anulado los términos de la divergencia en (4.37) dados por - - - $\nabla\cdot\left(\lambda(\Psi^*)\nabla\theta\times\delta\vec{v}\right)$ y $\nabla\cdot\left[\delta\Psi\nabla\theta\times(\nabla\Psi\times\nabla\theta)\right]$ cuando se realiza la integración para condiciones a la frontera tales que $\nabla\Psi\cdot\vec{n}\big|_{\partial D}=0$, $\nabla\Psi\cdot\vec{n}\big|_{\partial D}=0$. Por otra parte, - el último término de (4.37) se escribe de la siguiente manera.

$$\left[\lambda'(\Psi^*)\nabla\Psi^*\times\nabla\theta+\rho\vec{v}\right]\cdot\delta\vec{v}=\left[\lambda'(\Psi^*)\nabla\Psi^*\times\nabla\theta+\rho\vec{v}_\perp\right]\cdot\delta\vec{v}_\perp+r^{-2}\rho u\,\delta u, \qquad (4.38)$$

cuando se substituye (4.38) en (4.37) finalmente quedará

$$\int_D\Big\{\left[\tfrac{1}{2}v^2+h+G(\Psi,S)+u\,F(\Psi)\right]\delta\rho+\rho\left[T+G'(\Psi,S)\right]\delta S$$
$$+\left[\rho\,F(\Psi)+2\lambda'(\Psi^*)\nabla\theta\cdot\vec{B}^*+r^{-2}\rho\,u\right]\delta u\;+$$
$$\left[\rho u\,F'(\Psi)+2r^{-2}b\,\mu'(\Psi)+\rho\,G'_\Psi(\Psi,S)-\frac{r^{-2}}{4\pi}\Delta^*\Psi+2a\lambda'(\Psi^*)\nabla\theta\cdot\vec{B}^*\right]\delta\Psi \qquad (4.39)$$
$$+2r^{-2}\left[\mu(\Psi)+a\,\lambda(\Psi^*)+\frac{b}{8\pi}\right]\delta b+\left[\rho\vec{v}_\perp+2\lambda'(\Psi^*)\nabla\Psi^*\times\nabla\theta\right]\cdot\delta\vec{v}_\perp\Big\}d^3x=0,$$

puesto que las variaciones $\delta\rho$, δS, δu, $\delta\Psi$, δb y $\delta v_\perp$ son independientes y arbitrarias, entonces cada uno de los productos del integrando en (4.39) - se anularán separadamente obteniendo así

$$\delta\Psi:\quad -\frac{r^{-2}}{4\pi}\Delta^*\Psi+2a\lambda'(\Psi^*)\nabla\theta\cdot\vec{B}^*+2br^{-2}\mu'(\Psi)+\rho u\,F'(\Psi)+\rho\,G'_\Psi(\Psi,S)=0, \qquad (4.40)$$

$$\delta\vec{v}_\perp:\qquad \rho\vec{v}_\perp+2\lambda'(\Psi^*)\,\nabla\Psi^*\times\nabla\theta=0, \qquad (4.41)$$

$$\delta u:\qquad \rho\,F(\Psi)+2\lambda'(\Psi^*)\nabla\theta\cdot\vec{B}^*+r^{-2}\rho u=0, \qquad (4.42)$$

$$\delta\rho:\qquad \tfrac{1}{2}v^2+h+G(\Psi,S)+u\,F(\Psi)=0, \qquad (4.43)$$

$$\delta b:\qquad 2r^{-2}\left[\mu(\Psi)+a\,\lambda(\Psi^*)+\frac{b}{8\pi}\right]=0, \qquad (4.44)$$

$$\delta s: \qquad \rho\left[T + G_s'(\psi, s)\right] = 0 \,. \tag{4.45}$$

Por lo tanto, del conjunto de ecuaciones (4.40)-(4.45) se puede obtener una ecuación de Grad Shafranov generalizada, la cual permitirá encontrar estados de equilibrio más generales de los que se obtienen en M H D Ideal Ec. (4.28). Se puede observar que la Ec. (4.43) representa la ecuación de Bernoulli en términos de las funciones de flujo, así como la Ec. (4.45) da una relación entre la energía interna y las funciones de flujo.

Para concluir, se mostró la diferencia en el tipo de ecuaciones de equilibrio que se obtienen cuando se aplica el principio variacional desarrollado por Woltjer, así como para un desarrollo paralelo en una representación geométrica en particular en la aproximación de M H D Ideal bajo las mismas condiciones.

Finalmente, al elegir una representación en geometría toroidal en términos de las funciones de flujo, se encuentran las ecuaciones de equilibrio para el caso de M H D Ideal y M H D H Generalizada.

Capítulo V

La Ecuación de Equilibrio para M H D H.

En el capítulo anterior se obtuvieron las ecuaciones de equilibrio en la aproximación de Magnetohidrodinámica Hall en geometría toroidal. A partir de este conjunto de ecuaciones como una prueba de consistencia, se recuperan las ecuaciones de Turner [Turner 1986] para un fluido incompresible cuando las constricciones dadas por el momento angular, energía interna y conservación de masa son eliminadas. Conviene observar que la derivación de Turner para el equilibrio en M H D H es semejante a la de Woltjer para M H D Ideal, de modo que las ecuaciones aquí obtenidas describen estados de equilibrio más generales para plasmas toroidales axisimétricos. Asimismo, se encuentra la relación entre los multiplicadores de Lagrange asociados con el desarrollo de Turner y las funciones de peso para la representación en geometría toroidal.

Para concluir, se exhibe una solución alternativa a la desarrollada por Turner para M H D H, como se mostrará posteriormente.

5.1 Ecuaciones de Turner.

Las ecuaciones de Turner representan estados de relajación en M H D H, los cuales son equivalentes a los de Woltjer para el problema libre de fuerzas en M H D ordinaria.

La forma de abordar el problema para la recuperación de las ecuaciones de Turner a partir del sistema de ecuaciones encontradas anteriormente, se hará de la siguiente manera:

Se escriben las ecuaciones de Turner para un fluido incompresible en la aproximación de M H D H.

Se substituyen las expresiones de los campos magnéticos, de velocidad y vorticidad generalizada en la representación de geometría toroidal en estas ecuaciones.

Al eliminar las constricciones dadas por el momento angular, energía interna y conservación de masa en las Ecs. (4.40)-(4.45), se comparan con las ecua--

ciones de Turner en esta representación estableciendo la relación entre los multiplicadores de Lagrange y las funciones de peso. Las ecuaciones de Turner están dadas como:

$$\nabla \times \vec{B} - 8\pi \lambda_1 \vec{B} - 8\pi \lambda_2 a \vec{B}^* = 0, \tag{5.1}$$

$$\rho \vec{v} - 2\lambda_2 \vec{B}^* = 0, \tag{5.2}$$

donde λ_1 y λ_2 son multiplicadores de Lagrnage constantes, $a = \frac{e}{mc}$, y los campos respectivos.

Al substituir las Ecs. (3.54), (3.56) y (3.71) en (5.1) y (5.2) y desarrollar se tiene

$$-\Delta^* \psi \nabla\theta - 8\pi\lambda_1 b \nabla\theta - 8\pi\lambda_2 a\, b^* \nabla\theta + \nabla \times (b \nabla\theta) - 8\pi\lambda_1 (\nabla\psi \times \nabla\theta) - 8\pi\lambda_2 a (\nabla\psi^* \times \nabla\theta) = 0, \tag{5.3}$$

$$\rho \nabla\varphi \times \nabla\theta + \rho u \nabla\theta - 2\lambda_2 [\nabla\psi^* \times \nabla\theta] - 2\lambda_2 b^* \nabla\theta = 0. \tag{5.4}$$

Estas son las ecuaciones de Turner escritas en geometría toroidal. Ahora, si se eliminan las constricciones mencionadas anteriormente en el sistema - de ecuaciones (4.40)-(4.45) éstas quedarán

$$[-\Delta^* \psi \nabla\theta + 8\pi a \lambda'(\psi^*) b^* \nabla\theta + 8\pi \mu'(\psi) b \nabla\theta] \cdot \nabla\theta = 0, \tag{5.5}$$

$$\rho [\nabla\varphi \times \nabla\theta] + 2\lambda'(\psi^*) [\nabla\psi^* \times \nabla\theta] = 0, \tag{5.6}$$

$$[2\lambda'(\psi^*) b^* \nabla\theta + \rho u \nabla\theta] \cdot \nabla\theta = 0, \tag{5.7}$$

$$\frac{1}{2} v^2 = 0, \tag{5.8}$$

$$[b\nabla\theta + 8\pi\mu(\Psi)\nabla\theta + 8\pi a\lambda(\Psi^*)\nabla\theta]\cdot\nabla\theta = 0, \qquad (5.9)$$

$$\rho T = 0 \quad . \qquad (5.10)$$

Al comparar las ecuaciones de Turner en la nueva representación Ecs. (5.3) y (5.4), con las Ecs. (5.5)-(5.9), se puede observar, que en el caso incompresible se tiene cuando la variación en ρ es cero si $\frac{1}{2}v^2=0$, $\delta\rho=0$, o en el otro caso, como se muestra en la Ec. (5.8) $\frac{1}{2}v^2=0$, de esta manera se - obtiene el caso incompresible para M H D H. Ahora, de las Ecs. (5.5) y (5.9), se puede obtener (5.3) y de (5.6) y (5.7), se obtiene (5.4), tomando en cuenta que estas ecuaciones son escalares a diferencia de (5.3) y (5.4) que son - vectoriales.

Para encontrar la relación entre λ_1 , λ_2 , $\mu(\Psi)$, $\lambda(\Psi^*)$ se toma $\nabla\times\{(b - 8\pi\lambda_1\Psi - 8\pi a\lambda_2\Psi^*)\nabla\theta\}=0$ de (5.3), donde finalmente se puede tener -- una ecuación para b de la forma

$$b = 8\pi\lambda_1\Psi + 8\pi a\lambda_2\Psi^* . \qquad (5.11)$$

De la misma manera, de (5.9) se tendrá que

$$b = -8\pi\mu(\Psi) - 8\pi a\lambda(\Psi^*) . \qquad (5.12)$$

Así, comparando término a término en (5.11) y (5.12) se encuentra

$$\mu(\Psi) = -\lambda_1\Psi \quad ; \quad \lambda(\Psi^*) = -\lambda_2\Psi^* . \qquad (5.13)$$

Por lo tanto, de (5.13) se tiene

$$\mu'(\Psi) = -\lambda_1 \quad ; \quad \lambda'(\Psi^*) = -\lambda_2 . \qquad (5.14)$$

Con ésto se ha mostrado que se pueden recuperar las Ecs. (5.3) y (5.4) de - (5.5)-(5.9) para el caso incompresible en M H D H.

Como siguiente paso se presenta el análisis de Turner para estudiar propiedades de las soluciones a las Ecs. (5.1) y (5.2)

a) Análisis de Turner.

Las ecuaciones (5.1) y (5.2), se escriben en función de $\vec{\omega}$ y $\vec{\omega}_c$, utilizándo las definiciones para $\vec{\beta}^{*}$, $\vec{\omega}$ y $\vec{\omega}_c$ donde se tiene

$$\nabla \times \vec{\omega}_c = 8\pi[\lambda_1 + a^2\lambda_2]\vec{\omega}_c + 8\pi a^2 \lambda_2 \vec{\omega}, \tag{5.15}$$

$$\nabla \times [\vec{\omega} + \vec{\omega}_c] = \frac{\rho \vec{\omega}}{2\lambda_2}, \tag{5.16}$$

substituyendo el valor de ρ y al escribir en función de ω_p^2 (5.16), donde $\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}$ [ω_p es la frecuencia del plasma], ésta queda

$$\nabla \times (\vec{\omega} + \vec{\omega}_c) = \frac{\omega_p^2 \vec{\omega}}{8\pi a^2 c^2 \lambda_2}. \tag{5.17}$$

Redefiniendo λ_1 y λ_2, tal que $\lambda_1 \longrightarrow \lambda_1$, $\lambda_2 \rightarrow a^2\lambda_2$. Con ésto (5.15) y (5.17) quedan

$$\nabla \times \vec{\omega}_c = 8\pi[\lambda_1 + \lambda_2]\vec{\omega}_c + 8\pi\lambda_2\vec{\omega}, \tag{5.18}$$

$$\nabla \times [\vec{\omega} + \vec{\omega}_c] = \frac{\omega_p^2 \vec{\omega}}{8\pi c^2 \lambda_2}. \tag{5.19}$$

Con la finalidad de hacer más fácil el manejo de estas cantidades, todas las escalas de longitud se dan en unidades de $\frac{c}{\omega_p}$, de tal manera que se pueden definir cantidades adimensionales $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ y $\tilde{r}$:

$$\tilde{\nabla} \equiv \frac{c}{\omega_p}\nabla ; \tag{5.20}$$

$$\tilde{\lambda}_i \Rightarrow \frac{c\,8\pi}{\omega_p}\lambda_i , \tag{5.21}$$

$$\vec{r} = \frac{\omega_e}{c}\,\hat{r} \quad . \tag{5.22}$$

Entonces las Ecs. (5.18) y (5.19) se pueden reescribir como

$$\tilde{\nabla}\times\vec{\omega}_c = [\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2]\,\vec{\omega}_c + \hat{\lambda}_2\,\vec{\omega} \quad , \tag{5.23}$$

$$\tilde{\nabla}\times[\vec{\omega}+\vec{\omega}_c] = \frac{\vec{\omega}}{\lambda_2} \quad . \tag{5.24}$$

Así, las Ecs. (5.23) y (5.24), son ecuaciones fundamentales del modelo de - - - M H D H.

Estas ecuaciones son equivalentes a la ecuación libre de fuerza de Woltjer - - M H D Ideal $\nabla\times\vec{B} \sim \alpha\,\vec{B}$.

Ahora, para encontrar soluciones a estas ecuaciones, se toma una combinación li neal, entonces multiplicando por α la Ec. (5.23) más (5.24) se tiene

$$\nabla\times[\vec{\omega}+(1+\alpha)\,\vec{\omega}_c] = \left[\frac{1}{\tilde{\lambda}_2} + \alpha\,\tilde{\lambda}_2\right]\omega + \alpha\,(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2]\,\vec{\omega}_c \quad , \tag{5.25}$$

donde la Ec. (5.25), se puede expresar como una ecuación de eigenvalores de la forma

$$\tilde{\nabla}\times\vec{Z}_\pm = \tilde{\mu}_\pm\,\vec{Z}_\pm \tag{5.26}$$

de tal manera que los eigenvectores $\vec{Z}_\pm$ y los eigenvalores asociados, $\tilde{\mu}_\pm$ están dados por

$$\vec{Z}_\pm = \vec{\omega} + (1+\alpha_\pm)\,\vec{\omega}_c \quad , \tag{5.27}$$

$$\tilde{\mu}_\pm = \frac{1}{\tilde{\lambda}_2} + \alpha_\pm\,\tilde{\lambda}_2 \quad , \tag{5.28}$$

tal que α supone valores para α_+ y α_- , que son las raices de la ecuación

$$\left[\frac{1}{\tilde{\lambda}} + \alpha_\pm \tilde{\lambda}_2\right]\left[1+\alpha_\pm\right] - \alpha_\pm\left[\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2\right] = 0, \tag{5.29}$$

que viene de (5.25), al pasar a (5.26).

Al resolver (5.29), para $\alpha_\pm$ se tiene:

$$\alpha_\pm = \frac{\left[\tilde{\lambda}_1 - 1/\tilde{\lambda}_2\right] \pm \left\{\left[\tilde{\lambda}_1 - 1/\tilde{\lambda}_2\right]^2 - 4\right\}^{1/2}}{2\,\tilde{\lambda}_2} \tag{5.30}$$

Con ésto, (5.28) quedará

$$\mu_\pm = \frac{1}{2}\left\{\tilde{\lambda}_1 + 1/\tilde{\lambda}_2 \pm \left\{\left[\tilde{\lambda}_1 - 1/\tilde{\lambda}_2\right]^2 - 4\right\}^{1/2}\right\}. \tag{5.31}$$

Para encontrar $\vec{\omega}$ y $\vec{\omega}_c$ en términos de $Z_\pm$ se resuelve (5.27) encontrando

$$\vec{\omega} = \frac{(1+\alpha_-)\,\vec{Z}_+ - (1+\alpha_+)\,\vec{Z}_-}{(\alpha_- - \alpha_+)}, \tag{5.32}$$

y

$$\vec{\omega}_c = \frac{Z_+ - Z_-}{\alpha_+ - \alpha_-}. \tag{5.33}$$

Se puede observar que en estas dos ecuaciones se tienen cuatro cantidades no conocidas las cuales se pueden determinar usando los valores iniciales de las cuatro cantidades, la helicidad magnética, helicidad híbrida, flujo magnético axial y el flujo de vorticidad generalizada como constricciones. De esta manera, se hizo una breve exposición de la metodología seguida por Turner para encontrar soluciones a las Ecs. (5.1) y (5.2), donde ahora la ecuación básica será (5.26), la cual se puede resolver para una configuración del campo en particular, y encontrar $\hat{\omega}$ y $\vec{\omega}_c$, así como hacer un análisis sobre los $\tilde{\lambda}_i$.

Como siguiente paso se presenta una forma alternativa a este análisis.

5.2 Solución a la Ecuación de Equilibrio para M H D H.

Siguiendo con el esquema para encontrar la ecuación de Grad Shafranov generalizada en términos de las funciones de flujo Ψ y Ψ^* , se plantea un sistema de ecuaciones diferenciales en función de estas cantidades para el caso de un fluido incompresible en la aproximación de M H D H.

Bajo estas condiciones las Ecs. (5.5)-(5.7) y (5.9) se reescriben en función de λ_1 y λ_2 utilizando (5.13) y (5.14) como:

$$\Delta^* \Psi + 8\pi\lambda_1 b + 8\pi a \lambda_2 b^* = 0 , \tag{5.34}$$

$$\rho \nabla \phi \times \nabla \theta - 2\lambda_2 (\nabla \Psi^* \times \nabla \theta) = 0 , \tag{5.35}$$

$$\rho u - 2\lambda_2 b^* = 0 , \tag{5.36}$$

$$b - 8\pi\lambda_1 \Psi - 8\pi a \lambda_2 \Psi^* = 0 . \tag{5.37}$$

Por otra parte, de (5.35) se puede escribir

$$\nabla \phi = 2\lambda_2 \rho^{-1} \nabla \Psi^* . \tag{5.38}$$

Como $\Psi^* = u + a\Psi$, se substituye u en (5.36) obteniendo una ecuación para b^* de la forma

$$b^* = \frac{\rho}{2\lambda_2} \left[\Psi^* - a\Psi \right] , \tag{5.39}$$

entonces al substituir (5.39) y (5.37) en (5.34) se obtiene una ecuación para Ψ quedando

$$\Delta^{*}\Psi + [(8\pi)^2\lambda_1^2 - 4\pi a^2\rho]\,\Psi + [(8\pi)^2 a\,\lambda_1\lambda_2 + 4\pi a\,\rho]\,\Psi^{*} = 0, \tag{5.40}$$

Ahora se obtendrá una ecuación para Ψ^{*}.

Puesto que $b^{*} = -\Delta^{*}\phi + a\,b$, usando (5.37) y (5.38), entonces se tendrá

$$b^{*} = -2\rho^{-1}\lambda_2\,\Delta^{*}\Psi^{*} + 8\pi a\,\lambda_1\,\Psi + 8\pi a^2\lambda_2\,\Psi^{*}, \tag{5.41}$$

donde se ha utilizado el hecho de que $\Delta^{*}\phi = r^2\nabla\cdot[\,r^{-2}\nabla\Psi^{*}\,]$.

Por lo tanto, igualando (5.39) y (5.41), al reagrupar términos se encontrará

$$\Delta^{*}\Psi^{*} - \left[(8\pi)\frac{a\rho}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) + \frac{a\rho^2}{(2\lambda_2)^2}\right]\Psi + \left[\left(\frac{\rho}{2\lambda_2}\right)^2 - (8\pi)\frac{a^2\rho}{2}\right]\Psi^{*}. \tag{5.42}$$

Hasta aquí, se han encontrado dos ecuaciones diferenciales acopladas para Ψ y Ψ^{*}, Ecs. (5.40) y (5.42), las cuales describen el equilibrio de plasmas toroidales axisimétricos en la aproximación de M H D H.

Para encontrar solución a este sistema de ecuaciones, se escriben en forma matricial con la finalidad de tener una ecuación de eigenvalores los cuales permitirán desacoplar al sistema.

Se reescriben (5.40) y (5.42) en la siguiente forma

$$\Delta^{*}\Psi = -c_{11}\,\Psi - c_{12}\,\Psi^{*}, \tag{5.43}$$

$$\Delta^{*}\Psi^{*} = c_{21}\,\Psi - c_{22}\,\Psi^{*}, \tag{5.44}$$

donde

$$c_{11} = (8\pi)^2\lambda_1^2 - 4\pi a^2\rho, \tag{5.45}$$

$$C_{12} = (8\pi)^2 a\lambda_1\lambda_2 + 4\pi a \rho \quad , \tag{5.46}$$

$$C_{21} = (8\pi)\frac{a\rho}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) + a\left(\frac{\rho}{2\lambda_2}\right)^2 \quad , \tag{5.47}$$

$$C_{22} = \left(\frac{\rho}{2\lambda_2}\right)^2 - (8\pi)\; a^2\frac{\rho}{2} \quad . \tag{5.48}$$

De esta manera, las Ecs. (5.43) y (5.44) al escribirse en forma matricial quedarán

$$\Delta^* \begin{bmatrix} \psi \\ \psi^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ -C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \psi^* \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

Como el determinante de la matríz $\mathbb{C}$ es diferente de cero, si $\mathbb{C}$ es diagonizable se debe cumplir

$$\mathbb{D}^{-1}\mathbb{C}\,\mathbb{D} = \mathbb{B} \quad , \tag{5.50}$$

en donde $\mathbb{D}$ es la matríz que diagonaliza al sistema, y $\mathbb{B}$ es la matríz diagonal cuyos elementos serán los eigenvalores de la matríz $\mathbb{C}$. De esta forma los eigenvalores de $\mathbb{C}$ se obtienen al resolver

$$\det\left[\mathbb{I}\beta - \mathbb{C}\right] = 0 \, , \tag{5.51}$$

siendo $\mathbb{I}$ la matríz unitaria y β los eigenvalores. Así al desarrollar (5.51) se encuentra

$$\beta^2 - (C_{11}+C_{22})\beta + C_{11}C_{22} + C_{12}C_{21} = 0 \, , \tag{5.52}$$

β tiene soluciones de la forma

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{2}\left\{(C_{11}+C_{22}) \pm \left[(C_{11}-C_{22})^2 - 4C_{12}C_{21}\right]^{1/2}\right\} . \tag{5.53}$$

De esta manera se ha encontrado la expresión de los eigenvalores $\beta_\pm$ Ec. (5.53) que vienen a ser los elementos de la diagonal de $\mathbb{B}$. Otra forma de escribir $\beta_\pm$ en términos de λ_1 y λ_2 será utilizando las expresiones para C_{ij} Ecs. (5.45)-(5.48) al substituír en (5.53).

$$\beta_\pm = \frac{1}{2}\left\{(8\pi)^2\lambda_1^2 + \left(\frac{\rho}{2\lambda_2}\right)^2 - 8\pi a^2\rho \pm \left[\left[(8\pi)^2\lambda_1^2 - \left(\frac{\rho}{2\lambda_2}\right)^2\right]^2 - 2(8\pi)^3a^2\rho\lambda_1^2 - 2(8\pi)^2a^2\rho^2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) - 2(8\pi)a^2\rho\left(\frac{\rho}{2\lambda_2}\right)^2\right]^{1/2}\right\} . \tag{5.54}$$

Como se mencionó anteriormente, para dar soluciones al sistema de Ecs. (5.49) es necesario desacoplarlo, teniendo como consecuencia que encontrar la matríz que realice esta operación.

Para poder hallar la forma de la matríz $\mathbb{D}$ se define

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} , \tag{5.55}$$

cuyos elementos se determinarán utilizando el resultado de (5.50). Dado que se conocen $\mathbb{C}$ y $\mathbb{B}$, entonces

$$\frac{1}{\det(\mathbb{D})}\begin{bmatrix} d_{22} & -d_{12} \\ -d_{21} & d_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_+ & 0 \\ 0 & \beta_- \end{bmatrix} , \tag{5.56}$$

donde $\det(\mathbb{D}) = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}$. Al desarrollar (5.56) se encuentra

$$\frac{1}{\det \mathbb{D}}\left[c_{11}d_{11}d_{22} + c_{12}d_{21}d_{22} - c_{22}d_{12}d_{21} + c_{21}d_{11}d_{12}\right] = \beta_+ , \tag{5.57}$$

$$(c_{11} - c_{22})d_{12}d_{22} + c_{12}d_{22}^2 + c_{21}d_{12}^2 = 0 , \tag{5.58}$$

$$(c_{22} - c_{11})d_{11}d_{21} - c_{12}d_{21}^2 - c_{21}d_{11}^2 = 0 , \tag{5.59}$$

$$\frac{1}{\det \mathbb{D}}\left[-c_{11}d_{12}d_{21} - c_{12}d_{21}d_{22} + c_{22}d_{11}d_{22} + c_{21}d_{11}d_{12}\right] = \beta_- \tag{5.60}$$

Al resolver (5.58) y (5.59) para d_{12} y d_{11} respectivamente se tiene

$$\left.\begin{aligned} d_{12} &= \frac{d_{22}}{2c_{21}}\left\{(c_{22}-c_{11}) \pm \left[(c_{11}-c_{22})^2 - 4c_{12}c_{21}\right]^{1/2}\right\} \\ d_{11} &= \frac{d_{21}}{2c_{21}}\left\{(c_{22}-c_{11}) \mp \left[(c_{22}-c_{11})^2 - 4c_{12}c_{21}\right]^{1/2}\right\} \end{aligned}\right\} . \tag{5.61}$$

Como d_{22} y d_{21} aparecen como variables independientes en (5.61), en particular si se eligen para este caso en la forma más simple, es decir si $d_{22} = d_{21} = 1$, entonces se pueden tomar dos casos

$$d_{12}\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{2c_{21}}\left\{(c_{22}-c_{11}) + \left[(c_{11}-c_{22})^2 - 4c_{12}c_{21}\right]^{1/2}\right\} \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{2c_{21}}\left\{(c_{22}-c_{11}) - \left[(c_{11}-c_{22})^2 - 4c_{12}c_{21}\right]^{1/2}\right\} \end{cases} , \tag{5.62}$$

$$d_{11}\begin{cases} d_1 = \dfrac{1}{2c_{21}}\left\{(c_{22}-c_{11}) - \left[(c_{22}-c_{11})^2 - 4c_{12}c_{21}\right]^{1/2}\right\} \\ d_2 = \dfrac{1}{2c_{21}}\left\{(c_{22}-c_{11}) + \left[(c_{22}-c_{11})^2 - 4c_{12}c_{21}\right]^{1/2}\right\} \end{cases} , \tag{5.63}$$

cuidando que el determinante de $\mathbb{D}$ no se anule.

Así, la matríz $\mathbb{D}$ finalmente se da usando α_i, d_i,

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} d_i & \alpha_i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad i = 1, 2 . \tag{5.64}$$

Por lo tanto (5.64) es una matríz que diagonaliza al sistema, para el que se tienen varias posibilidades como se puede observar en (5.61)

Ahora se define un nuevo sistema en el cual

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2^{*} \end{bmatrix} = \mathbb{D}^{-1}\begin{bmatrix} \psi \\ \psi^{*} \end{bmatrix} \tag{5.65}$$

entonces al aplicar $\mathbb{D}^{-1}$ por la izquierda en (5.49) y con (5.50) se tiene

$$\Delta^* \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2^* \end{bmatrix} = - \mathbb{D}^{-1} \mathbb{C} \mathbb{D} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2^* \end{bmatrix} \tag{5.66}$$

o bien

$$\Delta^* \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \beta_+ & 0 \\ 0 & \beta_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2^* \end{bmatrix} . \tag{5.67}$$

Con este resultado el sistema de ecuaciones (5.49) se ha desacoplado al aplicar $\mathbb{D}^{-1}$, lo que significa que el problema se simplifica ahora al tener dos ecuaciones independientes, es decir:

$$\Delta^* \Psi_1 = - \beta_+ \Psi_1 , \tag{5.68}$$

$$\Delta^* \Psi_2^* = - \beta_- \Psi_2^* . \tag{5.69}$$

La solución al problema original, radica en resolver (5.68) y (5.69) para condiciones de frontera adecuadas, con lo cual la determinación de las funciones Ψ y Ψ^* será más simple.

Una vez que se han encontrado las soluciones para Ψ_1 y Ψ_2^*, se aplica $\mathbb{D}$ sobre el vector columna (5.65), y finalmente se obtienen las expresiones para los flujos Ψ y Ψ^* para plasmas toroidales axisimétricos en equilibrio, en la aproximación de M H D H.

En vista de que las ecuaciones para Ψ_1 y Ψ_2^* Ecs. (5.68) y (5.69) tienen la misma forma, solamente se resolverá para Ψ_1, debido a que las soluciones para Ψ_1 serán similares para Ψ_2^*. Así al escribir en forma explícita (5.68) se tiene

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} + \beta_+ \Psi_1 = 0 , \tag{5.70}$$

Al resolver esta ecuación por separación de variables, si se supone que - - $\Psi_1 = R(r)Z_1(z)$, entonces (5.70) quedará

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} - \frac{1}{rR}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{Z_1}\frac{d^2Z}{dz} + \beta_+ = 0 , \qquad (5.71)$$

habiéndose obtenido dos ecuaciones, las cuales dependen de r y z respectiva mente, por lo tanto, las ecuaciones independientes son

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} - \frac{1}{rR}\frac{dR}{dr} + (\beta_+ - m^2) = 0 , \qquad (5.72)$$

y

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + m^2 Z = 0 \; . \qquad (5.73)$$

La Ec. (5.73) es una ecuación diferencial ordinaria que tiene soluciones de - forma general como $Z_1 = A e^{\,i m z}$, la cual se puede reescribir - al considerar soluciones pares de la forma

$$Z_1(z) = A\cos(mz) \; . \qquad (5.74)$$

Ahora para encontrar las soluciones de (5.72), hágase $R = r\mathcal{R}$ y al substituir y desarrollar se tiene

$$\frac{d^2\mathcal{R}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathcal{R}}{dr} + \left[(\beta_+ - m^2) - \frac{1}{r^2}\right]\mathcal{R} = 0 \; . \qquad (5.75)$$

La Ec. (5.75) es una ecuación diferencial de Bessel de primer orden y sus so luciones son

$$\mathcal{R} = e_1 J_1(kr) + f_1 N_1(kr) , \qquad (5.76)$$

donde

$$k^2 = \beta_+ - m^2 , \qquad (5.77)$$

con ésto, la solución en R será

$$R = r\left[e_1 J_1(kr) + f_1 N_1(kr)\right] \qquad (5.78)$$

donde la solución en R, está en términos de las funciones de Bessel y Newman de primer orden y e_1, f_1 son constantes por determinar.

Finalmente, de (5.78) y (5.74) se obtiene la solución general para Ψ_1 como:

$$\Psi_1 = r\left[Q J_1(kr) + P N_1(kr)\right] \cos(m z) \quad , \tag{5.79}$$

con $Q = e_1 A$ y $P = f_1 A$.

Siguiendo un procedimiento similar como en el caso anterior se puede encontrar la expresión para Ψ_2^*, y ésta quedará de la siguiente forma

$$\Psi_2^* = r\left[L J_1(\ell r) + M N_1(\ell r)\right] \cos(\xi z) \quad , \tag{5.80}$$

donde

$$\ell^2 = \beta_- - \xi^2 \tag{5.81}$$

y Q, P, L y M son constantes por determinar de las condiciones a la frontera.

Dado que se ha elegido un sistema toroidal axialmente simétrico, tómese un elemento de fluido de forma rectangular como se muestra en la figura (1), con condiciones a la frontera tales que las impuestas anteriormente son válidas para este elemento, es decir $\vec{v}\cdot\hat{n}|_{\partial D} = 0$, $\vec{B}\cdot\hat{n}|_{\partial D} = 0$; $\vec{B}^*\cdot\hat{n}|_{\partial D} = 0$, ésto lleva a que - $\left.\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right|_{z=\pm b} = 0$, $\left.\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right|_{r=r_1, r_2} = 0$, análogamente se tiene para Ψ^*. De estas condiciones Ψ y Ψ^* son constantes en la frontera.

Como Ψ_1 es una combinación lineal de Ψ y Ψ^*, estas condiciones son válidas para Ψ_1 y Ψ_2 en la frontera, es decir

$$\left.\frac{\partial \Psi_1}{\partial r}\right|_{z=\pm b} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\right|_{r=r_1, r_2} = 0 \quad ; \quad \left.\frac{\partial \Psi_2^*}{\partial r}\right|_{z=\pm b} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial \Psi_2^*}{\partial z}\right|_{r=r_1, r_2} = 0 \quad . \tag{5.82}$$

De la figura (1) se tiene que al evaluar en los mismos puntos en la frontera, los eigenvalores serán iguales como se puede ver de las Ecs. (5.68) y (5.60) - tomando en cuenta que se está restringiendo a los modos de oscilación más bajos y que representarán los estados de mínima energía. Sin embargo, las soluciones para Ψ_2^* pueden diferir en una constante, es decir,

$$\Psi_2^* = \Psi_0 + \Psi_1 \quad . \tag{5.83}$$

Así de (5.82) para Ψ_1 se tiene

$$Q\,J_1(kr_1) + P\,N_1(kr_1) = 0 \quad , \tag{5.84}$$

$$Q\,J_1(kr_2) + P\,N_1(kr_2) = 0 \quad , \tag{5.85}$$

y

$$\cos(mz)\Big|_{z=\pm b} = 0 \quad . \tag{5.86}$$

Como en el sistema de ecuaciones (5.84) y (5.85), Q y P, en el caso general - son constantes distintas de cero, lo cual es posible si

$$J_1(kr_1)\,N_1(kr_2) - J_1(kr_2)\,N_1(kr_1) = 0 \quad , \tag{5.87}$$

en cuyo caso la Ec. (5.87) es una ecuación trascendente respecto al número k.

Por otra parte de (5.86)

$$\cos(mz) = 0\Big|_{z=\pm b} \Rightarrow \quad m = \frac{(2n+1)}{2b}\pi \tag{5.88}$$

donde $n = 0, 1, 2 \ldots$ y representa los modos normales.

Anteriormente se mencionó que $\beta_+ = \beta_- = \beta$, ésto es, las funciones $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2^*$ prácticamente son las mismas, las cuales difieren en una constante en el caso más simple. Entonces de la Ec. (5.53) se debe cumplir

$$\beta = \frac{1}{2}\left\{(8\pi)^2\lambda_1^2 - \left(\frac{\ell}{2\lambda_2}\right)^2 - \frac{2}{\delta_p^2}\right\} \quad , \tag{5.89}$$

$$\left[(8\pi)^2\lambda_1^2 - \left(\frac{\ell}{2\lambda_2}\right)^2\right]^2 - 4(8\pi)^2\frac{\lambda_1^2}{\delta_p^2} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\frac{4(8\pi)\ell}{\delta_p^2} - \frac{4}{\delta_p^2}\left(\frac{\ell}{2\lambda_2}\right)^2 = 0 \tag{5.90}$$

habiéndose escrito en términos de la profundidad de penetración $\delta_p = \left(\frac{c}{\omega_p}\right)$.

La determinación de β se hará al resolver numéricamente la Ec. (5.87), de tal forma que al hacer un cambio de variable, $X = kr_2 = k(r_0 + a_1) = kr_0\left(1 + \frac{a_1}{r_0}\right)$ y con

$y = \frac{r_1}{r_2}$ se tiene

$$J_1(yx)N_1(x) - J_1(x)N_1(yx) = 0 \quad (5.91)$$

Así, la primera raíz para varios valores de y y $\frac{a_1}{r_0}$ se muestra en la siguiente tabla:

Tabla (5.1)

$\frac{a_1}{r_0}$	$y=\frac{r_0-a_1}{r_0+a_1}$	x	$kr_0=\frac{x_m}{1+a_1/r_0}$
.01	.980298	158.652840	157.08201
.05	.9047619	32.999266	31.427872
.10	.8181818	17.3051034	15.731911
.15	.7391304	12.0842482	10.508041
.20	.66666666	9.4828079	7.9023399
.25	.600000	7.9300905	6.3440724
.30	.5384615	6.9026194	5.3097072
.35	.4814814	6.1761383	4.5749172
.40	.4285714	5.6386142	4.0275815
.45	.3793103	5.2279083	3.605454
.50	.3333333	4.9068480	3.271232
.55	.2903225	4.6518991	3.0012252
.60	.250000	4.4475056	2.779691
.65	.2121212	4.2830461	2.5957855
.70	.1764705	4.1510983	2.4418225
.75	.1428571	4.0463990	2.312228
.80	.1111111	3.9651945	2.2028858
.85	.081081	3.9048104	2.1107083
.90	.0526315	3.8633419	2.0333378
.95	.025641	3.8393832	1.9689144
.99	.0050251	3.8320040	1.9256301
.9999999		3.8317060	1.915853

De esta tabla se pueden obtener para cada caso los valores correspondientes de β ya que $k^2 = \beta - m^2$.

De las ecuaciones (5.89) y (5.90) se pueden obtener valores para λ_1 y λ_2, dado el valor para β, determinado por la la ecuación (5.87), y el modo m. Debe observarse sin embargò, que pueden existir varias raíces que resuelvan el problema.

Como las soluciones para Ψ y Ψ^* son las que interesan, éstas se obtendrán al aplicar $\mathbb{D}$ sobre el vector columna $\begin{pmatrix}\Psi \\ \Psi^*\end{pmatrix}$ tal que

$$\Psi = d_i \Psi_1 + \alpha_i \Psi_2^* , \tag{5.92}$$

$$\Psi^* = \Psi_1 + \Psi_2^* . \tag{5.93}$$

De (5.83) las Ecs. (5.92) y (5.93) quedarán

$$\Psi = \alpha_i \Psi_0 + (\alpha_i + d_i) \Psi_1 , \tag{5.94}$$

$$\Psi^* = \Psi_0 + 2\Psi_1 . \tag{5.95}$$

Recordando que $\Psi^* = u + a\Psi$, de (5.94) y (5.95) se puede encontrar una expresión para u

$$u = (1 - a\alpha_i)\Psi_0 + [2 - a(\alpha_i + d_i)]\Psi , \tag{5.96}$$

Finalmente las soluciones para Ψ, Ψ^* y u se dan en función de Ψ_m Ec. (5.79)

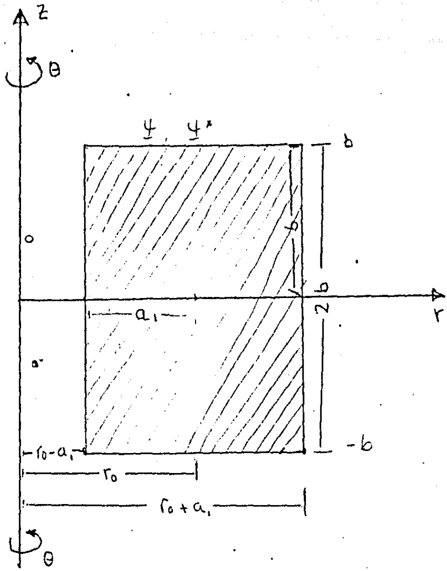
$$\Psi_m = \alpha_i \Psi_0 + (\alpha_i + d_i)\Psi_m , \tag{5.97}$$

$$\Psi_m^* = \Psi_0 + 2\Psi_m , \tag{5.98}$$

$$\mathcal{U}_m = (1 - a\alpha_i)\Psi_0 + [2 - a(\alpha_i + d_i)]\Psi_{1m} \; . \tag{5.99}$$

Con estos resultados, las soluciones prácticamente quedan determinadas para -- los flujos de campo magnético Ψ y de vorticidad generalizada Ψ^{*}, para plasmas toroidales axialmente simétricos en la aproximación de M H D H.

Por otra parte, las ecuaciones de equilibrio para el caso generalizado han quedado planteadas, cuya solución e interpretación se presentan como un problema abierto para futuros trabajos.



$$r_1 = r_0 - a_1$$

$$r_2 = r_0 + a_1$$

Sección rectangular para un toro Axisimétrico en coordenadas cilíndricas.

Figura (1)

CONCLUSIONES

En este trabajo se muestra como las ecuaciones de magnetohidrodinámica Ideal, así como las de magnetohidrodinámica Hall se pueden obtener del modelo de dos fluídos bajo ciertas aproximaciones.

Las ecuaciones de equilibrio se construyen en base a principios variacionales para la energía, aplicando las constricciones apropiadas de acuerdo con cantidades conservadas encontradas para cada caso. En particular se ha mostrado cómo deben modificarse las cantidades conservadas al pasar de M H D Ideal a M H D Hall.

Más adelante se ha mostrado como estas cantidades se pueden escribir en la representación de geometría toroidal axisimétrica, y pesadas por funciones que se encuentran en términos de los flujos ψ y ψ^*. Al trabajar en esta representación las ecuaciones que se encuentran son más generales que las de Woltjer o Turner para M H D H.

El resultado más importante del trabajo es la derivación de las ecuaciones de equilibrio para el modelo de M H D H toroidal axisimétrico en términos de las funciones de flujo ψ y ψ^*, las cuales describirán estados de equilibrio diferentes que en el caso de M H D Ideal [Almaguer et al. 1988].

Como una prueba de consistencia, se ha mostrado cómo a partir de estas ecuaciones se pueden recuperar las ecuaciones de Turner para el problema incompresible como un caso particular.

Finalmente, se propone un método de solución al problema de equilibrio para el caso incompresible. Al exhibir soluciones, sin embargo, subsiste el problema de encontrar las condiciones que lleven a tener el problema completamente determinado. Esto se relaciona en parte con la dificultad de identificar el significado físico de las constantes λ_1 y λ_2.

Finalmente, el caso general ha quedado como un problema abierto que merece ser estudiado con mayor profundidad.

B I B L I O G R A F I A

Almaguer J.A., Hameiri E., Herrera J., Holm D.D. (1988) "Lyapunov Stabiliti analysis of magnetohydrodynamic plasma equilibria with axisymmetric toroidal flow" Phys, Fluids 31(7), 1930-1939.

Freidberg P.J. (1982). "Ideal Magnetohydrodynamic Theory Of Magnetic Fusión Systems", Reviews Of Modern Physics 54 (3), 801.

Haines G.M., (1983), "Ion Beam Formation in an M-O Unstable Z-Pinch" Nuclear Instruments and Methods. (207) 149 - 185.

Holm D.D. 1987), "Hall Magnetohydrodynamics", Phys. Fluid 30 1310-1322.

Leech J.W. (1968), Mecánica Clásica (UTHEA No. 189).

Miyamoto K. (1980), Plasma Physics For Nuclear Fusión (Mit Press. Cambrigde Mass) Cap. 6.

Turner L. (1986), "Hall Effects on Magnetic Relaxation", IEEE Transactions on Plasma Science.

Woltjer L. (1958), "On Hydromagnetic Equilibrium" Proc. Nat. Acad. - - Sic. 44 489 - 491.