

00382

1

24

**EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD EN
MAGNETOHIDRODINAMICA HALL IDEAL**

JUAN ANTONIO ALMAGUER ANDRADE



27 ABN 1989

NO ADEUDA LIBROS
EN BIBLIOTECA
CENTRAL



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTADO LIBRE ASOCIADO DE PUERTO RICO

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN

A MIS PADRES, HERMANOS Y HERMANAS;

A LUCERO. PARA TODOS MI CARINO

Y AGRADECIMIENTO.

Esta Tesis se realizó bajo la
dirección del Dr. Julio Herrera
en el Instituto de Ciencias
Nucleares (UNAM) con el apoyo
económico de una beca dentro
del Programa de Superación del
Personal Académico.

Quiero hacer patente mi
agradecimiento al
Dr. Darryl D. Holm
pues su trabajo en MHDH
ideal fue el punto de
partida para esta tesis.

00382

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

División de Estudios de Posgrado

**EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD EN
MAGNETOHIDRODINAMICA HALL IDEAL**

TESIS

Que para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)

presenta

JUAN ANTONIO ALMAGUER ANDRADE

1989

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

INDICE.

Capítulo 1.	Introducción.	1.1
Capítulo 2.	Cantidades Conservadas.	2.1
	A. El Modelo MHDH ideal.	2.1
	B. Las Cantidades Conservadas.	2.2
	C. Campos Congelados.	2.10
	D. Representación de Clebsch.	2.11
Capítulo 3.	Estados de Equilibrio.	3.1
	A. El Principio Variacional.	3.1
	B. Estados de Equilibrio.	3.2
	C. El Tipo de las Ecuaciones MHDH Ideales.	3.15
	D. Discontinuidades Débiles.	3.19
Capítulo 4.	Estructura Hamiltoniana.	4.1
	A. Introducción.	4.1
	B. Paréntesis de Poisson No Canónicos.	4.2
	a. Introducción.	4.2
	b. Mecánica Hamiltoniana No Canónica.	4.3
	C. Productos Semidirectos.	4.3
	D. Las Ecuaciones de Movimiento.	4.9
Capítulo 5.	Estabilidad.	5.1
	A. Definiciones de Estabilidad.	5.1
	B. El Método de Arnold.	5.3
	C. Consideraciones Sobre las Perturbaciones a la Lagrange.	5.6
	D. Perturbaciones en Coordenadas Magnéticas.	5.8
	E. Estabilidad Liapunov.	5.13
	F. La Segunda Variación.	5.15

G. La Estimación por Convexidad y la Estimación A Priori. 5.23

Capítulo 6. Ondas MHDH Ideales. 6.1

Capítulo 7. Conclusiones. 7.1

Referencias. 8.1

CAPITULO 1.

INTRODUCCION.

El estudio de la física de plasmas puede encararse , en general, desde dos puntos de vista : uno es la descripción cinética y otro es la descripción en la cual se considera el plasma como un medio continuo. Mientras que en la primera se tiene en cuenta la estructura discreta del medio en cuestión en la segunda se considera al plasma (líquido o gas eléctricamente conductor) como un fluido. En este modelo el objeto de estudio, en forma global, es el movimiento de ese fluido conductor en presencia de campo magnético. La descripción de esta interacción campo-movimiento recibe el nombre genérico de magnetohidrodinámica. Cuando además se supone que los procesos involucrados en esa descripción dinámica son sólo de tipo conservativo se le denomina magnetohidrodinámica ideal. En ésta el campo de velocidades del fluido y los campos eléctrico y magnético se acoplan consistentemente a través de la ley de Ohm ($\underline{E} = -\underline{v} \times \underline{B}$). Pero en la ley de Ohm puede considerarse (como se mostrará más adelante) también el término de Hall ($\underline{J} \times \underline{B}$). La inclusión de éste en el modelo magnetohidrodinámico ideal de un plasma tiene interés ya que como modelo da lugar a una serie de procesos físicos que no tienen análogo en la descripción magnetohidrodinámica usual. Por otra parte, ha revelado ser de una gran riqueza teórica permitiendo ampliar las posibilidades de análisis (tanto en el aspecto analítico como en el numérico). En su relación con los experimentos, en tanto modelo, es relevante como intento de justificar y/o explicar los resultados obtenidos. Así, el incluirlo es de gran interés con miras al estudio y desarrollo de altas corrientes, aceleradores de estado estacionario (Brushlinskii y Morozov (1980)), generadores MHD, configuraciones de campo invertido para el confinamiento magnético, Θ -pinch, plasma focus y Θ -pinch cónicos (Hewett

(1984), Milroy y Brackbill (1986)).

Brushlinskii y Morozov (1980) han estudiado el efecto que tiene la presencia del término Hall en cálculos MHD en el caso particular de un flujo dentro de un canal coaxial axisimétrico. En esa situación se observó que la variación de la densidad no es monotónica (ni radial ni axialmente), se encontraron corrientes parásitas e inestabilidades (el efecto Hall parece actuar como fuente de iones rápidos). Por otra parte, tanto experimentalmente como en las simulaciones MHDH (magnetohidrodinámica Hall) se ha encontrado (Morozov y Solov'ev (1980)) que la presencia del término de Hall es importante para tener flujos compresionales.

El coeficiente Hall (i.e. el parámetro con el cual se escala la magnitud relativa del término de Hall), en el caso de aceleradores de plasma, aparece en la relación de proporcionalidad entre la energía de las partículas que abandonan el acelerador y el voltaje aplicado; específicamente, dicho coeficiente es inversamente proporcional a la eficiencia del acelerador (op. cit.).

Existe evidencia de que en los experimentos de focos de plasma se producen haces de iones energéticos (Bernard et al. (1978)); por cierto, en el experimento de Limeil, los haces de iones se consideraron la fuente principal de neutrones (Bernard et al. op. cit.). Luego, se hace necesario el incluir el término de Hall para tener la aceleración de partículas positivas en una dirección preferente (Haines (1983)) (Nótese que la MHD es simétrica ante la conjugación de la carga, ésta produce la inversión de los campos magnéticos y de las corrientes). El mecanismo Hall para la aceleración preferencial de iones, en presencia de un fluido de electrones de fondo, es de interés en los plasmas astrofísicos : aceleración de iones en las magnetosferas planetarias (Gosling et al. (1979) op. cit. en Holm (1987)), magnetosferas de cometas (Johnstone et al. (1986) y McKena-Lawlot et al. (1986)) y plasmas galácticos (Perratt y Green (1983)). Inclusive ha sido relacionado con el ori-

gen de los rayos cósmicos.

En cuanto al aspecto analítico, los estudios que incluyen al efecto Hall han sido canalizados al examen de las inestabilidades MHD ideales (Buti et al. (1965), Trahan et al. (1965), Tasso y Schram (1966) y Malik (1971)). El posible efecto desestabilizador del término Hall ha sido estudiado por Coppins et al. (1984), Tasso y Schram (op. cit.) y Buti et al. (op. cit.). La estabilidad lineal MHDH ha sido estudiada considerando los efectos de la gravedad así como el caso de equilibrio no estático (Hosking (1965), Bhowmik y Taylor (1972)). También se ha estudiado la propagación de ondas MHD usando en el modelo el término de Hall (Kadish (1976)). Por otra parte, se ha observado, asociada al problema de la estabilidad, la generación espontánea de campos magnéticos toroidales en los Θ -pinch cónicos (Bostick y Wells (1963), Benford (1972) y Milroy y Brackbill (op. cit.)).

En el presente trabajo se parte de un modelo de plasma de dos especies (iones y electrones) para obtener, previa adimensionalización de las ecuaciones involucradas, un modelo de un solo fluido : el modelo magnetohidrodinámico Hall ideal. A continuación se examina qué términos son dominantes, en orden de magnitud, en la ley de Ohm generalizada que se obtiene. Luego se examina la importancia que tiene el término de Hall en relación con la MHD ideal y la región de validez para esta última. Posteriormente (Capítulo 2) se determinan los invariantes integrales asociados al sistema bajo estudio considerando geometrías axisimétricas. Esas cantidades conservadas se utilizan como constricciones a una funcional de energía, y usando un principio variacional y la funcional de energía constreñida se obtienen las relaciones que deben satisfacer las variables físicas en el estado de equilibrio para los casos de vorticidad generalizada isentrópica y no isentrópica. Asimismo, se determinan los distintos regímenes asociados a discontinuidades débiles de las variables físicas involucradas obteniendo, por ejemplo,

que la presencia del término Hall da lugar a un régimen de flujo que no se presenta ni en fluidos no conductores ni en la MHD ideal (Capítulo 3). A continuación (Capítulo 4) se presenta la estructura hamiltoniana subyacente al modelo MHDH ideal (Holm (1987)) que requiere el uso de paréntesis de Poisson no canónicos (los cuales están asociados a la estructura de Lie-Poisson; de hecho, a una álgebra de Lie de dimensión infinita) para lo cual primero se da un repaso del caso no canónico de la mecánica de una partícula. Desarrollar una estructura hamiltoniana no sólo da cierta elegancia, formal, sino que permite un uso más provechoso de los invariantes asociados además de facilitar, en general, el desarrollo de una serie de aproximaciones que mantienen el carácter hamiltoniano; dentro de tal esquema la segunda variación adquiere un significado especial. Por otra parte, como punto de partida para realizar el estudio de la estabilidad (Capítulo 5), se presentan los distintos tipos de estabilidad y, en particular, se examina la estabilidad ante pequeñas perturbaciones lagrangianas para un caso con estados de equilibrio no estáticos. El mismo ejemplo se trata usando coordenadas magnéticas en lugar de las cilíndricas para mostrar con mayor claridad las dificultades que se presentan en dicho estudio. Luego, volviendo al caso general, se establecen las condiciones suficientes para tener estabilidad formal, usando para ello la segunda variación. Entonces, a través de una estimación a priori y un criterio de convexidad se establece la estabilidad ante desplazamientos finitos (estabilidad no lineal); los resultados precedentes implican estabilidad (lineal) de Liapunov a través de la norma antes determinada. Uno de los resultados que se presentarán es que un sistema magnetohidrodinámico Hall ideal es estable ante pequeñas perturbaciones considerando flujos axisimétricos. Que el efecto Hall introduce una no linealidad en el sistema considerado se pone de manifiesto con un caso específico en la sección D del capítulo 5. También se estudian (Capítulo 6)

las relaciones de dispersión asociadas a ondas de pequeña amplitud; las condiciones que pueden concluirse de dicho examen son compatibles con las encontradas en el examen de la estabilidad (Capítulo 5). Finalmente, en el último capítulo, se discuten los resultados obtenidos, los posibles desarrollos ulteriores al mismo, se establecen las conclusiones correspondientes.

Ahora se establecerá el modelo MHD con efecto Hall. El modelo de dos fluidos (el de iones y el de electrones) está descrito por el siguiente sistema de ecuaciones (Braginskii (1965)) :

$$\partial_t \mathbf{u}^\alpha + \nabla \cdot (\mathbf{u}^\alpha \mathbf{u}^\alpha) = 0; \quad \alpha = i \text{ (iones), } e \text{ (electrones)}. \quad (1.1a)$$

$$\left. \begin{aligned} m_i n_i D_t^i \mathbf{v}^i &= -\nabla p^i + \nabla \cdot \underline{\underline{\pi}}^i + e n_i \left(\underline{\underline{E}} + \frac{1}{c} \mathbf{v}^i \times \underline{\underline{B}} \right) - \underline{\underline{R}} \\ m_e n_e D_t^e \mathbf{v}^e &= -\nabla p^e + \nabla \cdot \underline{\underline{\pi}}^e - e n_e \left(\underline{\underline{E}} + \frac{1}{c} \mathbf{v}^e \times \underline{\underline{B}} \right) + \underline{\underline{R}} \end{aligned} \right\} \quad (1.1b)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_B n_i}{\gamma_i - 1} D_t^i T^i + p^i \nabla \cdot \mathbf{v}^i &= \nabla \cdot (k^i \nabla T^i) + \sum_{k,l} \frac{\pi_{kl}^i}{k_l} \partial_l v_k^i + Q \\ \frac{k_B n_e}{\gamma_e - 1} D_t^e T^e + p^e \nabla \cdot \mathbf{v}^e &= \nabla \cdot (k^e \nabla T^e) + \sum_{k,l} \frac{\pi_{kl}^e}{k_l} \partial_l v_k^e - Q + \frac{J^2}{\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (1.1c)$$

donde

$$p^\alpha := k_B n^\alpha T^\alpha \quad (1.2a)$$

$$\underline{\underline{J}} := e c (n_i \mathbf{v}^i - n_e \mathbf{v}^e) \quad (1.2b)$$

$$\underline{\underline{R}} := \frac{e^2 n_i n_e}{\sigma} (\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^e) \quad (1.2c)$$

$$Q := F (T^e - T^i) \quad (1.2d)$$

$$\Pi_{ke}^{\alpha} := \eta_{(1)}^{\alpha} (\partial_e v_k + \partial_k v_e)^{\alpha} + (\eta_{(2)}^{\alpha} - \frac{2}{3} \eta_{(1)}^{\alpha}) \delta_{ke} \nabla \cdot \underline{v}^{\alpha} \quad (1.2e)$$

$$D_t^{\alpha} := \partial_t + \underline{v}^{\alpha} \cdot \nabla \quad (1.2f)$$

y también $\partial_t := \partial/\partial t$, $\partial_k := \partial/\partial x_k$. En estas expresiones n^{α} es la densidad de partículas de la especie α , m_{α} es la masa de la partícula de la especie α , p^{α} es la presión que ejerce la especie α , T^{α} es la temperatura correspondiente, \underline{v}^{α} es la velocidad del flujo de la especie en cuestión, \underline{B} y \underline{E} son, respectivamente, los campos magnético y eléctrico, \underline{J} es la densidad de corriente eléctrica, κ la conductividad térmica y e la carga del electrón. \underline{Q} es la fuerza de fricción entre iones y electrones, \underline{Q} se relaciona con el calor transferido entre los dos fluidos a través de las colisiones de ambas especies, $\underline{\Pi}$ es el tensor de rango dos de esfuerzo viscoso usual en los fluidos ordinarios. Los coeficientes $\eta_{(1)}$ y $\eta_{(2)}$ se refieren, respectivamente, a la primera y segunda viscosidades. Además, deben satisfacerse las ecuaciones de Maxwell

$$\frac{1}{c} \partial_t \underline{B} = -\nabla \times \underline{E} \quad (1.3a)$$

$$\frac{1}{c} \partial_t \underline{E} = \nabla \times \underline{B} - \frac{4\pi}{c} \underline{J} \quad (1.3b)$$

El conjunto de ecuaciones (1.1a-c) y (1.3a,b), con las definiciones (1.2a-f), constituye un sistema cerrado admitiendo que los coeficientes de transporte $\eta_{(1)}^{\alpha}$, $\eta_{(2)}^{\alpha}$, σ , κ^{α} y F pueden expresarse en términos de las funciones incógnitas.

Ahora se 'escalarán' o adimensionalizarán ese conjunto de ecuaciones usando para ello los siguientes factores de comparación :

$$\text{Básicos} \left\{ \begin{array}{l} \text{longitud : } L_0 \\ \text{densidad de partículas : } n_0 \\ \text{campo magnético : } B_0 \\ \text{temperatura : } T_0 \\ \text{unidad de masa : } m_i \end{array} \right.$$

$$\text{Derivadas} \left\{ \begin{array}{l} \text{tiempo : } t_0 = L_0/v_0 \\ \text{rapidez : } v_0 = B_0 \sqrt{4\pi n_0 m_i} \\ \text{campo eléctrico : } E_0 = B_0 v_0/c \\ \text{densidad de corriente : } J_0 = B_0 c/4\pi L_0 \\ \text{presión : } B_0^2/4\pi \end{array} \right.$$

(Cuando se incluye la entropía explícitamente puede escalarse con C_v). Con los ' escalamientos ' anteriores las ecuaciones previas toman la forma siguiente (en las unidades en cuestión) :

$$\partial_t n^i + \nabla \cdot (n^i \underline{v}^i) = 0, \quad \alpha = i(\text{iones}), e(\text{electrones}). \quad (1.4a)$$

$$m_i D_t^i \underline{v}^i = -\nabla p^i + \nabla \cdot \underline{\pi}^i + m_i \tilde{c}_H^{-1} (\underline{E} + \underline{v}^i \times \underline{B} - \nu \tilde{c}_H^{-1} m_i (\underline{v}^i - \underline{v}^e)). \quad (1.4b)$$

$$m_e D_t^e \underline{v}^e = -\nabla p^e + \nabla \cdot \underline{\pi}^e - m_e \tilde{c}_H^{-1} (\underline{E} + \underline{v}^e \times \underline{B} - \nu \tilde{c}_H^{-1} m_i (\underline{v}^i - \underline{v}^e)). \quad (1.4c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta_0}{2(\gamma-1)} m_i D_t^i T^i + p^i \nabla \cdot \underline{v}^i &= \frac{\beta_0}{2(\gamma-1)} [F'(T^e - T^i) + \nabla \cdot (K^i \nabla T^i)] + \\ &+ \sum_{k,l} \pi_{kl}^i \partial_l v_k^i. \end{aligned} \quad (1.4d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta_0}{2(\gamma-1)} m_e D_t^e T^e + p^e \nabla \cdot \underline{v}^e &= \frac{\beta_0}{2(\gamma-1)} [-F'(T^e - T^i) + \nabla \cdot (K^e \nabla T^e)] + \\ &+ \sum_{k,l} \pi_{kl}^e \partial_l v_k^e + \nu' J^z. \end{aligned} \quad (1.4e)$$

$$\underline{\partial_t B} = -\underline{\nabla} \times \underline{E} \quad (1.4f)$$

$$\underline{\mathcal{E}} \underline{\partial_t E} = \underline{\nabla} \times \underline{B} - \underline{J} \quad (1.4g)$$

donde se han introducido .

$$P_0 = k_B n_0 T_0$$

$$\beta_0 = 8\pi P_0 / B_0^2$$

$$P^\alpha = \frac{\beta_0}{2} n_0 T^\alpha$$

(1.4h)

$$\underline{J} = \tilde{C}_n^{-1} (n_i \underline{v} - n_e \underline{v}_e)$$

(1.4i)

$$\tilde{C}_n = \frac{c}{e L_0} \sqrt{\frac{m_i}{4\pi n_0}} = \frac{1}{e} C_n$$

(escalamiento del efecto Hall)

(1.4j)

$$\mathcal{E} = (v_0/c)^2$$

(1.4k)

$$F' = L_0 F / m_i n_0 v_0 C_v$$

(1.4l)

$$\nu' = \frac{1}{R_m} = \frac{c^2}{4\pi \sigma L_0 v_0}$$

(1.4m)

$$\eta'^{\alpha} = \frac{\eta^{\alpha}(k)}{L_0 m_i n_0 v_0} ; k=1,2$$

(1.4n)

$$k'^{\alpha} = \frac{k^{\alpha}}{L_0 m_i n_0 v_0 C_v}$$

(1.4o)

(Acuf " " denota una cantidad adimensional). C_n es una cantidad adimensional que es una medida de la influencia del efecto Hall; $\mu = \frac{m_e}{m_i}$ y \mathcal{E} es el escalamiento de una rapidez de Alfvén característica respecto a la de la luz. $\eta^{\alpha}(k)$, k^{α} , ν' y R_m son, respectivamente, los coeficientes de viscosidad, la conductividad térmica

mica, la viscosidad magnética y el número de Reynolds magnético, todas son cantidades adimensionales. F' es el coeficiente, adimensional, para la transferencia de calor entre los iones y los electrones. El conjunto de ecuaciones que se han adimensionalizado constituye un sistema cuasilineal parabólico. Cuando se eliminan la viscosidad y la conducción del calor el sistema se convierte en hiperbólico y en tal caso tendrá una familia de tres características que corresponden al flujo de iones, electrones y ondas electromagnéticas. Las rapidez de propagación correspondientes son

$$c_i^i = \sqrt{\delta v^i / \mu i} . \quad (1.5a)$$

$$c_e^e = \sqrt{\delta v^e / \mu n e} . \quad (1.5b)$$

$$c = \sqrt{1/\epsilon} . \quad (1.5c)$$

Ahora se consideran las aproximaciones pertinentes al presente trabajo :

(i) Se desprecia la inercia de los electrones haciendo $\mu = 0$, esto tiene como consecuencia el eliminar la viscosidad del flujo de electrones, $\underline{\pi}^e = 0$, lo cual es razonable teniendo en cuenta que el cociente de la viscosidad de electrones a la de iones es del orden $\sqrt{\mu}$ (Draginskii (1905), Spitzer (1956)). Luego, haciendo $\underline{v} = \underline{v}^i$, $\underline{p} = \underline{p}^i + \underline{p}^e$ y $\underline{\pi} = \underline{\pi}^i$ las ecuaciones (1.4b,c) llevan a la siguiente ecuación de movimiento

$$n_i D_t \underline{v} = -\underline{\nabla} p + \underline{\nabla} \cdot \underline{\pi} + \underline{J} \times \underline{B} + c_w^{-1} e (n_i - n_e) \underline{E}$$

También se admite que los flujos son lentos en comparación a c , la rapidez de la luz; esto equivale a eliminar las corrientes de desplazamiento, $\underline{\epsilon} = 0$; luego, en lugar de (1.4g) queda

$$\underline{J} = \underline{\nabla} \times \underline{B} \quad (1.6)$$

Así, las ecuaciones de continuidad (1.4a) junto con (1.4i) y (1.6) conducen a $\partial_t(n_i - n_e) = C_M \nabla \cdot \underline{J} = 0$; luego, puede tomarse como condición inicial

$$n_i = n_e \quad (1.7)$$

Esta condición de cuasineutralidad será consistentemente preservada por la dinámica.

La condición de cuasineutralidad junto con $\rho = m_i n_i$ convierte a la ecuación de movimiento previa en la ecuación de movimiento de un solo fluido

$$\rho D_t \underline{v} = -\nabla p + \underline{J} \times \underline{B} + \nabla \cdot \underline{\pi} \quad (1.8)$$

De la expresión para \underline{J} , (1.4i), se obtiene la velocidad para el flujo de electrones

$$\underline{v}^e = \underline{v} - \frac{C_M}{a_f} \underline{J} \quad (1.9)$$

donde a es la razón de la carga del electrón a la masa del ion, e/m_i . Si en la ecuación de movimiento para los electrones, (1.4c), se aplican las aproximaciones aquí consideradas junto con (1.9) se obtiene la ley de Ohm generalizada

$$\underline{E} = -\underline{v} \times \underline{B} + \frac{C_M}{a_f} (\underline{J} \times \underline{B} - \nabla p^e) + \nu \underline{J} \quad (1.10)$$

La ecuación de difusión del campo magnético se obtiene de la ley de Faraday, (1.4f), sustituyendo en ella (1.10).

Al poner $\underline{T}^e = 0$ en la ecuación de energía para los electrones, (1.4e), se obtiene

$$\frac{\beta_0 \rho}{2(\gamma-1)} D_t T^e + p^e \nabla \cdot \underline{v} = \frac{\beta_0}{2(\gamma-1)} [\nabla \cdot (\kappa^e \nabla T^e) - F'(T^e - T^i)] + \\ + \nu J^2 + \frac{c_H}{e} \left[\frac{\beta_0}{2(\gamma-1)} \underline{J} \cdot \nabla T^e + p^e \nabla \cdot (\bar{\rho}^{-1} \underline{J}) \right] \quad (1.11)$$

(ii) Ahora se toma como temperatura del fluido $T_i = T^e + T^i$, suponiendo que F^i y F^e son funciones dadas, resultará

$$T^e = F^e(T), \quad T^i = F^i(T). \quad (1.12)$$

Con éstas y la expresión para la energía de los electrones, (1.11), la ecuación para la energía de los iones, (1.4d), toma la forma

$$\frac{\beta_0 \rho}{2(\gamma-1)} D_t T + p \nabla \cdot \underline{v} = \frac{\beta_0}{2(\gamma-1)} \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \sum_{k,l} \pi_{kl} \alpha_l v_k + \nu J^2 + \\ + \frac{c_H}{e} \left[\frac{\beta_0}{2(\gamma-1)} F^i(T) \underline{J} \cdot \nabla T + F^e(T) \frac{p}{T} + \nabla \cdot (\bar{\rho}^{-1} \underline{J}) \right]. \quad (1.13)$$

donde $\kappa := \kappa^i F^i + \kappa^e F^e$, $F^i, e := dF^i/dT$.

Nótese que puede tomarse la relación más simple

$$T^i = T^e = T/2. \quad (1.14)$$

que va asociada a $p^i = p^e = \frac{p}{2}$ y que es adecuada para el estudio de flujos isotérmicos. Para estos se tendrá en la ecuación para la energía $T = \text{cte.}$, $p = \beta_0 \frac{p}{2}$; sin embargo, también puede tratarse el

caso de flujos isentrópicos, $S = \text{cte.}$ y $P = \beta_0 \rho^{1/2}$.

En este trabajo se estudiarán sólo procesos no disipativos de manera que en el sistema de ecuaciones previo se considerarán: viscosidad nula, $\eta_{(1)} = \eta_{(2)} = \underline{\underline{\Pi}} = 0$, conductividad térmica nula, $\kappa = 0$, y conductividad eléctrica infinita, $\sigma = \infty$ (equivalentemente: viscosidad magnética nula, $\nu = 0$, o número de Reynolds magnético infinito). En tal caso el conjunto de ecuaciones de interés será (considerado procesos isentrópicos):

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0. \quad (\text{conservación de la masa}) \quad (1.15a)$$

$$\rho (\partial_t \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v}) = -\nabla p + \underline{J} \times \underline{B}. \quad (\text{conservación del momento lineal}) \quad (1.15b)$$

$$\underline{E} = -\underline{v} \times \underline{B} + \frac{c_H}{a\rho} (\underline{J} \times \underline{B} - \nabla p_e). \quad (\text{ley de Ohm que incluye el término de Hall}) \quad (1.15c)$$

$$\partial_t \underline{B} = -\nabla \times \underline{E}. \quad (\text{ley de Faraday}) \quad (1.15d)$$

$$\underline{J} = \nabla \times \underline{B} \quad (1.15e)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_t s_1 &= -\underline{v}_1 \cdot \nabla s_1 \\ \partial_t s_2 &= -\underline{v}_2 \cdot \nabla s_2 - \frac{c_H}{a\rho} \underline{J} \cdot \nabla s_1 = -\underline{v}_2 \cdot \nabla s_2 - \frac{c_H}{a\rho} \underline{J} \cdot \nabla \left(\frac{p_e}{\rho h} \right) \end{aligned} \right\} (1.15f)$$

En la ley de Ohm los términos relevantes, como es bien sabido, son \underline{E} y $\underline{v} \times \underline{B}$. Para examinar el orden de los dos últimos términos nótese que

$$\frac{|\nabla p_e|}{\rho v (\underline{v} \times \underline{B})} \sim \frac{r_{Li}}{L_0} \quad (1.16)$$

donde r_{Li} es el radio de giro de los iones. Por otra parte, de la ecuación del momento resulta $|\underline{J} \times \underline{B}| \sim |\underline{\nabla} p|$, así (y considerando $|\underline{\nabla} p| \sim \frac{1}{2} |\underline{\nabla} p|$) se tendrá

$$\frac{|\underline{J} \times \underline{B}|}{\text{en } |\underline{\nabla} p|} \sim \frac{2 |\underline{\nabla} p|}{\text{en } |\underline{\nabla} p|} \sim 2 \left(\frac{r_{Li}}{L_0} \right). \quad (1.17)$$

Luego, $|\underline{J} \times \underline{B}|$ es mayor que $|\underline{\nabla} p|$ pero no en forma notable (i.e. son comparables). Considerando

$$\frac{r_{Li}}{L_0} < 1 \quad (1.18)$$

puede eliminarse el gradiente de presión de los electrones en la ley de Ohm y si sólo se dejan los términos mayores se tendrá en vez de (1.15c)

$$\underline{E} = -\underline{v} \times \underline{B} + \frac{cH}{ap} \underline{J} \times \underline{B}. \quad (1.19)$$

El último término en la ecuación de la energía para los electrones, (1.15f), puede compararse de la siguiente manera usando los resultados previos

$$\frac{|\underline{J} \cdot \underline{\nabla} p|}{\text{en } |\underline{\nabla} p|} \sim \frac{r_{Li}}{L_0}. \quad (1.20)$$

y, debido a (1.18), se despreciará ese término (lo cual es consistente con eliminar el gradiente de presión de electrones en la ley de Ohm); así, en lugar de las dos expresiones en (1.15f) se tendrá, para un fluido, una sola (como la suma de las dos)

$$\partial_t s = -\underline{v} \cdot \underline{\nabla} s \quad (1.21)$$

con $\underline{v} = \underline{v}^i$; s es la entropía específica (escalada con la masa del ion, m_i).

Por otra parte, nótese que el coeficiente de Hall, $\tilde{C}_H = C_H/c$, es tá asociado al cociente de los términos $|\underline{v} \times \underline{B}|$ y $\rho |\underline{v} \times \underline{B}|$ lo cual significa que compara la velocidad relativa de iones a electrones respecto al flujo de masa (velocidad de iones), $\tilde{C}_H \sim \frac{|\underline{v}^i - \underline{v}^e|}{|\underline{v}^i|}$; luego, la presencia significativa del efecto Hall está asociada a diferencias apreciables (en comparación) entre la velocidad de los iones y la de los electrones.

Para establecer la región de validez del modelo MHDH debe considerarse primero que el tiempo para el equilibrio térmico de las dos especies (iones y electrones), $T_e \approx T_i$, es corto en comparación a los tiempos característicos en el sistema, es decir $\omega T_{et} \ll 1$ donde T_{et} es el tiempo necesario para alcanzar dicho equilibrio pero este depende del tiempo transcurrido entre una colisión y la siguiente entre iones (básicamente) T_{ii} y además del cociente de las masas, $T_{et} \sim \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} T_{ii} = \frac{1}{\mu^{1/2}} T_{ii}$, y como $\omega \sim \frac{v_{Te}}{L_0} = \frac{1}{L_0} \sqrt{\frac{2I_0^2}{m_i}}$ se tendrá

$$\frac{T_{ii} v_{Te}}{L_0 \mu^{1/2}} \ll 1 \quad (1.22)$$

donde además $v_{Te} T_{ii} / L_0 \ll 1$ es la condición, como es fácil ver, de un plasma muy colisional.

Entonces para establecer la región de validez se necesitan dos parámetros, a saber la razón del radio de giro a la longitud característica y el escalamiento de la frecuencia característica a la colisional

$$\gamma_1 = \frac{r_{Li}}{L_0} \quad (1.23a)$$

$$\gamma_2 = \frac{v_{Te} T_{ii}}{L_0 \mu^{1/2}} \quad (1.23b)$$

respectivamente. Estos parámetros definen las características del sistema :

(i) radio de giro pequeño

$$\gamma_1 \ll 1.$$

(1.24a)

(ii) muy colisional

$$\gamma_2 \ll 1.$$

(1.24b)

(iii) de resistividad muy pequeña

$$\gamma_1^2 / \gamma_2 \ll 1$$

(1.24c)

Estas características, en forma gráfica, quedan como se muestra en la figura 1.1 (Freidberg, (1982)). Esta gráfica (γ_1, γ_2) debe compararse con la región de los plasmas de interés en fusión. Para ello se pasará lo anterior a un diagrama de temperaturas contra densidad de partículas (n, T). Los rangos para estas variables, en plasmas de fusión, son

$$10^{12} \text{ cm}^{-3} < n < 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

$$0.1 \text{ KeV} < T < 10 \text{ KeV}.$$

(1.25)

Estos definen una zona rectangular para los plasmas de interés en fusión. Las condiciones (1.24) pueden establecerse usando los parámetros β (cociente de la presión del plasma a la magnética), n y T en la siguiente forma :

(i) radio de giro pequeño

$$\gamma_1 = 2.28 \times 10^5 \left(\frac{\beta}{L^2 n} \right)^{1/2} \ll 1.$$

(1.26a)

(ii) plasma altamente colisional

$$\gamma_2 = 9.88 \times 10^{17} \left(\frac{T^2}{L n} \right) \ll 1.$$

(1.26b)

(iii) resistividad muy pequeña

$$\alpha_1^2 / \alpha_2 = 5.26 \times 10^{-8} \left(\frac{\beta}{L_0 T_2} \right) \ll 1 \quad (1.26c)$$

(En ellas $[L_0] = m$, $[T] = kV$ y $[n] = cm^{-3}$: como masa del ion se usó la del deuterio). En la figura 1.2 se ilustra la ecuación (1.26c) para el caso $L_0 = 1m$ y $\beta = 1$. En dicha figura es claro que la región de validez de la MHDH ideal queda fuera de la región de los plasmas de fusión.

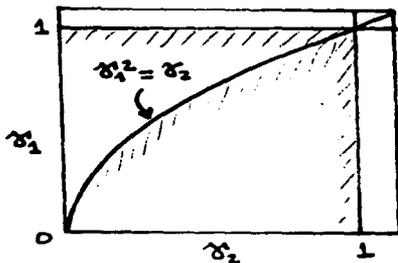


Fig. 1.1-

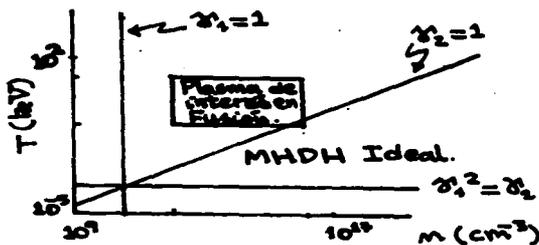


Fig. 1.2.

CAPITULO 2.

CANTIDADES CONSERVADAS.

A. El Modelo MHDH Ideal.

El sistema que se considerará será un plasma ideal confinado en una región finita del espacio, D , con frontera rígida, impermeable y perfectamente conductora. En la descripción de la dinámica del mismo se incluirá que está aislado adiabáticamente y que el efecto Hall es relevante (Cfr. discusión al final del Capítulo 1). Luego, el modelo en cuestión es el magnetohidrodinámico ideal modificado, en la ley de Ohm, por la presencia del término de Hall como una singularidad. Dicho modelo será denominado magnetohidrodinámica Hall ideal y se usará el acrónimo MHDH ideal para aludir a ese modelo.

El conjunto de ecuaciones que describirá la dinámica del plasma aquí considerado está formado por las ecuaciones (1.15a,b,d,e), (1.19) y (1.21) en las cuales no se incluyen procesos disipativos y se contemplan procesos isentrópicos,

$$\partial_t \underline{v} = -\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} - \rho^{-1} \nabla p + \rho^{-1} \underline{J} \times \underline{B} \quad (2.1a)$$

$$\partial_t \underline{B} = -\nabla \times \underline{E} \quad (2.1b)$$

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \underline{v}) \quad (2.1c)$$

$$\underline{E} = -\underline{v} \times \underline{B} + \frac{c_H}{a\rho} \underline{J} \times \underline{B} \quad (2.1d)$$

$$\partial_t s = -\underline{v} \cdot \nabla s \quad (2.1e)$$

con

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0, \quad \underline{J} = \nabla \times \underline{B}, \quad \rho = \rho^2(\rho, s), \quad T = T(\rho, s) \quad (2.1f)$$

donde ρ , s , \mathbf{v} , \mathbf{B} y $e(\rho, s)$ denotan la densidad de masa, la entropía específica, la velocidad (de flujo) de plasma, el campo magnético y la energía interna específica, respectivamente.

La presión del plasma p y la temperatura T se relacionan vía una ecuación de estado y se conectan con la energía interna específica a través de la primera ley de la termodinámica

$$\begin{aligned} de(\rho, s) &= e_\rho d\rho + e_s ds \\ &= p \bar{\rho}^2 + T ds \end{aligned} \quad (2.1g)$$

(Los subíndices en (2.1f,g) representan derivadas parciales) En (2.1d) a es la razón de la carga del electrón a la masa del ion, e/m_i , y c_H es el coeficiente de escalamiento del efecto Hall, (1.4j). Debido a (2.1b) la condición $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ puede tomarse como condición inicial, $\partial_t(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$, que será preservada por la dinámica misma. Podría ocurrir que en alguna situación (2.1e) no sea adecuada junto con $p = S \bar{\rho}^\gamma$ (γ es la razón de los calores específicos, c_p/c_v), en tal caso puede considerarse una expresión del tipo $p \propto T$ de manera que pueda estudiarse el caso de un flujo que se desvía de un estado isotérmico y no de uno isentrópico; sin embargo, se aplican básicamente los mismos desarrollos presentados en este trabajo (Cfr. Capítulo 1).

B. Las Cantidades Conservadas.

En MHD (Woltjer (1958)), en ausencia de procesos disipativos, se tienen integrales de movimiento asociadas a la masa total, a la helicidad magnética, al flujo paralelo y a la densidad de momento angular. En trabajos más recientes (Hellsten y Spies (1979), Spies y Hellsten (1980), Hameiri y Hammer (1982) y Hameiri (1983)) se considera, explícitamente, el efecto de la entropía específica en las condiciones de estabilidad. En particular (Hameiri y Laurence (1984)) se ha visto que en el caso de un toroide axisimétrico la entropía específica depende de la función de flujo poloidal ⁽¹⁾ y eso

permite tener una condición suficiente para la estabilidad lineal y esto, a su vez, está asociado a la existencia de " modos de globo ".

Puesto que no se contemplan procesos disipativos en el sistema bajo estudio se tienen las siguientes cantidades conservadas

$$H = \int_D \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho e(\rho, s) + \frac{B^2}{2} \right) d^3x \quad \left(\begin{array}{l} \text{conservación de la} \\ \text{energía total} \end{array} \right) \quad (2.2a)$$

$$G_1 = \int_D \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d^3x \quad \left(\begin{array}{l} \text{conservación de la} \\ \text{helicidad magnética} \end{array} \right) \quad (2.2b)$$

$$G_2 = \int_D \rho \Phi(s) \, d^3x \quad \left(\begin{array}{l} \text{conservación de la masa y} \\ \text{la entropía específica} \end{array} \right) \quad (2.2c)$$

donde $\Phi(s)$ es una función arbitraria bien comportada. Existen otras cantidades conservadas que están condicionadas en cuanto que requieren especificaciones adicionales a las que se usan en (2.2a-c) y se discutirán un poco más adelante.

Para verificar que efectivamente (2.2a-c) son cantidades conservadas a las funciones, de las variables físicas, involucradas se les expresará en forma conservativa i.e.

$$\partial_t g = \nabla \cdot G \quad (2.3)$$

donde g es escalar si G es vectorial y es vectorial si G es un tensor de rango dos. Aunada a la forma (2.3) se tendrá una familia de condiciones a la frontera adecuadas que permitirán obtener los invariantes integrales mencionados.

Las condiciones de frontera que se consideran son

$$\underline{v} \cdot \hat{n} \Big|_{\partial D} = 0, \quad \underline{\omega} \cdot \hat{n} \Big|_{\partial D} = 0, \quad \mathbf{B} \cdot \hat{n} \Big|_{\partial D} = 0, \quad \mathbf{E} \times \hat{n} \Big|_{\partial D} = 0 \quad (2.4a)$$

las cuales expresan lo señalado al principio de esta sección: la frontera es impermeable, rígida y perfectamente conductora. En

$$(2.4a) \quad \underline{\omega} := \underline{\nabla} \times \underline{v}.$$

De (2.4a) y la ley de Ohm, (2.1d), se obtiene

$$\underline{J} \cdot \hat{n} |_{\partial D} = 0 \quad (2.4b)$$

\hat{n} es un vector unitario normal a la frontera que apunta hacia afuera. De la representación para el campo eléctrico en términos del potencial escalar ϕ y el vectorial \underline{A} ,

$$\underline{E} = -\underline{\nabla} \phi - \partial_t \underline{A} \quad (2.5)$$

junto con la última condición en (2.4a), admitiendo la norma radiativa, $\phi = 0$, se obtiene

$$\partial_t \underline{A} \times \hat{n} |_{\partial D} = 0 \quad (2.6a)$$

que puede tomarse como condición inicial

$$\underline{A} \times \hat{n} |_{\partial D} = 0 \quad (2.6b)$$

y será preservada por la dinámica MHDH ideal.

Para la conservación de la energía se usan (2.1a-g) y $\partial_t (\rho e) = \underline{v} \cdot \underline{\nabla} p - \underline{\nabla} \cdot (\rho h \underline{v})$, donde h es la entalpia específica definida por

$$h := e(\rho, s) + p/\rho \quad (2.7)$$

y se obtiene

$$\partial_t \left[\rho \frac{v^2}{2} + \rho e + \frac{B^2}{2} \right] = -\underline{\nabla} \cdot \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + h \right) \underline{v} + \underline{E} \times \underline{B} \right] \quad (2.8)$$

que junto con (2.4a), una vez integrada, da lugar a la conservación de la energía total, H .

Para la helicidad magnética, C_1 , se tiene

$$\partial_t (\underline{A} \cdot \underline{B}) = -\nabla \cdot (\phi \underline{B} + \underline{E} \times \underline{A}) \quad (2.9)$$

de la ley de Faraday, (2.1b), y la ley de Ohm, (2.1d). Si $\phi \neq 0$ la helicidad magnética se conserva usando (2.4a), si $\phi = 0$ puede aplicarse $\underline{E} \times \underline{A} \Big|_{\partial D} = \underline{0}$ ó (2.6b).

La conservación de C_2 se sigue (debido a (2.1c,e)) de

$$\partial_t (\rho \Phi(s)) = -\nabla \cdot [\rho \Phi(s) \underline{v}] \quad (2.10)$$

y la condición de frontera sobre \underline{v} . C_2 incluye simultáneamente la conservación de la masa y de la entropía.

Cabe señalar que en MHD ideal también se tiene la conservación de H , C_1 y C_2 pero además se tiene un invariante integral denominado flujo paralelo (o helicidad cruzada) definido por $\int_D \underline{v} \cdot \underline{B} d^3x$; sin embargo, es fácil ver que en MHDH ideal ya no es cantidad conservada. En MHD ideal tener la conservación del flujo paralelo impone una forma funcional específica para s (Cfr. Almaguer et al. (1988)); en MHDH ideal se tiene una cantidad conservada análoga (algunas veces denominada " helicidad total ") y como a continuación se verá impone una restricción de carácter físico sobre una " vorticidad generalizada " que se define abajo.

La helicidad total, C_3 , se define como

$$C_3 = \int_D \underline{v}^* \cdot \underline{\omega}^* d^3x. \quad (2.11)$$

donde \underline{v}^* y $\underline{\omega}^*$ son, respectivamente, la velocidad y la vorticidad generalizadas definidas por

$$\underline{v}^* := \underline{v} + \frac{a}{C_M} \underline{A}, \quad \underline{\omega}^* := \nabla \times \underline{v}^* \quad (2.12)$$

Nótese primeramente que \underline{v}^* y $\underline{\omega}^*$ satisfacen, respectivamente,

las ecuaciones

$$\partial_t \underline{v}^* = -\nabla \left[\frac{v^2}{2} + h + \frac{a}{c_H} \phi \right] + \underline{v} \times \underline{\omega}^* + T \nabla s \quad (2.13a)$$

$$\partial_t \underline{\omega}^* = \nabla \times [\underline{v} \times \underline{\omega}^* + T \nabla s] \quad (2.13b)$$

de las cuales resulta

$$\begin{aligned} \partial_t (\underline{v}^* \cdot \underline{\omega}^*) = & -\nabla \cdot \left[\left(\frac{v^2}{2} + h + \frac{a}{c_H} \phi \right) \underline{\omega}^* + \underline{v}^* \times (\underline{v} \times \underline{\omega}^* + T \nabla s) \right] \\ & + 2T \underline{\omega}^* \cdot \nabla s \end{aligned} \quad (2.14)$$

De esta ecuación se derivan tres posibilidades para la conservación de la helicidad total, C_3 . La más simple es admitir únicamente procesos isentrópicos, $\nabla s = 0$, con lo cual (2.14) y (2.4a), después de integrar, conducen a la conservación de C_3 (En este caso (2.1e) implica $\partial_t s = 0$ que, nuevamente, puede fijarse como condición inicial $s = s_0$ la cual la dinámica misma habrá de preservar). La segunda posibilidad es suponer que las líneas de vorticidad generalizada son isentrópicas

$$\underline{\omega}^* \cdot \nabla s = 0 \quad (2.15)$$

pero C_3 se conservará sólo cuando se tome la norma radiativa para disponer de las condiciones de frontera $\underline{\omega} \cdot \hat{n}|_{\partial D} = 0$, $\underline{E} \cdot \hat{n}|_{\partial D} = 0$ y $\Delta \times \hat{n}|_{\partial D} = 0$. a reserva de admitir ($T \neq 0$) una condición adicional

$$\oint_{\partial D} T \hat{n} \cdot (\underline{v} \times \nabla s) d^2x = 0 \quad (2.16)$$

que puede lograrse admitiendo que el cambio en s sólo puede ser normal a la frontera

$$\underline{E} \times \hat{n}|_{\partial D} = 0 \quad (2.17)$$

Una tercera posibilidad es suponer que las líneas de vorticidad generalizada son isotérmicas

$$\underline{\omega}^* \cdot \nabla T = 0 \quad (2.18)$$

con lo cual $\nabla \cdot (T \underline{\omega}^*) = T \nabla \cdot \underline{\omega}^*$ y tomando $\beta = 0$ para tener (2.6b), nuevamente, se conserva C_3 a reserva de satisfacer (2.16) o, equivalentemente, (2.17).

Nota A. La condición (2.15) juega, físicamente, un papel análogo al que se tendría para un fluido no conductor por cuanto que en él los cambios en la entropía influyen en la distribución de vorticidad. En ellos, cuando se tienen ondas de choque, en una región alejada de la zona frontal del choque se presentan cambios en la turbulencia asociados a los gradientes de entropía. En el caso aquí considerado no se tiene viscosidad; luego, no cabe el aspecto de la turbulencia (Cfr. p. ej. Truesdell (1948)) pero sí el de la vortividad : para que los tubos de vorticidad generalizada conserven constante a s sobre sus líneas la dinámica es tal que los flujos asociados a \underline{v}^* y $\underline{\omega}^*$ se acoplan de tal suerte que la helicidad total se conserva. De cualquier modo, $a \frac{B}{c_H}$ es una contribución al campo de vorticidad $\underline{\omega}$ debida a la rotación de los iones; dicha contribución " vorticiosa " está asociada al radio de Larmor de los iones dado por

$$r_L := v_1 \omega_L^{-1} = \frac{2 c_H v_1}{a B} \quad (2.19)$$

(Aquí v_1 , la componente perpendicular de \underline{v} , lo es respecto a las líneas del campo magnético). Este punto es de singular importancia porque si r_L es del orden de los desplazamientos a considerar, por ejemplo en el análisis de la estabilidad lineal, será necesario tomarlo en cuenta, a través de una expansión en serie de potencias

del mismo para evaluar cuál tan relevante es su efecto. De hecho, eso podría conducir a la necesidad de abandonar el modelo hidrodinámico para hacer el estudio en términos de un modelo de dos fluidos (Cfr. discusión al final del Capítulo 1).

Del producto escalar de (2.13b) con \underline{v}_s , usando (2.1e), se tiene

$$\partial_t (\underline{\omega}^* \cdot \underline{v}_s) = - \nabla \cdot [(\underline{\omega}^* \cdot \underline{v}_s) \underline{v}] \quad (2.20)$$

que junto con $\underline{v} \cdot \hat{n} |_{\partial D} = 0$ implica que $\underline{\omega}^* \cdot \underline{v}_s$ también se conserva. Nótese que la existencia de esta cantidad conservada es incompatible con las condiciones discutidas arriba para asegurar la conservación de la helicidad total C_3 . Por consiguiente, en adelante será necesario considerar dos casos que se excluyen mutuamente : uno que admite a C_3 como cantidad conservada y otro en el cual se descarta la conservación de C_3 pero se tiene la de

$$C_4 = \int_D \rho \Omega \, d^3x \quad (2.21)$$

donde Ω es el potencial de vorticidad generalizada

$$\Omega := \rho^{-1} \nabla_s \cdot \underline{\omega}^* \quad (2.22)$$

análogo al de la hidrodinámica usual (Truesdell (1954)). La evolución temporal de Ω puede obtenerse multiplicando (2.20) por ρ^{-1} y usando la ecuación de continuidad (2.1c),

$$\partial_t \Omega = - \underline{v} \cdot \nabla \Omega \quad (2.23)$$

Así, el invariante integral que sustituye a C_2 en el caso de $\nabla_s \cdot \underline{\omega}^* \neq 0$ es

$$C_5 = \int_D \rho G(\Omega, s) \, d^3x \quad (2.24)$$

pues

$$\partial_t (\rho G(\Omega, s)) = -\nabla \cdot [\rho G(\Omega, s) \underline{v}] \quad (2.25)$$

debido a (2.1e) y (2.24) que junto con $\underline{v} \cdot \hat{n}|_{\partial D} = 0$ conduce a la conservación de C_5 . $G(\Omega, s)$ es una función arbitraria bien comportada.

Otra magnitud física que, en principio, puede conservarse es el momento angular; de hecho también se trata de un invariante condicional,

$$\underline{C}_6 = \int_D \rho \underline{x} \times \underline{v} \, d^3x. \quad (2.26)$$

Notando que

$$\rho D_t \underline{v} = -\nabla \cdot \left[\left(p + \frac{\underline{B}^2}{2} \right) \underline{1} - \underline{B} \underline{B} \right] \quad (2.27a)$$

$$\partial_t (\rho \underline{v}) = \rho D_t \underline{v} - \nabla \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}). \quad (2.27b)$$

es directo verificar

$$\partial_t (\rho \underline{x} \times \underline{v}) = -\nabla \cdot \left[\left(p + \frac{\underline{B}^2}{2} \right) \underline{x} \times \underline{1} - \underline{B} (\underline{x} \times \underline{B}) + \rho \underline{v} (\underline{x} \times \underline{v}) \right]. \quad (2.28)$$

donde $\underline{1}$ es el tensor unidad de rango dos. Sin embargo, en este caso no basta con las condiciones de frontera especificadas para que se conserve \underline{C}_6 sino que es necesario imponer una restricción sobre la geometría de la frontera del plasma, a saber

$$\oint_{\partial D} \left(p + \frac{\underline{B}^2}{2} \right) \hat{m} \cdot (\underline{x} \times \underline{1}) \, d^2x = 0. \quad (2.29)$$

que es demasiado severa para el tratamiento de geometrías de interés en MHD ideal pues, como es fácil ver, (2.29) se satisface idénticamente si imponemos $\hat{m} \times \underline{x}|_{\partial D} = 0$ que equivale a tener solamente frontera esférica. No obstante, es posible tener conservación de

la componente azimutal (para sistemas axisimétricos) del momento angular sin imponer condiciones adicionales sobre la geometría de la frontera del plasma. Así, en vez de \underline{C}_0 se propone como cantidad conservada

$$L = \int \rho u \, d^3x \quad (2.30)$$

donde u es la componente azimutal de la velocidad. Es fácil ver que

$$\partial_t (\rho u) = -\nabla \cdot [\rho u \underline{v} - b \underline{B}] \quad (2.31)$$

donde b es la componente azimutal del campo magnético. De (2.31) y las condiciones de frontera (2.4a) se sigue la conservación de L .

C. Campos Congelados.

Primero se considera el caso más simple de la ley de Ohm,

$$\underline{E} = -\underline{v} \times \underline{B} \quad (2.32)$$

que gracias a la ley de Faraday, (2.1b), y a la ecuación de continuidad, (2.1c), conduce a

$$D_t (\rho^{-1} \underline{B}) = (\rho^{-1} \underline{B}) \cdot \nabla \underline{v} \quad (2.33)$$

que es la condición de líneas de campo congeladas. Este es el caso en la MHD ideal. En esas expresiones la velocidad es la del centro de masa del sistema ion-electrón en la aproximación $n_e \approx n_i = n$ y considerando el límite $\mu \rightarrow 0$. Dicho de otra manera: el flujo de masa (representada básicamente por iones) arrastra consigo a las líneas del campo magnético.

Si en la ley de Ohm se incluye el término de Hall, (2.1d), y se

admiten las suposiciones señaladas arriba, en vez de (2.33) tendremos

$$\partial_t \underline{B} = \nabla \times (\underline{v}^e \times \underline{B}) \quad (2.34)$$

donde \underline{v}^e es la velocidad de los electrones que está dada por (1.9); es decir, las líneas del campo magnético en MHDH ideal están congeladas al flujo de electrones. Se tiene la expresión análoga a (2.33) pero en vez de \underline{v} se tiene \underline{v}^e . Sin embargo, las líneas de vorticidad generalizada están congeladas al flujo de iones cuando el plasma es isentrópico o se tiene una distribución isotérmica como puede verse de (2.13b). Esto aclara más el punto tratado en la Nota A pues en (2.13b) $T \underline{v}_s$ tiene el efecto de un término tipo Coriolis.

D. Representación de Clebsch.

En este trabajo el interés principal se centra en las configuraciones axisimétricas y por ello se usarán las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) con $\partial_\theta := \partial/\partial\theta = 0$. En tal situación la representación de Clebsch para el campo magnético es

$$\underline{B}(r, z, t) = \nabla \psi \times \nabla \theta + b \nabla \theta \quad (2.35)$$

y para el flujo de masa

$$\underline{v}(r, z, t) = \nabla \varphi \times \nabla \theta + u \nabla \theta + \nabla \xi \quad (2.36)$$

en las cuales $\psi(r, z, t)$ es la función de flujo magnético poloidal y $\varphi(r, z, t)$ la función de corriente poloidal, además

$$b(r, z, t) = r B_\theta, \quad u(r, z, t) = r v_\theta, \quad B_\theta = \underline{e}_\theta \cdot \underline{B}, \quad v_\theta = \underline{e}_\theta \cdot \underline{v} \quad (2.37)$$

La compresibilidad (resp. incompresibilidad) se determina

con $\xi(r, z, t)$ a través de $\nabla^2 \xi \neq 0$ (resp. $\nabla^2 \xi = 0$) usando las condiciones de Neumann adecuadas.

La densidad de corriente, tomando el rotacional de (2.35), es

$$\underline{J}(r, z, t) = -\Delta^* \psi \underline{\nabla} \theta + \underline{\nabla} b \times \underline{\nabla} \theta \quad (2.38)$$

en donde Δ^* es el operador elíptico de Grad-Shafranov

$$\Delta^* \cdot := r^2 \nabla \cdot (F^2 \cdot) = r [F^1(\cdot), r]_{,r} + [\cdot, z]_{,z} \quad (2.39)$$

Asimismo,

$$\underline{J} \times \underline{B} = -F^2 \{ \Delta^* \psi \underline{\nabla} \psi + [b, \psi] \hat{\underline{e}} + \underline{\nabla} b^2 / 2 \} \quad (2.40)$$

donde $[,]$ denota el paréntesis de Poisson en las coordenadas r, z :

$$[b, \psi] := \frac{\partial b}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \hat{\underline{e}} \cdot \underline{\nabla} \psi \times \underline{\nabla} b \quad (2.41)$$

(2.40) es la representación axisimétrica de la densidad de fuerza magnética.

En forma análoga, a partir de (2.36), se obtienen

$$\underline{\omega} = -\Delta^* \varphi \underline{\nabla} \theta + \underline{\nabla} u \times \underline{\nabla} \theta \quad (2.42a)$$

$$\underline{v} \times \underline{\omega} = r^2 [\Delta^* \varphi \underline{\nabla} \varphi + u \underline{\nabla} u] + \Delta^* \varphi \underline{\nabla} \theta \times \underline{\nabla} \xi - (\underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v}) \underline{\nabla} \theta \quad (2.42b)$$

La transformación definida por (2.35, 36) pone a las ecuaciones (2.1a-e) en forma axisimétrica

$$\partial_t \underline{v} = \underline{v} \times \underline{\omega} - \underline{\nabla} (\frac{v^2}{2} + h) + T \underline{\nabla} \xi - F^2 \bar{r}^{-1} \{ \Delta^* \psi \underline{\nabla} \psi + \hat{\underline{e}} [b, \psi] + \underline{\nabla} b^2 / 2 \} \quad (2.43a)$$

$$\partial_t u = -\underline{v} \cdot \underline{\nabla} u + (r \bar{r})^{-1} [\psi, b] \quad (2.43b)$$

$$\begin{aligned} \underline{E} = & -F^2(u + \frac{c_H}{a\rho} \Delta^* \psi) \nabla \psi + \{ \underline{v} \cdot \nabla \psi - \frac{c_H}{a\rho} F^1 [b, \psi] \} \nabla \theta + \\ & + b F^2 (\nabla \varphi + r^2 \nabla \theta \times \nabla \xi) - \frac{c_H}{a\rho} F^2 \nabla b^2/2. \end{aligned} \quad (2.43c)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \underline{E} = & \nabla [F^2 \{ u + \frac{c_H}{a\rho} \Delta^* \psi \}] \times \nabla \psi - \nabla \{ \underline{v} \cdot \nabla \psi - \frac{c_H}{a\rho} F^1 [b, \psi] \} \times \nabla \theta \\ & - \nabla (F^2 b) \times \nabla \varphi - \nabla b \cdot \nabla \xi \nabla \theta - b \nabla \times [\nabla \theta \times \nabla \xi] - \\ & - c_H \nabla [\frac{1}{a\rho} r^2] \times \nabla b^2/2. \end{aligned} \quad (2.43d)$$

$$\partial_t \rho = -F^1 [\varphi, \rho] - \nabla \cdot (\rho \nabla \xi) \quad (2.43e)$$

$$\partial_t S = -F^1 [\varphi, S] - \nabla \xi \cdot \nabla S \quad (2.43f)$$

La constricción $\nabla \cdot \underline{B} = 0$ se satisface idénticamente con (2.35). La ecuación para u , (2.43b), resulta de la de \underline{v} , (2.43a), tomando la componente en θ .

La ley de Faraday, (2.42d), puede descomponerse en las dos relaciones siguientes para mayor claridad

$$\partial_t \psi = -\underline{v} \cdot \nabla \psi + c_H F^1 (a\rho F^2 [b, \psi]) = -\underline{v} \cdot \nabla \psi. \quad (2.44a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (F^2 b) = & F^1 \{ [\psi, F^2 u] + [F^2 b, \varphi] \} - F^1 \{ (F^1 b \xi_r)_r + (F^1 b \xi_\theta)_\theta \} + \\ & + c_H F^1 \{ [\psi, F^2 (a\rho F^1 \Delta^* \psi)] + [(a\rho F^1 F^2 b^2/2)] \}. \end{aligned} \quad (2.44b)$$

Aquí $\xi_r := \frac{\partial \xi}{\partial r}$, etc. En (2.44a) es patente la forma en la cual la presencia del término Hall evita que las superficies magnéticas, $\psi = \text{cte.}$, sean compartidas por el flujo de masa, \underline{v} ; es decir, ya no evolucionan congeladas al flujo de iones.

Nota B. Nótese que si un campo vectorial \underline{f}_2 satisface $\nabla \cdot \underline{f}_2 = 0$ entonces

$$\nabla \times (\underline{f}_1 \times \underline{f}_2) = \nabla \cdot (\underline{f}_2 \underline{f}_1 - \underline{f}_1 \underline{f}_2) \quad (2.45)$$

que en el caso de la ley de Faraday conduce a

$$\begin{aligned} \Delta \underline{B} &= \nabla \cdot \left\{ \underline{B} \left(\psi - \frac{c_H}{a\rho} \underline{J} \right) - \left(\psi - \frac{c_H}{a\rho} \underline{J} \right) \underline{B} \right\} \\ &\equiv \nabla \cdot \left\{ \underline{B} \psi \underline{e} - \psi \underline{e} \underline{B} \right\} \end{aligned}$$

Luego,

$$\Delta (\underline{A} \cdot \underline{B}) = -\nabla \cdot \left\{ \Phi \underline{B} + (\underline{A} \cdot \underline{B}) \left(\psi - \frac{c_H}{a\rho} \underline{J} \right) - \underline{A} \cdot \left(\psi - \frac{c_H}{a\rho} \underline{J} \right) \underline{B} \right\}$$

que es (2.9) haciendo uso de (2.1d) y (1.9).

Considerando (2.35) puede proponerse para el potencial vectorial, \underline{A} , la representación de Glebsch siguiente

$$\underline{A}(\underline{r}, z, t) = \psi \underline{e}_0 + \nabla \phi \times \underline{e}_z \quad (2.46)$$

donde $\underline{e}_z(\underline{r}, z, t)$ determina la componente toroidal del campo magnético vía

$$\underline{b} := r^2 \nabla \cdot (\nabla^2 \underline{e}_z) \quad (2.47)$$

Luego,

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = 2r^2 b \psi - \nabla \cdot (\nabla^2 \psi \underline{e}_z) \quad (2.48)$$

que junto con

$$\underline{e}_z \cdot \underline{n} \Big|_{\partial D} = 0 \quad (2.49)$$

como condición de frontera permite obtener una forma equivalente para C_1 ,

$$C_1 = \int_D 2r^2 b \psi \, d^3x \quad (2.50)$$

Debe señalarse que en forma análoga a lo que ocurre en MHD ideal (Almequer et al. (1993)) en la MHDH ideal también se tiene la conservación de la helicidad magnética pesada donde la función de peso depende de ψ , i.e.

$$C_1 = \int_D F(\psi) \underline{A} \cdot \underline{B} d^3x \quad (2.51)$$

y cuya verificación es directa haciendo uso de las condiciones de frontera ya mencionadas.

Nótese lo siguiente

$$\underline{\nabla} \psi \cdot \underline{B} = 0 \quad (2.52a)$$

$$\underline{\nabla} \psi \cdot \underline{J} = F'[\psi] \quad (2.52b)$$

$$\underline{\nabla} \psi \cdot \underline{v} = \underline{\nabla} \psi \cdot \{F'[\psi] \underline{v} + \underline{\nabla} \psi \cdot \underline{\nabla} \psi\} \quad (2.52c)$$

de donde resulta que \underline{B} y \underline{J} compartirán las superficies magnéticas si y sólo si b es cantidad de superficie, $b(\psi)$, que equivale a $[b, \psi] = 0$. Esto además aseguraría que también serían compartidas por el flujo de iones, debido a (2.43b) y (2.44a),

$$\partial_t u = -\underline{v} \cdot \underline{\nabla} u \quad (2.53a)$$

$$\partial_t \psi = -\underline{v} \cdot \underline{\nabla} \psi \quad (2.53b)$$

y también por s porque es transportada por \underline{v} como puede verse de (2.1e).

Nota C. En MHDH ideal, a diferencia del caso en MHD ideal (op.cit.), no se tiene la conservación de L pesada pues

$$\partial_t [\rho u F(\psi)] = -\underline{\nabla} \cdot \{F(\psi) (\rho u \underline{v} - b \underline{B})\} - \frac{c_H}{a r} F'(\psi) u [\psi, b] \quad (2.54)$$

donde $F(\psi)$ es una función arbitraria bien comportada y $F' := dF/d\psi$; de manera que esto no tiene sentido a menos que $F = \text{cte.}$ o $b(\psi)$. En el primer caso se reduciría a (2.30) y en el segundo sería una suposición, hasta este punto, físicamente sin razón de ser.

NOTAS.

(1) Dicha función ψ en el caso $\psi = \text{cte.}$ define las superficies magnéticas.

CAPITULO 3.

ESTADOS DE EQUILIBRIO.

A. El Principio Variacional.

En este capítulo se determinarán las relaciones que satisfacen las variables físicas cuando se consideran los valores extremales de la funcional de energía. Los valores de las variables físicas asociados a los puntos críticos de la funcional de energía sujeta a las constricciones señaladas en el capítulo anterior corresponden a los estados de equilibrio; que efectivamente es así se demostrará posteriormente.

Las expresiones para los estados de equilibrio relativos se obtienen igualando a cero la primera variación de la funcional de energía; si existen constricciones a la dinámica del sistema se considera la primera variación de la funcional de energía modificada, es decir la de la funcional de energía que incluye las constricciones vía los multiplicadores de Lagrange. Si H es la funcional de energía y C denota las constricciones, el principio variacional (tipo Hamilton) que se propone es

$$\delta H_c = 0 \quad (3.1)$$

donde

$$H_c := H + C \quad (3.2a)$$

$$\delta H_c := D H_c (p_e, s_e, v_e, A_e) \cdot (\delta p, \delta s, \delta v, \delta A) \quad (3.2b)$$

y aquí " \cdot " denota un producto interior en un espacio de matrices adecuado al problema, las derivadas involucradas son derivadas funcionales.

Para Q pueden tomarse, como usualmente se hace, un conjunto de constantes, los multiplicadores de Lagrange, que pesan a los invariantes integrales del sistema. En algunas ocasiones en su lugar pueden introducirse funciones de peso que tengan valores bien definidos sobre una familia de superficies (por ejemplo, sobre las magnéticas) y el principio variacional así formulado enriquece notablemente la descripción. Empero, como se mostró en el capítulo anterior, a diferencia de lo que ocurre en MHD ideal en MHDH ideal las superficies magnéticas ya no son compartidas por \underline{J} , \underline{v} y \underline{v}^e sino que \underline{B} , \underline{J} y \underline{v}^e desacompanan sus superficies de las correspondientes al flujo de masa, \underline{v} ; entonces, no existe una familia única de superficies de referencia para la evolución dinámica de las variables físicas involucradas; así, no es posible pesar todas las cantidades de esa manera. Sin embargo, las cantidades conservadas que están directamente relacionadas con las superficies magnéticas ($\Psi =$ cte.) pueden pesarse con una funcional de ellas, por ejemplo, la helicidad magnética (Cfr. ec. (2.51)).

Las funcionales de energía constreñidas, usando el hamiltoniano dado por (2.2a), son

$$H_c = \int_D \left\{ \rho \frac{v^2}{2} + \rho e + \frac{B^2}{2} + \rho \Phi(s) + F(\psi) \underline{A} \cdot \underline{B} + \lambda_1 \underline{v}^* \cdot \underline{\omega}^* + \lambda_2 r \rho \hat{\phi} \cdot \underline{v} \right\} d^3x. \quad (3.3a)$$

si $\underline{v}^e \cdot \underline{\omega}^* = 0$, y

$$H_c = \int_D \left\{ \rho \frac{v^2}{2} + \rho e + \frac{B^2}{2} + \rho (\lambda_2 \Omega + G(\Omega, s)) + F(\psi) \underline{A} \cdot \underline{B} + \lambda_2 r \rho \hat{\phi} \cdot \underline{v} \right\} d^3x. \quad (3.3b)$$

cuando $\underline{v}^e \cdot \underline{\omega}^* \neq 0$; aquí las λ_i ($i=1,2,3$) son los multiplicadores de Lagrange.

B. Estados de Equilibrio.

En una descripción hamiltoniana la evolución temporal de una

función, F , de las variables dinámicas, η , del sistema está dada por

$$\partial_t F(\eta) = \{H, F(\eta)\} \quad (3.4)$$

donde H es el hamiltoniano correspondiente y $\{, \}$ es paréntesis de Poisson adecuado. Cuando se trata de una constante de movimiento, G , se tiene

$$\partial_t G = \{H, G\} = 0 \quad (3.5)$$

También se tienen Casimires ⁽¹⁾ que se considerarán en detalle en el siguiente capítulo.

Si η_c denota una variable dinámica en el estado de equilibrio relativo satisface

$$\partial_t \eta_c = \{H_c, \eta_c\} = 0 \quad (3.6a)$$

cuando se incluyen las constricciones. Nótese que $\{H_c, G\} = 0$.

Tener (3.6a) equivale a

$$\delta H_c|_c := D H_c(\eta_c) \cdot \delta \eta = 0 \quad (3.6b)$$

la cual produce las ecuaciones que describen a los estados de equilibrio relativos.

Se examinarán, separadamente, los dos casos asociados a los dos posibles H_c (según se use (3.3a) ó (3.3b)):

(i) Vorticidad generalizada isentrópica, $\nabla_{\perp} \cdot \underline{\omega}^* = 0$. En este caso la primera variación de H_c (usando (3.3a)), de acuerdo con (3.1), conduce a

$$\delta H_c|_c = \int_D \{ \delta \underline{v} \cdot (\rho_c \underline{v}_c + 2\lambda_1 \underline{\omega}_c^* + \lambda_2 r \underline{e}_z) +$$

$$\begin{aligned}
& + \delta p \cdot \left(\frac{v_e^2}{2} + e_e + p_e p_e^{-1} + \Phi(r_e) + \lambda_2 r_e \hat{e} \cdot v_e \right) + p_e (T_e + \Phi(r_e)) \delta S \\
& + \left[\nabla \theta \cdot \left(\underline{J} + 2\lambda_1 \frac{a}{c_H} \underline{v}_e^* \right) + 2F^2 b_e F(\psi_e) + F'(\psi_e) (\underline{A}_e \cdot \underline{B}_e + \right. \\
& \left. + F^2 \underline{C}_e \cdot \nabla \psi_e \right] \delta \psi + \delta \underline{C}_e \cdot \left[-F^2 \nabla (r^2 \nabla \theta \cdot (\underline{B}_e + 2\lambda_1 \frac{a}{c_H} \underline{v}_e^*)) + \right. \\
& \left. + 2\psi_e F(\psi_e) + F^2 \psi_e F'(\psi_e) \nabla \psi_e \right] \delta \underline{C}_e + \\
& + \oint_{\partial D} \underline{M} \cdot \left\{ \left[\nabla \theta \times (\underline{B}_e + \lambda_1 \frac{a}{c_H} \underline{v}_e^*) - F^2 F(\psi_e) \underline{C}_e \right] \delta \psi + \right. \\
& \left. + \left[\nabla \theta \cdot (\underline{B}_e + \lambda_1 \frac{a}{c_H} \underline{v}_e^*) + F^2 \psi_e F(\psi_e) \right] \delta \underline{C}_e + \right. \\
& \left. + \lambda_1 \delta \underline{v} \times \underline{v}_e^* + \nabla \theta \cdot \left[-\lambda_1 \left(\frac{a}{c_H} \right)^2 \nabla \theta \cdot \underline{C}_e + \lambda_1 \frac{a}{c_H} \underline{v}_e \cdot \delta \underline{C}_e \right] \right\} d^2 x = 0. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

La integral de superficie se anula admitiendo las siguientes condiciones a la frontera

$$\underline{\hat{M}} \cdot \nabla \theta \Big|_{\partial D} = 0 \quad (3.8a)$$

$$\delta \psi \Big|_{\partial D} = 0 \quad (3.8b)$$

$$\delta \underline{C}_e \cdot \underline{\hat{M}} \Big|_{\partial D} = 0 \quad (3.8c)$$

$$\underline{\hat{M}} \times \delta \underline{v} \Big|_{\partial D} = 0 \quad (3.8d)$$

La primera condición es consecuencia de la ortogonalidad de los vectores; la segunda y la tercera, (3.8b,c), se tienen debido a que la dinámica misma debe preservar el flujo (magnético). (3.8d) refleja la condición física admisible, en la frontera, de un flujo que está en contacto con una frontera rígida.

Entonces los estados de equilibrio correspondientes a la condición de vorticidad generalizada isentrópica están dados (admitiendo la independencia de las variaciones entre sí) por

$$\delta\mathcal{E}: \frac{1}{2} v_e^2 + e_e + p_e \rho_e^{-1} + \Phi(s_e) + \lambda_2 r v_e \cdot \hat{\Phi} = 0 \quad (3.9a)$$

$$\delta s: \rho_e (\tau_e + \Phi'(s_e)) = 0 \quad (3.9b)$$

$$\delta \mathcal{V}: \rho_e v_e + 2\lambda_1 \omega_e^* + \lambda_2 r \rho_e \hat{\Phi} = 0 \quad (3.9c)$$

$$\delta \mathcal{V}: \nabla \cdot [\underline{J}_e + 2\lambda_1 \frac{a}{c_H} \omega_e^*] + 2F^2 b_e F(\psi_e) + (A_e B_e + F^2 \underline{G}_e \cdot \nabla \psi_e) F'(\psi_e) = 0. \quad (3.9d)$$

$$\delta \underline{G}: \nabla [r^2 \nabla \cdot (B_e + 2\lambda_1 \frac{a}{c_H} v_e^*) + 2\psi_e F(\psi_e)] - \psi_e F'(\psi_e) \nabla \psi_e = 0 \quad (3.9e)$$

donde $\hat{\Phi}(s) := d\Phi/ds$. Nótese que las expresiones (3.9d,e) pueden tenerse en una sola, a saber

$$\delta \mathcal{A}: \underline{J}_e + 2\lambda_1 \frac{a}{c_H} \omega_e^* + 2F(\psi_e) B_e = -\psi_e F'(\psi_e) B_e \quad (3.10)$$

de la cual es claro que

$$(\underline{J}_e + 2\lambda_1 \frac{a}{c_H} \omega_e^* + 2F(\psi_e) B_e) \cdot \nabla \psi_e = 0.$$

Por otra parte, las condiciones de frontera (3.8b,c) son equivalentes a

$$\delta \mathcal{A} \times \hat{n} \Big|_{\partial D} = 0 \quad (3.11)$$

(3.9a) hace las veces de una ecuación de Bernoulli donde λ_2 es una rapidez angular constante. En (3.9b), para $\rho_e \neq 0$, se tiene $\tau_e = -\Phi'(s_e)$; luego, en cierto sentido, $\Phi(s_e)$ debe estar relacionada con $e(\rho_e, s_e)$ pues $\tau_e = e_{s_e}(\rho_e, s_e)$, (2.1f). (3.9c) muestra el acoplamiento del

flujo de masa con la vorticidad, el campo magnético y la vorticidad inducida por el término $\lambda_2 \hat{e}$ en torno al eje z y el cual asegura la conservación del momento angular; i.e.

$$r^{-1}(\underline{v}_e + 2\lambda_1 r_e^{-1} \underline{\omega}_e^*) \cdot \hat{e} = -\lambda_2 = \text{cte.}$$

En (3.10) la densidad de corriente eléctrica es antiparalela al campo magnético hasta dos términos: uno que corresponde a la densidad de corriente inducida por la vorticidad del fluido, $-2\lambda_1 \frac{e}{c_1} \underline{\omega}_e$, y otro asociado a la presencia de la función de peso $F(\psi)$, $-\psi_e F'(\psi) \underline{E}_e$. (3.10) debido a las definiciones de \underline{J} , $\underline{\omega}$ y a la axisimetría implica $\nabla \cdot \underline{E} = 0$ y esto, junto con (3.9c), lleva a $\nabla \cdot (r_e \underline{v}_e) = 0$.

Para examinar el sentido físico del multiplicador de Lagrange λ_2 se removerá la conservación del momento angular, $\lambda_2 = 0$; de (3.9c) resulta

$$\lambda_1 = - \frac{r_e \underline{v}_e \cdot \underline{\omega}_e^*}{2|\underline{\omega}_e^*|^2} \quad (3.12)$$

i.e. constreñir la helicidad total (cuando $\lambda_2 = 0$) tiene sentido si al menos $\underline{\omega}_e^* \cdot \underline{v}_e \neq 0$ con $r_e \neq 0$ y $\underline{v}_e \cdot \underline{\omega}_e^* \neq 0$.

Si se remueve la conservación de la helicidad total, $\lambda_2 = 0$, el flujo será estático si $\lambda_2 = 0$ ó incompresible si $\lambda_2 \neq 0$. Si se deja libre la helicidad magnética, $F = 0$, \underline{J}_e estará dada básicamente por la vorticidad generalizada, $\underline{\omega}_e^*$, y, en consecuencia, será isentrópica, $\underline{J}_e \cdot \underline{v}_e = 0$. En este caso se tendrá una 'desviación' del campo "libre de fuerzas" debido a $2\lambda_1 \frac{e}{c_1} \underline{\omega}_e$; este comportamiento es exclusivo de la MHDH ideal pues incluso la relación $\underline{J}_e \sim \underline{B}_e$ es del orden c_H^{-2} ; el campo libre de fuerza, en esta situación, sólo será posible si $\underline{\omega}_e = 0$ (aun cuando $F \neq \text{cte.}$).

Un resultado particular de los resultados obtenidos se tiene cuando $F(\psi) = \lambda = \text{cte.}$; esto sólo modifica la expresión (3.10) que se convierte en

$$\underline{J}_e + 2\lambda_1 \frac{a}{c} \underline{\omega}_e^* + 2\lambda \underline{B}_e = 0 \quad (3.13)$$

Cuando se deja libre el momento angular, $\lambda_2 = 0$, y se usa (3.12) en (3.13) resulta

$$\lambda = \frac{a \rho_0}{2c} \left(\underline{v}_e - \frac{\underline{\omega}_e^* \times (\underline{v}_e \times \underline{\omega}_e^*)}{|\underline{\omega}_e^*|^2} \right) \cdot \frac{\underline{B}_e}{|\underline{B}_e|^2} \quad (3.14)$$

Luego (en este caso), el mantener la helicidad magnética como cantidad conservada requiere que $\left(\underline{v}_e - \frac{\underline{\omega}_e^* \times (\underline{v}_e \times \underline{\omega}_e^*)}{|\underline{\omega}_e^*|^2} \right) \cdot \underline{B}_e \neq 0$ con $\rho \neq 0$ y $\underline{B}_e \neq 0$. Si $\lambda_2 = 0$ (i.e. no se usa la restricción de la helicidad total) $\lambda \neq 0$ siempre que $\underline{J}_e \neq 0$ y se tratará de un estado de equilibrio de tipo "libre de fuerzas" como puede verse de (3.13) (Nótese de (3.10) que en el caso $\lambda_1 = 0$ se tiene una situación análoga aun cuando $F(\psi) \neq \text{cte.}$, entonces $2F(\psi) + \psi F'(\psi) = -\frac{\underline{J}_e \cdot \underline{B}_e}{|\underline{B}_e|^2}$ si $\underline{B}_e \neq 0$.) Otra situación en la cual se tiene configuración libre de fuerza es cuando $\underline{\omega}_e = 0$ (por ejemplo, cuando no hay flujo, $\underline{v}_e = 0$) incluso teniendo $\lambda_1, \lambda \neq 0$.

Nota A. Si en (3.3a) no se fija restricción sobre la entropía específica, se remueve la conservación del momento angular ($\lambda_2 = 0$), se considere que la densidad de energía interna es pequeña respecto a la cinética y a la magnética, se supone que el plasma es incompresible, $\rho = \rho_0 = \text{cte.}$, y se admite, como caso particular, $F(\psi) = \lambda = \text{cte.}$ se obtendrá

$$H'_0 = \int_D \left\{ \rho_0 \frac{v^2}{2} + \frac{B^2}{2} + \lambda \underline{A} \cdot \underline{B} + \lambda_1 \underline{v} \times \underline{\omega} \right\} d^3x \quad (3.15)$$

que dará lugar, con $\delta \underline{v}$ y $\delta \underline{A}$ independientes, a las ecuaciones

$$\rho_0 \underline{v}_e = -2\lambda_1 \underline{\omega}_e^* \quad (3.16a)$$

$$\underline{J}_e = -2\lambda \underline{B}_e - 2\lambda_1 \frac{a}{c} \underline{\omega}_e^* \quad (3.16b)$$

usando (3.6b) y las condiciones de frontera arriba aludidas. De esas expresiones es claro que el no incluir ρe ni una restricción sobre la entropía equivale a perder la ecuación de Bernoulli. Así, se ha recuperado la situación estudiada por Turner (1986) pues de (3.16) se obtienen

$$\tilde{\nabla} \times (\underline{\omega}_e + \underline{\omega}_{ce}) = \frac{1}{\tilde{\lambda}_1} \underline{\omega}_e \quad (3.17a)$$

$$\tilde{\nabla} \times \underline{\omega}_{ce} = (\tilde{\lambda} + \tilde{\lambda}_1) \underline{\omega}_{ce} + \tilde{\lambda}_1 \underline{\omega}_e. \quad (3.17b)$$

donde $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\lambda}_1$ son los escalamientos adecuados para ∇ , λ y λ_1 , respectivamente. $\underline{\omega}_{ce}$ es la frecuencia de giro cuando el valor del campo magnético es el del estado de equilibrio relativo, $\underline{\omega}_{ce} = \frac{e}{cH} \underline{B}_e$. Esas dos expresiones pueden ponerse en una sola

$$\tilde{\nabla} \times (\underline{\omega}_e + (1+\alpha) \underline{\omega}_{ce}) = (\tilde{\lambda}_1 \alpha + \frac{1}{\tilde{\lambda}_1}) \underline{\omega}_e + \alpha (\tilde{\lambda} + \tilde{\lambda}_1) \underline{\omega}_{ce}. \quad (3.18)$$

y si α_{\pm} denota las raíces de la ecuación cuadrática

$$\tilde{\lambda}_1 \alpha + \frac{1}{\tilde{\lambda}_1} = \alpha \left(\frac{\tilde{\lambda} + \tilde{\lambda}_1}{1 + \alpha} \right) \quad (3.19)$$

(3.18) puede reescribirse como

$$\tilde{\nabla} \times \underline{Z}_{\pm} = \mu_{\pm} \underline{Z}_{\pm} \quad (3.20)$$

donde

$$\underline{Z}_{\pm} := \underline{\omega}_e + (1 + \alpha_{\pm}) \underline{\omega}_{ce} \quad (3.21)$$

$$\mu_{\pm} := \left(\frac{\tilde{\lambda} + \tilde{\lambda}_1}{1 + \alpha_{\pm}} \right) \alpha_{\pm}. \quad (3.22)$$

i.e. μ_{\pm} son los eigenvalores asociados al "campo libre de fuerza"

representado por Z_{\pm} . Las soluciones a (3.17a, b) son de la forma

$$\underline{\omega}_e = \frac{(1+\alpha_-)Z_+ - (1-\alpha_+)Z_-}{\alpha_- - \alpha_+} \quad (3.23a)$$

$$\underline{\omega}_{ce} = \frac{Z_+ - Z_-}{\alpha_+ - \alpha_-} \quad (3.23b)$$

suponiendo conocidas a Z_{\pm} . Esta situación tiene análogo con el problema semejante en MHD ideal; en el caso particular de geometría cilíndrica, con las condiciones de frontera adecuadas, Z_{\pm} es de la forma $aJ_0 + bJ_1$ donde J_0 y J_1 son las funciones de Bessel de primera especie de orden cero y uno, respectivamente.

Ahora se mostrará que efectivamente las expresiones (3.9a-c) y (3.10) corresponden a los estados de equilibrio relativo. De (3.9a, b),

$$\underline{v}_e \cdot \nabla \underline{v}_e + \underline{v}_e \times \underline{\omega}_e = -\lambda_2 \nabla u_e - \rho_e^{-1} \nabla p_e \quad (3.24a)$$

y de (3.9c) pueden obtenerse

$$\nabla \cdot (\rho_e \underline{v}_e) = 0 \quad (3.24b)$$

$$\rho_e \underline{v}_e \times \underline{\omega}_e = -2\lambda_1 \frac{a}{c_H} \underline{B}_e \times \underline{\omega}_e - \lambda_2 r \rho_e \hat{\phi} \times \underline{\omega}_e \quad (3.24c)$$

$$\rho_e \underline{v}_e \times \underline{B}_e = -2\lambda_1 \underline{\omega}_e \times \underline{B}_e - \lambda_2 r \rho_e \hat{\phi} \times \underline{B}_e \quad (3.24d)$$

usando la definición de $\underline{\omega}^*$, (2.12). (3.10) conduce a

$$\underline{J}_e \times \underline{B}_e = -2\lambda_1 \frac{a}{c_H} \underline{\omega}_e \times \underline{B}_e \quad (3.24e)$$

$$\underline{J}_e \times \underline{\omega}_e = -\left\{ 2F(\psi_e) + \psi_e F'(\psi_e) + 2\lambda_1 \left(\frac{a}{c_H}\right)^2 \right\} \underline{B}_e \times \underline{\omega}_e \quad (3.24f)$$

Poniendo (3.24c, e) en (3.24a) y haciendo uso de (2.42a) obtenemos

$$\rho_e \nabla_e \cdot \nabla \psi_e = - \nabla \rho_e + \mathbf{J}_e \times \mathbf{B}_e \quad (3.25)$$

La ley de Ohm se obtiene de (3.24d,e) y (2.35),

$$-\nabla_e \times \mathbf{B}_e + \frac{c_H}{a\mu_e} \mathbf{J}_e \times \mathbf{B}_e = \lambda_2 \nabla \psi_e \quad (3.26)$$

y la " ley de Faraday estacionaria "

$$\nabla_e \cdot (-\nabla_e \times \mathbf{B}_e + \frac{c_H}{a\mu_e} \mathbf{J}_e \times \mathbf{B}_e) = 0 \quad (3.27)$$

Finalmente, el producto interior de $\nabla \psi_e$ con (3.9c) considerando (2.15) y la axisimetría nos da

$$\nabla_e \cdot \nabla \psi_e = 0 \quad (3.28)$$

Luego, (3.24b) y (3.25-28) corresponden a las ecuaciones (2.1a-e) tomando $\partial_t(\)_e = 0$; es decir, recuperamos las ecuaciones para el estado de equilibrio relativo. Que \mathbf{B}_e tiene divergencia nula fue mostrado previamente.

Nótese que (3.26) indica la presencia de un potencial eléctrico estacionario, ψ_e , que es cantidad de superficie y depende del multiplicador de Lagrange asociado a la conservación del momento angular, λ_2 , $\nabla \psi_e = -\lambda_2 \nabla \psi_e$ i.e.

$$\frac{d}{dt} \psi_e = -\lambda_2 = \text{cte.} \quad (3.29a)$$

cuya integración da

$$\psi_e = -\lambda_2 \psi_e + \text{cte.} \quad (3.29b)$$

En los cálculos realizados para obtener (3.9a-c) y (3.10) fue necesario asumir la norma radiativa para hacer uso de la condición de frontera (2.6b). Luego, la norma radiativa junto con (3.29b) implica $\psi_e = \text{cte.}$ en toda la región de interés, D, y para todo

tanto si se desea mantener la conservación del momento angular azimutal en C, $\lambda_2 \neq 0$, pero en tal caso el campo magnético sólo puede ser toroidal en el estado de equilibrio. Sin embargo, $\psi_c = \text{cte.}$ en todo el plasma es de poco interés, entonces será mejor tomar $\lambda_2 = 0$ para tener situaciones de mayor relevancia.

(ii) Para el caso $\nabla \underline{s} \cdot \underline{\omega}^* \neq 0$ el hamiltoniano en cuestión está dado por (3.30). Según se discutió en el inciso anterior se tomará de entrada $\lambda_2 = 0$ que es la situación de interés físico. Después de realizar los cálculos, que son directos, se tiene para la primera variación del hamiltoniano correspondiente ($\lambda_2 = 0$):

$$\begin{aligned}
 \delta H_c|_c = & \int_D \left\{ \left(\frac{v_c^2}{2} + c_c + \rho_c \rho_c^{-1} + G_c - \rho_c G_{\rho_c} \right) \delta \rho + [\rho_c (T_c + G_{\omega}) - \right. \\
 & - G_{\rho_c \rho_c} \underline{\omega}_c^* \cdot \nabla \rho_c - \rho_c G_{\rho_c s_c} \rho_c] \delta s + \\
 & + (\rho_c v_c + G_{\rho_c \rho_c} \nabla \rho_c \times \nabla s_c) \cdot \delta \underline{v} + \\
 & + \nabla \cdot \left[\underline{J}_c + \frac{q}{c_H} G_{\rho_c \rho_c} \nabla \rho_c \times \nabla s_c + 2 F(\psi_c) \underline{B}_c + (\Delta \psi_c \underline{B}_c + \right. \\
 & + F^2 \underline{C}_c \cdot \nabla \psi_c) F(\psi_c) \delta \psi + F^2 [-\nabla (r^2 \nabla \theta \cdot \underline{B}_c + 2 \psi_c F(\psi_c)) + \\
 & + \psi_c F'(\psi_c) \nabla \psi_c] \cdot \delta \underline{C} \left. \right\} d^3x + \\
 & + \int_{\partial D} \hat{m} \cdot \left\{ (\nabla \theta \times \underline{B}_c - F^2 F(\psi_c) \underline{C}_c) \delta \psi + (\nabla \theta \cdot \underline{B}_c + F^2 \psi_c F(\psi_c)) \right. \\
 & \left. \underline{C}_c + (\lambda_3 + G_{\rho_c}) [\underline{\omega}_c^* \delta s + (\delta \underline{v} + \frac{q}{c_H} \nabla \theta \delta \psi) \times \nabla s_c] \right\} d^2x \\
 = & 0. \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

La integral de superficie se anula gracias a las condiciones de frontera (2.4a) y (3.8) si además se admite la condición adicional

$$\lambda_3 + G_{\rho_c}|_{\partial D} = 0 \tag{3.31}$$

(en (3.30), $G_{\rho_c} := \partial G / \partial \rho$ y $G_s := \partial G / \partial s$).

Los estados de equilibrio correspondientes están dados, admitiendo la independencia de las variaciones involucradas, por

$$\delta p: \frac{v_e^2}{2} + e_e + p_e p_e^{-1} + G_e - \Omega_e G_{\Omega_e} = 0 \quad (3.32a)$$

$$\delta s: -p_e(T_e + G_{s_e}) - G_{\Omega_e \Omega_e} \frac{\omega_e^* \cdot \nabla \Omega_e}{c} - p_e G_{\Omega_e s_e} \Omega_e = 0 \quad (3.32b)$$

$$\delta v: p_e \nabla_e + G_{\Omega_e \Omega_e} \nabla \Omega_e \times \nabla s_e = 0 \quad (3.32c)$$

$$\delta \psi: \nabla \theta \cdot \left\{ \underline{J}_e + \frac{a}{c_H} G_{\Omega_e \Omega_e} \nabla \Omega_e \times \nabla s_e + 2F(\psi_e) \underline{B}_e \right\} + \\ + [A_e \cdot \underline{B}_e + r^2 \underline{C}_e \cdot \nabla \psi_e] F'(\psi_e) = 0. \quad (3.32d)$$

$$\delta \underline{C}_e: -\nabla(r^2 \nabla \theta \cdot \underline{B}_e + 2\psi_e F(\psi_e)) + \psi_e F'(\psi_e) \nabla \psi_e = 0 \quad (3.32e)$$

En forma análoga a la del inciso anterior (3.32d,e) se pueden reescribir en una sola ecuación

$$\underline{J}_e + \frac{a}{c_H} G_{\Omega_e \Omega_e} \nabla \Omega_e \times \nabla s_e + 2F(\psi_e) \underline{B}_e = -\psi_e F'(\psi_e) \underline{B}_e \quad (3.33)$$

Es directo mostrar que estas ecuaciones corresponden a las soluciones del estado de equilibrio relativo del conjunto (2.1a-f).

De (3.33), usando la representación de Cleosch para \underline{J} , (2.38), se obtienen

$$-\delta^* \psi_e + \frac{a}{c_H} G_{\Omega_e \Omega_e} [s_e, \Omega_e] + (2F(\psi_e) + \psi_e F'(\psi_e)) b_e = 0 \quad (3.34a)$$

$$\nabla b_e + (2F(\psi_e) + \psi_e F'(\psi_e)) \nabla \psi_e = 0 \quad (3.34b)$$

Entonces, suponer $\nabla s_e \cdot \underline{\omega}_e^* \neq 0$ basta para obtener una modificación substancial de los estados de equilibrio :

- sólo es posible flujo toroidal, (3.32c), que a causa de la axi-simetría es incompresible;
- el flujo toroidal está determinado por el potencial de vortici-

dad generalizada, \mathcal{J}_e , y la entropía específica, s_e :

c) un resultado que mantiene gran analogía con el del caso MHD ideal (Cfr. Almazuer et al. (1983), Hameiri (1983)) se obtiene de (3.34b)

$$b_e = -\frac{1}{2} F(\psi_e) - F^*(\psi_e) + (\text{cte. de integración}) \quad (3.35)$$

donde

$$\frac{dF^*(\psi_e)}{d\psi_e} = F(\psi_e) \quad (3.36)$$

i.e. el flujo magnético toroidal es cantidad de superficie magnética;

d) la relación para el equilibrio de fuerzas, ecuación Grad-Shafranov-Hall, está dada por (3.34a) que junto con (3.32c) y tomando en (3.35) (cte. de integración) = 0 conduce a

$$\Delta^* \psi_e + \frac{\rho}{c_H} \rho_e \psi_e + (2F(\psi_e) + \frac{1}{2} F'(\psi_e)) (\frac{1}{2} F(\psi_e) + F^*(\psi_e)) = 0 \quad (3.37)$$

Luego, dados los perfiles de densidad y flujo toroidal esta ecuación permite, en principio, (una vez obtenida también $F^*(\psi_e)$), determinar las superficies magnéticas para el estado de equilibrio, ψ_e , dadas las condiciones de frontera pertinentes al problema. A partir de ψ_e se determinarían \underline{B}_e y \underline{J}_e usando, respectivamente,

$$\underline{B}_e = \nabla \psi_e \times \nabla \theta - (\frac{1}{2} F^*(\psi_e) + F^*(\psi_e)) \nabla \psi_e \quad (3.38a)$$

$$\underline{J}_e = -\Delta^* \psi_e \nabla \theta - (2F(\psi_e) + \frac{1}{2} F'(\psi_e)) \nabla \psi_e \times \nabla \theta \quad (3.38b)$$

de donde son inmediatas $\underline{B}_e \cdot \nabla \psi_e = 0$, $\underline{J}_e \cdot \nabla \psi_e = 0$ y $\underline{v}_e \cdot \nabla \psi_e = 0$ (esta última debida a (2.44a)) y, en consecuencia, $\underline{v}_e \cdot \nabla \psi_e = 0$ (debido a las anteriores y usando $\underline{v}_e^c = \underline{v}_e - \frac{c_H}{a^2} \underline{J}_e$). Sin embargo, puesto que \underline{v}_e sólo es toroidal la última es, debido a la axisimetría, una

identidad no garantiza que sea posible garantizar que \underline{v}_e sea continua en superficie (de hecho lo mismo se aplica a $\underline{v}_e \cdot \nabla u_e = 0$).

Un caso particular de los resultados obtenidos en este inciso, que es de gran importancia, es $F(\psi) = \lambda = \text{cte.}$. Esto sólo conduce a una modificación de (3.33),

$$\underline{J}_e + \frac{\rho}{\mu} G_{r_e r_e} \nabla \Omega_e \times \nabla \psi_e + 2\lambda \underline{B}_e = 0 \quad (3.39)$$

y en consecuencia se modificarán (3.35) y (3.37) en la siguiente forma, respectivamente,

$$b_e(\psi_e) = -2\lambda \psi_e \quad (3.40)$$

$$\Delta^* \psi_e + \frac{\rho}{\mu} \rho_e u_e + 4\lambda^2 \psi_e = 0. \quad (3.41)$$

Nota B. Según se ha mostrado, los puntos críticos de H_0 dan lugar a las relaciones de equilibrio relativo. En el caso $\underline{v}_e \cdot \underline{\omega}_e^* = 0$ (con $\lambda_e = 0$)

$$\frac{v_e^2}{2} + h_e = -\Phi(s_e) \quad (3.42a)$$

$$\underline{v}_e \times \underline{\omega}_e^* = \nabla \left(\frac{v_e^2}{2} + h_e \right) - T_e \nabla s_e = 0 \quad (3.42b)$$

$$\underline{J}_e - \frac{\rho}{\mu} \rho_e \underline{v}_e = -2\lambda \underline{B}_e := k \underline{B}_e \quad (3.42c)$$

En este sentido el caso $\underline{v}_e \cdot \underline{\omega}_e^* \neq 0$ resulta más interesante,

$$\frac{v_e^2}{2} + h_e = K(r_e, s_e) \quad (3.43a)$$

$$\underline{v}_e \times \underline{\omega}_e^* = \nabla K(r_e, s_e) - T_e \nabla s_e \quad (3.43b)$$

$$\rho_e \nu_e = \rho_e^{-1} K_{\rho_e} \nabla s_e \times \nabla \rho_e \quad (3.43c)$$

$$(\nabla K - T_e \nabla s_e) \cdot \omega_e^* = 0 \quad (3.43d)$$

donde $K_{\rho_e} := \partial K / \partial \rho_e$ y la expresión para \underline{J}_e es como la dada en (3.42), h_e es la entalpía específica definida en (2.7). Nótese que

$$K(\rho_e, s_e) = \rho_e G_{\rho_e} - G(\rho_e, s_e)$$

$$K_{\rho_e} = \rho_e G_{\rho_e \rho_e}$$

entonces $G_{\rho_e} := \partial G / \partial \rho_e$. Luego, G puede obtenerse de

$$G(\rho_e, s_e) = \rho_e \left[\int \frac{\rho_e K(\rho_e, s_e)}{\rho_e^2} d\rho_e + \bar{K}(s_e) \right] \quad (3.44)$$

donde $\bar{K}(s_e)$ es una función arbitraria; $K(\rho_e, s_e)$ es la función de Bernoulli.

C. El Tipo de las Ecuaciones MHDH ideales.

Esta sección se iniciará con un breve repaso (Chester (1971), Smirnov (1970)) de los tipos de ecuaciones en derivadas parciales. Primero considérese un sistema semilineal de segundo orden en dos variables independientes

$$A(x, y) f_{xx} + 2B(x, y) f_{xy} + C(x, y) f_{yy} + F(x, y; f, f_x, f_y) = 0 \quad (3.45)$$

donde se supone que $f(x, y)$ es diferenciable con continuidad en el dominio de interés y que las funciones A , B y C tienen, al menos, derivadas continuas hasta de segundo orden. Cuando estas últimas dependen también de f , f_x y f_y (3.45) es llamada cuasilineal. El discriminante asociado a (3.45), d , está dado por

$$d := B^2 - AC. \quad (3.46)$$

entonces,

si $d > 0$ se dice que (3.45) es de tipo hiperbólico,
 si $d = 0$ se dice que (3.45) es de tipo parabólico,
 si $d < 0$ se dice que (3.45) es de tipo elíptico.

En general, la ecuación de onda es el prototipo de hiperbólica, la del calor de la parabólica y la ecuación del potencial de la elíptica.

La ecuación de las características asociada a (3.45) es

$$A dy^2 - 2B dx \cdot dy + C dx^2 = 0$$

o, equivalentemente,

$$A dy - (B + \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0$$

$$A dy - (B - \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0$$

que deberán integrarse para determinar las superficies características asociadas al problema (En (3.48) el tipo de la ecuación interviene a través del término $\pm \sqrt{d}$). Examinando cada caso separadamente se tiene :

a) $d > 0$. En el caso hiperbólico (3.48) tiene dos soluciones reales y distintas, digamos $\varphi_1(x, y)$ y $\varphi_2(x, y)$; entonces las superficies características estarán dadas por

$$\varphi_1(x, y) = c_1, \quad \varphi_2(x, y) = c_2 \quad (3.49)$$

donde c_1 y c_2 son constantes, reales y distintas. La forma canónica de este tipo de ecuación se obtiene efectuando la siguiente transformación

$$(x, y) \mapsto (\xi, \eta) ; \quad \xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (3.50)$$

para convertir a (3.45) en

$$F_{\xi\eta} = F_1(\xi, \eta, F; F_\xi, F_\eta) \quad (3.51)$$

b) $d=0$. El tipo parabólico se caracteriza por tener sólo una familia de superficies características, reales, i.e.

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R} \quad (3.52)$$

Si se aplica la transformación (3.50) y se impone adicionalmente que $\eta(x, y)$ sea tal que

$$\partial(\xi, \eta) / \partial(x, y) \neq 0 \quad (3.53)$$

podemos convertir a (3.45) en la ecuación

$$F_{\eta\eta} = F_2(\xi, \eta, F; F_\xi, F_\eta) \quad (3.54)$$

que es la forma canónica correspondiente.

c) $d < 0$. Las ecuaciones de tipo elíptico tienen la peculiaridad de poseer características complejas

$$\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y) \in \mathbb{C} \quad (3.55a)$$

que son mutuamente conjugadas

$$\varphi_1 = \varphi_2^* \quad (3.55b)$$

Suponiendo que la forma integral de (3.48) es

$$\Phi(x, y) := \bar{\varphi}_1(x, y) + i\bar{\varphi}_2(x, y) = C \in \mathbb{C}, \quad \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2 \in \mathbb{R} \quad (3.56)$$

y haciendo

$$\xi = \bar{\varphi}_1(x, y), \quad \eta = \bar{\varphi}_2(x, y) \quad (3.57)$$

en lugar de la transformación (3.50) se obtiene para (3.45) la forma canónica

$$F_{\xi\xi} + F_{\eta\eta} = F_3(\xi, \eta, F; F_\xi, F_\eta) \quad (3.58)$$

Como ya fue mencionado, las características en el punto (x, y) están dadas por las raíces $\varphi_\pm(x, y)$ de la ecuación cuadrática $A\varphi^2 - 2B\varphi + C = 0$ para el caso lineal o semilineal; sin embargo, cuando (3.45) es cuasilineal las raíces, φ_\pm , pueden depender explícitamente de la solución así como del punto (x, y) en cuestión. Nótese que, a fin de cuentas, las curvas características para el caso semilineal son las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias $dy/dx = \varphi_\pm(x, y)$.

La forma más general de una ecuación lineal de segundo orden en n variables independientes $\underline{x} := (x_1, \dots, x_n)$, es

$$\sum_{j,k=1}^n A_{jk}(\underline{x}) F_{x_j x_k} + 2 \sum_{j=1}^n B_j(\underline{x}) F_{x_j} + C(\underline{x}) F = F(\underline{x}) \quad (3.59)$$

Las $\lambda_j(\underline{x})$, $j=1, \dots, n$, son los eigenvalores de la matriz $(A_{jk}(\underline{x}))$; si al menos una $\lambda_j = 0$ (3.59) es parabólica; si $\lambda_j \neq 0$, para toda j , es elíptica a condición de que todas tengan el mismo signo e hiperbólica si todas, salvo una, tienen el mismo signo.

En el caso de MHD ideal el sistema de ecuaciones es cuasilineal e hiperbólico y el sistema para estados de equilibrio relativo con flujo es alternadamente elíptico-hiperbólico dependiendo del número de Mach del flujo (Grad (1960), Hameiri (1983), Almaguer et al. (1988)). Sin embargo, en MHDH ideal la ecuación que caracteriza al sistema (2.1a-f) es la ley de Faraday (2.1b) la cual contiene

las derivadas parciales de orden superior; de hecho, la presencia del término Hall conlleva una modificación singular de la MHD ideal. Examinando (2.1b) se concluye que se trata de un sistema cuasilineal parabólico degenerado en las variables $\{\rho, \nu, B, J\}$; la variación espacial es hasta de segundo orden y la temporal sólo de primer orden. En consecuencia, sólo existe una familia de superficies características para este sistema. Suponiendo que esas características estén dadas por $\Psi = \text{cte.}$, si se considera un sistema de referencia cuya velocidad es la velocidad local del flujo de iones y v_{Ψ} es la rapidez de fase de la superficie que avanza entonces

$$v_{\Psi} = - \frac{1}{|\nabla\Psi|} D_t \Psi \quad (3.00)$$

Si el sistema de referencia viaja con velocidad \underline{v}° y $\Psi = \Psi(\underline{x}, t)$, $v_{\Psi} = 0$, cuándo eso es posible se mostrará en la próxima sección.

D. Discontinuidades Débiles.

En lo que sigue $\bar{\delta}f(\underline{x}, t)$ denotará un "salto" a través de la superficie característica de alguna variable $f(\underline{x}, t)$ para el sistema que describe la evolución MHDH ideal (2.1a-f). Si el observador viaja con el sistema asociado a las Ψ entonces las relaciones para los "saltos" a través de Ψ se pueden obtener con la transformación siguiente

$$\begin{bmatrix} D_t \\ \nabla \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} v_{\Psi} \bar{\delta} \\ -\hat{M} \bar{\delta} \end{bmatrix}, \quad \hat{M} := \frac{\nabla\Psi}{|\nabla\Psi|} \quad (3.01)$$

que permite obtener un sistema homogéneo de ecuaciones para $\{\bar{\delta}\rho, \bar{\delta}\nu, \bar{\delta}\nu, \bar{\delta}B, \bar{\delta}J\}$, a saber :

$$v_{\Psi} \rho \bar{\delta}\nu - \hat{M} (\nu^2 \bar{\delta}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} \bar{\delta}s) = 0 \quad (3.62a)$$

$$\begin{aligned} & (v_{\varphi} + \frac{c_H}{a\rho} \hat{n} \cdot \underline{J}) \bar{\delta} \underline{B} + (\underline{B} \cdot \hat{n} \bar{\delta} \underline{v} - \underline{B} \hat{n} \cdot \bar{\delta} \underline{v}) - \frac{c_H}{a\rho} \hat{n} \cdot \underline{B} \bar{\delta} \underline{J} + \\ & + \frac{c_H}{a\rho^2} (\hat{n} \cdot \underline{B} \underline{J} - \hat{n} \cdot \underline{J} \underline{B}) \bar{\delta} \rho = 0. \end{aligned} \quad (3.62b)$$

$$v_{\varphi} \bar{\delta} \rho - \rho \hat{n} \cdot \bar{\delta} \underline{v} = 0. \quad (3.62c)$$

$$v_{\varphi} \bar{\delta} \varepsilon = 0. \quad (3.62d)$$

$$\hat{n} \times \bar{\delta} \underline{B} = 0. \quad (3.62e)$$

$$\hat{n} \cdot \bar{\delta} \underline{B} = 0. \quad (3.62f)$$

$$\hat{n} \cdot \bar{\delta} \underline{J} = 0. \quad (3.62g)$$

Que \underline{B} es continuo a través de las superficies características resulta de (3.62e,f). Las expresiones (3.62a-d) forman un sistema lineal homogéneo para las incógnitas $\bar{\delta} \rho$, $\bar{\delta} \varepsilon$, $\bar{\delta} \underline{v}$ y $\bar{\delta} \underline{J}$ donde (3.62g) funge como constricción. Nótese que (3.62b) sólo tiene sentido para la componente perpendicular (respecto a \hat{n}); la parte perpendicular en (3.62a) implica

$$v_{\varphi} \rho \bar{\delta} \underline{v} \times \hat{n} = 0. \quad (3.63)$$

Luego, (3.62a-g) pueden reescribirse como sigue, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} v_{\varphi} (v_{\varphi}^2 - v_s^2) \\ \frac{c_H}{a\rho^2} v_{\varphi} [(\hat{n} \cdot \underline{B}) \underline{J}_1 - (\hat{n} \cdot \underline{J}) \underline{B}_1] \\ v_{\varphi} \\ 0 \\ v_{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_{\varphi} B_1 & -\frac{c_H}{a\rho} v_{\varphi} (\hat{n} \cdot \underline{B}) \\ 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\delta} \rho \\ \bar{\delta} \varepsilon \\ \bar{\delta} \underline{v} \\ \bar{\delta} \underline{J}_1 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.64)$$

donde v_g es la rapidez del sonido en el medio.

El determinante de este sistema, D , es

$$D = \frac{c_H}{\alpha} (\hat{M} \cdot \underline{B}) v_g^3 (v_g^2 - v_0^2) \quad (3.05)$$

que debe anularse para tener soluciones distintas de la trivial (i.e. discontinuidades débiles no nulas). Dicha condición se cumple si alguna de las siguientes condiciones se satisface

$$v_g^3 = 0 \quad (3.06a)$$

$$v_g^2 - v_0^2 = 0 \quad (3.06b)$$

$$\hat{M} \cdot \underline{B} = 0 \quad (3.06c)$$

Las expresiones en (3.6b) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en \underline{x} y t para $\underline{\Psi}(\underline{x}, t)$; asociado a cada igualdad existe un conjunto de discontinuidades derivable de (3.62a-d). Se examinará cada caso separadamente:

a) $v_g^3 = 0$. Aquí se tienen tres soluciones linealmente independientes que pueden dividirse en dos grupos dependiendo de si la velocidad es o no continua. Cuando es continua se obtienen

$$\bar{\delta} v = 0 \quad (3.67a)$$

$$\bar{\delta} p = -s_0 \left(\frac{\partial p / \partial s}{\partial p / \partial \rho} \right) \quad (3.67b)$$

$$\bar{\delta} s = s_0 \quad (3.67c)$$

$$\bar{\delta} \underline{J} = -\frac{s_0}{\rho} \left(\underline{J} - \frac{(\hat{M} \cdot \underline{J})}{(\hat{M} \cdot \underline{B})} \underline{B} \right) \left(\frac{\partial p / \partial s}{\partial p / \partial \rho} \right) \quad (3.67d)$$

donde s_0 es una constante arbitraria. (3.62g) se satisface automáticamente. Si $s_0 \neq 0$ se tiene el modo de entropía familiar en la hi-

drodinámica y en la MHD ideal.

Cuando la velocidad y la densidad de corriente son discontinuas se obtienen

$$\bar{\delta s} = 0 \quad (3.68a)$$

$$\bar{\delta p} = 0 \quad (3.68b)$$

$$\bar{\delta \underline{J}} = \hat{\underline{\rho}}, \quad \hat{\underline{J}} \cdot \hat{\underline{n}} = 0 \quad (3.68c)$$

$$\bar{\delta \underline{v}} = \frac{c_H}{a_P} \hat{\underline{\rho}} \quad (3.68d)$$

Es claro que existen dos maneras de satisfacer $\hat{\underline{\rho}} \cdot \hat{\underline{n}} = 0$ ($\hat{\underline{\rho}}$ es arbitrario) pues existen dos vectores $\hat{\underline{\rho}}_1, \hat{\underline{\rho}}_2$ linealmente independientes que cumplen dicha constricción, esto da lugar a dos modos isentrópicos (s y p son continuas).

b) $\underline{v}_\perp^2 - v_\perp^2 = 0$. En este caso se tienen dos conjuntos posibles de discontinuidades porque \underline{v}_\perp puede tomar los valores $\pm \underline{v}_\perp$. Aquí también se presentan modos isentrópicos pues la entropía es continua,

$$\bar{\delta s} = 0 \quad (3.69a)$$

$$\bar{\delta p} = p_0 \quad (3.69b)$$

$$\bar{\delta \underline{v}} = \frac{1}{v_\perp} \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right) \left(\frac{p_0}{p} \right) \hat{\underline{n}} \quad (3.69c)$$

$$\frac{c_H}{a_P} (\hat{\underline{n}} \cdot \underline{B}) \bar{\delta \underline{J}} = \rho_0 \left[\frac{1}{\rho v_\perp} \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right) [(\hat{\underline{n}} \cdot \underline{B}) \hat{\underline{J}} - \underline{B}] + \frac{c_H}{a_{P1}} [(\hat{\underline{n}} \cdot \underline{B}) \underline{J} - (\hat{\underline{n}} \cdot \underline{J}) \underline{B}] \right] \quad (3.69d)$$

Cuando $\underline{B} = \underline{0}$ se tienen las ondas acústicas de la hidrodinámica, sin embargo, no se recuperan las de la MHD ideal.

c) $\hat{\underline{n}} \cdot \underline{B} = 0$. Las discontinuidades asociadas a esta condición son tales

que sólo se presente discontinuidad en las componentes tangenciales (respecto a las superficies características) de la densidad de corriente

$$\overline{\delta s} = 0 \quad (3.70a)$$

$$\overline{\delta \rho} = 0 \quad (3.70b)$$

$$\overline{\delta v} = 0 \quad (3.70c)$$

$$\overline{\delta \underline{J}} = \hat{\underline{e}}, \quad \hat{\underline{m}} \cdot \hat{\underline{e}} = 0. \quad (3.70d)$$

Existen dos grupos pues existen dos $\hat{\underline{e}}$'s linealmente independientes que satisfacen (3.70d). Aparentemente existe una inconsistencia respecto a (3.66c) pues parece ser de multiplicidad uno; sin embargo existen dos componentes de \underline{B} linealmente independientes que la satisfacen, lo cual es compatible con (3.70d).

En este caso las superficies características son las magnéticas, $\psi(\underline{x}, t)$, definidas por $\nabla\psi \cdot \underline{B} = 0$; por otra parte, no aparece ninguna rapidez característica ni se presentan las ondas de Alfvén rápidas y/o lentas usuales en la MHD ideal (Grad (1960), Hameiri (1983), Almaguer et al. (1988)).

Nótese que las discontinuidades discutidas aquí son débiles en cuanto que son del orden de $\delta\psi$; así, en el límite $\delta\psi \rightarrow 0$ se tiene continuidad en la variable pero un salto finito en el gradiente de la variable en cuestión. Aquí se tomó $\overline{\delta \underline{B}} = 0$, que evita la aparición de singularidades en \underline{J} ; si se admite $\overline{\delta \underline{B}} \neq 0$ es necesario tratar discontinuidades fuertes así como corrientes superficiales y capas di polares (En tal caso también debería tratarse con ondas de choque que en el presente trabajo no se tienen contempladas).

NOTAS.

(1) Las variedades definidas tomando $C_i = \text{cte.}$, $i = 1, \dots, k$ donde k es el número de invariantes integrales, están determinadas por la

estructura de Poisson independientemente de las coordenadas y se les denomina "hojas simplécticas" ya que son las hojas de una foliación sobre el conjunto de puntos regulares.

Las funciones que son constantes sobre las hojas simplécticas (i.e. funciones de C_1, \dots, C_k) pueden también definirse en forma invariante como las funciones C tales que $\{F, C\} = 0$ para toda F continuamente diferenciable en P (el espacio dominio), $F \in \overline{C(P)}$, y son llamadas Casimires.

CAPITULO 4.

ESTRUCTURA HAMILTONIANA.

A. Introducción.

La mecánica clásica y los métodos matemáticos más recientes pueden conectarse mutuamente. Muchas ideas de la ' geometría pura ' aparecen en el estudio de la mecánica; el tratamiento usual de ésta con aquella herramienta puede simplificarse (Cfr. p. ej. Abraham y Marsden (1978)).

Las formulaciones hamiltonianas en términos de los paréntesis de Poisson canónicos, en el contexto de la descripción euleriana, de la mecánica del medio continuo se hacen con ayuda de potenciales auxiliares, los potenciales de Clebsch, que no siempre tienen un análogo físico de interpretación sencilla pero que, a pesar de ello, deben introducirse con objeto de completar la estructura hamiltoniana (Cfr. Seliger y Whitham (1968), Holm y Kupershmidt (1982,1983), Lamb (1975), Calkin (1903) e Ito (1953). En este último se parte de una densidad lagrangiana). Por otra parte, paréntesis de Poisson no canónicos han sido utilizados en el tratamiento de teorías de campo no lineales : las ecuaciones de Maxwell-Vlasov (Marsden y Weinstein (1982)), la MHD ideal (Holm y Kupershmidt (1983), Morrison y Greene (1980,1982)), el estudio de la dinámica de plasmas multifluidos (Holm y Kupershmidt (1983)), el tratamiento de la elasticidad no lineal (Holm y Kupershmidt (1983), Dzyaloshinskii y Volovik (1980)) y la formulación de la cromohidrodinámica clásica (Gibbons et al. (1982,1983)). En estos casos los paréntesis de Poisson no canónicos son indispensables para una formulación hamiltoniana en términos de variables físicas dentro de una descripción euleriana.

El problema inicial reside en cómo construir dichos paréntesis para que satisfagan la identidad de Jacobi. Esto, en general, es

un problema difícil de resolver; sin embargo, cuando los paréntesis en cuestión son lineales en sus variables es posible asociarles ál gebras de Lie adecuadas lo cual garantiza, de entrada, que satisfacen la identidad de Jacobi.

Un primer paso para determinar esos paréntesis en las variables físicas en una descripción euleriana sería mostrar que existe cierto mapeo bajo el cual la estructura hamiltoniana canónica en variables de Clebsch es compatible con una estructura no canónica expresada en términos de las variables en cuestión. Tal mapeo conectaría a las variables físicas con los potenciales de Clebsch y sus gradientes (En Holm et al. (1983) se muestra lo anterior, ahí también se discute el significado de las variables físicas adicionales que aparecen en la formulación lagrangiana (la cual es cuasicanónica)).

B. Paréntesis de Poisson No Canónicos.

a. Introducción.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales que poseen una estructura hamiltoniana son de gran importancia en la física. Por ejemplo, tal estructura se ha descubierto en casos como el de las ecuaciones de Korteweg-deVries (Gardner (1975), Zakharov y Faddeev (1972) y Lax (1975)), de las de Benjamin y Ono (Case (1979)) y en las de Benney (Kupershmidt y Manin (1977)). Además, el uso de las variables no canónicas en sistemas discretos ha sido de gran utilidad práctica (Littlejohn (1979)). Asimismo, la descripción euleriana de un fluido y la MHD ideal se han establecido como estructuras hamiltonianas⁽¹⁾ en términos de variables físicas que, sin embargo, son no canónicas (Morrison y Greene (1980, 1982)); también se ha establecido la estructura hamiltoniana para las ecuaciones de Maxwell-Vlasov (Morrison (1980), Marsden y Weinstein (1982), Kaufman y Dewar (1984) y Marsden et al. (1984)). En las últimas referencias, por cierto, se establece la estructura de Poisson usando los métodos generales de la geometría simpléctica.

Es posible determinar una fórmula para los paréntesis de Poisson sobre bases flujadas cotangentes reducidos (Montgomery et al. (1984)). Dicha expresión se aplica a fluidos y plasmas, involucra estructuras de Lie-Poisson, paréntesis canónicos y modificaciones a la estructura de Poisson por efecto de la presencia de términos asociados a campos magnéticos o a curvatura.

o. Mecánica hamiltoniana no canónica.

En el caso de dimensión finita, n , las ecuaciones de hamilton (Goldstein (1980)), (3.4), toman la forma

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = [q^i, H] ; \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.1a)$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j} = [p_j, H] ; \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.1b)$$

donde el paréntesis de Poisson, $[,]$, está definido como es usual

$$[f, g] := \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) \quad (4.2)$$

Definiendo

$$z^i := \begin{cases} q^k & \text{si } i = k = 1, 2, \dots, m. \\ p_k & \text{si } i = n+k = n+1, n+2, \dots, 2n. \end{cases} \quad (4.3)$$

Las ecuaciones anteriores se escriben como ⁽¹⁾

$$\dot{z}^i = J^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^j} \quad (4.4)$$

y, además,

$$(J^{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial z^i} J^{ij} \frac{\partial g}{\partial z^j} \quad (4.6)$$

Aquí se usa el convenio de suma sobre índices repetidos, I_n es la matriz unidad de orden $n \times n$. En (4.4) la "cinemática" (la estructura del espacio fase) está dada por J^{ij} y la dinámica entra a través de H .

El paréntesis de Poisson dado arriba tiene las siguientes propiedades :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) bilinealidad, } [f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g] \\ \text{(ii) hemisimetría, } [f, g] = -[g, f] \\ \text{(iii) satisface la identidad de Jacobi,} \\ [f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0 \\ \text{(iv) } [f_1, f_2, g] = f_1 [f_2, g] + [f_1, g] f_2 \end{array} \right\} (4.7)$$

Las tres primeras dan la ' estructura ' de álgebra de Lie y todas la estructura de Poisson.

Nota A. Otra manera de considerar la estructura de Poisson es la siguiente : una estructura de Poisson sobre una variedad diferencial M está definida por una operación bilineal antisimétrica $\{, \}$ sobre el espacio de funciones continuamente diferenciables en M , $C^\infty(M)$, a \mathbb{R} tales que la operación

$$H_M: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

definida por

$$H_M(f) = \{f, H\}$$

satisface las siguientes dos identidades de ' derivación ' para cada $H \in C^\infty(M)$:

$$H_M(f \cdot g) = (H_M f) g + f (H_M g) \quad (\text{Leibnitz})$$

$$H_H\{F, g\} = \{H_H F, g\} + \{F, H_H g\} \quad (\text{Jacobi})$$

ξ, ζ da la estructura de Lie sobre $\mathcal{E}^\infty(M)$ y es preservada por el flujo de H_H , i.e.

$$\{F \cdot e^{tH_H}, g \cdot e^{tH_H}\} = \{F, g\} \cdot e^{tH_H}, \quad \forall t$$

El flujo en cuestión es llamado flujo hamiltoniano y H es su función generadora o hamiltoniano. Luego,

$$\frac{d}{dt} (F \cdot e^{tH_H}) = \{F, H\} \cdot e^{tH_H}$$

o, equivalentemente,

$$\dot{F} = \{F, H\}$$

Otra manera de escribir la identidad de Jacobi es

$$- [H_H, H_K] = H_{[H, K]}$$

que significa que el mapeo $H \mapsto H_H$ es un homomorfismo del álgebra de Lie $\mathcal{E}^\infty(M)$ al álgebra de Lie de los campos vectoriales con conmutador negativo, $-[\cdot, \cdot]$.

A las cantidades C que son constantes en el espacio fase en el sentido de que

$$[C, g] = \frac{\partial C}{\partial z^i} J^{ij} \frac{\partial g}{\partial z^j} = 0, \quad \forall g$$

se les denominará Casimires (Nótese que la trayectoria determinada por $C = \text{cte.}$ en el espacio fase está confinada a una hoja simpléctica).

Análogamente, para teoría de campos se usa el paréntesis canónico

$$\{F, g\} = \int \left[\frac{\delta F}{\delta \eta_\mu} \frac{\delta g}{\delta \eta_\mu} - \frac{\delta F}{\delta \eta_\mu} \frac{\delta g}{\delta \eta_\mu} \right] d^3x$$

donde η_k, π_k son las variables de campo y f, g son funcionales de las últimas. Las derivadas parciales del espacio fase se convierten en derivadas funcionales $\partial/\partial q_k \rightarrow \delta/\delta \eta_k$ que están definidas por

$$\delta F = \frac{d}{d\varepsilon} F[\eta + \varepsilon \delta \eta] \Big|_{\varepsilon=0} = \mathcal{D}F \cdot \delta \eta = \left\langle \frac{\delta F}{\delta \eta}, \delta \eta \right\rangle = \int \frac{\delta F}{\delta \eta} \delta \eta d^3x$$

La generalización para el caso no canónico es

$$\{F, g\} = \int \frac{\delta F}{\delta \psi^i} O^{ij} \frac{\delta g}{\delta \psi^j} d^3x = \left\langle \frac{\delta F}{\delta \psi^i}, O^{ij} \frac{\delta g}{\delta \psi^j} \right\rangle \quad (4.8)$$

donde O^{ij} es el operador cosimolético. Las ecuaciones de movimiento en ese caso son

$$\partial_t \psi^i = \{\psi^i, H\} = O^{ij} \frac{\delta H}{\delta \psi^j} \quad (4.9)$$

en el caso de medios continuos

$$O^{ij} = \psi^n C_{nm}^{ij} \quad (4.10)$$

donde las C_{nm}^{ij} son los operadores de estructura para alguna álgebra de Lie que actúan sobre las funciones, entonces

$$\{F, g\} = \int \psi^n \left[\frac{\delta F}{\delta \psi}, \frac{\delta g}{\delta \psi} \right]_n d^3x \quad (4.11)$$

$[\ ,]_n$ es la n -ésima componente del producto para una álgebra de Lie de funciones evaluadas sobre vectores (álgebra de Lie interior) en tanto que $\{ \ , \}$ corresponde a un álgebra de Lie (exterior) sobre funcionales.

Supóngase que \mathcal{G} es un grupo de Lie y \mathfrak{g} su álgebra de Lie; este último es el espacio tangente a \mathcal{G} en la identidad (Cfr. Abraham y Marsden, sec. 4.1 (1978)). Así, para cualesquiera f_1, f_2 en \mathfrak{g} el paréntesis de Poisson de f_1 y f_2 está dado por

$$[F_1, F_2] = \frac{d}{ds_1} \frac{d}{ds_2} g_1(s_1) g_2(s_2) g_1(s_1)^{-1} \Big|_{s_1, s_2=0} \quad (4.12)$$

donde $g_1(s_1)$ y $g_2(s_2)$ son curvas suaves arbitrarias en \mathfrak{g} tales que

$$g_1(0), g_2(0) = e \quad ; \quad g'_1(0) = F_1, \quad g'_2(0) = F_2 \quad (4.13)$$

e es la identidad. Si \mathfrak{g}^* es el espacio dual de funcionales lineales sobre \mathfrak{g} , el producto de los elementos $\bar{F} \in \mathfrak{g}^*$ y $g \in \mathfrak{g}$, denotado por $\langle \bar{F}, g \rangle$, tiene la siguiente propiedad (caso de dimensión infinita) :

$$\langle \bar{F}, g \rangle = 0, \quad \forall \bar{F} \Rightarrow g = 0 \quad (\text{condición de no degeneración})$$

Para $F: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ se define $\frac{\delta F}{\delta \bar{F}} \in \mathfrak{g}$ usando

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} F(\bar{F}_1 + \varepsilon \bar{F}_2) \right|_{\varepsilon=0} = \langle \bar{F}_2, \frac{\delta F}{\delta \bar{F}_1} \rangle \quad (4.14)$$

y el paréntesis de Lie-Poisson estará definido por

$$\{F, G\}_{\pm} = \pm \langle \bar{F}, [\frac{\delta F}{\delta \bar{F}}, \frac{\delta G}{\delta \bar{F}}] \rangle \quad (4.15)$$

de donde se obtienen, por ejemplo, (4.8) y (4.11). Las funciones F y G (que van de \mathfrak{g}^* a \mathbb{R}) pueden extenderse por traslaciones " zurcas " a funciones F_L y G_L sobre $T^*\mathfrak{g}$; así, cuando F_L es restringida a $T^*\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$ se obtiene F . En $T^*\mathfrak{g}$ se tienen paréntesis de Poisson canónicos $\{ , \}_{T^*\mathfrak{g}}$, luego

$$\{F_L, G_L\}_{T^*\mathfrak{g} | T^*\mathfrak{g}} \rightarrow \{F, G\}_-$$

y considerando, análogamente, invariancia " derecha "

$$\{F_D, G_D\}_{T^*\mathfrak{g} | T^*\mathfrak{g}} \rightarrow \{F, G\}_+$$

i.e. los paréntesis de Lie-Poisson, \pm , se obtienen a partir de los

variación sobre $T^*\mathfrak{g}$. El proceso por el cual se llega a los paréntesis sobre \mathfrak{g}^* a partir de los que se tienen sobre $T^*\mathfrak{g}$ es llamado reducción (la descripción asociada a dicho espacio es la natural). \mathfrak{g}^* con la estructura que le confieren los paréntesis de Lie-Poisson, (4.15), se convierte en una variedad de Poisson.

C. Productos Semidirectos.

Supóngase que \mathfrak{g} es un grupo, V un espacio vectorial y sea ρ una representación de \mathfrak{g} sobre V , i.e. un homomorfismo de \mathfrak{g} al grupo de transformaciones lineales invertibles de V . Si $g \in \mathfrak{g}$ y $v \in V$ se define $\rho_g(v) := \rho(g)(v)$.

El producto semidirecto $\mathfrak{g} \ltimes V$ está formado por un subconjunto de $\mathfrak{g} \times V$ cuyos elementos satisfacen la 'multiplicación de grupo', a saber

$$(g_1, v_1) \cdot (g_2, v_2) = (g_1 g_2, v_1 + \rho_{g_1}(v_2)) \quad (4.16)$$

Es fácil ver que $\mathfrak{g} \ltimes V$ es un grupo. Usando (4.12) y $(g, v)^{-1} = (g^{-1}, -\rho_{g^{-1}}(v))$ se puede obtener el paréntesis de Lie para $\mathfrak{g} \ltimes V$:

$$[(g_1, v_1), (g_2, v_2)] = ([g_1, g_2], \rho'_{g_1}(v_2) - \rho'_{g_2}(v_1)) \quad (4.17)$$

donde $\rho'_g: V \rightarrow V$ está definida por

$$\rho'_g(v) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \rho_g(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} \quad (4.18)$$

Aquí $g(\varepsilon)$ es una curva en \mathfrak{g} que satisface $g(0) = \varepsilon v g'(0) = g$. El álgebra de Lie correspondiente es denotada por $\mathfrak{g} \ltimes V$.

Si se identifica $(\mathfrak{g} \times V)^*$ con $\mathfrak{g}^* \times V^*$, combinando (4.15) y (4.17), resulta que los paréntesis de Lie-Poisson sobre $(\mathfrak{g} \ltimes V)^*$ están dados por

$$\{F, G\}_{\pm} = \pm \left(\langle \bar{g}, \left[\frac{\delta F}{\delta \bar{g}}, \frac{\delta G}{\delta \bar{g}} \right] \rangle + \langle \bar{v}, \rho'_{\frac{\delta F}{\delta \bar{g}}} \left(\frac{\delta G}{\delta \bar{v}} \right) - \rho'_{\frac{\delta G}{\delta \bar{v}}} \left(\frac{\delta F}{\delta \bar{v}} \right) \rangle \right) \quad (4.19)$$

donde $(\vec{J}, \vec{v}) \in \mathfrak{g}^* \times V^*$ \langle, \rangle es el producto sobre el espacio adecuado.

D. Las Ecuaciones de Movimiento.

Si se define

$$\underline{M} := p \underline{v} + \frac{q}{c} \underline{A} \quad (4.20)$$

el hamiltoniano del sistema bajo estudio, (2.2a), tomará la forma

$$H = \int_D \left\{ \frac{|\underline{M} - c^{-1} q \rho \underline{A}|^2}{2\rho} + \rho e(\rho, s) + \frac{1}{2} |\underline{v} \times \underline{A}|^2 \right\} dx \quad (4.21)$$

Aquí se considerarán las siguientes variables físicas de interés \underline{M} , ρ , s , \vec{F} y \underline{A} (\vec{F} es la densidad de carga eléctrica) y el objetivo es poder presentar las ecuaciones de movimiento correspondientes en la forma

$$\partial_t F = \{H, F\}, \quad F \in \{M, \rho, s, \vec{F}, \underline{A}\}, \quad i=1, 2, 3. \quad (4.22)$$

con H dado por (4.21). En este punto es necesario considerar un modelo de dos fluidos (iones y electrones) en el límite $\mu = \frac{m_e}{m_i} \rightarrow 0$ (Cfr. discusión en el Capítulo 1): así, tendremos campos vectoriales V_1 y V_2 sobre \mathbb{R}^n ($n=2$ ó 3) asociados a los iones y electrones, respectivamente. Aquéllos actuarán sobre espacios de funciones Δ_1^i y Δ_2^i , respectivamente, y sobre densidades Δ^i sobre \mathbb{R}^n . Por otra parte, \underline{M} es el dual de los elementos de V_1 ; es dual de las funciones en Δ_1^i ; s de las densidades en Δ_1^i ; $\vec{F} = c^{-1} \rho \underline{A}$ es dual a los elementos de V_2 y \vec{F} a las funciones en Δ_2^i . Luego, el paréntesis de Lie-Poisson en este problema será el que corresponde al paréntesis de Poisson sobre el dual de la suma directa del semiproducto de las álgebras de Lie $V_1 \circ (\Delta_1^i \otimes \Delta_1^i)$ y $V_2 \circ \Delta_2^i$:

$$[V_1 \circ (\Delta_1^i \otimes \Delta_1^i)] \circ [V_2 \circ \Delta_2^i] \quad (4.23)$$

Dicho paréntesis de Poisson, como mostró D.D.Holm (1967), está dado por

$$\begin{aligned} \{H, F\} = & - \int_D \left[\frac{\delta F}{\delta M_i} (M_j \partial_i + \partial_j M_i) \frac{\delta H}{\delta M_j} + \rho \partial_i \frac{\delta H}{\delta \rho} - s_{,i} \frac{\delta H}{\delta s} \right) \\ & + \frac{\delta F}{\delta \rho} \partial_j \rho \frac{\delta H}{\delta M_j} + \frac{\delta F}{\delta s} s_{,j} \frac{\delta H}{\delta M_j} \Big] d^3x - \\ & - c_H \int_D \left[\frac{\delta F}{\delta \rho} \partial_j \frac{\delta F}{\delta A_j} + \frac{\delta F}{\delta A_i} (\partial_i \frac{\delta H}{\delta \rho} + \rho^{-1} (A_{i,j} - A_{j,i})) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \frac{\delta H}{\delta A_j} \right] d^3x \end{aligned} \quad (4.24)$$

De (4.21) y (4.24) se obtienen, usando (4.22), las ecuaciones de movimiento (ecuaciones dinámicas) a saber,

$$\partial_t M_i = -M_j v_{,i}^j - (M_i v^j)_{,j} + \rho \left(\frac{v^2}{2} - h + \frac{a}{c_H} \underline{v} \cdot \underline{A} \right)_{,i} + s_{,i} \rho T. \quad (4.25a)$$

$$\partial_t A_i = -\frac{a \rho}{\rho} (\underline{v} \times \underline{B})_i + \frac{c_H}{\rho} (\underline{J} \times \underline{B})_i \quad (4.25b)$$

$$\partial_t \rho = -(\rho v^j)_{,j} \quad (4.25c)$$

$$\partial_t s = -s_{,j} v^j \quad (4.25d)$$

$$\partial_t \underline{S} = -c_H (\underline{J} - \frac{a \rho}{c_H} \underline{v}^j)_{,j} \equiv (a \rho v^j)_{,j} \quad (4.25e)$$

De éstas también es posible obtener

$$\partial_t v_i^* + v^j v_{i,j}^* + v_{,j}^* v_{,i}^j = -\left(\frac{v^2}{2} + h - \underline{v} \cdot \underline{v}^* \right)_{,i} + T s_{,i} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \underline{v} = & \underline{v} \times \underline{v} \times \underline{v} - \underline{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + h \right) + T \underline{\nabla} s + \frac{a}{c_H} (1 + \frac{a \rho}{\rho}) \underline{v} \times \underline{B} - \\ & - \frac{a}{\rho} \underline{J} \times \underline{B}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Luego, las ecuaciones MHD ideales (2.1a-e) resultan de las op
tenidas aquí si se satisface

$$\partial_t (a\varphi + \tilde{\varphi}) = 0 \quad (4.28a)$$

i.e. si se admite la neutralidad de la carga en cada punto y para
todo tiempo; es decir, si se impone como condición inicial

$$a\varphi + \tilde{\varphi} = 0 \quad (4.28b)$$

NOTAS.

(1) Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias
es hamiltoniano, en sentido generalizado, si puede ponerse en la
forma

$$\dot{z}^i = J^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^j} = [z^j, H]$$

CAPÍTULO 5.

ESTABILIDAD.

A. Definiciones de Estabilidad.

Antes de iniciar el estudio de la estabilidad es conveniente aclarar primero qué se entiende por ella ya que existe más de un sentido para ese término. El punto de partida es un sistema dinámico cuya evolución temporal (Cfr. Holm et al. (1985)) está por

$$\dot{\eta} = \frac{d\eta}{dt} = X(\eta) \quad (5.1a)$$

Se dirá que η_e representa un punto (estado) de equilibrio si satisface

$$X(\eta_e) = 0 \quad (5.1b)$$

Las definiciones y, por consiguiente, los tipos más comunes de estabilidad son los siguientes :

(i) se dice que η_e es espectralmente estable si el operador linealizado $DX(\eta_e)$ no tiene, estrictamente, parte real positiva. La estabilidad neutral, en la cual el espectro es puramente imaginario es un caso particular : la evolución temporal es de modos normales puramente oscilatorios. En el caso de sistemas hamiltonianos ambos tipos coinciden;

(ii) η_e se dice linealmente estable, respecto a una norma $\|\delta\eta\|$ si para toda $\epsilon > 0$ se puede escoger una $\delta > 0$ tal que si $\|\delta\eta\| < \delta$ en $t = 0$ entonces $\|\delta\eta\| < \epsilon$ para toda $t > 0$. La evolución de $\delta\eta$ está dada por $DX(\eta_e) \cdot \delta\eta$.

La estabilidad lineal implica la estabilidad espectral; sin embargo, el inverso, en general, es falso. Si el número de dimensiones es finito se tiene una condición suficiente para la estabili-

dad lineal: que $DX(\eta_c)$ tenga eigenvalores distintos sobre el eje imaginario. En el caso de dimensión infinita es suficiente que $DX(\eta_c)$ tenga un conjunto completo de eigenfunciones con eigenvalores puramente imaginarios de multiplicidad uno. Cuando se tienen raíces repetidas sobre el eje imaginario pueden presentarse inestabilidades con razones de crecimiento tipo resonancia (Cfr. p. ej. Arnold (1975), Penrose (1960), Chandrasekhar (1961) y Freidberg (1982));

(iii) η_c es formalmente estable si se encuentra una cantidad conservada cuya primera variación se anule en la solución, η_c , y cuya segunda variación sea definida en signo. La segunda variación provee de una norma conservada por las ecuaciones linealizadas, i. e.

$$\lambda_0(\eta - \eta_c) = \left\{ \frac{1}{2} \delta^2 H, \eta - \eta_c \right\} \quad (5.2a)$$

$$\lambda_0(\delta^2 H) = \left\{ \frac{1}{2} \delta^2 H, \delta^2 H \right\} = 0 \quad (5.2b)$$

luego, la estabilidad formal implica estabilidad linealizada. El inverso no siempre es cierto (Cfr. p. ej. Fowler (1963), Gardner (1963), Bernstein et al. (1958), Dikki (1965), Kruskal et al. (1954, 1958) y Davidson (1972));

(iv) η_c será no linealmente estable si para toda vecindad U en torno a ella puede encontrarse otra vecindad V (también de η_c) tal que las trayectorias, $\eta(t)$, inicialmente contenidas en V , jamás dejen U . En esta definición se presupone una dinámica bien definida y una topología ya especificada. En términos de una norma $\|\cdot\|$, la estabilidad no lineal significa que para toda $\epsilon > 0$ se puede encontrar una $\delta > 0$ tal que si $\|\eta(0) - \eta_c\| < \delta$ entonces $\|\eta(t) - \eta_c\| < \epsilon$ para toda $t > 0$.

Nótese que en el caso de sistemas conservativos con un número finito de dimensiones :

(a) la estabilidad espectral es necesaria pero no es suficien-

te para tener estabilidad no lineal;

(b) ni la estabilidad formal ni la linealizada son necesarias para la no lineal. La lineal no implica la no lineal (Pollard (1986)).

B. El Método de Arnold.

Arnold (1965,1969) formuló un método para establecer condiciones suficientes para la estabilidad no lineal de movimientos estacionarios de un fluido ideal ante perturbaciones de amplitudes pequeñas pero finitas. La estabilidad se establece determinando estimaciones a priori que ponen cota al tamaño ulterior de las perturbaciones según evolucionan en el tiempo. Cuando tales estimaciones existen se dice que esos movimientos estacionarios son estables por el método de Arnold.

Dicho método está basado en la construcción de funcionales conservadas (i.e. constantes de movimiento) que para un flujo estacionario dado hacen las veces de valores extremales (puntos críticos). Si esos valores son máximos (ó mínimos), respecto a flujos muy próximos dentro de una vecindad cuya topología se determina para cada problema, entonces el flujo estacionario en cuestión es estable en esa topología.

Geoméricamente puede pensarse de la siguiente manera. Se tienen las superficies de nivel de la funcional conservada en el espacio de funciones y se considera una vecindad del punto que representa un flujo estacionario dado. Cuando se tiene un máximo o un mínimo esas superficies de nivel estarán anidadas y próximas rodeando al punto de equilibrio. Si el flujo asociado al estado estacionario se perturba, el correspondiente punto fase en el espacio de funciones se desplazará hasta una superficie de nivel cercana y se mantendrá en ella porque la funcional se conserva. Si una estimación a priori puede establecer que la distancia (en la norma apropiada) desde el punto de equilibrio hasta la superficie de nivel cercana en la cual tuvo lugar el movimiento perturbado se mantiene posterior

esta manera, entonces el punto de equilibrio es estable por el método de Arnold.

Además, en una norma particular, los movimientos estables por el método de Arnold son también estables en el sentido de Liapunov (Lennick (1966)) : para toda $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si los valores iniciales son perturbados en una cantidad menor a δ (en la norma que se determinó por la estimación a priori) entonces la solución se desvía de una solución especificada (p. ej. una estacionaria) por menos que ϵ durante el movimiento subsecuente. Una vez que se encontró, por el método de Arnold, una norma $\|\cdot\|$ en la cual las perturbaciones δx_0 , en $t = 0$, y δx , al tiempo t , satisfacen $\|\delta x\| \leq k \|\delta x_0\|$, con $k \geq 1$ para toda t , uno puede escoger $\|\delta x_0\| < \delta$, así $k\delta = \epsilon > \|\delta x\|$. Ejemplos de la aplicación de este método pueden encontrarse en Holm et al. (1983,1985) y en Abarbanel et al. (1986).

El método de estabilidad de Arnold se compone de los elementos usuales : principios extremales para funcionales conservadas, signo definido en las segundas variaciones y argumentos de convexidad que establecen una estimación a priori. Contiene también un ingrediente menos frecuente : la degeneración de los paréntesis de Poisson. Para un sistema dinámico dado el tener dicha degeneración significa que ciertas cantidades, los Casimires, son constantes de movimiento para todo hamiltoniano, i.e.

$$\{G, F\} = 0.$$

para toda función, F, de las variables dinámicas del sistema, G es el Casimir.

En el caso que aquí se estudia C_1 , C_1' y C_5 son los Casimires y G_3 es un subcasimir sujeto a las condiciones $\Omega = 0$ y $\omega^* \cdot \hat{n} = 0$.

En el método de estabilidad de Arnold se usan los Casimires para construir funcionales conservadas. Los Casimires, así como otras constantes de movimiento, se introducen, a través de multiplicado-

Por la hipótesis, un conjunto de restricciones a una funcional conservada, la energía total, para determinar, vía un principio variacional, los puntos críticos de la energía condicionada. Si H es la energía conservada, C_1 los Casimires involucrados y \bar{C}_1 el resto de las constantes de movimiento, entonces la funcional de energía restringida, H_C , estará dada por

$$H_C = H + \sum_{i=1}^m C_i + \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{C}_i \quad (5.3)$$

donde los λ_i son los multiplicadores de Lagrange. Para estados estacionarios la primera variación de H_C se anula; es decir, tiene un punto crítico para una elección apropiada de multiplicadores de Lagrange. Este punto crítico será localmente un mínimo, un máximo o un punto silla dependiendo de cuándo la segunda variación de H_C , en el punto crítico, sea, respectivamente, definida positiva, negativa definida o indefinida (en signo).

La segunda variación, en el punto crítico, puede ser definida en signo bajo ciertas condiciones sobre los estados estacionarios. En esas mismas condiciones la segunda variación define una norma que induce un tipo de estabilidad débil : la estabilidad formal. Esta implica, como ya fue señalado, estabilidad lineal ante perturbaciones infinitesimales en el punto crítico pues la norma que de la segunda variación es preservada por las ecuaciones linealizadas. (Se trata solamente de estabilidad neutral ya que el espectro de las ecuaciones de un fluido ideal linealizadas se encuentra sobre el eje imaginario).

Las condiciones sobre los estados estacionarios, vía el signo definido de la segunda variación, pueden, con frecuencia, ampliarse lo suficiente para que provean de las estimaciones a priori deseadas; así, expresa la estabilidad Liapunov ante perturbaciones de amplitudes pequeñas pero finitas. Esas estimaciones se obtienen a través de argumentos de convexidad que involucran a la energía restringida, H_C .

II. Inestabilidades sobre las Perturbaciones a la Laxance.

En fluidos no conductores y no viscosos puede estudiarse la estabilidad ante pequeñas perturbaciones ya sea desde un punto de vista " macroscópico " considerando cambios en las variables del fluido en algún punto particular en el espacio o desde un punto de vista " microscópico " definiendo un campo vectorial de desplazamientos $\underline{\xi}$ que conecte elementos del fluido en el estado de equilibrio con los correspondientes a la configuración perturbada. En otras palabras : la descripción " macroscópica " corresponde a una formulación euleriana y la " microscópica " a una lagrangiana.

Es fácil mostrar que un cambio lagrangiano, $\delta_L F$, en una variable física de interés f se conecta con un cambio euleriano, $\delta_E f$, de acuerdo con la relación

$$\delta_L F = \delta f + \mathcal{L}_{\underline{\xi}} F \quad (5.4)$$

donde $\mathcal{L}_{\underline{\xi}} F$ denota la derivada de Lie de f respecto al campo vectorial definido por $\underline{\xi}$. En forma explícita puede ponerse

$$\mathcal{L}_{\underline{\xi}} f := \underline{\xi} \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^n \xi^i \nabla_i f \quad (\text{derivada de Lie de un campo escalar } f) \quad (5.5a)$$

$$\mathcal{L}_{\underline{\xi}} f^i := \sum_{j=1}^n (\xi^j \nabla_j f^i - f^j \nabla_j \xi^i) \quad (\text{derivada de Lie de un vector contravariante } f^i) \quad (5.5b)$$

$$\mathcal{L}_{\underline{\xi}} F_i := \sum_{j=1}^n (\xi^j \nabla_j F_i + F_j \nabla_i \xi^j) \quad (\text{derivada de Lie de un vector covariante } f_i) \quad (5.5c)$$

En MHD ideal el examen de la estabilidad espectral se realiza considerando desplazamientos lagrangianos, $\underline{\xi}$, pequeños, $|\underline{\xi}| < |\underline{x}_e|$, que se anulan en $t = 0$,

$$\underline{x} = \underline{x}_e + \underline{\xi}(\underline{x}_e, t) \quad (5.6)$$

donde \underline{x}_e denota la trayectoria de equilibrio (aquí se piensa en

el caso general: es decir no sólo equilibrio estático sino más bien estacionario) y se propone para $\underline{\xi}$ una evolución temporal de la forma

$$\underline{\xi}(\underline{x}_e, t) = \underline{\xi}_0(\underline{x}_e) e^{-i\omega t} \quad (5.7)$$

con el objeto de determinar el tipo de espectro de ω (Cfr. Bernstein (1959), Kruskal y Schwarzschild (1954), Kruskal et al. (1958), Oberman (1965), Pao (1975), Berge (1972), Shafranov (1966), Frieman y Rotenberg (1960) y Hameiri (1983)). Así, las variables físicas se desarrollan en serie de Taylor en términos de las potencias de $\underline{\xi}$ (i.e. el desarrollo se realiza en torno a su valor en el estado de equilibrio). En esa serie se retienen sólo los términos hasta de primer orden. Esos desarrollos, junto con la ecuación de movimiento, conducen a través de (5.7) a una ecuación algebraica de segundo orden para ω a partir de la cual se determinan los espectros discreto y continuo así como las regiones de validez.

Sin embargo, en MHDH ideal, no obstante que el análisis espectral puede realizarse en algunas situaciones de interés (Hosking (1965), Bhowmik et al. (1972), Talmar y Kalra (1967), Malik (1971), Kadish (1976) y Spies y Faghihi (1987)), el tratamiento completo del problema puede presentar algunas dificultades debido a la presencia del término de Hall en la ley de Ohm. En particular el que se desacoplen el flujo de masa y el magnético impide, como ya fue señalado, el tener una superficie en común para la caracterización de todas las variables físicas de tal suerte que es difícil determinar el espectro continuo análogo al de la MHD ideal; además, como se mostrará en la siguiente sección, incluso efectuando el tratamiento en coordenadas magnéticas se presentan problemas debido a la dependencia no lineal de una variables respecto de las otras. (Por cierto, en Spies y Faghihi (1987) se estudia la estabilidad neutral que debido a la estructura hamiltoniana aquélla coincide-

rá con la espectral (Cfr. Sec. A de este capítulo)).

El desarrollo en términos del desplazamiento lagrangiano, $\underline{\xi}$, de las ecuaciones que describen la evolución dinámica MHDH ideal (2.1a-e) conduce a las siguientes perturbaciones eulerianas :

$$\delta \rho = -\nabla \cdot (\rho \underline{\xi}) \quad (5.8a)$$

$$\delta s = -\underline{\xi} \cdot \nabla s \quad (5.8b)$$

$$\delta \underline{v} = \partial_t \underline{\xi} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{\xi} - \underline{\xi} \cdot \nabla \underline{v} \quad (5.8c)$$

$$\delta p = -\gamma' p \nabla \cdot \underline{\xi} - \underline{\xi} \cdot \nabla p \quad (5.8d)$$

$$\delta \underline{B} = \nabla \times (\underline{\xi}^e \times \underline{B}) := \underline{Q}(\underline{\xi}^e) \quad (5.8e)$$

$$\delta \underline{J} = \nabla \times \underline{Q}(\underline{\xi}^e) \quad (5.8f)$$

donde $\rho, s, p, \underline{v}$ y \underline{B} corresponden a los valores en el estado de equilibrio. $\underline{\xi}^e$ se refiere al desplazamiento lagrangiano correspondiente al flujo de electrones, pues, como fue señalado previamente, el campo magnético y la densidad de corriente eléctrica están congelados al flujo de electrones, \underline{v}^e . La relación entre $\underline{\xi}$ y $\underline{\xi}^e$ puede, en principio, establecerse a partir de la definición de \underline{v}^e , (1.9), y de la expresión para el estado de equilibrio (3.13); sin embargo, el problema de conectar ambos vectores de desplazamiento aun en casos en extremo simplificados ($\underline{v}_e = \underline{0}, \underline{J}_e = \underline{0}, \rho_e = \text{cte.}$) es lo suficientemente difícil como para que intentar su tratamiento analítico resulte en la práctica imposible.

D. Perturbaciones en Coordenadas Magnéticas.

Las dificultades que se presentan en el estudio de la estabilidad en MHDH ideal debido a que el flujo magnético y el de masa se

desacoplan son más patentes si se usan en dicho análisis coordenadas magnéticas: se encuentra que no es posible despejar las variables físicas perturbadas debido a la dependencia no lineal existente entre unas y otras. Así, en vez de usar coordenadas cilíndricas, (r, θ, z) , se utilizarán las coordenadas magnéticas (ψ, θ, χ) y se mantendrá la axisimetría; el nuevo sistema de vectores base $\{\nabla\psi, \nabla\theta, \nabla\chi\}$ está orientado de acuerdo con

$$\nabla\psi \times \nabla\theta = \nabla\chi \quad (5.9a)$$

en tanto que el determinante jacobiano de la transformación es

$$J := \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\psi, \theta, \chi)} = r [\psi, \chi]^{-1} \quad (5.9b)$$

Los vectores base covariantes se relacionan con los contravariantes de acuerdo con

$$\underline{e}_\psi = J (\underline{e}^\theta \times \underline{e}^\chi) \quad (5.10a)$$

$$\underline{e}_\chi = J (\underline{e}^\psi \times \underline{e}^\theta) \quad (5.10b)$$

donde

$$\underline{e}_\psi := \frac{\partial \underline{x}}{\partial \psi}, \quad \underline{e}_\theta := \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta}, \quad \underline{e}_\chi := \frac{\partial \underline{x}}{\partial \chi} \quad (5.11a)$$

$$\underline{e}^\psi := \nabla\psi, \quad \underline{e}^\theta := \nabla\theta, \quad \underline{e}^\chi := \nabla\chi \quad (5.11b)$$

El tensor métrico está dado por

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} r^2 \psi^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 J^{-2} |\nabla\psi|^2 \end{pmatrix} \quad (5.12a)$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} |\nabla\psi|^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sigma^2|\nabla\psi|^2 \end{pmatrix} \quad (5.12b)$$

Para simplificar el ejemplo a tratar se considerará que en el estado de equilibrio sólo se tienen componentes poloidal del campo magnético y toroidal del flujo de masa,

$$\underline{B} = \nabla\psi \times \nabla\theta = \sigma^{-1} \underline{e}_\chi \quad (5.13a)$$

$$\underline{v} = r^2 \tilde{\omega} \nabla\theta = r^2 \tilde{\omega} \underline{e}^\theta \quad (5.13b)$$

De las leyes de Faraday y Ohm, (2.1b,d), se obtiene

$$g(\psi) := \tilde{\omega} + \frac{c_H}{\alpha \rho \sigma} \partial_\psi (\sigma B^2) \quad (5.14)$$

donde g es una función arbitraria (Nótese que en MHD ideal (Ha meiri (1983), Almaquer et al. (1988)) $\tilde{\omega}$ es cantidad de superficie pero en el caso aquí tratado ya no). Las relaciones para el estado de equilibrio restantes son

$$\nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad (5.15a)$$

$$\nabla \cdot (s \underline{v}) = 0 \quad (5.15b)$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad (5.15c)$$

$$\sigma^{-1} \partial_\psi (\sigma B^2) + \partial_\psi p - r \rho \tilde{\omega}^2 \partial_\psi r = 0 \quad (5.15d)$$

$$\partial_\chi p - r \rho \tilde{\omega}^2 \partial_\chi r = 0 \quad (5.15e)$$

Ahora , considerando pequeñas desviaciones de las variables físicas, respecto de sus valores en el estado de equilibrio, que de-

notaremos con el subíndice " 1 " (los valores correspondientes al estado de equilibrio no llevarán subíndice alguno) y haciendo uso de

$$\underline{v}_1 = v_1^y \underline{e}_y + v_1^0 \underline{e}_0 + v_1^x \underline{e}_x \quad (5.10a)$$

$$\underline{B}_1 = B_1^y \underline{e}_y + B_1^0 \underline{e}_0 + B_1^x \underline{e}_x \quad (5.10b)$$

$$\frac{\partial \underline{z}}{\partial y} = \frac{1}{r \sigma B^2} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (5.10c)$$

$$\frac{\partial \underline{z}}{\partial x} = -r \sigma B^2 \frac{\partial r}{\partial y} \quad (5.10d)$$

se pueden obtener las ecuaciones que satisfacen las variables perturbadas. (Las dos últimas resultan de la ortogonalidad de las coordenadas) Para ello se admite que las variables perturbadas dependen de t y θ en la forma $\exp[i(m\theta - \omega t)]$ y definiendo

$$\sigma := \omega - m \tilde{\omega} \quad (5.17)$$

se obtienen, para la ecuación de movimiento, las siguientes componentes

$$\underline{e}_y: \frac{\sigma^2 \rho}{r^2 B^2} v_1^y + 2i\sigma \rho \tilde{\omega} r v_1^0 \frac{\partial r}{\partial y} - i\sigma r \tilde{\omega}^2 \frac{\partial r}{\partial y} \rho_1 + i\sigma \frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{i\sigma}{\sigma} B_1^x \frac{\partial}{\partial y} (\sigma^2 B^2) - \frac{i\sigma}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_1^y}{r^2 B^2} \right) = 0. \quad (5.18a)$$

$$\underline{e}_0: \sigma^2 \rho r^2 v_1^0 - 2i\sigma \rho \tilde{\omega} r (v_1^y \frac{\partial r}{\partial y} + v_1^x \frac{\partial r}{\partial x}) + i\sigma \rho r^2 v_1^y \tilde{\omega} - m\sigma \pi - \frac{i\sigma}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} (r^2 B_1^0) = 0. \quad (5.18b)$$

$$\underline{e}_x: \sigma^2 \rho \sigma^2 B^2 v_1^x + 2i\sigma \rho \tilde{\omega} r v_1^0 \frac{\partial r}{\partial x} - i\sigma r \tilde{\omega}^2 \frac{\partial r}{\partial x} \rho_1 + i\sigma \frac{\partial \pi}{\partial x} - i\sigma \frac{\partial}{\partial x} (\sigma B^2 B_1^x) - i\sigma B_1^y \frac{\partial}{\partial y} (\sigma B^2) = 0. \quad (5.18c)$$

Para la ecuación de continuidad se tiene

$$i\sigma\varphi_1 = \rho (im v_1^0 + \frac{\partial u_1^y}{\partial t}) + \rho \frac{\partial v_1^x}{\partial x} + v_1^y (\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\rho}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y}) + v_1^x (\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\rho}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}). \quad (5.19)$$

En el caso de la ecuación de estado se tiene

$$i\sigma\pi = \{i\sigma\sigma(B^2 + \frac{m}{\sigma^2} B_1^2 \sigma^2 p v_1^0) B_1^x + \sigma p \frac{\partial v_1^y}{\partial y}\} + \sigma p \frac{\partial v_1^x}{\partial x} + v_1^y (\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\sigma p}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y}) + v_1^x (\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\sigma p}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}). \quad (5.20)$$

Los componentes de la ecuación de inducción son

$$\underline{y}: i\sigma B_1^y + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial v_1^y}{\partial x} = \frac{c_H}{\sigma} [im B_1^y \frac{\partial}{\partial y} (\sigma B^2) + \frac{\partial}{\partial x} (im \sigma B^2 B_1^x - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} (r^2 B_1^0))]. \quad (5.21a)$$

$$\underline{z}: i\sigma B_1^z + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial v_1^z}{\partial x} + B_1 \cdot \nabla \tilde{\omega} = \frac{c_H}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_1^y}{r^2 B^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\sigma B^2 B_1^x) \right) \right] + im \sigma B_1^z \frac{\partial}{\partial y} (\sigma B^2) - \sigma \nabla \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma B^2) \right) B_1^x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho_1}{\sigma p^2 \sigma} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma B^2) \right] \right\}. \quad (5.21b)$$

$$\underline{x}: i\sigma B_1^x - \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial v_1^y}{\partial y} + im v_1^0 \right) = \frac{c_H}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [im \sigma B^2 B_1^x - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} (r^2 B_1^0)] + \frac{im}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_1^y}{r^2 B^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\sigma B^2 B_1^x) + \sigma \frac{\partial}{\partial y} (\sigma B^2) B_1^x - \frac{\rho_1}{\sigma p^2} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma B^2) \right] \right\}. \quad (5.21c)$$

con la perturbación de la presión total, π , tiene la forma

$$\pi = p_1 + \underline{E} \cdot \underline{B}_1 = p_1 + \sigma B^2 B_1^0 \quad (5.22)$$

En el tratamiento MHD ideal para este problema se ponen π , $v_1^y = 0$ con lo cual el conjunto previo se reduce a un sistema de dos ecuaciones diferenciales con dos incógnitas, v_1^0 y v_1^x , y a partir de él se determinan las condiciones de estabilidad del espectro continuo, $\tilde{\omega}(\eta)$, o bien se tome el conjunto completo de ecuaciones, se

imponen condiciones a la frontera, y se determina un espectro discreto. Sin embargo, en el caso que nos ocupa no es posible expresar \mathcal{B}^* , explícitamente, en términos de u_1^0 y u_1^x ; luego, no se puede reducir el sistema original al par de ecuaciones mencionadas. Más aún, suponer que el plasma es incompresible no facilita el hacerlo, ni siquiera en el modo más bajo, $m = 0$.

E. Estabilidad Liapunov.

Estabilidad, intuitivamente, significa que una perturbación inicialmente pequeña, respecto al equilibrio, se mantiene acotada durante la evolución dinámica posterior. Una ecuación de evolución, digamos

$$\partial_t \eta = X(\eta) \quad (5.23)$$

puede tener soluciones de equilibrio, soluciones estacionarias, η_e , que cumplen con $X(\eta_e) = 0$.

Esas soluciones de equilibrio se dicen estables tipo Liapunov cuando cualquier solución $\eta(t)$ que inicialmente, $t = 0$, está cerca de η_e se mantiene cerca de η_e para todo tiempo. Formalmente esto significa que para toda $\epsilon > 0$ puede escogerse una $\delta > 0$ tal que si $|\eta(0) - \eta_e| < \delta$ entonces se tiene la norma $|\eta(t) - \eta_e| < \epsilon$ para todo tiempo t (i.e. la noción de estabilidad Liapunov se refiere a una norma apropiada (Cfr. p. ej. Lehnick (1966) y Bhatia-Szegö (1970))).

Admitiendo que X en (5.23) es diferenciable la ecuación linealizada en η_e está dada por

$$\partial_t (\delta \eta) = DX(\eta_e) \cdot \delta \eta \quad (5.24)$$

y describe la evolución de las desviaciones infinitesimales, $\delta \eta$, de la solución original de equilibrio η_e ; $DX(\eta_e)$ es la linealización de X evaluada en η_e . Si las soluciones de la ecuación linealizada son estables Liapunov entonces la solución η_e para el problema

una propiedad de tipo linealizada actual. Una propiedad necesaria para dicha estabilidad lineal (линейная) es que el espectro del operador linealizado $D\mathbf{X}(\eta_e)$ se encuentre sobre el eje imaginario. Esta situación es denominada estabilidad neutra o estabilidad espectral. Esta propiedad espectral es necesaria pero no es suficiente para la estabilidad lineal; si, por ejemplo, se presentan modos neutros que presenten crecimiento algebraico en el tiempo, bajo la dinámica linealizada pueden excluirse estableciendo cotas sobre el tamaño posterior de las perturbaciones inicialmente pequeñas.

A un sistema hamiltoniano le corresponde una expresión de evolución dinámica de la forma (caso particular de (3.4))

$$\dot{\eta} = \{H(\eta), \eta\}. \tag{5.25}$$

donde H representa el hamiltoniano en cuestión y η una variable dinámica. En el caso de los sistemas hamiltonianos se tienen dos tipos de equilibrio :

(i) equilibrio absoluto, corresponde a un punto crítico para el cual $\dot{\eta}_e = 0$ cuando $DH(\eta_e) = 0$; por lo tanto, la estabilidad formal, usando $H(\eta)$ como cantidad conservada, coincide con la estabilidad obtenida usando un principio de energía;

(ii) equilibrio relativo, es posible para soluciones cuya evolución tiene lugar enteramente sobre superficies de nivel de una cantidad conservada adicional, $G(\eta)$, para la cual $\{H, G\} = 0$. En este caso las soluciones forman una familia invariante bajo transformaciones infinitesimales generadas por la cantidad conservada, G , vía el paréntesis de Poisson. Sobre la variedad formada por las soluciones, para una funcional dada G , los sistemas de referencia están definidos por transformaciones canónicas infinitesimales que dependen de t y son generadas por G con el tiempo como parámetro (dichas transformaciones generan desplazamientos que dependen de t , a lo largo de las C-órbitas en el espacio fase).

Las G -transformaciones, dependientes de t , pueden pensarse como sistemas de referencia en el espacio fase a los que denominaremos sistemas C .

Respecto a un cierto sistema de referencia- C una solución que depende de t sobre una superficie de nivel C puede llegar a ser estacionaria (i.e. puede ser independiente de t en el sistema de referencia en cuestión). Así, los puntos críticos de $H_c := H + C$, $\{H, G\} = 0$, son estados de equilibrio relativo ya que la condición de punto crítico $DH_c(\eta_e) = 0$ implica $\{H + C, G\} = 0$; es decir, el movimiento dependiente de t , generado por C , cancela exactamente la evolución generada por H cuando $DH_c(\eta_e) = 0$.

Para un equilibrio relativo, η_e , de un sistema hamiltoniano la estabilidad formal requiere que $\delta^2 H_c(\eta_e)$ la segunda variación de H_c , sea definida en signo. Luego, la estabilidad formal implicará la estabilidad Liapunov linealizada en este caso ya que la cantidad $\delta^2 H_c(\eta_e) = \delta \eta \delta^2 H_c(\eta_e) \delta \eta$ es el hamiltoniano ⁽¹⁾ para el movimiento linealizado en equilibrio relativo y, así, es conservado por la dinámica linealizada ⁽¹⁾ (Holm et al. (1985)). Cuando esa cantidad está definida en signo provee de la norma conservada para la estabilidad Liapunov linealizada; por tanto, las condiciones sobre la solución de equilibrio relativo para que la segunda variación, $\delta^2 H_c(\eta_e)$, sea definida en signo son suficientes para la estabilidad Liapunov. Una solución que comienza cerca de un estado de equilibrio relativo y satisface esas condiciones evolucionará bajo la dinámica linealizada de manera que se mantendrá en una vecindad de esa solución, medida con la norma definida por $\delta^2 H_c(\eta_e)$.

F. La Segunda Variación.

Para establecer la norma que debe satisfacer la solución de equilibrio del caso que aquí nos ocupa se obtendrá la segunda variación y se examinará bajo qué condiciones está definida en signo. Al igual que en la sección A del Capítulo 3 se contemplarán dos casos :

(1) Vorticidad generalizada isentrópica, $\nabla \cdot \underline{u} = 0$. En este caso se parte de (3.3a) y se admitirá, de entrada, $\lambda_2 = 0$ por ser, como ya fue discutido, el caso de mayor interés físico. Además se hará uso de

$$\delta^2 H_c|_c = D^2 H_c(p_c, s_c, \underline{v}_c, \underline{A}_c) \cdot \delta^2(p, s, \underline{v}, \underline{A}) \quad (5.26)$$

para obtener

$$\begin{aligned} \delta^2 H_c|_c = \int_D \left\{ \rho_c |\delta \underline{v}|^2 + \rho_c^{-1} \rho_c \delta p|^2 + (\delta^2 \varepsilon - \rho_c^{-1} |\underline{v}_c|^2 (\delta p)^2) + \right. \\ \left. + [\rho_c \Phi_c'' (\delta s)^2 + 2 \Phi_c' \delta s \delta p] + |\delta \underline{B}|^2 + \right. \\ \left. + F''(\gamma_c) \underline{A}_c \cdot \underline{B}_c (\delta \gamma)^2 + 2 F'(\gamma_c) [\underline{A}_c \cdot \delta \underline{B} + \underline{B}_c \cdot \delta \underline{A}] \delta \gamma + \right. \\ \left. + 2 F(\gamma_c) \delta \underline{A} \cdot \delta \underline{B} + 2 \lambda_1 \delta \underline{v}^* \cdot \delta \underline{\omega}^* \right\} d^3 x. \quad (5.27) \end{aligned}$$

donde

$$\varepsilon(p, s) = \rho c(p, s) \quad (5.28a)$$

$$\delta^2 \varepsilon(p, s) = \varepsilon_{pp} (\delta p)^2 + 2 \varepsilon_{ps} \delta p \cdot \delta s + \varepsilon_{ss} (\delta s)^2 \quad (5.28b)$$

Limitando el análisis al caso de variaciones isentrópicas, $\delta s = 0$, (5.27) se reduce a

$$\begin{aligned} \delta^2 H_c \Big|_{\delta s=0} = \int_D \left\{ \rho_c |\delta \underline{v}|^2 + \rho_c^{-1} \rho_c \delta p|^2 + (\varepsilon_{pp} - \rho_c^{-1} |\underline{v}_c|^2) (\delta p)^2 + \right. \\ \left. + |\delta \underline{B}|^2 + F''(\gamma_c) \underline{A}_c \cdot \underline{B}_c (\delta \gamma)^2 + \right. \\ \left. + 2 F'(\gamma_c) (\underline{A}_c \cdot \delta \underline{B} + \underline{B}_c \cdot \delta \underline{A}) \delta \gamma + \right. \\ \left. + 2 F(\gamma_c) \delta \underline{A} \cdot \delta \underline{B} + 2 \lambda_1 \delta \underline{v}^* \cdot \delta \underline{\omega}^* \right\} d^3 x \quad (5.29a) \end{aligned}$$

que, en general, no está definida en signo. Sin embargo, admitiendo un caso menos general en la restricción de la helicidad magnética, por ejemplo, $F(\psi) = \lambda = \text{cte.}$ (5.29) se reduce a

$$\delta^2 H_A^{(\delta s=0)}|_e = \int_V \left\{ \rho_e |\delta \underline{v}|^2 + \rho_e^{-1} \nu_e |\delta \underline{v}|^2 + (\epsilon \rho_e \rho_e^{-1} - \rho_e^{-1} \nu_e \epsilon^2) (\delta \psi)^2 + |\delta \underline{B}|^2 + 2\lambda \delta \underline{A} \cdot \delta \underline{B} + 2\lambda_1 \delta \underline{v} \cdot \delta \underline{w} \right\} d^3x \quad (5.29b)$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} \int_V \left\{ |\delta \underline{B}|^2 + 2\lambda \delta \underline{A} \cdot \delta \underline{B} \right\} d^3x &= \int_V \left\{ |\delta \underline{B}|^2 - \kappa \delta \underline{A} \cdot \delta \underline{B} \right\} d^3x = \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\partial V} \underline{M} \cdot (\delta \underline{A} \times \delta \underline{B}) d^2x + \frac{1}{2} \int_V \left\{ |\delta \underline{B}|^2 - \kappa \delta \underline{A} \cdot \delta \underline{B} - \delta \underline{A} \cdot (\nabla^2 \delta \underline{A} + \kappa^2 \delta \underline{A}) \right\} d^3x \\ &\geq \frac{1}{2} \oint_{\partial V} \underline{M} \cdot (\delta \underline{A} \times \delta \underline{B}) d^2x - \frac{1}{2} \int_V \left\{ \delta \underline{A} \cdot (\nabla^2 \delta \underline{A} + \kappa^2 \delta \underline{A}) \right\} d^3x \quad (5.30) \end{aligned}$$

en donde la integral de superficie se anula debido a (2.4) y además admitiendo

$$\nabla \cdot \delta \underline{A} = 0 \quad (5.31)$$

La forma cuadrática (5.29b) será definida positiva si el eigenvalor más pequeño, $\nu_{\text{min.}}$, asociado al problema

$$\nabla^2 \delta \underline{A} = -\nu^2 \delta \underline{A} \quad (5.32)$$

satisface

$$\nu_{\text{min.}}^2 \geq \kappa^2 \quad (5.33)$$

y en consecuencia, con $\rho_e > 0$ se cumple

$$\epsilon_{\rho_e \rho_e} \geq \rho_e^{-1} |\underline{v}_e|^2 \tag{5.34a}$$

i.e. que el flujo sea subsónico

$$|\underline{v}_e|^2 \leq |c_s|^2 \tag{5.34b}$$

Recuérdese que $\rho_e \epsilon_{\rho_e \rho_e} = c_s^2$ es la rapidez del sonido en el medio. De aquí en adelante, las condiciones anteriores serán suficientes para asegurar que (5.29b) es definida positiva sólo si $\lambda_1 = 0$; sin embargo, en el caso más general, $\lambda_1 \neq 0$, estará indefinida a menos que pueda tenerse algo del tipo $\delta \omega^* = \lambda_1 \delta \underline{v}^*$. Nótese también que en el caso de interés ($\lambda_2 = 0$) si $\lambda_1 = 0$ se tratará de un caso estático, $\underline{v}_e = \underline{0}$, debido a (3.9c).

Nota A. La segunda variación dada por (5.29b) puede ponerse, admitiendo que

$$\nabla^2 \delta \underline{v} = -k_v^2 \delta \underline{v} \tag{5.35a}$$

$$\nabla^2 \delta A = -k_A^2 \delta A \tag{5.35b}$$

en la forma

$$\delta^2 H_c^{(S_2=0)} \Big|_e = \int_D \left\{ \rho_e |\delta \underline{v} + \rho_e^{-1} \underline{v}_e \delta S_1|^2 + \mathcal{Q}^{(S_2=0)} \right\} dx \tag{5.36}$$

donde $\mathcal{Q}^{(S_2=0)}$ es la forma cuadrática definida por

$$\mathcal{Q}^{(S_2=0)} = \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta v_i \\ \Delta A_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \epsilon_{\rho_e \rho_e} - \rho_e^{-1} |\underline{v}_e|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 k_v & \frac{a \lambda_1}{c_n} (k_x + k_y) \\ 0 & \frac{a \lambda_1}{c_n} (k_x + k_y) & k_x^2 + 2k_x \left(\lambda + \frac{a^2 \lambda_1}{c_n^2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta v_i \\ \Delta A_i \end{pmatrix} \tag{5.37}$$

donde T denota la transpuesta de la matriz. (5.35b) es equivalente a (5.32) con $\nu^2 \equiv k_{\perp}^2$ suponiendo (5.31); (5.35a) es exactamente análoga a la del potencial vectorial electromagnético con la condición $\nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0$. Con la prescripción dada por (5.35a, b) no es necesario poner $\lambda_1 = 0$ (al menos será un caso menos restrictivo) para tener bien definida en signo a la segunda variación $\delta^2 H_c^{(\omega \neq 0)}$ pues en el caso $\rho_e \neq 0$ será suficiente que (5.37) sea definida positiva y como es sabido eso se tendrá pidiendo que los subdeterminantes involucrados sean positivos, i.e.

$$\left. \begin{aligned} \rho_e \rho_e - \rho_e^{-1} |\nu_e|^2 &> 0 \\ 2\lambda_1 k_{\perp} &> 0 \\ 2\lambda_1 k_{\perp} \left[k_{\perp}^2 + 2k_{\perp}^2 \left(\lambda + \frac{a^2}{\omega^2} \lambda_1 \right) \right] - \frac{a^2}{\omega^2} \lambda^2 (k_{\perp} + k_{\perp})^2 &> 0 \end{aligned} \right\} (5.38)$$

La primera de estas condiciones es precisamente (5.34a); la segunda requiere que tanto λ_1 como k_{\perp} tengan el mismo signo y considerando la solución de equilibrio (relativo) $\{R, S_e, \nu_e, A\}$, debido a (3.9c, d) implica que

$$-k_{\perp} \left[\frac{\rho_e \nu_e + \frac{c_H}{a} (\bar{J}_e + 2\lambda \bar{B}_e)}{|\omega_e^*|^2} \right] \cdot \omega_e^* > 0$$

que junto con la última relación en (5.38) constituye las cotas a satisfacer en el caso que se ha considerado.

(ii) Vorticidad generalizada no isentrópica, $\rho_e \omega_e^* \neq 0$. Aquí, en forma análoga a la del caso anterior, se toma $\lambda_e = 0$ y se hace uso de (5.2b) pero utilizando el hamiltoniano dado por (3.3b). La segunda variación es

$$\delta^2 H_c k = \int_D \left\{ \rho_e |\delta \mathbf{v}|^2 + 2 \nu_e \cdot \delta \mathbf{v} \delta \rho + \delta^2 \mathcal{E}(R, S_e) + 2 G_{\nu_e} \delta S \delta \rho + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \rho_e [G_{s_0 s_e} (\delta s)^2 + G_{\Omega_0 \Omega_e} (\delta \Omega)^2 + 2G_{s_0 \Omega_e} \delta s \delta \Omega] + \\
& + (\lambda_3 + G_{\Omega_0}) (2 \delta \rho \delta \Omega + \rho_e \delta^2 \Omega) + 15 \underline{B} |^2 + \\
& + F''(\psi) \underline{A}_e \cdot \underline{B}_e (\delta \psi)^2 + 2F'(\psi_e) [\underline{A}_e \cdot \delta \underline{B} + \underline{B}_e \cdot \delta \underline{A}] \delta \psi + \\
& + 2F(\psi_e) \delta \underline{A} \cdot \delta \underline{B} \} d^3x
\end{aligned} \tag{5.39}$$

admitiendo que todas las funciones involucradas son diferenciables con continuidad.

De la definición de potencial de vorticidad generalizada, (2.22), se obtiene directamente

$$\delta^2 \Omega = 2 \rho_e^{-1} \delta \underline{\omega}^* \cdot \underline{\Psi}(\delta s) - 2 \rho_e^{-1} \delta \rho \delta \Omega \tag{5.40}$$

y gracias a una integración por partes, aprovechando las condiciones de frontera (2.4a,b) y (2.0b) además de la prescripción (3.31), conduce a

$$\begin{aligned}
\int_D (\lambda_3 + G_{\Omega_0}) \nabla \cdot (\delta s \delta \underline{\omega}^*) d^3x &= \oint_{\partial D} (\lambda_3 + G_{\Omega_0}) \delta s \delta \underline{\omega}^* \cdot \underline{n} d^2x - \\
&- \int_D \delta s \delta \underline{\omega}^* \cdot \nabla G_{\Omega_0} d^3x = \int_D \delta \psi^* \cdot (\nabla G_{\Omega_0} \times \nabla \delta s) d^3x
\end{aligned} \tag{5.41}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\delta^2 H_c|_e &= \int_D \left\{ \rho_e 15 \underline{V} |^2 + 2 \psi_e \delta \psi \delta \rho + 2 \delta \psi^* \cdot (\nabla G_{\Omega_0} \times \nabla \delta s) + \right. \\
&+ \delta^2 \mathcal{E}(\rho_e, s_e) + 2 G_{s_0} \delta s \delta \rho + \rho_e [G_{s_0 s_e} (\delta s)^2 + G_{\Omega_0 \Omega_e} (\delta \Omega)^2 \\
&+ 2 G_{\Omega_0 s_e} \delta s \delta \Omega] + 15 \underline{B} |^2 + F''(\psi_e) \underline{A}_e \cdot \underline{B}_e (\delta \psi)^2 + \\
&+ 2 F'(\psi_e) (\underline{A}_e \cdot \delta \underline{B} + \underline{B}_e \cdot \delta \underline{A}) \delta \psi + 2 F(\psi_e) \delta \underline{A} \cdot \delta \underline{B} \} d^3x
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Como antes, se considerarán variaciones isentrópicas, $\delta s = 0$, y también el caso $R(\psi) = \lambda = \text{cte.}$ con lo cual (5.42) se convertirá en

$$\delta^2 H_c^{(\delta s=0)}|_c = \int_D \left\{ \rho_c |\delta \underline{v}|^2 + \rho_c^{-1} \underline{v}_c \delta \rho|^2 + (E_{\rho_c \rho_c} - \rho_c^{-1} |\underline{v}_c|^2) (\delta \rho)^2 + \rho_c G_{\rho_c \rho_c} (\delta \rho_c)^2 \right\} d^3 x + \int_D \left\{ |\delta \underline{B}|^2 + 2\lambda \delta \underline{A} \cdot \delta \underline{B} \right\} d^3 x. \tag{5.43}$$

Y en forma análoga a la del inciso anterior

$$\delta^2 H_c^{(\delta s=0)}|_c \geq \int_D \left\{ \rho_c |\delta \underline{v}|^2 + \rho_c^{-1} \underline{v}_c \delta \rho|^2 + (E_{\rho_c \rho_c} - \rho_c^{-1} |\underline{v}_c|^2) (\delta \rho)^2 + \rho_c G_{\rho_c \rho_c} (\delta \rho_c)^2 \right\} d^3 x - \frac{1}{2} \int_D \left\{ \delta \underline{A} \cdot (\nabla^2 \delta \underline{A} + k^2 \delta \underline{A}) \right\} d^3 x. \tag{5.44}$$

Luego, esta forma cuadrática será definida positiva si se satisfacen las siguientes condiciones para $\rho_c > 0$,

$$|\underline{v}_c| \leq |\underline{c}_0| \tag{5.45a}$$

$$G_{\rho_c \rho_c} = \rho_c \underline{v}_c \cdot \frac{(\nabla \underline{s}_c \times \nabla \underline{R}_c)}{|\nabla \underline{s}_c \times \nabla \underline{R}_c|^2} \tag{5.45b}$$

$$\nu_{\min}^2 \geq k^2 \tag{5.45c}$$

donde ν_{\min} es el eigenvalor más pequeño asociado al problema $\nabla^2 \delta \underline{A} = -\nu^2 \delta \underline{A}$. Las condiciones (5.45a,c) son iguales a las del caso previo pero (5.45b) que se obtiene de (3.32c) implica, en la igualdad, que \underline{v}_c es perpendicular a $\nabla \underline{s}_c \times \nabla \underline{R}_c$ y con la desigualdad estricta significa que los vectores \underline{v}_c , \underline{v}_c y $\nabla \underline{R}_c$ forman una triada de recha.

Nota 2. Si se usa nuevamente (5.35b) en (5.43) tendremos directamente

$$\delta^2 H_c^{(\delta s=0)}|_c = \int_D \left\{ \rho_c |\delta v|^2 + \rho_c^{-1} v_c \delta s^2 + Q^{(\delta s=0)} \right\} d^3x \quad (5.46)$$

donde

$$Q^{(\delta s=0)} := \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} \delta p \\ \delta \Omega \\ \delta A_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \epsilon_{p\ell c} - \rho_c^{-1} v_c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_c G_{\Omega_c \Omega_c} & 0 \\ 0 & 0 & k_\perp^2 + 2\lambda k_\perp \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta p \\ \delta \Omega \\ \delta A_i \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

Esta forma cuadrática será definida positiva si

$$\epsilon_{p\ell c} - \rho_c^{-1} v_c^2 > 0$$

$$\rho_c G_{\Omega_c \Omega_c} > 0$$

$$k_\perp^2 + 2\lambda k_\perp > 0$$

donde $\rho_c > 0$ y $\lambda \neq 0$. Estas condiciones suficientes son las mismas, básicamente, que (5.45a-c) salvo por la última que es algo más explícita que (5.45c) pues equivale, debido a (3.39), a

$$\left. \begin{aligned} k_\perp < \left(\bar{J}_c + \frac{a}{c} G_{\Omega_c \Omega_c} \nabla \Omega_c \times \nabla s_c \right) \cdot \frac{\mathbf{B}_c}{|\mathbf{B}_c|^2} < 0 \\ \delta \\ k_\perp > 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.48a)$$

si $\lambda > 0$ o bien

$$\left. \begin{array}{l} k_{\pm} > |(\mathcal{J}_c + \frac{c}{CH} G_{\eta_c, \eta_c} \nabla \mathcal{R}_c \times \nabla \mathcal{S}_c) \cdot \mathcal{B}_c| / |\mathcal{B}_c|^2 > 0 \\ 0' \\ k_{\pm} < 0 \end{array} \right\} \quad (5.43b)$$

si $\lambda < 0$.

Las condiciones obtenidas en esta sección corresponden a la estabilidad formal y, en consecuencia, a la linealizada.

3. La Estimación por Convexidad y La Estimación A Priori.

Para establecer una estimación por convexidad es necesario determinar las formas cuadráticas Q_1 y Q_2 en el mismo dominio de definición de (5.1a), digamos, un espacio de Banach; aquéllas están definidas en la forma

$$Q_1(\Delta\eta) \leq H(\eta_c + \Delta\eta) - H(\eta_c) - DH(\eta_c) \cdot \Delta\eta \quad (5.49a)$$

$$Q_2(\Delta\eta) \leq G(\eta_c + \Delta\eta) - G(\eta_c) - DG(\eta_c) \cdot \Delta\eta \quad (5.49b)$$

para toda variación finita $\Delta\eta := \eta - \eta_c$ en el espacio de definición, y se pide que

$$Q_1(\Delta\eta) + Q_2(\Delta\eta) > 0 \quad (5.50)$$

para toda $\Delta\eta \neq 0$.

Como posteriormente se hará notar este criterio requiere como paso previo el establecer la estabilidad formal si bien no es suficiente. Una vez realizado lo anterior se tiene, entonces, para toda solución η de (5.1a) la siguiente estimación sobre $\Delta\eta = \eta - \eta_c$:

$$Q_1(\Delta\eta(t)) + Q_2(\Delta\eta(t)) \leq H_c(\eta(0)) - H_c(\eta_c) \quad (5.51)$$

Así, tras repasar la estabilidad (no lineal) (Cfr. Holm et al. (1965)), una vez efectuados los pasos previos (establecer (5.1a), el hamiltoniano, las constantes de movimiento, la primera variación y haciendo determinado Q_1 y Q_2) se obtiene

$$|\eta|^2 = Q_1(\eta) + Q_2(\eta) > 0, \quad \eta \neq 0 \quad (5.52)$$

de manera que $|\eta|$ define una norma. Si H_0 es continua en esta norma en η_c (suponiendo que existen soluciones a (5.1a) para todo tiempo) entonces η_c es estable. Incluso en el caso de que no se conozcan soluciones a (5.1a) para todo tiempo puede establecerse una estabilidad condicional: estabilidad para los intervalos de tiempo durante los cuales existen soluciones de clase C^1 . Una condición suficiente para la continuidad de H_0 es la existencia de las constantes positivas c_1 y c_2 tales que

$$H(\eta_c + \Delta\eta) - H(\eta_c) - DH(\eta_c) \cdot \Delta\eta \leq c_1 |\Delta\eta|^2 \quad (5.53a)$$

$$G(\eta_c + \Delta\eta) - G(\eta_c) - DG(\eta_c) \cdot \Delta\eta \leq c_2 |\Delta\eta|^2 \quad (5.53b)$$

En tal caso se sigue la estimación siguiente

$$|\Delta\eta(t)|^2 = Q_1(\Delta\eta(t)) + Q_2(\Delta\eta(t)) \leq (c_1 + c_2) |\Delta\eta(0)|^2 \quad (5.54)$$

para todo $\Delta\eta$.

Cuando tanto Q_1 como Q_2 son cada una positivas (i.e. H y G son convexas cada una por su cuenta) (5.50) es inmediata, si bien existen casos (Cfr. Arnold (1969)) en los cuales tienen signos distintos pero con suma positiva; si, por otra parte, la suma es negativa uno puede sustituir H_0 por $-H_0$ y se tiene (5.50). Una condición suficiente para (5.49a) es que se cumpla

$$Q_2(\eta'') \leq D^2 H(\eta'') \cdot (\eta', \eta') \quad (5.55)$$

de η' y η'' . Se tienen relaciones análogas para D y H_0 . Se tiene que $D^2 H_0$

$$|\eta'|^2 \leq D^2 H_0(\eta'') \cdot (\eta', \eta') \quad (5.56)$$

es más fuerte que la estabilidad formal porque implica que $D^2 H_0(\eta'') \cdot (\eta', \eta')$ debe ser definida positiva. Realmente, (5.55) es una condición de convexidad global.

Ahora se aplicará lo anterior a los casos previamente considerados. En el caso de vorticidad generalizada isentrópica, usando (2.2a), se tiene, utilizando

$$\begin{aligned} \hat{H}(\Delta p, \Delta s, \Delta v, \Delta A) &:= H(p_c + \Delta p, s_c + \Delta s, v_c + \Delta v, A_c + \Delta A) - \\ &- H(p_c, s_c, v_c, A_c) - DH(p_c, s_c, v_c, A_c) \cdot (\Delta p, \Delta s, \Delta v, \Delta A). \end{aligned} \quad (5.57)$$

la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \hat{H}(\Delta p, \Delta s, \Delta v, \Delta A) &= \int_D \left\{ \frac{(p_c + \Delta p)}{2} |v_c + \Delta v|^2 + E(p_c + \Delta p, s_c + \Delta s) - E(p_c, s_c) \right. \\ &- E_{p_c} \Delta p - E_{s_c} \Delta s - \frac{p_c}{2} |v_c|^2 - \frac{v_c^2}{2} \Delta p - p_c v_c \cdot \Delta v + \\ &\left. + \frac{1}{2} |\Delta B|^2 \right\} d^3x \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{H}(\Delta p, \Delta s, \Delta v, \Delta A) &= \int_D \left\{ \frac{|\Delta M|^2}{2(p_c + \Delta p)} - \frac{1}{2} |v_c|^2 \frac{(\Delta p)^2}{p_c + \Delta p} + \right. \\ &\left. + \hat{E}(\Delta p, \Delta s) + \frac{1}{2} |\Delta B|^2 \right\} d^3x \end{aligned} \quad (5.58)$$

donde $\Delta M := (p_c + \Delta p)(v_c + \Delta v) - p_c v_c$ y $\hat{E}(\Delta p, \Delta s) := E(p_c + \Delta p, s_c + \Delta s) - E(p_c, s_c) - E_{p_c} \Delta p - E_{s_c} \Delta s$. Para C se tiene

$$\hat{G}(\Delta p, \Delta s, \Delta v, \Delta c) = \int_D \left\{ (p_c + \Delta p) \hat{\Phi}(\Delta s) + \Phi'(s_c) \Delta p \Delta s + \lambda, \Delta v^x \cdot \Delta u^x + \lambda \Delta A \cdot \Delta B \right\} d^3x. \quad (5.59)$$

con $\hat{\Phi}(\Delta s) := \Phi(s_c + \Delta s) - \Phi(s_c) - \Phi'(s_c) \Delta s$. Luego,

$$\hat{H} + \hat{G} \geq \frac{1}{2} \int_D \left\{ \frac{|\Delta M|^2}{\rho_{\min}^2} + \mathcal{Q}_1(\Delta p, \Delta s) + \mathcal{Q}_2(\Delta A, \Delta v) \right\} d^3x \quad (5.60)$$

donde \mathcal{Q}_1 y \mathcal{Q}_2 son formas cuadráticas definidas por

$$\mathcal{Q}_1 := \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta s \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 - \rho_{\min}^{-1} |\underline{v}_c|^2 & c_3 + \Phi'(s_c) \\ c_2 + \Phi'(s_c) & c_2 + 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta s \end{pmatrix}. \quad (5.61a)$$

$$\mathcal{Q}_2 := \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} \Delta A_i \\ \Delta v_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta A_i \\ \Delta v_i \end{pmatrix}. \quad (5.61b)$$

suponiendo que

$$0 < \rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max} < \infty \quad (5.62a)$$

y admitiendo que existen constantes reales y positivas c_i , a_i y c ($i=1,2,3$) tales que

$$0 < c \leq (p_c + \Delta p) \Phi'(s_c) < \infty \quad (5.62b)$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta s \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e_1 & e_3 \\ e_3 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta s \end{pmatrix} \in \hat{E}(\Delta p, \Delta s) \in \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta s \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta s \end{pmatrix}. \quad (5.03c)$$

con las a_i ($i=1,2,3$) definidas por

$$a_1 := k_{\underline{B}}^2 + 2k_{\underline{B}} \left(\lambda + \frac{a^2}{c_H^2} \lambda_1 \right) \quad (5.03a)$$

$$a_2 := 2\lambda_1 k_{\underline{W}} \quad (5.03b)$$

$$a_3 := \frac{a}{c_H} \lambda_1 (k_{\underline{B}} + k_{\underline{W}}) \quad (5.03c)$$

$k_{\underline{B}}$ y $k_{\underline{W}}$ vienen del hecho de suponer que existe una relación en particular entre $\Delta \underline{v}$ y $\Delta \underline{w}$ y entre $\Delta \underline{E}$ y $\Delta \underline{A}$ de la forma

$$\Delta \underline{w} = k_{\underline{W}} \Delta \underline{v} \quad (5.64a)$$

$$\Delta \underline{E} = k_{\underline{B}} \Delta \underline{A} \quad (5.64b)$$

Para asegurar que (5.60) sea definida positiva es necesario de terminar o sea qué condiciones las formas cuadráticas \underline{Q}_1 y \underline{Q}_2 son de finidas positivas. Como se sabe, eso ocurre cuando los subdeterminantes son todos positivos; es decir,

(i) $\underline{Q}_1 > 0$ si $e_1 - \rho_{\min}^{-1} |\underline{v}_e|^2 > 0$. (5.05a)
 $(e_1 - \rho_{\min}^{-1} |\underline{v}_e|^2) (e_2 + 2c) - (e_3 + \frac{a^2}{c_H^2} (s_e))^2 > 0$.

(ii) $\underline{Q}_2 > 0$ si $k_{\underline{B}}^2 + 2k_{\underline{B}} \left(\lambda + \frac{a^2}{c_H^2} \lambda_1 \right) > 0$. (5.05b)
 $2\lambda_1 k_{\underline{W}} (k_{\underline{B}}^2 + 2k_{\underline{B}} (1 + \frac{a^2}{c_H^2} \lambda_1)) -$
 $- \frac{a^2}{c_H^2} \lambda_1^2 (k_{\underline{B}} + k_{\underline{W}})^2 > 0$.

Los multiplicadores de Lagrange λ y λ_1 son tales que se satisfacen las ecuaciones de movimiento (3.9a-e) y se conectan con k_w y k_p a través de las condiciones dadas arriba; además debe notarse que (5.64b) es el análogo a (5.32) para variaciones infinitesimales en tanto que (5.64a) es la análoga a la que se usó en aquel caso para que la segunda variación, cuando $\nabla S \cdot \underline{w}^* = 0$, estuviera definida en signo. Más aún, la primera condición en (5.65a) es la condición para perturbaciones finitas análoga a (5.34a) para las perturbaciones infinitesimales (nótese que $p_e \mathcal{E}_{p, p_e}$ en (5.34a) hace las veces de e_1 a través de las cotas establecidas por (5.62a,c)). Por otra parte, la segunda desigualdad en (5.65a) contiene la información equivalente a la del caso de variaciones infinitesimales contenida en (5.34a), en (3.9a), con $\lambda_2 = 0$, y en (3.9b); en tanto que la primera es del mismo tipo que la presentada en (5.48a,b).

Así, con las condiciones antes determinadas para la positividad de \mathcal{Q}_1 y \mathcal{Q}_2 tenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{|\Delta \underline{M}|^2}{P_{MA}^2} + \left(\frac{\Delta p}{\Delta s} \right)^T \begin{pmatrix} e_1 - p_{MA}^{-1} |v_e|^2 & e_1 + \mathcal{E}'(s_e) \\ e_3 + \mathcal{E}'(s_e) & e_2 + 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta s \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} \Delta A_i \\ \Delta v_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \Delta_i \\ \Delta v_i \end{pmatrix} \right\} d^3x \leq \hat{H} + \hat{G} =: \hat{H}_C \\ & = H_C(p_e + \Delta p(0), s_e + \Delta s(0), v_e + \Delta v(0), \Delta_e + \Delta \Delta(0)) - \\ & - H_C(p_e, s_e, v_e, \Delta_e). \end{aligned} \tag{5.66}$$

la cual establece la estimación a priori.

Para la estabilidad no lineal nótese que la parte izquierda de

la desigualdad (5.66) define una norma $\|(\Delta p, \Delta s, \Delta M, \Delta A)\|$, de manera que la estimación (5.66) puede ponerse en la forma

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}_c(\Delta p(0), \Delta s(0), \Delta v(0), \Delta A(0)) &\geq \|(\Delta p(t), \Delta s(t), \Delta M(t), \Delta A(t))\|^2 \\ \text{y} \\ \hat{H}_c(\Delta p(t), \Delta s(t), \Delta v(t), \Delta A(t)) &\leq (C_4 e^{-\lambda t}) \|(\Delta p(0), \Delta s(0), \Delta M(0), \Delta A(0))\|^2 \end{aligned} \right\} (5.67)$$

pues \hat{H}_c es una constante de movimiento y la norma de la perturbación inicial está acotada para las funciones ρ_e, s_e, v_e y A_e en el dominio, finito, de interés. (En el caso aquí considerado D está acotado). La estimación (5.67) también expresa la estabilidad Liapunov considerando que $\hat{\Phi}(s)$ está relacionada con la función de Bernoulli a través de (3.43a) y satisface la condición de convexidad (5.62b).

Cuando se considera la vorticidad generalizada no isentrópica se obtiene para \hat{H} la misma expresión (5.58) pero a \hat{C} le corresponden

$$\begin{aligned} \hat{C}(\Delta p, \Delta s, \Delta v, \Delta A) = \int_D \{ & (\rho_e + \Delta p) \hat{C}(\Delta s, \Delta p) + \Delta v \cdot \nabla G_{\rho_e} \times \nabla(\Delta s) + \\ & + \lambda \Delta A \cdot \Delta B + \frac{\rho_e}{c_H} \Delta A \cdot \nabla G_{\rho_e} \times \nabla(\Delta s) + \\ & + G_{s_e}(\rho_e, s_e) \Delta p \Delta s \} d^3x \end{aligned} \quad (5.68)$$

donde se usaron las condiciones a la frontera (2.4a) y

$$\begin{aligned} \hat{C}(\Delta s, \Delta p) = G(\rho_e + \Delta p, s_e + \Delta s) - G(\rho_e, s_e) - G_{\rho_e}(\rho_e, s_e) \Delta p - \\ - G_{s_e}(\rho_e, s_e) \Delta s. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Luego, de (5.58) y (5.68) resulta

$$\hat{H}_c = \hat{H} + \hat{C} = \int_D \left\{ \frac{|\Delta M + \nabla G_{\rho_e} \times \nabla(\Delta s)|^2}{2(\rho_e + \Delta p)} - \frac{|\nabla_e \Delta p + \nabla G_{\rho_e} \times \nabla(\Delta s)|^2}{2(\rho_e + \Delta p)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \hat{E}(\Delta p, \Delta s) + G_{s_e}(r_e, s_e) \Delta s \Delta p + \frac{1}{2} |\Delta B|^2 + \lambda \Delta A \cdot \Delta B + \\
 & + (p_e + \Delta p) \hat{G}(\Delta R, \Delta s) + \frac{a}{CH} \Delta A \cdot \nabla G_{r_e} \times \nabla(\Delta s) \} d^3x \quad (5.70)
 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
 H_G \geq \frac{1}{2} \int_D \left\{ \frac{|\Delta M + \nabla G_{r_e} \times \nabla(\Delta s)|^2}{\rho_{\max.}} - \frac{|\nabla_e \Delta p + \nabla G_{r_e} \times \nabla(\Delta s)|^2}{\rho_{\min.}} + \right. \\
 \left. + \mathcal{Q}(\Delta p, \Delta R, \Delta s, \Delta A) + 2 \frac{a}{CH} \Delta A \cdot \nabla G_{r_e} \times \nabla(\Delta s) \right\} d^3x \quad (5.71)
 \end{aligned}$$

suponiendo, como antes, $0 < \rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max} < \infty$ y que existen constantes reales y positivas e_i, a_i, \tilde{E}_i y \tilde{A}_i ($i=1,2,3$) tales que

$$\begin{aligned}
 0 < a_1 \leq (p_e + \Delta p) G_{r_e, r_e} < \infty \\
 \left. \begin{aligned}
 \frac{1}{2} (\Delta p)^T \begin{pmatrix} e_1 & e_3 \\ e_3 & e_2 \end{pmatrix} (\Delta p) \leq \hat{E}(\Delta p, \Delta s) \leq \frac{1}{2} (\Delta p)^T \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 & \tilde{E}_3 \\ \tilde{E}_3 & \tilde{E}_2 \end{pmatrix} (\Delta p) \\
 \frac{1}{2} (\Delta R)^T \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} (\Delta R) \leq \hat{G}(\Delta R, \Delta s) \leq \frac{1}{2} (\Delta R)^T \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_3 \\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_2 \end{pmatrix} (\Delta R)
 \end{aligned} \right\} \quad (5.72)
 \end{aligned}$$

y la forma cuadrática, \mathcal{Q} , está dada por la expresión

$$\mathcal{Q} := \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta R \\ \Delta s \\ \Delta A_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e_1 & 0 & e_3 + G_{s_e} & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ e_3 + G_{s_e} & a_3 & a_2 + e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3^2 + 2\lambda b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta R \\ \Delta s \\ \Delta A_i \end{pmatrix} \quad (5.73)$$

Aquí también se admitió que $\underline{\Delta B}$ y $\underline{\Delta A}$ están relacionadas según (5.04b).
 Nótese que el segundo término en (5.71) es igual a

$$-\frac{1}{\rho_{\min}} |\underline{v}_e|^2 (\Delta p)^2 + \frac{1}{\rho_{\min}} (\underline{\nabla} G_{re} \cdot \underline{\nabla} (\Delta S))^2 + \frac{2 (\Delta p) \underline{\nabla} (\Delta S) \cdot \underline{\nabla} G_{re} \times \underline{v}_e}{\rho_{\min}} -$$

$$-\frac{1}{\rho_{\min}} |\underline{\nabla} G_{re}|^2 |\underline{\nabla} (\Delta S)|^2.$$

de manera que (5.71) se convierte ahora en

$$\hat{H}_c \geq \frac{1}{2} \int_D \left\{ \frac{|\underline{\Delta M} + \underline{\nabla} G_{re} \times \underline{\nabla} (\Delta S)|^2}{\rho_{\min}} + \frac{(\underline{\nabla} (\Delta S) \cdot \underline{\nabla} G_{re})^2}{\rho_{\min}} + \hat{Q} + \frac{2 \alpha}{c_H} \underline{\Delta A} \cdot \underline{\nabla} G_{re} \times \underline{\nabla} (\Delta S) \right\} d^3x \quad (5.74)$$

donde la nueva forma cuadrática \hat{Q} se define por

$$\hat{Q} = \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta S \\ \Delta A_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 - \rho_{\min} |\underline{v}_e|^2 + \frac{|\underline{v}_e|^2}{\beta^2} & 0 & c_3 + G_{se} \\ 0 & a_1 & a_3 \\ c_3 + G_{se} & a_3 & a_2 + c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_B^2 + 2\lambda k_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta R \\ \Delta S \\ \Delta A_i \end{pmatrix} - \tilde{\gamma}^2 |\underline{\nabla} (\Delta S) - \tilde{\gamma}^2 \underline{\hat{x}} \Delta p|^2$$

(5.75)

con $\underline{\hat{x}}$ e $\tilde{\gamma}^2$ definidas por

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &:= \frac{\nabla G_{rel} \times \tilde{v}_e}{\rho_{m/a.}} \\ \tilde{y}^2 &:= \frac{|\nabla G_{rel}|^2}{\rho_{m/a.}} \end{aligned} \right\} (5.76)$$

Ahora el punto es cuándo la forma cuadrática \hat{Q} y el último término en (5.74) son definidos positivos :

(i) cuando $\Delta p = 0$,

$$\begin{aligned} \hat{Q}(\Delta p=0) &= \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} \Delta \Omega \\ \Delta S \\ \Delta A_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_3 & a_2 + c_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\underline{S}}^2 + 2\lambda k_{\underline{S}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \Omega \\ \Delta S \\ \Delta A_i \end{pmatrix} - \\ &\quad - \tilde{y}^2 |\nabla(\Delta S)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} \Delta \Omega \\ \Delta S \\ \Delta A_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_3 & a_2 + c_2 - \tilde{y}^2 (k_{\underline{S}})^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\underline{S}}^2 + 2\lambda k_{\underline{S}} \end{pmatrix} \cdot \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \Delta \Omega \\ \Delta S \\ \Delta A_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

suponiendo que las perturbaciones (finitas) en la entropía satisfacen

$$\nabla(\Delta S) = k_{\underline{S}} \Delta S \quad (5.78)$$

Luego, las condiciones suficientes para que la \hat{H}_e dada por (5.74) sea definida positiva son las que corresponden a la forma cuadrática $\hat{Q}(\Delta p=0)$, i.e.

$$a_1 > 0$$

$$k_B^2 + 2\lambda k_B > 0$$

$$a_1(a_2 + e_2 - \tilde{y}^2 |k_s|^2) - a_3^2 > 0$$

$$(5.79)$$

y, además,

$$(\Delta S) \Delta A \cdot (\nabla G_{x_e} \times k_s) \geq 0 \quad (5.80)$$

La primera se cumple debido a (5.72); λ , considerando una solución de equilibrio dada $\{k, S_e, V_e, A_e\}$, se tiene de (3.39) de manera que la segunda desigualdad en (5.79) pone cota a los valores que puede tomar k_B y, específicamente, están dados por (5.48a,b). La última desigualdad en (5.79) pone cota a los valores k_s ,

$$k_s^2 < (\tilde{y}^2)^{-1} (a_2 + e_2 - \frac{a_3^2}{a_1})$$

donde todos los términos involucrados son positivos incluso \tilde{y}^2 , que, merced a su definición, no existe razón a priori para admitir la posibilidad de que sea negativo con $\rho_{m,n} > 0$. Cuando $a_2 + e_2 > k_*^2 := \frac{a_3^2}{a_1}$,

$$k_s^2 < k_*^2, \quad k_*^2 := (\tilde{y}^2)^{-1} (a_2 + e_2 - \frac{a_3^2}{a_1}) > 0 \quad (5.81)$$

Así, en los casos en que se satisface (5.79) se tiene a $\tilde{y}^2 \neq 0$ definida positiva para variaciones en la entropía consistentes con (5.81); es decir, aquellas que satisfacen

$$|\nabla(\Delta S)| < k_* |\Delta S| \quad (5.82)$$

con k_* dada según se indicó arriba. En el caso $a_2 + e_2 < k_*^2$,

$$k_s^2 < -k_*^2, \quad k_*^2 > 0 \quad (5.83)$$

se tendría la existencia de un $\underline{k}_{(s)} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\underline{k}_s = \pm i \underline{k}_{(s)}$ y, en consecuencia, debido a (5.78),

$$\Delta s = (\text{cte.}) e^{\pm i \underline{k}_{(s)} \cdot \underline{x}} \quad (5.84)$$

i.e. la perturbación (finita) en la entropía específica compatible con la incompresibilidad del plasma y con el estado de equilibrio relativo se comportaría como ' una onda plana que " avanza " con un periodo infinito '. Esto, junto con (5.80) y, como antes, admitiendo que $\nabla \cdot \underline{G}_x(\underline{r}, \underline{s})$ es real (no hay razones físicas para suponer lo contrario) impone una forma para las perturbaciones (finitas) en \underline{A} , por ejemplo, $\underline{A}(\underline{r}, t) e^{\mp i \underline{k}_{(s)} \cdot \underline{x}}$; esto es, $\Delta \underline{A}$ sería, en general, compleja, la constante en la amplitud es real y la polarización es la inversa de Δs ; una vez tomado esto en cuenta (5.80) impondría una condición adicional sobre las amplitudes de $\Delta \underline{A}$ acopladas a $\underline{k}_{(s)}$ y a los cambios en $G_x(\underline{r}, \underline{s})$.

(ii) cuando $\Delta s = 0$, (5.74) se convierte en

$$\hat{H}_c^{(\Delta s=0)} \geq \frac{1}{2} \int_D \left\{ \frac{|\Delta M|^2}{\rho_m a^2} + \hat{Q}^{(\Delta s=0)} \right\} d^3x \quad (5.85)$$

con

$$\hat{Q}^{(\Delta s=0)} := \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta \Omega \\ \Delta A_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \epsilon_1 - \rho_{\min}^{-1} |\underline{v}_e|^2 + |\underline{\tilde{x}}|^2 / \tilde{y}^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_s^2 + 2\lambda k_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta \Omega \\ \Delta A_i \end{pmatrix} \quad (5.86)$$

$\hat{Q}^{(\Delta s=0)}$ será definida positiva cuando se cumplan

$$\epsilon_1 - \rho_{\min}^{-1} |\underline{v}_e|^2 + |\underline{\tilde{x}}|^2 / \tilde{y}^2 > 0 \quad (5.87a)$$

$$k_{\underline{e}}^2 + 2\lambda k_{\underline{e}} > 0 \quad (5.87b)$$

$$a_1 > \frac{[k_{\underline{e}}^2 + 2\lambda k_{\underline{e}}]^2}{e_1 - \rho_{\min}^{-1} |\underline{v}_e|^2 + |\underline{\hat{x}}|^2 / \tilde{y}^2} \quad (5.87c)$$

Observemos que (5.87a), a diferencia de la condición análoga para el caso previo, (5.65a), no fija que el flujo de equilibrio sea subsónico bajo sino que puede ser mayor dependiendo del valor del cociente $|\underline{\hat{x}}|^2 / \tilde{y}^2$ que es estrictamente positivo en el caso bajo estudio. (5.87b) también difiere de su correspondiente previa, la primera en (5.65b), en este caso por el término $2\lambda_1 a^2 / c_M^2$ donde λ_1 se determina, como ya se indicó, a partir de las relaciones para el equilibrio relativo consistentemente con soluciones particulares $\{\rho_e, s_e, \underline{v}_e, \underline{A}_e\}$; sin embargo, (5.87b) conduce a los mismos resultados que la segunda en (5.79a) y presentados en (5.48a,b). Por su parte, (5.87c) fija en forma más precisa el valor (consistente) de a_1 . Como antes, las relaciones obtenidas son análogas a las ya determinadas en la segunda variación para este caso.

Entonces, $\rho_e = \text{cte.}$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_D \left\{ \frac{|\Delta \underline{M} + \underline{\nabla} G_{Re} \times \underline{\nabla}(\Delta s)|^2}{\rho_{\max.}} + \frac{(\underline{\nabla}(\Delta s) \cdot \underline{\nabla} G_{Re})^2}{\rho_{\min.}} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} \Delta \Omega \\ \Delta s \\ \Delta A_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_3 & & 0 \\ & & a_2 + e_2 - \tilde{y}^2 |k_s|^2 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \Omega \\ \Delta s \\ \Delta A_i \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + 2 \frac{a}{c_M} \underline{\Delta A} \cdot (\underline{\nabla} G_{Re} \times \underline{k}_s) (\Delta s) \right\} d^3x \leq \hat{H}_c (\Delta \rho = 0) \\ & = H_c(s_e + \Delta s(0), \underline{v}_e + \Delta \underline{v}(0), \underline{A}_e + \Delta \underline{A}(0)) - H_c(s_e, \underline{v}_e, \underline{A}_e). \quad (5.88) \end{aligned}$$

establece la estimación a priori. Asimismo, para la estabilidad no

lineal se cuenta con la norma que define (5.88), $\|(\Delta S, \Delta M, \Delta A)\|$, de forma que esa estimación puede ponerse como

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}_c(\Delta S(0), \Delta \underline{v}(0), \Delta \underline{A}(0)) &\geq \|(\Delta S(t), \Delta \underline{M}(t), \Delta \underline{A}(t))\|^2 \\ \hat{H}_c(\Delta S(t), \Delta \underline{v}(t), \Delta \underline{A}(t)) &\leq (\text{cte.}) \|(\Delta S(0), \Delta \underline{M}(0), \Delta \underline{A}(0))\|^2 \end{aligned} \right\} (5.89)$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{2} \int_D \left\{ \frac{|\Delta \underline{M}|^2}{\rho_{\max}} + \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} \Delta \rho \\ \Delta \Omega \\ \Delta A_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e_1 - \rho_{\min}^{-1} (|\underline{v}_e|^2 + |\underline{\dot{x}}|^2) / \gamma^2 & 0 \\ 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_E^2 + 2\lambda k_E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \rho \\ \Delta \Omega \\ \Delta A_i \end{pmatrix} \right\} dx \leq \hat{H}_c(\Delta S=0)$$

$$= H_c(\rho_e + \Delta \rho(0), \underline{v}_e + \Delta \underline{v}(0), \underline{A}_e + \Delta \underline{A}(0)) -$$

$$- H_c(\rho_e, \underline{v}_e, \underline{A}_e).$$

(5.90)

con $s_e = \text{cte.}$; en este caso la norma definida conduce a la estimación siguiente

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}_c(\Delta \rho(0), \Delta \underline{v}(0), \Delta \underline{A}(0)) &\geq \|(\Delta \rho(t), \Delta \underline{M}(t), \Delta \underline{A}(t))\|^2 \\ \hat{H}_c(\Delta \rho(t), \Delta \underline{v}(t), \Delta \underline{A}(t)) &\leq (\text{cte.}) \|(\Delta \rho(0), \Delta \underline{M}(0), \Delta \underline{A}(0))\|^2 \end{aligned} \right\} (5.91)$$

Estos dos subcasos también expresan la estabilidad Liapunov teniendo en cuenta que $G(\rho_e, s_e)$ se relaciona con la función de Bernoulli,

K (Cfr. (3.43a-d) y (3.44)), en la forma

$$G(\alpha_e, \beta_e) = \alpha_e \left(\int^{\alpha_e} \frac{K(\alpha, \beta_e)}{\alpha^2} d\alpha + \bar{K}(\beta_e) \right)$$

para el caso adiabático considerando para ello las normas establecidas, (5.89) y (5.91), y las cotas previamente establecidas para la positividad de las formas cuadráticas involucradas.

Cabe señalar que en el análisis presentado en esta sección no se tomó en cuenta ninguna estimación sobre la divergencia de la velocidad, por consiguiente, no se incluye aquí la posibilidad de la formación de una onda choque.

NOTAS.

(1) Si se desarrolla en serie de Taylor $H_c(\eta)$ alrededor de η_c se obtiene

$$\begin{aligned} H_c &= H_c(\eta_c) + D H_c(\eta_c) \cdot \delta\eta + \frac{1}{2} \delta\eta \cdot D^2 H_c(\eta_c) \cdot \delta\eta + \dots \\ &= H_c(\eta_c) + \delta H_c + \frac{1}{2} \delta^2 H_c + \dots \end{aligned}$$

Si η_c corresponde a un punto crítico, en particular a un punto de equilibrio relativo, la primera variación se anulará $\delta H_c(\eta_c) = 0$. entonces,

$$\partial_t \eta = \{ H_c(\eta_c), \eta \} + \left\{ \frac{1}{2} \delta^2 H_c, \eta \right\} + \dots$$

y de esta se obtendrán

$$\partial_t \eta_c = 0 = \{ H_c(\eta_c), \eta_c \} = J D H_c(\eta_c)$$

$$\partial_t (\delta\eta) = \left\{ \frac{1}{2} \delta^2 H_c, \delta\eta \right\} = J L \delta\eta$$

donde L es autoadjunto y simétrico respecto a la operación \langle, \rangle ,

$\delta^2 H_c = \delta\eta \cdot D^2 H_c(\eta_c) \cdot \delta\eta = \langle \delta\eta, L \delta\eta \rangle$. Para el paréntesis de Poisson $\{, \}$ se tiene $\{ F, G \} = \frac{\delta F}{\delta \eta} J \frac{\delta G}{\delta \eta}$. Nótese también que

$$\partial_t (\delta^2 H) = \left\{ \frac{1}{2} \delta^2 H, \delta^2 H \right\} = 0.$$

CAPITULO 6.

ONDAS MHDH IDEALES.

En este capítulo se considerarán movimientos de amplitud finita, pero pequeña, de tipo oscilatorio. El objetivo será obtener las relaciones de dispersión correspondientes a los casos compresible e incompresible cuando se usa el modelo magnetohidrodinámico Hall ideal.

Considérese un estado inicial del plasma caracterizado por las variables ρ_0, v_0 y B_0 , con valores fijos, y que el sistema es perturbado en unos valores ρ_1, v_1 y B_1 cuya magnitud es pequeña respecto a los anteriores, entonces

$$\rho = \rho_0 + \rho_1. \quad (6.1a)$$

$$v = v_0 + v_1. \quad (6.1b)$$

$$B = B_0 + B_1. \quad (6.1c)$$

de manera que inicialmente las perturbaciones son nulas ($\rho_1(t=0)=0$, $v_1(t=0)=0$, $B_1(t=0)=0$).

Por otra parte, de la ecuación para la conservación de la entropía, (2.1e), se tiene $p = \left(\frac{p}{\rho}\right)^{\gamma} p_0$ de manera que p puede desarrollarse en serie de potencias de ρ_1 en la forma siguiente

$$p = p_0 + C_{s_0}^2 \rho_1 + \frac{\gamma-1}{2} C_{s_0}^2 \rho_1^2 + \dots \quad (6.2)$$

En esta serie C_{s_0} denota la rapidez del sonido, $(\gamma p_0/\rho_0)^{1/2}$, evaluada en el estado inicial, $\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$.

Haciendo uso de (6.1a-c) y (6.2) en las ecuaciones MHDH ideales (2.1a-e) y desarrollando hasta primer orden en las perturbaciones se obtienen, tomando en particular un estado inicial estático, $v_0=0$,

$$\rho_0 \partial_t \psi_1 + c_s^2 \nabla \rho_1 + \underline{B}_0 \times \underline{J}_1 = 0 \quad (6.3a)$$

$$\partial_t \rho_1 + \rho_0 \nabla \cdot \underline{\psi}_1 = 0 \quad (6.3b)$$

$$\partial_t \underline{B}_1 - \nabla \times \left[\underline{\psi}_1 \times \underline{B}_0 - \frac{c_M}{a \rho_0} \underline{J}_1 \times \underline{B}_0 \right] = 0 \quad (6.3c)$$

$$\nabla \cdot \underline{B}_1 = 0 \quad (6.3d)$$

Ahora se supondrá que las perturbaciones evolucionan en la forma

$$\left(\begin{array}{l} \text{variable física} \\ \text{perturbada} \end{array} \right) \sim e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)} \quad (6.4)$$

de forma que pueden hacerse las sustituciones siguientes

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \rightarrow i \underline{k} \\ \partial_t \rightarrow -i \omega \end{array} \right\} (6.5)$$

Con éstas las expresiones (6.3a-d) se convierten en

$$\rho_0 \omega \psi_1 - c_s^2 \rho_1 \underline{k} - \underline{B}_0 \times (\underline{k} \times \underline{B}_1) = 0 \quad (6.6a)$$

$$\omega \rho_1 - \rho_0 \underline{k} \cdot \underline{\psi}_1 = 0 \quad (6.6b)$$

$$\omega \underline{B}_1 + (\underline{k} \cdot \underline{B}_0) \underline{\psi}_1 - (\underline{k} \cdot \underline{\psi}_1) \underline{B}_0 - i \frac{c_M}{a \rho_0} (\underline{k} \cdot \underline{B}_0) \underline{k} \times \underline{B}_1 = 0 \quad (6.6c)$$

$$\underline{k} \cdot \underline{B}_1 = 0 \quad (6.6d)$$

Aquí (6.6d) es redundante pues puede obtenerse de (6.6c). Si ρ_1 es eliminada de las ecuaciones previas resultan

$$\rho_0 \omega^2 \psi_1 - C_s^2 \rho_0 \underline{k} \cdot \underline{\psi}_1 \underline{k} - \omega \underline{B}_0 \times (\underline{k} \times \underline{B}_1) = 0 \quad (6.7a)$$

$$\omega \underline{B}_1 + (\underline{k} \cdot \underline{B}_0) \underline{\psi}_1 - (\underline{k} \cdot \underline{\psi}_1) \underline{B}_0 - \frac{i c_H}{a \rho_0} (\underline{k} \cdot \underline{B}_0) \underline{k} \times \underline{B}_1 = 0 \quad (6.7b)$$

Las relaciones de dispersión correspondientes se obtienen imponiendo la condición de tener soluciones distintas a la trivial i.e.

perturbaciones no nulas. Se estudiarán dos casos en particular:

(1) Plasma incompresible. En este caso $\rho_1 = 0$ o, en forma equivalente,

$$\underline{k} \cdot \underline{\psi}_1 = 0 \quad (\text{condición de incompresibilidad}) \quad (6.8)$$

Con objeto de simplificar el análisis se considerará la geometría dada por la siguiente figura

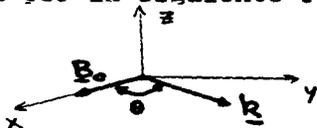


Fig. 6.1

$$\begin{aligned} \underline{B}_0 &= \hat{z} B_0, & k_z &= 0. \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{k_x}{k_y} \right), & k_x &= \underline{k} \cdot \hat{x}. \\ & & k_y &= \underline{k} \cdot \hat{y}. \end{aligned}$$

Con estas consideraciones (6.7a,b) pueden ponerse en la forma matricial siguiente

$$\begin{pmatrix} \rho_0 \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 \omega^2 & 0 & -\omega B_0 k_x & \omega B_0 k_y & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 \omega^2 & 0 & 0 & \omega B_0 k_z \\ k_x B_0 & 0 & 0 & \omega & 0 & -\frac{i c_H B_0 k_x k_z}{a \rho_0} \\ 0 & k_y B_0 & 0 & 0 & \omega & \frac{i c_H B_0 k_y k_z}{a \rho_0} \\ 0 & 0 & k_z B_0 & \frac{i c_H B_0 k_x k_z}{a \rho_0} & -\frac{i c_H B_0 k_y k_z}{a \rho_0} & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{1x} \\ \psi_{1y} \\ \psi_{1z} \\ B_{1x} \\ B_{1y} \\ B_{1z} \end{pmatrix} = 0 \quad (6.9)$$

La relación de dispersión se obtiene demandando que el sistema (6.9) tenga soluciones distintas de la trivial i.e.

$$\begin{vmatrix} \rho_0 \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 \omega^2 & 0 & -\omega B_0 k_{\perp} & \omega B_0 k_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 \omega^2 & 0 & 0 & \omega B_0 k_{\perp} \\ k_{\perp} B_0 & 0 & 0 & \omega & 0 & -\frac{i C_H B_0 k_{\perp} k_{\parallel}}{a \rho_0} \\ 0 & k_{\parallel} B_0 & 0 & 0 & \omega & \frac{i C_H B_0 k_{\parallel}^2}{a \rho_0} \\ 0 & 0 & k_{\parallel} B_0 & \frac{i C_H B_0 k_{\perp} k_{\parallel}}{a \rho_0} & -\frac{i C_H B_0 k_{\parallel}^2}{a \rho_0} & \omega \end{vmatrix} = 0. \quad (6.10)$$

de donde se obtiene ($\rho_0 \neq 0$)

$$\omega^5 = 0.$$

$$\omega^4 - k_{\perp}^2 v_A^2 \left(2 + \frac{C_H^2 k^2}{a^2 \rho_0} \right) \omega^2 + k_{\parallel}^4 v_A^4 = 0. \quad (6.11)$$

(Acuá v_A denota la rapidez de Alfvén, $B_0 / \sqrt{\rho_0}$).

De la segunda igualdad resulta

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2 \left(1 + \frac{C_H^2 k^2}{2a^2 \rho_0} \right) \pm k_{\perp}^2 v_A^2 \frac{C_H k}{a \rho_0} \sqrt{1 + \frac{C_H^2 k^2}{4a^2 \rho_0}} \quad (6.12)$$

que es la relación de dispersión. La parte derecha de (6.12) es real así que ω^2 también lo es. La velocidad de grupo asociada está dada por

$$\underline{v}_g := \frac{\partial \omega}{\partial \underline{k}} = \frac{\omega}{k_{\parallel}} \hat{k}_{\parallel} \pm \frac{C_H \omega}{2ka \sqrt{\rho_0}} \frac{\hat{k}}{\sqrt{1 + \frac{C_H^2 k^2}{4a^2 \rho_0}}} \quad (6.13)$$

Nótese que en el caso límite $C_H \rightarrow 0$ se recupera la velocidad de Alfvén

pues $\lim_{C_H \rightarrow 0} \omega^2 = \frac{B_0^2 k^2}{\rho_0}$. Así, la presencia del término de Hall, en esta situación, da lugar a una contribución paralela a B_0 en la velocidad de grupo

$$v_{g_{\parallel}} = \frac{\omega}{k_{\parallel}} \pm \frac{C_H}{2ka\sqrt{\rho_0}} \frac{\omega k_{\parallel}}{\sqrt{1 + \frac{C_H^2 k^2}{4a^2 \rho_0}}}$$

y otra contribución análoga en la dirección perpendicular a B_0 ,

$$v_{g_{\perp}} = \pm \frac{C_H}{2ka\sqrt{\rho_0}} \frac{\omega k_{\perp}}{\sqrt{1 + \frac{C_H^2 k^2}{4a^2 \rho_0}}}$$

Para examinar (6.12) se considerarán dos casos :

(1.i) $\theta = 0^\circ$ (modo paralelo) : $k_x, k_y = 0, k = k_{\parallel}$. En modo paralelo (6.12) toma la forma

$$\frac{\omega^2}{k^2} = v_A^2 \left(1 + \frac{C_H^2 k^2}{2a^2 \rho_0} \right) \pm v_A^2 \frac{C_H k}{a\sqrt{\rho_0}} \sqrt{1 + \frac{C_H^2 k^2}{4a^2 \rho_0}} \quad (6.14)$$

que es notablemente distinta a la expresión equivalente en MHD ideal pues las contribuciones asociadas al término de Hall son de tipo dispersivo, $\frac{k^2}{2a^2 \rho_0}$, y al depender también de ρ_0 (que en este caso es constante) y de la razón de la carga a la masa del ion da lugar a un comportamiento notablemente distinto. Obsérvese que son equivalentes los siguientes límites $\lim_{C_H \rightarrow 0} \left(\frac{\omega^2}{k^2} \right) = \lim_{\rho_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{\omega^2}{k^2} \right) = v_A^2$.

(1.ii) $\theta = 90^\circ$ (modo perpendicular) : $k_x, k_y = 0, k = k_{\perp}$. En modo perpendicular (6.12) toma la forma (debido a (6.7a, b))

$$\rho_0 \omega^2 v_{\perp} = 0 \quad (6.15)$$

Con $\rho_0 \neq 0$ para tener perturbaciones no nulas, $v_{\perp} \neq 0$, la única posibi

lidad es $\omega^2 = 0$.

(2) Plasma compresible. En este caso $\rho_1 \neq 0$ y con la geometría antes indicada (ver fig. 0.1) se tiene la situación descrita, en forma general, por las ecuaciones (6.7a,b). En forma matricial el sistema en cuestión es

$$\begin{pmatrix} \rho_0(\omega^2 - c_{s0}^2 k_{\parallel}^2) & -c_{s0}^2 \rho_0 k_{\parallel} k_{\perp} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{s0}^2 \rho_0 k_{\perp} k_{\parallel} & \rho_0(\omega^2 - c_{s0}^2 k_{\perp}^2) & 0 & -\omega B_0 k_{\perp} & \omega B_0 k_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 \omega^2 & 0 & 0 & \omega B_0 k_{\parallel} \\ 0 & -B_0 k_{\perp} & 0 & \omega & 0 & -\alpha B_0 k_{\parallel} k_{\perp} \\ 0 & B_0 k_{\parallel} & 0 & 0 & \omega & \alpha B_0 k_{\perp}^2 \\ 0 & 0 & B_0 k_{\perp} & \alpha B_0 k_{\parallel} k_{\perp} & -\alpha B_0 k_{\parallel}^2 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \\ B_x \\ B_y \\ B_{\parallel} \end{pmatrix} = 0. \quad (6.16)$$

donde

$$\alpha = \frac{i C_M}{\alpha \rho_0} \quad (6.17)$$

Para tener soluciones distintas de la trivial se impone la condición de que el determinante de la matriz del sistema (6.16) sea nulo; dicha condición da lugar a la relación de dispersión correspondiente ($\rho_0 \neq 0$)

$$\begin{aligned} & \omega^3 = 0 \\ & (\omega^2 - v_A^2 k_{\parallel}^2) \left\{ \rho_0^2 (\omega^2 - c_{s0}^2 k_{\parallel}^2) (\omega^2 - c_{s0}^2 k_{\perp}^2) - \rho_0 (\omega^2 - c_{s0}^2 k_{\parallel}^2) B_0^2 k_{\perp}^2 - \right. \\ & \left. - (c_{s0}^2 \rho_0 k_{\parallel} k_{\perp})^2 \right\} + \alpha^2 B_0^2 k_{\parallel}^2 k_{\perp}^2 \rho_0^2 (\omega^4 - \omega^2 c_{s0}^2 k_{\perp}^2) = 0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Aquí se considerarán dos posibilidades :

(2.i) Sin el término de Hall. En el límite $C_H \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, la relación de dispersión (6.18) se convierte en

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= v_A^2 k^2. \\ \omega^4 + k^2 (C_{S_0}^2 + v_A^2) \omega^2 + C_{S_0}^2 k^2 k_n^2 v_A^2 &= 0. \end{aligned} \right\} (6.19)$$

Quando se tratan sólo modos paralelos ($k = k_n$, $k_\perp = 0$) (6.19) se reduce a

$$\rho_0^3 (\omega^2 - k^2 C_{S_0}^2) (\omega^2 - k^2 v_A^2) = 0.$$

i.e. ($\rho_0 \neq 0$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega^2}{k^2} &= C_{S_0}^2 && (\text{multiplicidad uno}) \\ \frac{\omega^2}{k^2} &= v_A^2 && (\text{multiplicidad dos}) \end{aligned} \right\} (6.20)$$

Nótese que corresponden, en el caso de modos paralelos, a las ondas acústicas y de Alfvén respectivamente (i.e. ondas de iones " electrostáticas " y ondas de iones " electromagnéticas ") recuperando así, de golpe, dos resultados que suelen tratarse como casos separados en la MHD ideal.

Para modos perpendiculares se tienen ($\rho_0 \neq 0$)

$$\left. \begin{aligned} \omega^4 &= 0 \\ \frac{\omega^2}{k^2} &= C_{S_0}^2 + v_A^2 \end{aligned} \right\} (6.21)$$

Obsérvese que no se recuperaron las " ondas de ciclotrón de iones electrostáticas " ni la de " híbrido inferior " y la razón es que

estas ondas se tienen cuando $\mu = \frac{m_e}{m_i}$, si bien pequeña, no es nula (y aquí se ha tomado el límite $\mu \rightarrow 0$); por otra parte, para su obtención ω y ω_{ci} deberían ser comparables, sin embargo, en el tratamiento aquí realizado se parte de una suposición desde el inicio $\frac{\omega}{\omega_{ci}} \ll 1$. Así, lo único que se presenta es de orden ω y por ello aparecerá $\omega^2 = 0$ (multiplicidad dos). Empero, la segunda relación en (6.21) si corresponde a un resultado familiar en MHD ideal, se trata de las ondas magnetosónicas. En MHD ideal la expresión usual es

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \left(\frac{v_A^2 + c_s^2}{c^2 + v_A^2} \right).$$

pero debe recordarse que, también de entrada, se admitió que $\frac{v_A}{c} \ll 1$; luego, en ese límite, ambas coinciden.

(2.ii) Con el término de Hall, $C_H \neq 0$ ($\alpha \neq 0$). En este caso debe usarse la expresión completa (6.18); sin embargo, debido a su complejidad será tratada, como en los casos anteriores, por partes ;

(2.ii.1) Modos paralelos. En esta situación (6.18) se convierte en

$$\omega^2 = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_0^2 (\omega^2 - v_A^2 k^2) [\omega^4 - k^2 (c_s^2 + v_A^2) \omega^2 + c_s^2 k^4 v_A^2] - \\ - \frac{c_H^2}{a^2} \rho_0 v_A^2 k^4 \omega^2 (\omega^2 - c_s^2 k^2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

Nótese que la segunda igualdad puede ponerse en la forma

$$\rho_0^2 (\omega^2 - k^2 c_s^2) [(\omega^2 - v_A^2 k^2)^2 - \frac{c_H^2}{a^2 \rho_0} v_A^2 k^4 \omega^2] = 0.$$

de donde es fácil ver que las soluciones son ($\rho_0 \neq 0$)

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_s^2.$$

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA (6.23a)

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \left[\left(1 + \frac{C_H^2 k^2}{2a^2 \rho_0} \right) \pm \frac{C_H k}{a \sqrt{\rho_0}} \sqrt{1 + \frac{C_H^2 k^2}{4a^2 \rho_0}} \right] v_A^2 \quad (6.23b)$$

Las primeras son ondas acústicas y las últimas son Alfvén-Hall. En estas relaciones de dispersión queda patente que el término de Hall modifica sólo las 'ondas de ion electromagnéticas' en forma dispersiva. Es también notable que el término dispersivo contenga el valor de la densidad en el estado inicial, ρ_0 , y además la razón de carga-masa del ion; luego, en el límite $\rho_0 \rightarrow \infty$, $\frac{\omega^2}{k^2} \rightarrow v_A^2$.

(2.ii.2) Modos perpendiculares. En esta situación (6.16) (o equivalentemente (6.18)) se reduce ($k_y = 0, k_x \neq 0$) a

$$\rho_0^3 \omega^7 \left(\omega^2 - k^2 (c_s^2 + v_A^2) \right) = 0 \quad (6.24)$$

que da lugar a

$$\omega^7 = 0$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_s^2 + v_A^2$$

(ondas magnetosónicas)

(6.25)

Entonces se repite el resultado (6.21) correspondiente al caso $C_H \rightarrow 0$; es decir, en los modos perpendiculares no es relevante la presencia del término de Hall.

Hasta este punto se ha tratado solamente el caso de un plasma infinito. El caso de un plasma acotado como podría ser el caso de un cilindro conductor completamente lleno de un plasma, en el esquema del modelo MHDH ideal, es de interés especial. Sin embargo, según mostraron Buti et al. (1965) cuando se trata del problema

del ' pinch ' en el caso no disipativo suponiendo un plasma incompresible, el efecto Hall no tiene ningún efecto sobre la estabilidad. El siguiente paso sería examinar esa situación cuando el plasma es compresible; ese problema no se tratará en este trabajo.

CAPITULO 7.

CONCLUSIONES.

En este trabajo se ha establecido el problema de la estabilidad en MHDH ideal en tres dimensiones considerando una coordenada ignorable (caso axisimétrico). El método para tal estudio se basa en la determinación de los puntos críticos asociados a una funcional conservada Liapunov, H , constreñida por una serie de constantes de movimiento, C , algunas de las cuales resultaron ser Casimires del sistema bajo estudio dentro del esquema hamiltoniano presentado en el capítulo 4. Esos puntos críticos, como se mostró en el capítulo 3, corresponden a los estados de equilibrio para la dinámica que genera el hamiltoniano H (que de hecho es la energía total conservada), (2.2a), bajo el paréntesis de Poisson dado por (4.24). Dichos estados se obtuvieron para dos grandes casos : para la vorticidad generalizada, (2.12), isentrópica y no isentrópica.

Las condiciones de estabilidad para esos estados de equilibrio se determinaron usando la segunda variación de la funcional Liapunov H_C evaluada en dichos estados y las condiciones, suficientes, se obtuvieron demandando que esa segunda variación fuera definida positiva. Según fue discutido en el capítulo 5 esas condiciones implican a la estabilidad lineal Liapunov. Cabe hacer notar que la presencia de no linealidades impidió tratar la estabilidad ante pequeños desplazamientos lagrangianos.

Por otra parte, las estimaciones a priori dejan bien sentado que para los casos aquí tratados el problema de Cauchy linealizado está bien definido (i.e. se tiene una dependencia continua respecto a las condiciones iniciales). Esas estimaciones a priori también dan las condiciones para tener estabilidad lineal de Liapunov. También se obtuvieron las condiciones para tener estabilidad no lineal de Liapunov usando para ello argumentos de convexidad.

En los desarrollos necesarios para establecer las condiciones

de estabilidad fluidas, usualmente fue necesario limitarse al caso isentrópico porque de esa manera resultaba viable el examen de ' positividad definida ' ya que se presentaron términos que involucran gradientes de la variación de la entropía. Una dificultad análoga se presentó en algunas situaciones en relación a las variaciones en la velocidad y en el campo magnético que requirieron establecer formas particulares en su dependencia de tipo $\nabla^2(\nabla \times \delta f) = -k_{\perp}^2 \delta f$ y que llevaron a imponer condiciones como $k_{\min}^2 > k_{\perp}^2$. Esto añade un ingrediente adicional al examen del alcance de los resultados así obtenidos porque esa condición impone una restricción de carácter geométrico a la dinámica del problema. Según mostraron Constantin y Foias (Cfr. Holm (1987)) eso puede tenerse en dominios simplemente conexos, finitos (sin incluir el cero) y con campos vectoriales que sean de divergencia nula, $\nabla \cdot \delta f = 0$, y que en la frontera del dominio satisfagan que $\delta f \times \hat{n}|_{\partial D} = 0$.

Las relaciones de dispersión que se obtuvieron en el capítulo 6 conectaron varios aspectos presentes en este trabajo : el efecto Hall como fuente de no linealidades (Capítulo 5) y el carácter dispersivo del término de Hall. Las condiciones para tener ω real, como puede verse de algunas de las expresiones obtenidas en el capítulo 6, son compatibles con las que limitan a los regímenes obtenidos en el capítulo 3 para tener estados de equilibrio estables.

Las extensiones al presente trabajo, grosso modo, pueden guiarse en dos direcciones : una de tipo numérico para examinar el comportamiento de las soluciones de equilibrio y otra de tipo (al menos en su primera parte) analítico para considerar efectos debidos a la presencia del gradiente de presión de electrones (i.e. $v_{Li}/v_0 \sim 1$), así como explorar la posibilidad de ' nuevos ' principios variacionales sin tener que limitarse sólo al caso de procesos adiabáticos.

REFERENCIAS.

- Abarbanel, H.D.I., Holm, D.D., Marsden, J.E. y Ratiu, T. Phil. Trans. Roy. Soc. (London) A318, 349(1986).
- Abraham, R. y Marsden, J.E. Foundations of Mechanics. 2a. ed. • Benjamin-Cummings, Reading, Mass. (1978).
- Almaguer, J.A., Hameiri, E., Herrera, J. y Holm, D.D. Phys. Fluids 31(7), 1930(1988).
- Arnold, V.I. Doklady Math. Nauk. 162(5), 773(1965).
 ----- J. Appl. Math. Mech. 29, 1002(1965).
 ----- Am. Math. Soc. Transl. 19, 267(1969).
 ----- Mathematical Methods of Classical Mechanics. Graduate Texts in Mathematics. No. 60, Springer-Verlag, New York, (1978).
- Benford, J. Phys. Fluids 15(3), 435(1972).
- Berge, G. Phys. Fluids 15(1), 150(1972).
- Bernard, A., Garconnet, J.P., Joles, A., De Breton, J.P. y de Mascureau, J. en Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (IAEA, Viena, 1978), vol.2, p.159.
- Bernstein, I.B., Frieman, E.A., Kruskal, M.D. y Kulsrud, R.M. Proc. Roy. Soc. (London) A244, 17(1958).
- Bhatia, N.P. y Szegö, G.P. Stability Theory of Dynamical Systems. Springer-Verlag, Berlin(1970).
- Bhowmik, G. y Talwar, S.P. Can. J. Phys. 50, 1487(1972).
- Bostick, W.H. y Wells, D.R. Phys. Fluids 6, 1325(1963).
- Braginskii, S.I., Reviews of Plasma Physics, ed. M.A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1967) vol. 1, p.205.
- Brushlinskii, K.V. y Morozov, A.I. Reviews of Plasma Physics, ed. M.A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1980) vol.8, p.105.
- Buti, B., Dixit, M.S., Nayyar, N.K. y Trehan S.K. Nucl. Fusion:

5,17(1965).

Calkin, M.G. Can.J.Phys. 41,2241(1963).

Case, K. Phys. Rev. Lett. 40,351(1979).

Chester, C.R. Techniques in Partial Differential Equations.
McGraw-Hill, Kogakusha(1971).

*Coppins, M., Bond, D.J. y Haines, M.G. Phys. Fluids 27,2886(1984).

Davidson, R.C. Methods in nonlinear plasma theory. Academic Press,
New York(1972).

Dikii, L.A. Izv. Atm. and Oceanic Phys. 1(11)1117(1965).

----- Prikl. Math. Mech. 29,852(1965).

Dzyaloshinskii, I.E. y Volovik, G.E. Ann Phys. 125,67(1980).

Fowler, J.K. J. Math. Phys. 4,559(1963).

Freidberg, J.P. Rev. Mod. Phys. 54(3),559(1963).

Frieman, E. y Rotenberg, M. Rev. Mod. Phys. 32(4),898(1960).

Gardner, C.S. J. Math. Phys. 12(8),1548(1971).

Gibbons, J., Holm, D.D. y Kupershmidt, B. Phys. Lett. 90A,281(1982)

----- Physica 6D,179(1983).

Goldstein, H. Classical Mechanics.2a. ed. Addison-Wesley. Reading,
Mass.(1980).

Gosling, J.T., Asbridge, J.R., Bowe, S.J. y Feldman, W.C., en Par-
ticle Acceleration Mechanism in Astrophysics. ed.
J. Arons, C. McKee y C. Max (AIP, New York,1979)p.81

Grad, H. Rev. Modern Phys. 32(4),830(1960).

Haines, M.G. Nucl. Instrum. Meth. 207,179(1983).

Hameiri, E. Phys. Fluids 26(1),230(1983).

----- y Hammer, J.H. Phys. Fluids 25(10),1855(1982).

----- y Laurence, P. J. Math. Phys. 25(2),396(1984).

Hellsten, T.A.K. y Spies, G.O. Phys. Fluids 22(4),743(1979).

Hewett, D.W. Nucl. Fusion 24,349(1984).

Holm, D.D. y Kupershmidt, B.A. Phys. Lett. 91A,425(1982).

----- Physica 6D,347(1983).

----- Physica 7D,330(1983).

----- Phys. Lett. 93A,177(1983).

- Holm, D.D., Marsden, J.E., Ratiu, T. y Weinstein, A. Phys. Rep. 123,1-116(1985).
- Holm, D.D. Phys. Fluids 30(5),1310(1987).
- Hosking, R.J. Phys. Rev. Lett. 15(8),344(1965).
- Ito, H. Progr. Theoret. Phys. 9,117(1953).
- Johnstone, A. et al. Nature 321,344(1986).
- Kadish, A. Phys. Fluids 19(1),141(1976).
- Kaufman, A.N. y Dewar, R.L. Cont. Math. 28,51(1984).
- Kruskal, M.D. y Oberman, C.R. Phys. Fluids 1,275(1958).
- y Schwarzschild, M. Proc. Roy. Soc. (London) A223,348 (1954).
- Kulsrud, R.M. Proc. Roy. Soc. (London) A244,17(1958).
- Lamb, H. Hydrodynamics, Cambridge University Press, Cambridge (1975).
- Lax, P. Commun. Pure Appl. Math. 28,141(1975).
- Lehnick, S.H. Stability Theorems for Linear Motions. Prentice Hall. Series in Applied Mathematics, Englewood Cliffs, N.J. (1966).
- Littlejohn, R. J. Math. Phys. 20,2445(1979).
- Malik, S.K. J. Plasma Physics 5, Part 1,65(1971).
- Marsden, J.E., Ratiu, T. y Weinstein, A. Cont. Math. 28,55(1984).
- McKenna-Lawlot, S.M., Kitsch, E., O'Sullivan, D., Thompson y Wenzel, K.P. Nature 321,347(1986).
- Milroy, R.D. y Brackbill, J.V. Phys. Fluids 29(4),1184(1986).
- Montgomery, R., Marsden, J. y Ratiu, T. Cont. Math. 28,55(1984).
- Morrison, P.J. y Greene, J.M. Phys. Rev. Lett. 43(10),790(1980).
Errata 48(8),569(1982).
- Morrison, P.J. Phys. Lett. 80A(5,6),383(1980).
- Morozov, A.I. y Solov'ev, L.S. Reviews of Plasma Physics, ed. M.A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1980)
vol.8, p.1.
- Oberman, C. Hydromagnetic Stability Theory, en Plasma Physics, IAEA, Vienna(1965)137.

- Pao, V.P. Nucl. Fusion 15, 631(1975).
- Penrose, O. Phys. Fluids 26, 3246(1960).
- Peratt, A.L. y Green, J.C. Astrophys. Space Sci. 91, 19(1983).
- Seliger, R.L. y Whitham, G.B. Proc. Roy. Soc. A305, 1(1968).
- Shafranov, V.D. Reviews of Plasma Physics, ed. M.A. Leontovich
(Consultants Bureau, New York, 1966) vol.2, p.103.
- Smirnov, M.M. Problemas de Ecuaciones de la Física Matemática.
ed. MIR, Moscú(1976)..
- Spies, G.O. y Hellsten, T.A.K. Phys. Fluids 23(11), 2328(1980).
----- y Faghihi, M. Phys. Fluids 30(6), 1724(1987)..
- Spitzer, L. Jr. Physics of Fully Ionized Gases. Interscience, New
York(1956)..
- Talmar, S.P. y Kalra, G.L. J. Plasma Phys. 1, Part 1, 145(1967)..
- Tasso, H. y Schram, P.P.J.M. Nucl. Fusion. 6, 284(1966)..
- Trehan, S.K., Malik, S.K. y Dixit, M.S. Phys. Fluids 8(8), 1461(1965)..
- Truesdell, C. Phys. Rev. 73(5), 510(1948).
----- The Kinematics of Vorticity. Indiana University Press,
Bloomington(1954).
- Turner, L. IEEE Transactions on Plasma Science 14(6), 849(1986).
- Woltjer, L. Proc. Natl. Acad. Sc. 44(9), 833(1958).
- Zakharov, V.E. y Faddeev, L. Funct. Anal. Appl. 5, 280(1972)..

NOTA. En la lista previa fueron omitidas, accidentalmente, las siguientes referencias :

- Chandrasekhar, S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Instabilities.
Dover Publ., Dover(1961).
- Polar, H. Math. Int. to Celestial Mech. Prentice Hall, New Jersey
(1966).
- Rosenau, P., Tataronis, J.A. y Conn, G. J. Plasma Physics 21,
Part 3, 385(1979).