

295



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELO MARKOVIANO
PARA
EVOLUCION DE POBLACIONES

T E S I S

Que para obtener el Título de
A C T U A R I O
presenta

ARMANDO ARETIA PULGAR

México, D. E.

Marzo - 1989

CON
FALTA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Prólogo	1
1. Capítulo 1 "Cadenas de Markov".	
1.1 Introducción	3
1.2 Probabilidades de Transición	8
1.3 Probabilidades de Transición a m pasos	7
1.4 Probabilidades Incondicionales	10
1.5 Clasificación de estados	13
1.5.1 Estados Absorbentes	14
1.5.2 Cadenas Irreducibles	14
1.5.3 Estados Recurrentes y Transitorios	15
1.6 Eigenvectores y Eigenvalores	19
2. Capítulo 2 "Construcción del Modelo"	24
2.1 Distribución de edades	26
2.2 Reemplazos	27
2.3 Mecanismos de egreso e ingreso al sistema	28
2.4 Análisis del comportamiento del proceso	33
2.5 Una primera aproximación	36
2.5.1 Evaluación de la Matriz del proceso	39
2.5.2 Observaciones	47

2.6 Automatización del modelo	48
2.6.1 Observaciones	60
3. Capítulo 3. "El Modelo Final"	61
3.1 Variables Económicas	63
3.2 Ejemplo de aplicación a la administración de un hato ganadero	65
3.2.1 Observaciones	87
Conclusiones	88
Referencias	90

PROLOGO

La necesidad de prever distintas eventualidades a ser enfrentadas por un productor en una explotación ganadera así como la organización de base de las explotaciones y la utilización futura más adecuada de los recursos de que se dispondrá, ha dado origen al presente modelo de simulación.

En México el 25% de la población no toma leche y el 55% no come carne regularmente. Ante ésta situación, las autoridades del país en materia de alimentación están interesadas en apoyar programas nacionales encaminados a lograr un incremento en la producción de alimentos, especialmente en áreas tropicales considerando que estas poseen un alto potencial de producción a corto plazo.

Este modelo se desarrolló tomando en cuenta las preocupaciones de los investigadores del Centro de Investigación, Enseñanza y Extensión en Ganadería Tropical (CIEEGT) (Tlapacoyan edo. de VER.) dependiente de la facultad de Medicina Veterinaria y Zootecnia de la Universidad Nacional Autónoma de México, donde la situación ganadera de la región tiene un papel importante a nivel nacional.

Solo la zona de Veracruz representa un 30% de la producción nacional de leche siendo en su mayoría ganado de doble propósito; esto es, que el ganado produce tanto leche como carne y se obtiene a partir de dos razas especializadas como son la Holstein y la Pardo Suizo cruzadas con el ganado de la zona especializado en carne, el Cebú.

La importancia de un modelo de simulación para la región radica en la mejor organización de la producción tanto de carne como de leche y que al mismo tiempo se esté beneficiando al productor, de

este modo, se pudiera pensar en extrapolarlo a nivel nacional siendo adaptable a cada región y a cada explotación.

En el capítulo uno se desarrolla parte de la teoría de procesos estocásticos que fué de gran utilidad para la construcción del modelo y corresponde principalmente a Cadenas de Markov finitas.

El capítulo dos muestra la construcción del modelo así como una aproximación hacia una situación real para comprobar la flexibilidad del modelo tomando en cuenta diferentes estrategias de explotación que puede sugerir un productor de ganado bovino.

Finalmente, el capítulo tres extiende el modelo propuesto para poder dar no solo un pronóstico para la situación demográfica del hato sino también para la económica y así determinar de acuerdo al tipo de explotación de hato que se elija, que repercusiones económicas resultan de éstas y si desde este punto de vista le conviene a un productor llevar a cabo tal explotación de su hato.

1 | CADENAS DE MARKOV.

1.1. Introducción.

Desde el punto de vista de la Probabilidad, un Proceso Estocástico se puede definir como un conjunto $(X(t), t \in T)$ de variables aleatorias, donde T es el conjunto índice del proceso mejor conocido como el parámetro del proceso y puede ser discreto o continuo.

A lo largo de todo este trabajo se denominará por estados del proceso a las diferentes categorías en que es posible clasificar a los individuos de una población. Si suponemos que en una institución educativa se clasifican a todos los alumnos que la componen de acuerdo al grado de escolaridad, sería posible modelar el paso de los escolares por los distintos grados que la conforman mediante Cadenas de Markov y así preguntarnos por las probabilidades de que ocurran (por ejemplo) los siguientes eventos:

- a) Que el alumno acredite al siguiente año escolar.
- b) Se gradúe.
- c) Abandone la escuela.
- d) Repruebe.

En el contexto de cadenas, estos eventos están dados por las probabilidades de pasar de un estado a otro en el caso de a) b) y c) y de permanecer en el mismo estado en el caso de d).

Existen sistemas en los cuales la probabilidad de que éste se encuentre en un estado dado en algún instante dado t_2 , se puede deducir del conocimiento del estado en el que se encontraba en un

instante cualquiera anterior t_1 y no depende del desarrollo del sistema antes del instante t_1 . Los procesos estocásticos que satisfacen esta condición se les conoce como Procesos de Markov y a este tipo de procesos que tienen un espacio de estados discreto sin importar la naturaleza del parametro se les conoce como Cadenas de Markov. En particular, a la condición antes mencionada se le conoce como Propiedad de Markov.

1.2 Probabilidades de Transición.

Definición 1. Sea \mathcal{L} un espacio finito de estados y (x_n) , $n \geq 0$ el estado en el que se encuentra el sistema al tiempo n . Entonces una Cadena de Markov es tal que para $n=0,1,2,3,\dots$ y para cualesquiera estados $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=x_{n+1} | X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n, X_{n+1}=x_{n+1}) \\ = P(X_{n+1}=x_{n+1} | X_n=x_n) \end{aligned} \quad (1)$$

A la probabilidad condicional (1) de que la cadena se encuentre en el estado x_{n+1} al tiempo $n+1$ dado que se encontraba en el estado x_n al tiempo n se le conoce como probabilidad de transición a un paso del estado x_n al x_{n+1} debido a que va del inicio de un periodo al final del mismo. Las probabilidades de transición se representan en forma matricial ya que resulta muy apropiado para simplificar calculos posteriores.

Sea

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & \dots & \dots & P_{1k} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & \dots & \dots & P_{2k} \\ P_{31} & P_{32} & \dots & \dots & \dots & P_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{k1} & P_{k2} & \dots & \dots & \dots & P_{kk} \end{pmatrix}$$

una matriz de transición con k estados.

Las entradas P_{ij} de esta matriz, denotan las probabilidades condicionales de que la cadena se encuentre en el estado x_j al final de un período, dado que se encontraba en el estado x_i al principio del mismo, y son tales que

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{ij} \geq 0 \\ \sum_{j=1}^k P_{ij} = 1 \text{ para } i = 1, \dots, k \end{array} \right.$$

A las matrices que cumplan con las propiedades arriba mencionadas se les denominará como matrices estocásticas.

1.3 Probabilidades de Transición a m-pasos.

Muchas veces resulta útil calcular probabilidades de transición varios periodos adelante y no solo uno como en el caso anterior, para tal efecto se utiliza la matriz de transición dada anteriormente. Denotaremos con $P^{(m)}(x,y)$ la probabilidad de ir del estado 'x' al 'y' exactamente en m pasos.

$$\text{Sea } P^{(m)}(x,y) = P\{X_{n+m} = y \mid X_n = x\}, \quad m \geq 2$$

la probabilidad de ir del estado 'x' al 'y' en m pasos.

Entonces

$$P^{(n+m)}(x,y) = P\{X_{n+m} = y \mid X_0 = x\}$$

$$= \sum_z P\{X_n = z \mid X_0 = x\} P\{X_{n+m} = y \mid X_0 = x, X_n = z\}$$

$$= \sum_z P^{(n)}(x,z) P\{X_{n+m} = y \mid X_0 = x, X_n = z\}$$

$$= \sum_z P^{(n)}(x,z) P^{(m)}(z,y). \quad (2)$$

y sea

$$P^{(0)}(x,y) = \begin{cases} 1, & x=y \\ 0, & \text{e.o.t.} \end{cases}$$

Ahora, haciendo $m=1$ en la ecuación (2) se tiene

$$P^{(n+1)}(x,y) = \sum_z P^{(n)}(x,z)P(z,y) \quad (3)$$

lo cual recuerda el producto matricial. Entonces (3) establece que, para obtener el elemento $P^{(n+1)}(x,y)$ de la matriz $P^{(n+1)}$ se tiene que multiplicar los elementos del renglón 'x' de la matriz $P^{(n)}$ por los elementos correspondientes a la columna 'y' de la matriz P y sumar todos los resultados. Teniendo esto en consideración, y haciendo ahora $n=1$ y $m=1$ en (2) se observa que la matriz de transición a dos pasos $P^{(2)}$ es el producto de la matriz P por ella misma. De manera más general, usando (3) se puede demostrar por inducción que la matriz de transición a n-pasos $P^{(n)}$ es la n-ésima potencia de la matriz P.

En (2) se observa que $P^{(n)}(x,z)$ y $P^{(m)}(z,y)$ son las entradas de la n-ésima y m-ésima potencias de la matriz de transición respectivamente. Además, es claro que (2) representa una probabilidad que engloba a todas las posibles trayectorias que existen para llegar de un estado 'x' a otro estado 'y' en n+m pasos.

Con fines de ejemplificación se propone la siguiente matriz de transición con 4 estados

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} E1 & E2 & E3 & E4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E1 \\ E2 \\ E3 \\ E4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.75 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

La 2a 3a y 4a potencias de esta matriz se muestran a continuación:

$$P^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} E1 & E2 & E3 & E4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E1 \\ E2 \\ E3 \\ E4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} 0.375 & 0 & 0.25 & 0.375 \\ 0.375 & 0.125 & 0.375 & 0.125 \\ 0.3125 & 0.125 & 0.25 & 0.3125 \\ 0.125 & 0.375 & 0 & 0.5 \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$P^3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} E1 & E2 & E3 & E4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E1 \\ E2 \\ E3 \\ E4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} 0.25 & 0.25 & 0.1875 & 0.3125 \\ 0.1875 & 0.28125 & 0.0625 & 0.46875 \\ 0.25 & 0.21875 & 0.15625 & 0.375 \\ 0.34375 & 0.0625 & 0.25 & 0.34375 \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$P^4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} E1 & E2 & E3 & E4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E1 \\ E2 \\ E3 \\ E4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} 0.265625 & 0.171875 & 0.15625 & 0.40625 \\ 0.320313 & 0.109375 & 0.234375 & 0.335938 \\ 0.28125 & 0.164063 & 0.1875 & 0.367188 \\ 0.25 & 0.234375 & 0.171875 & 0.34375 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Si se deseara determinar la probabilidad de llegar del estado 2 al 4 después de 4 periodos, haciendo uso de la fórmula (3) obtenemos que

$$P^{(4)}(2,4) = P^{(3)}(2,1)P(1,4) + P^{(3)}(2,2)P(2,4) + P^{(3)}(2,3)P(3,4) \\ = 0.335938$$

que es el valor correspondiente al segundo renglón y cuarta columna de la matriz de transición elevada a la cuarta potencia.

Así, cada vez que se quiera saber la probabilidad de llegar de un estado 'x' a otro estado 'y' después m periodos (m ≥ 2) la matriz de transición será de gran utilidad ya que al elevarla a la m-ésima potencia ese número estará contenido en la posición (x,y) de esta última matriz.

1.4 Probabilidades Incondicionales.

Dentro del contexto de probabilidades incondicionales de la cadena se mencionan tres casos, la distribución inicial, el vector de probabilidades intermedias y la distribución estacionaria.

La distribución inicial será un vector, cada una de cuyas componentes representa la correspondiente probabilidad de que la cadena esté al principio del primer periodo en cualquiera de sus estados.

Definición 2. La función $\pi_0(x)$, $x \in \mathcal{L}$, donde

$$\pi_0(x) = P(X_0 = x), \quad x \in \mathcal{L},$$

se le conoce como Distribución Inicial de la Cadena y es tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_0(x) \geq 0 \\ \sum_x \pi_0(x) = 1 \end{array} \right. \quad x \in \mathcal{L}.$$

Ahora, mediante la distribución inicial, es posible representar la distribución conjunta de la cadena como sigue

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, X_1 = x_1) &= P(X_0 = x_0) P(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \\ &= \pi_0(x_0) P(x_0, x_1). \end{aligned}$$

$$P(X_0=x_0, X_1=x_1, X_2=x_2) = P(X_0=x_0, X_1=x_1) P(X_2=x_2 | X_0=x_0, X_1=x_1),$$

usando la propiedad de markov se tiene

$$\begin{aligned} &= \pi_0(x_0) P(x_0, x_1) P(X_2=x_2 | X_1=x_1) \\ &= \pi_0(x_0) P(x_0, x_1) P(x_1, x_2). \end{aligned}$$

En general se tendrá que

$$P(X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_n=x_n) = \pi_0(x_0) P(x_0, x_1) P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, x_n).$$

Por otro lado, utilizando la distribución inicial de la cadena y la matriz de transición, encontramos una fórmula recursiva para actualizar esta distribución al paso del tiempo, la cual se presenta a continuación de dos formas

$$\begin{cases} \pi_n = \pi_0 P^n & \circ \\ \pi_{n+1} = \pi_n P \end{cases} \quad (4)$$

conocidas como probabilidades incondicionales intermedias.

Dentro del contexto de probabilidades incondicionales se encuentra también la distribución estacionaria de la cadena. Dicha distribución será útil para poder encontrar su comportamiento asintótico.

Haciendo uso de las ecuaciones dadas por (4), se tiene equivalentemente que

$$\pi_n = \pi_{n-1} P$$

de donde en el límite, si existe una distribución estacionaria se tendrá que

$$\pi = \pi P.$$

Definición 3. Sea $\{X_n\}$, $n \geq 0$ una Cadena de Markov con espacio de estados \mathcal{L} y función de transición P . Si $\pi(x)$, $x \in \mathcal{L}$, son números nonegativos tales que

$$\sum_x \pi(x) = 1 \quad y$$

$$\sum_x \pi(x) P(x,y) = \pi(y), \quad y \in \mathcal{L}, \quad (5)$$

entonces a π se le conoce como la distribución estacionaria de la Cadena de Markov.

1.5 Clasificación de estados.

Dentro del contexto de Cadenas de Markov, los estados se pueden clasificar en recurrentes, transitorios y absorbentes, para ésto será necesario hacer uso de la siguiente

Definición 4. Sea $\{X_n\}$, $n \geq 0$ una Cadena de Markov con espacio de estados \mathcal{L} y función de transición P .

Diremos que 'x' conduce a 'y' si existe alguna $n \geq 0$ tal que

$$P^{(n)}(x, y) > 0$$

incluyendo el caso $x=y$.

Definición 5. Un conjunto C de estados se llama cerrado si

$$P^{(n)}(x, y) = 0 \text{ para } x \in C, y \notin C$$

para toda $n \geq 1$

Definición 5.1 Un conjunto cerrado (C) es irreducible, si para cualesquiera estados $x, y \in C$ (no necesariamente distintos) existe alguna $n \geq 0$ tal que $P^{(n)}(x, y) > 0$.

1.5.1 Estados Absorbentes.

Haciendo uso de las definiciones anteriores, podemos decir que un estado es absorbente si una vez que es alcanzado es imposible salir de él. Por lo tanto un sólo estado (x) que forma un conjunto cerrado (C) es absorbente; es decir

$$P^{(n)}(x,y)=0 \quad x \in C, \quad y \notin C \quad \forall n \geq 1,$$

y como en toda matriz estocástica

$$\sum_j P_{ij}^{(n)} = 1, \quad \forall n \geq 1$$

se tiene en consecuencia una probabilidad igual a 1 asignada a este estado de permanecer en él mismo.

1.5.2 Cadenas Irreducibles.

Definición 6. Una Cadena de Markov es irreducible si a todo estado se puede llegar desde cualquier otro estado.

Ahora, usando las definiciones de la sección anterior tenemos equivalentemente el siguiente

Teorema. Una Cadena de Markov es irreducible, si el único conjunto cerrado e irreducible que existe es el conjunto de todos los estados.

Más adelante, se verá que este tipo de cadenas resultan ser recurrentes o transitorias dependiendo del espacio de estados que se tenga.

1.5.3 Estados Recurrentes y Transitorios.

A lo largo de esta sección, se denotará como ρ_{xy} a la probabilidad de llegar del estado 'x' al 'y' en algún tiempo $n=1,2,3,\dots$. Haciendo uso de esto tenemos la siguiente

Definición 81. Un estado 'y' es recurrente si $\rho_{yy} = 1$ y transitorio si $\rho_{yy} < 1$.

De aquí, es fácil ver que si un estado es absorbente entonces es recurrente; aunque no necesariamente el recíproco es cierto.

Con el fin de poder hablar de las propiedades y diferencias entre estos dos tipos de estados se darán algunas definiciones.

Sea $1_y(X_n)$ una función indicadora que toma el valor de 1 si la cadena se encuentra en el estado 'y' al tiempo n y toma el valor de 0 en caso contrario. Entonces si se denota a $N(y)$ como el número de visitas al estado 'y' se tiene que

$$N(y) = \sum_n 1_y(X_n).$$

Entonces, para determinar la probabilidad de que $N(y)$ sea igual a m habiendo partido de un estado cualquiera 'x', sería útil pensar en pasar por el estado 'y' una primera vez y luego regresar a él m-1 veces posteriores pero con la condición de que una vez que se ha visitado las m veces no se regrese a él, es decir

$$P_x(N(y) = m) = \rho_{xy} \rho_{yy}^{m-1} (1 - \rho_{yy}) \quad m \geq 1. \quad (6)$$

De aquí, podemos extraer la probabilidad de que $N(y)$ sea al menos m habiendo partido de otro estado 'x' si en la expresión anterior eliminamos la probabilidad de que una vez que ya lo visitó m veces no regrese a él; es decir

$$P_x(N(y) \geq m) = \rho_{xy} \rho_{yy}^{m-1} \quad m \geq 1. \quad (7)$$

Ahora, utilizando la ecuación (7) y suponiendo que 'y' es un estado transitorio, se verá que el número de visitas a éste estado será finito sin importar de donde partió la Cadena de Markov.

Puesto que 'y' es transitorio se tiene que $0 \leq \rho_{yy} < 1$. entonces,

$$\begin{aligned} P_x(N(y) = \infty) &= P_x(N(y) \geq m) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{xy} \rho_{yy}^{m-1} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{xy} \rho_{yy}^{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Otro resultado de gran utilidad es poder calcular el número esperado de visitas a un estado 'y' partiendo de otro estado 'x'. Denotemos por $G(x,y)$ a dicho número y por $E_x(\cdot)$ a la esperanza de variables aleatorias definidas en términos de Cadenas de Markov y que parten del estado 'x'.

Entonces

$$\begin{aligned}
 G(x, y) &= E_x(N(y)) = E_x\left(\sum_n 1_y(X_n)\right) \\
 &= \sum_n E_x(1_y(X_n)) \\
 &= \sum_n P_x(X_n=y) \\
 &= \sum_n P^{(n)}(x, y) .
 \end{aligned}$$

Ahora, usando ésto y suponiendo nuevamente que 'y' es un estado transitorio, se verá que su número esperado de visitas es finito ya que

$$\begin{aligned}
 G(x, y) &= E_x(N(y)) = \sum_{m=0}^{\infty} m P(N(y) = m) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} m \rho_{xy} \rho_{yy}^{m-1} (1 - \rho_{yy}) \\
 &= \rho_{xy} (1 - \rho_{yy}) \sum_{m=0}^{\infty} m \rho_{yy}^{m-1} \\
 &= \rho_{xy} (1 - \rho_{yy}) / (1 - \rho_{yy})^2 \\
 &= \rho_{xy} / (1 - \rho_{yy}) < \infty ;
 \end{aligned}$$

Por consiguiente como

$$G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(x, y) < \infty, \quad x \in \mathcal{E}$$

se tiene en consecuencia que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(x, y) = 0, \quad x \notin \mathcal{L}. \quad (8)$$

Por otro lado, si 'y' es un estado recurrente, la cadena lo visitará un número infinito de veces, ya que $\rho_{yy} = 1$ y de acuerdo a (7) se tiene que

$$P_x(N(y) = \infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_x(N(y) \geq m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{xy} \rho_{yy}^{m-1} = \rho_{xy},$$

y en particular

$$P_y(N(y) = \infty) = 1.$$

Además si 'y' es recurrente se tendrá que

$$G(x, y) = \infty.$$

1.6 Eigenvalores y Eigenvectores.

La presente sección, pretende mostrar un poco la teoría de la descomposición de una matriz cuadrada (P) en términos de sus eigenvectores y eigenvalores puesto que más adelante nos será de gran utilidad.

Supongamos que las raíces de la ecuación característica

$$| P - \lambda I | = 0$$

son distintas.

Entonces, para cada eigenvalor λ_j es posible hallar los correspondientes eigenvectores derecho e izquierdo x_j, y_j' , de tal manera que las ecuaciones

$$P x_j = \lambda_j x_j \quad \text{y} \quad y_j' P = \lambda_j y_j' \quad (9)$$

tienen como soluciones no triviales a x_j y a y_j' .

Sean $H = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_k]$ $K = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_k]$

las correspondientes matrices de eigenvectores derechos e izquierdos respectivamente. Entonces de acuerdo a (9) tenemos las equivalentes ecuaciones

$$PH = HA, \quad K'P = AK' \quad (10)$$

y

$$P = H \Lambda H^{-1} = (K')^{-1} \Lambda K' \quad (11)$$

donde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}$$

y además se tendrá que

$$\begin{aligned} K' H \Lambda H^{-1} &= \Lambda K' \Rightarrow K' H \Lambda H^{-1} (K')^{-1} = \Lambda \\ &\Rightarrow K' H = I \\ \therefore K' &= H^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Ahora, haciendo uso de (12), también es posible representar la matriz P de la siguiente manera

$$P = \sum_{j=1}^k \lambda_j \beta_j \quad (13)$$

y donde $\beta_j = \sum_j \alpha_j'$ $j = 1, \dots, k$

Entonces, utilizando (13) se puede calcular la n-ésima potencia de la matriz P como sigue

$$P^n = \sum_{j=1}^k \lambda_j^n \beta_j \quad (14)$$

Cabe mencionar, que a β_j se le conoce como la descomposición espectral de la matriz P, y que cumple con las siguientes propiedades

$$\begin{cases} \beta_i \beta_j = 0, & i \neq j \\ \beta_i \beta_i = \beta_i & i=j \\ \sum_{j=1}^k \beta_j = I \end{cases}$$

Las tres propiedades resultan de (12) ya que

$$(Y_i' X_j) = 0 \quad \forall i \neq j \quad \text{y} \quad (Y_j' X_i) = 1 \quad i=j$$

Por lo tanto

$$\beta_i \beta_j = (X_i' Y_i')(X_j Y_j') = (Y_i' X_j)(X_i Y_j') = 0$$

$$\beta_j \beta_j = (X_j Y_j')(X_j Y_j') = (Y_j' X_j)(X_j Y_j') = (X_j Y_j') = \beta_j$$

$$\sum \beta_j = HK' = I$$

Es importante hacer notar que el cálculo anterior puede realizarse también a partir de (11) obteniendo que

$$P^n = H \Lambda^n H^{-1}.$$

Aprovechando lo que se ha hablado en esta sección, se puede afirmar que toda matriz estocástica tiene asociado el eigenvector $\underline{1}$ y por consiguiente el eigenvalor 1.

Esto se deriva del hecho de que toda matriz estocástica (P) cumple con que

$$P \underline{1} = [1, 1, \dots, 1]'$$

lo cual recuerda las ecuaciones dadas por (9).

Además, usando el teorema de Perron-Frobenius, es posible garantizar que no existe ningún otro eigenvalor de P cuya norma exceda a 1; es decir

$$\max_i |\lambda_i| \leq \min \left(\max_i \sum_{j=1}^k P_{ij}, \max_j \sum_{i=1}^k P_{ij} \right)$$

Considerando lo anterior, afirmamos que ninguna Cadena de Markov finita e irreducible podrá tener solamente estados transitorios.

Para probar esto, se sabe ya que

$$P^n = H \Lambda^n H^{-1}$$

y como P tiene asociado entre sus eigenvalores al 1, sucedera que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n \neq 0$$

lo cual contradice la ecuación (8).

Por otro lado, si la cadena es irreducible y existe al menos un estado recurrente, entonces todos los estados serán recurrentes.

2 | CONSTRUCCION DEL MODELO.

La construcción del modelo está basada principalmente en la teoría de Cadenas de Markov que se ha mencionado con anterioridad. Cada animal de la población que se pretende modelar constituye una realización del proceso. Por lo tanto las realizaciones de la cadena difícilmente serán iguales ya que los animales al inicio del estudio tienen edades diferentes. No obstante, debe quedar claro que no se analizará lo que suceda a cada animal en particular sino al conjunto de ellos.

En el estudio de la evolución de nuestra población, es de interés saber cual será su distribución de edades después de n periodos tomando en cuenta diferentes estrategias de explotación de hato. Esto se debe básicamente al hecho de que un ganadero, podrá tener mayor producción tanto de leche como de carne si logra que la mayoría de sus animales se encuentren en edades jóvenes al paso del tiempo. Para esto definiremos posteriormente a la distribución de edades de la cadena.

La población a la que se le ajustara el modelo forma un grupo abierto; es decir, además de las salidas que ocurran en el sistema, habrá también entradas de nuevos animales al paso del tiempo.

Se ha supuesto que las salidas serán ocasionadas por la muerte y la venta de animales en cada periodo de proyección.

Por otra parte, se ha supuesto también que las entradas ocurran de la siguiente manera:

a) Ingresen al sistema nuevos animales que reemplazarán a los que murieron o a algunos de éstos en algún periodo de proyección en

particular. Asimismo, reemplazar a todos o a algunos de los que se vendieron.

b) de los sobrevivientes en un determinado periodo, se seleccione a los adultos que estén en edad de parir (de acuerdo a la distribución de edades) y de esta manera puedan entrar al sistema los hijos de los animales que tuvieron partos.

Para el presente modelo se ha considerado que éstos, son los únicos fenómenos demográficos que influyen en la evolución de la población.

Como se parte de una matriz de transición cuyas entradas representan solamente las probabilidades de sobrevivir de un estado a otro, se incorporarán a ésta en forma vectorial los valores tanto de las salidas como de entradas al sistema.

De esta manera, se podrá contabilizar periodo a periodo los cambios que sufre la población en cuanto a los animales que la abandonan, los que ingresan y los que permanecen con vida.

Dichos vectores serán denominados como:

- 1) Supervivencia.
- 2) Muerte.
- 3) Venta.
- 4) Reemplazos.
- 5) Partos.

A partir de este momento, cada vez que se haga referencia a los reemplazos nos estaremos refiriendo explícitamente a la compra de animales.

2.1 Distribución de edades.

Por medio de la distribución de edades de la cadena será posible saber cual será la distribución promedio de edades o tamaños dentro de la población. Esta distribución estará dada por los porcentajes que los individuos de una edad determinada representan del total de la población ya sea al inicio del estudio o en algún periodo de proyección en particular.

Haciendo uso de esta distribución, resulta de una manera muy sencilla agrupar al total de la población de acuerdo a sus edades. Así, la distribución de edades de la cadena al inicio del i -ésimo periodo se denotará como

$$\underline{d}^{(i)} = (d_1^{(i)}, d_2^{(i)}, d_3^{(i)}, d_4^{(i)}, \dots, d_k^{(i)}) \quad i = 0, \dots, n. \quad (1)$$

En particular, la distribución de edades al inicio del primer periodo se denotará como

$$\underline{d}^{(0)} = (d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, d_3^{(0)}, d_4^{(0)}, \dots, d_k^{(0)})$$

Además cumple con las siguientes propiedades

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{e=1}^k d_e^{(0)} = 1 \\ d_e^{(i)} \geq 0 \quad e = 1, \dots, k \quad i = 0, \dots, n \end{array} \right.$$

en donde se observa que la suma de sus componentes será uno al inicio del primer periodo; después de esto, su suma podrá o no volver a ser igual a 1 dependiendo del comportamiento que tenga la evolución de la población.

2.2 Reemplazos.

En las poblaciones que forman un grupo abierto como lo es el caso que se pretende modelar, puede pensarse en la incorporación a la población de tantos nuevos individuos como se quiera para aumentar su tamaño, sin embargo, los nuevos ingresantes bien podrían reemplazar solamente a aquellos que abandonan la población ya sea en su totalidad o solo a un porcentaje.

Es importante hacer notar que los reemplazos vendrán dados en forma única; es decir, se reemplazará conjuntamente a los animales que resulten de la suma de las muertes y las ventas. Es claro que esto no impide que en algún momento las causas de egresos del sistema aumenten.

El vector de reemplazos se denotará de la siguiente manera

$$\underline{c}^{(i)} = (c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, c_3^{(i)}, c_4^{(i)}, \dots, c_k^{(i)}) \quad (2)$$

que indica que un porcentaje $100c_1^{(i)}\%$ de los nuevos ingresantes en el periodo i -ésimo tiene la edad 1, un $100c_2^{(i)}\%$ tiene edad 2, etc.

Además será tal que

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^k c_e^{(i)} &= 1 \quad i = 1, \dots, n \\ \text{y} \quad c_e^{(i)} &\geq 0 \quad e = 1, \dots, k, \quad i = 0, \dots, n \end{aligned}$$

Cuando se quiera reemplazar en la población menos animales de los que salieron del sistema, simplemente se pre-multiplicará este vector por una constante (Z) .

2.3 Mecanismos de Egreso e Ingreso al sistema.

La matriz de transiciones asociada a la población que se va a modelar ayudará a encontrar los vectores restantes (supervivencia, abandono, partos).

Como la Cadena de Markov es finita, se tienen en consecuencia k posibles estados (edades), y como ya vimos, dos causas de abandono que son muerte y venta; denotemos a estos estados por $S1$ y $S2$ respectivamente. Entonces la matriz de transiciones tiene la forma

$$R = \begin{array}{c} E1 \\ E2 \\ E3 \\ E4 \\ \dots \\ EK \\ S1 \\ S2 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|cc} E1 & E2 & E3 & E4 & E5 & \dots & EK & S1 & S2 \\ \hline 0 & P_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q_{11} & q_{12} \\ 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & q_{21} & q_{22} \\ 0 & 0 & 0 & P_3 & 0 & \dots & 0 & q_{31} & q_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_4 & \dots & 0 & q_{41} & q_{42} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q_{k1} & q_{k2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Donde las potencias de esta matriz contendrán las probabilidades de transición a n pasos $n=1,2,\dots$

Para expresar de una forma más clara la incorporación de estos últimos vectores, considere la siguiente partición de la matriz original R

$$R = \left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

donde P contiene las probabilidades de sobrevivencia dentro del sistema, y Q las probabilidades de egresos del mismo.

Entonces, haciendo uso de la distribución inicial y la partición dada para R , se tiene de manera recursiva una fórmula para hallar los sobrevivientes de la cadena al inicio del $(i+1)$ -ésimo período dada por

$$\underline{d}^{(i)} = P \underline{d}^{(i-1)} \quad (3)$$

De la misma manera, el porcentaje de individuos que a lo largo del i -ésimo período abandonaron el sistema está dado por

$$\underline{d}^{(i)} = Q \underline{1} \quad (4)$$

donde $\underline{1}$, es un vector columna de dimensiones apropiadas cuyas componentes son iguales a uno y el objetivo del producto es sumar las columnas de Q , que como hablamos dicho representan a las probabilidades de que los animales mueran ó sean vendidos a determinada edad.

Ahora, incorporando en la expresión (4) el vector que define a los reemplazos en la cadena y usando (3), obtenemos que la nueva distribución de edades para los sobrevivientes al inicio del $(i+1)$ -ésimo período está dada por

$$\underline{d}^{(i+1)} = \underline{d}^{(i)} P + \underline{d}^{(i)} \Phi \underline{1} \underline{c}'$$

o, equivalentemente,

$$\underline{d}^{(i+1)} = \underline{d}^{(i)} (P + \Phi \underline{1} \underline{c}') = \underline{d}^{(i)} H.$$

La incorporación a la población de los nuevos individuos que reemplazan a los que salieron, define una nueva Cadena de Markov cuya matriz de transición H se muestra enseguida

$$H = \begin{pmatrix} 0 & P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & P_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{11} + q_{12} \\ q_{21} + q_{22} \\ q_{31} + q_{32} \\ \dots \\ q_{k1} + q_{k2} \end{pmatrix} (c_1, c_2, c_3, \dots, c_k)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{matrix} & E1 & E2 & E3 & \dots & EK \\ E1 & (q_{11} + q_{12})c_1 & (q_{11} + q_{12})c_2 + P_1 & (q_{11} + q_{12})c_3 & \dots & (q_{11} + q_{12})c_k \\ E2 & (q_{21} + q_{22})c_1 & (q_{21} + q_{22})c_2 & (q_{21} + q_{22})c_3 + P_2 & \dots & (q_{21} + q_{22})c_k \\ E3 & (q_{31} + q_{32})c_1 & (q_{31} + q_{32})c_2 & (q_{31} + q_{32})c_3 & \dots & (q_{31} + q_{32})c_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ EK & (q_{k1} + q_{k2})c_1 & (q_{k1} + q_{k2})c_2 & \dots & \dots & (q_{k1} + q_{k2})c_k \end{matrix}$$

La cual, teniendo en cuenta que

$$P_i + q_{i1} + q_{i2} = 1 \quad i = 1, \dots, k$$

y suponiendo que se reemplacen a todos los animales que abandonan el sistema durante el periodo i -ésimo, se tendrá una nueva matriz estocástica.

Por último, se incorporará a las expresiones anteriores el vector correspondiente a las tasas de natalidad, éste se denotará de la siguiente manera

$$\underline{n}' = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_k), \quad 0 \leq v_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, k,$$

y sus componentes serán iguales a cero cuando en alguna edad existan individuos que no estén aún en edad de parir. Así, incorporando estas tasas a la anterior matriz, se obtiene la nueva distribución de sobrevivientes al inicio del $(i+1)$ -ésimo periodo como sigue

$$\underline{d}^{(i+1)'} = \underline{d}^{(i)'} (P + Q \underline{1} \underline{e}' + \underline{n} \underline{e}'_1) = \underline{d}^{(i)'} Z, \quad (5)$$

donde

$$\underline{e}'_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

ya que los nuevos ingresantes se incorporarán sólo a edad E_1 . Aún cuando se reemplacen a todos los animales que salen del sistema periodo a periodo, la incorporación de las tasas de natalidad a la anterior matriz W , ocasionará (en nuestro caso particular) que en (5), la matriz que se encuentra entre paréntesis ya no sea estocástica; a menos que todas las componentes del vector \underline{n}' sean iguales a cero.

Así, la matriz (Z) que representará la evolución de la población estará dada por

$$\begin{array}{l}
 \text{E1} \\
 \text{E2} \\
 \text{E3} \\
 \vdots \\
 \text{EK}
 \end{array}
 \left[
 \begin{array}{cccc}
 \text{E1} & \text{E2} & \text{E3} & \text{EK} \\
 v_1 + (q_{11} + q_{12})c_1 & (q_{11} + q_{12})c_2 + P_1 & (q_{11} + q_{12})c_3 & \dots (q_{11} + q_{12})c_k \\
 v_2 + (q_{21} + q_{22})c_1 & (q_{21} + q_{22})c_2 & (q_{21} + q_{22})c_3 + P_2 & \dots (q_{21} + q_{22})c_k \\
 v_3 + (q_{31} + q_{32})c_1 & (q_{31} + q_{32})c_2 & (q_{31} + q_{32})c_3 & \dots (q_{31} + q_{32})c_k \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 v_k + (q_{k1} + q_{k2})c_1 & (q_{k1} + q_{k2})c_2 & \dots & \dots (q_{k1} + q_{k2})c_k
 \end{array}
 \right]$$

Ahora, utilizando la fórmula recursiva final dada por (5) para actualizar la distribución de edades, es posible calcular un nuevo vector que contenga los números esperados de los individuos que al paso del tiempo hay en cada uno de los estados del proceso. Esta se verá como sigue

$$\mu^{(i+1)'} = N \langle \underline{d}^{(i)'} (P + Q \underline{1} \underline{e}' + \underline{n} \underline{e}'_1) \rangle, \quad (6)$$

donde N representa el tamaño de la población al inicio del estudio.

2.4 Análisis del comportamiento del proceso.

Hemos visto ya que la matriz que ha resultado para el modelado de la población no es estocástica. Por lo tanto no necesariamente existirá la distribución estacionaria (5) dada en el capítulo anterior. En consecuencia, es de interés saber que pasará entonces con la evolución de la población. La representación de una matriz cuadrada con entradas no negativas en términos de sus eigenvectores y eigenvalores será de gran utilidad para encontrar el comportamiento del proceso.

Si se recuerda la descomposición espectral que se mencionó en el capítulo 1, es fácil darse cuenta de que si el máximo eigenvalor de una matriz P es mayor que 1 se tendrá que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda^n = \infty,$$

por lo tanto las entradas de la matriz P tenderán a crecer sin cota. El hecho de pre-multiplicar a esta última matriz por el vector que define a la distribución de edades, provocará que la población explote.

Por otro lado, si el máximo de los eigenvalores es menor que uno se tendrá que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda^n \rightarrow 0$$

por lo tanto las entradas de P convergen a cero y al pre-multiplicar P por la distribución de edades la población se

extinguirá.

Cabe mencionar que la rapidez con la que se de la explosión o extinción dependerá de la relación que guarda este valor con uno.

Ahora, si suponemos que la matriz P es estocástica y que todos sus eigenvalores son distintos (en norma), ésta tendrá asociado el

eigenvalor 1 y por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ se reducirá a una sola matriz en donde la única entrada positiva tendrá el valor de 1.

Por esta razón, las entradas de P se estacionarán en un determinado valor y al pre-multiplicar esta matriz por la distribución de edades la población tenderá a estabilizarse.

Se ha dicho también que se parte de un vector inicial de edades cuyas componentes suman a uno. De aquí, es claro que si la matriz del modelo no es estocástica las componentes de este vector ya no volverán a sumar la unidad. Y más aún, ya no necesariamente existirá la distribución estacionaria (5) que se mencionó en el capítulo 1.

Sin embargo, aún cuando la población crezca o decrezca sin cota, se antoja pensar en encontrar una nueva distribución que permita saber (en promedio), que porcentaje de animales habrá de cada edad; aunque la población esté explotando. De la misma manera para el caso en que se esté extinguiendo y hasta que sus componentes sean iguales a cero.

A continuación se muestra dicha distribución, la cual es una estandarización a la expresión (5) de este capítulo.

$$E^{(t+1)'} = (d^{(t)})' (P + Q \underline{1} \underline{e}' + n \underline{e}'_1) \cdot K^{(t)} \quad (7)$$

$$\text{con } K^{(t)} = (d^{(t)})' (P + Q \underline{1} \underline{e}' + n) \underline{1} \underline{e}'^{-1}.$$

2.5. Una primera aproximación.

A continuación se presenta con base en lo que se ha expuesto, una aplicación acerca de la evolución de un hato ganadero. Las estrategias de explotación que se mencionarán son hipotéticas ya que el objetivo es mostrar únicamente cuales son los alcances del modelo que se ha desarrollado hasta este momento.

Se parte originalmente de una población de 109 animales repartidos entre 13 diferentes edades

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
20	20	15	10	10	15	9	10	0	0	0	0	0

de aquí tenemos que

$$d^{(0)} = (0.18, 0.18, 0.14, 0.092, 0.092, 0.14, 0.093, 0.092, 0.0, 0.0, 0.0)$$

Se quiere reponer un 11% del total de animales que abandonen el hato por animales de edad (E5)

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
0	0	0	0	11%	0	0	0	0	0	0	0	0

De este modo, la constante es $Z = .11$ y

$$e' = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Por otra parte, solamente habrá ventas de animales de edad E3 en adelante de la siguiente manera

El 50% de los animales de edades E3 y E4, el 70% de edades E5, E7, E8 y el 80% de los animales de cada una de las edades restantes

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
0	0	50%	50%	80%	70%	70%	70%	80%	80%	80%	80%	80%

obteniendo que

$$S_2' = (0, 0, .5, .5, .8, .7, .7, .7, .8, .8, .8, .8, .8)$$

Además, de acuerdo a la información, las tasas de mortalidad del hato indican que fallecen un 5% de los animales de edades E1 y E2, el 10% de edades E3, E4, E5, el 15% de edades E6, E7, E8, y el 20% de los animales restantes de cada edad, ya sea por enfermedad ó alguna otra causa

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
5%	5%	10%	10%	10%	15%	15%	15%	20%	20%	20%	20%	20%

de donde

$$S_1' = (.05, .05, .1, .1, .1, .15, .15, .15, .2, .2, .2, .2, .2)$$

Finalmente, su experiencia en el hato le indica que solamente el 70% de los animales de edades E4, E5, E6, E7 y E8 y el 60% de los de edad E3 se reproducen

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
0	0	60%	70%	70%	70%	70%	70%	0	0	0	0	0

obteniendo que

$$n' = (0, 0, 0.6, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0, 0, 0, 0, 0)$$

2.5.1 Evaluación de la Matriz del Proceso.

Incorporando los valores de las tasas de mortalidad, venta y sobrevivencia a la matriz R llegamos primeramente a

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	S1	S2
E1	0	.95	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.05	0
E2	0	0	.95	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.05	0
E3	0	0	0	.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.1	.5
E4	0	0	0	0	.4	0	0	0	0	0	0	0	0	.1	.5
E5	0	0	0	0	0	.1	0	0	0	0	0	0	0	.1	.8
E6	0	0	0	0	0	0	.15	0	0	0	0	0	0	.15	.7
E7	0	0	0	0	0	0	0	.15	0	0	0	0	0	.15	.7
E8	0	0	0	0	0	0	0	0	.15	0	0	0	0	.15	.7
E9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.20	.8
E10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.20	.8
E11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.20	.8
E12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.20	.8
E13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.20	.8
S1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
S2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Haciendo uso de la fórmula (6) y de la partición dada para la matriz estocástica que se muestra arriba es posible calcular los números esperados tanto de los animales que sobreviven a su siguiente edad como de los que abandonan el hato en algún periodo en particular.

El número esperado de animales que permanecen en la población estará dado por $N \underline{q}^{(u)'} \underline{P} \underline{1}$, donde N representa el tamaño de la población original.

Mientras que el número esperado de abandonos en el hato está dado por $N \underline{d}^{(1)} \underline{Q} \underline{1}$.

Si ahora consideramos a los vectores que definen tanto a las tasas de natalidad como de reemplazos se tendrá en consecuencia que los números esperados de nacimientos estarán dados por $N \underline{d}^{(1)} \underline{n}$.

Y finalmente, los que corresponden a los reemplazos estarán dados por $N (\underline{d}^{(1)} (\underline{Q} \underline{1} \underline{c}')) \underline{1}$.

Ahora, utilizando la matriz \underline{Z} dada con anterioridad, se incorporarán los valores restantes obteniendo así:

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
E1	0	.95	0	0	.0053	0	0	0	0	0	0	0	0
E2	0	0	.95	0	.0053	0	0	0	0	0	0	0	0
E3	.6	0	0	.4	.0636	0	0	0	0	0	0	0	0
E4	.7	0	0	0	.4636	0	0	0	0	0	0	0	0
E5	.7	0	0	0	.0954	.1	0	0	0	0	0	0	0
E6	.7	0	0	0	.0901	0	.15	0	0	0	0	0	0
E7	.7	0	0	0	.0901	0	0	.15	0	0	0	0	0
E8	.7	0	0	0	.0901	0	0	0	.15	0	0	0	0
E9	0	0	0	0	.106	0	0	0	0	0	0	0	0
E10	0	0	0	0	.106	0	0	0	0	0	0	0	0
E11	0	0	0	0	.106	0	0	0	0	0	0	0	0
E12	0	0	0	0	.106	0	0	0	0	0	0	0	0
E13	0	0	0	0	.106	0	0	0	0	0	0	0	0

que como era de esperarse ya no cumple la condición de ser estocástica.

Ahora, las potencias de esta matriz contendrán las "probabilidades de transición" a n pasos ($n=1,2, \dots$) y

$$\underline{d}^{(i)} = \underline{d}^{(0)} \underline{Z}^{(i)} = \underline{d}^{(i-1)} \underline{Z} \quad (14)$$

representará la distribución de edades de los individuos vivos en el sistema al inicio del i -ésimo período.

Se ha mencionado ya que cada animal de nuestra población constituye una realización del proceso y que en consecuencia cada uno tendrá (en algún momento) que abandonar el sistema. Por tal motivo, estrictamente hablando será imposible decir que existen estados recurrentes en el proceso pues cada animal podrá enfrentar solamente una vez la posibilidad de visitar los estados subsecuentes. Sin embargo, una vez que se incorporaron las tasas de natalidad y de reemplazo al modelo, se ve que los estados que fueron visitados en principio por los animales que originalmente iniciaron el proceso seguirán siendo visitados; solo que ahora será por los hijos de todos aquellos animales que al paso del tiempo vayan pariendo y por los que reemplacen a los que abandonaron el sistema respectivamente.

Ahora, bajo el supuesto de que fuera un mismo individuo el que tuviera el comportamiento anterior, es posible hallar un conjunto de estados que sea cerrado e irreducible y por lo tanto recurrente.

Por otro lado, teniendo en cuenta el mismo supuesto, y haciendo uso de la expresión (8) del capítulo 1 se podrán encontrar los estados transitorios.

Así pues, en la siguiente matriz se muestran los estados (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8 E9) que resultaron ser "recurrentes" (+) y (E10, E11, E12, E13) "transitorios" (0).

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
E1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0
E2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0
E3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0
E4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0
E5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0
E6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0
E7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0
E8	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0
E9	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0
E10	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0
E11	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0
E12	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0
E13	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0

Ahora , haciendo uso de la representación dada por la teoría de los eigenvalores de la matriz Z , será posible encontrar el comportamiento del proceso; es decir, si las estrategias sugeridas causan una explosión o extinción de la población.

Por otro lado, en vista de que en este ejemplo la matriz resultó no ser estocástica, se usará la distribución estandarizada (7) que se mencionó en la sección 2.4 .

A continuación se muestran los eigenvalores de la matriz Z

(0, 0, 0, 0, 0.99998, $-0.203 + 0.681i$, $-0.203 - 0.681i$,
 $-0.212 + 0.308i$, $-0.212 - 0.308i$, $0.023 + 0.150i$, $0.023 - 0.150i$,
 -0.157 , 0.035).

de donde se observa que el mayor de ellos es menor que 1. Teniendo esto en consideración, la población tenderá a disminuir con el tiempo pero muy lentamente ya que este valor es muy cercano a 1.

A continuación se muestra el resultado de aplicar la fórmula (14) para 24 periodos de proyección. Para conocer el número de animales que sobreviven por periodo en cada edad basta hacer uso de la expresión (6). Esta metodología sólo permitirá saber que tanto ha crecido o disminuido la población al final de los 24 periodos o en alguno en particular.

El primer renglón corresponde a los sobrevivientes (5) al inicio del $i+1$ -ésimo periodo y el segundo a la distribución estandarizada.

DISTRIBUCION INICIAL DE ERRORES														
E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	TOTAL	
0.187466	0.183486	0.177615	0.091743	0.091743	0.137615	0.027523	0.091743	0	0	0	0	0	1.000000	
PERIODO 1														
0.429253	0.174311	0.174311	0.055046	0.060086	0.009174	0.021642	0.022585	0.01	0	0	0	0	0.979077	
DISTR. EST														
0.438533	0.179326	0.178036	0.056222	0.052314	0.009370	0.021087	0.012549	0.01	0	0	0	0	1	
PERIODO 2														
0.235720	0.107890	0.165595	0.069724	0.053660	0.009608	0.001376	0.002096	0.00	0	0	0	0	0.947231	
DISTR. EST														
0.248665	0.130295	0.174692	0.073354	0.056607	0.009503	0.001451	0.002268	0.00	0	0	0	0	1	
PERIODO 3														
0.195163	0.223934	0.187493	0.066238	0.052759	0.005366	0.001351	0.000205	0.00	0	0	0	0	0.933019	
DISTR. EST														
0.209174	0.240010	0.115313	0.070993	0.056588	0.005751	0.001448	0.000221	0.00	0	0	0	0	1	
PERIODO 4														
0.320669	0.185405	0.212728	0.154998	0.063284	0.005279	0.000804	0.000202	0.00	0	0	0	0	0.947464	
DISTR. EST														
0.339903	0.196526	0.225498	0.164293	0.067079	0.005594	0.000953	0.000214	0.00	0	0	0	0	1	
PERIODO 5														
0.294891	0.364626	0.176135	0.085093	0.094626	0.006328	0.000791	0.000122	0.00	0	0	0	0	0.952656	
DISTR. EST														
0.299977	0.319775	0.184888	0.089324	0.092381	0.006642	0.000831	0.000126	0.00	0	0	0	0	1	
PERIODO 6														
0.220630	0.270579	0.235404	0.070434	0.063464	0.009467	0.000949	0.000118	0.00	0	0	0	0	0.941066	
DISTR. EST														
0.251406	0.287545	0.307527	0.074866	0.067428	0.010660	0.001008	0.000126	0.00	0	0	0	0	1	
PERIODO 7														
0.274760	0.224760	0.257049	0.115761	0.063762	0.006266	0.001420	0.000142	0.00	0	0	0	0	0.931042	
DISTR. EST														
0.271974	0.238842	0.273175	0.123014	0.064539	0.006744	0.001504	0.000151	0.00	0	0	0	0	1	

PERIODO 8									
0.263245	0.281022	0.212522	0.102527	0.079175	0.004676	0.000951	0.000157	0.00	0.947113
DIST. EST									
0.279151	0.275585	0.275475	0.109544	0.097351	0.004415	0.001005	0.000124	0.00	1
PERIODO 9									
0.260534	0.269177	0.247971	0.025409	0.072234	0.007917	0.000911	0.000142	0.00	0.944491
DIST. EST									
0.272697	0.284997	0.262545	0.093428	0.074595	0.008182	0.001045	0.000151	0.00	1
PERIODO 10									
0.265470	0.247555	0.255718	0.199188	0.065397	0.007234	0.001187	0.001026	0.00	0.942121
DIST. EST									
0.261710	0.262680	0.271342	0.135219	0.069713	0.007576	0.001260	0.000145	0.00	1
PERIODO 11									
0.274975	0.252215	0.235177	0.100237	0.072025	0.004566	0.001085	0.000173	0.00	0.940555
DIST. EST									
0.271116	0.267020	0.246982	0.108291	0.074255	0.004975	0.001148	0.000183	0.00	1
PERIODO 12									
0.268622	0.261227	0.237605	0.094071	0.072752	0.007202	0.000985	0.000162	0.00	0.944659
DIST. EST									
0.284159	0.276530	0.252641	0.099581	0.076014	0.007424	0.001046	0.000172	0.00	1
PERIODO 13									
0.266387	0.255191	0.248165	0.095542	0.069254	0.007275	0.001090	0.000148	0.00	0.942446
DIST. EST									
0.292248	0.270481	0.263035	0.101534	0.073516	0.007711	0.001145	0.000157	0.00	1
PERIODO 14									
0.270469	0.253028	0.242431	0.099266	0.070265	0.006935	0.001091	0.000161	0.00	0.942312
DIST. EST									
0.239196	0.248123	0.256828	0.105173	0.074352	0.007746	0.001156	0.000171	0.00	1
PERIODO 15									
0.269933	0.256765	0.240414	0.096972	0.071664	0.007036	0.001040	0.000163	0.00	0.942117
DIST. EST									
0.295080	0.272146	0.254617	0.102701	0.075900	0.007452	0.001101	0.000173	0.00	1

PER1000 16
0.268964 0.256476 0.244117 0.098165 0.076321 0.007166 0.001251 0.000158 0.00

DIST. EST
0.268424 0.271704 0.258651 0.101891 0.074826 0.007531 0.001112 0.000165 0.00

PER1000 17
0.269126 0.254661 0.243614 0.097645 0.076382 0.007962 0.001674 0.000158 0.00

DIST. EST
0.269176 0.269850 0.258145 0.102471 0.074521 0.007461 0.001117 0.000167 0.00

PER1000 18
0.269596 0.255631 0.241928 0.097445 0.071693 0.007058 0.001657 0.000161 0.00

DIST. EST
0.269627 0.270828 0.256310 0.102278 0.075024 0.007456 0.001122 0.000170 0.00

PER1000 19
0.268952 0.256116 0.242850 0.098771 0.076866 0.007100 0.001055 0.000158 0.00

DIST. EST
0.268462 0.271268 0.257717 0.102534 0.075086 0.007523 0.001118 0.000165 0.00

PER1000 20
0.268877 0.255410 0.242310 0.097140 0.076693 0.007086 0.001065 0.000158 0.00

DIST. EST
0.268425 0.276654 0.257333 0.102438 0.074917 0.007509 0.001128 0.000167 0.00

PER1000 21
0.269223 0.255433 0.242629 0.097324 0.076774 0.007060 0.001062 0.000159 0.00

DIST. EST
0.269294 0.276871 0.257114 0.102130 0.074996 0.007481 0.001126 0.000168 0.00

PER1000 22
0.269050 0.255762 0.242661 0.097055 0.076522 0.007077 0.001059 0.000159 0.00

DIST. EST
0.269107 0.271025 0.257142 0.102647 0.075959 0.007499 0.001122 0.000168 0.00

PER1000 23
0.268926 0.255598 0.242974 0.097664 0.076717 0.007031 0.001061 0.000158 0.00

DIST. EST
0.268997 0.270873 0.257495 0.102865 0.074943 0.007506 0.001125 0.000168 0.00

PERIODS 14

0.269044 0.155479 0.242918 0.497187 0.070729 0.497071 0.001060 0.000159 0.00 0 0 0 0 0.942377

DIST. EST

0.205132 0.273756 0.252337 0.192091 0.674953 0.007494 0.001125 0.000169 0.00 0 0 0 0 1

2.5.2 Observaciones.

En el vector de la distribución de edades se observa que en 24 periodos la población disminuyó casi en un 6 % de su tamaño original. Dicha disminución se muestra más fuertemente del periodo 1 al 4 y aunque ya se sabe que la población seguirá disminuyendo al paso del tiempo, los movimientos parecen estabilizarse (a tres dígitos) a partir del periodo 13.

En la distribución estacionaria dada por la fórmula (8), se tiene algo similar. A seis dígitos no se alcanza aún una distribución estable. Sin embargo, (a dos dígitos) podríamos decir que la población (en promedio) se comportará de la siguiente manera:

Un 29 % de los animales se encontrarán en la edad E1.

" 27 %	"	"	"	E2
" 26 %	"	"	"	E3
" 10 %	"	"	"	E4
" 7 %	"	"	"	E5

Mientras que el 1 % restante quedará repartido entre las edades E6 E7 y E8. Por supuesto, no habrá animales de edades mayores a los ocho cuatrimestres de edad ya que como se vió con anterioridad en estas edades todos los animales son vendidos o desechados.

2.5. Automatización del modelo.

Mediante el modelo que se ha desarrollado, ya es posible saber que pasará con la evolución de nuestra población. Se ha mencionado con anterioridad que será posible saber cuanto crecerá o decrecerá la población al paso del tiempo. También se podrán observar por separado los números esperados de animales que nacen, mueren, se compran y se venden; además del número esperado de animales que pasan con vida a su siguiente edad. No obstante, realizar la labor antes mencionada nos puede llevar mucho tiempo si no se cuenta con una herramienta que la lleve a cabo.

Para tal efecto, el modelo propuesto se ha automatizado en el paquete LOTUS 123 (por su facilidad de manejo y aprendizaje).

Así, nuestro modelo será accesible a personas que carezcan o tengan poco conocimiento acerca de los Procesos Estocásticos e incluso de un lenguaje de programación tal como Pascal, Fortran etc.

Se tienen los seis vectores descritos al inicio de este capítulo, uno por renglón; el que representa la distribución de edades (DI.ED), el de las tasas de muerte (MORIP) y el de las tasas de supervivencia (SOBRE). Además, los que representan las políticas de explotación del hato; el porcentaje de animales que se venden (VENTA), el porcentaje de animales que se compran (REPOS) y finalmente el porcentaje de partos por animal adulto (REPRO).

Todo lo anterior está dado por tasas para cada una de las edades consideradas.

La siguiente tabla, muestra la manera en que se tiene toda la información demográfica inicial que se mencionó en la sección

anterior, en la hoja de calculo (LOTUS).

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	TOTAL
DI.ED	20	20	15	10	10	15	9	10	0	0	0	0	0	109
SOBRE	.95	.95	.4	.4	.1	.15	.15	.15	0	0	0	0	0	
MORIR	.5	.5	.1	.1	.1	.15	.15	.15	.2	.2	.2	.2	.2	
VENTA	0	0	.5	.5	.8	.7	.7	.7	.8	.8	.8	.8	.8	
REPOS	0	0	0	0	.11	0	0	0	0	0	0	0	0	
REPRO	0	0	.6	.7	.7	.7	.7	.7	0	0	0	0	0	

Los porcentajes de animales que pasan con vida a su siguiente edad estará dado en función del segundo (SOBRE), tercero (MORIR) y cuarto renglón (VENTA), ya que cada animal a diferentes edades podrá enfrentar la disyuntiva de salir del sistema ó sobrevivir.

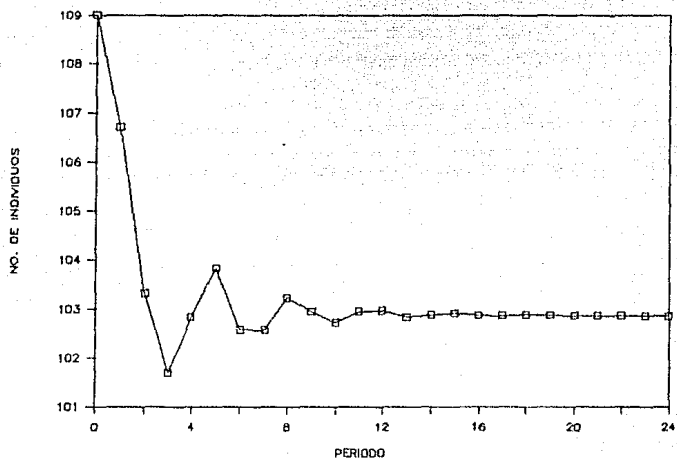
Por ejemplo, al inicio del estudio se tienen 20 animales de edad E1. De estos, el 95 % sobrevivirán a edad E2. El 5 % restante salió del sistema a causa de muerte pues no hubo venta de animales de esta edad; lo que se refleja con una tasa del 0 % en el renglón correspondiente.

Adicionalmente, se han considerado a las tasas de natalidad de los animales en el sexto renglón (REPRO).

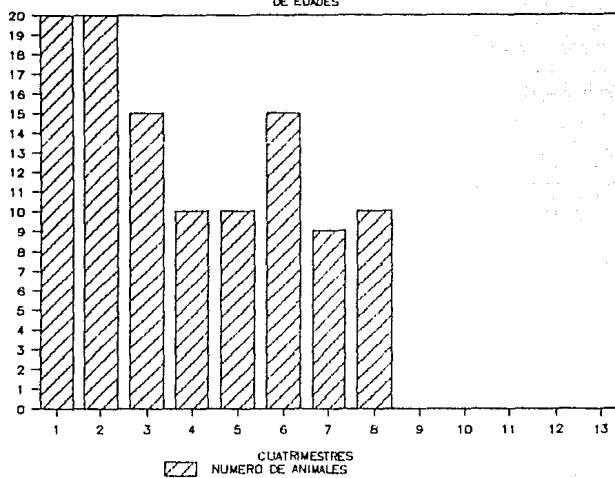
Por último, y previendo una situación en la que el número de nacimientos que haya en el hato en cada periodo no sea suficiente para reemplazar a los animales que son vendidos ó que mueren, se incorporó el quinto renglón (REPOS) cuya finalidad es la de reemplazar en el hato un determinado número de animales de diferentes edades. En este caso, un 11 % de los egresos por animales de edad E5.

A continuación se muestran los resultados promedio al final de los 24 periodos de proyección que se han considerado.

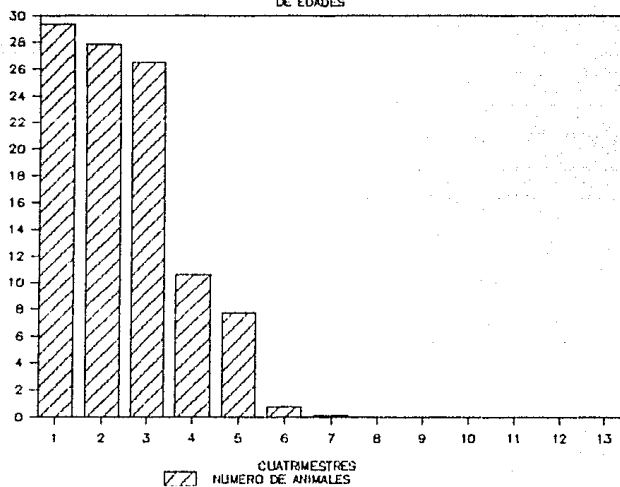
CABEZAS TOTALES POR PERIODO



DISTRIBUCION INICIAL DE EDADES



DISTRIBUCION FINAL DE EDADES



EVOLUCION DEMOGRAFICA

RESUMEN

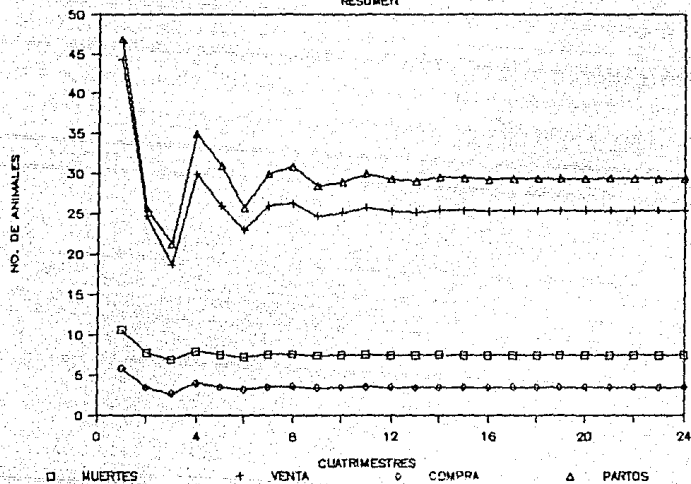


TABLA RESUMEN (PRIMER MODELO)

PERIODO	MUERTE	VENTA	COMPRA	FASTOS	CABEZAS
0	-	-	-	-	167.00
1	10.60	44.30	5.82	48.80	106.72
2	7.76	24.78	3.45	25.69	103.32
3	6.92	18.69	2.72	21.27	101.70
4	7.55	29.90	3.01	34.95	102.85
5	7.56	28.04	3.56	31.05	103.84
6	7.21	23.05	3.21	25.79	102.58
7	7.55	25.95	3.55	29.95	102.57
8	7.58	26.22	3.58	30.88	103.24
9	7.40	24.70	3.40	28.90	102.95
10	7.46	25.16	3.46	28.64	102.72
11	7.52	25.74	3.52	29.97	102.96
12	7.47	25.27	3.47	29.28	102.97
13	7.45	25.17	3.45	29.04	102.84
14	7.49	25.45	3.49	29.48	102.88
15	7.48	25.39	3.48	29.42	102.82
16	7.47	25.27	3.47	29.22	102.88
17	7.47	25.35	3.48	29.33	102.86
18	7.48	25.37	3.48	29.39	102.88
19	7.47	25.32	3.48	29.30	102.87
20	7.47	25.33	3.48	29.31	102.86
21	7.47	25.35	3.48	29.35	102.86
22	7.47	25.33	3.48	29.33	102.86
23	7.47	25.33	3.48	29.31	102.85
24	7.47	25.33	3.48	29.33	102.85

2.6.1 Observaciones.

Al igual que antes, se puede notar en el renglón DIST. EDADES que la disminución más fuerte en la población se da del período 1 al 4.

Por otro lado, ya es posible visualizar con mayor facilidad al número de animales que entran, salen y los que permanecen en el sistema período a período

La gráfica de la distribución final de edades muestra más claramente como la mayoría de la población se encuentra en edades jóvenes en contraste con la gráfica de la distribución inicial de edades.

En la tabla resumen se observa que la población decreció de 109 animales que había a 102, decreciendo también el número de muertes compras ventas y partos. Así también, en la gráfica de la evolución demográfica del hato se observa que el número de partos que se dan, alcanzan a soportar las ventas y las muertes; siendo no tan indispensable tener que comprar un gran número de animales para mantener estable el hato.

3 | EL MODELO FINAL.

La automatización del modelo descrita en el capítulo anterior, dará la pauta para llegar al modelo final que engloba el resultado principal de este trabajo. Este nuevo modelo constará de dos partes, una demográfica y una económica. La primera de ellas corresponde a la que se usó en el ejemplo anterior. La segunda tiene como objetivo el poder mostrar que repercusiones económicas resultarían al poner en práctica una estrategia errónea de explotación de un hato. Esto es a consecuencia de que algunas de las variables demográficas que se consideraron tienen asociadas un determinado costo; por ejemplo, los gastos que resultan de mantener a los animales o atender un parto.

Por otra parte, también existen dentro de nuestras variables demográficas algunas que llevan consigo un ingreso económico por ejemplo la venta de animales en pie; aunque estos ingresos se podrían ver incrementados una vez que algunos de los animales se encuentren en edad de parir y en consecuencia inician su producción lechera. Para este último modelo las edades de los animales se darán en cuatrimestres. Además, tomando en cuenta que de acuerdo a la experiencia del productor la vida reproductiva de una vaca es de diez años, este modelo consta únicamente de treinta cuatrimestres de edad por periodo.

Como se encuentra el modelo hasta este momento y recordando como se definió en el capítulo anterior al vector de reemplazos, se ve que solamente se podrán comprar animales para suplir ya sea al total de abandonos en el hato, a un porcentaje de ellos o aumentar el tamaño de la población. El ejemplo que se mostrará con este

ultimo modelo permitirá pensar en comprar animales pero de una manera más flexible; esta se definirá posteriormente.

3.1 Variables Económicas.

Al igual que la parte demográfica, la económica se compone de seis renglones cada uno de los cuales puede contener ingresos o egresos según sea el caso.

	E1	E2	E3	E4	E5	.	.	.	EK
MANUTE									
RESCAT									
VENTA									
REPOS									
ATN. PAR									
LECHE									

El costo que ocasiona la atención y cuidado de los animales en lo referente a alimentación, vacunas, gastos por inseminación, gastos por enfermedad del animal, etc. sin tomar en cuenta el gasto ocasionado por la atención de un parto, se encuentra en el renglón llamado MANUTE.

El gasto ocasionado por la atención de un parto, medicinas, honorarios del veterinario, se muestran en el renglón llamado ATN. PAR.

El gasto que se tiene que hacer para comprar los animales que se van a reponer de diferentes edades en el hato se muestra en el renglón de REPOS.

Por otra parte, se ha supuesto también que la muerte natural de un animal puede ser fuente de ingresos ya que se venden las partes comercializables de estos como por ejemplo las pezuñas ó la piel; estos ingresos se muestran en el renglón RESCAT.

Del mismo modo, los ingresos ocasionados por la venta de los animales en pie se muestran en el renglón VENTA.

Finalmente se muestran los ingresos por venta de la leche de los animales en producción en el renglón LECHE.

3.2 Ejemplo de Aplicación a la Administración de un Hato Ganadero

A continuación se presenta un ejemplo acerca de la evolución de una población en una explotación relativamente pequeña la cual consta de 53 animales al inicio del estudio. Todas las tasas de natalidad y reproducción fueron obtenidas a partir de la experiencia del CIEEGT de 1976 a 1987, mientras que las tasas de mortalidad se obtuvieron de diversas fuentes.

Por otra parte, las estrategias tanto de venta como de compra de nuevos animales estarán dadas como sigue:

a) Considerando que de acuerdo a la experiencia del CIEEGT se tiene que en promedio la mitad de los nacimientos resultan en machos, es de interés vender a todos estos animales al momento del destete y quedarse sólo con las hembras. Esto se ha reflejado con una tasa del 50% en el renglón venta y en la segunda columna ya que el destete ocurre aproximadamente a partir del segundo cuatrimestre de vida del animal después del parto.

b) Con el objeto de mantener un tamaño adecuado del hato, se va a reponer mediante la compra de animales a un 5% de la diferencia entre el total de ventas y muertes, y el 50% de los nacimientos que haya habido; todo esto por periodo. En otras palabras, se comprarán animales sólo cuando del número de nacimientos que haya por periodo (en los que el producto es una hembra) no sean suficientes para suplir a todos aquellos que salieron del hato por venta o muerte.

Adicionalmente, tomando en cuenta que la capacidad reproductiva de los animales al paso del tiempo disminuye y por lo tanto la producción lechera, se ha supuesto también de acuerdo a estadísticas del CIEEGT que un 18% de estos animales son

desechados a partir del décimo cuatrimestre. Asimismo, se ha supuesto que ningún animal sobrevivirá más allá de su décimo año de vida.

Con respecto a la parte económica, todos los precios se han considerado en miles de pesos; así por ejemplo, la atención de los partos por animal adulto se ha fijado en \$ 13,000 pesos, los precios de venta de los animales en pie var. desde \$ 25,000 hasta \$ 500,000 dependiendo de la edad del animal y de la misma manera para los demás precios.

En lo que respecta al renglón correspondiente a la venta de leche, este representa el producto del precio del litro de leche por el número de litros promedio que producen las vacas de un determinado cuatrimestre de edad y esto a su vez multiplicado por el número de animales en producción.

Es importante hacer notar que los precios antes mencionados pueden ser modificados en caso de que no se ajusten a la realidad.

A continuación se mostrará la proyección de este hato ganadero para 24 periodos cuatrimestrales tomando en cuenta las estrategias antes mencionadas. Junto con esto se dará también una tabla que resume tanto la información demográfica del hato como la económica en cada período.

Finalmente se muestran las gráficas de:

- a) El número total de cabezas en el hato.
- b) La distribución inicial de edades de la que se parte.
- c) La distribución final de edades.
- d) La evolución demográfica de los partos, compras, muertes y ventas.
- e) Los ingresos económicos obtenidos.

PERIODO 3

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	412.31	186.04	57.40	57.69	151.21	152.78	152.17	165.54	129.35	64.17	49.84	40.94	40.94	40.94	40.94
RESCAT	11.80	10.92	2.51	1.79	4.76	4.75	3.60	3.62	3.15	1.53	1.75	1.04	1.04	1.04	1.04
VENTA	0.00	97.54	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	177.77	138.09	113.40	113.40	113.40	113.40
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	87.69	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.13	15.16	21.07	12.19	5.68	4.47	6.34	6.87	5.96	4.49
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	126.65	901.66	1251.97	724.45	327.36	265.41	376.67	469.30	254.25	266.96

TOTAL

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
MANUTE	40.94	20.47	20.47	20.47	20.47	20.47	20.52	20.65	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
RESCAT	1.04	0.52	0.52	0.52	0.52	0.39	0.39	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.00	0.00	0.00
VENTA	113.40	56.70	56.70	56.70	56.70	56.70	56.70	57.65	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	8.04	4.21	2.72	2.27	2.92	3.79	3.16	3.23	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
LECHE	477.77	250.25	161.46	124.73	174.07	225.22	187.65	152.59	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

TOTAL

PERIODO 4

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	420.84	193.98	116.04	53.67	56.25	147.43	149.24	161.49	171.60	121.75	51.65	40.12	32.56	32.56	32.56
RESCAT	12.26	11.29	5.68	1.73	1.75	4.59	3.71	3.71	3.69	3.08	1.31	1.02	0.82	0.82	0.82
VENTA	0.00	191.70	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	327.25	143.10	111.14	91.29	91.29	91.29
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	95.81	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.06	14.80	20.55	15.06	16.77	4.62	6.21	5.53	4.90	3.62
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	122.22	875.05	1223.67	894.80	640.61	275.11	369.14	328.68	265.17	214.91

TOTAL

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
MANUTE	32.96	32.96	16.48	16.48	16.48	16.48	16.52	16.67	16.73	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
RESCAT	0.82	0.82	0.42	0.42	0.42	0.42	0.21	0.21	0.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
VENTA	91.29	91.29	45.65	45.65	45.65	45.65	45.65	45.92	46.21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	6.47	6.78	2.19	1.82	2.56	3.05	2.54	2.62	2.75	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
LECHE	384.61	492.60	129.98	109.46	140.13	191.20	151.95	125.92	152.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

TOTAL

PERIODO 5

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	440.98	203.12	120.99	112.54	54.28	54.85	144.11	152.27	165.29	150.17	95.01	41.59	32.20	26.53	26.53
RESCAT	12.77	11.97	5.30	3.50	1.67	1.71	3.25	3.25	3.50	3.61	2.49	1.05	0.82	0.82	0.82
VENTA	0.00	106.49	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	416.55	271.43	115.20	89.43	73.49	73.49
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	106.27	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.77	14.20	20.07	14.74	12.31	8.78	5.44	5.42	3.86	2.91
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	45.46	348.20	1192.15	875.42	760.53	521.82	326.25	322.11	329.56	172.00

TOTAL

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
MANUTE	26.53	26.53	26.53	13.26	13.26	13.26	13.30	13.38	13.47	13.55	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
RESCAT	0.82	0.82	0.82	0.24	0.24	0.24	0.22	0.22	0.26	0.26	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
VENTA	73.49	73.49	73.49	36.74	36.74	36.74	36.74	36.97	37.20	37.43	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	5.21	5.46	3.52	1.47	1.60	2.46	2.05	2.11	2.21	2.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
LECHE	309.61	324.32	269.26	87.31	112.80	145.95	121.65	125.51	121.35	122.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

TOTAL

PERIODO 6

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	425.46	269.94	126.69	117.75	109.73	52.93	52.81	151.86	155.82	147.12	121.05	73.89	33.48	26.00	21.76
RESCAT	12.83	12.32	5.55	3.65	1.41	1.55	1.33	3.51	3.73	3.73	3.07	2.00	0.85	0.66	0.54
VENTA	0.00	110.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	497.52	335.52	218.54	92.73	72.02	59.16
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	121.39	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.74	5.21	19.22	14.46	13.02	10.85	12.21	5.62	3.75	2.74
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	43.97	315.57	1148.50	859.00	771.39	644.84	725.90	331.68	224.97	139.26

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	TOTAL
MANUTE	21.26	21.26	21.26	21.26	10.68	10.68	10.71	10.77	10.84	10.91	10.96	0.00	0.00	0.00	0.00	2012.28
RESCAT	0.54	0.54	0.54	0.54	0.27	0.27	0.20	0.20	0.20	0.21	0.21	0.21	0.00	0.00	0.00	62.55
VENTA	59.16	59.16	59.16	59.16	29.58	29.58	29.58	29.76	29.95	30.13	30.32	0.00	0.00	0.00	0.00	1743.91
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	121.28
ATN.PAR	4.20	4.39	2.84	2.37	1.53	1.98	1.65	1.70	1.78	1.79	1.80	0.00	0.00	0.00	0.00	113.70
LECHE	249.24	261.09	168.45	140.57	90.91	117.49	97.91	101.04	105.74	106.39	107.05	0.00	0.00	0.00	0.00	6734.76

PERIODO 7

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	413.50	210.89	130.94	122.88	114.41	106.99	51.73	56.49	161.87	144.36	118.43	97.45	63.51	28.95	20.93
RESCAT	12.24	12.39	5.72	3.82	3.56	3.33	1.28	1.30	3.63	3.66	3.00	2.47	1.61	0.68	0.53
VENTA	0.00	110.56	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	399.89	328.66	249.92	175.73	74.65	57.98
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	132.61	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.48	5.12	7.19	14.07	12.77	10.42	15.09	10.66	3.93	2.20
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	88.69	394.52	427.24	935.87	758.87	630.89	896.59	637.42	233.20	136.48

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	TOTAL
MANUTE	17.19	17.19	17.19	17.19	17.19	8.60	8.62	8.67	8.73	8.78	8.84	8.89	0.00	0.00	0.00	1989.41
RESCAT	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.22	0.16	0.16	0.17	0.17	0.17	0.17	0.00	0.00	0.00	62.62
VENTA	47.62	47.62	47.62	47.62	47.62	23.81	23.81	23.84	24.11	24.26	24.41	18.81	0.00	0.00	0.00	1818.27
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	132.61
ATN.PAR	3.28	3.54	2.28	1.90	2.48	1.59	1.33	1.37	1.43	1.44	1.45	1.48	0.00	0.00	0.00	106.88
LECHE	299.85	216.19	125.61	113.16	148.20	94.58	78.82	81.34	85.17	85.85	85.18	86.71	0.00	0.00	0.00	6349.72

PERIODO 8

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	397.28	201.22	121.53	127.00	119.61	111.55	121.58	54.59	69.07	140.47	116.21	95.34	76.44	51.17	21.69
RESCAT	11.51	11.82	5.76	3.95	2.73	3.47	2.60	1.26	1.49	3.56	2.94	2.41	1.99	1.24	0.55
VENTA	0.00	105.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	289.11	321.99	284.69	217.20	141.62	60.49
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	129.16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.56	16.36	6.94	5.75	12.43	16.42	14.76	13.17	7.45	2.28
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	92.47	615.58	412.25	743.18	738.44	618.85	877.17	792.36	462.40	141.47

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	TOTAL
MANUTE	16.85	13.84	12.84	13.84	12.84	12.84	6.94	6.99	7.03	7.07	7.11	7.16	7.20	0.00	0.00	1955.37
RESCAT	0.42	0.25	0.25	0.25	0.25	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.00	0.00	61.44
VENTA	46.57	35.24	28.24	28.24	28.24	19.17	17.29	19.41	19.51	19.65	15.14	15.24	0.00	0.00	0.00	1865.39
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	129.16
ATN.PAR	1.31	2.85	1.84	1.53	1.98	1.56	1.07	1.10	1.15	1.16	1.17	1.17	1.18	0.00	0.00	107.32
LECHE	195.12	169.19	109.16	91.67	117.69	102.27	63.45	65.49	68.52	68.95	69.37	69.80	70.24	0.00	0.00	6376.02

PERIODO 9

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	405.75	189.16	125.51	127.57	125.83	116.81	109.04	110.20	66.27	57.67	113.08	92.55	76.75	63.15	41.16
RESCAT	11.56	11.11	2.49	3.97	1.85	3.43	2.71	2.54	1.44	1.46	2.86	2.37	1.94	1.60	1.04
VENTA	0.00	99.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	159.75	313.24	259.15	211.59	174.92	114.01
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	111.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.43	10.89	14.03	5.58	5.10	10.14	14.49	12.89	9.20	4.52
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	56.83	641.85	832.43	371.59	303.16	602.19	969.71	765.42	516.42	269.39

TOTAL

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
MANUTE	17.46	13.58	11.14	11.14	11.14	11.14	11.17	5.62	5.66	5.69	5.73	5.76	5.80	5.83	0.00
RESCAT	0.44	0.34	0.28	0.28	0.28	0.28	0.21	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.00
VENTA	48.38	37.57	30.86	30.86	30.86	30.86	30.86	15.52	15.62	15.72	15.82	12.19	12.27	12.34	0.00
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	3.43	2.79	1.48	1.21	1.59	2.04	1.72	0.89	0.93	0.93	0.94	0.95	0.95	0.96	0.00
LECHE	203.81	165.81	87.88	73.33	94.74	122.58	102.15	52.71	55.15	55.50	55.85	56.19	56.54	56.89	0.00

PERIODO 10

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	408.06	189.94	117.98	121.73	124.38	120.73	114.19	114.90	119.37	55.72	46.42	91.05	75.20	61.78	50.85
RESCAT	11.78	11.15	5.16	3.79	3.87	3.78	2.83	2.65	2.67	1.41	1.18	2.31	1.91	1.56	1.29
VENTA	0.00	99.58	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	154.76	128.39	252.16	208.60	171.14	140.81
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	104.86	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.48	11.51	14.63	16.35	4.73	4.16	14.10	12.84	9.00	5.58
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	160.68	372.11	859.60	815.07	292.94	247.23	637.53	751.25	534.59	331.49

TOTAL

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
MANUTE	32.13	14.03	10.92	8.97	8.97	8.97	8.99	9.05	4.55	4.59	4.61	4.64	4.67	4.70	2.61
RESCAT	0.84	0.36	0.28	0.23	0.23	0.23	0.17	0.17	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.00
VENTA	91.77	28.94	10.24	24.84	24.84	24.84	24.84	25.00	12.59	12.65	12.73	9.61	9.67	9.74	56.27
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	6.51	2.89	1.45	0.99	1.29	1.86	1.38	1.43	0.75	0.75	0.76	0.76	0.77	0.77	0.00
LECHE	284.65	171.87	85.12	59.03	76.27	96.89	82.22	84.56	44.45	44.63	44.56	45.24	45.32	45.80	46.09

PERIODO 11

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	412.18	193.31	118.47	114.42	118.69	121.27	119.01	120.32	121.61	120.26	44.65	37.37	73.28	60.62	49.73
RESCAT	11.99	11.25	5.19	3.54	3.69	3.77	2.93	2.78	2.77	2.62	1.14	0.95	1.68	1.54	1.26
VENTA	0.00	101.35	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	284.33	174.26	103.52	202.99	167.92	137.76
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	106.94	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.89	11.69	15.22	16.73	9.15	4.72	5.79	12.39	8.85	5.46
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	160.52	384.56	969.95	817.25	543.39	232.89	243.64	730.83	524.56	324.31

TOTAL

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
MANUTE	40.92	26.67	11.32	8.79	7.22	7.22	7.24	7.26	7.33	2.59	3.71	5.73	3.76	3.78	2.10
RESCAT	1.04	0.68	0.29	0.22	0.16	0.16	0.14	0.14	0.14	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.00
VENTA	112.36	73.83	31.35	24.35	28.00	28.00	28.00	28.12	28.25	18.15	18.25	7.79	7.95	8.63	45.30
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.04	5.49	1.50	0.97	1.02	1.24	1.11	1.15	1.20	0.61	0.61	0.61	0.62	0.62	0.62
LECHE	477.57	326.05	59.27	51.65	61.59	79.43	65.29	68.31	71.49	35.97	36.19	36.41	35.84	36.87	37.19

PERIODO12

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	408.61	197.02	120.57	114.90	111.57	115.72	118.54	124.56	129.26	107.09	82.21	36.11	30.68	58.99	48.81
RESCAT	11.90	11.57	5.78	3.57	3.47	3.60	2.94	2.87	2.89	2.71	2.11	0.71	0.78	1.47	1.24
VENTA	0.00	103.29	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	296.85	230.49	159.07	82.32	183.40	135.18	
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	110.71	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.81	11.75	15.83	11.21	9.48	7.48	5.59	5.05	8.29	5.78
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	95.93	897.78	940.49	688.23	552.97	443.12	332.25	300.04	510.44	310.22

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	TOTAL
MANUTE	40.04	32.94	21.47	9.11	7.08	5.81	5.83	5.86	5.96	5.94	2.99	3.01	3.02	3.04	1.89	1957.89
RESCAT	1.01	0.93	0.54	0.27	0.18	0.15	0.17	0.21	0.11	0.11	0.09	0.09	0.18	0.06	0.06	81.01
VENTA	110.90	91.25	59.47	25.24	19.60	16.10	16.10	16.20	16.30	16.40	8.25	6.36	6.40	6.44	36.47	1563.65
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	110.71
ATN.PAR	7.88	6.78	2.85	1.01	1.01	1.08	0.90	0.93	0.97	0.97	0.47	0.47	0.50	0.30	0.30	108.77
LECHE	467.23	402.72	169.35	59.56	60.17	63.94	53.29	54.99	57.55	57.91	29.13	29.31	29.50	29.88	29.85	6462.66

PERIODO13

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	404.22	195.57	120.88	116.94	112.03	108.78	113.11	124.91	133.40	111.96	86.21	66.98	29.07	24.22	47.47
RESCAT	11.71	11.48	5.18	3.64	3.49	3.38	2.81	2.83	2.99	2.84	2.18	1.70	0.74	0.61	1.20
VENTA	0.00	102.52	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	310.14	238.80	185.55	80.52	87.09	131.54	
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	110.31	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.52	11.21	15.90	11.59	9.91	7.73	10.37	4.88	3.53	5.21
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	90.18	865.82	944.72	688.65	588.57	459.09	616.30	289.92	239.56	309.85

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	TOTAL
MANUTE	39.28	32.23	26.52	17.28	7.33	5.70	4.69	4.72	4.75	4.78	4.81	2.42	2.43	2.45	1.36	1958.55
RESCAT	0.99	0.82	0.67	0.44	0.19	0.14	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.05	0.05	0.05	0.05	40.92
VENTA	108.82	89.29	31.46	47.89	20.31	15.78	12.96	13.04	13.12	13.20	13.28	5.12	5.15	5.18	29.56	1582.11
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	110.31
ATN.PAR	7.72	6.83	3.52	1.91	1.05	1.05	0.72	0.75	0.78	0.78	0.79	0.40	0.40	0.40	0.40	167.16
LECHE	458.45	394.00	209.17	113.76	62.37	62.67	42.90	44.27	46.33	46.61	46.90	23.60	23.74	23.69	24.04	4465.17

PERIODO14

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	406.57	192.51	121.98	119.16	114.02	109.23	106.33	119.19	133.87	115.73	90.13	69.40	53.92	22.40	19.47
RESCAT	11.76	11.30	5.14	3.71	3.55	3.40	2.84	2.75	3.00	2.93	2.28	1.76	1.37	0.99	0.49
VENTA	0.00	109.93	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	320.58	249.68	192.24	149.37	84.82	54.50
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	103.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.52	10.54	15.17	11.64	10.24	8.08	10.75	9.05	5.41	2.14
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	90.55	825.90	901.45	691.42	603.29	479.97	630.52	577.78	202.49	127.13

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	TOTAL
MANUTE	38.23	31.62	25.94	21.35	15.91	5.90	4.80	3.80	3.82	3.85	3.87	3.90	1.96	1.97	1.10	1960.78
RESCAT	0.97	0.80	0.66	0.56	0.25	0.15	0.09	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.04	0.04	0.04	40.90
VENTA	105.89	87.60	71.87	59.13	38.54	16.35	12.70	10.50	10.56	10.63	10.69	8.24	4.15	4.17	23.63	1605.26
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	108.82
ATN.PAR	7.51	6.51	3.44	2.37	1.99	1.09	0.71	0.60	0.63	0.63	0.64	0.64	0.32	0.32	0.32	110.26
LECHE	445.11	386.61	204.64	140.51	118.31	64.96	42.04	35.64	37.29	37.52	37.76	37.99	19.11	19.23	19.52	6550.66

PERIODO15

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	407.96	195.20	120.07	118.51	116.20	111.17	106.77	112.05	128.25	116.19	93.16	72.55	55.87	43.41	18.84
RESCAT	11.87	11.34	5.26	3.68	3.62	3.46	2.65	2.57	2.87	2.94	2.26	1.84	1.41	1.10	0.48
VENTA	0.00	101.29	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	321.87	258.07	200.98	154.75	120.24	52.18
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	111.42	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.55	10.28	14.26	11.12	10.28	8.25	11.24	9.28	8.32	2.07
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	92.16	628.47	847.43	681.07	610.83	496.13	687.56	557.17	375.80	122.84

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	TOTAL
MANUTE	15.69	30.77	25.46	20.88	17.18	11.20	4.77	3.72	2.68	3.10	3.12	3.14	2.16	1.57	0.89	5996.36
RESCAT	0.40	0.78	0.64	0.57	0.44	0.28	0.09	0.07	0.04	0.06	0.04	0.06	0.06	0.02	0.02	1941.72
VENTA	43.47	85.24	70.52	57.85	47.80	31.02	13.16	10.29	8.50	8.56	8.61	6.64	6.48	3.36	19.02	1629.90
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	111.42
ATN.PAR	3.03	8.22	3.78	2.21	2.45	2.07	0.73	0.59	0.51	0.51	0.51	0.51	0.52	0.28	0.24	109.20
LECHE	182.15	376.20	200.86	137.47	146.14	125.23	43.57	24.92	30.02	30.21	30.39	30.58	30.77	15.48	15.58	6487.75

PERIODO16

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	403.96	195.15	120.50	116.45	115.35	113.30	108.66	112.51	121.51	111.09	93.54	75.06	58.41	44.97	34.94
RESCAT	11.76	11.46	5.27	3.62	3.59	3.52	2.70	2.69	2.71	2.81	2.37	1.90	1.48	1.14	0.89
VENTA	0.00	102.31	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	307.74	259.16	207.75	161.79	124.57	96.79
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	112.70	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.58	10.77	14.22	10.52	9.83	8.38	11.61	9.80	8.55	3.84
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	92.92	629.84	850.91	624.78	584.62	498.12	690.02	582.51	389.14	227.86

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	TOTAL
MANUTE	15.16	12.63	24.77	20.49	16.81	13.83	9.04	3.26	3.62	2.49	2.51	2.52	2.54	2.56	0.71	5939.22
RESCAT	0.28	0.22	0.63	0.52	0.43	0.25	0.17	0.07	0.04	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.02	1958.29
VENTA	42.01	75.00	68.62	56.77	46.57	38.32	24.97	10.88	8.72	8.89	8.93	5.34	5.37	5.41	15.31	1636.56
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	113.70
ATN.PAR	2.98	2.60	3.77	2.27	2.41	2.56	1.39	0.61	0.50	0.41	0.41	0.41	0.42	0.42	0.21	108.09
LECHE	176.97	154.45	195.39	124.89	142.97	152.21	92.67	26.20	29.42	24.72	24.47	24.67	24.77	24.93	12.54	6421.73

PERIODO17

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	403.05	193.27	121.71	116.67	113.54	112.47	110.75	114.51	122.02	105.60	89.43	75.30	60.37	47.02	36.20
RESCAT	11.64	11.25	5.33	3.64	3.57	3.50	2.75	2.64	2.72	2.64	2.76	1.91	1.53	1.19	0.92
VENTA	0.00	101.33	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	290.85	247.75	205.58	167.23	130.24	100.28
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	111.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.57	10.97	14.58	10.57	9.29	8.02	11.66	10.17	8.95	3.97
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	93.23	651.93	856.00	633.04	551.76	476.26	692.79	602.12	406.84	236.07

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	TOTAL
MANUTE	28.13	12.21	10.17	19.94	16.50	13.53	11.17	7.32	3.13	2.44	2.02	2.02	2.04	2.06	1.14	8027.14
RESCAT	0.71	0.31	0.26	0.51	0.42	0.24	0.21	0.14	0.06	0.05	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	1955.25
VENTA	77.92	33.82	28.17	55.24	45.70	37.49	30.65	20.25	8.84	6.75	5.58	4.30	4.31	4.35	24.66	1634.25
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	111.19
ATN.PAR	5.53	2.51	1.35	2.21	2.26	2.51	1.72	1.16	0.51	0.40	0.33	0.33	0.34	0.34	0.34	1055.55
LECHE	328.27	149.24	80.22	131.25	140.29	140.91	102.11	68.67	50.25	23.82	19.70	19.22	19.74	20.07	20.19	8508.21

PERIODO18

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	408.15	191.21	120.55	118.05	113.95	110.71	109.93	118.70	122.71	105.54	84.52	71.99	67.61	46.60	37.85
RESCAT	11.80	11.23	5.28	3.67	2.55	2.44	2.72	2.67	2.77	2.67	2.14	1.82	1.54	1.23	0.96
VENTA	0.00	100.30	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	292.37	234.13	199.42	167.93	134.62	104.84
REFUS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	108.33	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	1.54	10.69	14.86	18.73	9.74	7.58	11.15	10.19	7.68	4.15	
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	91.77	647.11	682.59	637.52	554.84	450.11	662.39	664.55	420.54	246.81

TOTAL

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
MANUTE	29.14	22.64	9.82	8.19	16.05	13.28	10.92	9.05	5.93	2.53	1.98	1.64	1.65	1.66	0.92
RESCAT	0.74	0.57	0.25	0.21	0.41	0.34	0.21	0.17	0.11	0.05	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03
VENTA	80.73	62.72	27.22	22.68	44.47	38.79	30.18	24.99	18.39	7.60	5.47	3.46	3.48	3.50	19.85
REFUS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	5.72	4.46	1.30	0.91	2.30	2.46	1.48	1.43	0.97	0.42	0.32	0.27	0.27	0.27	0.27
LECHE	349.10	278.82	77.51	53.89	138.51	148.12	99.89	84.82	57.85	24.70	19.20	15.95	14.05	16.15	16.25

6086.73

1757.57

80.74

1622.51

168.22

110.76

8590.18

PERIODO19

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	410.71	193.88	119.32	116.92	115.10	111.10	108.21	115.94	125.72	107.14	84.96	68.04	57.95	48.79	39.12
RESCAT	11.93	11.38	5.22	3.64	3.58	3.46	2.69	2.67	2.81	2.71	2.15	1.72	1.47	1.24	0.99
VENTA	0.00	101.65	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	796.78	235.35	168.48	166.54	135.16	108.37
REFUS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	107.87	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.55	10.72	14.75	19.91	9.18	7.42	10.54	9.73	7.11	4.29
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	92.16	836.97	876.12	847.89	563.21	452.46	628.03	578.00	422.22	255.12

TOTAL

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
MANUTE	20.47	23.46	18.23	7.91	6.59	12.92	10.72	8.85	7.33	4.80	2.05	1.60	1.32	1.32	0.74
RESCAT	0.77	0.59	0.46	0.20	0.17	0.23	0.20	0.17	0.14	0.09	0.04	0.02	0.02	0.02	0.02
VENTA	84.40	84.99	50.49	21.91	19.24	35.80	29.61	24.45	20.24	15.27	5.47	3.39	2.60	2.62	15.93
REFUS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	5.98	4.83	2.42	0.59	0.94	2.39	1.85	1.40	1.20	0.79	0.74	0.28	0.22	0.22	0.22
LECHE	355.57	286.91	143.79	52.07	56.04	142.18	95.02	82.79	71.46	48.86	20.01	15.64	12.92	12.06	13.68

6060.44

1941.15

80.74

1623.45

169.37

110.43

8560.55

PERIODO20

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	409.12	196.03	120.92	115.73	114.00	112.22	108.60	114.03	125.05	108.88	86.24	68.40	54.77	46.65	39.28
RESCAT	11.69	11.51	5.29	3.80	3.52	3.49	2.75	2.43	2.80	2.76	2.18	1.73	1.39	1.16	0.99
VENTA	0.00	102.77	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	361.61	222.90	189.46	151.72	129.23	103.81
REFUS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	111.73	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.57	10.78	14.52	16.84	9.45	7.32	10.59	9.19	6.79	4.21
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	93.03	879.25	892.79	844.00	572.37	459.29	629.29	546.27	403.69	236.14

TOTAL

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
MANUTE	31.48	24.51	15.69	14.67	6.37	5.21	10.43	9.68	7.17	5.92	3.89	1.66	1.30	1.07	0.60
RESCAT	0.83	0.62	0.39	0.27	0.25	0.23	0.20	0.16	0.14	0.11	0.07	0.02	0.02	0.02	0.02
VENTA	87.24	87.94	52.11	40.45	17.64	14.70	28.82	23.99	19.80	16.29	10.75	3.52	2.75	2.27	12.06
REFUS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	6.19	5.05	2.51	1.23	0.91	0.98	1.61	1.37	1.18	0.97	0.64	0.27	0.21	0.18	0.18
LECHE	367.54	299.85	148.76	96.58	34.15	50.37	95.39	81.42	69.91	57.88	37.96	16.21	12.86	19.47	10.53

6025.23

1941.91

81.84

1674.12

111.73

169.81

6525.82

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

PERIODO01

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANGITE	407.83	195.44	122.24	117.79	112.64	111.15	109.69	114.44	122.39	128.22	87.65	69.42	55.86	44.09	37.56
RESCAT	11.83	11.46	5.35	3.65	3.51	3.46	2.72	2.44	2.76	2.74	2.22	1.74	1.29	1.12	0.95
VENTA	0.00	102.46	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	799.79	242.15	192.22	152.52	122.14	104.03
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	111.26	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.25	16.27	14.57	16.89	9.53	7.86	19.75	9.24	8.42	4.12
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	92.14	845.71	855.47	835.23	569.92	466.75	639.79	549.12	381.51	244.90

TOTAL

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
MANGITE	31.62	25.35	19.74	15.20	11.81	5.17	4.28	8.45	7.02	5.81	4.81	1.15	1.25	1.05	0.48
RESCAT	0.80	0.64	0.30	0.34	0.30	0.13	0.08	0.16	0.13	0.11	0.09	0.06	0.02	0.02	0.02
VENTA	87.59	70.23	54.69	42.11	32.72	14.29	11.83	27.34	19.43	16.04	13.28	8.57	2.85	2.23	10.75
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	6.21	5.22	2.62	1.68	1.69	0.95	0.68	1.33	1.15	0.95	0.79	0.52	0.22	0.17	0.14
LECHE	269.02	769.94	155.74	160.07	160.45	56.40	29.11	79.24	25.82	56.52	46.66	70.75	15.13	10.26	8.48

6625.16
1961.55
81.03
1623.61
113.26
159.97
6533.20

PERIODO02

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANGITE	406.59	194.24	121.90	118.58	114.35	110.01	108.84	115.59	122.72	128.75	87.12	70.56	55.89	44.32	35.49
RESCAT	11.84	11.41	5.24	3.69	3.56	3.42	2.70	2.67	2.77	2.70	2.21	1.79	1.42	1.12	0.90
VENTA	0.00	101.89	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	795.71	241.33	195.45	154.82	122.78	98.32
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	116.39	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.54	10.76	14.71	16.72	9.45	7.81	10.93	5.28	8.46	3.90
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	91.20	859.51	874.21	837.18	561.18	463.76	649.18	557.40	385.52	231.46

TOTAL

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
MANGITE	30.23	25.45	20.41	15.89	12.24	9.51	4.14	3.47	8.84	5.70	4.70	3.89	2.55	1.09	0.47
RESCAT	0.77	0.64	0.32	0.40	0.31	0.24	0.09	0.07	0.13	0.11	0.09	0.07	0.02	0.02	0.02
VENTA	87.75	70.51	55.57	44.03	33.90	26.24	11.43	9.23	18.91	15.74	12.99	8.24	5.46	2.21	10.15
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	5.94	5.24	2.71	1.76	1.75	1.76	0.64	0.55	1.12	1.94	0.77	0.64	0.42	0.19	0.14
LECHE	252.82	711.19	166.98	164.62	164.07	104.65	37.84	72.52	16.75	55.56	45.87	39.98	24.90	10.65	8.31

6645.85
1962.37
81.04
1626.09
110.28
110.21
6547.47

PERIODO03

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANGITE	406.74	194.62	121.21	118.22	115.62	111.59	107.54	114.46	124.81	127.95	85.92	70.13	56.60	44.95	35.69
RESCAT	11.87	11.43	5.31	3.68	3.60	3.47	2.67	2.44	2.79	2.71	2.19	1.78	1.44	1.14	0.90
VENTA	0.00	102.94	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	796.62	229.95	194.27	157.24	124.63	96.33
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	116.81	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.56	10.65	14.57	16.81	9.47	7.70	10.83	9.57	8.35	3.92
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	92.43	852.00	865.32	842.97	562.93	457.14	645.28	566.49	389.74	232.66

TOTAL

EDADES	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
MANGITE	28.37	24.24	20.49	16.43	12.79	9.85	7.68	3.35	2.81	5.52	4.61	3.81	3.15	2.67	0.49
RESCAT	0.72	0.62	0.32	0.42	0.32	0.25	0.15	0.06	0.05	0.11	0.09	0.07	0.06	0.04	0.02
VENTA	79.15	67.42	56.76	45.51	35.44	27.29	21.20	9.24	7.76	15.31	12.75	8.04	6.67	4.35	16.52
REPOS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATN.PAR	5.41	5.01	2.72	1.82	1.81	1.82	1.18	0.53	0.46	0.91	0.76	0.67	0.52	0.24	0.14
LECHE	333.45	297.53	161.62	168.14	168.81	108.40	70.19	31.43	27.40	54.97	45.01	37.15	30.75	20.17	8.61

6627.36
1963.25
81.09
1619.25
110.83
109.92
6531.13

PERIODO24

EDADES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MANUTE	407.91	195.65	121.39	117.56	115.27	112.71	109.58	113.72	121.79	108.64	81.20	19.19	56.46	45.73	36.22
RESCAT	11.84	11.45	5.31	5.66	3.59	3.51	2.71	2.62	2.72	2.74	2.13	1.75	1.43	1.16	0.92
VENTA	0.00	192.26	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	299.27	238.78	191.63	156.39	126.66	100.22
REFUS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	111.79	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATM.FAR	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.57	10.80	14.47	16.72	9.56	3.73	16.71	9.48	6.66	3.99
LECHE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	53.45	641.52	857.01	877.28	567.94	459.64	626.49	563.07	395.64	226.17

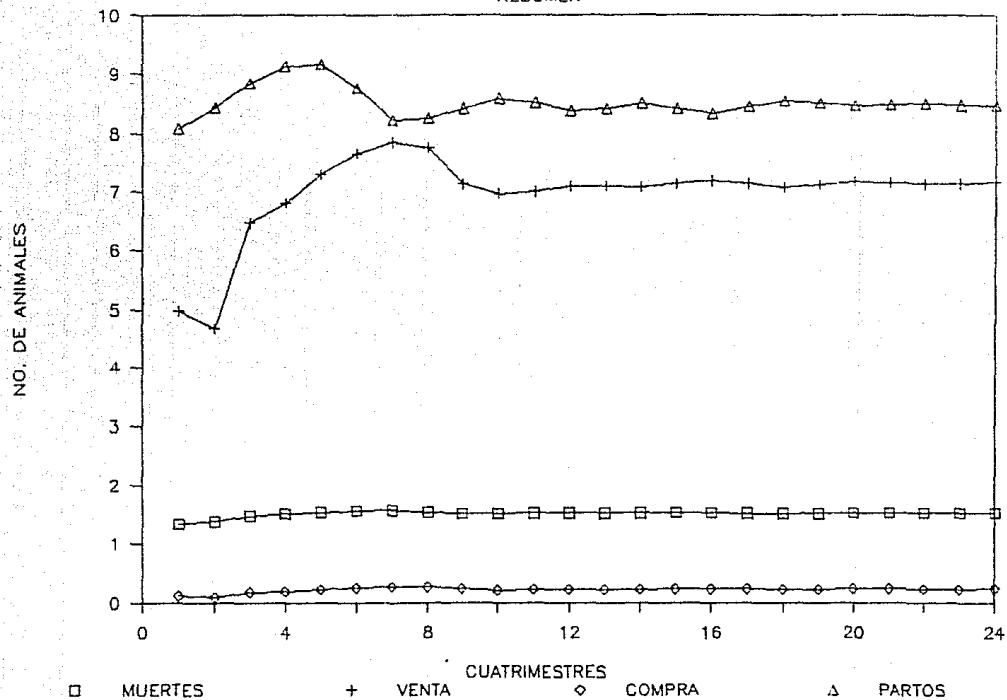
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	TOTAL
MANUTE	28.72	23.00	19.39	16.49	13.21	10.39	7.95	6.22	2.72	2.78	4.49	3.74	3.09	2.55	0.91	6629.40
RESCAT	9.73	6.58	0.20	0.42	0.33	0.26	0.15	0.12	0.05	0.04	0.09	0.07	0.06	0.05	0.01	1783.11
VENTA	79.56	63.71	51.27	43.69	36.64	28.53	21.97	17.19	7.50	6.29	12.40	7.91	6.53	5.41	19.75	3429.84
REFUS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	111.79
ATM.FAR	5.64	4.73	2.57	1.92	1.33	1.91	1.22	0.99	0.45	0.37	0.74	0.81	0.51	0.42	0.28	109.81
LECHE	235.19	281.29	154.53	168.57	112.47	112.33	72.72	58.51	26.43	22.20	42.80	36.46	30.09	24.92	16.34	6524.18

T A B L A R E S U M E N

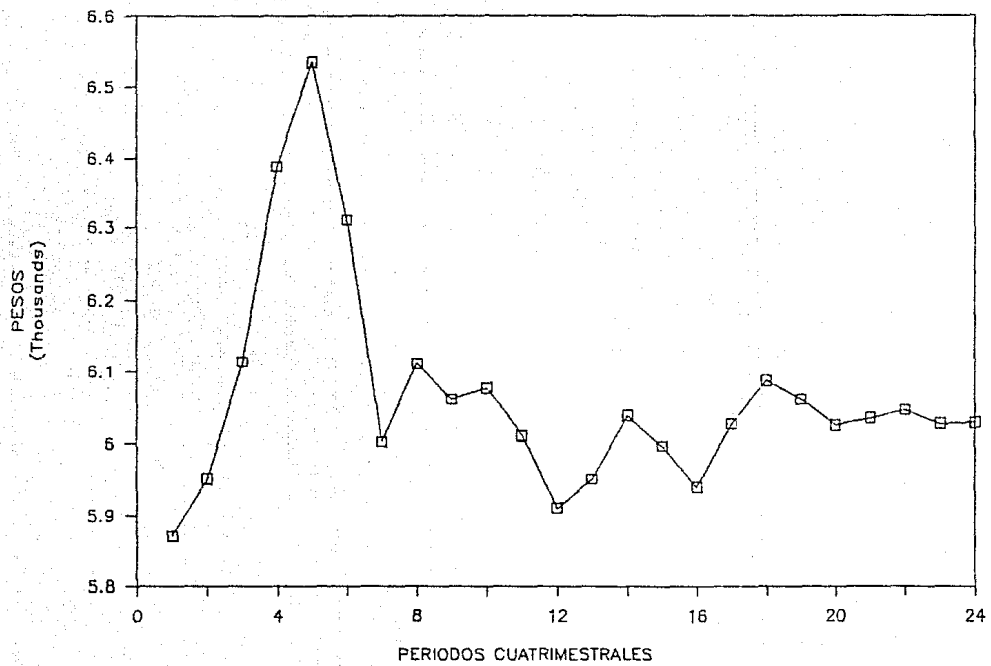
PERIODO	MUERTE	VENTA	COMPRA	PARTOS	CABEZAS	UTILIDAD	%C
0	-	-	-	-	53.00	-	-
1	1.33	4.98	0.11	8.09	54.89	5870.69	108.95
2	1.37	4.67	0.09	8.43	57.37	5952.68	103.74
3	1.47	6.46	0.18	8.83	58.45	6113.50	104.57
4	1.51	8.80	0.19	9.12	59.45	6389.66	107.47
5	1.54	7.30	0.21	9.17	59.99	6535.20	109.94
6	1.56	7.66	0.24	8.75	59.75	6310.86	105.62
7	1.57	7.85	0.27	8.22	58.82	6002.72	102.05
8	1.54	7.76	0.26	8.26	58.84	6111.00	105.28
9	1.51	7.14	0.22	8.40	58.02	6060.41	104.45
10	1.51	6.97	0.21	8.56	58.32	6076.36	104.20
11	1.52	7.01	0.21	8.50	58.50	6011.04	102.75
12	1.53	7.09	0.22	8.37	58.48	5909.55	101.05
13	1.52	7.09	0.22	8.40	58.49	5750.18	101.74
14	1.52	7.07	0.22	8.48	58.59	6037.93	103.05
15	1.53	7.13	0.22	8.40	58.56	5996.36	102.40
16	1.53	7.18	0.23	8.31	58.59	5939.22	101.71
17	1.52	7.14	0.22	8.42	58.38	6027.14	103.24
18	1.52	7.07	0.22	8.52	58.52	6086.73	104.60
19	1.52	7.12	0.22	8.49	58.60	6060.44	103.43
20	1.53	7.17	0.22	8.45	58.57	6025.33	102.87
21	1.53	7.15	0.22	8.46	58.58	6035.16	103.03
22	1.53	7.13	0.22	8.48	58.62	6045.65	103.13
23	1.53	7.13	0.22	8.48	58.64	6027.36	102.79
24	1.53	7.17	0.22	8.45	58.61	6029.40	102.87

EVOLUCION DEMOGRAFICA

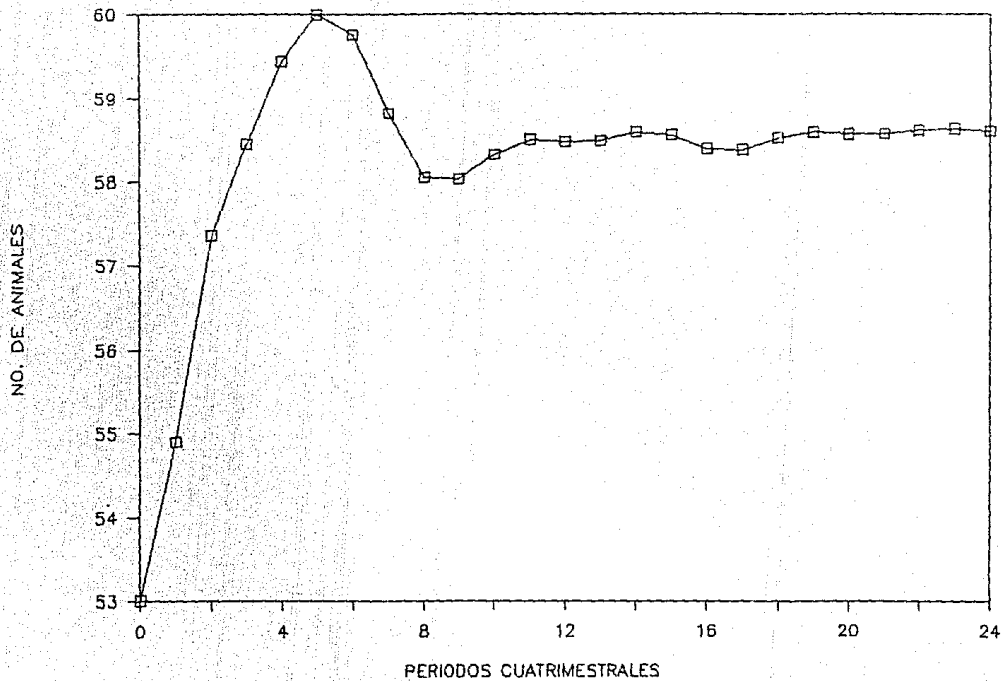
RESUMEN



INGRESOS

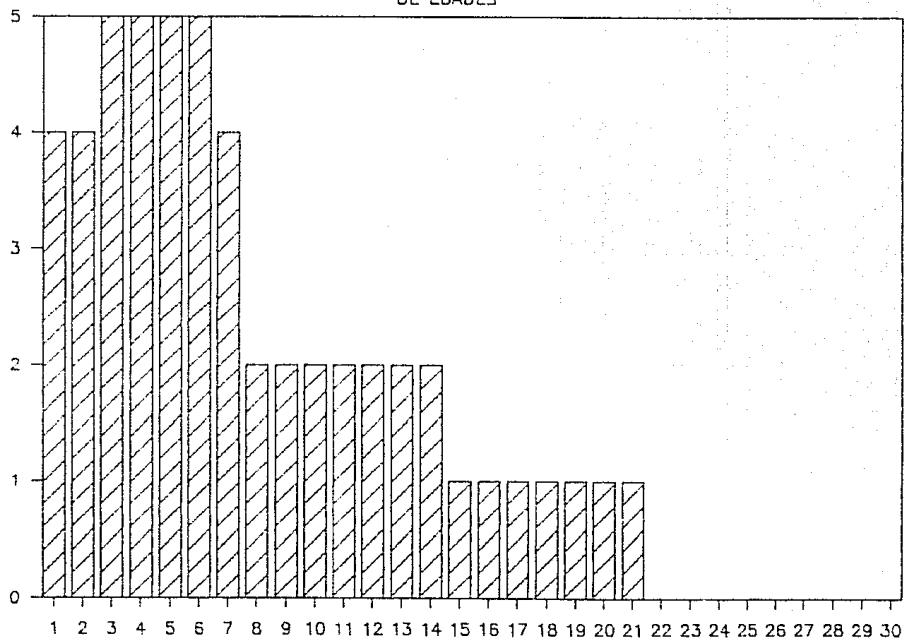


CABEZAS TOTALES POR PERIODO



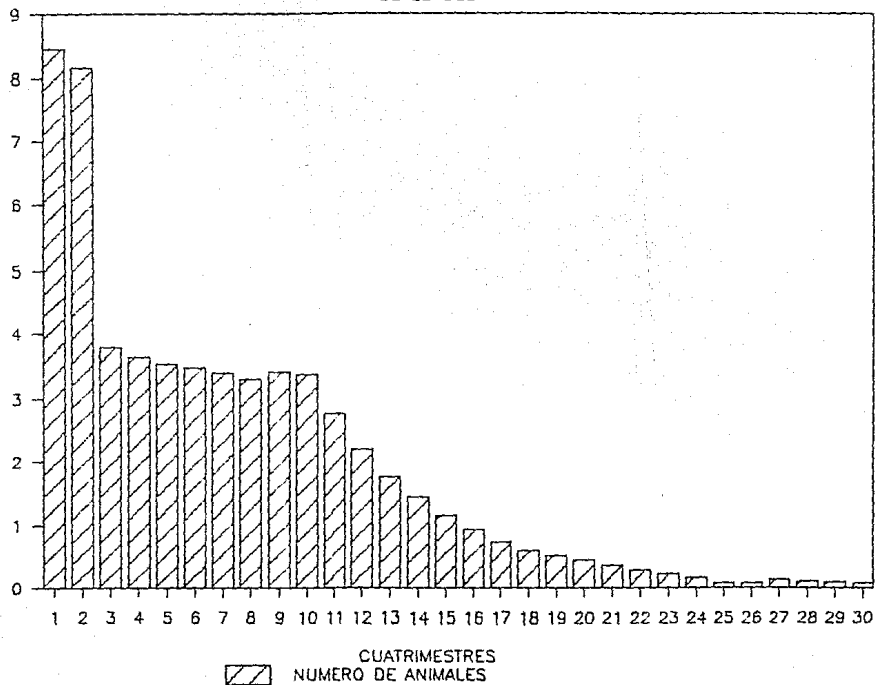
DISTRIBUCION INICIAL

DE EDADES



CUATRIMESTRES
NUMERO DE ANIMALES

DISTRIBUCION FINAL DE EDADES



3.2.1 Observaciones.

Puede resaltarse que las estrategias elegidas resultan en un hato que crece de 53 cabezas a 59 en solo cuatro periodos cuatrimestrales. A partir de este momento se observa una marcada estabilización de la población alrededor de los 58 animales teniendo también una estabilización para los partos, las compras, las muertes y las ventas de animales en pie.

Por otra parte, en la tabla resumen se observa que el número de compras que se hacen cada periodo son casi cero. Esto indica que durante los 24 periodos de proyección el número de partos alcanzó para reemplazar a aquellos animales que salieron del sistema por venta y muerte; este comportamiento se observa más claramente en la gráfica de la Evolución Demográfica (resumen).

En la tabla resumen así como en la gráfica de los ingresos económicos obtenidos, se observa un aumento importante que puede ser debido a las ventas ocasionadas al inicio del estudio. Al igual que las variables demográficas, las ganancias obtenidas parecen comenzar a estabilizarse a partir del periodo 20.

Finalmente, en las gráficas de las distribuciones tanto inicial como final de edades, se observa que el objetivo de agrupar a los animales en edades jóvenes se ha cumplido al igual que en los ejemplos anteriores.

CONCLUSIONES

Dentro del estudio de la evolución de poblaciones, sería muy difícil construir un solo modelo que ajustase a tan gran variedad de todas ellas.

Aunque este modelo se desarrolló tomando en cuenta las características de una población en particular es sin embargo, adaptable tanto a diversas poblaciones como explotaciones animales. En la introducción se menciona que mediante Cadenas de Markov es posible modelar el paso de los escolares en una institución educativa a través de los años; pues bien, este modelo permite también el seguimiento de la evolución de esa población. Para tal efecto se tiene ya la distribución de edades, el vector que consta de las probabilidades de que los alumnos acrediten al siguiente año escolar y dos causas de abandono del sistema que originalmente se tienen como VENTA y MUERTE. Ahora, en el caso de una institución educativa, estos 2 últimos estados bien pueden referirse a los alumnos que se gradúan y a los que abandonan la escuela por alguna causa respectivamente.

El renglón PARTOS de la parte demográfica del modelo original puede referirse a los nuevos alumnos que entran al primer año escolar reemplazando al total de graduados un año antes o sólo a un porcentaje de ellos.

El caso del renglón marcado como REPOS sería irrelevante en este caso puesto que difícilmente se reemplazará a un alumno que abandone cierto grado de la escuela por otro que tenga los mismos estudios.

Con respecto a la parte económica del modelo, es probable que si fuera necesario hacerle algunas modificaciones para observar los ingresos o egresos monetarios ya que en este tipo de ejemplos los renglones LECHE, ATN.PAP, RESCAT y VENTA no tendrían sentido. Sin embargo, el renglón MANUTE puede referirse a los gastos ocasionados para darle educación a un individuo y el renglón REPOS podría modificarse de manera que represente los ingresos económicos obtenidos a causa de las inscripciones de los alumnos de nuevo ingreso.

En fin, este modelo puede ser adaptable, aunque no a todas las poblaciones, por lo menos a un buen número de ellas.

En todos los ejemplos, se ha pensado en incorporar toda la información demográfica inicial y mantenerla constante a lo largo del tiempo; por ejemplo, estar comprando y/o vendiendo periodo a periodo la misma cantidad de animales. Sin embargo, teniendo ya automatizado el modelo, será más sencillo llevar a cabo la tarea de definir tanto estrategias de reemplazo como de venta de animales que sean menos rígidas; es decir, ya se podrá pensar en reemplazar y/o vender a un número variable de animales en la población al paso del tiempo y en el momento en que se desee. Y más aún, esto se podrá hacer también para las tasas de muerte y reproducción.

Por otra parte, gracias a que el modelo está automatizado, es muy fácil una vez ajustada la información a las características de la población de que se trate, evaluar el modelo con diferentes estrategias hasta que se encuentre una adecuada dependiendo de las necesidades en cada caso particular.

REFERENCIAS

Aluja, A., y McDowell, R. E. (1984). Decision Making by livestock/crop small holders in the state of Veracruz, México. Cornell University, New York. Cornell International Agriculture Mimeo 105.

BAILEY, N. T. J. (1954). The Elements of Stochastic Processes: with applications to the natural sciences. Wiley, New York.

BARTHOLOMEW, D. J. (1973). Stochastic Models for Social Processes. Wiley, London.

Bustos, T. V. A. (1989). Modelado de la Evolución de una Población mediante Cadenas de Markov. Memorias del 3^{er} foro de Estadística. Guanajuato, Gto. En prensa.

HOEL, P. G., Port, S. C., y Stone, Ch. J. (1972). Introduction to Stochastic Processes. Houghton Mifflin, Boston.

Leung, P., y Liang, T. (1979). Generalized Animal Production System Design and Management Model. American Society of Agricultural Engineers, 22(4) 850-856.

Séré, C., y Doppler, W. (1980-81). Simulation of Production Alternatives in Ranching Systems in Togo. University of Hohenheim, West Germany. Agricultural Systems, 6, 249-260.