3 2
3 5

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

"REVISION Y COMPLEMENTO A LOS APUNTES DE MECANICA DE MATERIALES EN EL TEMA CORRESPONDIENTE A DEFLEXIONES"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A

SALVADOR CASTILLO SOTELO

FALLA DE CRIGEN

MEXICO, D. F. 1989

A la:

Universidad Nacional Autónoma de México.

y en especial:

A la Facultad de Ingeniería.

I N D I C E

CAPITULO 4 .

CAPITULO 5 .

CAPITULO 6 .

CAPITULO 7.

C A P I T U L O 1

INTRODUCCION

Cálculos avanzados de análisis estructural y el desarrollo de aceros y concretos de alta resistencia y calidad,permiten obtener el diseño de elementos estructurales flexibles y esbeltos,en los cuales,tiene gran importancia el comportamiento de las deflexiones.

El estudio de deflexiones,resulta ser muy prescindible para la estimacion de las rigideces de elementos estructurales,de hecho,frecuentemente el diseño estructural de una viga,queda determinado más por su rigidez que por su resistencia.

En el presente trabajo,se hace una sistematización del modelo matemático de la ecuación fundamental de la curva de deflexión de vigas mediante dos procesos analíticos diferentes como lo son,el realizado a través del analisis matemático,y del de mecánica de materiales.

Para ello, se hace énfasis en las siguientes hipótesis fundamentales de la teoría técnica de la flexión :

1). Secciones planas de una viga normales a su eje, permanecen planas, antes y después de que la viga se somete a flexión.

2). El material es homogéneo y obedece a la ley de Hooke.

3). El modulo elástico es igual a tensión que a compresión.

4). La viga es inicialmente recta y de sección constante .

5). El plano en el que actuan las fuerzas, contiene a uno de los ejes principales de la sección recta de la viga, y las cargas actuan perpendicularmente al eje longitudinal de aquélla.

Además, se incluye la representación gráfica del comportamiento de vigas de material elástico y elastoplástico sujetas a flexión, mediante diagramas clásicos, de Momento-curvatura, - carga desplazamiento y Momento-rotación.

Se hace uso de la aplicación de las funciones de discontinuidad (funciones de Macaulay, funciones de singularidad), como una alternativa más para representar cargas, y determinar pendientes y deflexiones de vigas.- Se incluye la solución de ejemplos numéricos supuestos, cuyo fín unico es ilustrar la aplica -

cion de dichas funciones.

Una de las más importantes aplicaciones del estudio de la deflexion de vigas es,por otra parte,la obtención de ecuaciones de deflexión que,junto con las condiciones de equilibrio estático,permiten resolver las vigas estaticamente indeterminadas.

El método de la viga conjugada mencionado en este trabajo, constituye uno de los varios métodos que existen para resolver vigas estaticamente indeterminadas.-Se basa en los dos teoremas del método de área momentos (teoremas de Mohr).

Con el propósito de dar una idea de la aplicación de dicho método en la obtención de desplazamientos (lineales y angulares),se presenta concretamente,una forma de procedimiento .

Por último,se presenta un ejemplo numérico práctico,aplicado a vigas de concreto,así como la bibliografía utilizada.

__________ o __________

C A P I T U L O 2

ANTECEDENTES MATEMATICOS

2.1. Análisis de la curvatura (K), de un arco de curva desde el punto de vista matemático.

Sea (L) una curva en el espacio tridimensional, definida por la función $\bar{r}(u)$, o, $\bar{r}(t) = X(t)i + Y(t)j + Z(t)k$ (ecuación vectorial de la curva).

Considerando al escalar (u) como la longitud de arco (s), medida a partir de un punto fijo de (L); de la curva, dr/du es un vector tangente a (L) y que llamaremos (T), como se aprecia en la figura 1.

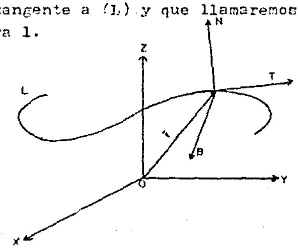


Fig 1

Luego entonces, $d\bar{r}/ds = \bar{T} = d\bar{r}/dt \;/\; |d\bar{r}/dt|$.

La variación de (T)respecto a (s),es una medida de la curvatura de (L),y viene dada por $d\bar{T}/ds$.- La dirección de $d\bar{T}/ds$ en un punto cualquiera de (L) es la correspondiente a la normal a la curva en dicho punto.

El vector unitario (N) en la dirección de la normal,se llama normal principal a la curva,luego entonces :
$d\bar{T}/ds = K\bar{N}$,siendo (K) la curvatura de (L) en el punto dado.

El recíproco de la curvatura (K),se le llama radio de curvatura,y se expresa por : $\rho = 1/K$,así mismo,el vector unitario ($\bar{B}$),definido por el producto vectorial $\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N}$,perpendicular al plano formado por ($\bar{T}$) y ($\bar{N}$), se llama binormal a la curva.

Las fórmulas de Frenet-Serret,que relacionan los vectores ($\bar{T}$),($\bar{N}$) y ($\bar{B}$),con sus derivadas,son las siguientes:

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = K\bar{N} \quad , \quad \frac{d\bar{N}}{ds} = \tau\bar{B} - K\bar{T} \quad , \quad \frac{d\bar{B}}{ds} = -\tau\bar{N}$$

en donde el escalar (τ) se le denomina,torsión.

El plano osculador a una curva en un punto (P),es el que contiene a la tangente y a la normal principal en (P).
El plano normal es el que pasa por (P) y es perpendicular al plano tangente.

El plano rectificante, es el que pasa por (P), y es perpendicular a la normal principal.

Dada una curva en un espacio bidimensional (fig 2), y cuyas ecuaciones paramétricas son :

$$x = x\ (s) \qquad ; \qquad y = y\ (s)$$

Se tiene que el vector de posición de un punto genérico de la curva es : $\bar{r} = x\ (s)i + y\ (s)j$, de la fig 2, se deduce que :

El vector tangente a la curva, queda expresado por:

$$T = \frac{dr}{ds} = \frac{dx}{ds}\ i + \frac{dy}{ds}\ j \qquad ; \qquad y \quad ,$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}\ i + \frac{d^2y}{ds^2}\ j \qquad ; \qquad \text{pero} \ ,$$

$$\frac{dT}{ds} = K\ N \qquad ; \qquad \text{con lo que} \quad :$$

$$K = \left|\frac{dT}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}$$

Ecuación que nos permite obtener la curvatura (K), de un arco de curva, desde el punto de vista vectorial, en un espacio bidimensional .

2.2 Enfoque analítico de la curvatura (K) de un arco de curva en un espacio bidimensional.

Como caso particular de una curva en un espacio tridimensional, podemos citar el de la representación de dicha curva en un espacio bidimensional, figura 2 .

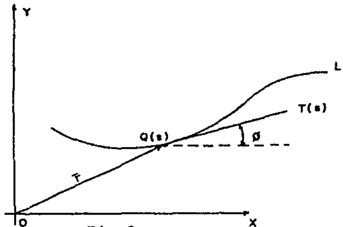


Fig 2

Los modelos matemáticos, que definen a esta curva, en el aspecto vectorial y paramétrico respectivamente, vienen representados por medio de las siguientes expresiones :
$\vec{r}(s) = x(s)i + y(s)j$,(ec, vectorial), $x = x(s)$, $y = y(s)$, (ec, paramétricas).

De igual forma, ésta misma curva fig 2 ,puede ser representada mediante la ecuación rectangular, $y = h(x)$.

Como $y'(x) = dy/dx$, es la pendiente de la recta tangente - en (Q), se tiene que :

$$\tan \emptyset = y'(x) \,, \qquad \text{donde} \qquad \emptyset = \tan^{-1} y'(x) \;\ldots(1)$$

La función de longitud de arco de una curva, esta definida por:

$$s(x) = \int_{a}^{x} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \;\ldots(2)$$

donde (a), es la abscisa del punto fijo sobre (L).

La forma de variación de Ø, a medida que se recorre la curva, esta en función, de que tanto este pronunciada dicha curva.

Así bien, la curvatura (K), de un arco de curva, dada en la forma $y = h(x)$, se puede definir como: la razón de variación del ángulo Ø, respecto a la longitud del arco (s); esto es :

$$\frac{d\emptyset}{ds} = K \;\ldots(3)$$

de la regla de la cadena de cálculo diferencial, se tiene :

$$\frac{d\emptyset}{dx} = \frac{d\emptyset}{ds}\,\frac{ds}{dx} \qquad \text{ó} \qquad D_x\emptyset = (D_s\emptyset)\,(D_xS)$$

en consecuencia :

$$K = D_s\emptyset = \frac{|D_x\emptyset|}{|D_xS|} \;\ldots(4)$$

derivando las ecuaciones, (1) y (2), se tiene :

$$\frac{d\emptyset}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} y'(x) \right) = \frac{y''}{1 + (y')^2} \quad ; \quad \text{ó sea ,}$$

$$Dx\emptyset = \frac{y''}{1 + (y')^2} \quad \ldots(5) \quad ; \quad y \quad , \quad DxS = \sqrt{1 + (y')^2} \quad \ldots(6)$$

luego entonces, sustituyendo, (5) y (6), en la ec (4), obtenemos:

$$K = |Ds\emptyset| = \frac{\dfrac{y''}{1 + (y')^2}}{\sqrt{1 + (y')^2}} =$$

$$K = \frac{y''}{1 + (y')^2\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y''}{\sqrt{[1 + (y')^2]^3}}$$

por lo tanto : $$K = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad \ldots(7)$$

ecuación que nos representa el modelo matemático de la curvatura (K) de un arco de curva, en un espacio bidimensional.

C A P I T U L O 3

DIAGRAMAS CARGA-DESPLAZAMIENTO Y MOMENTO CURVATURA

3.1. Análisis de deformaciones unitarias en vigas.

Una viga,es un elemento estructural que se somete a cargas que actúan transversalmente a su eje longitudinal.- Las cargas originan solicitaciones internas o resultantes de esfuerzo en forma de fuerzas cortantes y de momentos flexionantes .

Antes de la aplicación de dichas cargas,el eje longitudinal de una viga,es prácticamente una línea recta,y posteriormente después de su aplicación,el eje de la viga se flexiona,hasta adquirir la forma de una curva,la cual se conoce como curva de flexión (o curva elástica) de la viga.

En éstas condiciones,es importante señalar,la diferencia entre flexión pura y flexión no uniforme.- La flexión pura,se refiere a la flexión que experimenta una viga mediante la solicitacion de un momento flexionante constante,lo que implica que la fuerza cortante es cero,(dado que V=dM/dx),así mismo,la flexión no uniforme se refiere a la flexión en presencia de fuerzas cortantes,lo que significa que el momento flexionante varía a lo largo del eje de la viga.

Es importante,que cuando se hace un análisis de las deformaciones internas de una viga,se deba de considerar la curvatura de ésta y las deformaciones relacionadas .

Con el propósito de obtener una idea mas precisa de lo que anteriormente se menciono,la figura 3,muestra una determinada sección de viga,en flexión pura,mediante la aplicación de momentos flexionantes.

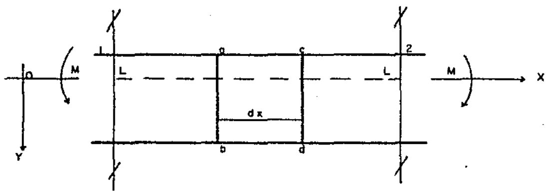


Fig 3

Mediante la solicitación de los momentos (M),la viga se deforma en el plano (x-y),y su eje longitudinal se flexiona en analogía a una curva circular (fig 4).

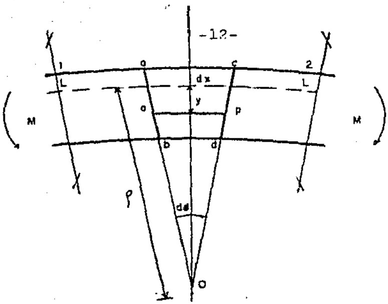


Fig 4

Las secciones transversales de la viga,ab y cd,permanecen planas y perpendiculares a las fibras longitudinales de la viga.- Esta observación,forma la base para la hipótesis fundamental de la teoría de la flexión,que se puede enunciar como sigue: Secciones planas de una viga,normales a su eje,permanecen planas después de que la viga se somete a flexión.-Hipótesis , también conocida,como hipótesis de Navier.

Debido a las deformaciones por flexión,las secciones transversales ,ab y cd,giran,una con respecto a la otra,alrededor de ejes perpendiculares al plano (x-y).- Por lo que las fibras de la parte superior de la viga,presentan tensión,debido a que se alargan,mientras que las de la parte inferior están en compresión,debido a que se acortan.

Ahora bien,es preciso señalar los signos convencionales para la curvatura,los cuales se refieren a la orientación de los ejes coordenados . Sí el eje (x),es positivo hacia la derecha y el eje (y),es positivo hacia abajo,entonces la curvatura del eje de la viga es positiva cuando la viga es cóncava hacia abajo,y negativa cuando la viga es cóncava hacia arriba.

En un determinado lugar, entre la sección superior e inferior de la viga,se localiza una superficie en la que las fibras longitudinales,no alteran su longitud,denominada superficie neutra de la viga,(fig 4),(línea punteada L-L).

Esta superficie neutra,en intersección con cualquier plano normal a ella,origina el denominado eje neutro de la sección transversal de un elemento.

Los planos ab y cd,se cortan en el centro de curvatura denominado (o),y el ángulo entre esos dos planos,se denomina $d\emptyset$,de igual forma la distancia desde (o),hasta la superficie neutra constituye el radio de curvatura (ρ).- Consecuentemente, la distancia inicial dx,entre los dos planos,no varía en la - superficie neutra,por lo que, $\rho d\emptyset = dx$.- Sin embargo,fuera de la superficie neutra,cualquier fibra longitudinal,se alarga o se acorta,originando deformaciones εx longitudinales.

Para estimar estas deformaciones,consideremos una fibra longitudinal (OP),localizada en la sección de la viga a una -

distancia (y) de la superficie neutra (fig 4) .

El alargamiento experimentado por esta fibra (OP), viene expresado por:

$$\delta = (\rho - y)\, d\phi \quad , \text{ donde } d\phi = \frac{dx}{\rho} \quad , \text{ por lo tanto}$$

$$\delta = \frac{\rho dx}{\rho} - \frac{y dx}{\rho} = dx - \frac{y}{\rho} dx \quad \ldots (8)$$

Debido a que la longitud original de (OP), es dx, el alargamiento efectivo queda:

$$\delta - dx = dx - \frac{y}{\rho} dx - dx \; , \qquad \delta - dx = \frac{-y}{\rho} dx \ldots (9)$$

Por lo tanto la deformación unitaria correspondiente, es igual al alargamiento efectivo, dividido entre la longitud inicial dx; de tal manera que :

$$\epsilon x = -\frac{y}{\rho} = -Ky \quad \ldots (10)$$

donde (K), es la curvatura definida por : $K = 1/\rho$.
Esta ecuación establece que las deformaciones longitudinales en la viga, son proporcionales a la curvatura y que varían linealmente con la distancia (y), desde la superficie neutra.

Cuando una fibra esta por debajo de la superficie neutra, la distancia (y) es positiva; si la curvatura tambien es positiva, entonces (ϵ_x) sera una deformación negativa y constituye un acortamiento.-Cuando una fibra está por arriba de la superficie neutra, la distancia (y) es negativa; entonces para curvatura positiva, (ϵ_x), sera positiva, lo que constituye un alargamiento.

3.2. Esfuerzos normales en vigas.

A partir de la obtención de las deformaciones unitarias normales ϵx, es posible obtener los esfuerzos uniaxiales σx que actúan normales a la sección transversal de una viga.

Cada fibra longitudinal de la viga, está sometida a un estado de esfuerzo uniaxial, de tal manera que el diagrama de esfuerzo-deformación para el material, proporcionará la relación entre σx y ϵx .

Si el material es elástico, con un diagrama lineal esfuerzo-deformación, se puede aplicar la ley de Hooke para esfuerzos uniaxiales ($\sigma = E\epsilon$) y obtener :

$$\sigma x = E\epsilon x = - EKy \quad ...(11)$$

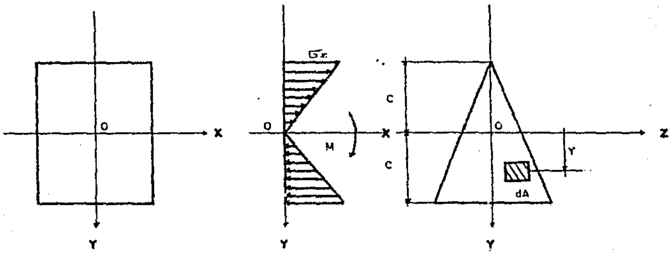
donde $\epsilon x = -Ky$

Los esfuerzos normales que actúan sobre la sección transversal, varían linealmente con la distancia (y) medida a partir de la superficie neutra (Fig 5b).

De igual manera, se puede observar en la misma figura, que los esfuerzos, son negativos (de compresión), por debajo de la superficie neutra, y positivos, (de tensión), hacia arriba de ella.

Tomando en cuenta el momento resultante de los esfuerzos x que actúan sobre la sección transversal (Fig 5 a).-La fuerza elemental $\sigma_x dA$ sobre el elemento dA (Fig 5 c),actua en la dirección positiva del eje (x),cuando x es positivo,y en la dirección negativa cuando σ_x es negativo.- Por lo que su momento respecto al eje (z), que representa la contribución infinitesimal de $\sigma_x dA$ al momento M_o, es :

$$dM_o = -\sigma_x y dA$$



(a) (b) (c)

Fig 5

La integración de éstos momentos elementales sobre toda el area de la sección transversal,conduce al momento total M_o ;

luego entonces:

$$M_o = \int \sigma x \; y \; dA \quad \ldots (12)$$

sustituyendo la ecuación (11), en la anterior (12), resulta :

$$M = - K E \int y^2 dA \quad \ldots (13)$$

Esta ecuación, se puede simplificar, de manera que :

$$M = K E I \ldots (14)$$

donde $I = \int y^2 dA$, que constituye el momento de inercia del área de la sección transversal con respecto al eje neutro (z).

La ecuación (14), puede reordenarse, de tal manera que :

$$K = 1/\rho = \frac{M}{EI} \quad \ldots (15)$$

Ecuación que determina, que la curvatura del eje longitudinal de una viga, es proporcional al momento flexionante (M), e inversamente proporcional a la cantidad EI, que se conoce como rigidez a flexión de la viga.

Como un complemento a la convención de signos, se puede decir, que un momento flexionante positivo produce curvatura negativa, y un momento flexionante negativo produce curvatura positiva.

3.3. Interrelación de los diagramas, carga - desplazamiento y momento - curvatura.

El análisis del mecanismo y comportamiento, de elementos estructurales sujetos a flexión, se ha estudiado experimentalmente mediante ensaye de especímenes.

Mediante la aplicación de la fórmula $K = M/EI$, se obtienen varios valores de (M) y (K), los cuales definen una gráfica como la mostrada en la (Fig 6), (correspondiente a materiales lineales y elásticos), que recibe el nombre de diagrama Momento-Curvatura.

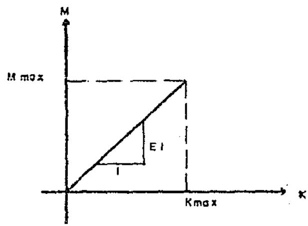
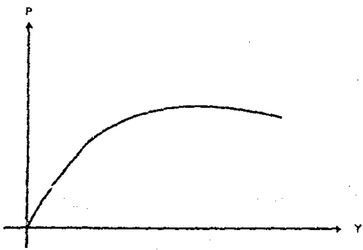


Fig 6

Los diagramas, momento-curvatura, resultan de gran importancia porque sirven para obtener diagramas momento-rotación, y carga-desplazamiento.

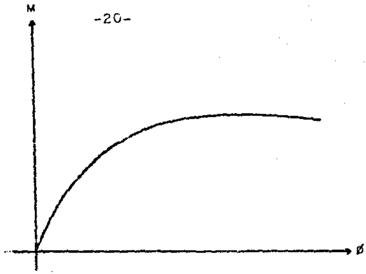
En consecuencia, los diagramas carga-desplazamiento, y momento-rotación, son de gran ayuda para fines de diseño estructural de elementos, ya que proporcionan, la carga y el momento flexionante que pueden resistir dichos elementos; así mismo, las deflexiones y rotaciones correspondientes a diferentes valores de la carga aplicada.

Ejemplos de diagramas, carga-desplazamiento, y momento-rotación, son los que se presentan en la (Fig 7); los cuales resultan ser diagramas clásicos, obtenidos experimentalmente en ensayes de especímenes a flexión.



carga-desplazamiento

Fig 7 a



Momento-rotación

Fig 7 b

3.3.1. Diagrama momento-curvatura para una viga de material elastoplástico.

Sí expresamos a la curvatura (K), como (Ky) curvatura de fluencia, (esto es, la curvatura cuando (M), es igual al momento de fluencia (My)), se tiene :

$$Ky = \frac{My}{EI} \quad \ldots (16)$$

Por lo que la relación momento-curvatura para una viga en el intervalo linealmente elástico, puede expresarse en forma - adimensional como sigue :

$$\frac{M}{My} = \frac{K}{Ky} \quad ; \qquad (0 \leq M \leq My) \quad \ldots (17)$$

Ecuación representada por la porción recta, del diagrama momento-curvatura de la (Fig 8).

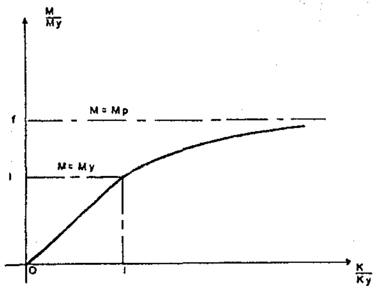


Fig 8

De igual forma, se puede observar en la (Fig 8), que cuando el momento se vuelve mayor que (My), parte de la viga, se volverá completamente plástica.- La relación momento-curvatura, se convierte entonces en no lineal, ya que la zona plástica penetra desde el punto mas lejano hacia el eje neutro de la viga; en consecuencia, la curva se suaviza y se aproxima asintóticamente a una recta horizontal.- Esta asíntota, representa el - momento plástico (Mp); así mismo, la ordenada a la asintota es el factor de forma (f); definido como: La razón del momento plástico de una viga, entre su momento de fluencia, esto es :

$$f = \frac{Mp}{My}$$

C A P I T U L O 4

ECUACION DE LA ELASTICA (FUNCIONES DE SINGULARIDAD)

4.1. Analogía de las ecuaciones de curvatura (K), mediante los procesos de análisis, matemático, y, del de mecanica de materiales.

El propósito de análisis, de la curvatura, mediante dos procesos diferentes, desarrollados anteriormente en los capítulos 2 y 3, tiene como objetivo principal obtener la ecuación fundamental diferencial de la curva de deflexión de una viga, a través, de la analogía de ecuaciones; esto es, por razonamientos - meramente diferentes como lo son, el matemático, y, el de mecanica de materiales respectivamente.

La conjunción de las ecuaciones (7) y (15), constituye el planteamiento, del como y porque surge la ecuación fundamental diferencial de deflexión de una viga.

Procediendo a realizar la consideración analógica de las ecuaciones de curvatura (K), obtenidas, se tiene:

De la ecuacion (7), obtenida mediante el procedimiento matemático, la curvatura queda expresada a través de la siguiente ecuación :

$$K(x) = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}}$$

Expresión que debe utilizarse, cuando se resuelven problemas que impliquen grandes deflexiones.

Del mismo modo, la curvatura (K) analizada desde el punto de vista de la Mecánica de Materiales, queda expresada por medio de la ec (15); esto es :

$$K = 1/\rho = \frac{M}{EI}$$

Expresión válida únicamente, cuando el material satisface la ley de Hooke y cuando las pendientes de la curva de deflexión son pequeñas.

Luego entonces, al igualar ambas ecuaciones(7 y 15), resulta;

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{EI} \quad \ldots (16)$$

Teniendo en cuenta que dy/dx, es muy pequeño, y que su cuadrado es despreciable frente a la unidad, la ecuación anterior se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad \ldots(19)$$

Ecuación que constituye fundamentalmente, la ecuación diferencial de la curva de deflexión (o elástica) de una viga.

4.1.2. Relación de ecuaciones diferenciales de vigas elásticas.

Para facilitar la solución de problemas subsecuentes, se utilizará la siguiente notación, para expresar diferenciación, esto es:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad ; \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \quad ; \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3} \quad ; \quad y'''' = \frac{d^4y}{dx^4}$$

Mediante ésta notación, se pueden expresar las ecuaciones diferenciales siguientes para vigas con rigidez a la flexión constante (EI), y linealmente elásticas.

$$EIy'''' = q \ldots(20), \quad EIy''' = -V \ldots(21), \quad EIy'' = -M \ldots(22)$$

4.2. Funciones de discontinuidad.

Las funciones de discontinuidad tienen una gran aplicación en la solución de problemas de Ingeniería, sobre todo en los relacionados con análisis de circuitos electrónicos, inductancia de calor, y análisis estructural de vigas.

La principal ventaja de la utilización de las funciones de discontinuidad, es que permiten la formulación de una función discontinua mediante una expresión simple, mientras que lo usual, implica describir una función discontinua mediante una serie de expresiones, una para cada región en la que la función es distinta.

A continuación, se analizarán dos clases de funciones, llamadas funciones de Macaulay y funciones de singularidad.-Aunque éstas funciones tienen diferentes definiciones y propiedades matemáticas, juntas forman una familia, llamadas funciones de discontinuidad.

4.2.1. Funciones de Macaulay.

Las funciones de Macaulay se utilizan para representar cantidades que inician en algun punto en comun sobre el eje (x), y que tienen valor cero a la izquierda de tal punto.

En términos generales, las funciones de Macaulay se definen por las siguientes expresiones :

$$F_n(x) = \langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{cuando } x \leq a \\ (x-a)^n & \text{cuando } x \geq a \end{cases} \quad \ldots(23)$$

$$n = 0,1,2,3,\ldots$$

En esta ecuación, (x), es la variable independiente, y (a), es el valor de (x) donde inicia la función.- Los paréntesis angulares son el símbolo matemático para una función de discontinuidad.

Como consecuencia de la definición, se observa que las funciones de Macaulay, tienen el valor cero a la izquierda del punto $x=a$, y el valor de $(x-a)^n$ a la derecha de tal punto.-Excepto para el caso n= 0 (valor especial); la función es igual a cero en $x = a$.

La definición anterior de las funciones de Macaulay, es válida para valores de (n) iguales a enteros positivos y cero, luego entonces la expresión general, toma los siguientes casos especiales :

Cuando n = 0, F_0 se le denomina Función Escalón Unitaria.
Cuando n = 1, F_1 se le denomina Función rampa unitaria
Cuando n = 2, F_2 se le denomina Función unitaria de segundo

Funciones de Macaulay		
Nombre	Definición	Gráfica
Función Escalón unitaria	$F_0 = \langle x-a \rangle^0 = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 1 & x \geq a \end{cases}$	
Función rampa unitaria	$F_1 = \langle x-a \rangle^1 = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ x-a & x \geq a \end{cases}$	
Función unitaria de segundo grado	$F_2 = \langle x-a \rangle^2 = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ (x-a)^2 & x \geq a \end{cases}$	
Funcion general de Macaulay	$F_n = \langle x-a \rangle^n = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ (x-a)^n & x \geq a \end{cases}$ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$	

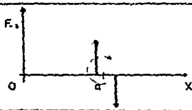
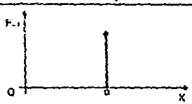
Funciones de singularidad		
Nombre	Definición	Gráfica
Función doblete unitaria	$F_{-2} = \langle x-a \rangle^{-2} = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ \pm \infty & x = a \end{cases}$	
Función impulso unitaria	$F_{-1} = \langle x-a \rangle^{-1} = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ + \infty & x = a \end{cases}$	

Table 1

Fuente Gere - Timoshenko, Mecanica de Materiales , segunda edicion grado. (tabla 1).

Las unidades de las funciones de Macaulay son las mismas que las de X^n; esto es, F_0 es adimensional, F_1 tiene unidades de X, F_2 tiene unidades de X^2, y así sucesivamente.

4.2.2. Funciones de singularidad.

Entre otro tipo de funciones de discontinuidad, se encuentran las funciones de singularidad, definidas por las siguientes expresiones :

$$Fn\ (x) = \langle x-a \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{cuando } x \neq a \\ \pm\infty & \text{cuando } x = a \end{cases} \quad \ldots(24)$$

$$n = -1, -2, -3, \ldots$$

Cabe señalar, que las funciones de singularidad, estan definidas para valores enteros negativos de (n).

Las funciones de singularidad tienen un valor igual a cero en cualquier punto, excepto en el punto comun x=a .- Las singularidades surgen porque cuando (n), es un entero negativo, la funcion $(x-a)^n$ puede formularse como una fracción mediante la expresion (x-a) en el denominador; entonces cuando x=a la funcion se vuelve infinita.

El orígen de las singularidades depende del valor de (n); en la tabla 1, se encuentran representados los casos mas importantes.

La función doblete unitaria ($n = -2$) tiene la característica que puede representarse mediante dos flechas de extensión infinita, una hacia arriba y otra hacia abajo, estando infinitesimalmente cercanas la una de la otra.* Estas flechas, pueden interpretarse como fuerzas, luego entonces el doblete puede representarse mediante una flecha curva, que es el momento de las dos fuerzas.- Este momento es igual al producto de una fuerza infinita y un trazo de palanca muy pequeño; el momento resulta ser finito e igual a la unidad.

La función impulso unitaria ($n = -1$), tambien es infinita en $x = a$, pero en forma diferente.

Si la flecha se interpreta como una fuerza, entonces la fuerza, tiene intensidad infinita y actua sobre una pequeña distancia infinitesimal a lo largo del eje (x).- Esta fuerza es igual a la intensidad multiplicada por la distancia sobre la que actua; este producto tambien se vuelve finito e igual a la unidad.

Las unidades de las funciones de singularidad, son las mismas que las de X^n, luego entonces, la funcion doblete tiene unidades de $1/X^2$ y la funcion impulso tiene unidades de $1/X$.

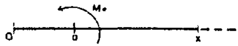
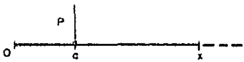
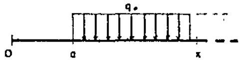
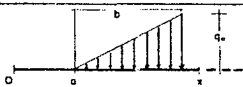
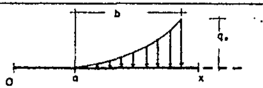
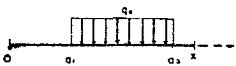
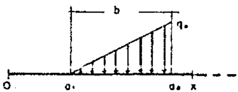
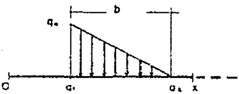
Caso	Carga sobre la viga	Intensidad q(x) de la carga distribuida equivalente
1		$q(x) = M_0 \langle x-a \rangle^{-2}$
2		$q(x) = P \langle x-a \rangle^{-1}$
3		$q(x) = q_0 \langle x-a \rangle^{0}$
4		$q(x) = \frac{q_0}{b} \langle x-a \rangle^{1}$
5		$q(x) = \frac{q_0}{b^2} \langle x-a \rangle^{2}$
6		$q(x) = q_0 \langle x-a_1 \rangle^{0} - q_0 \langle x-a_2 \rangle^{0}$
7		$q(x) = \frac{q_0}{b} \langle x-a_1 \rangle^{1} - \frac{q_0}{b} \langle x-a_2 \rangle^{1}$ $- q_0 \langle x-a_2 \rangle^{0}$
8		$q(x) = q_0 \langle x-a_1 \rangle^{0} - \frac{q_0}{b} \langle x-a_1 \rangle^{1}$ $+ \frac{q_0}{b} \langle x-a_2 \rangle^{1}$

Tabla 2

Fuente : Gere-Timoshenko, segunda edicion Mecanica de Materiales

4.3. Representación de cargas sobre vigas a través de funciones de discontinuidad.

Las funciones de discontinuidad que se muestran en la tabla 1, son de gran ayuda para la representación de cargas sobre vigas; tales como, cargas uniformes, cargas variables, fuerzas y momentos concentrados.

Los perfiles de las funciones, tienen una analogía coincidente exacta con los perfiles de los diferentes diagramas de carga.- Solamente se necesita, multiplicar las funciones dadas en la tabla 1, por las intensidades de carga apropiadas, con el objeto de establecer un modelo matemático representativo de las cargas.

Los casos estándar de cargas más comunes, se listan en la tabla 2, mientras que los casos de carga mas complicados tienen solución mediante la superposición de los casos elementales.

Para dar una idea de como se obtuvieron las expresiones de la tabla 2, se tomará como ejemplo la carga uniforme del caso 3. - Esta carga puede representarse por medio de un modelo matemático mediante la función escalón unitaria F_0, la cual se expresa :

$$F_0(x) = \langle x-a \rangle^0 = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 1 & x \geq a \end{cases} \qquad \ldots(25)$$

Multiplicando la función (F_o) por (q_o),que representa la intensidad de carga uniforme,nos da como resultado una expresión matemática para la carga uniformemente distribuída sobre una viga,esto es :

$$q\ (x) = q_o \langle x - a \rangle^{0} \qquad \ldots (26)$$

donde q(x),tiene el valor de cero para $x \leq a$, y el valor de q_o para $x \geq a$.

La dirección de la carga representada por la ecuacion (26), puede ser ascendente o descendente dependiendo del signo convencional adoptado,luego entonces,asumiremos que las cargas en forma de momentos y fuerzas,son positivas en el sentido de las manecillas del reloj y hacia abajo,respectivamente.

Los casos 4 y 5,tienen una explicación análoga a la del caso 3, mediante las funciones rampa unitaria y de segundo grado.

Cabe señalar que para definir las funciones,se debe de especificar un punto en comun sobre cada gráfica.- Una manera de hacerlo,es concentrar la ordenada q en algun punto seleccionado arbitrariamente y localizado a una distancia b del punto x= a.

El caso 6, es un segmento de carga uniforme que inicia en $x = a_1$ y termina en $x = a_2$.- Esta carga puede expresarse como la superposición de dos cargas, donde la primer carga es una carga uniforme de intensidad q_0, que empieza en $x = a_1$ y continúa indefinidamente hacia la derecha (caso 3), la segunda carga tiene intensidad $-q_0$, iniciando en $x = a_2$ y continuando indefinidamente hacia la derecha.-Luego entonces, la segunda carga - cancela a la primera en la región a la derecha del punto $x=a_2$.

Los casos 7 y 8, se obtienen mediante la combinación de varios patrones elementales de carga.

Los casos 1 y 2, que representan cargas en forma de momentos o fuerzas concentradas, se resuelven por medio de funciones de singularidad, representándose un momento unitario, a través de la función doblete unitaria y una fuerza unitaria, me - diante la función impulso unitaria.

Las ecuaciones de los casos 1 y 2, son expresiones matemáticas que definen las intensidades de carga equivalentes para un momento y para una fuerza.

4.3.1. Ejemplos numéricos.

1).-

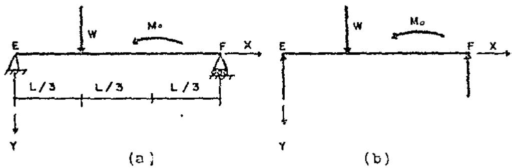


Fig 9

La viga EF mostrada en la fig 9a, soporta una carga concentrada (w), y un momento concentrado (M).

a).- Formular la expresión matemática para la intensidad q(x), de las cargas equivalentes que actúan sobre la viga en la región, entre los apoyos ($0 < X < L$).

b).- Formular la expresión matemática para la intensidad q(x), incluyendo reacciones ($0 \leq X \leq L$).

SOL :

a). Las cargas que actúan sobre la viga, son la carga concentrada (w) y el momento (M_o), luego, con el orígen de coordenadas en el apoyo E, y con la aplicación de los casos 2 y 1 respectivamente (tabla 2), se puede establecer la expresión matemática, - que representa las cargas distribuidas equivalentes en cualquier punto , excepto en los apoyos, esto es :

$$q(x) = w\left\langle x - \frac{L}{3}\right\rangle^{-1} + M_o\left\langle x - \frac{2L}{3}\right\rangle^{-2}$$

b). para que la expresión de cargas equivalentes sea válida - para todos los puntos de la viga, es necesario la obtención de las reacciones.

Empezamos por determinar las reacciones a partir del equilibrio estático, mediante un diagrama de cuerpo libre (fig 9 b) esto es :

$$\Sigma M_L = 0 \quad ; \qquad F_y = \frac{w}{3} - \frac{M_o}{L} \qquad \text{apoyo derecho.}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad ; \qquad F_L y = \frac{2}{3}w + \frac{M_o}{L} \qquad \text{apoyo izq.}$$

Una vez obtenidas las reacciones, podemos formular la expresión siguiente:

$$q(x) = -\left(\frac{2w}{3} + \frac{M_o}{L}\right)\langle x\rangle^{-1} + w\left\langle x - \frac{L}{3}\right\rangle^{-1} + M_o\left\langle x - \frac{2L}{3}\right\rangle^{-2} - \left(\frac{w}{3} - \frac{M_o}{L}\right)\langle x - L\rangle^{-1}$$

Ecuación, que nos representa las cargas distribuídas equivalentes en cualquier punto de la viga.

2).

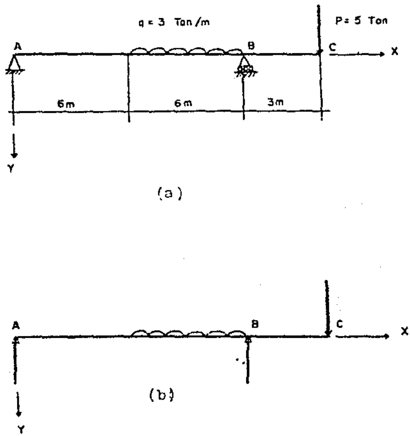


Fig 10

Una viga ABC, con apoyos simples en A y B, y un voladizo desde B hasta C, (fig 10 a), soporta una carga uniforme q = 3 ton/m, sobre parte del claro, y una carga concentrada P= 5 ton en el extremo libre.

a)-Formular la expresión matemática para la intensidad q(x) de las cargas distribuídas equivalentes que actúan sobre la viga.

SOL : Como primer paso, procedemos por determinar las reacciones, a partir del equilibrio estático (fig 10 b).

$\Sigma M = 0$; $B_y = 19.75$ ton (apoyo B)

$\Sigma F_y = 0$; $A_y = 3.25$ ton (apoyo A)

Tomando el orígen de las coordenadas, en el apoyo A, procedemos a formular la expresión matemática para q(x) con la ayuda de la tabla 2, como sigue :

$$q(x) = -3.25\langle x\rangle^{-1} + (3)\left(\langle x-6\rangle^{0} - \langle x-12\rangle^{0}\right) - 19.75\langle x-12\rangle^{-1} + (5)\langle x-15\rangle^{-1}$$

El último término es igual a cero en todos los puntos a lo largo de la viga, excepto en el extremo derecho, por lo que puede omitirse.

Por ello, en forma práctica podemos escribir q(x) como:

$$q(x) = -3.25\langle x\rangle^{-1} + 3\langle x-6\rangle^{0} - 3\langle x-12\rangle^{0} - 19.75\langle x-12\rangle^{-1}$$

donde : x, tiene unidades en metros
q(x) tiene unidades en ton.

4.4.Utilización de las funciones de discontinuidad,en la obtención de deflexiones de vigas.

La forma de proceder para el uso de funciones de discontinuidad es muy sencillo.

En primer lugar se escribe la expresión matemática para la carga distribuída equivalente q(x),mediante la forma que se hizo anteriormente.- Posteriormente,esta expresión se sustituye en la ecuación diferencial de la curva de deflexión ;enseguida se integra sucesivamente esta ecuación diferencial para obtener,la fuerza cortante,el momento flexionante,la pendiente,y por último la deflexión.

Cada integración produce una constante de integración,la cual puede evaluarse mediante condiciones de frontera conocidas.- Finalmente se obtiene una expresión simple que proporciona la deflexión en cada punto de la viga.

Cabe señalar,que no se requiere integrar una ecuación diferencial separada para cada segmento de viga,debido a que mediante el uso de funciones de discontinuidad,permite integrar a través de discontinuidades y singularidades sin introducir condiciones de continuidad de pendientes y deflexiones.

La continuidad de las pendientes y deflexiones queda asegurada automáticamente mediante el proceso de integración.

4.4.1. Ejemplos numéricos.

1).-

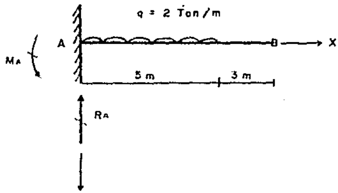


Fig. 11

Obtener la ecuación de la curva de deflexión, para la viga en voladizo AB, mostrada en la fig.

Sol: Iniciamos, por determinar las reacciones en el empotramiento, a partir del equilibrio estático :

$\Sigma F_y = 0$; $R_{Ay} = -10$ Ton

$\Sigma M_A = 0$; $M_A = -25$ Ton. m

Luego, con el orígen de coordenadas en el apoyo A, y mediante el uso de la tabla 2, aplicando los casos (2), (1), y (3), respectivamente, podemos formular la expresión matemática para la intensidad q(x), de las cargas distribuídas equivalentes.

$$q(x) = -10 \langle x \rangle^{-1} + 25 \langle x \rangle^{-2} + 2 \langle x \rangle^{0} - 2 \langle x-5 \rangle^{0} \quad \ldots(a)$$

Empleando la ecuación diferencial (20), en términos de la carga, obtenemos :

$$EIy'''' = q = -10 \langle x \rangle^{-1} + 25 \langle x \rangle^{-2} + 2 \langle x \rangle^{0} - 2 \langle x-5 \rangle^{0} \ldots(b)$$

Cabe señalar, que el término $\langle x \rangle^{0}$ en la ec anterior es igual a la unidad en cada punto, a lo largo del eje de la viga; por lo tanto, sustituyendo $\langle x \rangle^{0}$ por la unidad, e integrando, obtenemos :

$$EIy''' = -V = -10 \langle x \rangle^{0} + 25 \langle x \rangle^{-1} + 2 \; x - 2 \langle x-5 \rangle^{1} \ldots(c)$$

Expresión que representa la ecuación diferencial, en términos de la fuerza cortante.

Como iniciamos con la expresión completa para $q(x)$, incluyendo las reacciones, no se requiere constante de integración.

El siguiente paso es integrar la ec (c), para obtener el momento flexionante :

$$EIy'' = -M = -10x + 25 \langle x \rangle^{0} + x^{2} - \langle x-5 \rangle^{2} \quad \ldots(d)$$

Como se observa, la ecuación anterior no necesita constante de integración; ésto es, producto de la utilización de las funciones de discontinuidad.

Nuevamente, podemos reeplazar $\langle x \rangle^{0}$ por la unidad y realizar dos integraciones más :

$$EIy' = -5x^2 + 25x + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\langle x-5\rangle^3 + C_1 \ldots (e)$$

$$EIy = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{25}{2}x^2 + \frac{x^4}{12} - \frac{1}{12}\langle x-5\rangle^4 + C_1x + C_2 \ldots (f)$$

Las constantes C_1 y C_2, se evalúan a partir de las condiciones en el empotramiento:

$$y'(0) = 0 \qquad ; \qquad y(0) = 0$$

Estas condiciones dan por resultado, $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$, por lo que las ecuaciones finales para y' y (y) son:

$$EIy' = -5x^2 + 25x + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\langle x-5\rangle^3 \ldots (g)$$

$$EIy = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{25}{2}x^2 + \frac{x^4}{12} - \frac{1}{12}\langle x-5\rangle^4 \ldots (h)$$

Luego entonces, se ha obtenido la ecuación de toda la curva de deflexión en términos de funciones de discontinuidad.

Como una observación, señalaremos, que la pendiente y la deflexión en cualquier punto específico pueden obtenerse sustituyendo el valor apropiado de (x) en las ecs (g) y (h) respectivamente.

2).-

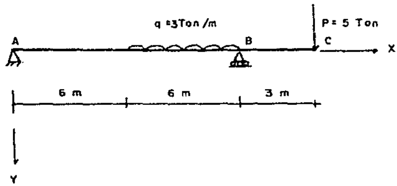


Fig 12

La viga ABC, mostrada en la figura, esta formada por un claro simple AB y un voladizo BC.

Determinar la ecuación de la curva de deflexión.

Sol: Como una observación, las cargas y las reacciones de ésta viga, fueron expresadas en términos de funciones de discontinuidad en el ejemplo (2) del inciso 4.3.1., siendo:

$$q(x) = -3.25 \langle x \rangle^{-1} + 3 \langle x-6 \rangle^{0} - 3 \langle x-12 \rangle^{0} - 19.75 \langle x-12 \rangle^{-1}$$

Empleando la ecuación diferencial (20), en términos de la carga, resulta; la ecuación anterior.

La primera y segunda integración, nos proporciona como resultado las ecuaciones matemáticas para la fuerza cortante y el momento flexionante respectivamente, esto es :

$$EIy''' = -V = -3.25 \langle x \rangle^{0} + 3 \langle x-6 \rangle^{1} - 3 \langle x-12 \rangle^{1} - 19.75 \langle x-12 \rangle^{0}$$

$$EIy'' = -M = -3.25\,x + \frac{3}{2}\langle x-6\rangle^{2} - \frac{3}{2}\langle x-12\rangle^{2} - 19.75\langle x-12\rangle^{1}$$

Como una observación, cabe señalar nuevamente, que no se requieren constantes de integración para (V) y (M), cuando se utiliza la expresión completa para q(x), esto es la expresión matemática que incluye las reacciones y las cargas.

El siguiente paso, procedemos a realizar dos integraciones mas, las cuales nos conduciran a obtener la pendiente y la deflexión, respectivamente, esto es:

$$EIy' = -1.6\,x^{2} + \frac{1}{2}\langle x-6\rangle^{3} - \frac{1}{2}\langle x-12\rangle^{3} - 9.87\langle x-12\rangle^{2} + C_1$$

$$EIy = -0.53\,x^{3} + \frac{1}{8}\langle x-6\rangle^{4} - \frac{1}{8}\langle x-12\rangle^{4} - 3.29\langle x-12\rangle^{3} + C_1 x + C_2$$

Las condiciones de frontera sobre la deflexion, son:

$$y(0) = 0 \quad ; \quad y(12) = 0$$

De las cuales obtenemos: $C_2 = 0$ y $C_1 = 62.82$

Luego entonces, las expresiones matemáticas finales para la pendiente y la deflexión son:

$$EIy' = -1.6\,x^{2} + \frac{1}{2}\langle x-6\rangle^{3} - \frac{1}{2}\langle x-12\rangle^{3} - 9.87\langle x-12\rangle^{2} + 62.82$$

$$EIy = -0.53\, x^{3} + \frac{1}{8} \langle x-6 \rangle^{4} - \frac{1}{8} \langle x-12 \rangle^{4} - 3.29 \langle x-12 \rangle^{3} + 62.8\, x$$

Ecuación que nos representa el modelo matemático de la curva de deflexión de la viga.

———————————— o ————————————

C A P I T U L O 5

TEOREMAS DE MOHR, VIGA CONJUGADA

5.1. Viga conjugada.

En el método de la viga conjugada,se selecciona una sección hipotetica (llamada conjugada) de la misma longitud de la sección real,pero apoyada en tal forma que,cuando se carga dicha sección conjugada con el diagrama M/EI ,de la sección real, el cortante resultante en un punto cualquiera,es igual a la pendiente de la sección real en dicho punto,y el momento flexionante en la sección conjugada es igual al desplazamiento de la sección real.

Este método,se basa en los dos teoremas del método de área de momentos (Teoremas de Mohr),que a continuación se enuncian :

5.2. Teoremas de Mohr.

5.2.1. Teorema I .

La desviación angular, o ángulo entre las tangentes trazadas a la elástica en dos puntos cualesquiera A y B, es igual al producto de 1/ EI por el área del diagrama de momentos flexionantes entre estos dos puntos.

Dicho teorema queda expresado mediante la siguiente ecuación:

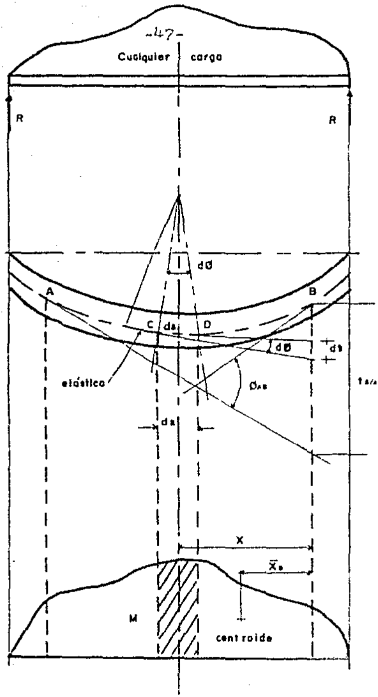
$$\phi_{AB} = \frac{1}{EI} \text{ (área)}_{AB} \; \ldots \; (27)$$

5.2.2. Teorema II.

La desviación tangencial de un punto B con respecto a la tangente trazada a la elástica en otro punto cualquiera A, en dirección perpendicular a la inicial de la viga, es igual al producto de 1/EI por el momento con respecto a B del área de la porción del diagrama de momentos entre los puntos A y B.

La expresión algebraica que define a este teorema es:

$$t_{B/A} = \frac{1}{EI} \text{ (área)}_{BA} \cdot \bar{X}_B \; \ldots \; (28)$$



Representación esquemática de los teoremas I y II de Mohr.
Fig 13

5.3. Procedimiento para la aplicación del método de la viga conjugada.

Para calcular desplazamientos (lineales y angulares) con éste método, se debe proceder como sigue :

a).-Obtener el diagrama de momentos flexionantes de la viga real; y a partir de éste, obtener el diagrama M/EI de la misma.

b).-Obtener las condiciones de la viga conjugada a partir de las de la viga real, teniendo en cuenta que las pendientes de ésta última corresponden a los cortantes de la viga conjugada y que las flechas (desplazamientos lineales) de la viga real corresponden a los momentos de la viga conjugada.

c).-Colocar como carga sobre la viga conjugada, el diagrama - M/EI obtenido en (a).

d).-Obtener los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flexionantes de la viga conjugada.- Las ordenadas de estos diagramas en cualquier punto de la viga dan la pendiente y la flecha respectivamente, en el punto correspondiente de la viga real medidos respecto a la posición original no deformada de la viga.

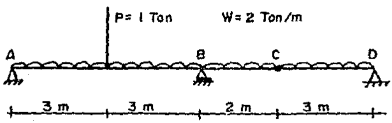
C A P I T U L O 6

PROBLEMAS (APLICACIONES A VIGAS DE CONCRETO).

Ejemplo numérico :

Revisión de deflexiones de acuerdo al reglamento (ACI-83) y (RDF - 87).

Datos del problema.

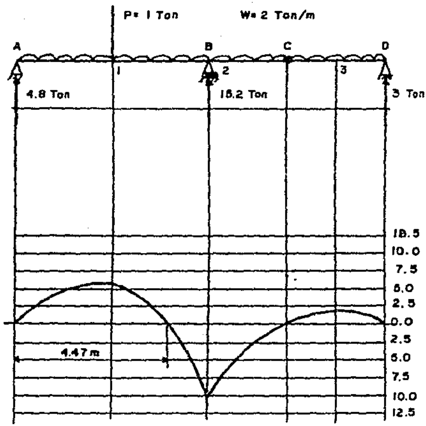


$f'c = 250$ Kg/cm^2
$fy = 4200$ Kg/cm^2

Calculo de reacciones:

ΣM_{der}	= 0	;	Dy = 3 Ton
ΣM_A	= 0	;	By = 15.2 Ton
ΣFy	= 0	;	Ay = 4.8 Ton

Diagrama de momentos flexionantes.



$$\Sigma M(1) = 4.8\ (3) - 2\frac{(3)^2}{2} = 5.4 \text{ Ton.m}$$

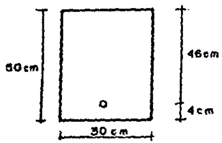
$$\Sigma M(2) = 4.8(6)-1(3)-2\frac{(6)^2}{2} = -10.2 \text{ Ton.m}$$

$$\Sigma M(3) = 1.5(3)-2\frac{(1.5)^2}{2} = 2.25 \text{ Ton.m}$$

Diseño de secciones y armados.

De $1/10 \leq d \leq 1/20$; tomando $d = 1/15$, se tiene:
$d = 6m/15 = 0.4 \approx 0.45$

Suponiendo una sección de 30x50 cm



Con r = 4cm

$d = h - r$
$d = 50 - 4 = 46$ cm

Usando(RDF -87), se tiene :

Con $f'c = 250$ Kg/cm² ; $f''c = 0.85 f^*c$,sí $f^*c \leq 250$ Kg/cm²
por lo tanto, $f''c = 0.85(0.8)(250) = 170$ Kg/cm² ,donde
$f^*c = 0.8 f'c < 250$ Kg/cm².

Para la sección de momento máximo;
Empleando la ecuación que proporciona la resistencia ideal a flexión,se tiene: $M_R = F_R\, bd^2 f''cq(1-0.5q)$

$$\frac{M}{bd^2} = \frac{(10.2\times10^5)}{30(46)^2} = 16.07(1.4) = 22.5$$

de $\rho = As/bd$;donde $\rho = 0.0065$, se tiene,$As = \rho bd$,por lo tanto, $As = 0.0065(30)(46) = 8.97 \approx 9$ cm²

Aceptaremos : 5 Vs # 5 = 9.90 cm²

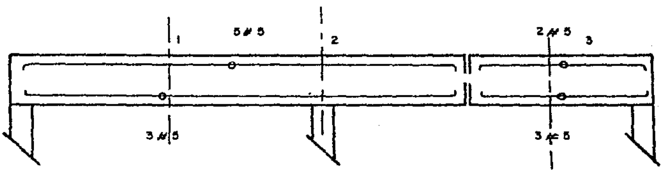
Revisión de la sección con momento M= 5.4 Ton.m

$$\frac{M}{bd^2} = \frac{5.4 \times 10^5 (1.4)}{30(46)^2} = 11.9 \quad ; \quad \text{con } \rho = 0.0033$$

$$As = 0.0033(30)(46) = 4.55 \simeq 4.6 \text{ cm}^2$$

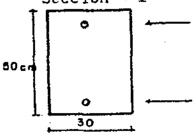
Aceptaremos: 3 Vs # 5 = 5.94 cm².

Diseño del armado para la viga.



Sección transformada.

Sección # 1



$A'_s = 5 \# 5 = 9.9\ cm^2$

$A_s = 3 \# 5 = 5.94\ cm^2$

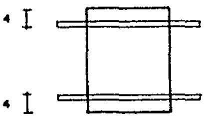
Considerando concreto clase 1.

$E_c = 14000\sqrt{f'c} = 14000\sqrt{250} = 221359\ Kg/cm^2$

$E_s = 2100000\ Kg/cm^2$

Relación modular (n) , $n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2100000}{220000} \simeq 9.6$

Cálculo de los centroides.



$n(9.9) = 9.6(9.9) = 95.04\ cm^2$

$n(5.94) = 9.6(5.94) = 57\ cm^2$

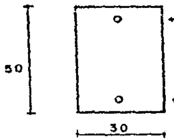
$$\bar{y} = \frac{30(50)(25) + 95.04(50-4) + 57.0(4)}{30(50) + 95.04 + 57} = 25.5\ cm$$

Momento de inercia.

$$I = \frac{1}{3}(30)(50)^3 + 95.04(46 - 25.5)^2 + 57\,(25.5 - 4)^2 =$$

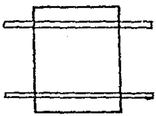
$$I = 1316290 \text{ cm}^4 .$$

Sección # 2.



$As = 5 \# 5 = 9.9 \text{ cm}^2$

$As = 2 \# 5 = 3.96 \text{ cm}^2$



$A_1 = 9.6(9.9) = 95.0 \text{ cm}^2$

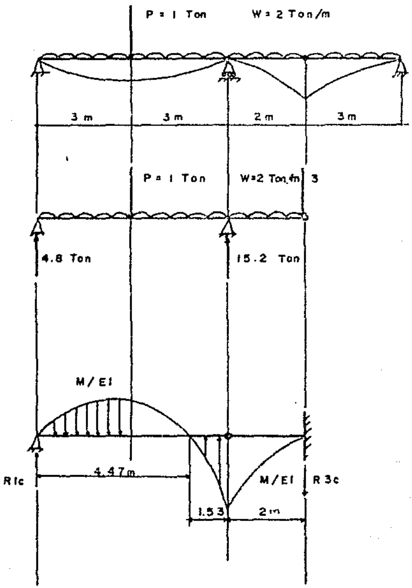
$A_2 = 9.6(3.96) = 38.0 \text{ cm}^2$

$$\bar{y} = \frac{30(50)(25) + 95(46) + 38(4)}{30(50) + 95 + 38} = 25.73 \text{ cm}$$

$$I = \frac{1}{3}(30)(50)^3 + 95(46 - 25.73)^2 + 38(21.73)^2 =$$

$$I = 1306\,976 \text{ cm}^4$$

Cálculo de deflexiones (viga conjugada).



Cálculo de áreas contenidas en el diagrama M/EI.

Área para la parte positiva.

$$A = \frac{2}{3} bh = \frac{2}{3} \frac{(4.47)(5.4)}{E\,I} = 16.09\ /EI$$

Área para la parte negativa - izquierda.

$$A = \frac{bh}{3} = \frac{1.53\ (10.2)}{3\ EI} = 5.2\ /EI$$

Área de la parte negativa derecha.

$$A = \frac{bh}{3} = \frac{2(10.2)}{3\ EI} = 6.8/EI$$

Cálculo de reacciones en la viga conjugada.

$$Mo = (R1)c(6) - \frac{16.09}{EI}(6 - 4.47/2) + \frac{5.2}{EI}(1,53/3) = 0$$

$$R1c = 9.65\ /EI$$

$$\frac{16.09}{EI} - \frac{5.2}{EI} - \frac{6.8}{EI} + \frac{9.65}{EI} + R3c = 0$$

$$R3c = -\ 13.74/EI$$

Cálculo de deflexiones máximas.

$$\delta = Rlc\left(\frac{4.47}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(16.09 / EI\right)(3/8 \cdot 4.47/2) =$$

$$= \frac{14.83}{EI}$$

$$\delta_{máx} = Rlc\ (8) + \frac{16.09}{EI}\ (8 - 4.47/2) - \frac{5.2}{EI}\ (2 + 1/4(1.53)) -$$

$$- \frac{6.8}{EI}\ (3/4\ (2)) = 147.4/ EI$$

Por lo tanto, la deflexión máxima en la viga real es igual a :

$$\delta_{máx} = \frac{147.4}{EI}$$

lo cual rige para diseño.

Revisión de deflexiones según el reglamento de las construcciones de concreto reforzado (ACI 318-83).

Según el reglamento (ACI-83), el momento de inercia efectivo para el cálculo de las deflexiones,lo proporciona la siguiente ecuación:

$$Ie = \left[\frac{Mcr}{Ma}\right]^3 Ig + \left[1 - \left(\frac{Mcr}{Ma}\right)^3\right] Icr$$

Donde:

Ie =Momento de inercia efectivo para el cálculo de las deflexiones.

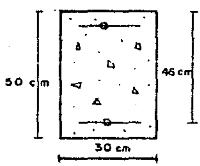
Mcr= Momento de agrietamiento.

Ma = Momento máximo en un elemento para la etapa en que se calcula su deflexión.

Ig = Momento de inercia de la sección total.

Icr = Momento de inercia de la sección agrietada transformada a concreto.

Cálculo del momento de inercia de la sección total,y sección transformada agrietada, y parámetros .



Datos.

$f'c$=250 Kg/cm²

fy=4200 Kg/cm²

n = 9.6

d= 46 cm

As = 5 # 5= 9.9 cm

A's = 2 # 5= 3.96 cm

$Ig = bh^3/12 = (30)(50)^3 / 12 = 312500$ cm

$B = b / (nAs) = 30 / (9.6)(9.9) = 0.32$

$r = (n-1) A's / (n As) = (8.6)(3.96) / (9.6)(9.9) = 0.36$

$$a = \left[\frac{\sqrt{2dB(1 + rd'/d) + (1+r)} - (1+r)}{B} \right]$$

$$a = \frac{\sqrt{2(46)(0.32)(1 + 0.36(1)) + (1.36)} - (1.36)}{0.32} =$$

$a = 15.52$ cm .

$Icr = ba^3/3 + nAs(d-a)^2 + (n-1)A's(a-d')^2.$

$Icr = 30(15.52)^3/3 + 9.6(9.9)(46-15.52)^2 + (8.6)(3.96)(929)^2 =$

$Icr = 137317$ cm^4

Cálculo del momento de agrietamiento.

$Mcr = frIg / yt$; $fr = 2\sqrt{f'c} = 2\sqrt{250} = 31.62$ Kg/cm^2
$yt = 25$ cm

$Mcr = (31.62)(312500) / 25 = 395250$ Kg.cm

$Ma = 10.2 \times 10^5$ Kg.cm

Momento efectivo de inercia.

$$Ie = \left[\frac{395250}{1020000}\right]^3 (312500) + \left[\left(1 - (0.39)^3\right)\right](157317) =$$

$Ie = 166522 \; cm^4$

Cálculo de la deflexión inmediata:

La deflexión inmediata ai, según el reglamento (ACI), puede calcularse, empleando la siguiente ecuación elástica:

$$ai = \frac{K\,(5/48)\,M\,l^2}{EcIe}$$

donde : K = constante que depende del tipo de claro

M = Momento neto.

Ec= Modulo de elasticidad del concreto.

Ie= Momento de inercia efectivo.

l = longitud del claro.

Para nuestro ejemplo $K= 12/5$, $M=10.2 \times 10^5$ Kg.cm, $l=200$ cm,

$Ie = 166522 \; cm^4$,

$Ec = W^{1.5}\, 0.14 \sqrt{f'c} = (2400)^{1.5}\,(0.14)\sqrt{250} = 260264.5 \; Kg/cm^2$

Por lo tanto:

$$ai = \frac{(12/5)\,(5/48)\,(10.2 \times 10^5)\,(200)^2}{(260264.5)\,(166522)} = 0.23 \; cm$$

Deflexión a largo plazo.

El reglamento (ACI), establece, que la deflexión a largo plazo, debe de determinarse multiplicando la deflexión inmediata causada por la carga sostenida considerada, por el factor :

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50\rho'}$$

Donde : $\rho' = \frac{As}{bd}$; $\rho' = \frac{3.96}{(30)\ (50)} = 0.00264$

El factor ξ dependiente del tiempo, para cargas sostenidas, puede tomarse para diferentes valores, luego entonces, para el ejemplo , $\xi = 2.0$, equivalente a 5años o más.

Por lo tanto: $\lambda = \frac{2}{1 + 50(0.00264)} = 1.77$ cm

$\delta tot = 0.23\ (1.77) = 0.40$ cm

De la tabla 9.5b (RACI), la deflexión permisible es igual a

$$\delta perm = \frac{L}{480} = \frac{200}{480} = 0.42$$

Por lo tanto:

$$\delta tot < \delta permisible$$

Revisión de deflexiones de acuerdo al reglamento de construcciones para el Distrito Federal (1987).

Las Normas Técnicas Complementarias del (RDF-87), establecen que las deflexiones inmediatas, se calcularán con los métodos o fórmulas usuales para determinar deflexiones elásticas.

Luego entonces , Deflexión inmediata = $\delta = 147.4 / EI$
(deflexion máxima en la viga calculada anteriormente).

En claros continuos, el momento de inercia que se utilice, será un valor promedio calculado en la forma siguiente :

$$I = \frac{I_1 + I_2 + 2I_3}{4}$$

donde I_1 e I_2, son los momentos de inercia de las secciones extremas del claro, e I_3, el de la sección central.
por lo tanto:

$$I = \frac{1316290 + 1306976}{3} = 874422 \text{ cm}^4$$

con Ec = 221359 Kg/cm² y de $\delta = 147.4 / EI$,se tiene:

$$\delta = \frac{147.4 \times 10^5}{874422(221359)} = 7.62 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

Deflexión diferida, se obtiene, multiplicando la flecha inmediata calculada, para la carga sostenida considerada, por el factor :

$$f = \frac{2}{1 + 50\ p'}$$

donde p'es la cuantía de acero a compresión (A's/ bd).

$$f = \frac{2}{1 + 50\ (3.96/30(46)\ )} = 1.75$$

Deflexion diferida= $= 7.62 \times 10^{-5}\ (1.75) = 13.335 \times 10^{-5}$ cm

Deflexión total= $= 7.62 \times 10^{-5}$ cm $+ 13.335 \times 10^{-5}$ cm $=$
$= 20.955 \times 10^{-5}$ cm

Del cuerpo principal del reglamento,se tiene que la defle - xion permisible es igual :

$$\delta\ perm = \frac{L}{240} + 0.5$$

por lo tanto: $\delta\ perm = \frac{200}{240} + 0.5 = 1.33$ cm

Luego entonces:

$$\delta\ total = 20.95 \times 10^{-5}\ cm \ \angle\ perm = 1.33\ cm$$

la sección es aceptable.

C A P I T U L O 7

CONCLUSIONES

El enfoque sistemático realizado en éste trabajo, correspondiente al tema de deflexiones, permite visualizar y dar una idea conjunta, de la reordenación de conceptos básicos, para la formulación de la ecuación diferencial fundamental de la elástica de una viga, muchas veces mencionada en textos, sin explicación mas profunda de su orígen.

La presentación de diagramas, carga-desplazamiento, Momento - curvatura, y momento- rotación, infiere que, su uso, aporta gran ayuda en la solución de problemas relacionados con el diseño - estructural de elementos, obteniéndose así de éstos, la carga y el momento flexionante que pueden resistir dichos elementos, así como las deflexiones y rotaciones correspondientes a diferentes valores de la carga aplicada.

En cuanto a las funciones de discontinuidad, se concluye, que su utilización resulta de gran importancia, ya que permiten integrar a través de discontinuidades, y singularidades, sin introducir condiciones de continuidad de pendientes y deflexiones.- El uso de funciones de discontinuidad, hace posible formular una expresión válida a lo largo de toda la longitud de la viga.

La presentación sistemática del método de la viga conjugada, que se apoya en los teoremas de Mohr, constituye uno de los métodos exactos, para el análisis de vigas estáticamente indeterminadas.

Finalmente, el ejemplo aplicado a vigas de concreto, permite esclarecer la diferencia de los métodos simplificados y prácticos; donde, en los primeros, las deflexiones, se calculan como si se tratase de un elemento de material homogéneo y elástico.

———— o ————

B I B L I O G R A F I A

1. Earl. W. Swokowski,Cálculo con Geometría Analítica, Wadsworth Internacional Iberoamérica,U.S.A. 1982.

2. Egor. P . Popov, Introducción a la Mecánica de Sólidos, Edit Limusa,México, 1983.

3. Ferdinand.L .Singer/ Andrew Pytel,Resistencia de Mate - riales,Tercera Edición,Edit Harla,México, 1982

4. Gere-Timoshenko, Mecánica de Materiales,Segunda Edición, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1986 .

5. Murray. R. Spiegel.Ph.D, Análisis Vectorial, Serie - Schaum, Mc Graw Hill, México, 1970.

6. Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Constru - cción de Estructuras de Concreto,D:D.F, México,1987.

7. Protter/Morrey,Cálculo con Geometría Analítica,Tercera Edición,Fondo Educativo Interamericano,U.S.A, 1980.

8. Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado (ACI 318-83) y Comentarios,Segunda Edición,Edit Limusa México,1988.

9. Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, D.D.F, México,1987.