00265
/
2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ARTES PLASTICAS

EL LOGOS ESTETICO

BASES GEOMETRICAS EN LAS ARTES VISUALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRIA EN ARTES VISUALES (PINTURA)

P R E S E N T A :

Jeannette Escalera Bourillon

MEXICO, D. F. 1992

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

El artista es la conciencia crítica de la sociedad. La imaginación es el reino de la duda y como tal el reino de la critica.

Una de las diferencias entre el filosofo, el cientifico y el artista consiste en que mientras el filósofo pretende dar una explicación al todo, el cientifico trata de demostrar que esa explicación es verdadera, sin embargo, el artista busca simplemente mostrarlo.

El presente trabajo intenta exponer el entretejido que enlaza a las matemáticas con la filosofia, la politica y las ideas sociales que imperan en cada época dando como resultado la obra de arte.

Una realidad del siglo XX, son las geometrias no-euclidianas, el papel que juegan es esencial, los cientificos de estos dos últimos siglos se han preocupado por acumular todo el material necesario para dejar explicitas y demostradas las hipótesis referentes a estas geometrías con el proposito de no dejar ninguna duda al respecto. Compete entonces, al artista mostrar esta realidad.

Para ello se ha elaborado este material como guia para que el artista lo utilice como herramienta de composición y e tructura tanto en la obra plástica como en el diseño bidimensional con otras alternativas nuevas, como por ejemplo el uso de la cuarta dimensión y de las geometrias diferenciales.

Se han escrito cinco capitulos. El primero que habla acerca de la sabiduria pitagorica, en el que se trata de las relaciones numéricas y artisticas que los pitagóricos dieron a los números, el carácter sagrado que les asociaron y la visión cosmogónica del mundo que éste, les permitía obtener. Así como la conclusión de que el número es la esencia de todo; y de la aplicación del estudio de la música que el ritmo y la armonía son las características esenciales del Universo.

Este ritmo y esta armonía que concuerdan con las leyes naturales, las encontramos en la llamada PROPORCION DIVINA O SECCION AUREA que se trata detalladamente en el capitulo II, donde de un modo muy didáctico se le invita al lector a localizar el NUMERO DE ORO de un segmento dado, a dividir una linea recta en SECCION AUREA, a construir el RECTANGULO DORADO, a descomponer armónicamente dicho rectángulo, a analizar el pentagono regular simbolo pitagórico, a distinguir otros rectángulos armónicos, a construir bloques tridimensionales con proporciones aureas y armonicas utilizando diferentes metodos tanto geométricos como aritméticos, así como diferentes herramientas gráficas como son el TRIANGULO SUBLIME Y LAS ESPIRALES AUREAS.

Este conocimiento da como resultado la investigación de los CINCO CUERPOS PLATONICOS O POLIEDROS REGULARES que serán tratados en el capitulo III.

En arquitectura y escultura se trata indiscutiblemente de componer volúmenes, o sea de concebir o pensar en tres dimensiones, es notable que en la geometría del espacio sólo existan cinco cuerpos regulares que son el TETRAEDRO, CUBO O HEXAEDRO, EL OCTAEDRO, EL DODECAEDRO Y EL ICOSAEDRO. Platon especialmente se ocupó del estudio de estos cuerpos solidos y lo más interesante es que todos ellos están intimamente relacionados con el NUMERO DE ORO , en consecuencia con la sucesión de FIBONACCI.

Con el paso de los años, el cuestionamiento del por que sólo existen cinco cuerpos regulares se ha transformado en un problema fascinante que ha inspirado tanto a científicos prestigiados como a algunos aficionados intuitivos entre ellos encontramos artistas eminentes que buscan soluciones y respuestas dignas a este planteamiento.

La cuestion fue clarificándose a lo largo del siglo XIX, al axiomatizarse el análisis topológico y la topología combinatoria, y extenderse a otras superficies como la banda de Moebius; el plano proyectivo; la botella de Klein, o la rosquilla bulgarmente conocida como superficie toroidal, pues es en este momento cuando se vislumbra la profundidad del problema, ya que la conocida formula de Euler que se trata con detalle en este capitulo; es aplicable tanto a los poliedros regulares como a problemas topológicos complicados.

Con esto se le abren nuevas alternativas a los artistas plásticos que ganan un nuevo trofeo para la realización de sus obras ya que, no sólo les permite penetrar en los lugares más reconditos que presentan dichos cuerpos; armar y desarmar, cambiar de forma, desbaratar, volver a pegar la caras con distintas aristas, unir diferentes vértices, transformar la estructuras moldearlas y proyectarlas de una y mil maneras, sino además girarlas a una cuarta dimensión y trabajarlas en otras geometrías.

El capitulo IV es una introducción para poder comprender el capitulo V.

En este cuarto capitulo, se describe a grandes rasgos lo que es la geometría EUCLIDIANA y las repercusiones que tiene el mundo euclideo frente al universo de las cosas geométricas. Se realiza un estudio sobre lo que es el método euclideo. Se muestran los postulados, las nociones comunes y algunas de las definiciones en las que se basa dicha geometria para el desarrollo del metodo deductivo en toda ella.

Se presentan algunos de los teoremas o proposiciones básicos de esta geometria y sus REPRESENTACIONES GRAFICAS con la intención de que sirvan como apoyo y sean sugerentes en la elaboracion de diagramas, diseños y extructuras para la realizacion de composiciones plásticas. Con esto se abre paso a la discusion del V postulado que sera desarrollado en el siguiente capitulo del trabajo.

El capitulo V y último de la tesis trata sobre las geometrias NO-EUCLIDIANAS y de la renovación de la geometria en el siglo XIX, aqui se desarrollaron temas como la GEOMETRIA de CUATRO DIMENSIONES, concepto que generalmente está rodeado de misterio y desconfianza. La nocion de cuarta dimension aunque precisa, es muy abstracta y, para la gran mayoria, está más allá de la imaginación y en la región más pura del conocimiento, no obstante, la fisica moderna ha resuelto este problema geométrico introduciendo al tiempo como coordenada dimensional. Artistas como Alexander Calder se valieron de esta empresa para mostrar la realidad del siglo XX. Arte abstracto, esculturas móviles y el arte cinematográfico, todos ellos han hecho uso del TIEMPO como una dimension más.

Sin embargo, existe otra forma de mirar las cuatro dimensiones, y esta es una manera puramente geométrica. Un buen dia cientificos y artistas especularon con la idea de qué cosas ocurrian en espacios de cuatro o más dimensiones, después de todo el concepto de poliedro, es una extensión a tres dimensiones del concepto bidimensional de polígono. ¿Qué pasaría si existiera una extensión de poliedro a cuatro o más dimensiones? Con la intención de aclarar el problema anterior se invita al lector a dar un paseo por el mundo de dos dimensiones, luego por el mundo tetradimensional.

Para que el viaje sea ameno y divertido se ha convidado a los personajes de los cuentos ALICIA EN EL PAIS DE LAS MARAVILLAS y de ALICIA A TRAVES DEL ESPEJO a que nos acompañen. Luego se lleva al lector a conocer el MUNDO DE LA TOPOLOGIA. Inserto en el, Moore como escultor, da a la figura humana formas vigorosas y muy organizadas, mismas que son así, gracias a su topologia caracteristica.

En Escher se muestran todas las posibilidades de encadenamiento y transmutación de formas que cambian y se metamorfean respetando la continuidad. Rotáculos, cintas de Moebius, juegos de espacios y perspectivas se entremezclan juegan creando ilusiones e ilusiones sobre ilusiones. El mundo de la imaginación se manifiesta. La presencia de las formas geométricas y el orden de la naturaleza le sorprenden.

En este mismo capitulo, se plantean problemas como el de los CUATRO COLORES y otras interrogantes de las matemáticas modernas; que el lector corriente no identifica como matemáticas, ya que las raras formas geométricas, y la disposición topológica de un mapa carecen de la clase de exactitud que nos han enseñado a reconocer como ciencia y a los que el artista plástico frecuentemente se enfrenta al colorear las regiones de un cuadro o de su obra en general.

Durante el siglo XIX la matemática entra en una etapa de revisión de sus conceptos. El deseo de corregir algunas de las demostraciones de Euclides fue una de las razones que representaron más polémicas dentro de la geometría. La preocupación por demostrar el QUINTO POSTULADO se fue ahondando a medida que se reflexionaba más en ello. De estos planteamientos surgen lo que Gauss llamó GEOMETRIAS NO-EUCLIDIANAS que dan como resultado las geometrias esférica o elíptica, la parabólica, la hiperbólica y otro tipo de geometrias diferenciales. La aplicacion de éstas, la encontramos en la obra de Escher donde el autor juega con la geometria esférica introduciéndose a la vez en la geometría hiperbolica en una litografía titulada MANO CON ESFERA REFLEJADA. Escher que dice no entender nada de matemáticas se sirve en muchas de sus obras de realidades científicas, al grado que muchos de los sabios han asegurado que la obra de éste, es la única expresión posible de sus proyectos cientificos. Pues al artista lo que le preocupa es mostrar la realidad, y una realidad del siglo XX, son las otras geometrías.

Al preparar este trabajo, se pensó en la dificultad que tienen los artistas para comprender las matemáticas: su contenido, su método y sus fundamentos en los que descanza un cumulo de conocimientos que presentan una amplia gama de posibilidades de desarrollo, una gran cantidad de cuestiones abiertas y serios problemas básicos.

Teniendo en cuenta esto, decidí elaborar esta tesis con el proposito de que este material les sirva como apoyo en su quehacer artistico, como preliminar de la realización de su obra.

CAPITULO I

LA SABIDURIA PITAGORICA.

La figura de Pitágoras, está llena de fábulas, ficciones y alegorías, se cuentan relatos extraordinarios de origen popular. Su imagen oscila entre un pasado poco conocido y un futuro ficticio, que dan lugar a explicar su realidad mediante narraciones verosímiles, pero indemostrables.

Variadas versiones nos hacen dudar sobre su procedencia y su personalidad, sin embargo, podemos situarlo hacia la cuarenta y siete olimpiada es decir, quinientos noventa años antes de Cristo. Algunas relaciones citan que nació en Fenicia y que pasó su juventud en la isla de Samos, otras, lo consideran oriundo de este lugar.

Se afirma que realizó largos viajes por Egipto y oriente, la India, Babilonia y Fenicia, donde se inició en diferentes misterios. Fue admitido en las ceremonias de los cultos orientales, y formó parte del colegio sacerdotal de Tebas. En Babilonia se perfeccionó en la religión de los magos y en Egipto se entregó al colegio de sabios que hacía miles de años conversaban cuidadosamente en el fondo de los templos sobre los frutos de sus investigaciones.

A causa de la tiranía de Policrates, abandona Samos y llega a Sicilia, de ahí, se traslada a Crotona, colonia dórica de la Magna Grecia donde fundó su Escuela.

Su secta mitico-religiosa se caracterizó por su dedicación al estudio de las matemáticas y por practicar un tipo de vida comunitaria de fuertes resonancias órficas. (AI.1)

Una manera de acercarnos a la concepción religiósa de los pitagóricos es estableciendo relaciones con la figura de Orfeo, sin perder de vista que esta doctrina es mucho más amplia, pues llegó a ser un cuerpo que contenía elementos de diversas religiones tanto egipcias como asiáticas entre otras.

Sin perder de vista, que el eslabón que unía al orfismo con la nueva significación del mundo creada por Pitágoras fue el concepto de catarsis, que es precisamente el punto en el que la intuición religiosa y la ciencia racional se unieron en una síntesis de extraordinaria originalidad.

Los adictos al pitagorismo valoraron perfectamente la vida contemplativa, pues en el nivel supremo, la catarsis del alma se lograba a través de la contemplación de la esencia de toda realidad por lo que se dedicaron al estudio de los números y sus relaciones, a buscar la armonía de las formas, lo cual les llevaba a comprender la armonía existente en el cosmos, ya que para ellos el origen de los seres, y el principio de todas las cosas era el número. Otras técnicas de purificación también eran practicadas por esta secta, como la prohibición de comer carne y habas en fechas no festivas.

Su influencia se dejó sentir, en Crotona y en varias ciudades de la Magna Grecia.

"La visión pitagórica del mundo fue tan duradera que aún perdura y penetra nuestro pensamiento, e incluso nuestro vocabulario. El mismo término FILOSOFIA es de origen pitagórico; otro tanto ocurre con los vocablos ARMONIA en su sentido más amplio y COSMOS." (I.1)

La esencia y el poder de esa visión estriban en su carácter unificador, que todo lo abarca, uniendo la ciencia, la matemática, la música, la medicina, la cosmologia, el cuerpo, la mente y el espiritu, en una inspirada y luminosa SINTESIS. Pues en tiempos de Pitágoras no existia como disciplinas autónoma.

En la filosofia pitagórica todas las partes componentes estaban entretejidas, de modo que resulta dificil decidir por qué parte sería mejor penetrar en ella.

Para los pitagóricos la matematización de la experiencia significaba la percepción de la armonia manifiesta en la naturaleza, los números eran sagrados pues representaban las ideas más puras, etéreas e incorpóreas. El éxtasis religioso y emotivo producido por la música era canalizado por el adepto en éxtasis intelectual, esto es, enoblecia la fusión de los números con la música y la convertía en la contemplación de la DIVINA DANZA DE LOS NUMEROS.

Los números son eternos en tanto que toda otra cosa es perecedera. No tienen la naturaleza de lo material, sino la del espiritu, permiten operaciones mentales de la clase más sorprendente, sin referencia alguna al tosco mundo exterior de lo sensible, y así es como se suponía que funcionaba el espiritu divino.

La contemplación estática de formas geométricas y de leyes matemáticas es, por ende, el medio más eficaz de purgar el alma de la pasión terrenal y el principal lazo que une al hombre con la divinidad.

De hecho, si es a Pitágoras a quien debemos atribur la teoría matemática que la secta desarrolló, nos podremos percatar, como lo mostraremos más adelante, que para él, no había distinción alguna entre un PUNTO GEOMETRICO y un NUMERO; al contrario su aritmética se convertia insensiblemente en geometría, y ésta, en física.

La escuela pitagórica concibió a la matemática como un CUADRIVIUN que distinguía cuatro materias elementales: ARITMETICA, GEOMETRIA, ESFERICA, Y MUSICA. La aritmática estudiaba la teoría de los números, la geometría se encargaba de los cuerpos sólidos y todas sus relaciones, la esférica se refería al estudio de la astronomía, y la música buscaba la purificación y éxtasis intelectual.

Al ordenar en un sistema lógico las relaciones que guardaban los números con el Universo, empleaban todos los recursos de que disponían para presentarlos como un conjunto completo. Así colocaron en la parte central del Universo a un hipotético fuego, alrededor del cual giraban describiendo circunferencias perfectas, el Sol, que no era más que un reflejo del fogón central, la Tierra, la Luna, los cinco planetas y el cielo de las estrellas fijas. Afirmaban que la Tierra y los planetas eran esferas perfectas, elementos divinos, eternamente continuos sin principio ni fin.

"Pretendieron que los cuerpos en movimiento en el cielo eran diez en número. Pero no siendo visibles más que nueve, imaginaron un décimo, el ANTICHTHON." (I.2)

Según Aristóteles, los pitagóricos imaginaban al número diez como el número de la perfección divina. De hecho, diez fueron los pares antagónicos que llegaron a admitir como principios fundamentales de su doctrina:

finito	e	infinito
par	e	impar
unidad	y	pluralidad
derecha	e	izquierda

masculino y femenino

reposo y movimiento

rectilíneo y curvo

luz y obscuridad

bueno y malo

cuadrado y oblongo (I.3)

"Una parte importante del aprendizaje y de la transmisión de la doctrina del Maestro reposa sobre el empleo del símbolo. El símbolo puede ser una frase, una palabra, un signo geométrico o un número; signo geométrico y número participan de la naturaleza de los paradigmas o modelos anteriores a la creación y constituyen el aporte específico de los pitagóricos al simbolismo iniciático. Son principios eternos, símbolos y agentes de armonía, agentes condensadores que actúan por sugestión, liberación o encantamiento y de ahí su carácter esencialmente mágico." (I.4)

Pitágoras considera a los números como principios absolutos en la aritmética, principios aplicados en la música, magnitudes en estado de reposo en geometría y magnitudes en movimiento en la astronomía.

"Todo lo cognoscible tiene número, sin número no habría modo ni de entender ni de conocer cosa alguna." (I.5)

I.1 EL CARACTER SAGRADO DE LOS NUMEROS

Los pitagóricos asociaban a los números un caracter sagrado que empezaba con la PRIMERA GRAN CAUSA a la que consideraban símbolo del universo infinito e ilimitado. La denominaban MONADA o UNO, manifiesta en el principio de unicidad de lo invisible; de lo limitado e ilimitado en su potencia. Esto lo UNICO, La UNICIDAD UNIVERSAL era el padre creador de todas las cosas y según Filolao la primera cosa armonizada que se hallaba en el centro de la esfera llamada hogar.

Se le representaba como un punto que es aquello que no tiene partes. Se le identificaba con el Sol, con la primera nota de la escala musical. Se le definía como la armonía, unificadora de lo mezclado y la concordancia de los discordantes. Según Aristóteles el UNO no era en sí un número, sino el principio del número. Los Pitagóricos lo consideraban como la fuente del número.

El DOS o DUADA, representa el principio de la dualidad; de la diversidad, de lo par e impar; de la división y la multiplicación. Simboliza la ley binaria manifestada en la naturaleza. Así: los dos sexos, el día y la noche, el calor y el frío, la salud y la enfermedad, la vida y la muerte, la verdad y el error, la actividad y el reposo. En geometría se le identifica con la linea recta, (es decir, por dos puntos pasa una y sólo una linea recta), (Fig.I.1). En astronomía se le identifica con la Luna, en música con la segunda nota musical y se le asocia con el color violeta. Los pitagóricos llamaron al número DOS fuente de sinfonias.

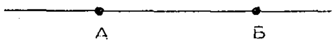


Fig.I.1

Sean A y B dos puntos por A y B pasa una y sólo una recta, la recta AB

El número TRES o TRIADA representa el principio de la naturaleza en función, transmutación y manifestación. "Pitágoras la llama madre de la música, maestra de la geometría, razón de la virtud, síntesis del intelecto." (I.6)

"El mundo o macrocosmos, expresión de la divinidad en el espacio y el tiempo se compone de tres principios esenciales: el espíritu (mónada manifiesta), la vida sensible (emanada de la duada) y la materia (condensación de la mónada realizada por la duada). El hombre o microcosmos, está constituido con estos tres principios: espíritu, alma y cuerpo."(I.7) En geometría se le identifica con la superficie, ya que tres puntos no colineales generan un plano y forman un triángulo (Fig.I.2). En astronomía se relaciona con Jupiter, en música con la tercera nota musical, se le identifica con el color púrpura, en la mente humana con los objetos de tres dimensiones.

Los pitagóricos aseguraban que la formación del hombre está determinada por tres principios: el paterno, el materno y el divino, que le dan el alma, el intelecto y la respiración. Así mismo sostuvieron que el mundo y todo lo que en él, se halla, está determinado por el número TRES, el hombre se compone de tres elementos distintos, pero fundidos el uno en el otro: cuerpo, alma y espíritu; el universo está dividido en tres esferas concéntricas: el mundo natural, el mundo humano y el mundo divino; todo lo que cambia se rige por la triada: inicio, medio y fin.

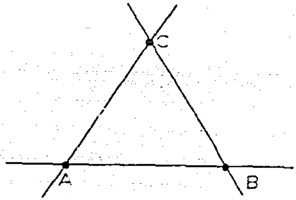


Fig.I.2

Sean A, B y C tres puntos en el plano tales que A, B y C no son colineales lo que implica que A, B y C forman un triángulo y generan un plano ABC.

El número CUATRO o TETRADA representa el principio de la creación y de la realidad tangible y la inteligible, los pitagóricos lo llamaban el "mayor milagro" por ser el primer número "par parcante" (o divisible por dos, como su cociente) la consideraban la llave de la naturaleza, derecha e izquierda, el todo y cada una de sus partes, fundamentalmente de la ciencia de los números y causa de permanencia.

La tétrada contiene en sí misma el fuego de la mónada, el aire de la duada, el agua de la triada y la Tierra de la tétrada. El conocimiento, la deducción y la opinión.

En geometría se le relaciona con el cuadrilátero, la tétrada, está formada por cuatro puntos por lo que representa el primer número cuadrado y se le identifica con los cuerpos sólidos, ya que cuatro puntos, no colineales, que no están en el mismo plano generan el espacio real. (Fig.I.3)

"Cuatro son los principios del animal racional; cerebro, corazón, ombligo y verguenzas. El cerebro es el principio de la inteligencia; el corazón del alma y la sensación; el ombligo del enraizamiento y crecimiento del embrión; las verguenzas el principio de todos ellos, que todos ellos dan flores y renuevos." (I.8)

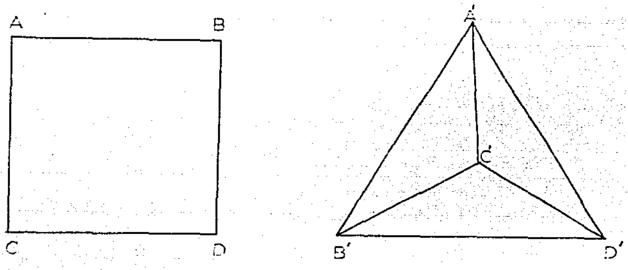


Fig.I.3

A', B', C' y D' son puntos no colineales que no están en el mismo plano, por lo que generan el espacio real, o bien un cuadrilatero

El número CINCO O PENTADA, Símbolo del ser humano, del fuego viviente, de lo que tiene acción circular (Primer número que rueda).

El número CINCO da a la materia sus cualidades y su forma visible. "Simboliza la unión en la humanidad, del principio femenino (primer número par creado: 2) con el masculino (primer número impar creado: 3) por el matrimonio." (I.9)

Por esto la estrella de cinco puntas o PENTALFA es el símbolo del hombre, con la cabeza y las cuatro extremidades: del hombre triunfal cuando la estrella le representa con la punta hacia arriba; del hombre caído y de la bestia (el ser que no comprende al cinco) cuando se le dibuja con la punta hacia abajo, en cuyo caso representa el diabólico macho cabrío con los cuernos hacia arriba y la barba hacia abajo.

El cinco fue expresado por los pitagóricos como símbolo completo del DIVINO FUEGO DEL PENSAMIENTO en el PENTAGONO con la antorcha, además de ser el número hermafrodita y de la armonía, que también es el PENTAGRAMA de la escritura musical.

El sello distintivo de la hermandad pitagórica fue precisamente la estrella pentagonal. (Fig.I.4).

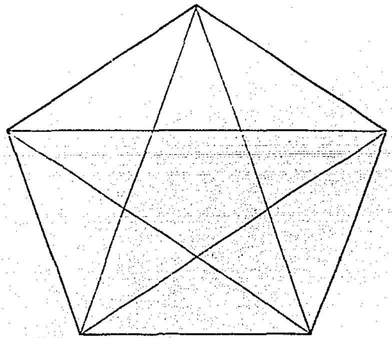


Fig.I.4.

Esta estrella guarda dentro de cada una de sus lineas nada menos que la SECCION AUREA (de la cual hablaremos más adelante) la que dio origen a toda una concepción filosófica del mundo.

"Cinco son los cuerpos de la esfera: los que se encuentran dentro de la esfera son Fuego, Agua, Tierra, Aire, y el quinto es el remolque de la esfera." (I.10)

El número cinco nos conduce a los cinco cuerpos regulares: TETRAEDRO, CUBO, OCTAEDRO, DODECAEDRO E ICOSAEDRO, que serán tratados en el capitulo III de este trabajo.

El número SEIS o HEXADA representa el principio de movimiento y de reposo. Su símbolo caracteriza a la estrella de seis puntas (o entrelazamiento de dos triángulos equilateros) fue objeto de excepcional interés entre los caldeos de cuyas tradiciones fue recogido por Pitágoras y sus discipulos. (Fig. I.5)

Para los pitágoricos el número SEIS representaba la perfección, pues consideraban que un número era perfecto cuando tal, igualaba a la suma de sus divisores propios. En el caso del número seis, sus divisores propios son 1, 2 y 3 y 1 + 2 + 3 = 6.

La verdad y la armonia, la aptitud generativa, la concordia, la estabilidad, el discernimiento en el pensamiento y el hornato en la mano de obra, son cualidades que se le atribuyen.

Por sus propiedades aritméticas el seis es un número mágico, magia que carga consigo mismo, y que encierra su carácter misterioso. Se dice que un número es mágico cuando la suma de sus divisores es igual al producto de los mismos, así tenemos que 1 + 2 + 3 = 6 y 1 x 2 x 3 = 6.

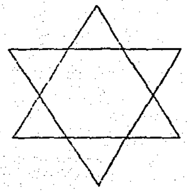


Fig.I.5

El número SIETE O HEPTADA "representa el principio de la recta y la curva, del tiempo y de espacio, de los que resume en si mismo el mundo material y es causa operante en el moral". (I.11)

Es la unión de la triada con la tétrada, de lo humano con lo divino.

Los pitagóricos lo llababan cadena del destino. "Para que esa cadena sea propicia, Pitágoras hacia obligatorio que los discípulos que alcanzaban el séptimo grado poseyesen las siguientes virtudes: 1) Tener rectitud en el propósito. 2) Tolerancia al opinar. 3) Inteligencia para discernir. 4) Clemencia para juzgar. 5) Ser verídicos en sus palabras y actos. 6) Disponer de gracia para expresarse. 7) Contemplar los acontecimientos con paz en el corazón." (I.12)

El número OCHO u OCTADA "representa el principio de la evolución y de la involución, de la luz y de la oscuridad, de lo que nace y de lo que perece, de la existencia elemental y de la trascendental". (I.13) (Fig.I.6)

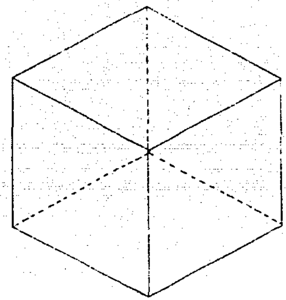


Fig.I.6

El número ocho es primer número cúbico o cubo de dos. Ya que $2 \times 2 \times 2 = 8 = 2^3$ y ha sido considerado como el número de la GENERACION pues al sumar las cifras que constituyen su cubo $512 = 8 \times 8 \times 8$, obtenemos que $5 + 1 + 2 = 8$ y $512 \times 512 \times 512 = 16252928$, si sumamos $1 + 6 + 2 + 5 + 2 + 9 + 2 + 8 = 35$ y $3 + 5 = 8$, por lo cual es el número de la reconstitución. Para Pitágoras significaba la armonía del universo, la inspiración divina, la justicia humana, la MUSICA DE LAS ESFERAS.

Pitágoras otorgaba ocho gracias beatíficas al discípulo que alcanzaba el octavo grado y 88 penalidades para el que no se hacía merecedor de cualquiera de ellas.

El número NUEVE O ENEAGONA es el cuadrado de tres, o sea el primer cuadrado de número impar, fue llamado por los griegos TELESFOROS o el que lleva al fin. Además que fueron nueve las musas de los griegos y nueve días duraban los misterios de Eleusis.

"Para los pitagóricos representaba el océano en que se mueven los números, el horizonte que circunda las cosas, lo que no tiene competencia ni puede ser igualado. Es lo tres veces perfecto, pues es el cuadrado de tres."(I.14) (Fig.I.7)

Fue considerado como símbolo de la INMORTALIDAD por su curiosa propiedad de que multiplicado por cualquier otro número siempre se reproduce, ejemplos: 9 x 2 = 18 y 1 x 8 = 9, 9 x 3 = 27 y 2+ 7 = 9, 9 x 4 = 36 y 3 + 6 = 9, así sucesivamente, probemos con un número cualquiera, al azar, escojamos 628 x 9 = 5652 y 5 + 6 + 5 + 2 = 18 luego 1 + 8 = 9. Como el nueve nunca se destruye se le llamó también EL PERFECTO.

Para que los discípulos de la escuela de Pitágoras alcanzaran el noveno grado se les exigía guardar silencio tres años, estudiar matemáticas durante los siguientes tres años, y prestar tres de servicios a los estudiantes de grados inferiores.

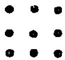


Fig.I.7

El número DIEZ o DECADA representa el principio de la periodicidad, el de causa y efecto, el de nutrición y renovación, el de lo ilimitado en potencia. Filolao afirma: "Hay que juzgar de las obras y de la esencia del número por el poder que en el número DIEZ se encuentra; porque el diez es grande, bien terminado, agente universal, principio de vida para lo divino, lo celestial y lo húmano... Sin el diez no hay cosa que esté definida, clara y distinta." (I.15) Pues es el siguiente ciclo del número uno. Con el diez, todo vuelve a comenzar. Es también resultado de la unión de la MONADA con la DUADA la TRIADA y la TETRADA; 1 + 2 + 3 + 4 = 10 (Fig. I.8)

Los griegos lo llamaban PANTELEIA (o todo completo) símbolo de una armonía nueva y absoluta contenida en la finalidad de las causas ya que es el número resultante de la suma del tres de la constitución y el siete de la manifestación.

"Nicómaco escribió, al hablar del Número PARADIGMA preexistente en el pensamiento del Dios creador: Como el todo era una multitud ilimitada... se necesitaba un orden... Ahora bien, en la Década es donde preexistía un equilibrio natural entre el conjunto y sus elementos... De ahí el porque mediante su Razón el Dios ordenador (literalmente "el Dios que dispone con arte") se sirvió de la década como un canon el todo... y de ahí el por qué las cosas, desde el cielo a la tierra, tienen para los conjuntos y las partes sus razones de concordancia basadas en ella y ordenadas según ella." (I.16)

Arquitas de Tarento consagró a la década un tratado que no ha llegado hasta nosotros. Un dístico de IEROS Logos citado por Siriano menciona igualmente la década como clave del Universo.

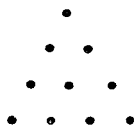


Fig.I.8

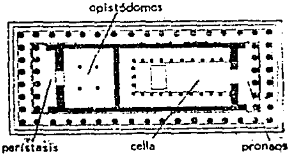
I.2 EL NUMERO Y SUS ELEMENTOS PRINCIPALES

Filolao define al número como fuente de conocimientos; argumentando que para el totalmente desorientado y para el ignorante en todo, el número es guía y maestro. "Que nada estuviera patente en cosa alguna ni respecto de sí ni en relación a otras si no se diese el número y en el número esencia y porque ahora el número está armonizado con el alma, hace que todas las cosas resulten cognoscibles al sentido, y hace además el número que los cuerpos resulten medibles por medio del GNOMON y divide unas de otras las razones de las cosas: las de las ilimitadas por una parte y las limitadas por otra." (I.17)

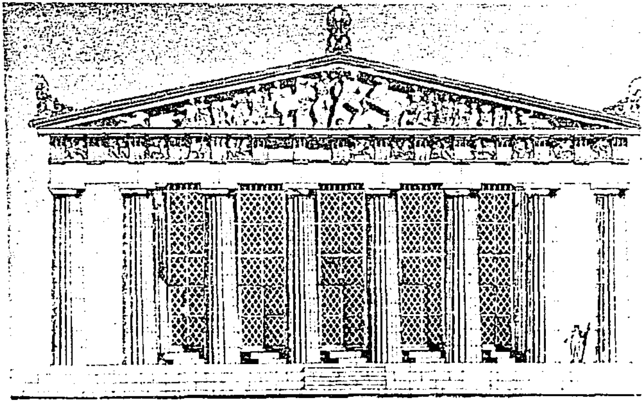
Para los pitagóricos los elementos principales del número son el par (ARTIOS) y el impar (PENISSOS) , éste siendo finito y aquel infinito. Un número par es aquel que puede ser dividido en dos partes iguales, mientras que un número impar sólo puede ser dividido en dos partes desiguales. Esto tuvo una aplicación inmediata en arquitectura: el número de columnas frontales de un templo debe ser siempre par de lo contrario una de ellas se interpondría entre la entrada y el exterior; el número de columnas laterales, en cambio, puede ser par o impar. El Partenón tiene ocho columnas en cada frente y diecisiete laterales, es decir, 46 en total.(Fig.I.9 y I.10)

Fidias. Partenón. (fachada Oeste, tal como se encuentra hoy en día.
(Siglo V a. de C.)

Fig. I.9



Esquema de la Planta.



A. Orlandos. Diseño de la restauración de la fachada O del Partenón.

Fig. I.10

Nicomaco afirma que un número par es el que puede ser dividido ya sea en dos partes iguales, o bien en dos partes desiguales y éstas son ambas del mismo tipo (es decir, las dos son o pares o impares); mientras que un número impar es aquel, que dividido, tiene en cualquier caso sus dos partes desiguales y ambas de distinto tipo (esto es una par y otra impar).

Filolao considera que el "número tiene dos especies eidéticas propias: impar y par, y una tercera mezcla de entre ambas: la par-impar. En ambas especies eidéticas hay muchas formas que por si mismas indica cada número", (I.18) esto es, para Filolao los números pares son 2, 4, 8, 16, ..., los impares 3, 5, 7, 9, ..., y el número par-impar parece ser el resultado de la multiplicación de un impar por un par o al revés, por ejemplo: $6 = 2 \times 3$, $10 = 2 \times 5$.

Esto coinside con los resultados que obtuvieron los neopitagóricos quienes llegaron a distinguir otra clasificación más amplia, dependiendo de que tipo de números se multiplicaban en un producto. Así un número "par-veces par" es aquel cuya mitad es par, la mitad de su mitad par y así sucesivamente, o bien, un número de la forma 2. El número "par-veces impar", por el contrario, sólo puede ser bipartido una vez, siendo el cociente siempre un número impar, es decir, un número de la forma $2(2n + 1)$, donde n es en ambos casos un número natural. El tipo impar-veces par corresponde a una clase intermedia, un número que después de ser bipartido cierto número de veces, resulta como cociente un número impar, de la forma $2 (2m + 1)$.

Hagamos unas aclaraciones pertinentes antes de continuar. ¿Cómo era posible que hayan llegado los pitagóricos a tales definiciones, siendo para nosotros no tan obvias como podría esperarse? La respuesta es simple: su aritmética estaba tan ligada a la geometría, que ellos necesitaban visualizar los números de una manera geométrica y nunca abstracta, para ello, la vía más adecuada era clasificarlos de acuerdo a la figura más simple que formaran. Estas son: triángulos, cuadrados, polígonos, líneas y cuadriláteros. Luego, resulta evidente, que el cuatro, un cuadrado simple, si se divide en partes iguales (2 y 2) éstas son pares (pues pueden volver a dividirse en partes iguales); si en cambio, se divide en dos partes desiguales (1 y 3) ambas son impares.

Por esto podemos conjeturar que tales definiciones se obtuvieron después de analizar y obervar muchos ejemplos, al menos los suficientes para convencerse de que habían encontrado una REGLA GENERAL, y nunca lo dedujeron a-priori. Así mismo llegaron a distinguir entre números primos o simples y secundarios o compuestos.

Timáridas llamó al número-primo, (A.I.2) rectilíneo ya que sólo puede colocarse en una dimensión, sin tomar en cuenta su propia figura, (es decir, 5 sólo puede arreglarse como un pentágono ó como una línea recta de cinco puntos). Sin embargo, no hemos investigado el concepto de unidad y de número en los pitagóricos. Sobre esto, hay una buena variedad de definiciones a escoger, que conducen a un concepto más o menos común. Para el mismo Timáridas la unidad o mónada, es la "cantidad límite", el principio y el fin de una cosa, siendo igualmente una extremidad.

Según Jámblico algunos pitagóricos definieron la unidad como el "CONFIN ENTRE LOS NUMEROS Y LAS PARTES, PORQUE DE

ELLA LOS RADIOS SE INCREMENTAN HACIA AMBOS LADOS", de esto se deduce que de un lado tenemos radios múltiplos incrementándose continuamente, y sobre el otro, -si la unidad se subdivide- radios submúltiplos, cuyo denominadores aumentan continuamente.

Theon de Esmirna (s. II d. c.) arguye que la mónada "es aquello que, cuando la multiplicidad disminuye por la vía de la sustracción continua, se priva de todo número y toma una posición de reposo". Además supone que el significado etimológico de unidad se debe ya sea a que 1) se mantiene inalterada si se multiplica así misma un número indeterminado de veces, o 2) porque está separada del resto de los números.

Nicómaco, por su lado, observa que cualquier número es la mitad de la suma de a) los números adyacentes a cada lado, b) los números equidistantes a cada lado. A la unidad la define como la más solitaria de todos, ya que sólo es la mitad de un único número adyacente que es el 2.

Ejemplo de la proposición a)

1) Sea 7, el número escogido. Los números adyacentes a él, son 6 y 8, 6 + 8 = 14, y 14 : 2 = 7, por lo que se cumple la proposición a), i.e.

2) Sea 15 otro número escogido. Los números adyacentes a él, son 14 y 16, 14 + 16 = 30, y 30 : 2 = 15.

3) Escojamos el número 100, los números adyacentes a él, son 99 y 101, 99+ 101 = 200 y 200 : 2 = 100.

Ejemplos de la proposición b).

1) Sea el número 9, el número escogido, dos números equidistantes a cada lado de él, son el 7 y el 11, 7+ 11 = 18 y 18 : 2 = 9, por lo que se cumple la proposición b), i.e.

2) Sea el 20 otro número escogido, dos números equidistantes a él, son 15 y 25, sumamos 15 + 25 = 40, y 40 : 2 = 20.

3) Sea el 100, el número escogido, dos números equidistantes a cada lado de él, son 50 y 150, sumados: 50 + 150 = 200 y 200 : 2 = 100.

Por ultimo Jámblico cita otra definición: la unidad es la "forma de las formas", porque potencialmente comprende todas las formas de número, o sea que es el número poligonal de cualquier número de tres o más lados, un número sólido en todas sus formas.

De estas definiciones puede uno percatarse que la unidad propiamente dicha, no era un número, sino aquello que separaba a los múltiplos de los submúltiplos, el origen de todos los números y de ahí que se le consideraba como uno de los elementos de los diez pares antagónicos. En cuanto al concepto de NUMERO éste no evolucionó demasiado desde Tales, que lo define como una "colección de unidades", hasta Aristóteles, como "una multiplicidad limitada de indivisibles" o como "multiplicidad de indivisibles." Euclides lo copia como "una multiplicidad compuesta de unidades". (I.19) No es sorprendente entonces, que la misma definición haya sido usada con relativas variantes por la secta pitagórica, destacando aquella que versa así: número es una progresión de multiplicidades comenzando desde una unidad, y una regresión cesando en la unidad. De la misma manera que consideraron al número fuera de la unidad, los pitagóricos en contraste con Aristóteles y Euclides, no sólo excluyeron al DOS de la categoría de los primos, sino que tampoco lo consideraron como número, para ellos, la diada era el principio y origen de lo PAR. He aquí como surge otro elemento más de la Década de pares antagónicos.

" El par produce simetría, que es ritmo igual, monótono; el número impar produce asimetría, ritmo discontinuo, variado, inestable. El NUMERO DE ORO, (del que hablaremos en el capitulo II de este trabajo) produce equilibrio armónico de proporciones perpetuas". (I.20)

Conocian los pitagóricos las proposiciones siguientes:

(1) Un número natural no puede ser a la vez par e impar.

(2) Si un número es par, su cuadrado es par.

Y recípprocamente: Si m es par entonces m es par.

(3) Si un número es impar, su cuadrado es impar.

Y reciprocamente: si m es impar, entonces m es impar.

(4) En un cuadrado dado, el cuadrado de la diagonal es el doble del cuadrado dado.

En simbolos: D = 2 L (Fig. I.11)." (21)

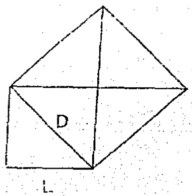


Fig.I.11

I.3 LA NATURALEZA GEOMETRICA DE LOS NUMEROS.

Como ya se dijo, la misma naturaleza geométrica del número pitagórico los condujo a clasificarlos en lo que ahora llamamos "números figurados". El primer tipo, los números triangulares, se dibujan así: (Fig.I.12)

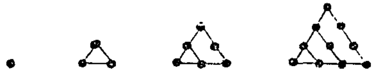


Fig.I.12

Resulta evidente para nosotros que el n-ésimo término de la sucesión de números triángulares se determina por la suma de los naturales precedentes, es decir, por la serie, 1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 +. . . + n. De esta manera no debió ser demasiado complicado para los pitagóricos, notar que cada uno de estos números deriva del anterior así:

TRIANGULRES 1 3 6 10 15 21

NATURALES 1 2 3 4 5 6 - - - - -

De ahí que la fórmula algebraica para encontrar cualquier número triangular deseado, será donde n es el n-simo renglón.

Los números cuadrados se investigaron de forma análoga. La serie que los define es 1, 1 + 3 , 1 + 3 + 5, 1 + 3 + 5 + 7, 1 + 3 + 5 + . . . + (2n + 1). (Fig.I.13)

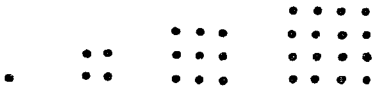
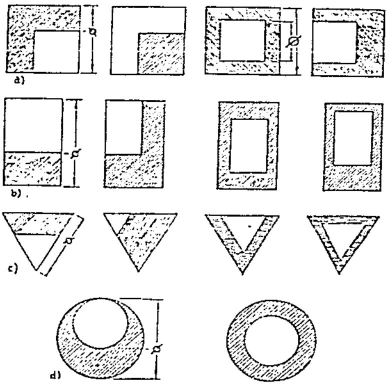


Fig.I.13

Uno de los descubrimientos más famosos de la escuela pitagórica fue aquello que llamaban GNOMON (conocedor). "Según Aristóteles, el Gnomon geometría es la figura resultante de la superposición de dos de ellas iguales o semejantes, pero de medidas proporcionales." (I.22) (Fig.I.14)



GNOMON geométricos áureos, con diferentes formas de superposiciones.

a) GNOMON áureo entre figuras cuadradas de proporciones áureas recíprocas.

b) GNOMON áureo entre rectángulos áureos recíprocos.

c) GNOMON áureo entre triángulos de relaciones áureas recíprocas.

d) GNOMON áureo entre circunferencias de proporciones áureas recíprocas.

Otra definición más conocida dice así: Un GNOMON es la parte que debe agregarse a un ente geométrico para que siga siendo él mismo. La palabra tiene su origen babilónico y con ella se denominaba a la estaca vertical cuya sombra era usada para medir el tiempo. En la época de Pitágoras, el GNOMON era la escuadra que utilizaban los carpinteros, para confirmar la perpendicularidad de dos superficies unidas; posteriormente con Euclides, denotaba aquello que se le quitaba a un paralelogramo cuando uno más pequeño era cortado por una esquina, cuidando que el paralelogramo opuesto por el vértice fuera semejante al paralelogramo que se quitó. (I.23) (Fig.I.15)

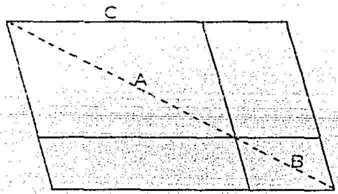


Fig.I.15

Sea C, el paralelogramo dado, si a C, le quitamos B, A y B son semejantes.

Así, si a un número cuadrado le agregamos un GNOMON de puntos que lo envuelva por dos de sus lados, obtendremos el número próximo superior al lado. Por ejemplo, si a un punto le agregamos un GNOMON formado por tres puntos tendremos un número cuadrado, en este caso el cuatro; si al de cuatro le agregamos un GNOMON de cinco puntos, obtendremos un cuadrado de nueve puntos, y así sucesivamente..... (Fig.I.16)

Números cuadrados:

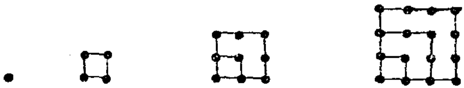


Fig.I.16

1	4	9	16
1	1 + 3	1 + 3 + 5	1 + 3 + 5 + 7

De aquí se deduce que $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n-1 = n$

Es claro que la definición anterior de GNOMON puede extender a otra forma como es el caso de los números triangulares (Fig.I.17)

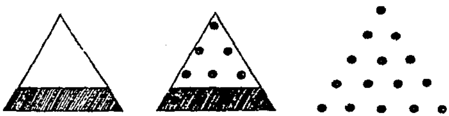
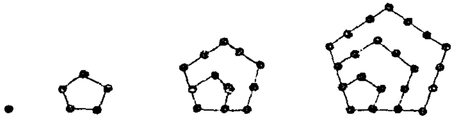


Fig.I.17

En resumen el Gnomon de un número triangular es un número natural, y el de un cuadrado un número impar.

Los números POLIGONALES eran aquellos que formaban figuras de CINCO lados o más. Los PENTAGONALES se formaban agregando unidades al primer número poligónal en potencia, es decir, si al uno le agregamos tres unidades obtenemos un GNOMON de cuatro puntos, luego 1 + 4 = 5 nos da el siguiente número pentagonal.

Números pentagonales:



1	5	12	22
1	1 + 4 =5	1 + 4 + 7 =12	1 + 4 + 7 + 10 =22

Si al GNOMON de cuatro le agregamos tres unidades obtenemos un GNOMON de siete unidades, luego 1 + 4 + 7 = 12 nos da el tercer número pentagonal de la serie, y así sucesivamente. . . 1 + 4 + 7 + 10 = 22 (Fig.I.19)

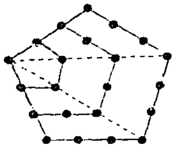


Fig.I.19

Por lo que la serie que los define es:

$1 + 4 + 7 + 10 + . . + en+1 = 3n - n$, donde n= 0, 1, 2, ..., k

Los números EXAGONALES, por su parte, se formaban a base en GNOMONES de cuatro unidades más que el término próximo anterior: 1, 1 + 5, 1 + 5 + 9, 1 + 5 + 9 + 13,
1 + 5 + 9 + . . . + (4n +1) = 2n − n.

En general los términos GNOMONICOS sucesivos para cualquier número poligonal de n lados, tienen una diferencia común de n − 2 unidades. (Fig.I.20)

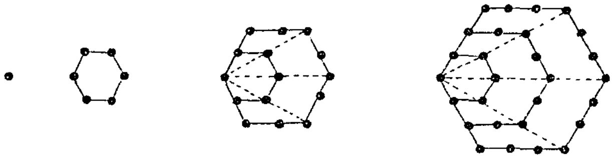


Fig.I.20

1   1 + 5=6   1 + 5 + 9=15   1 + 5 + 9 + 13=28

1 + 5 + 9 + 13 + . . . + 4n+1=2n−n

Ahora bien, la suma de los números pares va a resultar ser un número de la forma n(n+1), que geométricamente es un rectángulo cuyos lados difieren en una unidad, éste es un número oblongo: (Fig.I.21)

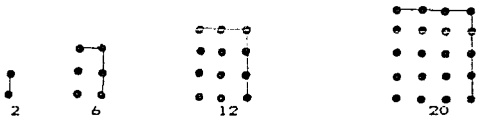


Fig. I.21

Estos números tienen la propiedad de ser el doble de los respectivos números triangulares, pues 2 + 4 + 6 + ...+2n
2(1 + 2 + 3 + . . . + n) = n (n+1).

Teoremas inmediatos que resultan del estudio de los números figurados son: 1) un número cuadrado es la suma de dos triangulares sucesivos. (Fig.I.22)

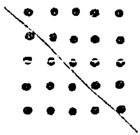


Fig.I.22

2) Un número oblongo es la suma de dos triangulares iguales. (Fig.I.23)

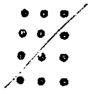


Fig.I.23

3) Ocho veces cualquier número triangular, aumentado en uno, hace un cuadrado de lado impar. (Fig.I.24)

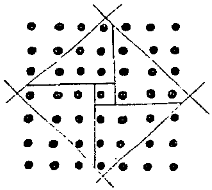


Fig.I.24

I.4 EL TEOREMA DE PITAGORAS.

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre la HIPOTENUSA es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos. (Fig.I.25)

Así se enuncia el famoso TEOREMA DE PITAGORAS.

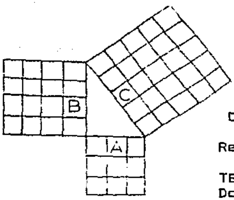


Fig.I.25

$$C^2 = A^2 + B^2$$

Representación gráfica del TEOREMA DE PITAGORAS. Donde a y b son los catetos y c es la hipotenusa.

Los lados de un triángulo rectángulo que son adyacentes al ángulo recto son los que se conocen comúnmente como CATETOS, y el lado opuesto al ángulo recto se conoce como HIPOTENUSA.

Por este principio, la suma de los lados de un triángulo rectángulo no sólo da el conocimiento del espacio visible que el triángulo ocupa, sino el del cuadrado de la hipotenusa y el de ambos catetos que es invisible, de esta forma se determina cualquiera de los factores, a través de las dimensiones de los demás, y se tiene en este procedimiento un medio seguro para medir lo que no se toca.

Existen evidencias de que los egipcios ya conocían dicho TEOREMA. Pues el mismo Aristóteles cita que las ciencias matemáticas se originaron en Egipto debido a que la clase sacerdotal gozaba de ocio.

Las figuras inspiran ideas. La geometría se estaba desarrollando en ese lugar, en una atmósfera quizá, en la que el aire libre, la luz del Sol y las noches estrelladas constituían un ambiente en el que las penetrantes líneas proyectadas por las sombras de los pilares a través de los pavimentos estimulaban el pensamiento de los sacerdotes egipcios con los que seguramente Pitágoras aprendía la manera de medir y calcular.

Diversos autores afirman que, dadas las características de la agricultura egipcia se desarrollaron métodos prácticos para la medición de terrenos. Los agrimesores descubrieron una técnica para construir triángulos rectángulos, pues sabían que el triángulo de medidas 3, 4 y 5 unidades, necesariamente posee un ángulo recto.

De lo que se deduce, estaban informados de las propiedades que Pitágoras enuncia como un TEOREMA, pero no era un conocimiento de lo general, ni planteado para cualquier triángulo.

Es curioso notar que para los egipcios, se trataba de un problema inverso al de Pitágoras: dados los lados, se construía el triángulo. Para Pitágoras dado el triángulo se cumplía la conocida relación CATETO-HIPOTENUSA con sus lados.

Los fragmentos del llamado papiro Kahun (dinastía XII, contienen una tabla de los cuadrados que se obtienen por duplicación de los números 3 , 4 y 5, que ya hemos encontrado como medida para la construción de un triángulo rectángulo.

Los investigadores interpretan esta tabla como una mera innovación por fórmula y costumbre, la que se conoce como: reglas para buscar la naturaleza (de las cosas), para conocer todo lo que existe, cada misterio y cada secreto.

Uno de esos misterios y secretos que revela el Papiro es el estatuto de casos particulares del TEOREMA DE PITAGORAS. En efecto, existe una tabla de números que se obtiene por duplicación de los números 3, 4 y 5, junto a esa tabla de duplicación, se encuentra la llamada tabla de fraccionamiento para los cuadrados de los quebrados que corresponden a la misma relación. Ejemplos:

$$6^2 + 8^2 = 10^2 = 100$$

$$12^2 + 16^2 = 20^2 = 400$$

$$(1\ 1/2)^2 + 2^2 = (2\ 1/2)^2 = 6\ 1/4 = 6.25$$

$$(4/3)^2 + 1^2 = (1\ 1/4)^2 = 25/16 = 1\ 9/16 = 1.46$$

En donde el cuadrado del último número se halla por la suma de los cuadrados de los primeros.

Cuando un arquitecto hindú tenía que realizar la delicada tarea de construir un altar sagrado, acudía a un célebre manual, mezcla de guía para constructores y ritual religioso, denominado SULVASUTRA. Este manual parece datar de los primeros siglos de nuestra era, aunque contiene material de una venerable antiguedad. Se le atribuye a un tal Apatamba, el hecho que muestra especial interés por la construcción de TRIANGULOS RECTANGULOS mediante el procedimiento de las cuerdas que también emplearon los egipcios. Las longitudes laterales estaban relacionadas con los números 3, 4 y 5; 12, 16 y 20; 15, 20 y 25. En este manual se halla también un enunciado que recuerda al TEOREMA DE PITAGORAS. Pitagoras debió enfrentarse al resultado de que no siempre la hipotenusa es un cuadrado perfecto, por ejemplo: $5^2 + 7^2 = 74$, así es que debe haber buscado un medio para que a, b, c fueran enteros y que a la vez $a^2 + b^2 = c^2$.

Llegamos pues al hecho de que se conocía el TEOREMA, la demostración y una regla para no vérseelas más que con números enteros.

Se dice que los chinos conocieron el teorema antes que los griegos Proclo, cita que el llamado teorema de Pitágoras era conocido desde aproximadamente 1000 años antes de la época de Pitágoras en oriente y que fue Tales de Mileto quien enseñó el teorema en Grecia por primera vez. Los asirios y babilonios conocían el teorema 200 años antes de cristo. En el pasado habían llegado indudablemente a muy notables resultados, incluidas la formulación lo que llamamos el teorema de Pitágoras y la solución de ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas.

Se han hecho muchas conjeturas respecto a la demostración que Pitágoras pudo haber dado a su Teorema, otra de ellas pudo ser un tipo de disección de demostración como sigue (Figs. I.26a y 26b).

Los historiadores ignoran como fue que Pitágoras demostró su TEOREMA y probablemente nunca se sepa. No obstante, por el nivel de conocimiento científico, varios de ellos afirman que se trata de una demostración tipo DISECCION, es decir, una demostración que involucra descomponer un cuadrado en diversas partes para rearmarlo cual si fuera un rompecabezas, de tal suerte, que la reconstrucción final equivalga a la buscada.

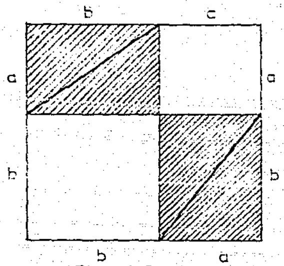
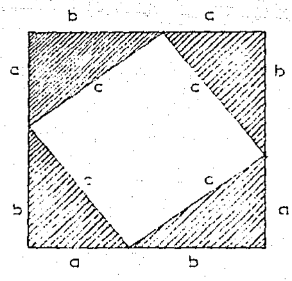


Fig. I.26a

Quitando las partes sombreadas, tenemos

$$b^2 + a^2$$



Quitando las partes sombreadas, que son iguales a la Fig. I.26a tenemos.

$$c^2$$

Por tanto

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Fig. I.26b

Hay quienes afirman que la demostración debió enfrentarse, primero a casos particulares, donde la evidencia cateto-hipotenusa fuera mayor, y se proponen una demostración (quizá la más sencila de todas) para triángulos rectángulos isósceles. (Fig.I.27)

$Area_{1234} = Area_{5678}$

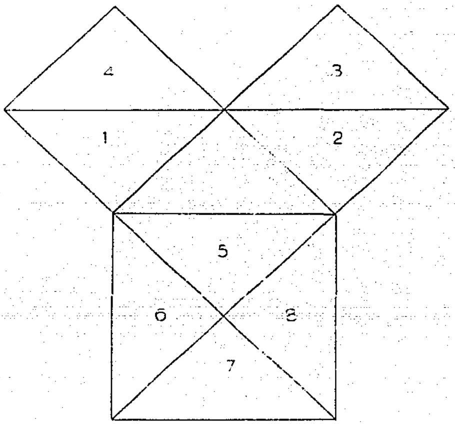


Fig. I.27

En favor de esta aseveración se discute el hecho de que una figura como la que se observa en la demostración se encuentra con frecuencia en los pisos de la aristocracia antigua.

I.4.1 ALGUNAS DEMOSTRACIONES GRAFICAS DEL TEOREMA DE PITAGORAS.

Demostración que da Bhaskara del teorema de Pitágoras, por el método de disección. (Fig. I.28a y I.28b)

$$2AB + (B - A)^2 = B^2 + A^2$$

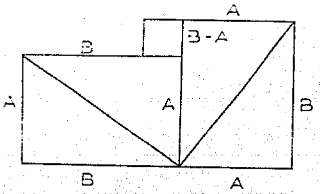
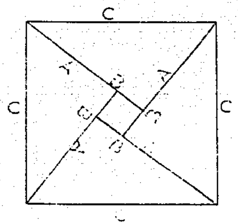


Fig. I.28a



C^2

$$\therefore C^2 = A^2 + B^2$$

Fig. I.28b

"Extensión del teorema pitagórico dado por Pappus".

Sea ABC un triángulo cualquiera y ABDE, ACFG, cualesquiera paralelogramos descritos exteriormente sobre AB y AC. Sean DE y FG tales que se cortan en H y trácense BL y CM paralelas a HA entonces. (Fig. I.29)

▭ BCML = ▭ ABDE + ▭ ACFG

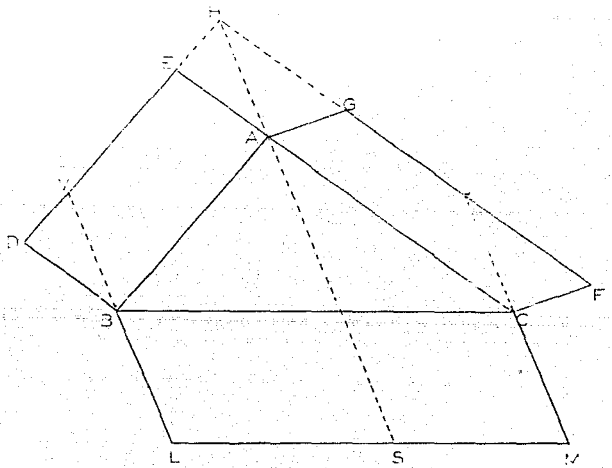


Fig. I.29

La siguiente demostración del teorema de Pitágoras se dice que fue ideado por Leonardo Da Vinci (1452 - 1519) (Fig. I.30)

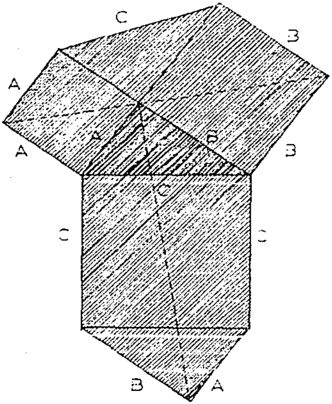


Fig. I.30

H. Perigal, en 1873, dio una demostración por disección del teorema de Pitágoras. (Fig. I.31)

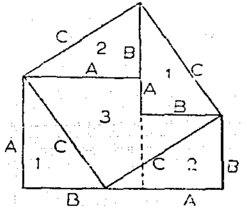


Fig. I.31

Demostración por congruencia por adición sugerida por H. E. Dudeney en 1917. (Fig. I.32)

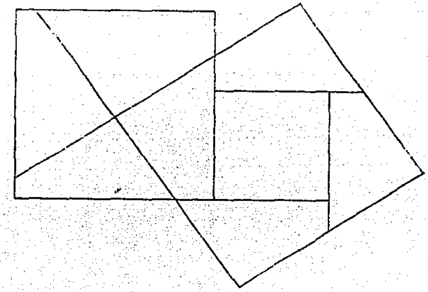


Fig. I.32

I.5 LA FILOSOFIA COMO MUSICA SUPREMA.

Es importante observar que todas estas especulaciones aritméticas derivan de la inspiración religiosa. En el pitagorismo, descubrir alguna propiedad de los números siempre era descubrir alguna cualidad simbólica o algún epiteto divino caracteristico.

El mismo carácter marca la contribución del pitagorismo a la constitución de una geometría autónoma. La contemplación estática de formas geométricas y de leyes matemáticas es, por ende, el medio más eficaz de purgar el alma de la pasión terrenal y el principal lazo que une al hombre con la divinidad.

Entre otras cosas, los pitagóricos también eran médicos. Se cuenta, que empleaban la medicina para purgar el cuerpo y la música para purgar el alma.

"Una de las formas más sencillas de psicoterapia consiste en hacer que el paciente excitado por una violenta música, danza hasta el frenesí para caer luego en un sueño reparador semejante a un rapto, provocado por el agotamiento". (I.24) Pues los pitagóricos consideraban al cuerpo como un instrumento musical compuesto de cuerdas, las cuales habían que aflojar o tensar hasta encontrar el perfecto equilibrio entre opuestos, lo que buscaban en si, era el ajuste de éstas, a los intervalos propios de su escala. Conservar el orden y la armonia en completo equilibrio del conjunto de todos los instrumentos musicales que se hallan en el mundo era su finalidad. "Las metáforas que tomadas de la música aun aplicadas TONO, TONICO, BIEN TEMPLADO, TEMPERANCIA, son también parte de nuestra herencia pitagórica". (I.25)

El universo pitagórico contiene uno de los tónicos más vigorosos que se hayan aplicado al cerebro humano, cifrado en el principio: "LA FILOSOFIA ES LA MUSICA SUPREMA Y LA FORMA SUPREMA DE LA FILOSOFIA SE REFIERE A LOS NUMEROS". (I.26)

Los números no fueron arrojados al azar a este mundo; estaban dispuestos en estructuras equilibradas como los intervalos concordantes de la escala musical, en conformidad con las leyes universales de la armonía.

Los pitagóricos dedujeron que existía una curiosa conexión entre la armonía musical y los números.

La relación de longitud de las cuatro cuerdas de una lira; la baja, la tercia, la media y la alta, está representada por números enteros.

Una nota es producida por una vibración, por ejemplo, si se estira una cuerda, se pone tensa y después se puntea, vibrará y producirá un sonido, si esa misma cuerda se corta a la mitad y se repite el procedimiento anterior, la cuerda vibrará dos veces más aprisa, ocasionando un sonido en el mismo tono queel sonido de la cuerda original.

Utilizando cualquier cuerda y considerando la nota que porduce, se puede bajar la escala aumentando la longitud de la cuerda según simples fracciones que pueden expresarse mediante relaciones de números enteros. Por ejemplo 16/15 de una cuerda que produce el DO, proporcionan la nota baja siguiente SI; 6/5 de ésta dan LA; 4/3 de la misma SOL; 3/2 hacen la nota FA; 8/5 de esa cuerda nos darán la nota MI; 16/9 produciran RE; y exactamente una cuerda semejante a la anterior; pero el doble de larga vuelve a dar el DO, de una octava más baja.

Los pitagóricos descubrieron las relaciones numéricas que existen entre las notas Do, Fa, Sol, Do inferior y entre sus equivalentes en cualquier escala. Llegaron a la convición de que la armonía, la belleza, la naturaleza, pueden expresarse por medio de relaciones entre números enteros. Incluso creyeron que los planetas, al girar sobre sus órbitas, debían producir una armonia celeste. La que denominaban MUSICA DE ESFERAS.

Una anécdota contada por Boccio, escritor del siglo VI a. de C. narra que poco tiempo después de la llegada de Pitágoras a Crotona pasó éste frente a una herreria y al escuchar los golpes que producían los martillos sobre el yunque, el timbre del metal despertó ecos extraños en su conciencia, creyó entonces que las notas emitidas eran proporcionales a la fuerza de los hombres y les pidió que se los intercambiaran, ante el mismo resultado supuso que la explicación estaba en los martillos, por lo que le suplicó al herrero le prestara los cinco y con ellos, se dirigió a casa de Milón, donde registró que el peso de cuatro de los mismos, se hallaba en la proporción de doce, nueve, ocho y seis, el quinco producía una disonancia molesta por los que fue retirado. De ahí dedujo la proporción 12: 9:: 8: 6. Luego de reflexionar un rato descubrio la energía interna de las notas al desarrollarse como ritmo, de lo que dedujo que éste, se encuentra en la esencia de todas las cosas y es el que nos produce la sensación de goce y se observa a perfección en la escala musical. De esa experiencia meramente estética concluye que el principio de todo es el número.

Después ató los martillos a los extremos de cuerdas de igual longitud y descubrió que la relación entre la tónica, la cuarta, la quinta y la octava era de doce, nueve, ocho y seis y como la razones de estos números eran equivalentes a 1, 4:3, 3:2, 2:1, expresadas por los primeros cuatro números naturales, dedujo que el TETRAEDRO era la fuente de la eterna Naturaleza; ensayó finalmente, con flautas de caña y observó que la proporción de las longitudes era la mencionada. Entonces, se convencio.

Por otra parte, cuando Filolao llamaba al cubo la armonía geométrica, por tener doce aristas, ocho vértices y seis caras, demostraba, por medio de una audaz analogía cómo la relación númerica, aislada de su materia, llega a ser capaz de extenderse a una pluralidad de cosas diversas.

"Esta idea de analogía, de la correspondencia entre la estructura (el "Número") y el ritmo del Cosmos y los del Hombre entre el Macrocosmos y el Microcosmos, como se llamaran más tarde, inspiró y fecundó durante más de dos mil años la filosofía tanto profana como religiosa. De un modo muy especial, la GNOSIS alejandrina y sus tenaces retoños de la Edad Media y del Renacimiento tejieron y soñaron con ella múltiples sistemas cuyas tramas encontraremos más adelante, sombrías telas de araña o tornasoladas tapicerías ideológicas aún bastante sólidas". (I.27)

Para Viturvio, la euritmia en la obra de arte se obtiene justamente cuando cada parte importante de ésta, se encuentra convenientemente proporcionada en razón acorde entre lo alto y lo ancho, entre lo ancho y lo propundo, es decir, cuando la simetría entre los diversos elementos de la obra se encuentran conformes con los elementos separados y el conjunto. Como en el cuerpo humano fluye la proporción, la que los griegos llaman ANALOGIA que significa consonancia entre cada parte y el conjunto.

"Viturvio insiste mucho en esta SINFONIA perfecta del juego de las proporciones en el cuerpo humano, y de correspondencia análogas, a veces aún númericamente idénticas, que el arquitecto debe establecer en el plano eurítmico de los edificios sagrados. La totalidad de su libro III está consagrado a este paralelismo: las comparaciones y semejanzas tomadas de la música alternan con los preceptos puramente geométricos." (I.28)

I.6 LOS VERSOS DORADOS.

La hermandad pitagórica fue una comunidad religiosa dedicada a la práctica del ascetismo y al estudio de las matemáticas. Estaba organizada en fraternidades secretas llamadas SYNEDRIA. Sus miembros debían hacer diariamente examen de conciencia y participar en ritos que no debían dibulgarse. Este voto de silencio (equemitía) se simbolizaba como "el buey en la lengua". Se abstenían de comer carne salvo en ocasiones sagradas. Parece ser que fue el propio Pitágoras quien predicó la doctrina de que el alma era inmortal y el cuerpo su tumba temporal, encarnado en los animales al librarse de áquel, y una vez fuera de la rueda de los nacimientos, las almas de los puros subían a las más altas regiones del HADES, mientras que las de los impuros, quedaban atadas a la de las Erinias por lazos irromplibles. Apolo, dios profeta, músico médico era la personificación de la unidad pitagórica: TEORIA Y PRAXIS.

Hasta nuestros días, ha llegado una obra colectiva formada con las ideas de los pitagóricos conocida como LOS VERSOS DORADOS.

Hierócles filósofo alejandrino del siglo V d.C. comentó acerca de ellos que no son otra cosa que las más perfecta expresión de la filosofía pitagórica y el compendio de sus dogmas esenciales, pues contienen los elementos de perfección que los descubridores de la senda divina escribieron para instruir a sus sucesores.

Su carácter místico, sugiere que la doctrina pitagórica sea derivada del orfismo, aunque propiamente constituya un sistema de ideas que relacionaban al hombre y la naturaleza dentro de una visión completamente nueva; su particularidad fue encontrar en las matemáticas una herramienta de doble utilidad: obtener una explicación más convincente del enigma del Universo (borrando así la concepción jonia) y contribuir a la purificación del alma manteniendo al discipulo ajeno de los contactos terrenales y materiales, adaptándolo a una sociedad en la que el desprecio por el trabajo manual se iba incrementando a la par con la población esclavizada. De esta manera, los procesos técnicos que habían estimulado las ideas que servían para explicar la naturaleza, quedaron relegadas de la atención del pensamiento griego, en relación con el desarrollo -más aristocrático- de la Teoría de los Números y de la geometría.

Los VERSOS DE ORO, fueron atribuidos a Pitágoras, aun cuando se supone, fueron compuestos por LYSIS y quizás también por algunos otros pitagóricos después del derrumbamiento de la orden, con la finalidad de dejar a la posteridad un documento poético que encerrara la quinta esencia del pitagorismo.

"Esta poesía se divide, por su esencia, en tres partes corespondientes a grados de perfección o iniciaciones determinados. Fabre d'Olivet los ha denominado: preparación, purificación y perfección." (I.30)

La PREPARACION concierne a los NEOFITOS o aspirantes filósofos. "Se ha querido indicar con esto que la humildad, la admiración y la gratitud hacia las misteriosas fuerzas de la Naturaleza, son sentimientos que debe cultivar el que anhela penetrar las razones ocultas de las cosas. Es, efectivamente, dejando de fijar la atención en su vana personalidad, inconstante y llena de disonancias, cuando el hombre es capaz de sentir la sublime armonía de los Absoluto." (I.31)

La PURIFICACION, corresponde al grado de DISCIPULO, tomada esta palabra en el sentido más noble, y contiene el conjunto de consejos esenciales para quien aspira vivir los principios de la filosofía.

Y PERFECCION, puede calificarse como la parte esotéricfa, ya que concierne a las materias estudiadas por los MATEMATICOI Y FISICOI. "El discipulo ha conseguido por su constancia en las virtudes adquiridas, ser un verdadero ADEPTO, siendo digno desde entonces, de disfrutar, con la confianza de sus maestros, los tesoros más preciosos de la divina sabiduría." (I .32)

Se incluye en este capitulo los setenta y un Versos de Oro, para conocimiento del lector. (I.33)

LOS VERSOS DE ORO

PREPARACION

Honra primeramente a los dioses inmortales, según están establecidos y ordenados por la ley.

Respeta el juramento con toda suerte de religión. Honra después a los genios de bondad y de luz.

Respeta también a los demonios terrestres, rindiéndoles el culto que legitimamente se les debe.

Honra también a tu padre, a tu madre y a tus más próximos parientes.

PURIFICACION

Escoge por amigo entre los hombres, al que se distingue por su virtud.

Cede siempre a sus dulces advertencias y a sus acciones honestas y útiles.

Y no llegues a odiarle por una ligera falta, mientras puedas.

Pues el poder habita cerca de la necesidad.

Sabe que todas estas cosas son así; luego acostúmbrate a sobreponer y vencer estas pasiones:

En primer lugar, la gula, la pereza, la lujuria y la cólera.

No cometas jamás ninguna acción vergonzosa, ni con los demás.

Ni contigo en particular, y sobre todo respétate a ti mismo.

Luego observa la justicia en tus actos y en tus palabras.

Y no te acostumbres a hacer la menor cosa sin regla ni razón.

Haz siempre esta reflexión: que por el Destino está ordenado a todos los hombres el morir.

Y que los bienes de la fortuna son inciertos, y así como se les adquiere se les puede perder.

En todos los dolores que los hombres sufren por la divina fortuna.

Soporta dulcemente tu suerte tal como es, y no te enojes por ello.

Trata, sin embargo, de remediarla en cuanto puedas.

Y piensa que el Destino no envía la mayor parte de esos males a la gente de bien.

Se hacen entre los hombres muchas clases de razonamientos buenos y malos.

No los admires enseguida, ni los aceptes tampoco.

Pero si avanzan las falsedades, cede dulcemente, y ármate de paciencia.

Observa en toda ocasión lo que voy a decirte:

Que nadie, ni por sus palabras ni por sus hechos, te seduzca jamás.

Llevándote a hacer o a decir lo que no es útil para ti.

Consulta y delibera antes de obrar, a fin de que no hagtas acciones locas.

Porque es de un miserable el hablar y obrar sin razón ni reflexión.

Haz, pues, todo lo que por consiguiente no te aflija y te oblique luego a arrepentimiento.

No hagas ninguna cosa que no sepas.

Pero aprende todo lo que es preciso saber, y por ese medio llevarás una vida dichosísima.

No hay que descuidar de ningún modo la salud del cuerpo.

Así se le ha de dar con mesura de beber y de comer y los ejercicios que necesite.

Pero yo llamo mesura a lo que no te incomodará.

Acostúmbrate a vivir de una manera propia y sin lujo.

Evita provocar la envidia.

Y no gastes fuera de tiempo, como el que no conoce lo que es bueno y honesto.

Pero no seas tampoco avaro ni mezquino, porquee la justa mesura es excelente en todas las cosas.

No hagas sino las cosas que no puedan perjudicarte, y razona antes de hacerlas.

PERFECCION

No cierres tus ojos al sueño así que te acuestes, sin examinar por tu razón las acciones del día.

¿En qué he faltado? ¿Qué he hecho? ¿Qué he dejado por hacer que debia haber hecho?

Comenzando por la primera de tus acciones, y continuando por todas las demás.

Porque es de un miserable el hablar y obrar sin razón ni reflexión.

Haz, pues, todo lo que por consiguiente no te aflija y te obligue luego a arrepentimiento.

No hagas ninguna cosa que no sepas.

Pero aprende todo lo que es preciso saber, y por ese medio llevarás una vida dichosísima.

No hay que descuidar de ningún modo la salud del cuerpo.

Así se le ha de dar con mesura de beber y de comer y los ejercicios que necesite.

Pero yo llamo mesura a lo que no te incomodará.

Acostúmbrate a vivir de una manera propia y sin lujo.

Evita provocar la envidia.

Y no gastes fuera de tiempo, como el que no conoce lo que es bueno y honesto.

Pero no seas tampoco avaro ni mezquino, porquee la justa mesura es excelente en todas las cosas.

No hagas sino las cosas que no puedan perjudicarte, y razona antes de hacerlas.

PERFECCION

No cierres tus ojos al sueño así que te acuestes, sin examinar por tu razón las acciones del día.

¿En qué he faltado? ¿Qué he hecho? ¿Qué he dejado por hacer que debía haber hecho?

Comenzando por la primera de tus acciones, y continuando por todas las demás.

Si en ese examen ves que has faltado, repréndete severamente, y si has hecho bien regocíjate de ello.

Practica bien todas estas cosas, meditalas bien; es menester que las ames con toda tu alma.

Ellas te colocarán en el camino de la virtud divina.

Yo lo juro por aquel que ha transmitido en nuestra alma el sagrado cuatemario.

Fuente de la naturaleza, cuyo curso es eterno; pero no comiences a obrar.

Sin rogar antes a los dioses terminar lo que vas a emprender. Cuando te hayas familiarizado con esta costumbre.

Conocerás la constitución de los dioses inmortales y de los hombres.

Hasta donde se extienden los seres, y lo que les contiene y une.

Conocerás también, según la justicia, que la naturaleza de este universo para todo es semejante.

De suerte que no esperarás lo que no debe esperarse, y nada te será oculto en este mundo.

Conocerás así que los hombres se atraen voluntariamente sus males, y por su propia elección.

Miserables como son, no ven ni entienden que los bienes están cerca de ellos.

Hay muy pocos entre ellos que sepan librarse de los males.

Tal es la suerte que ciega a los hombres y les quita el espiritu. Semejantes a los cilindros.

Ruedan de aqui para allá, siempre abrumados de males sin cuento.

Porque la funesta contención nacida con ellos, y que les sigue, les agita sin que ellos lo noten.

En lugar de provocarla e incitarla, deberian huir de ella, cediendo.

Gran Júpiter, padre de los hombres, vos les librariais de todos los males que les abruman.

Si les mostráseis cuál es el dominio de que se sirven.

Pero ten ánimo: la raza de los hombres es divina.

La sagrada naturafleza les descubre los misterios más ocultos.

Si ella te hace parte de sus secretos, tú llegarás fácilmente al fin de todas las cosas que te he ordenado.

Y curando tu alma, la librarás de todas esas penas y de todos esos trabajos.

Abstente de las carnes que hemos prohibido en las purificaciones.

Y respecto de la liberación del alma, discierne lo justo, y examina bien todas las cosas.

Dejándote siempre guiar y conducir por el entendimiento que viene de arriba y que debe tener las riendas.

Y cuando después de haberte despojado de tu cuerpo mortal, seas recibido en el aire puro y libre,

Serás un dios inmortal, incorruptible, a quien no dominará la muerte.

FUENTES DE INFORMACION.

Capitulo I

(I.1) Arthur Koetler. LOS SONAMBULOS. ed. CONACYT México, 1981 pág. 27

(I.2) Aristóteles. METAFISICA. ed. Porrua 8a. edición, México 1980 pág. 14

(I.3) Ibid pág. 15

(I.4) Matila Ghyka. EL NUMERO DE ORO. Los Ritmos vol 1 ed. Poseidón 2a. edición Barcelona 1978. pág. 16

(I.5) Filolao. Traducido del griego por Juan David Garcia Bacca. LOS PRESOCRATICOS. Ed. F.C.E. 3a ed. México 1982. pág. 299

(I.6) Janeiro, Iglesias. LA ARCANA DE LOS NUMEROS. Ed. Kier S.A. 7a. edición, Buenos Aires 1987 pág. 94.

(I.7) Eduardo Alfonso y Federico Mace. LA SABIDURIA PITAGORICA Ed Orión Méxixo 1970 pág. 42.

(I.8) Filolao op cit. pág. 302

(I.9) F. Mace op cit pág. 44

(I.10) Filolao ibid.

(I.11) Janeiro, Iglesias. op. cit pág. 98

(I.12) ibid.

(I.13) ibid.

(I.14) ibid. pág. 100

(I.15) Filolao op. cit. pág. 301

(I.16) M. Ghyka op cit pág. 27

(I.17) Filolao ibid.

(I.18) Filolao op. cit. pág. 299

(I.19) Euclides. LES OEUVRES d'EUCLIDE. Libro VII, def 2 Edit

Albert Blanchard 9a. edición, Paris 1966 pág. 180

(I.20) Pablo Tosto. LA COMPOSICION AUREA EN LAS ARTES VISUALES. 2a. ed. Edit. Hachette S. A. Buenos Aires, 1969 pág. 14

(I.21) Francisco Zubieta "SOBRE LAS ETAPAS DE LA ARITMETICA" p.25, en REVISTA MATEMATICA. Serie II, núm. 7 S.M.M. México, mayo 1970.

(I.22) P. Tosto. op. cit. p. 47

(I.23) Euclides. Libro VI prop. 25 op. cit. pág. 167

(I.24) A. Koestler op. cit. pág. 29

(I.25) Ibid.

(I.26) Ibid. pág. 30

(I.27) M. Ghyka op. cit. pág. 48

(I.28) Ibid. pág.41

(I.29) Eduardo Alonso y Federico Mace. Op. cit. p.109.

(I.30) Ibid p.110.

(I.31) Ibid

(I.32) Ibid p. 115 a 120.

CAPITULO II

LA SECCION AUREA Y EL NUMERO DE ORO.

"Cortar una linea en dos partes desiguales, pero de manera que el segmento MAYOR sea a TODA la linea como el MENOR lo es al MAYOR." (II.1)

Esta es una de las definiciones más claras de lo que es la SECCION AUREA.

II.1 LA SECCION AUREA Y SU ENTORNO FILOSOFICO.

Las consideraciones estéticas son tan antiguas como el hombre y, por consiguiente, como sus sentimientos y sus juicios de belleza, porque la experiencia de lo bello nace con el trabajo y con la formación del lenguaje y desde entonces sentimos y juzgamos la belleza de una persona, un acto, un paisaje o un objeto. Probablemente surgen al mismo tiempo las preocupaciones por las causas, efectos y funcionamiento de tales sentimientos y juicios. Muchos milenios después, la escritura permite que ahora sepamos de algunas observaciones mitológicas, religiosas y filosóficas que, sobre la belleza, hubo en Egipto, China, India, etc.

En escultura y en pintura por ejemplo, fueron los griegos quienes dieron las proporciones exactas de la figura humana en términos de la llamada SECCION AUREA o PROPORCION DIVINA y de allí encontramos que las columnas que adornan el PARTENON fueran construidas inspirándose en esta fabulosa proporción; las catedrales de Chartres y de Notre Dame, en Francia, solo para citar un ejemplo, están construidas en términos de la SECCION AUREA, hasta el edificio de las Naciones Unidas en Nueva York nos recuerda las proporciones de la SECCION AUREA dada por los griegos.

En música, tenemos dos grandes vertientes del genio griego: en primer lugar, muchos de los temas del teatro griego fueron tomados por los grandes maestros de la música para llevar a efecto sus excelsas obras como es el caso del insigne Claudio Monteverdi quien compuso la bella ópera llamada: EL RETORNO DE ULISES, o en Inglaterra, donde Jorge Federico Haendel compuso entre otras obras maestras ARMIDA e IFIGENIA EN AULIDE. Por cierto que este mismo tema inspiró al maestro alemán Christoph Willibald Gluck, quien escribió: ORFEO Y EURIDICE, ALCESTE, etc. sólo para citar algunos de ellos.

La otra vertiente que debemos citar aquí, es la que se refiere a la técnico científica pues esta dio origen a la llamada ESCALA DE LOS GRIEGOS, la cual en el plano armónico, sirvió para el desarrollo de los más importantes conceptos teóricos de la música a lo largo de todos los tiempos y épocas de su desarrollo.

II.2 ORIGENES DE LA FILOSOFIA GRIEGA.

La palabra filosofía es utilizada por primera vez por los pitagóricos. Sin embargo, en virtud de la diversidad de tendencias filosóficas existentes de que esta disciplina ha sido siempre campo de batalla entre las distintas posiciones ideológicas, no hay una definición universal de lo que es. De hecho cada tendencia ha tratado de hacer valer lo que para ella significa FILOSOFIA. Y dicho concepto oscila desde tener un significado tan cándido como lo es AMOR POR LA VERDAD, hasta el voráz pero bien recibido (aún por la misma secta pitagórica) de PASION POR EL DISIMULO.

El tema central de la filosofía, varía por otra parte, en cada época de la historia. Para los filósofos presocráticos, el pensamiento se concentra principalmente en el Cosmos. Para Sócrates es el aspecto ético el tema central. Platón y sus discípulos son los representantes de una filosofía, en la que el conocimiento se encuentra íntimamente ligado a la acción: la idea es la base del conocer y del obrar conjuntamente, el punto de partida para la intuición de todo el Cosmos, y la norma de comportamiento del individuo y de la sociedad.

Desde Hesíodo, existe entre los griegos la preocupación de justificar el mundo creado. Necesidad de encontrar una UNIDAD creadora de lo diverso, inquietud por encontrar el origen de todas las cosas. De ahí, surgen varios y variados discursos cuya única finalidad es demostrar quién tiene el poder.

Hesíodo en su "TEOGONIA", nos presenta el Universo creado por los dioses que habitan el Olimpo y afirma que TODO LO CREADO PROCEDE DE ZEUS.

Tales de Mileto, por su lado arguye que toda la realidad tiene su origen en un principio único llamado αρχε . EL ARXE DEL MUNDO ES EL AGUA.

Los filósofos naturalistas, por su parte, realizan la primera tentativa de explicar el origen de todas las cosas, la cual ofrece tres vertientes:

1.- LA ESPECULATIVA, la cual está constituída por los intentos del hombre para explicarse el Universo o el macrocosmos en que vive.

2.- LA PRACTICA, basada en el estudio del hombre mismo, del microcosmos, de su naturaleza y lugar en el mundo, además de sus relaciones con sus semejantes.

3.- LA CRITICA, incluye la lógica y la epistemología o teoría del conocimiento.

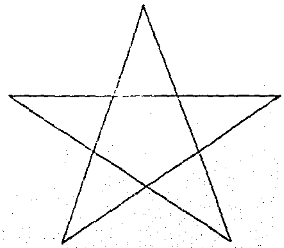
En esta, el hombre se pregunta a sí mismo, sobre la eficacia de los instrumentos con los que fue dotado por la naturaleza para entrar en contacto con el mundo exterior.

II.3 LA ESCUELA PITAGORICA Y LA SECCION AUREA COMO GENERADORA DE TODA UNA CONCEPCION FILOSOFICA DEL MUNDO.

La escuela pitagórica constituía una hermandad religiosa, donde, como ya se manifestó en el capítulo anterior, una parte, por lo menos, de su doctrina se consideraba secreta y no debía ser comunicada a los profanos. Un ejemplo de este hecho lo encontramos cuando Hippaso pereció en un naufragio. ¿Será cierto que su destino se debió a una promesa rota? Había divulgado el secreto de las esferas con sus doce pentágonos.

Pitágoras mismo, fue considerado como semidivino. Esto significa en primer lugar, que le rodeaba una bruma de leyendas milagrosas, de las cuales es difícil desenmarañar la verdadera vida y enseñanzas del Pitágoras histórico.

Los intereses de Pitágoras fueron ante todo matemáticos y la tradición ha traído hasta nosotros la leyenda que nos narra: el SELLO DISTINTIVO de la hermandad pitagórica fue la estrella pentagonal (de cinco puntas) como se muestra a continuación.



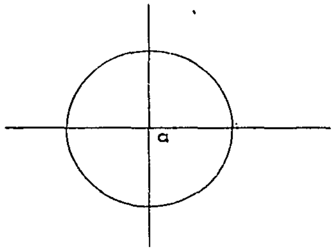
Sin embargo, para el que no esté enterado del significado de esta estrella y de los tesoros que guarda, dicho símbolo adquiere la forma de un simple LOGOTIPO que perteneció a una organización antigua.

No obstante, la estrella pentagonal procede de la construcción del pentágono regular, construcción que encierra en sí misma, el misterio de la SECCION AUREA. Fue símbolo distintivo de la hermandad, símbolo idóneo de las matemáticas que descubrió la escuela. También fue símbolo de la salud.

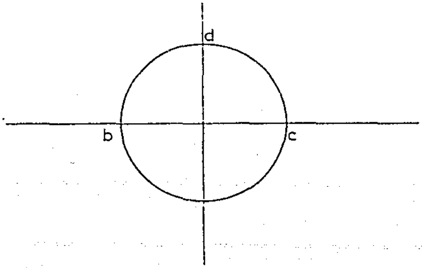
II.4 CONSTRUCCION DEL PENTAGONO REGULAR SEGUN DURERO.

"Corresponde ahora enseñar de que forma se puede dibujar un péntagono dentro de un circulo, lo cua realizaremos así." (II.2)

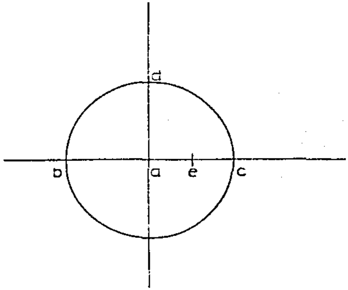
Con cualquier centro y radio, dibujar una circunferencia.



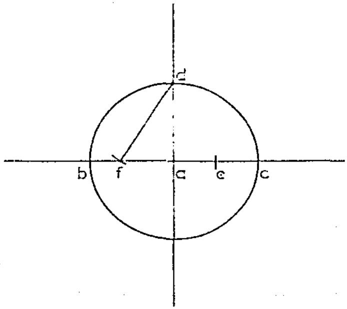
Trazar en esta un diámetro transversal, al cual se le pondrán, donde corta la periferia a uno y otro lado una b y una c. Se traza enseguida un diámetro perpendicular al diámetro transversal en ángulos rectos y se le pone a la intersección de aquel con la línea circular por arriba, la letra d.



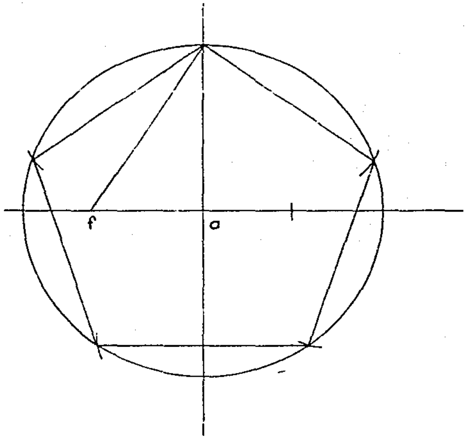
Se divide en seguida el semidiámetro ac por en medio, y al punto de la división le llamamos e.



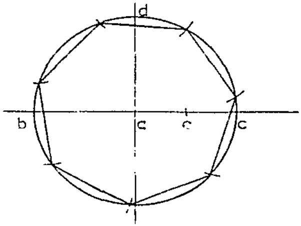
Ahora con centro en e, pero con distancia ed, se traza el arco que va desde el punto d, hasta la linea ab, a ese corte le llamamos f.



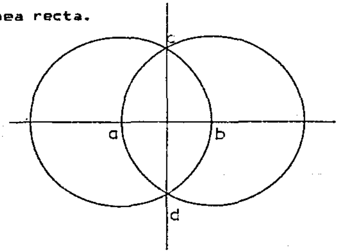
Se une f con d, mediante la línea fd. Esta longitud fd será el lado del pentágono, que se ha de poner dentro del círculo. Además, la longitud fa dará el lado del decágono equilátero y equiángulo.



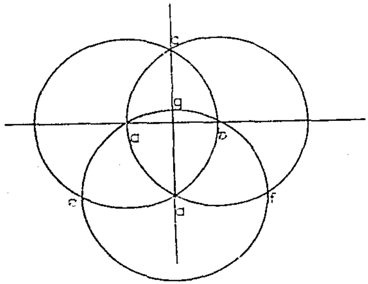
Si ahora se trazara una linea desde e, hasta el arco dc, paralela a la línea ad, mecánicamente se obtendría la séptima parte de la circunferencia, como se puede apreciar aquí, (obteniendo con esto el heptágono regular). Esta construcción fué dada por Alberto Durero en el Siglo XV, sin embargo en el siglo XIX Gauss demostró que no todas los POLIGONOS REGULARES se pueden trazar con regla y compás entre estos se encuentra precisamente el heptagono regular sin embargo, la construcción que hace Durero es muy aproximada.



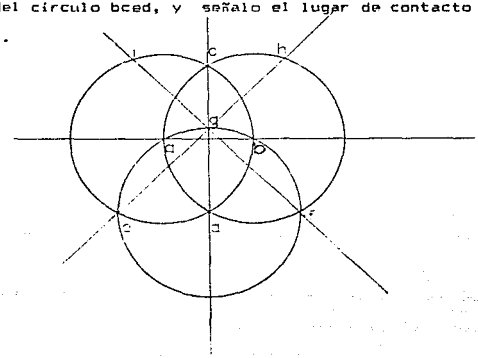
Otra manera de dibujar el pentágono con una sola abertura del compás es la siguiente. Sea la línea ab, un lado del pentágono, cuya extremidad a, hago centro y con la distancia ab, describo un círculo. Nuevamente, con el centro b, pero con distancia ba, dibujo otro círculo que corte al anterior, por arriba en la c y por abajo en la d, y uno estos dos puntos con una línea recta.



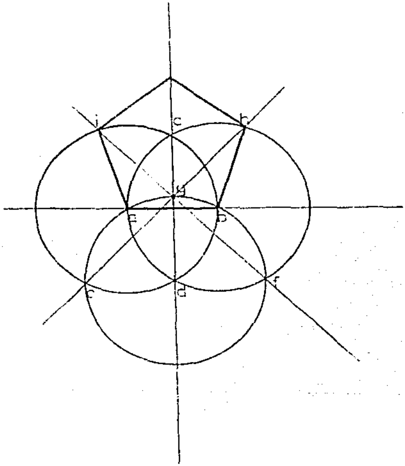
Ahora. sobre el centro d, trazo un arco a través de los centros de ambos círculos y de las circunferencias, a las cuales donde las corta, les pongo la e y la f, y además a la intersección de la misma y de la línea cd, le pongo la letra g.



Hecho esto, continúo la línea eg, en dirección de g, hasta la periferia acfd y donde la toca, ahí escribo h. De manera similar alargo también la línea fg, hasta que caiga en la línea del círculo bced, y señalo el lugar de contacto con la letra i.



En seguida trazo las líneas ai bh y obtengo los tres lados del pentágono, con distancia ab y uno las otras dos a la perpendicular dc alargada y a los términos i y h, hecho lo cual estará terminado el pentágono como se dibuja aquí.



Además de estas dos formas, se pueden encontrar diversas maneras para dibujar el PENTAGONO REGULAR, una de ellas, la que nos interesa en este capitulo, es la que a través del conocimiento de la SECCION AUREA se puede obtener.

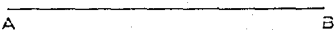
La PROPORCION AUREA, da la división geométrica de una recta en MEDIA y EXTREMA RAZON. Es decir, dada la recta AB, encontrar el punto F, tal que la relación de la parte más larga con la parte más corta, sea igual a la relación del todo con la parte más larga.

II.5 DIVISION DE UNA LINEA RECTA EN SECCION AUREA.

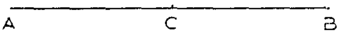
Para dividir una linea recta dada AB, en dos partes desiguales, de tal manera que el segmento MAYOR sea a TODA la línea como el MENOR lo es al MAYOR se dan los siguientes métodos.

II.5.1 PRIMER METODO.

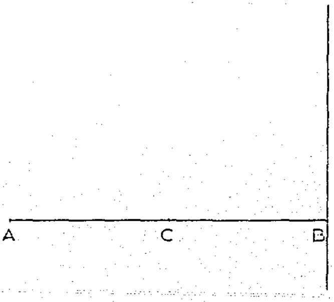
1) Se traza la linea recta AB.



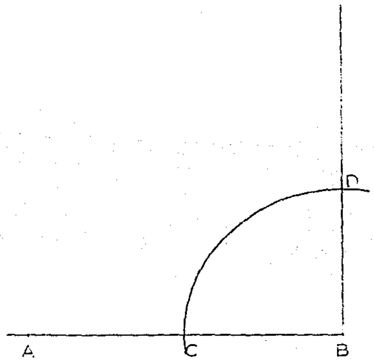
2) Se divide la recta AB a la mitad y a ese punto le llamamos C.



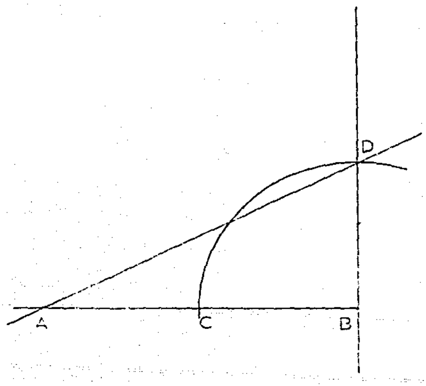
3) Se levanta una perpendicular sobre el punto B.



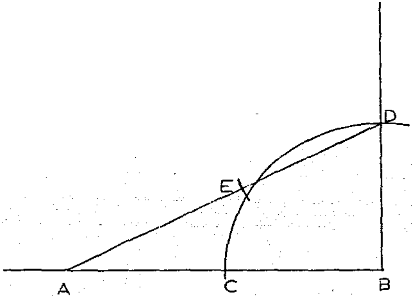
4) Se apoya el compás en la letra B y con radio en C, que mide la mitad de AB se traza un arco que corte la perpendicular trazada sobre el punto B. A ese punto le llamamos D.



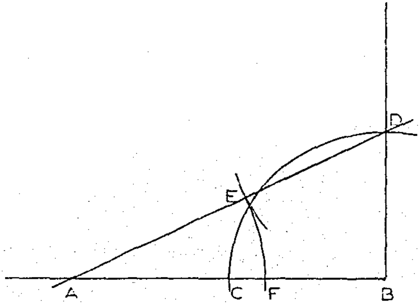
5) Del punto D, se traza una recta hasta el punto A.



6) Se apoya el compás en el punto D, y con radio DB, se traza un arco que cruce la línea AD, a ese cruce le llamamos E.



7) Se apoya el compás en el punto A, y con radio AE, se traza un arco que cruce la línea AB, a ese punto le llamamos F.



El punto F, es el punto de la PROPORCION AUREA buscada. Es decir, F es el punto que corta a la línea AB, en dos partes desiguales, de tal manera que el segmento AF es a la recta AB como el semento FB es al segmento AF.

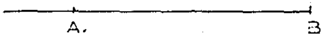
Luego: el TODO es AB, la MAYOR es AF y la MENOR es FB.

O bien, AF: AB:: FB: AF.

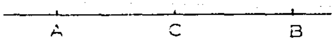
Es decir, $\frac{AF}{AB} = \frac{FB}{AF}$

II.5.2 SEGUNDO METODO.

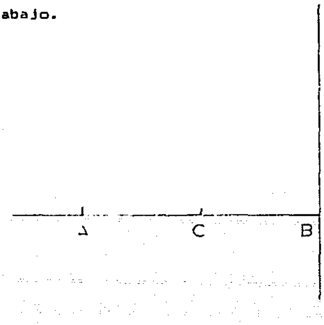
1) Se traza la recta AB.



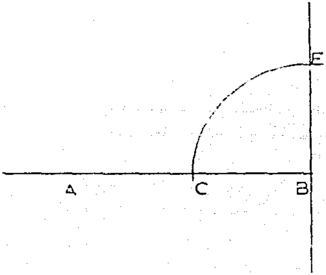
2) Se divide la recta AB a la mitad, a ese punto le llamamos C



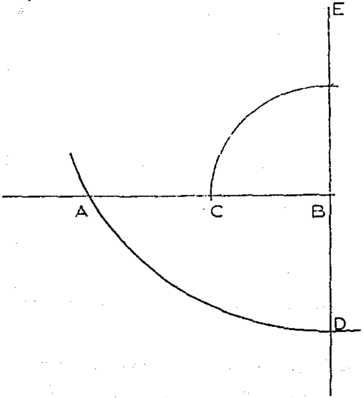
3) Se levanta una perpendicular que pase por el punto B por arriba y por abajo.



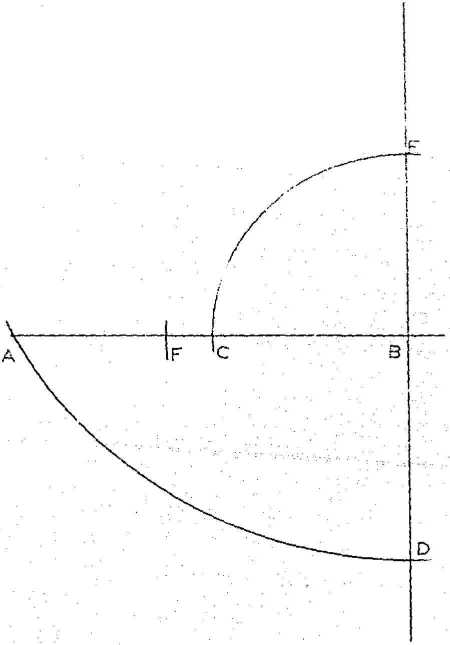
4) Se apoya el compás en B, y con radio BC, se traza el arco que corta la línea perpendicular al segmento de recta AB hacia arriba, a ese punto le llamamos E.



5) Se apoya el compás en el punto E, y con radio EA, se traza un arco que corte la perpendicular que pasa por abajo de B, a ese punto lo llamamos D.



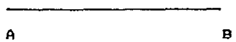
6) Con centro en B y radio BD, se traza el arco que corta a la recta AB, a ese punto lo llamamos F. Luego F= que es el punto que divide a la recta en SECCION AUREA.



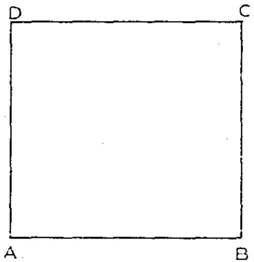
II.5.3 TERCER METODO.

Otra manera de encontrar F es la siguiente:

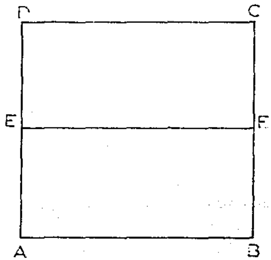
1) Se traza la linea AB.



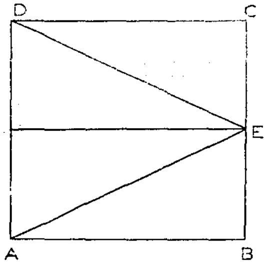
2) Se construye un cuadrado.



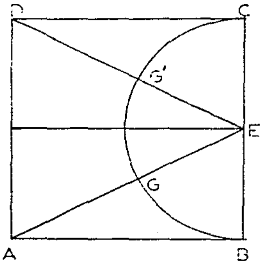
3) Por el lado BC del cuadrado, se traza la mediana horizontal y al punto medio de BC le llamamos E.



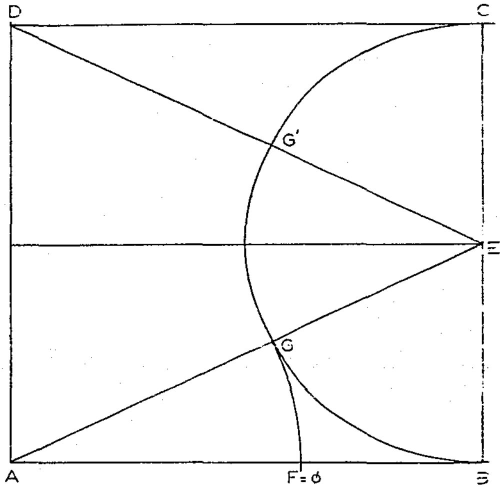
4) Se trazan las diagonales de los dos rectángulos restantes. Es decir, la diagonal que va del punto DE, al punto D y la diagonal que va del punto E al punto A.



5) Con centro en E y con radio EB, se traza el semicírculo que corta las diagonales, a esos puntos los llamamos G y G'.



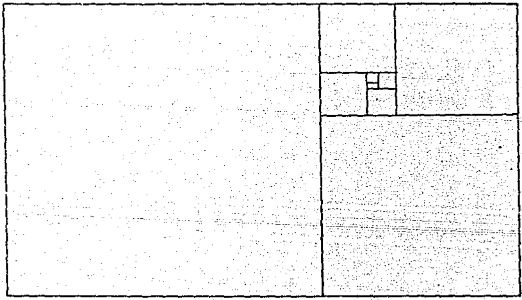
6) Se apoya el compás en A y con radio AG, se traza un arco. Al punto donde se intersecan la recta AB con el arco trazado, le llamamos F. y ese es el PUNTO AUREO buscado.



"Este es el método más fácil de recordar, y además una confirmación de lo realizado en las dos figuras anteriores."
(II.3)

II.6 CONSTRUCCION DEL RECTANGULO AUREO.

Se dice que un RECTANGULO es AUREO si se puede descomponer en un cuadrado y otro rectángulo menor, también AUREO, que a su vez se puede seccionar en forma similar, acción que se repite indefinidamente y cuyo resultado es, una sucesión de rectángulos, donde las relaciones y medidas de cada superficie están en SECCION AUREA.

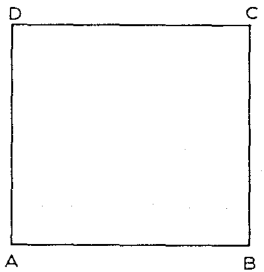


El RECTANGULO AUREO se puede construir de varias y diferentes maneras, dependiendo de si se nos da el lado MAYOR, el MENOR o el TODO como dato.

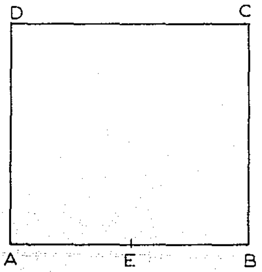
II.6.1. PRIMER CASO.

Construir el RECTANGULO AUREO cuando es el lado corto la mayor el conocido. Sea AB el lado conocido.

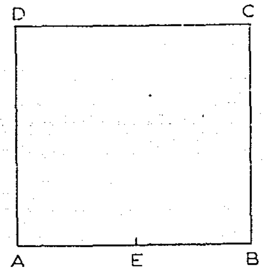
1) Se construye un cuadrado de cualquier dimensión. LLamamos A, B, C, y D a cada uno de sus vértices.



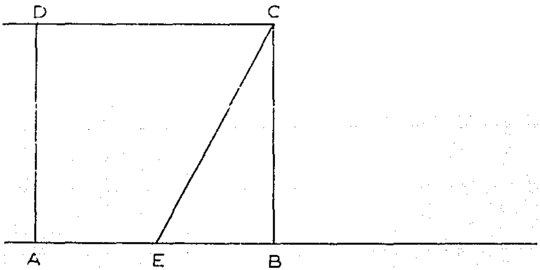
2) Se divide la recta que va del punto A al punto B, es decir, el lado AB del cuadrado a la mitad, a ese punto lo llamamos E.



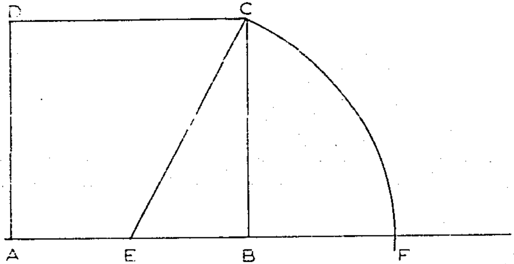
3) Prolongamos la linea AB, por el lado B.



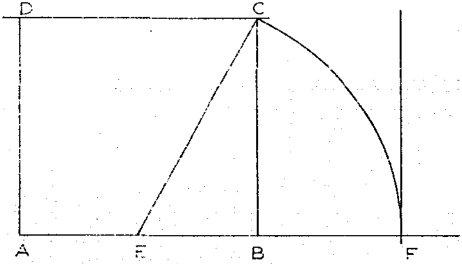
4) Se levanta una diagonal que va del punto E, hasta el punto C.



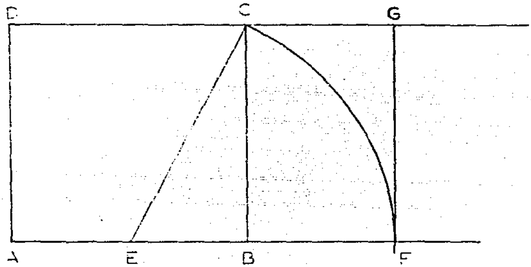
5) Se apoya el compás en E y con radio EC, se traza un arco que corte la prolongación de la recta AB, a ese punto le llamamos F.



6) Se levanta la perpendicular sobre el punto F.



7) Se prolonga la línea recta DC, hasta que cruce con la recta perpendicular a BF. al cruce de esas dos líneas le llamamos G.

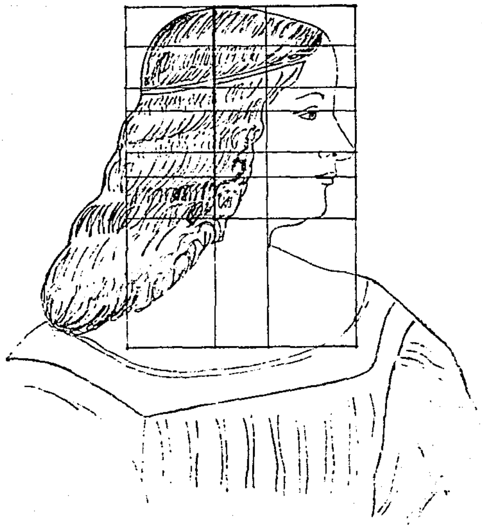


8) La unión de los puntos AF, FG, GD y DA, construye el RECTANGULO AUREO.

Como se puede observar el punto B, es el PUNTO AUREO del segmento AF.

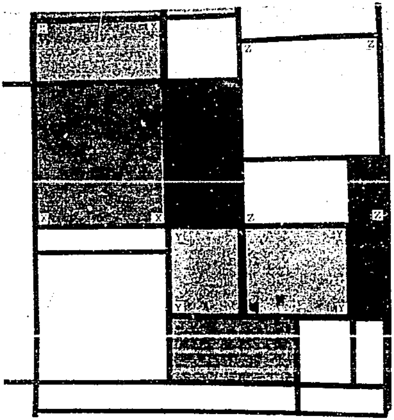
El segundo y tercer casos, se dejan como ejercicios al lector.

II.6.1. EJEMPLOS DEL USO DEL RECTANGULO AUREO EN PINTURA, ESCULTURA Y ARQUITECTURA.



ANALISIS AUREO de ISABELLA D' ESTE GONZAGA.

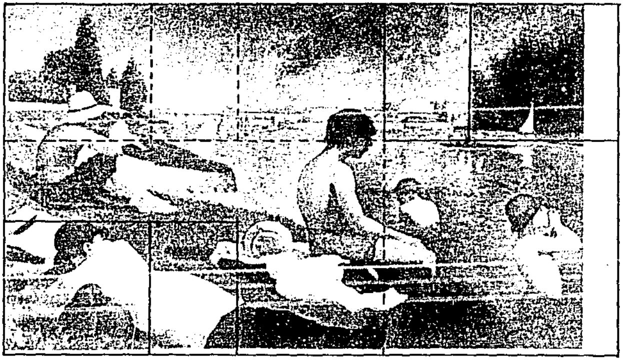
Leonardo da Vince. ISABELLA D' ESTE GONZAGA.
63x46 cm. (1500). (Louvre, París).



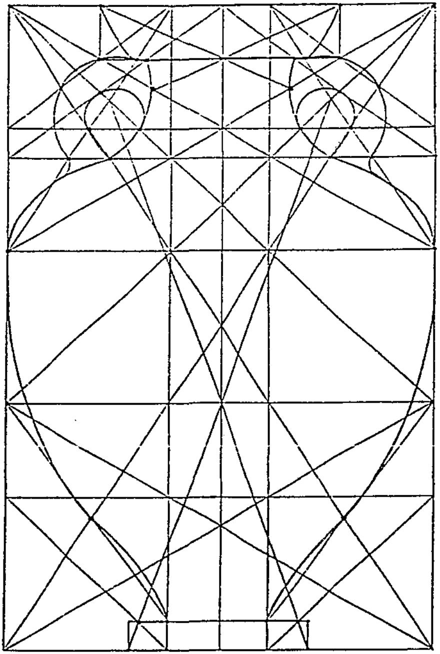
Piet Mondriant. PINTURA II. 75x65 cm. (1921-1925).
(Col. Max Bill, Zurich).

En sus cuadros Mondriant incorpora RECTANGULOS AUREOS sobrepuestos. En esta pintura pueden observarse por lo menos tres, marcados en cada uno de sus vértices por las letras X, Y, Z.

Leonardo da Vince. MONA LISA. 77x46 cm. (1503).
(Louvre, París)

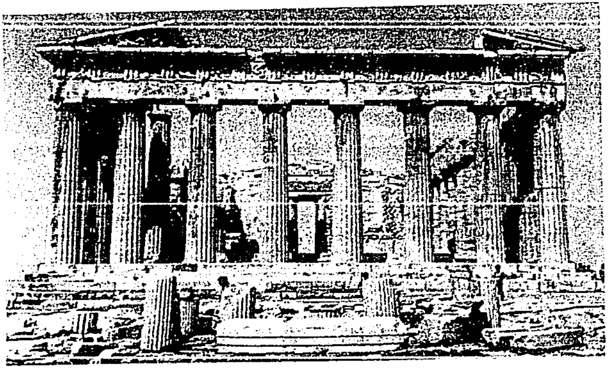


Georges Seurat. Baño en Asnieres. 201x302 cm. (1883-1884).
(Galería Nacional de Londres).

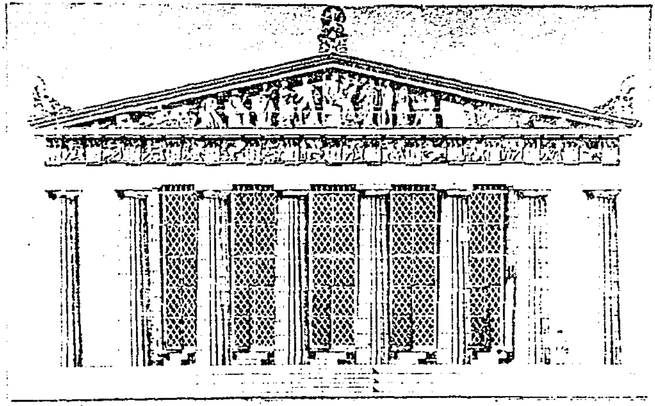


TRAZADO ARMONICO DE VASIJA GRIEGA (C. CHANFON)

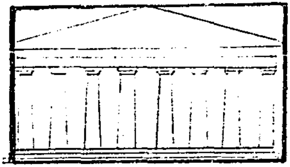
C. CHANFON



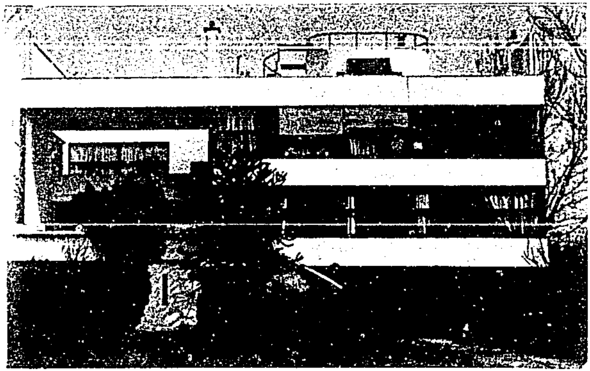
Fidias. PARTENON, (fachada Este, tal como se encuentra hoy en día.)
(Siglo V a. de C.)



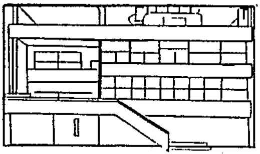
A. Orlandos. Diseño de la restauración de la facnada E. del PARTENON.
La escena central del frontón es una composición insegura.



RECTAGULO DORADO



Le Corbusier. Casa en las afueras de París (Siglo XX).

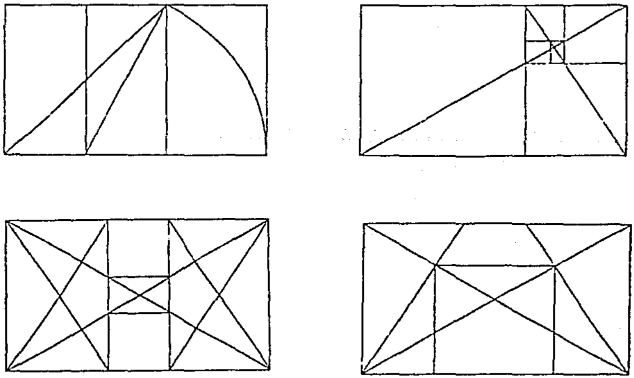


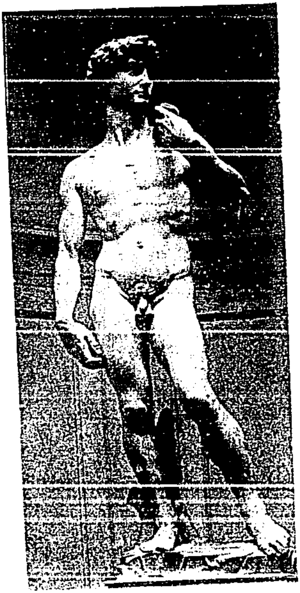
RECTANGULO DORADO

II.7 DESCOMPOSICIONES ARMONICAS DEL RECTANGULO AUREO Y ALGUNOS EJEMPLOS.

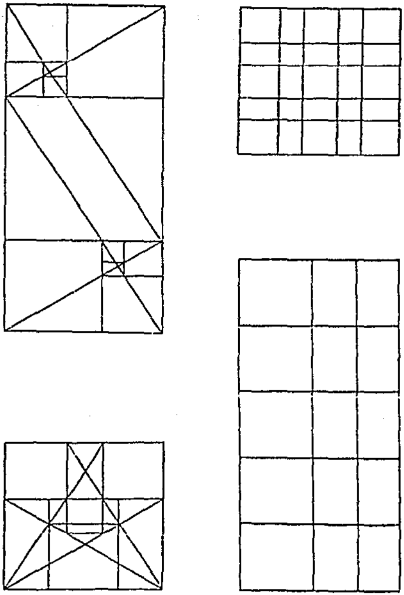
El rectángulo dorado bien puede ser subdividido ármonicamente.

"El ingenioso método de estas DESCOMPOSICIONES ARMONICAS está fundado en la creación recurrente en el interior de la superficie de encuadramiento y de sus subdivisiones primarias de superficies semejantes (recíprocas) o emparentadas, por el simple trazado de las diagonales y perpendiculares bajados sobre éstas desde los vértices de los diferentes rectángulos dados progresivamente obtenidos". (II.4).

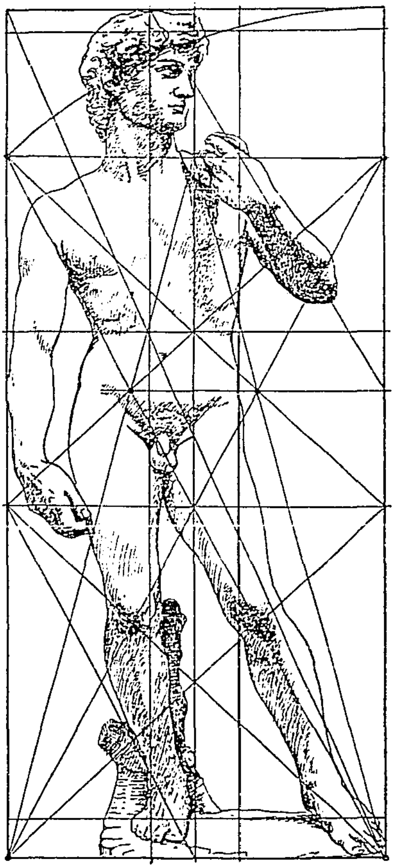




Miguel Angel. DAVID. (1502-1505),
(Museo de la Academia, Florencia).



DESCOMPOSICIONES ARMONICAS. (J. Hambidge)



Análisis de proporciones en el David de Miguel Angel (Chanfon).

II.B. ANALISIS AUREO DEL PENTAGONO REGULAR.

El PENTAGONO es la figura geométrica más extraordinaria; casi todas las relaciones naturales de su forma, medidas y trazas, están en SECCION AUREA, es de aplicación muy eficaz en la COMPOSICION PLASTICA, ya sólo con el círculo que lo inscribe o circunscribe, o bien dentro del cuadrado o rectángulo; enriqueciendo las posibilidades compositivas. Todas las figuras que surgen de la subdivisión del PENTAGONO tienen sus mismas propiedades notables. Lo más sorprendente son sus diagonales, que se cruzan, dando lugar a la estrella de cinco puntas, verdaderamente AUREA.

"Todas las figuras mayores y menores consecuencia de las trazas del PENTAGONO, tienen sus medidas y superficie en PROPORCIONES AUREAS recíprocas." (II.5)

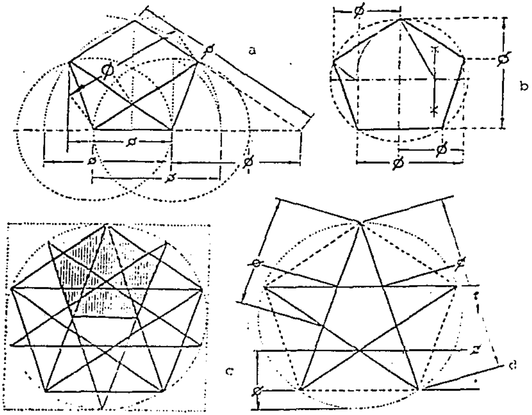
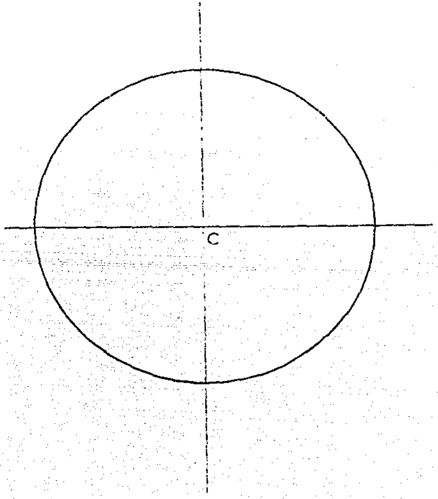


Fig. a Proporciones áureas del pentágono, análisis de su construcción. Fig. b Otras proporciones áureas del pentágono. Figs. c, d Proporciones áureas de las figuras geométricas derivadas del pentágono.

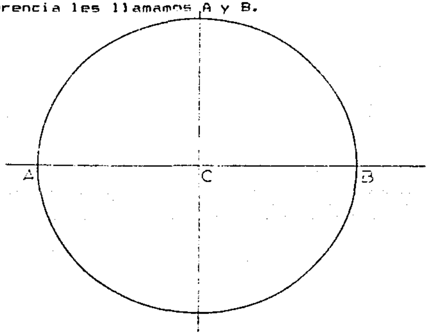
El PENTAGONO REGULAR, o PENTAGONO EQUILATERO es una figura de cinco lados iguales y cinco ángulos iguales. Es la figura más excelsa de todas porque guarda en cada una de sus proporciones, el tesoro de la SECCION AUREA.

II.B.1 CONSTRUCCION DEL PENTAGONO REGULAR A TRAVES DE LA SECCION AUREA.

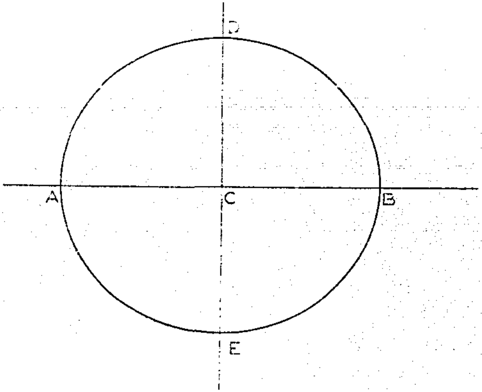
1) Se traza un circulo de cualquier dimensión, al centro le ponemos C.



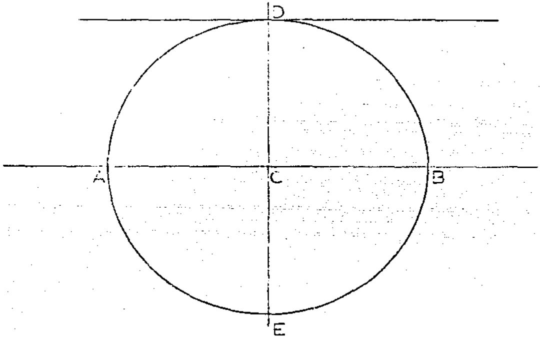
2) Se traza una línea horizontal que cruce el centro del círculo. a los puntos donde se interseca dicha línea con la circunferencia les llamamos A y B.



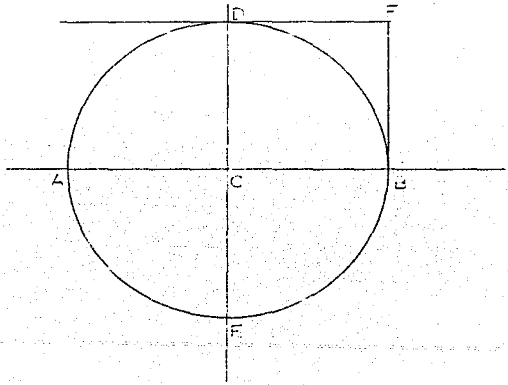
3) Desde C, se levanta una línea perpendicular a la recta AB que corte a la circunferencia en los puntos D y E.



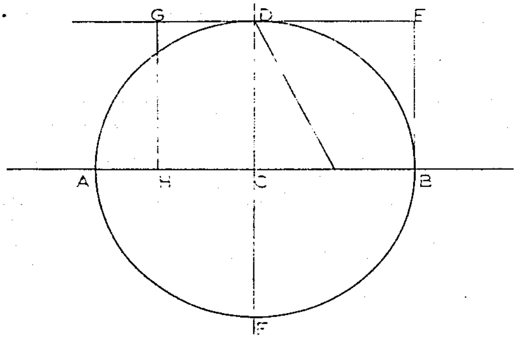
4) Se traza una línea recta que haga tangencia con el punto D y que sea paralela a la recta AB.



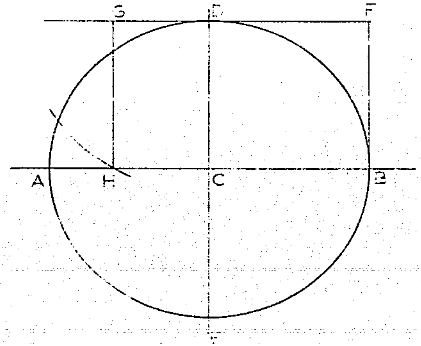
5) Se traza una línea recta que haga tangencia con el punto B y que sea paralela a la recta DE. Al punto donde se cruza dicha línea recta con la tangente que pasa por D, se le llama F.



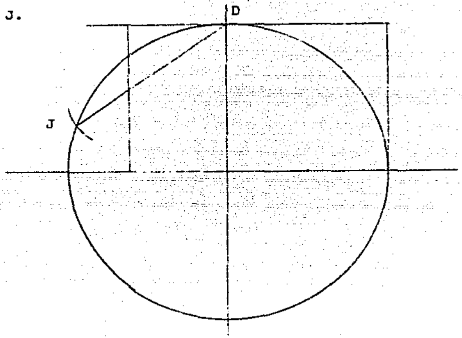
6) Ya que tenemos el cuadrado seguimos los mismos pasos que se siguieron para construir el RECTANGULO AUREO. Se debe tener cuidado que la parte por construir quede dentro del circulo.



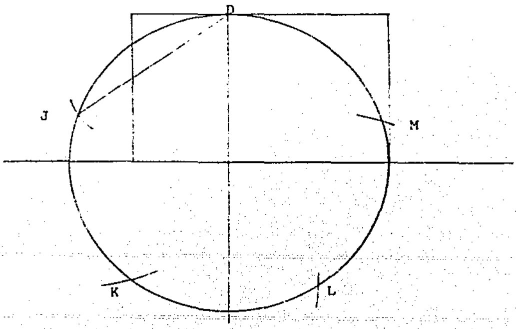
7) Ya que tenemos el RECTANGULO AUREO, con el compás hacemos centro en D y con radio DH trazamos un semiarco que cruce al circulo dado, a ese punto le llamamos J.



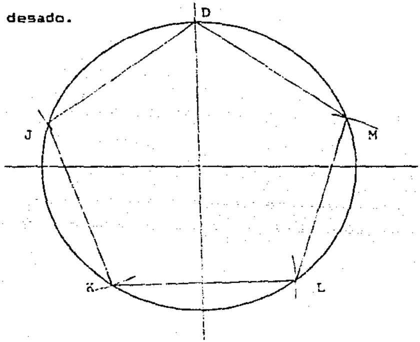
8) Por medio de una linea recta unimos el punto D con el punto J.



9) Se toma la medida DJ con el compás. Con esa medida se apoya el compás en J, y se traza un arco que cruce el círculo dado, a ese cruce le ponemos K. apoyamos el compás en K, y con la misma medida, trazamos otro arco que cruce el circulo, a ese punto lo llamamos L. Seguimos el mismo procedimiento, y al punto que resulta le ponemos M.



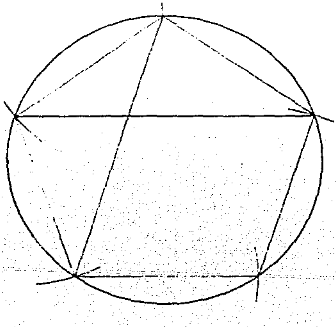
10) Se unen JK, KL, LM y MD. Con lo que obtenemos el PENTAGONO desado.



Se desprende de aquí la siguiente proposición:

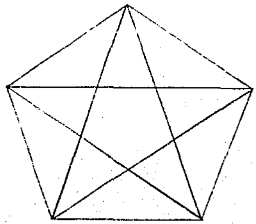
"Si en un círculo se forma el PENTAGONO EQUILATERO y se trazan dos lineas rectas opuestas a dos de sus ángulos próximos desde los extremos de sus lados, necesariamente aquellas se dividen entre si, según nuestra PROPORCION y cada una de sus partes mayores será siempre el lado de dicho PENTAGONO."

(II.6).

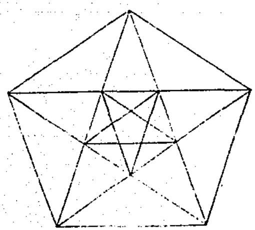


II.8.2. CONSTRUCCION DE LA ESTRELLA PENTAGONAL.

Dado el PENTAGONO REGULAR, si se trazan las cinco diagonales que lo cruzan, necesariamente aquellas se dividen según la PROPORCION AUREA y se obtiene como resultado la ESTRELLA PENTAGONAL o PENTALFA, símbolo distintivo entre los pitagóricos.



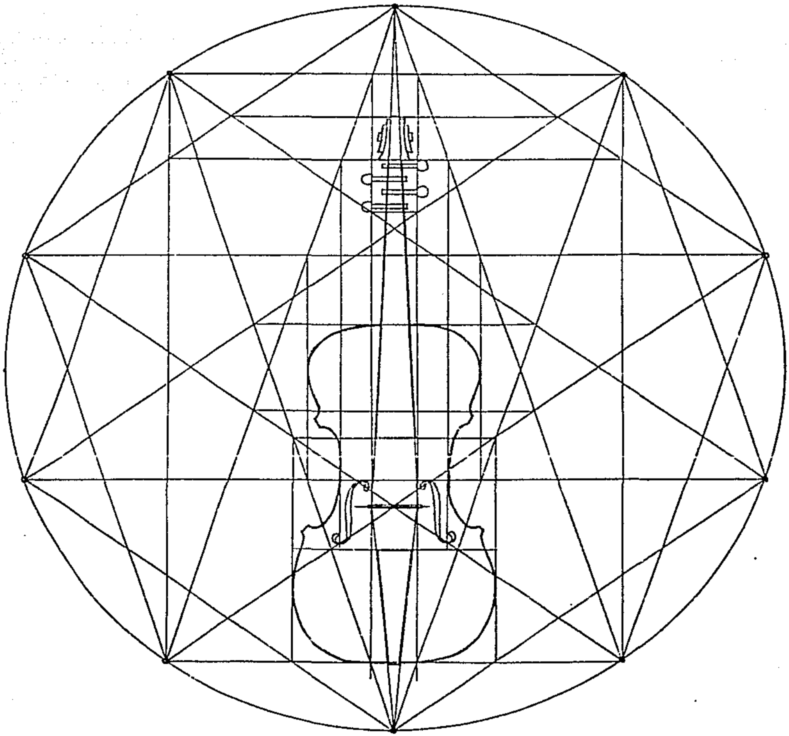
Curiosamente el PENTAGONO EQUILATERO y EQUIANGULO vuelve a repetirse en el centro de la estrella, las diagonales de este nuevo pentágono guardan así mismo la PROPORCION AUREA.



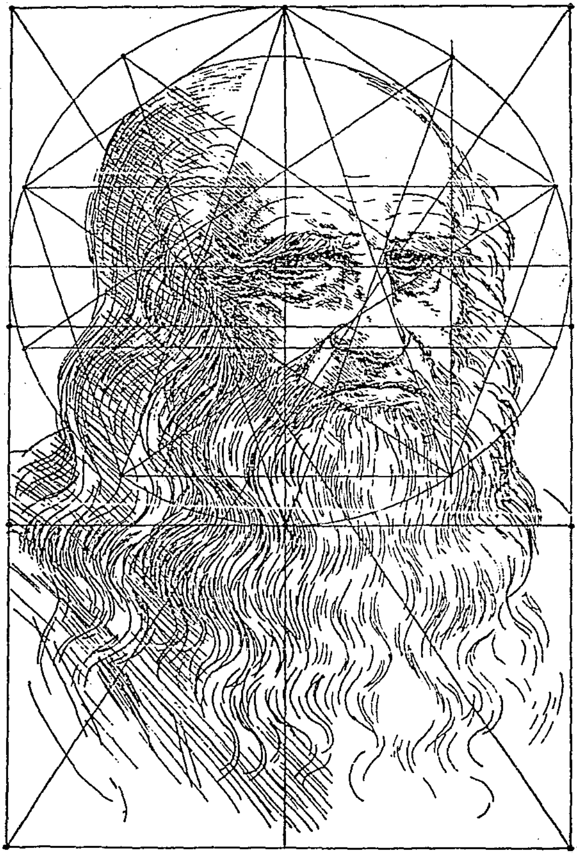
II.8.3. EJEMPLOS DEL USO DEL PENTAGONO REGULAR EN EL ARTE.

TRAZO DEL VIOLIN SEGUN LOS MAESTROS DE CREMONA

(Cortesía de Alejandro Reyna)

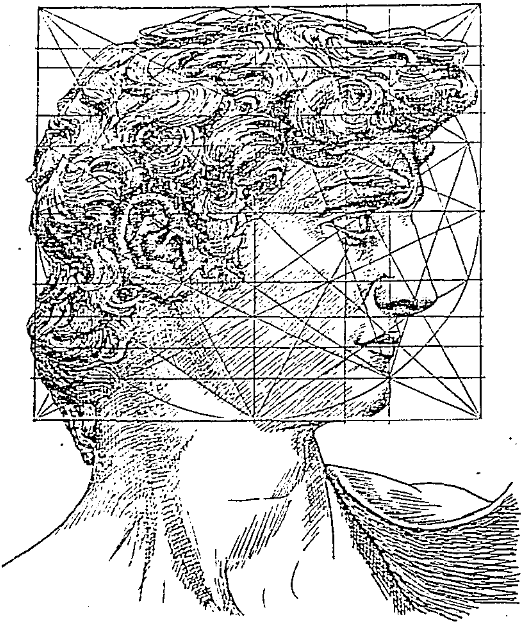


Leonardo da Vince. AUTORRETRATO. 33.3 x 21.3 cm.
sanguina, siglo XVI, (Biblioteca Real de Torino.



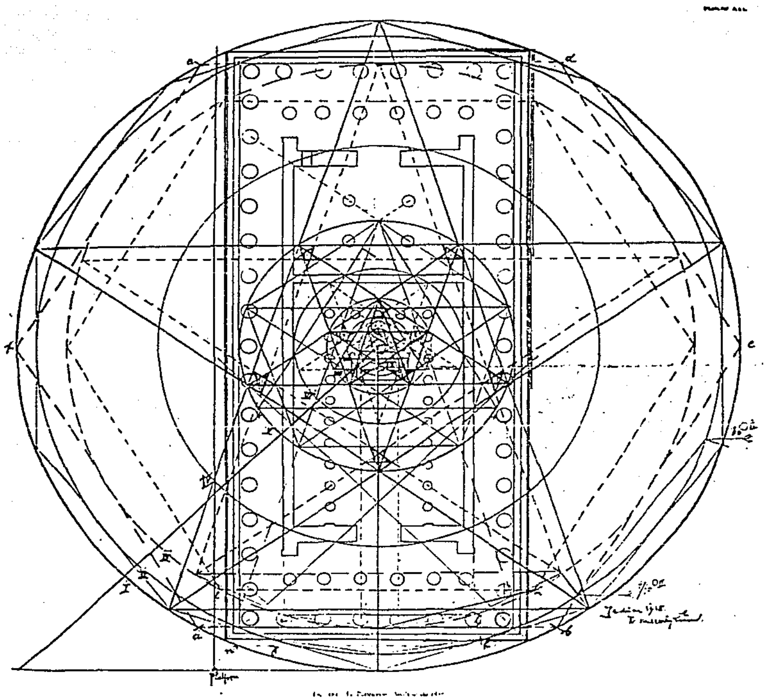
Análisis de proporciones en el Autorretrato de Leonardo (Chantón).

Miguel Angel. DAVID. (detalle), (1501-1505),
(Museo de la Academia, Florencia).



Análisis de proporciones en el rostro del David de Miguel Angel (Chanfón).

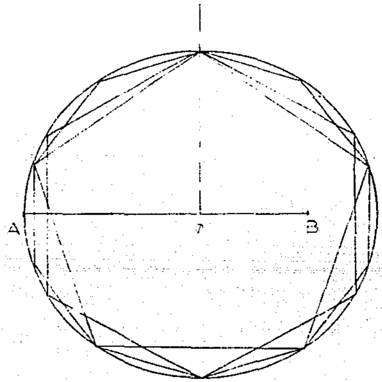
ANALISIS AUREO DEL PARTENON.



II.8.4. UN TEOREMA CURIOSO.

Si una linea se divide según la DIVINA PROPORCION, la parte MAYOR es siempre el lado del HEXAGONO de aquel circulo que lo inscribe, y la MENOR, es el lado del DECAGONO del mismo circulo.

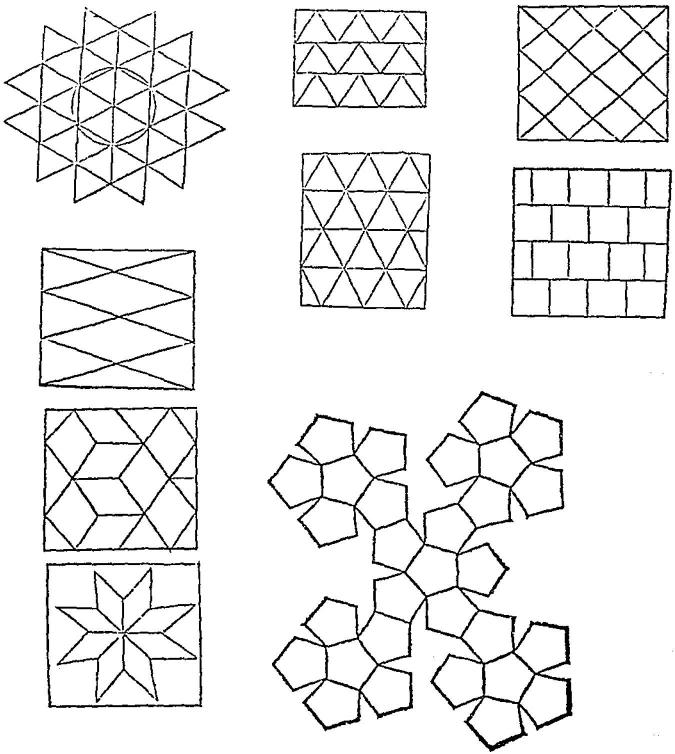
Tomando los puntos que construyen el DECAGONO de dos en dos, podemos dibujar el PENTAGONO REGULAR.



Euclides en el libro IV, proposición 11, de LOS ELEMENTOS da también una manera de dibujar el PENTTAGONO REGULAR con regla y compás. (II.7)

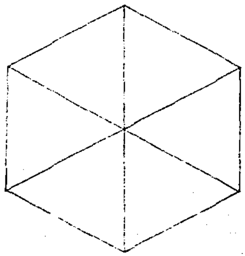
II.9 LA DIVINA PROPORCION COMO FORMULA MATEMATICA.

"En geometría, Pitágoras y sus seguidores desarrollaron la teoría de las figuras que llenan el espacio." (II.8)

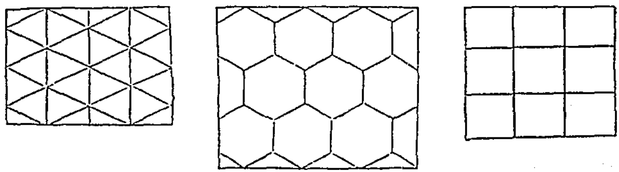


"las más evidentes debieron ser bien conocidas. Si consideramos cada parte de una figura de este tipo como unidad, surge la cuestión, ¿podemos llenar una superficie con repeticiones de estas unidades . Es muy probable que este tipo de interrogación fuese la primera que condujo al teorema de que la SUMA DE LOS TRES ANGULOS DE UN TRIANGULO ES IGUAL A DOS ANGULOS RECTOS." (II.9)

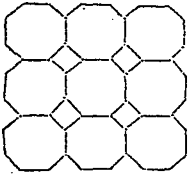
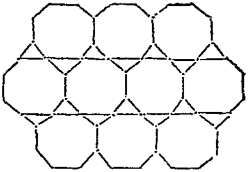
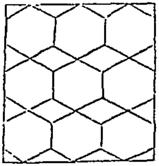
El siguente esquema muestra seis triángulos iguales que llenan un espacio plano alrededor de un punto central.

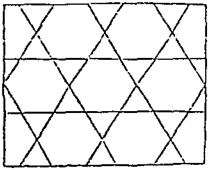
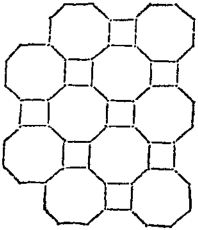
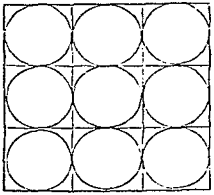


Pero también se puede pavimentar un piso con mosaicos regulares, de lados iguales únicamente de tres formas: con TRIANGULOS, CUADRADOS Y HEXAGONOS. Mosaicos de otras formas no encajan para cubrir toda la superficie.



Sin embargo, se pueden hacer combinaciones de unas figuras con otras, por ejemplo: si alguien quisiera poner figuras circulares en las paredes y en los pavimentos, las podría unir entre sí de dos modos; primero mediante cuadrados, y segundo también mediante rombos.

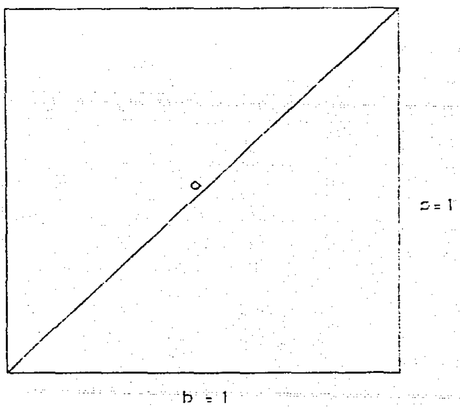




La misma hilación de pensamiento se extiende naturalmente a la GEOMETRIA DEL ESPACIO. incluyendo la concepción de CUERPOS GEOMETRICAMENTE REGULARES. de los cuales, notablemente sólo existen CINCO.

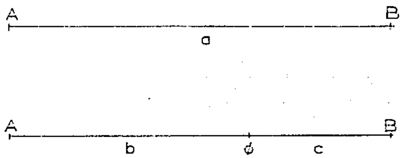
Otro tipo de problemas que interesó a los pitagóricos fue el embarazoso descubrimiento de los NUMEROS IRRACIONALES.

No se sabe como es que tuvo lugar, si bien pueden citarse dos ejemplos. Primero cuando a es la diagonal y b el lado de un cuadrado, de dimensiones uno por uno, al querer encontrar el valor de a, contamos, con el famoso TEOREMA DE PITAGORAS (vease capitulo anterior) que dice, el cuadrado de la hipotenusa, en este caso a, es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, es decir, $a^2 = b^2 + b^2$

entonces $a^2=1^2+1^2$, ya que $b=1$, luego $a^2=1+1$, entonces $a^2= 2$, por lo que $\sqrt{a}=\sqrt{2}$, por lo tanto $a=1.414...$ que es un número IRRACIONAL.



Y segundo, cuando una línea a es dividida según el SEGMENTO AUREO en dos partes b y c. Con ello se indica que la razón de a, (toda la línea) a la parte b, es igual a la razón de b, a la otra parte c.



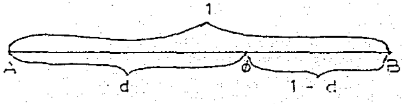
Aquí c cabe una vez en b, con un resto d; y luego d, cabe una vez en c con u n resto e; y así sucesivamente. No es difícil demostrar que dichas longitudes a, b, c, d, ..., forman una progresión geométrica infinita; y la medida común deseada no se halla nunca.

A esta progresión geométrica infinita se le llama ESCALA ASCENDENTE Y DESCENDENTE DE PROPORCIONES AUREAS CONSTANTES.

II.9.1. FORMA ALGEBRAICA.

Si preferimos el álgebra a la geometría podemos verificarlo como sigue:

Se trata de encontrar el NUMERO DE ORO ϕ que divide al segmento AB armónicamente, es decir, tal que $\frac{AB}{A\phi} = \frac{A\phi}{\phi B}$



Puesto que se supone que $AB = A\phi + \phi B$ (i)

y además se sabe que $\frac{AB}{A\phi} = \frac{A\phi}{\phi B}$ (ii)

Si dividimos el segmento AB de tal forma AB =1. $A\phi$ =d, $\phi B = 1-d$. (iii)

y sustituimos estos valores en (ii) tendremos:

$$\frac{1}{d} = \frac{d}{1-d}$$

$$d^2 = 1-d$$

$$d^2 + d - 1 = 0 \qquad \text{(iV)}$$

Cualquiera que haya estudiado álgebra elemental reconocerá en una ecuación de segundo grado cuadrática, (A.II) que puede resolverse por la aplicación de la siguiente fórmula:

$$d = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (V)$$

Sustituyendo (iV) en (V) tenemos que a=1, b=1 y c=1

entonces $d = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$

Por lo tanto $d = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$d = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = .618$

$d = \left|\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right| = 1.618$

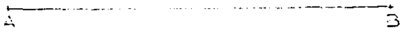
La presencia de $\sqrt{5}$ indica la existencia de un número IRRACIONAL, idea que nos conduce al problema del descubrimiento de los INCONMESURABLES (*) mismo que debe haber causado un enorme impacto entre los pitagóricos, ya que tranformaba muchas de las demostraciones geométricas aceptadas.

Gran parte del trabajo matemático de la época siguiente se caracterizó por el intento de recuperar la posición perdida, y esta fue triunfalmente recobrada por Eudoxio.

* Dos segmentos son inconmensurables entre sí, si no existe magnitud que esté contenida exactamente en cada uno de ellos respectivamente.

II.9.2 REPRESENTACION GRAFICA DEL PROBLEMA ANTERIOR

Si suponemos que el segmento AB mide una unidad



y lo dividimos en SECCION AUREA como ya sabemos hacerlo

resulta lo siguiente:

AB es el TODO y mide 1

A es la MAYOR y mide .618

B es la MENOR y mide 1.618

Como consecuencia del SECCIONAMIENTO AUREO hecho geométricamente, han resultado tres cifras que también están, recíprocamente en RELACION AUREA, cuyo exponente común es el NUMERO DE ORO.

1 dividido entre .618 da 1.618

.618 dividido entre .382 da 1.618

Esta igualdad de relaciones, de cantidades diferentes, es ARMONIA AUREA. Luego la PROPORCION AUREA y el NUMERO DE ORO son una misma cosa.

Los griegos lo descubrieron en la naturaleza, pues dicho NUMERO determinó la serie de proporciones considerada perfecta.

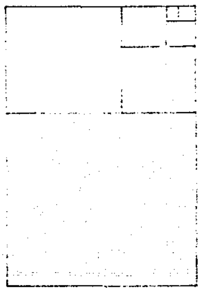
Esta proporción existe en el Universo, le es inherente ya que éste, está organizado en subdivisiones o desarrollos de relaciones lógicas, armónicas; están presente, por lo tanto, en el hombre, los animales, las flores; en multitud de diseños y esquemas geométricos de la naturaleza, en el arte, en la arquitectura, y aún en cosas tan mundanas como las mesas, la sillas, la tazas, los platos, en las conchas marinas, en la disposición de las semillas de girasol, etc.

El RECTANGULO DE ORO, por ejemplo, era usado por los arquitectos griegos en las dimensiones de sus templos y edificios. Los sicólogos han mostrado que la mayoria de las personas tiene inconscientemente preferencia por las tarjetas postales, espejos y paquetes que llevan estas dimensiones. Por alguna razón el RECTANGULO DE ORO tiene el mayor atractivo artístico.

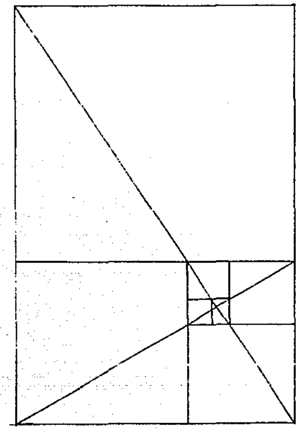
II.10 EL RECTANGULO AUREO Y OTROS.

El matemático Luca Pacioli destacó hace mucho tiempo, la importancia estética de la proporción llamada SECCION AUREA a la que lamó DIVINA PROPORCION.

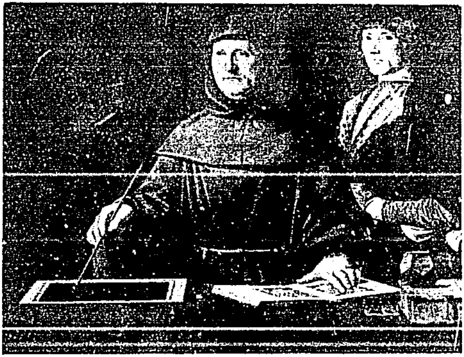
En el transcurso de este siglo esta doctrina ha sido tema de nuevas especulaciones y de interesantes investigaciones experimentales. El RECTANGULO AUREO, cuyos lados están en relación de la SECCION AUREA, atrajo particularmente la atención. Este rectángulo especial con una razón de 1.618..., y por lo tanto aproximadamente de 5/8 es evidentemente agradable a la vista. Además posee la propiedad geométrica interesante por cierto, de que si se le quita un cuadrado de lado igual al menor, queda un RECTANGULO AUREO más pequeño, y si a este pequeño, se le quita otro de lado igual al menor, nos vuelve a quedar un RECTANGULO AUREO. Si seguimos el procedimiento indefinidamente, siempre obtenemos un RECTANGULO AUREO menor.



El mismo resultado se obtiene por medio de diagonales que resultan además, perpendiculares entre si y reciprocamente AUREAS.



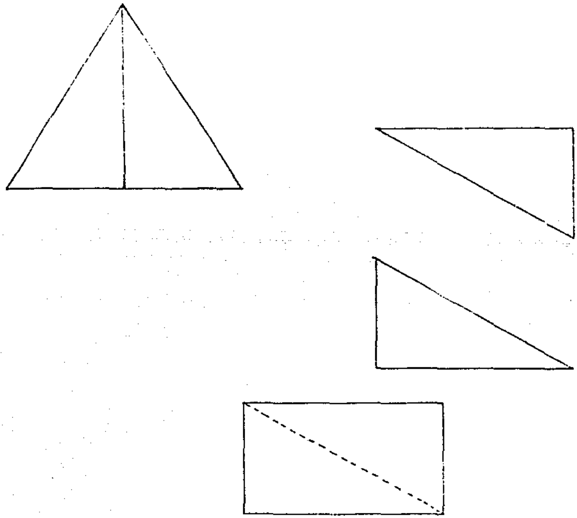
Un ejemplo de este formato AUREO lo encontamos muy comúnmente en las hojas tamaño oficio cuyas dimensiones son 21x34 cm. aproximadamente.



Jacopo de Barbari. RETRATO DE FRAY LUCA PACIOLI Y SU ALUMNO GUIDOBALDO, DUQUE DE URBINO. S. XVI. (Museo Nacional, Napoles)

II.10.1 RECTANGULO DE PLATON.

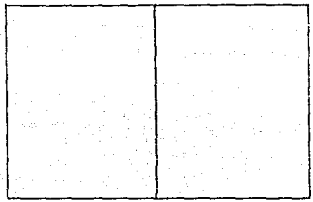
Otro RECTANGULO ARMONICO importante es el rectangulo favorito de PLATON, compuesto por las dos mitades de un TRIANGULO EQUILATERO. Su relación caracteristica es 1.732... es decir, $\sqrt{r}=\sqrt{3}$, donde r es la razón entre los lados mayor y menor. (Por ejemplo, si nos dan el lado mayor de 40 cm. y nos piden encontrar el lado menor, se divide 40 entre 1.732 y el resultado que es 23 cm. será el lado buscado del RECTANGULO DE PLATON.



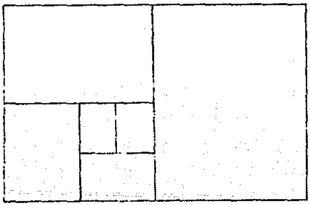
r=1.732

III.10.2 RECTANGULO RA.

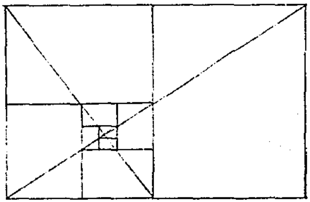
Conviene también recordar el RECTANGULO RA, con relación 1.414... $=\sqrt{2}$ que se divide en dos rectángulos iguales de la misma forma que el rectángulo original.



Aquí la relación es aproximadamente de 7 a 5. Este rectángulo tiene la propiedad de poder ser dividido en dos partes iguales; éstas a su vez en otras dos, que son semejantes a la primera.



Al igual que en el RECTANGULO AUREO, si se trazan las diagonales del rectángulo mayor y del menor, éstas resultan ser perpendiculares y además la perpendicular MAYOR es a la menor en una relación de 1.414.



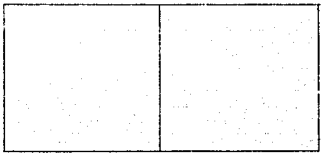
Este RECTANGULO es muy conocido por los estudiantes pues la mayoría de sus cuadernos de forma francesa guardan esta proporción.

La manera como podemos construirlo es la siguiente:
Dado el lado MENOR, multiplicar éste por 1.414 para encontrar el lado MAYOR.

Rufino Tamayo. Autorretrato. 179x127 cm. (1967), Museo de Arte Moderno, México. Formato y composición en $\sqrt{2}$.

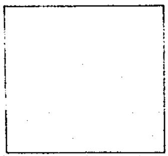
II.10.3 RECTANGULO CON DOS CUADRADOS.

También merece destacarse el RECTANGULO construido con DOS CUADRADOS, cuya relación es 2 a 1.



III.10.4. EL CUADRADO.

Incluyendo al CUADRADO cuya relación es UNO a UNO, contasmos con cinco rectángulos con propiedades geometricas simples.



"Concluimos entonces que de ninguna manera el RECTANGULO AUREO es diferente de otros en el sentido de poseer una propiedad geométrica simple". (II.10)

Si por ejemplo consideramos a estas y otras formas rectangulares como incorporadas a azulejos verticales aislados, se encontrará en primer lugar que el azulejo cuadrado es el que causa mejor impresión. Este hecho concuerda con la observación de que el cuadrado se usa con más frecuencia de este modo que cualquier otra forma rectangular. Se encontrará. también que otras formas rectangulares son altamente agradables y no muy distintas unas de otras en lo que se refiere a calidad estética excepto en lo siguiente: una forma rectangular casi cuadrada es desagradable por su efecto de ambiguedad; una forma rectangular cuya relación entre los lados mayor y menor es demasiado grande sugiere ser cortada por un segmento de recta y también este efecto no es grato.

Además una forma rectangular con una razón tan grande como de 2 a 1 no se adapta bien a llenar el campo circular de visión eficaz.

II.11. LA SUCESION DE FIBONACCI.

"En el lenguaje corriente las palabras SERIE y SUCESION son sinónimas y se utilizan para designar un conjunto de cosas o sucesos dispuestos en un orden. En matemáticas, estas palabras tienen un significado técnico especial. La palabra SUCESION tiene un sentido análogo al del lenguaje corriente, pues con ella se quiere indicar un conjunto de objetos puestos en orden, pero la palabra SERIE se usa en un sentido completamente distinto." (II.11)

Es por esto mi interés, en destacar que la SUCESION DE FIBONACCI, la que se estudiará con detalle en este inciso, es una SUCESION y no una SERIE como comúnmente se denomina.

Como ejemplos de sucesiones importantes tenemos la SUCESION DE NUMEROS NATURALES: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,..; esta sucesión se distingue porque cada uno de sus términos, tiene una unidad más que el anterior y una menos que el siguiente; estableciendo una relación igual y constante, de simetría simple.

"Otra forma corriente de definir una SUCESION es mediante un conjunto de instrucciones que indican como se obtiene un término a partir de los anteriores." (II.12)

Por ejemplo, si la SUCESION DE NUMEROS NATURALES se hace aditiva, es decir, que cada término de ella, sea igual a la suma de los dos anteriores, se obtendrá una SUCESION asimétrica, pero armónica, por ser proporcional. Luego el primer número será 0, el segundo 1, el tercero 0 + 1 y así sucesivamente por tanto la sucesión es:

0

1

0+1=1

1+1=2

1+2=3

2+3=5

3+5=8

5+8=13

8+13=21 etc.

Por lo que la SUCESION queda:

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, ... Así se forma la famosa SUCESION DE FIBONACCI.

Esta SUCESION es también rigurosamente GEOMETRICA y su progresión aditiva tiende rapidamente hacia un limite.

Por ejemplo, si dividimos cada uno de los NUMEROS DE FIBONACCI entre su vecino de la derecha, obtenemos :

1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21, 21/34, 34/55, 55/89. 89/144, ..., es decir:

1/1= 1

1/2=.5

2/3=.666

3/5=.6

5/8=.625

8/13=.615

13/21=.619

21/34=.617

34/55=.618

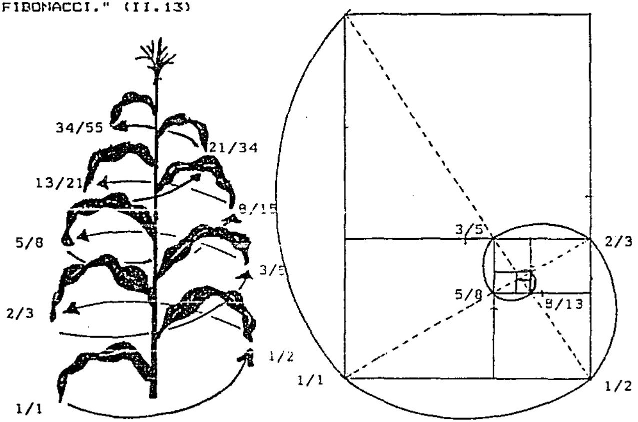
55/89=.618

89/144=.618

144/233=.618 ...

Por lo que se infiere que a partir de 34/55, la relación entre numerador y denominador sera siempre .618 que es uno de los valores de la ecuación $d = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \phi$

"Estas fracciones describen el crecimieto de las plantas. Cuando nacen hojas nuevas en una planta se disponen en espiral alrededor del tallo. La espiral va girando de abajo hacia arriba; la magnitud de la vuelta de una hoja a la siguiente, es una fracción de una rotación completa alrededor del tallo. esta fracción es siempre una de las fracciones de FIBONACCI." (II.13)



Las fracciones de FIBONACCI aparecen siempre en la descomposición de las bracteas del cono de un pino o en los flósculos de una flor.

Si ahora dividimos cada uno de los términos de la SUCESION DE FIBONACCI entre su vecino de la izquierda:

1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, ..., es decir:

1/1= 1

2/1= 2

3/2= 1.5

5/3= 1.666

8/5= 1.6

13/8=1.625

21/13=1.615

34/21=1.619

55/34=1.617

89/55=1.618

144/89=1.618

233/144=1.618, ..., etc

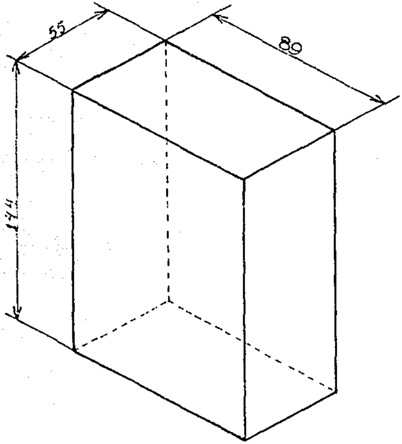
Obtenemos que a partir de 89/55 el límite de la progresión dada tiende a 1.618 que es el otro valor absoluto de la ecuación $d = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

II.11.1 CONSTRUCCION DE BLOQUES TRIDIMENSIONALES.

Cabe señalar que tres términos consecutivos de la SUCESION DE FIBONACCI, pueden constituir la forma excelente para concebir bloques tridimensionales en los que la ARMONIA AUREA funciona en su plenitud, en arquitectura, escultura, o concepción de espacios plásticos.

Ejemplos:

55, 89 y 144, son tres números consecutivos de la SUCESION DE FIBONACCI, que representan un bloque tridimensional AUREO y ARMONICO, el cual puede tener una base de 55x89 unidades y una altura de 144 unidades.

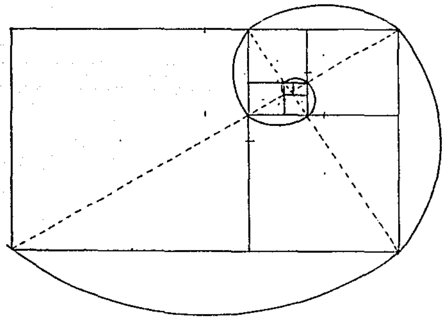


II.11.2 LA SUCESION DE FIBONACCI EN BOTANICA.

Aunque la SUCESION DE FIBONACCI no tiene mucha importancia en las matemáticas puras, se ha investigado mucho sobre ella, debido a que se presenta constantemente en la naturaleza y en el arte.

Por ejemplo, en la distribución de las hojas, las flores o las ramas, si nos fijamos en alguna hoja cercana a la base del tallo de alguna planta en que no haya más que una hoja en cada punto, y le asignamos el número cero, y contamos las hojas hacia arriba hasta que lleguemos a una que esté justamente encima de la primera. el numero que obtendremos será por lo general, alguno de los términos de la SUCESION DE FIBONACCI. Y si al contar hacia arriba contamos el número de veces que damos la vuelta al tallo, también se obtiene alguno de los términos de dicha SUCESION.

Si el número de vueltas es m, y el número de hojas es n, diremos que las hojas están colocadas en una espiral m/n.



Los NUMEROS DE FIBONACCI, además de mantener una curiosa relación con la botánica, también parecen ejercer una extraña influencia en el arte y la arquitectura, influencia que no es de ninguna manera azarosa, pues para los antiguos, componer era cumplir lo más eficientemente posible un propósito mágico, representar signos y símbolos, jerarquías de lo subjetivo, de lo espiritual y lo divino.

II.11.3 PROPIEDADES ARITMETICAS DE LA SUCESION DE FIBONACCI.

He aquí otra de las propiedades interesantes de esta SUCESION. Escojamos tres números, cualesquiera de la sucesión de Fibonacci, consecutivos, multipliquemos por sí mismo el número de en medio, y el primero por el tercero. Los resultados siempre diferirán en una unidad.

Por ejemplo:

Sabemos que la SUCESION DE FIBONACCI es

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...,

Sean 8, 13 y 21, multipliquemos por si mismo el número de enmedio, 13x13=169, luego multipliquemos 8x21=168, y 169 - 168= 1.

Escojamos tres, 55, 89, 144, multipliquemos el de enmedio por si mismo, 89x89= 7921, luego 55x144=7920, y 7921 - 7920= 1.

La anterior propiedad se cumple para todos los números de la SUCESION DE FIBONACCI.

Esta SUCESION fue mencionada formalmente por primera vez por Leonardo Pisano o Bigolle, llamado Leonardo Fibonacci, en el siglo XIII d. de C, cuando, después de numerosos viajes al mundo árabe, difundió en el mundo científico occidental, los principios de cálculo e introdujo la numeración arábiga. En la presentación de su sistema de numeración agregó una explicación de procedimientos algebraicos y aplicaciones a numeros problemas.

II.11.4 LA SUCESION DE FIBONACCI EN LA POESIA.

Desde el punto de vista de la poesia, la SUCESION DE FIBONACCI, también tiene atractivo. Se ha encontrado que VIRGILIO y otros poetas romanos escribieron poemas en los cuales la métrica, está definida en términos de los elementos de esta sucesión.

II.12. CONSTRUCCION DEL RECTANGULO AUREO POR EL METODO ARITMETICO.

Tomando dos nùmeros consecutivos de la SUCESION DE FIBONACCI, el primero como ancho y el segundo como largo, o viceversa, se pueden construir RECTANGULOS AUREOS.

Ejemplos:

El rectángulo que mide 21 cm. x 34 cm. que corresponde aproximadamente al formato de las hojas tamaño oficio es AUREO

El rectángulo que mide 3.4x 5.5 cm. es AUREO.

El rectángulo que mide 55x89 pulgadas es AUREO, etc.

Ahora bien, otra manera de hallar las medidas de los lados de cualquier RECTANGULO AUREO, cuando solamente se conoce una de ellas, es la siguiente:

Si el lado conocido es el MAYOR, este se divide entre el NUMERO DE ORO 1.618 y el resultado será el lado menor.

Supongamos que tenemos que construir un RECTANGULO DORADO cuya base es 80 cm. para encontrar la altura, dividimos

80 : 1.618 = 49.4

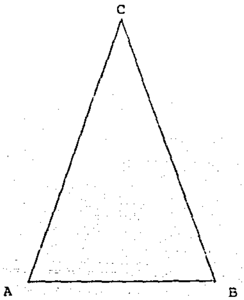
quiere decir que el rectángulo buscado tendrá una base de 80cm. por una altura de 49.4 cm.

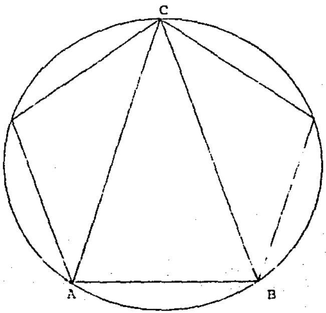
Cuando es la MENOR la media conocida, ésta se multiplica por el NUMERO DE ORO 1.618; el resultado sera la medida del lado MAYOR.

Supongamos que el lado MENOR es 50 cm. encontrar el lado MAYOR, 1.618 x 50 = 80.9 cm. es el resultado.

II.13. EL TRIANGULO SUBLIME.

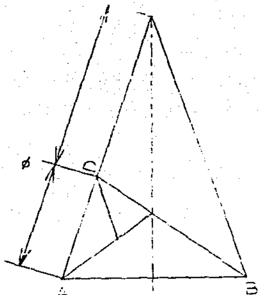
"Hay un TRIANGULO tan lleno de cualidades que se le ha dado el nombre de TRIANGULO SUBLIME". (II.14) Este tiene como base la PROPORCION AUREA MENOR, y en cada uno de sus lados la PROPORCION AUREA MAYOR.





Este TRIANGULO es consecuencia del PENTAGONO EQUILATERO, y se forma si se trazan dos líneas rectas que salgan del mismo vértice a los vértices opuestos.

Una propiedad importante es que la bisectriz del ángulo B, da el punto D, que divide al lado AC en PROPORCION AUREA; lo mismo hace la bisectriz del ángulo A. Así se puede seguir indefinidamente produciendo una serie dinámica de TRIANGULOS reciprocamente AUREOS.



La leyenda cuenta, que Hipócrates de Chios fue castigado por la secta pitagórica una vez que reveló el secreto de como construir el PENTAGONO EQUILATERO y EQUIANGULO a través del TRIANGULO SUBLIME.

La manera de hacerlo no es muy difícil. Supongamos que el triángulo ABC es un TRIANGULO SUBLIME.

1) Le marcamos a éste su altura, sea CD dicha recta.

2) Encontramos en CD el PUNTO AUREO F.

3) Por F, trazamos la perpendicular a CD. A los puntos donde se corta ésta, con los lados del triángulo les ponemos G y H respectivamente.

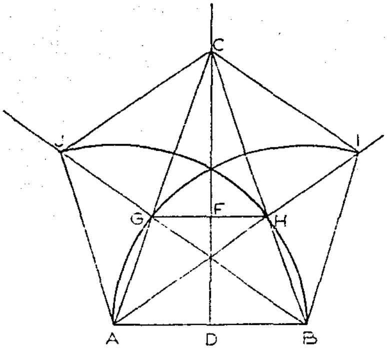
4) Del ángulo en A, trazamos una recta oblicua que pase por H, y del ángulo en B, otra que pase por G.

5) Con el compás apoyado en A y con abertura AB, trazamos un arco de círculo, al punto donde se corta dicho arco con la recta AH le llamamos I.

6) Con el compás apoyado en B, y con distancia BA, trazamos otro arco de círculo, a donde se corte éste, con la recta BG le ponemos J.

7) Unimos B con I, A con J, J con C y C con I.

8) El pentágono ABICJ es el PENTAGONO buscado.



O bien, se puede construir el pentágono dado el TRIANGULO SUBLIME ABC y la recta GH que corta a la altura en el PUNTO AUREO F, de la siguiente manera:

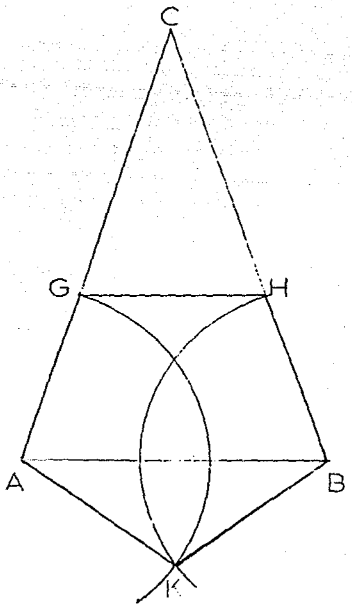
1) Con centro en B, y distancia BH, se traza un arco de círculo.

2) Con centro A y distancia AG que es la misma distancia BH y CH, se traza un arco de círculo.

3) A la intersección de los dos arcos de círculo le ponemos la letra k.

4) Unimos B con K y A con K.

5) El pentágono GHBKA es el PENTAGONO buscado.



Otra de las propiedades interesantes de este TRIANGULO, es aquella mencionada por Euclides (libro IV, Prop 11).
Para construir el PENTAGONO EQUIANGULO Y EQUILATERO es necesario construir el triángulo isosceles ABC que tenga cada uno de sus ángulos en A y en B del doble del ángulo en C.

II.13.1 CONSTRUCCION DEL TRIANGULO SUBLIME

Dado el segmento de recta AB dividido en SECCION AUREA en el punto Ø, contruir el triángulo isosceles que tenga como lado MAYOR la distancia AB y como lado MENOR Ø B.

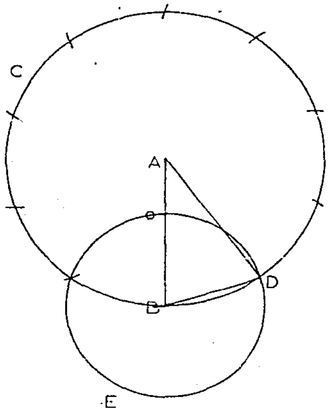
1) Con centro en A y radio AB se traza la circunferencia ABC.

2) Con centro en B y radio Ø B se traza la circunferencia B Ø E.

3) Tomanos cualquiera de los puntos donde se intersectaron las circunferencias ABC Y B Ø E y le llamamos D.

4) Uno B con D y A con D.

5) Digo que el triángulo ABD es sublime (A. II)



Observese que la distancia BD es la décima parte de la circunferencia ABC

II.13.2. EJEMPLOS DEL USO DEL TRIANGULO SUBLIME EN LA COMPOSICION PLASTICA.

El Greco. CRISTO CRUCIFICADO, LA VIRGEN, LA MAGDALENA, SAN JUAN EVANGELISTA Y ANGELES. 312x169 cm. (1590-1600). (El Prado, Madrid).

El Greco. EL ENTIERRO DEL CONDE DE ORGAZ. 460x360 cm.
(1586-1588). (Iglesia de Santo Tome, Toledo).

II.14 ESPIRALES AUREAS.

II.14.1. DEFINICION DE RITMO.

Según la definición más elemental de RITMO es una sucesión armónica de elementos lineales y formativos, producida al cambiar acertadamente, pausas, acentos, intencidades, comas, silabas, o notas musicales en repetición ordenada o por una sucesión regular organizada de elementos mayores y menores.

En el ritmo coexisten dos elementos fundamentales y opuestos, la unidad y la variedad, la primera relaciona las partes con el todo, mientras que la variedad es la cualidad de alternación, animación y libertad de las partes de una obra. Lo unitario es pasivo, no vibra, es una imagen muerta, fria y sin alma, la variedad en cambio es una imagen viva con caracter y espiritu que ha de someterse a la unicidad para evitar una anarquía desordenada aún cuando de la sensación de romper con ella. Unicidad y variedad bien organizadas producen la impresión más bella de ritmo y armonía en su conjunto.

En pintura, escultura y grabado es indispensable que el ritmo del color y la forma marchen al unisono.

Los ritmos dinámicos, rectos o curvilineos, observados en la naturaleza, o bien, los deducidos de ella, como los creados en geometria, son de tipo de desarrollo creciente, ARMONICO y AUREO. Analizados y convertidos en material plástico, producen sugestiones aprovechables y de gran eficacia en la composición.

II.14.2. ESPIRALES AUREAS EN EL RECTANGULO AUREO.

Tenemos el caso de las ESPIRALES AUREAS, realizadas dentro de los RECTANGULOS AUREOS y compuestas con arcos de círculo, hechos dentro y fuera de cada cuadrado base sucesivo, cada parte de las espirales está en SECCION AUREA RECIPROCA CON LA ANTERIOR O POSTERIOR. Para la construcción de la espiral que se encuentra fuera del RECTANGULO AUREO se tienen las siguientes instrucciones.

Dado el RECTANGULO AUREO ABCD dividido en media y extrema razón:

1) Se apoya el compás en A y se traza un arco arriba y abajo del rectángulo con abertura AB.

2) Se apoya el compás en B y se trazan otros arcos arriba y abajo con la misma medida del compás que cortara a los arcos trazados en los puntos que llamaremos E y E'.

3) Unimos E y E' que será perpendicular al segmento AB.

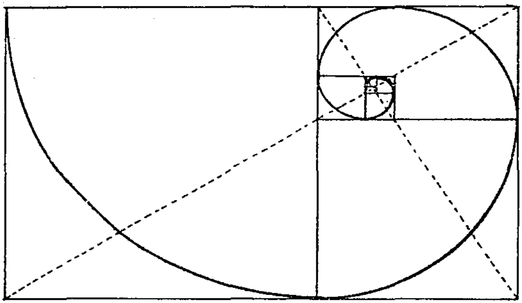
4) La perpendicular EE' cruza al segmanto CD en un punto que llamaremos H

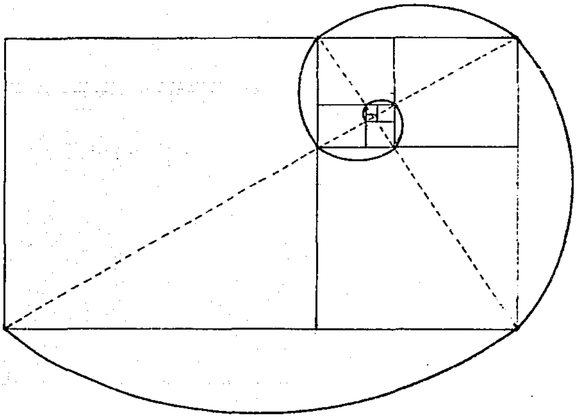
5) Se apoya el compás en H, y se abre con una medida de HA y se traza el primer arco de nuestra espiral de A a B.

6) Para encontrar el siguiente arco de la espiral se traza la perpendicular a DB y se sigue el procedimiento anterior.

Para realizar la ESPIRAL que va FUERA del RECTANGULO se toma como base la medida mayor de éste.

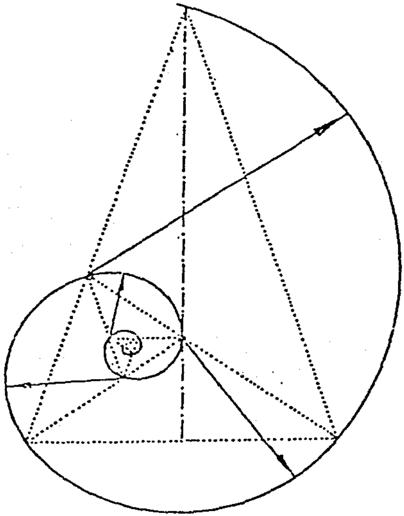
Para trazar la ESPIRAL que va DENTRO del RECTANGULO AUREO se tomará como base la medida de los cuadros que van decreciendo.





II.14. 3. LA ESPIRAL AUREA EN EL TRIANGULO SUBLIME.

En la trama de lados y bisectrices del TRIANGULO SUBLIME, se desarrolla otro tipo de ESPIRAL AUREA dinámica. Cada sector de arco sucesivo tiene su centro en el PUNTO AUREO del lado opuesto del triángulo, los que también están en PROPORCIONES AUREAS reciprocas, lo mismo que los espacios curvos resultantes.



II.14.4. ESPIRAL ONDEADA EN ø.

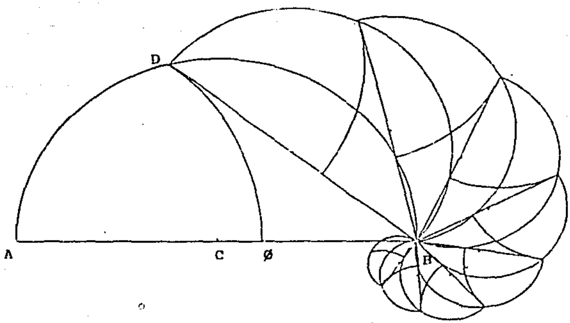
Otro ejemplo de RITMO DINAMICO es la ESPIRAL ONDEADA en ø
Esta se traza de la siguiente manera:

1) Con diámetro AB se dibuja un semicirculo.

2) Se encuentra ø que es el PUNTO AUREO de AB.

3) Con distancia A ø se lleva con arco la ø hasta D.

4) Se une D con B; de esta forma se produce otro diAmetro menor en la sucesión decreciente,sobre el cual se repite la operación, con lo que se obtiene esta espiral de ritmo aureo y dinámico.



II.14.5. ESPIRAL DE RITMO DINAMICO.

Otro ejemplo de RITMO DINAMICO es esta otra ESPIRAL ONDEADA. Esta se traza de la siguiente manera:

1) Dado un segmento AB se marca el punto medio C

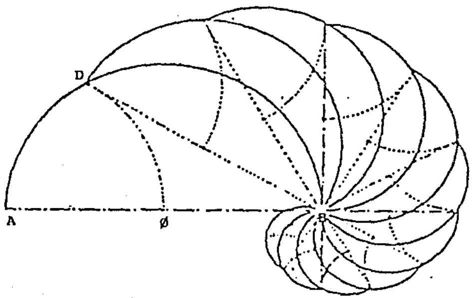
2) Se apoya el compás en A y con la medida AC se traza un arco que corta a la semicircunferencia en un punto que llamaremos D

3) Unimos D con B

4) Se encuentra el PUNTO AUREO de AB que llamaremos Ø

5) Se levanta una perpendicualar con Ø que corta a la linea DB en un punto que resulta ser la mitad de DB

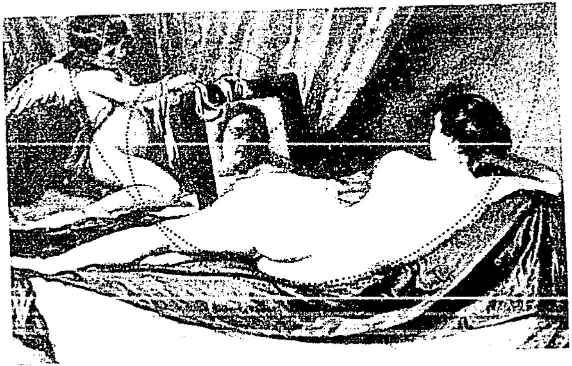
6) Se repite la operación que se hizo en AB pero ahora con DB asi sucesivamente, con los que se logrará formar LA ESPIRAL DE RITMO AUREO DINAMICO.



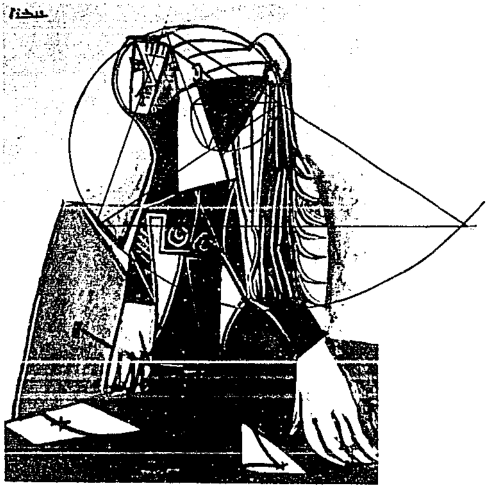
II.14.5. EJEMPLOS DEL USO DE LAS ESPIRALES AUREAS EN LA COMPOSICION PLASTICA.

Y

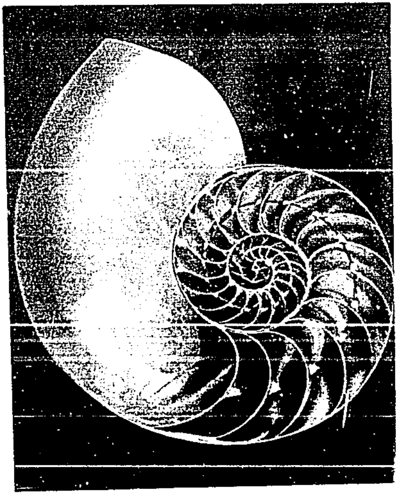
EN LA NATURALEZA.



Diego Velázquez. LA VENUS DEL ESPEJO. 123 x 177 cm. (S.XVII)
(Galería Nacional de Londres).



Pablo Picasso. Sylvette. 131 x 97 cm. (1954).
Instituto de Arte de Chicago.



Concha de Caracol Nautilus en forma de espiral armónica.

FUENTES DE INFORMACION.

Capítulo II

(II.1) Pablo Tosto. LA COMPOSICION AUREA EN LAS ARTES PLASTICAS. 2a.ed., edit. Hachette S. A. Buenos Aires, 1969, p. 10

(II.2) Alberto Durero. INSTITUCIONES DE GEOMETRIA. edit. UNAM. México, 1979 p. 81

(II.3) Pablo Tosto. Op.cit. p. 30

(II.4) Matila Ghyka. EL NUMERO DE ORO. LOS RITMOS. vol II, 2a ed., edit. Poseidón, Barcelona, 1978, p. 82

(II.5) Pablo Tosto. op. cit. p. 35

(II.6) Luca Pacioli. LA DIVINA PROPORCION. edit. Losada, Buenos Aires. p. 80

(II.7) Euclides. LES OEUVRES D'EUCLID. 9a ed., edit. Albert Blanchard, 1966, Paris, Libro IV, proposición 11, p.105

(II.8) Herbert Westren Turbul "Los grandes Matemáticos" p.14 en SIGMA. EL MUNDO DE LAS MATEMATICAS Vol. I Edit. Grijalvo, México, 1983

(II.9) Ibid. p. 15

(II.10) George D. Birkhoff. MEDIDA ESTETICA. edit. Rosario, 1945, Argentina p.32

(II.11) Tom M. Apostol. Calculus. INTRODUCION CON VECTORES Y GEOMETRIA ANALITICA Vol. I, edit. Reverté, S. A. Barcelona 1965, p. 462

(II.12) Ibid 463

(II.13) Adler Irving. MATEMATICAS. LA HISTORIA DE LOS NUMEROS, LOS SIMBOLOS Y EL ESPACIO. edit. Novaro, México, 1967, p. 17

(II.14) Santos Balmori. AUREA MESURA. edit UNAM, México 1978, p. 59

III.- LOS CINCO CUERPOS PLATONICOS

O

POLIEDROS REGULARES.

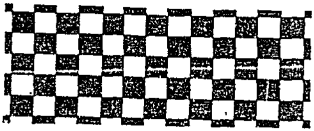
III. 1. IMPORTANCIA DE LA GEOMETRIA SOLIDA.

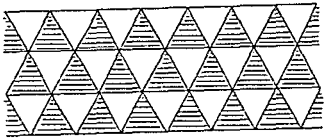
Los CANONES ARMONICOS y la mayoría de los trazos que se examinaron en el capítulo anterior son de dos dimensiones, cada uno de los cuales representa una construcción o un conjunto de construcciones geométricas imaginadas o situadas en una superficie plana.

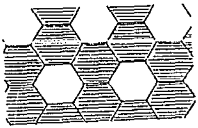
En arquitectura y escultura se trata indiscutiblemente de componer volúmenes, o sea de concebir o pensar en tres dimensiones, "es evidente que el creador de volúmenes no debe olvidar el manejo de las proporciones lineales deducidas de la solución ϕ " (III.1)

La importancia que Platón da a la meditación sobre la GEOMETRIA DEL ESPACIO aparece en el curioso pasaje de la REPUBLICA, en donde declara que el Estado cuyos jefes supieran imponer en las escuelas el estudio profundo de la GEOMETRIA DE LOS SOLIDOS adquiriría una señalada preeminencia sobre todos los demás. El propio Platón meditó (como tal vez nadie lo ha hecho después), en la aplicación del concepto de proporción a los CUERPOS SOLIDOS.

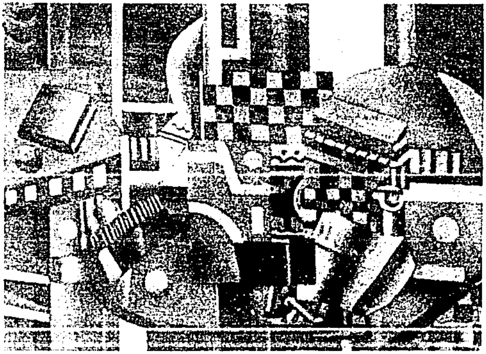
Es notable que en la geometría del espacio sólo existan CINCO FIGURAS REGULARES que son: el TETRAEDRO, el HEXAEDRO, el OCTAEDRO, el DODECAEDRO y el ICOSAEDRO, mientras que en el plano el número de asociaciones de figuras regulares que llenan el espacio es muy limitado, pues solamente el cuadrado, el triángulo equilatero y el hexágono cumplen con esta proposición.





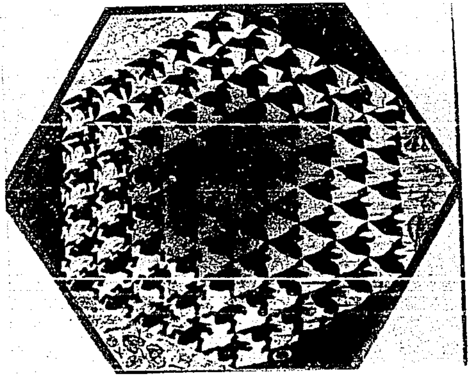


Los tres cuerpos geométricos regulares más simples, el TETRAEDRO, el CUBO y el OCTAEDRO fueron conocidos por los egipcios. Pero es a Pitágoras a quien se le atribuye el descubrimiento de los dos restantes el DODECAEDRO con sus doce caras pentagonales y el ICOSAEDRO.



Fernand Léger. Naturaleza Muerta. (1918). Lienzo al óleo.

George Braque. El Velador. 180x73 cm. (1928)
Museo de Arte Moderno, Nueva York.



Mauritus C. Escher. Verbum. 33x38.5 cm. (1942).
Litografía.

III.2. VOLUMENES O NUMEROS SOLIDOS ORTOGONALES.

Platón especialmente se ocupó con gran interés del estudio de los CUERPOS SOLIDOS, es decir, de los números de la forma $a \times b \times c$ (largo por ancho por profundidad). Pudiendo representar con ellos cualquier tipo de paralelepípedo.

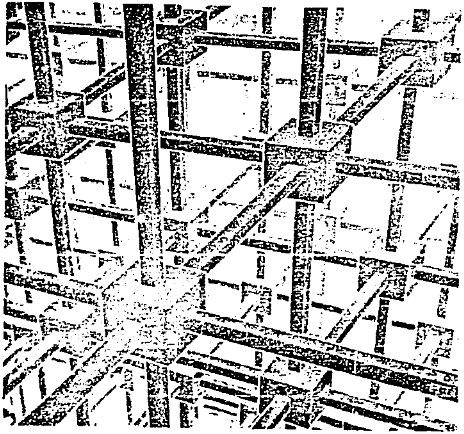
Platón y sus sucesores daban nombres especiales a las diferentes formas de volúmenes o NUMEROS SOLIDOS ORTOGONALES. Así además de los cubos axaxa, había los altares axbxc, donde las tres dimensiones son diferentes, los ladrillos axaxb, con a mayor que b y las vigas axaxb con a menor que b.

Un ejemplo de estos volúmenes se analizó ya, en el capítulo anterior, cuando se trataba de construir bloques tridimensionales en los que la ARMONIA AUREA funcionaba en toda su plenitud.

Se recordará que dichos bloques se construyen al multiplicar tres números consecutivos de la SUCESION DE FIBONACCI, es decir, a_{n-1} a_n y a_{n+1} son tres números consecutivos de la SUCESION DE FIBONACCI, al multiplicar $a_{n-1} \times a_n \times a_{n+1}$, se obtiene un CUERPO SOLIDO en ARMONIA AUREA.

Otra manera de construir VOLUMENES AUREOS es la siguiente:

Supongamos que se conoce a = altura, para encontrar b el largo, y c el ancho, se multiplica $a \times 1.618 = b$ y $b \times 1.618 = c$, de esta forma se obtiene un CUERPO SOLIDO ARMONICAMENTE AUREO de la forma $a \times b \times c$, esta manera de concebir los CUERPOS SOLIDOS era bien conocida por los griegos, ejemplos de esto se notan claramente en las construcciones de sus templos y altares.



Mauritus C. Escher. División del Espacio Cúbico.
Litografía 27x26.5 cm. (1952).

III.3. POLIEDROS REGULARES.

Un POLIEDRO es un sólido geométrico constituido por un cierto número de caras, aristas y vértices. En un POLIEDRO REGULAR, las caras son porciones planas limitadas por polígonos regulares que tienen una misma forma y tamaño. Las caras se unen dos a dos en segmentos de línea llamados ARISTAS, y las aristas se unen en puntos llamados VERTICES.

En todos los POLIEDROS REGULARES sucede el hecho de que una transformación rígida de dicho poliedro en si mismo o puede mandar un vértice en cualquier otro vértice o una cara en cualquier otra cara.

Los POLIEDROS REGULARES toman su nombre del número de caras que tienen:

1) El TETRAEDRO o PIRAMIDE TRIANGULAR tiene 4 caras.

2) El HEXAEDRO o CUBO tiene 6 caras.

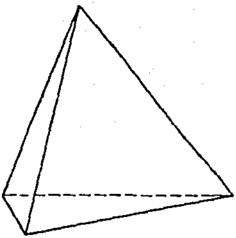
3) El OCTAEDRO tiene 8 caras.

4) El DODECAEDRO tiene 12 caras.

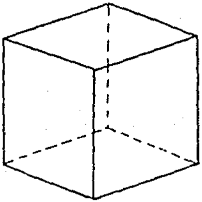
5) El ICOSAEDRO tiene 20 caras.

Los griegos demostraron que existen tan sólo CINCO POLIEDROS REGULARES. (fig. III.1) Este resultado es asombroso cuando consideramos que hay poligonos regulares de cualquier número de lados. Esto es: EL NUMERO DE POLIGINOS REGULARES ES INFINITO MIENTRAS QUE EL NUMERO DE POLIEDROS REGULARES ES FINITO.

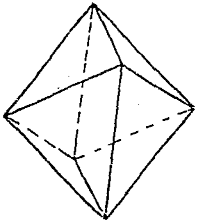
Cada uno de estos, es inscriptible en una misma esfera. Se les llama también CUERPOS PLATONICOS por el interes que Platón les prestó en su cosmogonía. Dichos cuerpos tienen entre si, intimas relaciones extructurales.



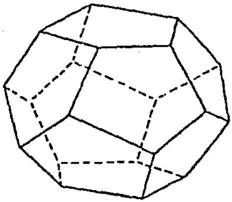
Tetraedro (pirámide triangular)



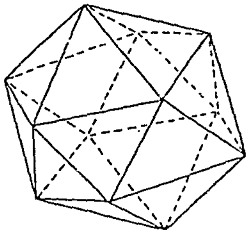
Hexaedro (cubo)



Octaedro

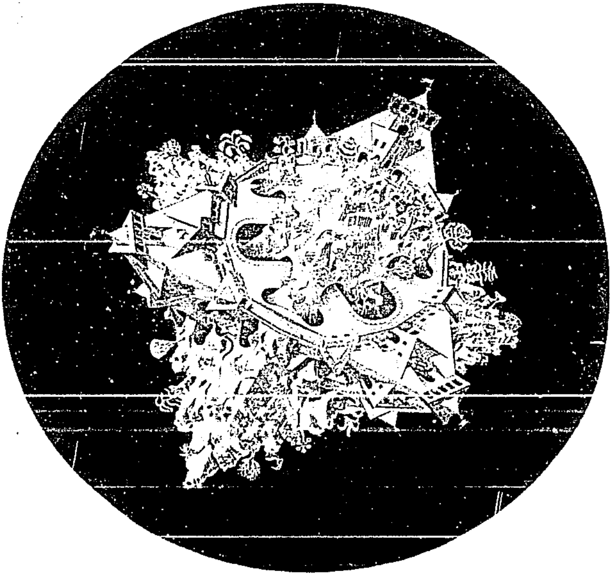


Dodecaedro



Icosaedro

Los cinco poliedros regulares



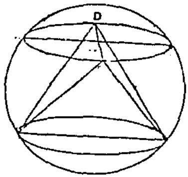
Mauritus C. Escher. Planetoide Doble. diam. 37.5 cm. (1949).

III.4. PROPIEDADES ESTRUCTURALES DE LOS POLIEDROS REGULARES.

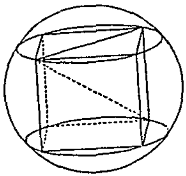
1) No puede haber más de cinco CUERPOS REGULARES.

2) Visto y entendido cuales y cuantos son los POLIEDROS REGULARES, todos ellos se circunscriben exactamente por la misma ESFERA y dicha esfera puede a su vez inscribirse en cada uno de ellos. (fig.III.3, III.4, III.5, III.6, III.7)

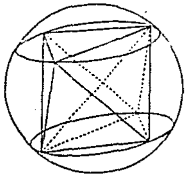
3) Al construir el TETRAEDRO dentro de la ESFERA, se cumple que el cuadrado del diámetro de la esfera contiene al cuadrado del lado de la pirámide una vez y media.



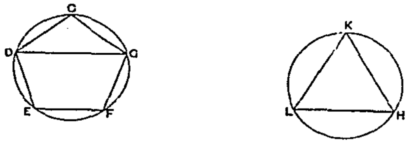
4) Al construir el CUBO comprendido en la ESFERA, se prueba que el cuadrado del diámetro de la esfera es tres veces el cuadrado del lado del cubo.



5) Al construir el OCTAEDRO comprendido en la ESFERA, se tiene que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del cuadrado del lado del octaedro.



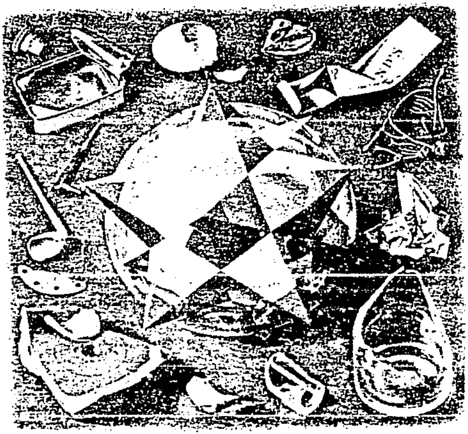
6) Un mismo circulo comprende a un pentágono del DODECAEDRO, y a un triángulo del ICOSAEDRO inscritos en la misma ESFERA.



III.4.1. COLOCACION DE LOS CINCO POLIEDROS REGULARES EN LA ESFERA.

Dada una esfera podemos suponer colocados los cinco cuerpos regulares, de la siguiente manera. Si sobre la superficie de la esfera, marcamos o nos imaginamos cuatro puntos equidistantes uno de otro en todos los sentidos, y los unimos con seis líneas rectas, que necesariamente pasarán por dentro de la esfera, se formará en ella, el TETRAEDRO pues, al cortar la esfera mediante superficies planas, siguiendo dichas líneas en todos los sentidos, queda al descubierto justamente este cuerpo. De igual manera, si en la superficie esférica se marcan ocho puntos equidistantes entre sí, y se los une con doce lineas rectas, se habrá colocado imaginariamente en ella, el segundo cuerpo regular, HEXAEDRO o CUBO, es decir, LA FIGURA DEL DIABOLICO INSTRUMENTO QUE SE LLAMA DADO.

Si en esa superficie se marcan seis puntos , también equidistantes entre sí como se ha dicho, y se unen con doce líneas rectas, se habrá construido exactamente en la esfera el tercer cuerpo regular, llamado OCTAEDRO. De manera semejante se puede construir, en dicha esfera el ICOSAEDRO. Trazando doce puntos equidistantes y uniéndolos, a través de treinta lineas. Ahora bien, si se marcan de manera indicada veinte puntos y se unen también con treinta rectas, se formará en dicha esfera el quinto y nobilísimo cuerpo regular llamado DODECAEDRO, es decir, el cuerpo de doce caras pentagonales; Así están colocados imaginariamente en la esfera todos los cuerpos regulares, de manera que sus puntos angulares se encuentra cituados en la superficie esférica, y si uno de sus ángulos toca a esta superficie, también la tocaran los demás.



Mauritus C. Escher. Orden y Caos. Litografía.
28x28 cm. (1950).

III.4.2. PROYECCIONES ISOMETRICAS DE LOS POLIEDROS REGULARES.

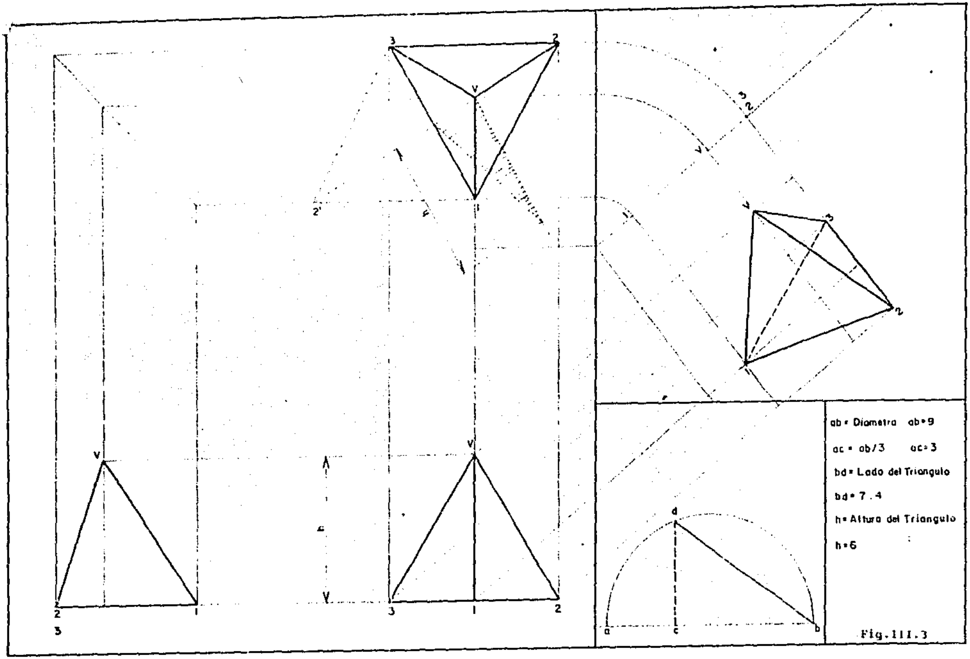

ab = Diametro ab = 9
ac = ab/3 ac = 3
bd = Lado del Triangulo
bd = 7.4
h = Altura del Triangulo
h = 6

Fig.III.3

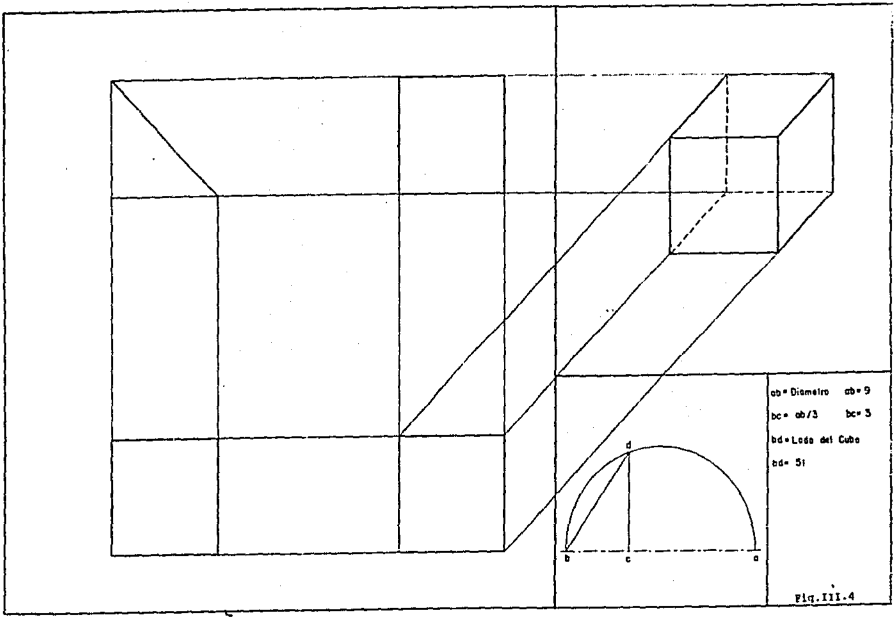


Fig.III.4

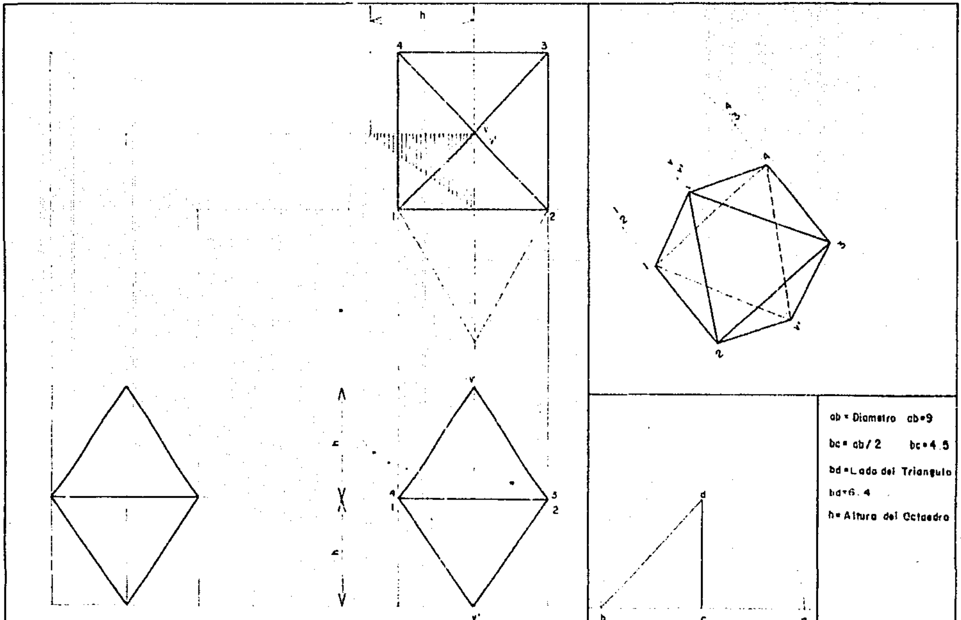

h
4
3
1
2
v
v'
ab = Diametro ab=9
bc= ab/2 bc=4.5
bd = Lado del Triangulo
bd=6.4
h= Altura del Octaedro
d
b
c
a

Fig.III.5

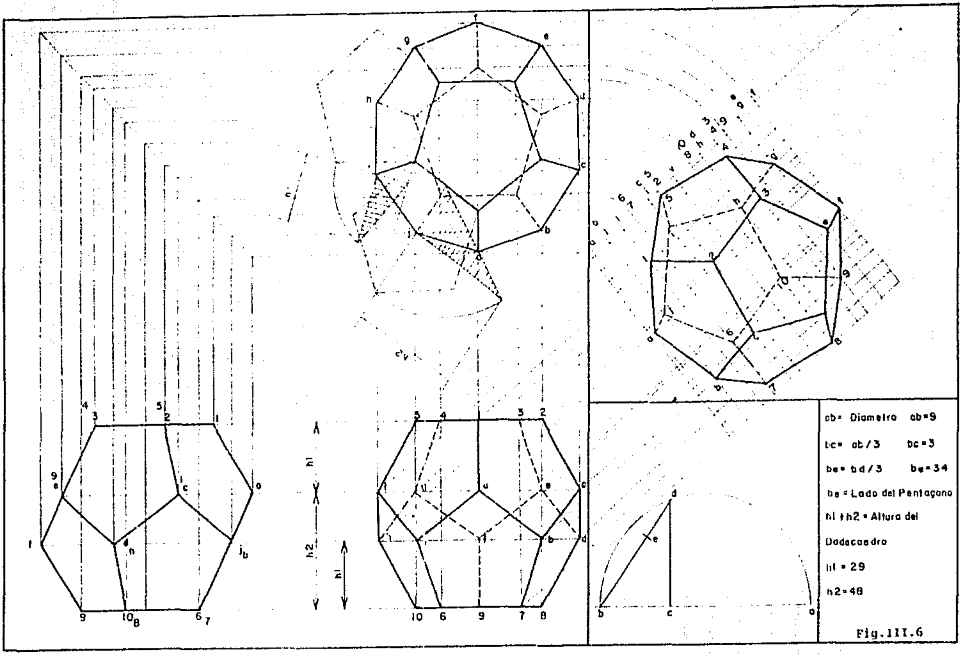

ab= Diametro ab=9
bc= ab/3 bc=3
be= bd/3 be=34
be = Lado del Pentagono
h1 + h2 = Altura del Dodecaedro
h1 = 29
h2=48

Fig.III.6

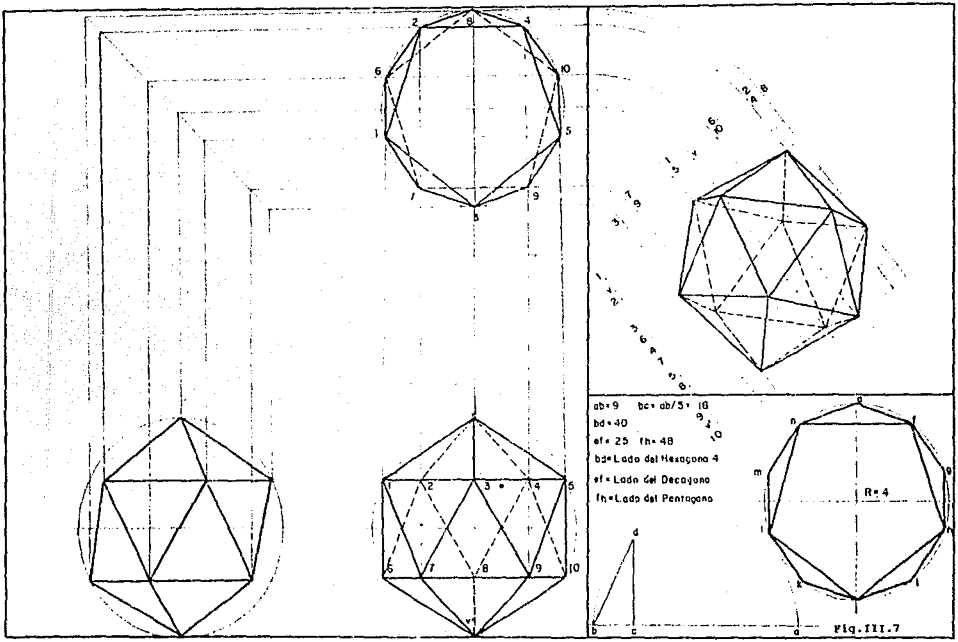

ab=9 bc=ab/5= 18
bd=40
ef= 25 fh= 48
bd=Lado del Hexagono 4
ef=Lado del Decagono
fh=Lado del Pentagono
R= 4

Fig.III.7

III.4.3. INSCRIPCION DE LOS POLIEDROS REGULARES UNOS EN OTROS

INCLUSION DEL TETRAEDRO EN EL CUBO.

En cada una de las seis superficies cuadradas se trazan seis diagonales las cuales formarán al tetraedro.

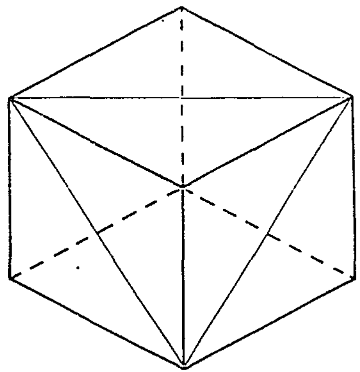


Fig.III.8

INCLUSION DEL OCTAEDRO EN EL CUBO.

Se forma en el cubo un tetraedro auxiliar al cual se le dividirá en partes iguales cada una de sus aristas, uniremos esos puntos con líneas rectas formando el octaedro.

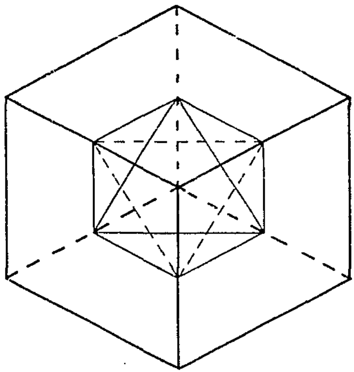


Fig.III.9

INCLUSION DEL HEXAEDRO EN EL OCTAEDRO.

Se hallará el centro de cada una de sus caras tri_angulares,(usando las me_diatrices) estos ocho cen_tros se unirán mediante doce líneas rectas forman_do el hexaedro.

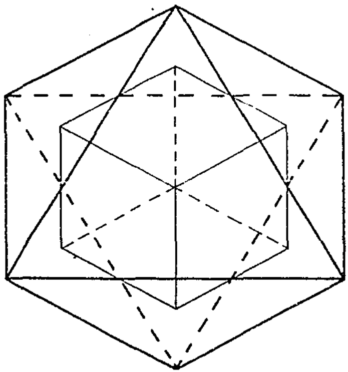


Fig.III.10

INCLUSION DEL TETRAEDRO EN EL OCTAEDRO.

Se forma en el octaedro un cubo auxiliar para po_der construir en el un tetraedro.

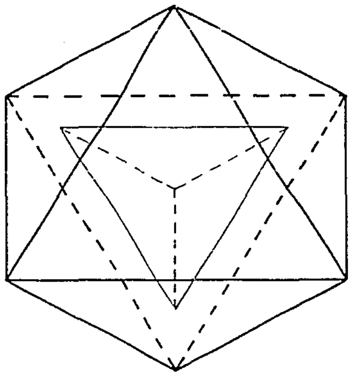


Fig.III.11

INCLUSION DEL OCTAEDRO EN EL TETRAEDRO.

Se divide en partes iguales cada una de las aristas uniedo los puntos con doce líneas rectas.

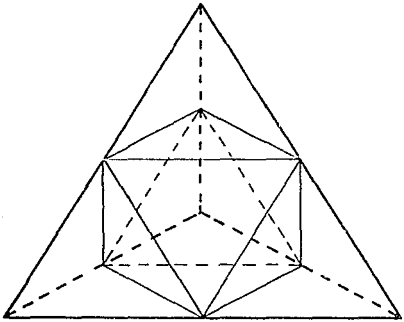


Fig.III.12

INCLUSION DEL CUBO EN EL DODECAEDRO.

Si a cada uno de sus doce pentágonos se le trazan doce cuerdas, se formaran seis superficies cuadradas.

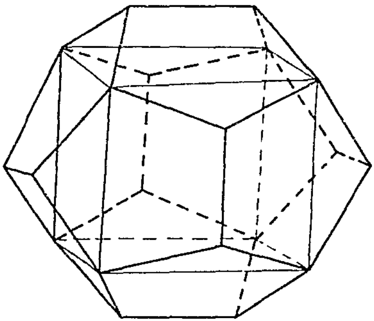


Fig.III.13

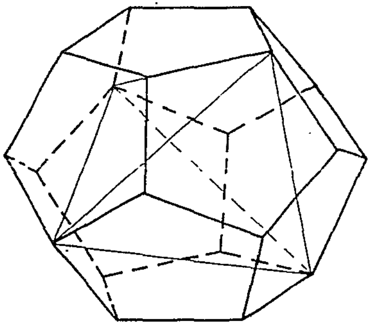


Fig.III.14

INCLUSION DEL TETRAEDRO EN EL DODECAEDRO.

Se forma en el dodecaedro un cubo y en cada superficie se trazaran sus diagonales formando el tetraedro.

INCLUSION DEL OCTAEDRO EN EL DODECAEDRO.

Si en el dodecaedro se traza un cubo auxiliar y se divide en partes iguales los seis lados del dodecaedro que se encuentran opuestos a las seis superficies del cubo y estas se unen con doce líneas rectas, se formara el octaedro.

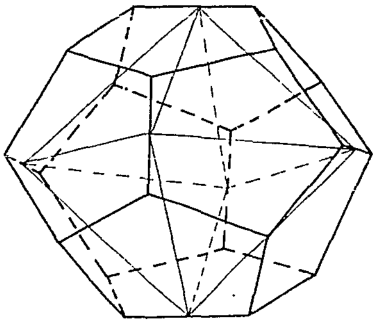


Fig.III.15

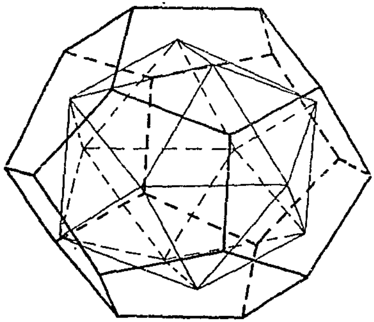


Fig.III.16

INCLUSION DEL ICOSAEDRO EN EL DODECAEDRO.

Se hallará el centro de los doce pentágonos (usando las mediatrices) y se unirán entre sí con treinta líneas, formando veinte triángulos.

INCLUSION DEL DODECAEDRO EN EL ICOSAEDRO.

Hallece el centro de cada una de sus bases triangulares, (usando las mediatrices) y tales centros se unirán luego entre sí con treinta líneas rectas, de manera que se forman doce pentágonos.

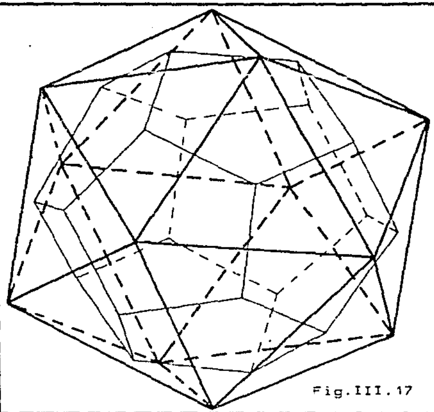


Fig.III.17

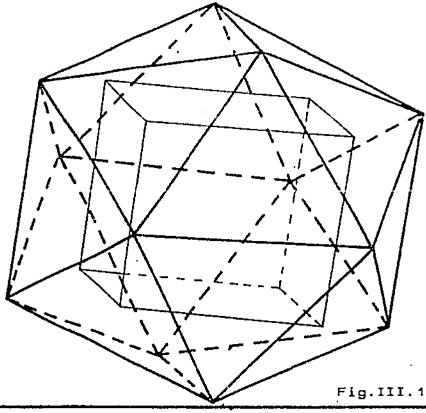


Fig.III.18

INCLUSION DEL CUBO EN EL ICOSAEDRO.

En el icosaedro se construye un dodecaedro auxiliar y en este se construye un cubo.

INCLUSION DEL TETRAEDRO EN EL ICOSAEDRO.

En el icosaedro se formará un dodecaedro y en él un cubo que serán trazos auxiliares para poder trazar dentro del cubo el tetraedro.

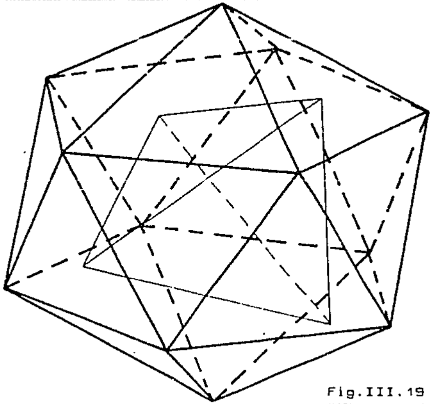
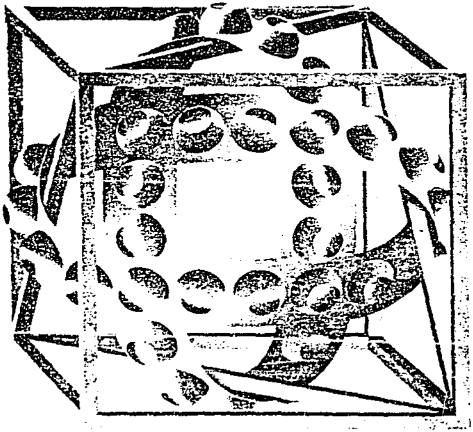


Fig.III.19



Mauritus C. Escher. Cubo con cinta mágica.
31 x 31 cm. (1957).

III.5 LA SECCION AUREA EN LOS POLIEDROS REGULARES

" Cuando empezó Dios, a crear el Universo, comenzó por hacerlo de fuego y tierra. Pero es imposible combinar dos cosas sin una tercera: es preciso que haya entre ellas un lazo que las una, y ninguno mejor que él que, con el mismo y con las cosas que une hace un sólo y mismo todo. Y la naturaleza de la proporción es tal, que logra perfectamente este objetivo" (III.2)

Platón como nadie, meditó en la aplicación del concepto de la proporción tanto aplicada a la geometría plana, así como a los cuerpos sólidos y como el DODECAEDRO tiene doce caras pentagonales y según él es receptáculo de todos los demás poliedros regulares, el estudio de la SECCION AUREA en los CINCO CUERPOS PLATONICOS se hará en base a este poliedro.

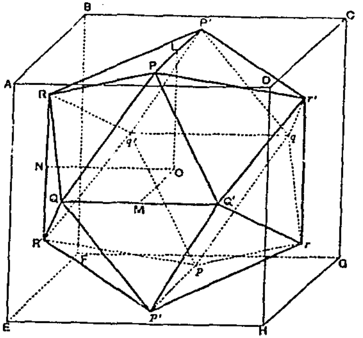
Ya analizamos en el capítulo anterior muchas de las PROPIEDADES AUREAS que se encuentran en el PENTAGONO REGULAR y sabemos que tanto el DODECAEDRO como el ICOSAEDRO REGULAR son las aplicaciones en el espacio del pentágono regular, luego entonces, la SECCION AUREA es una razón esencial que gobierna tanto las proporciones lineales, planas o sólidas del interior de estos dos cuerpos como las proporciones que enlazan entre sí al DODECAEDRO y al ICOSAEDRO inscritos en la esfera o en el mismo CUBO.

Observemos pues, de la sección anterior (Sec. III.4.3) que los puntos medios de las seis aristas de un TETRAEDRO REGULAR son los vértices de un OCTAEDRO REGULAR.

De la misma forma podemos examinar algunas de las propiedades que dan como resultado del análisis de esa sección y encontrar algunas proposiciones interesantes por ejemplo:

Los veinte vertices de un DODECAEDRO son también los vértices de cinco TETRAEDROS regulares con el centro de la figura común en el DODECAEDRO.

Los doce vértices de un ICOSAEDRO están sobre la superficie del CUBO.



Ahora bien, recordemos que de esto se deduce que la razón entre la arista del CUBO y la del ICOSAEDRO inscrito es 1.618 que es uno de los valores de ø

Por lo que $\frac{ac}{aI} = ø$ donde a = arista

c = CUBO

I = ICOSAEDRO

Si se prolongan todas las aristas o (caras) de un DODECAEDRO los doce puntos de intersección son los 12 vértices de un ICOSAEDRO, luego la razón entre la arista del ICOSAEDRO envolvente y la del DODECAEDRO generador es $ø^2$.

Por tanto $\frac{a\ Ie}{a\ Dg} = \emptyset^2$

donde Ie = ICOSAEDRO ENVOLVENTE

Dg = DODECAEDRO GENERADOR

Si se prolongan todas las caras de un ICOSAEDRO, se obtienen los veinte vértices de un DODECAEDRO luego

$$\frac{a\ De}{a\ Ig} = \emptyset$$

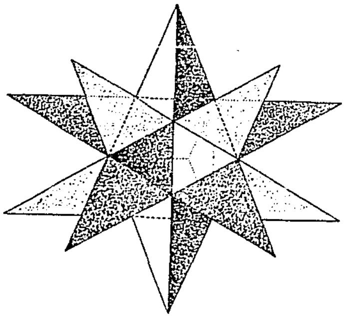
Estos cinco poliedros se dividen en: PRIMARIOS el CUBO, el TETRAEDRO y DODECAEDRO), porque tienen un primer origen y el ángulo más simple, el triedro: y en SECUNDARIOS (el OCTAEDRO y el ICOSAEDRO), que tienen su origen en las primarias y un ángulo compuesto de más líneas. Entre las figura primarias, la primera es el CUBO, la segunda el TETRAEDRO y la tercera el DODECAEDRO.

"... En esas figuras aparece la primera de las oposiciones metafísicas, aquella entre lo semejante y lo otro, o diferente. La semejanza se observa en el CUBO, y la diferencia en las dos figuras restantes; y entre estas figuras existe también la primera contrariedad geométrica, es decir, aquella entre lo mayor y lo menor. Porque el CUBO es la cosa misma, el TETRAEDRO es menor que el CUBO, y el DODECAEDRO es mayor que el CUBO..." (II1.3)

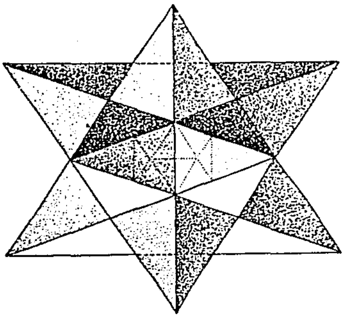
De lo que se deduce que mientras en el plano el triángulo, el cuadrado, y el pentágono son MORFOLOGICAMENTE IRREDUCIBLES, en el espacio se puede pasar del DODECAEDRO o del ICOSAEDRO al CUBO, y del CUBO al TETRAEDRO.

Por lo tanto " Mientras que en el plano existen infinitos poligonos regulares convexos y estrellados, en el espacio de tres dimenciones sólo hay CINCO CUERPOS REGULARES CONVEXOS y dos POLIEDROS REGULARES ESTRELLADOS CONTINUOS, que son, precisamente, los dos DODECAEDROS ESTRELLADOS." (III.4) que vamos a tratar a continuación.

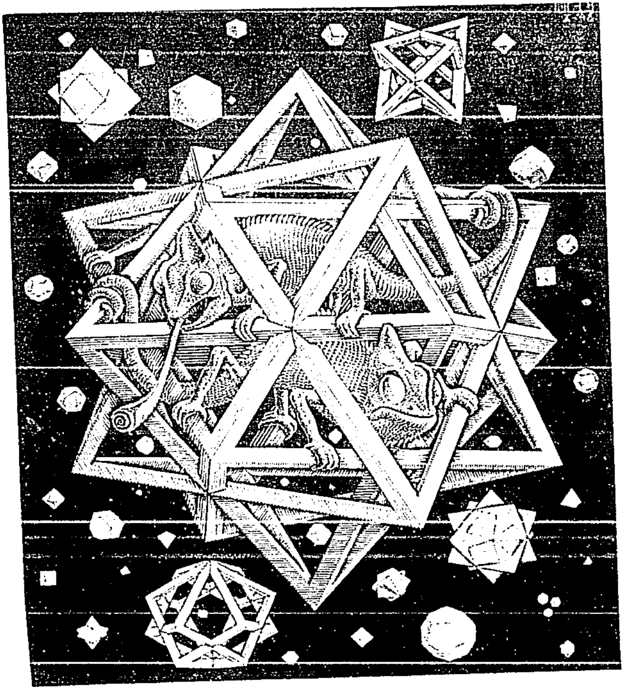
"El DODECAEDRO ESTRELLADO de primer tipo se obtiene prolongando las caras (o las aristas) de un ICOSAEDRO NUCLEO: Las veinte puntas de la estrella sólida resultante coinciden con los vértices de un DODECAEDRO CONVEXO ENVOLVENTE.



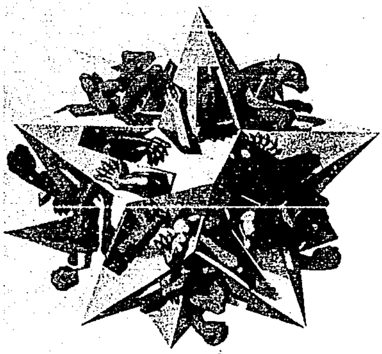
"El DODECAEDRO ESTRELLADO del segundo tipo se obtiene prolongando las caras (o las aristas) de un DODECAEDRO NUCLEO: las doce puntas de la estrella resultante coinciden con los vértices de un ICOSAEDRO.



Esta estrella de segundo tipo inspira el nombre de ICOSAEDRO ESTRELLADO, pero la denominación común de DODECAEDRO ESTRELLADO para los dos cuerpos se justifica por el hecho de que cada uno de ellos está constituido por la convinación, el ajuste, de doce caras planas (de los pentagramas) que se cortan en el espacio." (III.5)



Mauritus C. Escher. Entrellas. 32x26 cm. (1948).



Mauritus C. Escher. Gravitación. 30x30 cm. (1952).

III.6. CONSTRUCCION DE LOS POLIEDROS REGULARES A PARTIR DE PATRONES PLANOS.

Un problema interesante es la construcción de los POLIEDROS REGULARES a partir de patrones planos, con los que se pueden hacer modelos para los CINCO POLIEDROS.

III.6.1. TETRAEDRO O PIRAMIDE EQUILATERA.

El TETRAEDRO o PIRAMIDE EQUILATERA contiene 4 superficies triangulares iguales y equiángulas, es el más simple de los POLIEDROS: tiene 4 vértices, 6 aristas distribuidas en 3 pares de rectas que se cruzan en en el espacio.

Para encontrar su AREA o SUPERFICIE total es necesario multiplicar la magnitud al cuadrado de una de sus aristas por 1.7321, es decir:

$A = 1.7321 \times a^2$

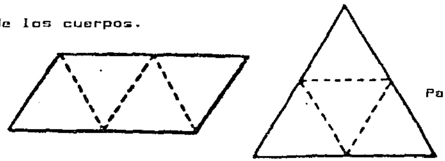
Donde A es el area y

a es la arista.

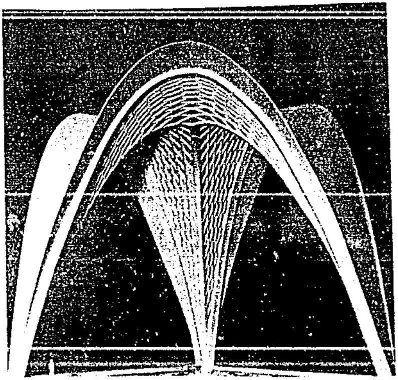
Su VOLUMEN se obtiene al multiplicar 0,1178 por el cubo de su arista es decir:

$V = 0.1178 \times a^3$

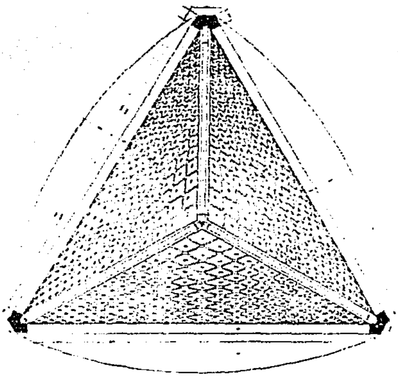
Al cortar una sección del CUBO, como se ve en la Fig.III.8 se tienen 5 TETRAEDROS, limitados por 4 triángulos equiláteros. Así, el TETRAEDRO es la primera figura que se deduce del decremento de los cuerpos.



Patrones Planos



Pier Luigi Nervi, Antonio Nervi, Carlo Vannoni y Francesco Vacchini. Proyecto para Catedral de Nueva Nursia, Australia,1959-1961.Maqueta de una estructura de techo: tres bóvedas parabólicas, de 30 metros de altura por 35 metros de luz.



Plano de la estructura del techo visto desde abajo: base triangular de unos 30 metros de lado.

III.6.2 CUBO O HEXAEDRO.

El segundo cuerpo es semejante a un dado y tien 6 superficies cuadradas rectángulas, 8 vértices y 12 aristas.

El VOLUMEN de este sólido es igual a la tercera potencia de la longitud de la arista, es decir:

$V = a^3$

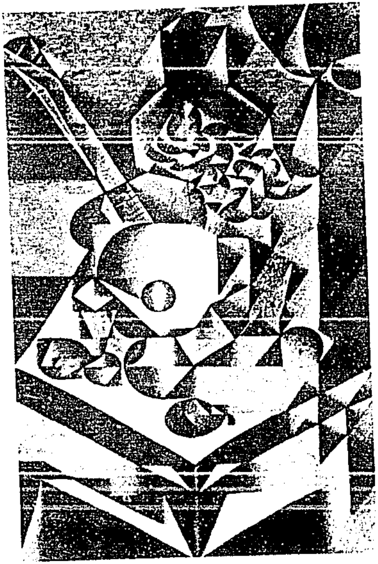
Su AREA se encuentra al multiplicar la arista al cuadrado que nos da la superficie de una de sus caras y luego esta por 6, que es el número de lados que tiene el CUBO, es decir:

$A = 6a^2$

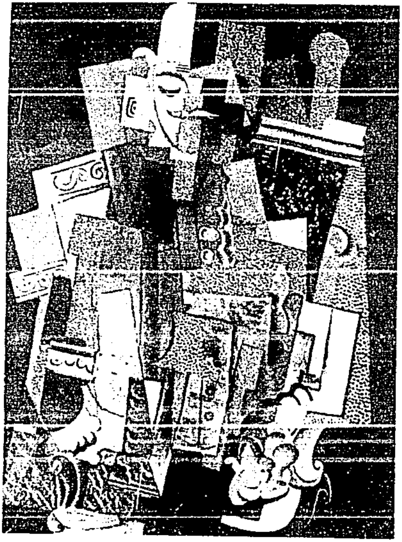
Una linea se origina por el desplazamiento de un punto a otro; si este desplazamiento es recto y el más corto, se tiene una línea recta limitada por dos puntos. Una superficie se obtiene por el desplazamiento lateral de una línea: si una línea recta se mueve de manera que todos sus puntos se desplacen igualmente, se forma un paralelogramo, limitado por 4 lados. Los cuerpos se construyen mediante el desplazamiento lateral de una superficie . Si un paralelogramo se desplaza de la misma forma, se obtiene un paralelepípedo, limitado por 6 planos.

Si el desplazamiento de una linea es igual a la longitud de esta línea, pero formando con ésta un ángulo diferente al recto, se forma un romboide, cuyos lados son iguales.

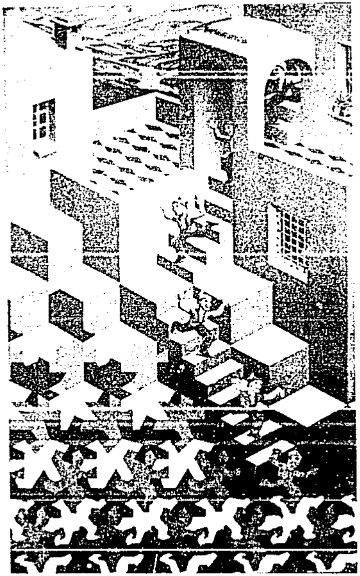
Si este desplazamiento se hace perpendicular a la linea recta, se forma un cuadrado. Desplazando el cuadrado, se forma el CUBO, cuyos seis planos son cuadrados iguales.



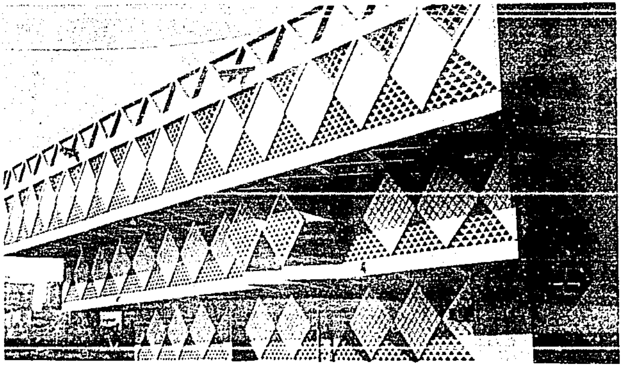
Juan Gris. Guitarra y Flores. 110x67 cm.
(1912), Museo de Arte Moderno, Nueva York.



Pablo Picasso. Hombre con Pipa: 130x90 cm. (1915)
Instituto de Arte de Chicago.



Mauritus C. Escher. Ciclo. 47.5x28 cm. (1938).



Neumann, Hecker y Sharon. Ayuntamiento de Bat yam.
(1959-1963)

III.6.3. OCTAEDRO REGULAR.

El tercer cuerpo "es semejante a la cúspide o punta del diamante" (II.6) contiene 8 superficies triángulares iguales y equiángulas, 12 aristas y 6 vértices, en cada uno de sus vértices concurren cuatro aristas y cuatro caras. Puede obtenerse uniendo por sus bases dos pirámides de base cuadrángular.

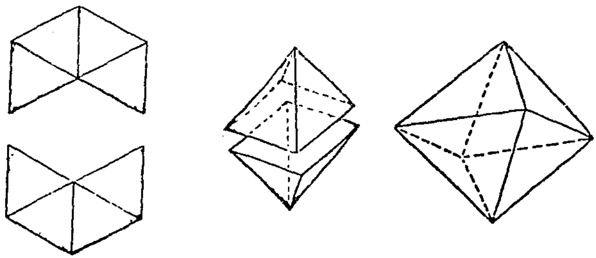
El AREA de este sólido se obtiene al multiplicar 3.4642 por la magnitud de una de las aristas al cuadrado.

$A = 3.4642 \times a^2$

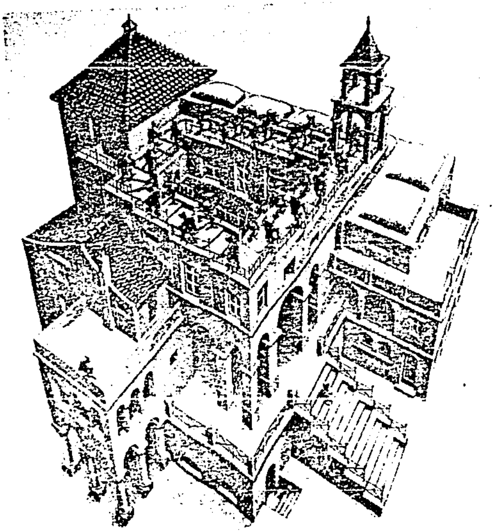
Y su VOLUMEN se encuentra al multiplicar 0.4714 por el cubo de su arista.

$V = 0.4714 \times a^3$

Del CUBO se consigue el OCTAEDRO, al unir para cada plano los tres centros de tres superficies del CUBO, por lo que esta nueva figura tiene seis ángulos, y como el CUBO posee ocho vértices, el OCTAEDRO a su vez, se forma de ocho planos en triángulos equiláteros, por lo que éste equivale a la sexta parte del CUBO.



Obtención del OCTAEDRO por medio de dos pirámides cuadrangulares

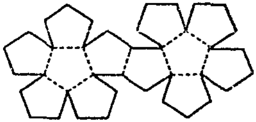


Mauritus C. Escher. Sube y Baja. 38x28.5 cm. (1960).

III.6.4. DODECAEDRO REGULAR.

El cuerpo de doce bases pentagonales es el cuarto CUERPO REGULAR que la esfera circunscribe. Posee 20 vértices, 30 aristas, y doce caras, todas pentagonales. Puede dividirse en 60 triángulos.

Su superficie se obtiene al multiplicar una de sus aristas al cuadrado por 20.6457



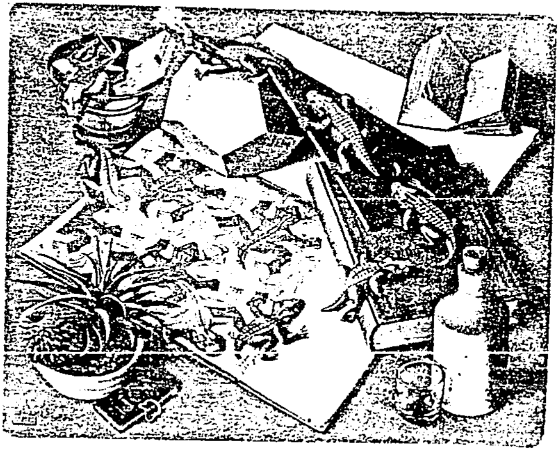
$A = 20.6457 \times a^2$

Y su VOLUMEN es:

$V = 7.6631 \times a^3$

Es la primera figura que se obtiene por adición, al construir prismas sobre los planos del CUBO de la siguiente manera: Se levantan 12 planos del HEXAEDRO con lo que añadimos a éste 12 ángulos más a sus 8 ángulos dados, (dos por cada prisma) de esta forma se hallan 30 ángulos trilineales en total. Como cada uno de los ángulos es la intersección de 3 aristas, advertimos 60 de ellas a primera instancia, pero como cada arista une dos ángulos hay 30 en realidad. Cada arista une dos planos, si las enumeramos con respecto a todos los planos nos percataremos de 60 nuevamente; sin embargo, al dividirlas entre los 12 planos observamos que las superficies resultantes son PENTAGONALES.

El CUBO y el DODECAEDRO se obtienen por sustracción de los CUERPOS PRIMARIOS. En los planos de ellos, se colocan los ángulos del SOLIDO SECUNDARIO y en los ángulos del primario, los planos del secundario. Como los ángulos de los poliedros secundarios son trilineales, los lados de los cuerpos resultantes son triangulares.



Mauritus C. Escher. Reptiles. 33.5x38.5 cm. (1943).

III.6.5. ICOSAEDRO REGULAR.

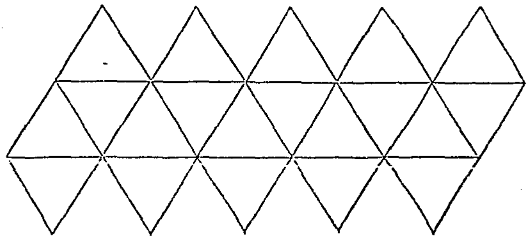
El quinto cuerpo que se circunscribe en la esfera es el sólido de 20 bases triangulares todas iguales y equiláteras. Posee 30 aristas y 12 vértices.

Para encontrar su AREA, es necesario multiplicar 8.6605 por su arista al cuadrado.

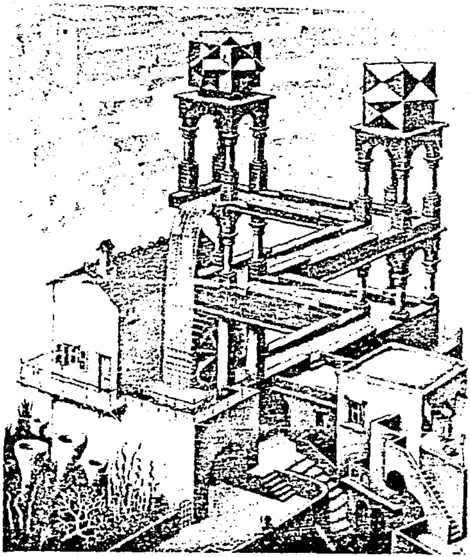
$A = 8.6605 \times a^2$

Y su VOLUMEN se obtiene:

$V = 2.1817 \times a^3$



Con los modelos anteriores se pueden trazar los patrones de los CINCO POLIEDROS REGULARES sobre una superficie plana (cartón, madera, acetato, etc.). Se recortan y se doblan o pliegan debidamente a lo largo de las aristas y se unen éstas, de tal forma que podamos ver levantarse nuestro modelo.



III.7 FORMULA DE EULER PARA LOS CINCO POLIEDROS REGULARES.

Los POLIEDROS REGULARES obedecen o satisfacen la FORMULA DE EULER, que es válida para cualquier POLIEDRO. La FORMULA DE EULER dice que el número de caras (c), el número de vértices (v), y el número de aristas (a) de cualquier poliedro están relacionados por la fórmula

$$c + v = a + 2$$

Con esto Euler demostró que el número de aristas más dos es igual al número de vértices más el número de lados.

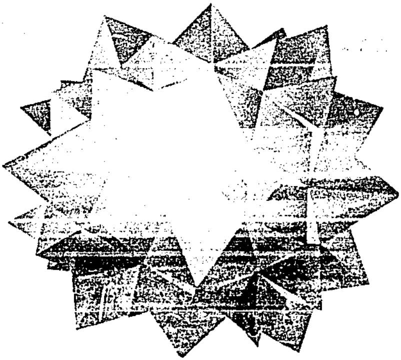
Esta fórmula fue anunciada en 1752 por el mátematico Leonard Euler, y en aquel tiempo fue aceptada como un descubrimiento nuevo. Sabemos ahora que Descartes (1635) conocía esta relación, y que fue probablemente conocida por Arquimídes (hacia 22 5 a. de C.).

Verificaremos la veracidad de la FORMULA DE EULER para el octaedro. El OCTAEDRO tiene ocho caras, por lo que $c = 8$. Puesto que cada cara tiene tres lados y cada arista del OCTAEDRO pertenece a dos caras, el número de aristas, a, es igual a $\frac{3 \times c}{2} = \frac{3 \times 8}{2} = 12$.

Sabemos también que cuatro caras son las que se encuentran o tocan en un vértice. Por lo tanto, el número de vértices, v, es igual a

$$\frac{3 \times c}{4} = \frac{3 \times 8}{4} = 6$$

Sustituyendo estos valores en la FORMULA DE EULER tenemos $8 + 6 = 12 + 2$.

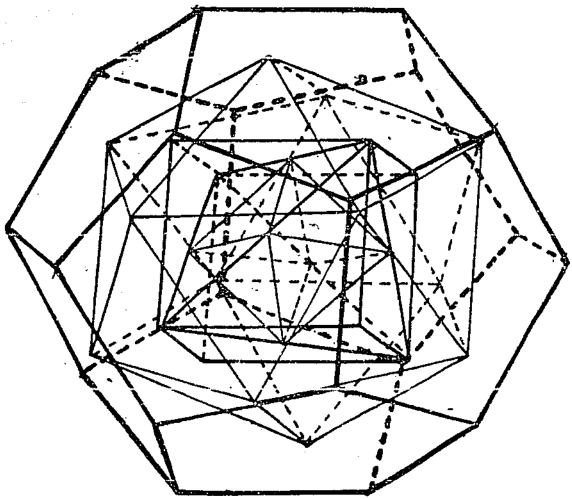


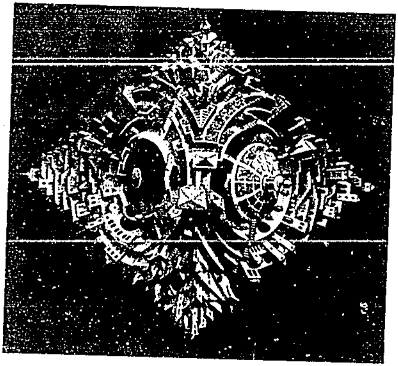
La fórmula de Euler se cumple en cualquier poliedro de muchas caras, por lo que esta fórmula es válida para formar geométricas complejas como este dodecaedro romboico en forma de estrella de 240 lados, que tiene 360 aristas y 122 vértices.

III.8. CONCEPCION PLATONICA DE LOS POLIEDROS REGULARES.

"Empezaré por deciros que para todo el mundo es evidente que el FUEGO, la TIERRA, el AGUA y el AIRE son cuerpos, Todo lo que tiene esencia del cuerpo tiene también profundidad. Todo lo que tiene la profundidad contiene en sí necesariamente la naturaleza de la superficie". ( ) Estas son palabras del propio Platón que aparecen en el TIMEO, donde trata acerca de la NATURALEZA DEL UNIVERSO. Al elemento TIERRA le atribuyó la figura cúbica, es decir, la del HEXAEDRO, por ser el más noble de los cuatro eleméntos y además porque ninguna figura necesita mayor violencia para moverse, y, entre todos los elementos que existen, ninguno es más fijo, constante y firme que la TIERRA. La forma del TETRAEDRO es el elemento y el germen del FUEGO, pues éste, volando hacia arriba, origina la forma piramidal, tal como nos lo muestra la vista, pues vemos que, ancho y uniforme por debajo, va adelgazándose hacia arriba, de manera que la llama, en lo alto termina en punta como el cono de toda pirámide. La forma del OCTAEDRO se la dio al aire, pues así como el aire, para un pequeño movimiento, sigue al fuego de la misma manera la forma octaédrica, por su facilidad para moverse, sigue a la forma de la pirámide. La forma de veinte bases, es decir, el ICOSAEDRO, la asignó al AGUA, ya que estando limitada por más bases que ningún otro cuerpo, le pareció que en la esfera se adaptaba más al movimiento de la cosa que desciende derramándose que no a la que asciende. La forma de doce bases pentagonales la atribuyó al CIELO, como que este es receptáculo de todas las cosas, de la misma manera que el DODECAEDRO es RE-

CEPTACULO Y ALBERGUE DE TODOS LOS OTROS CUERPOS REGULARES, (Fig. III.) como se ve por la inscripción de un cuerpo en otro y además, como dice ALCINOO con respecto al TIMEO de PLATON, porque así como en el cielo hay doce signos del ZODIACO, y cada uno de ellos se divide en treinta partes iguales, siendo toda su anual revolución de trecientos sesenta, de la misma manera este DODECAEDRO tiene doce caras pentagonales, y cada una de ellas se resuelve en cinco triángulos con la punta en el centro, y cada uno de dichos triángulos se divide en seis escalenos, lo que da treinta triángulos en cada base y entre todas trecientos sesenta como el zodiaco.





Mauritus C. Escher. Planetoide en Tetraedro.
43x43 cm. (1954).

FUENTES DE INFORMACION

Capitulo III.

(III.1) Matila Ghyka. EL NUMERO DE ORO. LOS RITMOS. op.cit. pág. 123.

(III.2) Platón. "El Timeo. pág.670 en DIALOGOS. Edit. Porrúa S.A. México, 1971.

(III.3) Johannes Kepler. EPITOME OF COPERNICAN ASTRONOMY IN THE ALMAGEST FOR TOLOMEO. Encycopaedia Britannica Inc. Vol. IV. Chicago, 1980, pág. 864.

(III.4) Matila Ghyka. op. cit. pág. 47.

(III.5) Ibid.

(III.6) Alberto Durero. INSTITUCIONES DE GEOMETRIA. UNAM. México, 1979, pág. 203.

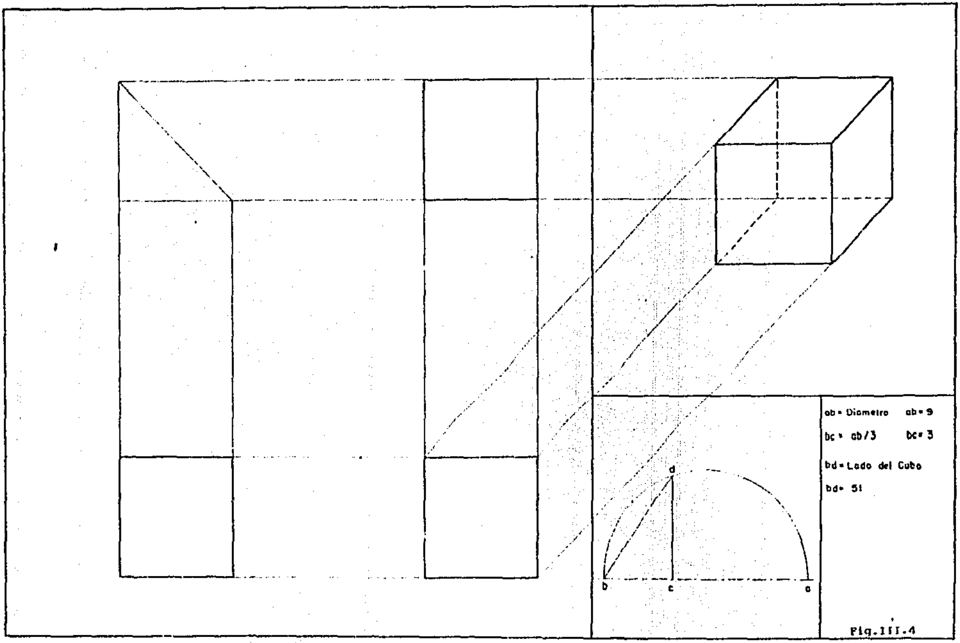


Fig.III.4

IV. GEOMETRIA EUCLIDIANA.

IV.1 LA ESCUELA DE LAEJANDRIA Y EL PERIODO HELENISTICO.

Alejandría fue fundada por Alejandro el Magno en 331 a.de C. y a la muerte de este el imperio macedónico se dividió en tres partes, de las cuales la egipcia quedó al mando de uno de los generales de Alenadro, Ptolomeo I, y como era un ferviente admirador de la cultura helénica funda el MUSEO ALEJANDRINO en el año 300 a.de C. (las escuelas griegas de tipo comunitario, como las de Tales y Pitágoras, dedicadas en el caso de los pitagóricos al culto de las musas se conocen generalmente con el nombre de museos) se incorporan al mismo salas de lecturas, laboratorios, jardines y lugares de descanso y una biblioteca inmensa que llegó a contener alrededor de 600 000 papiros de todas las materias conocidas en ese entonces.

Gracias al gran apoyo de los distintos Ptolomeos después del primer. Alejandría fue cuna de multitud de humanistas, científicos y artistas.

Pronto se convirtió en el foco de la cultura griega y en el centro del desarrollo cultural del mundo antiguo.

De esta forma las matemáticas griegas tuvieron un impulso tal que fue en la ESCUELA DE ALEJANDRIA donde alcanzaron su punto máximo de desarrollo y donde los doctos se alojaban y comían en común, entre ellos gigantes de la talla de Euclides y Erástotenes; y donde se realizó la famosa tradución del antiguo testamento llamada "versión de los setenta" y fue aquí donde tuvo su inicio el desarrollo de la filosofía de la temprana iglesia cristiana. Alenadria se erigio cerca de la desembocadura del Nilo, en un lugar admirablemente propicio para la expansión de la influencia helénica por todo el mundo, en la intersección natural de las más importantes rutas comerciales, Alejandría se convirtió en un verdadero centro mundial de cultura. Se dice que la elección del lugar, los planos de la nueva ciudad y la política de colonización fueron dirigidas personalmente por el ambicioso Alejandro, y que la construcción de la ciudad fue confiada al eminente arquitecto griego Denócrates. En ella confluian de manera natural griegos, árabes y judios combinándose los geniso de las tres nacionalidades.

El desarrollo iniciado durante el dominio griego continua más allá del año 31 d.de C en el que Alejandría pasa al dominio romano pero va declinando poco a poco al apoyar más estos el desarrollo de las artes y disciplinas humanísticas que el de las ciencias, y cesa completamente hacia fines del siglo III y principios del IV d.de C., por último, en el 640 d.de C. los mahometanos invaden una vez más Alejandría, destruyendo gran parte de los manuscritos que aún quedaban.

Finalmente pereció en 642 d. de C. ante el acoso musulmán dirigido por el califa Omar, quien mandó destruir los aun numerosos volúmenes que quedaban en su biblioteca con el pretexto de que lo que existia o no hablaba del CORAN o hablaba en contra de él. Termina así la vida de la escuela de Alejandría y concluye con ella la larga y gloriosa historia de las matemáticas griegas.

Por otra parte el arte helenístico refleja el profundo cambio espiritual de la época. La divinidad, ya profunadmanete humanizada del siglo IV, o es concebida en tono aún más terrestre. Las musas pasan a primer plano, no ya como uniforme y discreto cortejo de APOLO, sino como diferenciadas personificaciones de las artes y ciencias que constituyen campos especialzados, subdivididos y profundizados por la cultura helenística.

La vida de la POLIS es superada por la más amplia de los estados que surgen de la división del gran imperio de Alejandro y el arte deja de ser llamado a concretar los ideales religiosos, celebrativos y votivos de la comunidad ciudadana. El arte de coral pasa a ser virtuoso, de civil se convierte en individualístico; se despoja de religiosidad para asumir un valor decorativo. El primitivo contenido estético unitario, síntesis de la cultura y el mito, del mundo de los dioses, de los héroes y de los hombres, es sustituido por una diferenciación de géneros, la especialización toma un papel importante tanto en el arte como en la ciencia después de Aritóteles.

En este periodo, el hombre es estudiado en todos sus aspectos fisicos y psicológicos, pero también deja de ser el único centro de intéres especulativo y artístico. El arte y la cultura arcaicos habían hecho del hombre el metro de todas las cosas; el helenismo como ya lo hiciera el arte minoico-micénico, lo ve como un sujeto del gran cuadro de la naturaleza, que los científicos estudian en los múltiples elementos y que los artistas describen en sus varias formas.

Con el nacimiento del coleccionalismo en las cortes dinásticas y después en la nueva clientela romana provincial se determina una industrialización de los productos artísticos; se multiplica a gran escala el uso de las copias, de las reelaboraciones y de las obras decorativas; se aprovechan medios de reprodución mecánica, desde el calco hasta el uso de cartones, de modelos en yeso, los que conduce a una amplisima difución la cultura artistica griega, influenciando así la formación de un gusto común. Por otro lado, los artistas viajan y se produce un intenso cambio; escultores de diferentes nacionalidades trabajan juntos en una misma obra.

El periodo HELENISTICO, termina con la batalla de Azio (-31) y comienza el periodo de Augusto. Dicho periodo contempla profundos cambios históricos, politicos, económicos, sociales, religiosos y literarios, que se reflejan profundamente en el arte griego.

IV.1.1. ALGUNOS EJEMPLOS DE ARTE HELENISTICO.

Nike de Samotracia. Escuela de Rodas. 200 a. de C.
Original, Museo de Louvre, París. Copia en Yeso,
Academia de San Carlos, México.

Venus de Milo. (Encontrada en 1820, en márol pario).
Siglo II a. de C. Original, Museo de Louvre, París.
(Copia en yeso, Academia de San Carlos, México)

Agesandro, Polidoro y Atenedoro de Rodas. Laconte.
Siglo I. (Museo Vaticano).

IV. 2. EL MUNDO EUCLIDEO FRENTE AL UNIVERSO DE LAS COSAS GEOMETRICAS.

"La GEOMETRIA do EUCLIDES no es una ciencia, sino un ARTE por el que el griego clásico se construyó un MUNDO con ciertas cosas geométricas y sirviéndose de ciertas propiedades de ellas, compuso un mundo acomodado a su tipo de vida cognositiva." (IV.1)

La civilización clásica griega fue famosa por su creación y percepción de la belleza, lo mismo en el arte que en la ciencia, la escultura, la simetría, las ideas de los grandes filósofos, etc. EUCLIDES fue uno de los que crearon el arte de ordenar las ideas en su forma suprema mediante el razonamiento deductivo.

Es muy poco lo que se sabe de la vida personal de EUCLIDES. Un comentarista del siglo V, Proclo, afirma que EUCLIDES floreció en el reinado de Ptolomeo I, probablemente nació y se educó en Atenas, y después fue a Alejandría, en Egipto, que era entonces un gran centro de cultura. Allí fundo una escuela en la que enseñó los principios de la geometria que han llegado hasta nuestra época.

EUCLIDES es posterior a los discipulos de Platón, pero anterior a Erastóstenes y a Arquimedes.

Algunos comentaristas citan que estuvo muy familiarizado con la filosofía de Platón, tanto que se propuso como objetivo final de su obra, la construcción de los CINCO CUERPOS PLATONICOS. Otros, sin embargo, afirman que es aristotélico.

IV. 3. LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES.

"Algunos filósofos griegos, especialmente Pitágoras y Platón, consideraban la geometria como de gran importancia intelectual, pues a causa de su pureza y abstracción les parecía estar emparentada con la metafísica y la religión. Entonces alrededor del año 300 a. de C. Euclides escribió su libro clásico, LOS ELEMENTOS, en el que agrupó y presentó de manera sistemática todos los principales descubrimientos geométricos encontrados hasta su época. Este gran libro es uno de los clásicos que más influyeron en el pensamiento occidental. A través de los tiempos antiguos, a través de la época medieval y en la moderna hasta el siglo XIX, los ELEMENTOS DE EUCLIDES, sirvieron no solamente como texto de geometría sino también como modelo de lo que debería ser el pensamiento científico." (IV.2)

IV. 3. 1 DESCRIPCION.

Euclides no fue propiamente un gran innovador, pero fue un soberbio organizador de los resultados matemáticos alcanzados por Tales, Pitágoras, Eudoxo y otros sabios de la edad de oro de la geometría griega, tales como Demócrito, Hipócrates de Quios y Arquitas. Euclides tuvo la gran habilidad de volver a escribir sus demostraciones en términos suscintos y claros. Simplificados de esta forma están contenidos en su obra LOS ELEMENTOS.

Dicha obra se ha traducido a todos los idiomas, ha estado en uso como libro de texto fundamental de geometría durante más de 2 000 años.

LOS ELEMENTOS fueron escritos en TRECE LIBROS, de los cuales sólo suelen incluirse seis en las ediciones escolares. Algunas partes de LOS ELEMENTOS fueron preparadas por los discípulos de Euclides, pero la dirección, la revisión y las principales porciones son suyas.

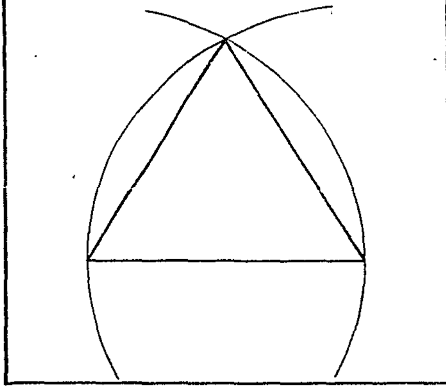
LA GEOMETRIA DE EUCLIDES comienza con definiciones de términos esenciales tales como: PUNTO, aquello que no tiene partes, LINEA RECTA, la que se extiende de manera uniforme entre dos extremos, TRIANGULO, etc. Euclides se esforzó por establecer verdades absolutas a las que llama peticiones o postulados por lo que toca a sus conceptos, que serian aceptados por todo hombre racional sin necesidad de pruebas. Así ideó postulados como: EL TODO ES MAYOR QUE SUS PARTES; ES POSIBLE TRAZAR UNA LINEA RECTA QUE UNA A DOS DE SUS PUNTOS CUALESQUIERA. Las NOCIONES COMUNES fueron expuestos en LOS ELEMENTOS, y basándose en ellos, Euclides procedió mediante un sistema de razonamiento lógico y deductivo a probar una multitud de teoremas para describir las propiedades de las figuras geométricas.

Proclo afirma que Euclides coordinó mucho del trabajo de Eudoxo, perfeccionó la obra de Teeteto, y evocó en irrefutables demostraciones lo que otros habian demostrado de manera despreocupada, esto es, LOS ELEMENTOS, son el resultado de la recopilación y ordenación sistemática de los trabajos anteriores de una sucesión lógica de 465 PROPOSICIONES, acompañadas de POSTULADOS y DEFINICIONES.

Contrario a la impresión popular, muchas de estas proposiciones tratan, no de geometría sino de teoría de los números y álgebra griega.

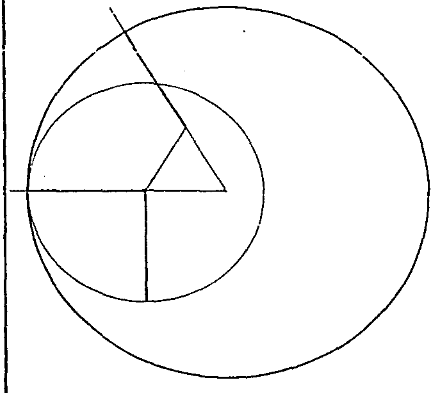
IV.3.2 LIBRO I.

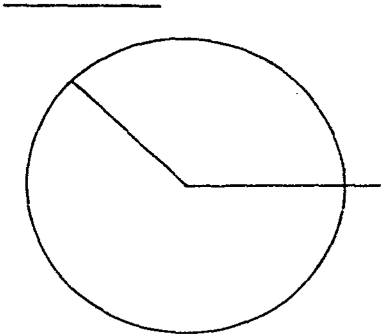
El LIBRO I principia con las definiciones, postulados y nociones comunes preliminares que van a ser utilizados durante toda la obra. Las 48 proposiciones del LIBRO I se dividen en tres grupos. Las primeras 26 tratan principalmente de las propiedades de triángulos e incluyen tres teoremas de congruencia bien conocidos. Las proposiciones 27-32 establecen la teoría de las paralelas y demuestran que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. Las restantes proposiciones tratan de paralelogramos, triángulos y cuadrados, con referencias especiales a las relaciones de áreas. La proposición 47 es el TEOREMA DE PITAGORAS. El material de este libro fue desarrollado por los primeros pitagóricos. Las definiciones de introducción a este PRIMER LIBRO, son de carácter descriptivo, y comprensibles solamente al relacionarlas con las discuciones filósoficas contemporáneas. Todo lo demás son postulados de existencia y definiciones verbales. Los postulados son probablemente una importante aportación metódica de Euclides. Los tres primeros tratan solamente de construcciones cuando se emplea regla y compás, el cuarto sobre la igualdad de todos los ángulos rectos y el quinto es el famoso postulado de las paralelas. Entre las nociones comunes, ha tenido más tarde particular importancia el de las partes y el todo, al relacionarse con el cálculo infinitesimal.



1.1: Dada una recta delimitada construir sobre ella un trián_gulo equilatero.

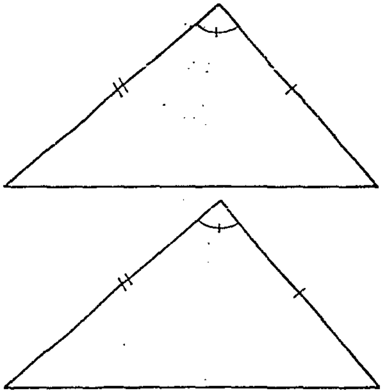
1.2: En un punto dado construir una recta igual a otra recta dada.

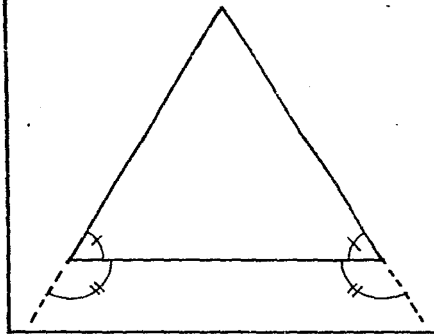




1.3: Dadas dos rectas desiguales restar de la mayor una recta igual a la menor.

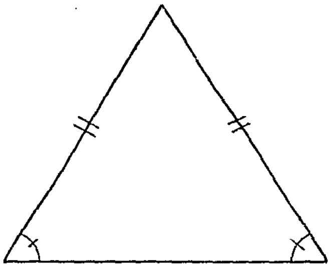
1.4: Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales uno a uno, e iguales los ángulos correspondientes comprendidos por tales rectas iguales, tendran bases iguales entre sí y será un triángulo igual al otro y serán iguales los ángulos restantes, cada uno a su corrs. pondiente: con aquel que subtienda lados iguales.

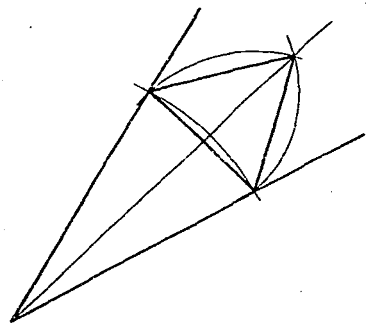




1.5: En los triángulos isosceles los ángulos de la base son iguales entre si, y, si se prolongan las dos rectas iguales, los ángulos de debajo de la base serán también iguales entre si.

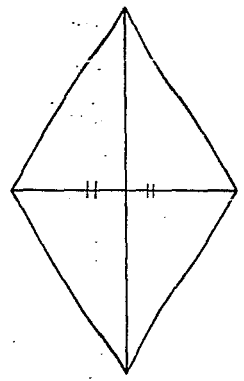
1.6: Si dos ángulos de un triangulo son iguales, los lados subtendidos bajo tales ángulos serán también iguales.

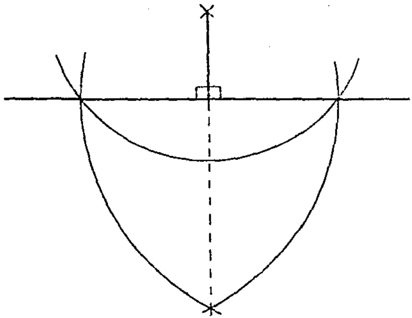




1.9: Dividir en dos un ángulo rectilíneo dado.

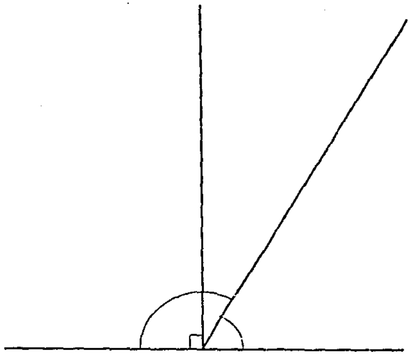
1.10: Dividir en dos una recta delimitada dada.



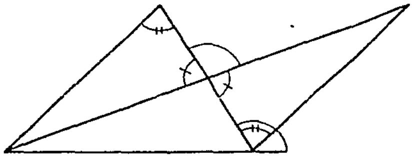


1.12: Dada una línea recta indefinida trazarle, desde un punto dado que no se halle en la misma, una lí_nea recta perpendicular.

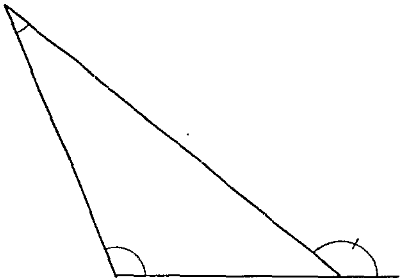
1 13 Si una recta levantada sobre otra hace ángulos, serán o bien dos rectos o bien igual a dos rectos.

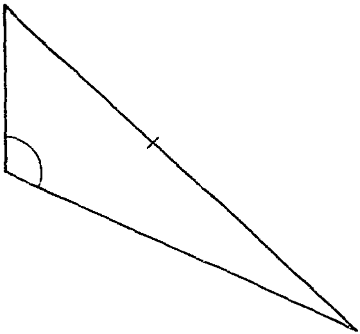


1.16 En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos.



1.17: En todo triángulo, dos ángulos cualesquiera tomados de vez son menores que dos rectos.

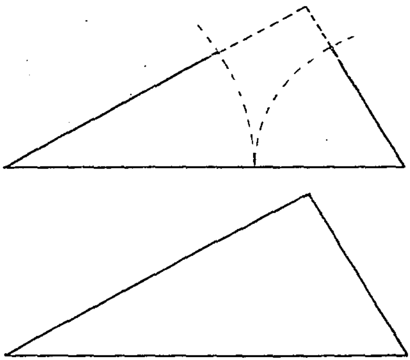


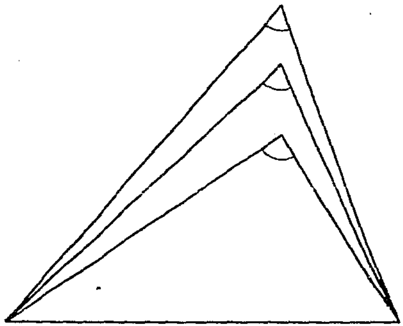


1.18: En todo triángulo el lado mayor subtiende el ángulo mayor.

1.19: En todo triángulo el ángulo mayor subtiende el lado mayor.

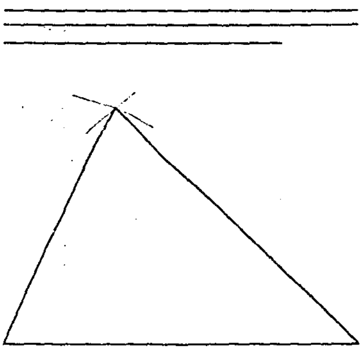
1.20: En todo triángulo dos lados cualesquiera, tomados de vez, son mayores que el restante.

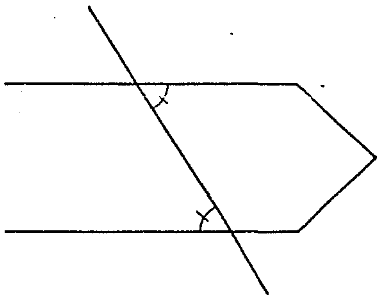




1.21: Si dos rectas que parten de los extremos de uno de los lados de un triángulo se juntan dentro de él, tales rectas son menores en total que los dos restantes lados del triángulo, pero el ángulo que comprenden será mayor

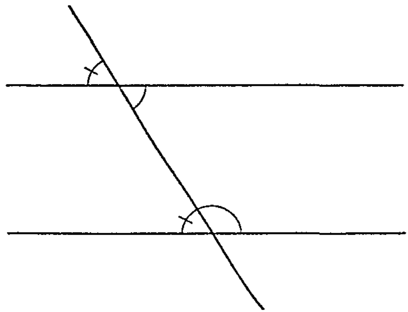
1.22: De tres rectas iguales a otras tres rectas, construír un triángulo

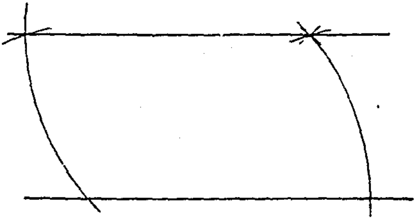




1.27: Si una recta cayendo sobre dos rectas hace ángulos alternos iguales entre sí, serán tales rectas paralelas entre sí.

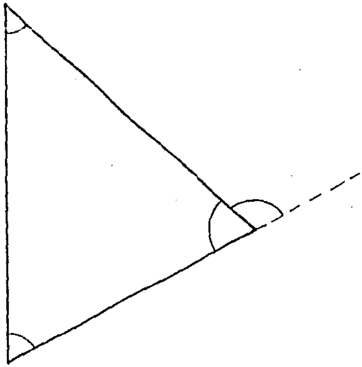
1 28 Si una recta, cayendo sobre dos rectas hace el ángulo externo igual al ángulo interno y opuesto en el mismo, lado o bién si los dos internos son igual a dos rectos, tales rectas serán paralelas entre sí.

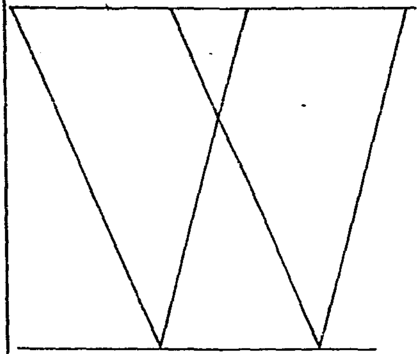




1.31: Por un punto dado trazar una recta paralela a otra recta dada.

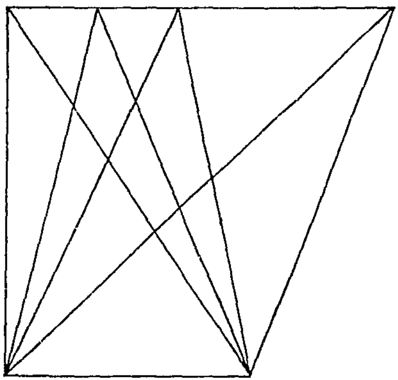
1.32: En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados el ángulo externo es igual a los dos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son igual a dos rectos.

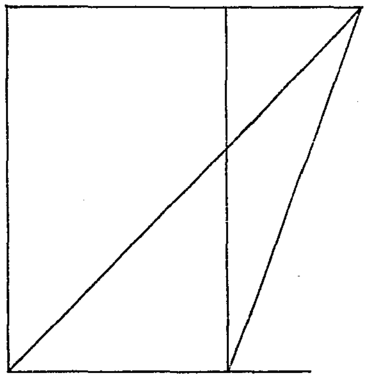




1.35: Paralelogramos que es_ tan sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

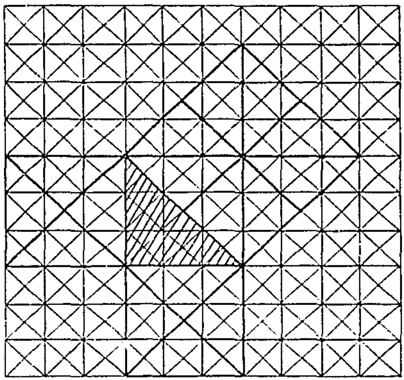
1.38: Los triángulos coloca_ dos sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

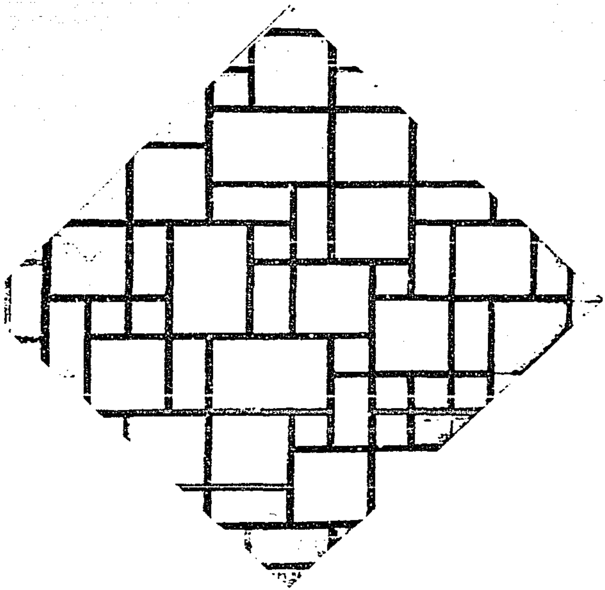




1.41: Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y están entre las misma paraleles el paralelogramo es doble que el triángulo.

1.47: En los triángulos rectangulos el cuadrado del lado que subtiende el angulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el angulo recto.

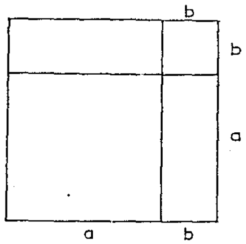




Piet ondriant. Composición Rómbica. 67 cm. diagonal.
(1919).

IV.3.3 LIBRO II.

El LIBRO II de la transformación de áreas y el álgebra geométrica griega de la escuela pitágorica. En este libro encontramos los equivalentes de varias identidades algebraicas, como por ejemplo la proposición 6 que algebraicamente se traduce como $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y que geométricamente se representa en la figura



área del cuadrado total $(a + b)^2$

área del cuadrado chico $= b^2$

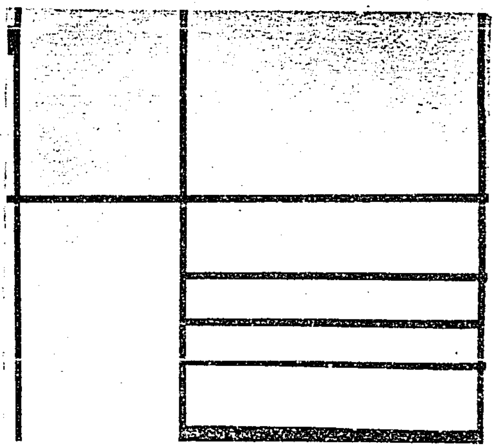
área del otro cuadrado $= a^2$

área de cada rectángulo$= a \times b$

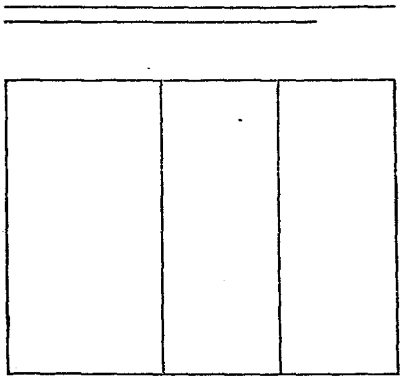
Por todo ello, usando la propiedad aditiva del área, obtenemos:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Al final del libro hay dos proposiciones que establecen la generalización del TEOREMA DE PITAGORAS que conocemos actualmente como LEY DE LOS COSENOS. Consta de dos definiciones y catorce proposiciones. La proposición 11 de este libro contiene la forma de dividir un segmento en MEDIA y EXTREMA RAZON, es decir, en SECCION AUREA.

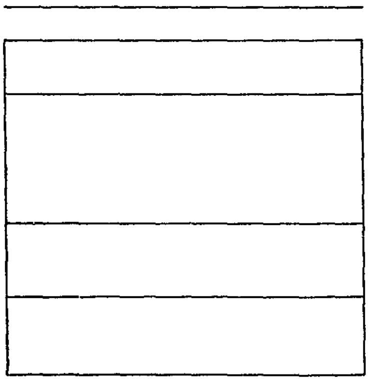


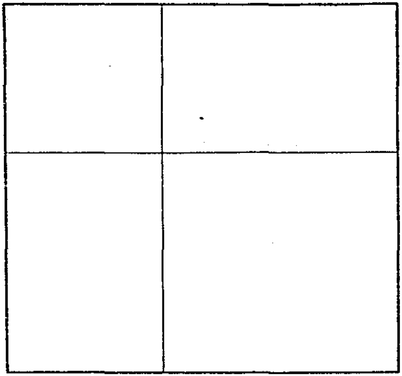
Piet Mondriant. Composición en Rojo y Negro.
59x56.5 cm. 1935, (Galería Sidney Janis, New.York)



21: Si dadas dos rectas, se divide a una de ellas en en un número cualquiera de partes, el rectángulo comprendido por tales dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la recta no dividida y por cada una de las rectas parciales

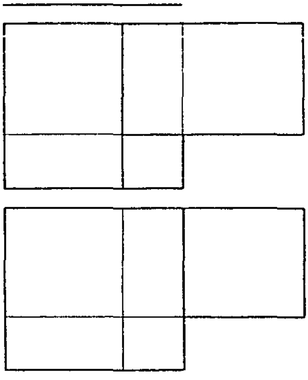
22: Si se divide al arbitro una línea recta el rectángulo comprendido por la recta entera y por cada una de sus partes es igual al cuadrado de la recta entera

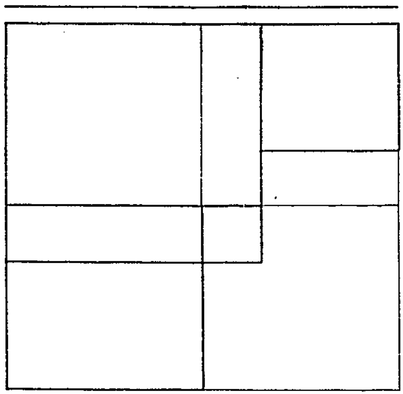




2.4: Si se corta al arbitro una linea recta, el cuadrado de la linea entera es igual a los cuadrados de las partes más el duplo del rectángulo comprendido por las partes.

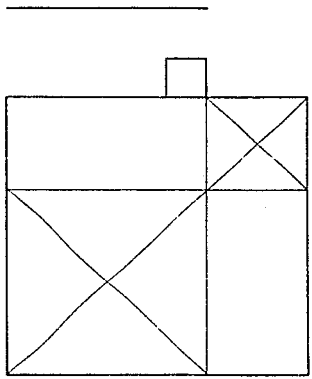
2.7: Si se corta al arbitro una línea recta, el cuadrado de la línea entera más el cuadrado de una de las partes, tomados de vez, son igual al duplo del rectángulo comprendido por la línea entera y la parte dicha más el cuadrado de la otra parte.

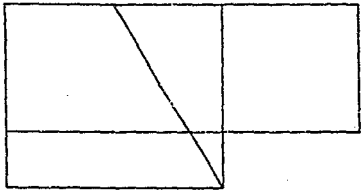




2.9: Si se divide una línea recta en partes iguales y desiguales, los cuadrados de las partes desiguales de la línea total son el doble del cuadrado de la mitad de la línea entera más el cuadrado de la mitad de la diferencia entre las dos clases de cortas.

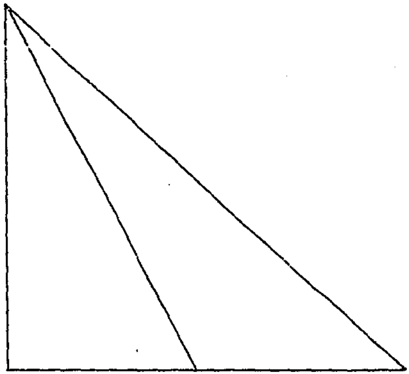
2,10: Si se divide una línea recta en dos y se le añade en recta otra recta el cuadrado de la línea entera más la añadida, junto con el de la añadida, tomadas de vez, son el doble que el cuadrado descrito por la línea mitad más el cuadrado de la compuesta por la mitad y por la añadida, tomadas como una sola.

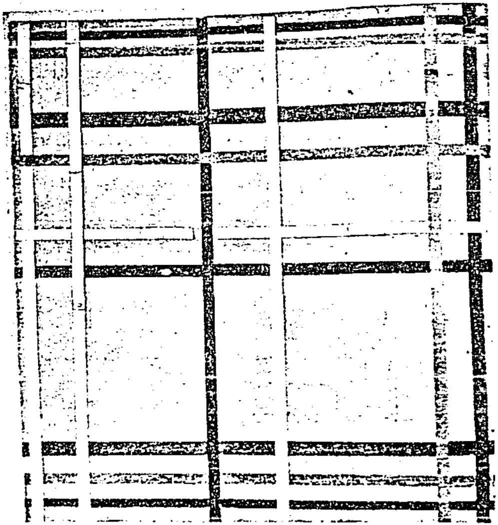




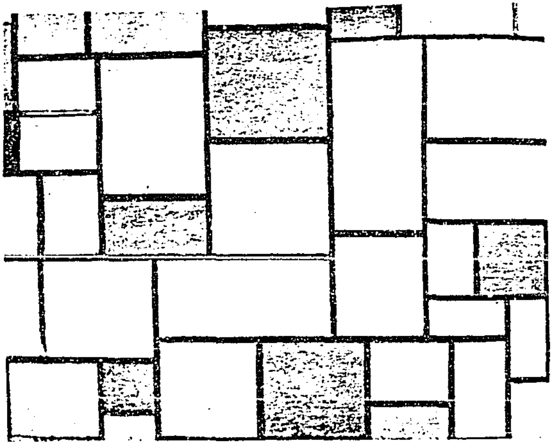
2.11: Dividir una recta de modo que el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de sus partes sea igual al cuadrado de la parte restante.

2.12: En los ángulos obtusángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el angulo obtuso y mayor en el doble del rectángulo comprendido por aquel de los lados del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y por la recta exterior que queda entre la perpendicular y el ángulo obtuso.





Piet Mondriant. Ciudad de New York III.
113.3x97.5 cm. 1942, (Col. Holtzman, New York).



Piet Mondriat. Compoición en Areas Coloradas.
y Contornos Grises.
49x60.5 cm. 191[illegible]. (Colección Max Bill. Zürich).

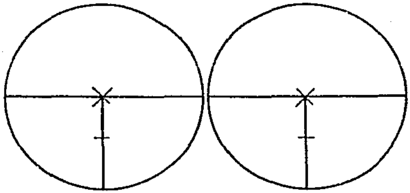
IV.3.4. LIBRO III.

En este TERCER LIBRO se trata hábilmente la teoría de círculo, destacando el teorema de los ángulos inscritos en la circunferencia, el teorema de la cuerda, de la secante y de la tangente, formulado y destacado como teorema de la superficie, y la más tarde vivamente discutida tesis de que el ángulo formado por el arco y la tangente sea menor que cualquier ángulo lineal agudo. Todos estos teoremas los encontramos en nuestros textos de geometría de secundaria. Dicho libro contiene 11 definiciones y 37 proposiciones.

IV.3.5 LIBRO IV.

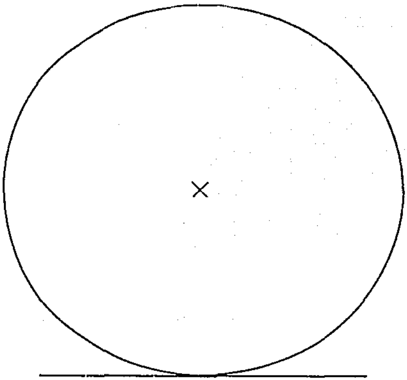
En el Libro IV se encuentran las exposiciones Pitagóricas con regla y compás, de polígonos regulares inscritos y circunscritos en la circunferencia, en particular se explica la construcción del PENTAGONO EQUILATERO Y EQUIANGULO, (prop. 11) refiriéndose a la proposición 11 del LIBRO II, que trata el problema de la SECCION AUREA. En este libro también se menciona la construcción de un triángulo que tenga cada uno de los ángulos de la base doble del restante (prop. 10) que es el mismo que el TRIANGULO SUBLIME.

El libro consta de 7 definiciones y 16 teoremas o proposiciones.

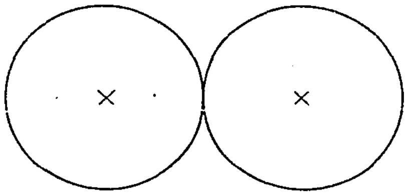


DEF.3.1: Circulos iguales son aquellos cuyos diametros son iguales o cuyas (líneas) desde el centro son iguales.

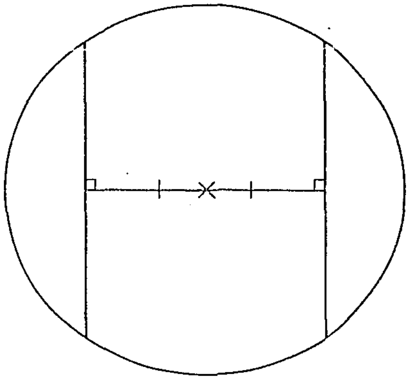
DEF. 3.2: Dicese que una recta es tangente al circulo cuando toca al circulo y prologandola no lo corta.



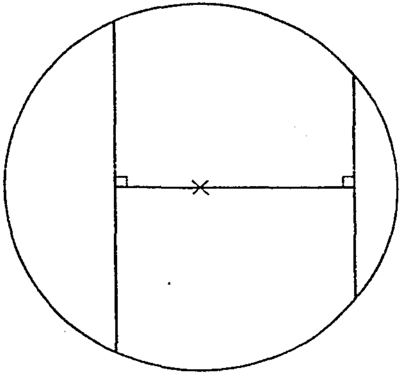
DEF.3.3: Dícese que los círculos son tangentes mutuamente, cuando se tocan mutuamente y no se cortan mutuamente.



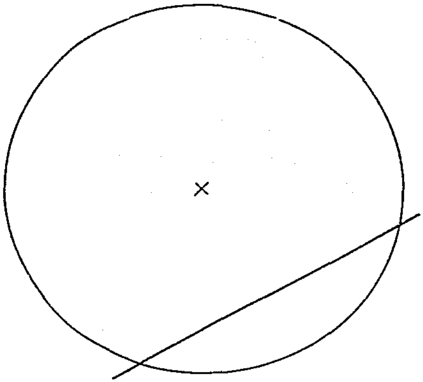
DEF.3.4: En el círculo dícese que las rectas distan igualmente del centro si las perpendiculares trazadas desde el centro a las mismas son iguales.



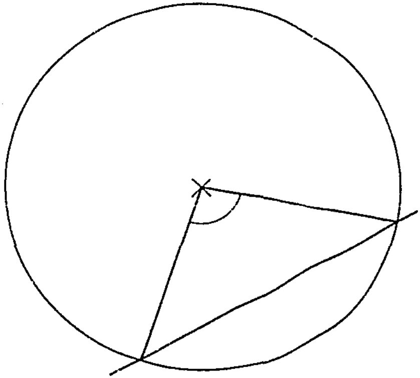
DEF. 3.5: Dicese que dista mas aquella sobre la cual cae la perpendicular mayor.



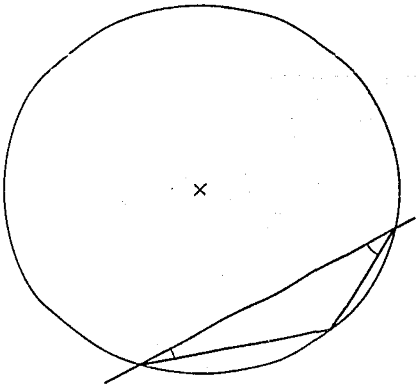
DEF. 3.6: Segmento del circulo es la figura limitada por una recta y por la periferia del circulo.



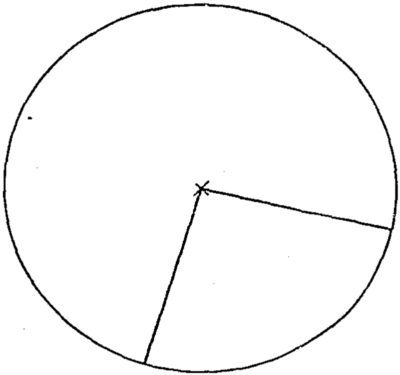
DEF.3.7: Angulo del segmento es el limitado por una recta y por la periferia del círculo.



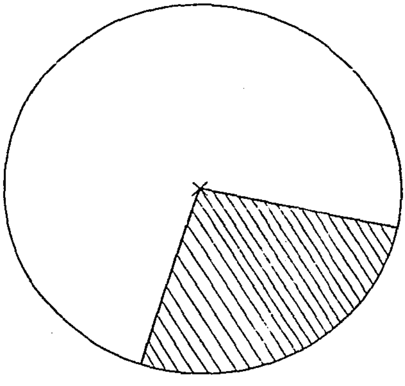
DEF.3.8: Angulo en el segmento es el limitado por las rectas trazadas desde un punto a la periferia del segmento a los extrenos de la recta que es base del segmento.

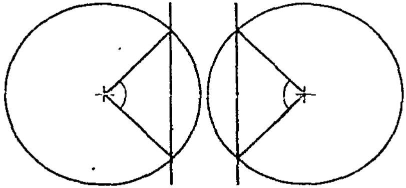


DEF. 3.9: Cuando las rectas que forman el ángulo cortan algúna periferia, dícese que el ángulo consiste en ella.



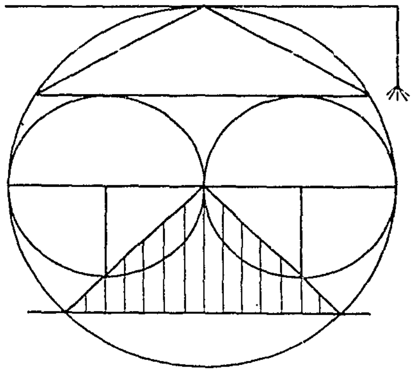
DEF. 3.10: Sector del círculo es la figura limitada por las rectas que limitan el ángulo construido en el centro y por la periferia comprendida por ellas.

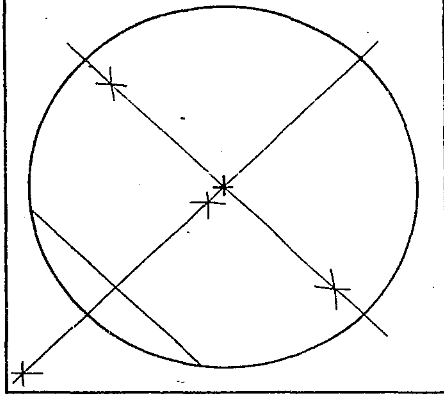




DEF. 3.11: Segmentos circulares semejantes son los abarcan ángulos iguales o aquéllos en que los ángulos son iguales.

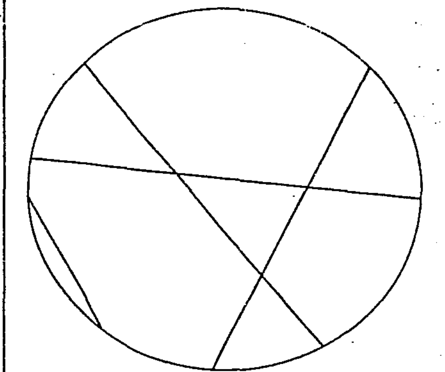
Composicion de algunas de las definiciones del libro tres.

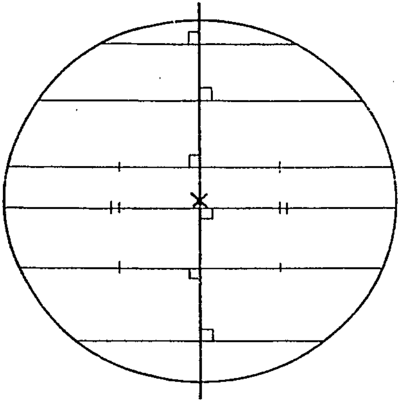




3.1: Encontrar el centro de un círculo dado.

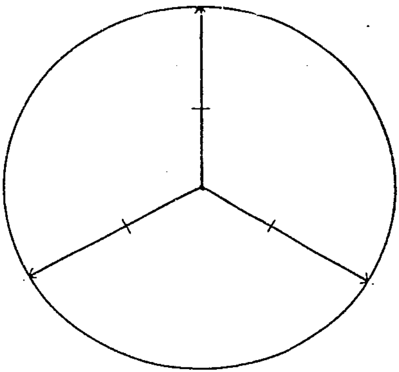
3.2: La línea trazada entre dos puntos, tomados al acaso sobre la periferia del círculo, caerá dentro del círculo.

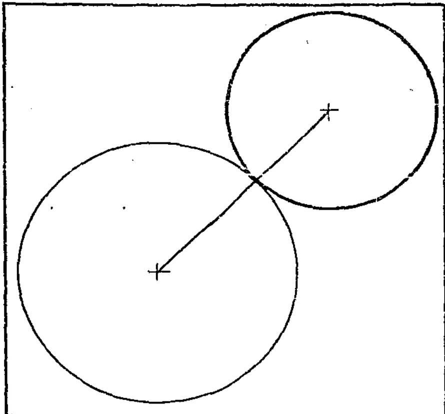




3.3: Si una recta por el centro del circulo divide a otra(que) no(pasa) por el centro en dos partes iguales, también la corta en ángulos rectos, y, si la corta en ángulos rectos, también la corta en dos partes iguales.

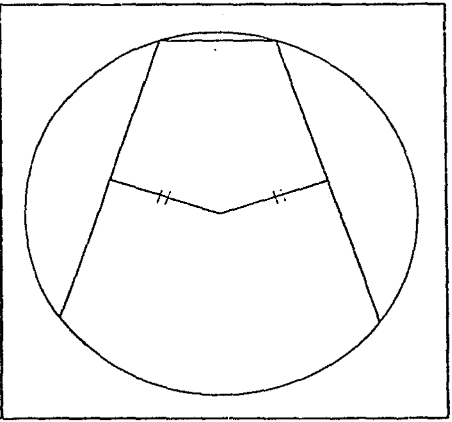
3.9: Si se toma un punto en el interior del círculo y desde este punto se conducen al círculo más de dos rectas iguales, el punto tomado es el centro del círculo.

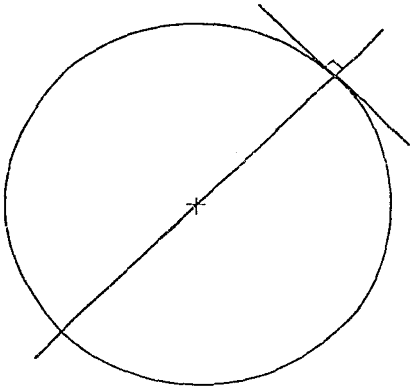




3.12: Si dos círculos se cortan mutuamente por fuera, la recta que une sus centros irá por el punto de contacto.

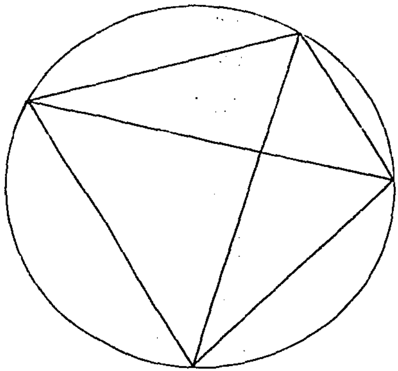
3.14: En un círculo las rectas iguales distan lo mismo del centro y las que distan lo mismo del centro son iguales entre sí.

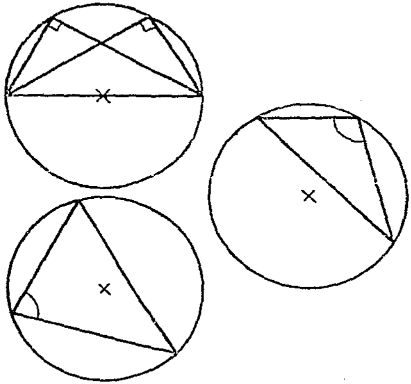




3.1ª: Si una recta es tangente al círculo, y desde el centro al punto de contacto se traza una recta, la recta trazada es perpendicular a la tangente.

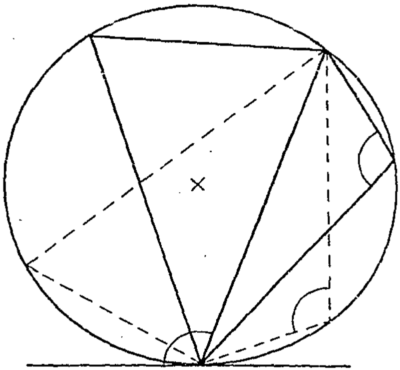
3.22: En los cuadriláteros puestos en los círculos los ángulos opuestos son iguales a dos rectos.

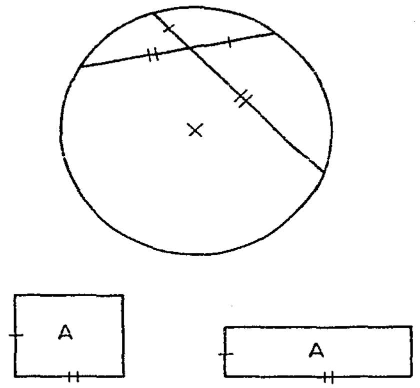




3 31 En un círculo el ángulo puesto en el semicírculo es recto, el que está en el segmento mayor es menor que el recto, el que está en el segmento menor es mayor que el recto, y además, el ángulo del segmento mayor es mayor que un recto, el del segmento menor, menor que el recto.

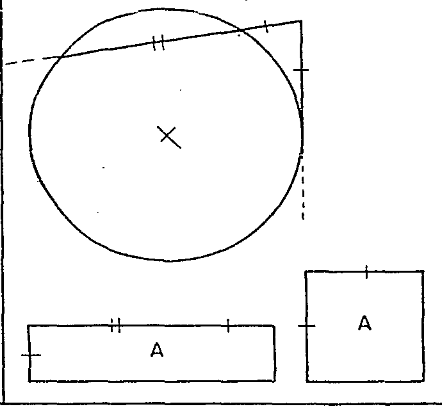
3 32 Si una recta es tangente al círculo y desde el punto de contacto se traza una recta que corte al círculo, los ángulos que ésta haga con la tangente serán iguales a los ángulos que se forman en los segmentos alternos.

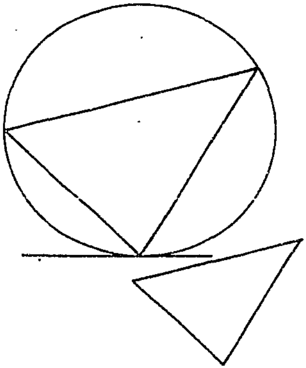




3.35: Si en un circulo se cortan dos rectas mutuamente, el rectángulo comprendido bajo los ángulos segmentos de una es igual al rectangulo comprendido entre los segmentos de la otra.

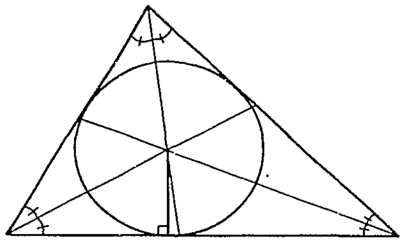
3.36: Si se toma un punto fuera del círculo y desde él se dirigen dos rectas hacia el círculo, y de las cuales una corta al círculo y la otra lo toca, (el rectangulo) comprendido por toda la secante y su parte exterior tomada entre el punto y la periferia convexa será igual al cuadrado de la tangente.

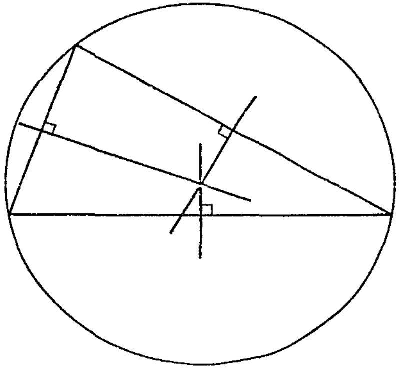




4.2: Inscribir en un círculo dado un triángulo equilátero o un triángulo dado.

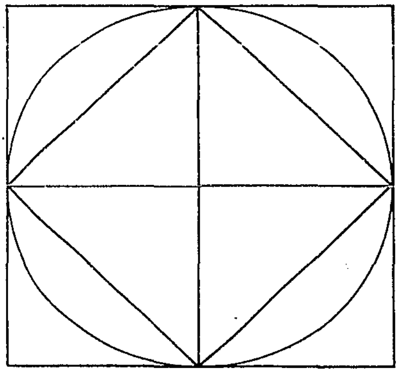
4.4: Inscribir un círculo en un triángulo dado.

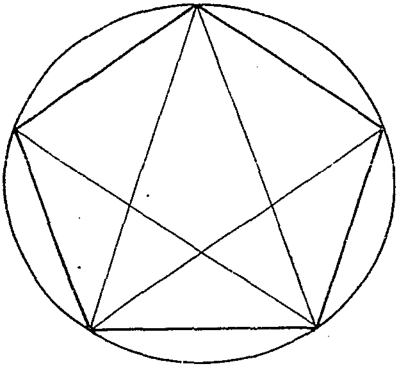




4.5: Circunscribir un círculo a un triángulo dado.

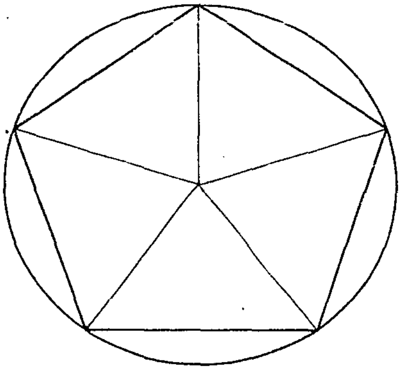
4.6: Inscribir un cuadrado en un círculo dado.
4.7: Circunscribir un cuadrado alrededor de un círculo dado.
4.8: Inscribir un círculo en un cuadrado dado.
4.9: Circunscribir un círculo alrededor de un cuadrado dado.



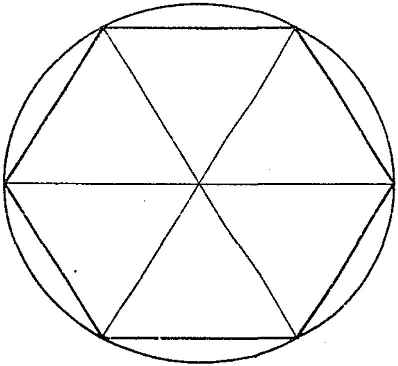


4.11: Inscribir un pentagono equilatero y equiángulo en un círculo dado.

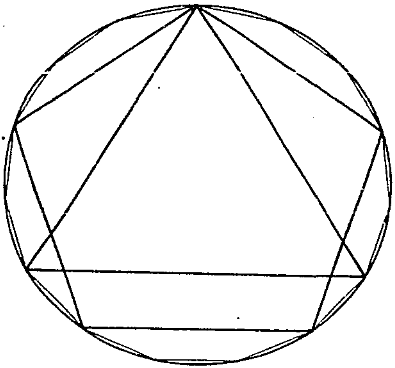
4.14: Circunscribir un círculo alrededor de un pentagono que sea equilatero equiangulo.



4.15: Inscribir un hexagono equilatero y equiángulo en un círculo dado.



4.16: Inscribir en un círculo dado un pentadecágono equilatero y equiángulo.



IV.3.6. LIBRO V.

El LIBRO V da una exposición magistral de la teoría de la proporción como la originó Eudoxo. Esta teoría aplicable a magnitudes inconmensurables, fue la que resolvió un escándalo lógico creado por el descubrimiento pitagórico de los números irracionales. Haciendo uso de las proposiciones de este libro, se justifican las propiedades de las figuras semejantes tratadas en el libro VI. Contiene además las leyes de distributibilidad respecto a la suma y al producto, y la ley asociativa para la multiplicación. Consta de 20 definiciones y 25 proposiciones.

IV.3. 7 LIBRO VI.

Este libro aplica la teoría eudoxiana de la proporción a la geometría plana. Aquí hallamos teoremas fundamentales de triángulos semejantes y construcciones que dan la tercera, cuarta y media proporcionales. También encontramos una solución geométrica a las ecuaciones cuadráticas, y la proposición de que la bisectriz interna de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados.

De gran importancia es el tratamiento de las ecuaciones de segundo grado apoyándose en la generalización del TEOREMA DE PITAGORAS que ha introducido Apolonio, dándole un sentido nuevo, esto da lugar a que se descubra el paralelogramo máximo entre todos los del mismo perímetro conservando los mismos ángulos.

Es precisamente en este libro donde se define la SECCION AUREA como: Dado un segmento de recta cortado en extrema y media razón, entonces, TODO el segmento es a la parte MAYOR como la parte MAYOR es a la MENOR. (def. 3)

Su contenido es de 4 definiciones y 33 proposiciones.

IV.3.8. LIBROS VII, VIII y IX.

Estos contienen un total de 102 proposiciones, en ellos se tratan los elementos de la teoría pitagórica de los números, sobre todo el algoritmo de Euclides, para determinar el máximo común divisor y el mínimo común multiplo. Además aparece la demostración de la descomposición única en factores primos, la aplicación de los cálculos de segundo grado a potencias y raices, la suma de la progresión geométrica con número de términos limitados y la demostración de la existencia de infinitos números primos. A continuación sigue la vieja teoría de lo par y lo impar.

En estos libros hay muchos teoremas elegantes respecto a teoria de los números naturales, pero, puesto que tenemos que tratar de geometría no presentamos ninguno de ellos.

IV.3.9. LIBRO X.

El LIBRO X trata de irracionales, esto es, de segmentos rectilíneos que son inconmensurables respecto al segmento rectilíneo dado. Aquí Euclides se propone como meta determinar el tipo de irracionalidades que se encuentran en el cálculo de los CUERPOS REGULARES, para resolver las condiciones bajo las cuales se puede prescindir del uso de raíces. Entre sus teoremas importantes se encuentra la proposición 2, que dice: Las magnitudes son inconmensurables cuando al aplicarles el algoritmo de Euclides, el número de términos de éste, es infinito. Es el libro más largo de LOS ELEMENTOS, pues consta de 11 definiciones y 96 proposiciones.

IV.3.10. LIBROS XI, XII y XIII.

Los siguientes tres últimos libros, corresponden a lo que se expone en un primer curso de geometría del ESPACIO. con excepción a lo relativo a esferas, que se encuentra comúnmente en los textos de preparatoria actuales. Las definiciones, los teoremas acerca de rectas y planos en el espacio, y los teoremas relativos a paralelepípedos se encuentran en el LIBRO XI. Los vólumenes se tratan hábilmente en el LIBRO XII, y las construcciones de los CINCO POLIEDROS REGULARES están dadas en el LIBRO XIII.

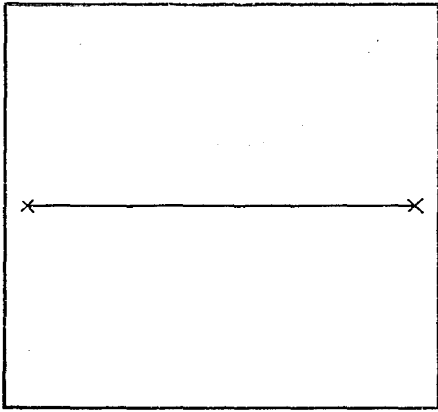
IV. 4. EL METODO EUCLIDEO.

El METODO EUCLIDEO que actualmente se prefiere denominar METODO AXIOMATICO, consiste en enunciar previamente los supuestos e hipótesis básicos sobre los que se construirá la ciencia o doctrina y edificar luego ésta en forma rigurosamente deductiva.

Sus CINCO POSTULADOS constituyen los fundamentos especialmente geométricos y su función consiste en fijar la existencia de modo único de los entes fundamentales: PUNTO, RECTA, CIRCUNFERENCIA, tres de estos postulados aseguran la existencia y unicidad de la recta, de un segmento prolongado indefinidamente cuando se dan dos de sus puntos, otro de ellos fija esa existencia para una circunferencia de centro y radio dados y el quinto postulado establece las condiciones para que dos rectas sean paralelas.

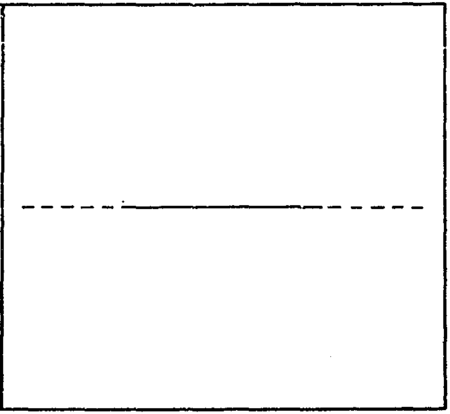
IV. 4. 1. POSTULADOS DE EUCLIDES.

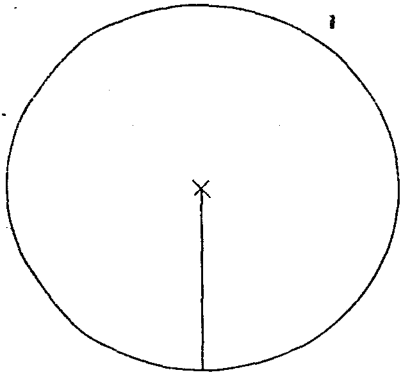
Los CINCO POSTULADOS que Euclides expone en su sistema son los siguientes:



POS.1: Trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.

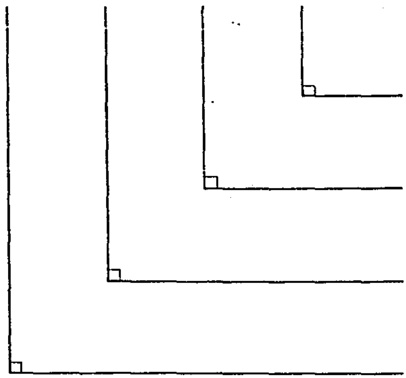
POS.2: Prolongar por continuidad en liena recta una recta delimitada.

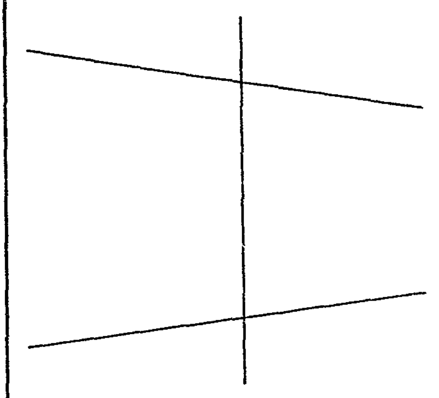




POS.3: Para cada centro y radio describir su circulo.

POS.4: todos los angulos rectos son iguales entre sí.





POS.5: si una recta incide sobre dos rectas, hace ángulos internos y de la misma parte menores que dos rectos, prolongadas esas dos rectas al infinito coincidirán por la parte en que estén los ángulos menore que dos rectos.

IV. 4. 2. NOCIONES COMUNES.

La diferencia básica entre los POSTULADOS y las NOCIONES COMUNES radica en que los POSTULADOS tratan especialmente de la GEOMETRIA (líneas, ángulos, figuras, etc.) mientras que las NOCIONES COMUNES, no hablan de nada exclusivamente geométrico, sino que son más generales. Las NOCIONES COMUNES tratan de igualdad de magnitud, noción que puede emplearse en examinar muchos asuntos, además de la geometría.

Las NOCIONES COMUNES son las siguientes:

1) Las cosas que son iguales a la misma cosa son también iguales entre sí.

2) Si a cantidades iguales se añaden a cosas iguales, los totales son iguales.

los totales son iguales.

3) Si cantidades iguales se restan de cosas iguales los restos son iguales .

4) Las cosas que coinciden una con otra son iguales entre si

5) El todo es mayor que la parte.

Tanto los POSTULADOS como las NOCIONES COMUNES son verdades evidentes, que no necesitan ser demostradas, y son éstas quienes constituyen la base sobre la cual puede descansar la demostración de otras leyes geométricas menos claras.

IV.4.3 DEFINICIONES.

"Euclides quiere asegurarse de que cada uno de sus TEOREMAS GEOMETRICOS esté demostrado de manera lógicamente conclusiva. Pero hay también otro aspecto de su búsqueda de rigor. Euclides se interesa también en sistematizar los términos que se empiean en estas leyes geométricas, para cerciorarse de que el significado de cada uno de estos términos está fijado adecuadamente. Es un punto cardinal del METODO DE EUCLIDES intentar la DEFINICION de cada término antes de usarlo, en parte por un puro deseo de claridad y un afán de asegurarse de que el significado de cada término está fijado adecuadamente." (IV.2)

Pidió pues Euclides que su sistema de verdades estuviera formulado en DEFINICIONES, NOCIONES COMUNES y NORMAS DE ACCION GEOMETRICA (reglas de construcción) o POSTULADOS. Lo pidió porque el entendimiento griego notaba el conocer como pasión o afición, cual encandilamiento ante la verdad, no cual acción.

He aquí algunas de las definiciones que se dan en el LIBRO I de LOS ELEMENTOS:

1) PUNTO es aquello que no tiene partes.

2) LINEA es longitud sin anchura.

3) Extremos de línea son puntos.

4) línea RECTA es aquella que descansa según igualdad sobre sus puntos.

5) SUPERFICIE es lo que tiene solamente longitud y latitud.

8) Un ANGULO es la inclinación respectiva de dos líneas en un plano, que se tocan la una a la otra, y que no descansan las dos sobre una recta.

10) Si cuando una línea recta corta a otra línea recta y forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos igusles se llama RECTO y la línea recta que incide sobre la otra se llama PERPENDICULAR a ésta.

11) ANGULO OBTUSO es el ángulo mayor que el ángulo recto.

12) ANGULO AGUDO es el ángulo menor que el recto.

13) LIMITE es lo que sea extremo de algo.

14) Una FIGURA es lo que se halla contenido por cualquier límite o límites.

15) Un CIRCULO es una figura plana contenida por una línea tal que todas las líneas que la cortan procedentes de un punto de los que están contenidos en la figura son iguales entre sí.

16) A dicho punto se le llama CENTRO del círculo.

17) DIAMETRO es una recta cualquiera que se haga pasar por el centro del círculo, y que corta a éste en dos partes i

guales.

18) Un SEMICIRCULO es la figura comprendida por el diámetreo y la parte de la circunferencia que subtiende al diámetro.

19) Un segmento de circulo es la figura comprendida por una recta y por la circunferencia del circulo; el semicirculo siempre será mayor o menor que el segmento.

20) De las figuras las que estan limitadas por lineas son rectilineas; las limitadas por tres rectas se llaman TRILATERAS; las limitadas por cuatro rectas CUADRILATERAS; las limitadas por más de cuatro rectas MULTILATERAS.

21) Entre las figuras TRILATERAS el TRIANGULO EQUILATERO es aquel que tiene sus tres lados iguales, el TRIANGULO ISOSCELES es el que tiene dos de sus lados iguales y el TRIANGULO ESCALENO es el que tiene sus tres lados desiguales. De estas figuras trilateras el TRIANGULO RECTANGULO es aquel que tiene un ángulo recto, el TRIANGULO OBTUSANGULO es aquel que tiene un ángulo obtuso, el TRIANGULO ACUTANGULO es aquel que tiene sus tres ángulos agudos.

22) Entre las figuras CUADRILATERAS el CUADRADO es aquel que tiene sus cuatro ángulos iguales y sus lados iguales también, el RECTANGULO es aquel que tiene sus cuatro ángulos iguales y no es equilatero, el ROMBO es equilatero y no equiángulo, el ROMBOIDE es aquel que tiene sus lados y sus ángulos opuestos iguales entre si y que no es equilatero y equiángulo; las otras figuras cuatrilateras que no son las anteriores se llaman TRAPECIOS.

23) Son RECTAS PARALELAS aquellas que , encontrándose en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambas direcciones, no se encuentran en ninguna dirección.

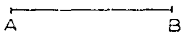
IV.4.4. TEOREMAS O PROPOSICIONES.

El punto de partida para poder realizar una demostración en geometría euclidiana nos lo proporcionan precisamente los POSTULADOS, LAS NOCIONES COMUNES y LAS DEFINICIONES. Todos los demás principios de la GEOMETRIA PLANA y de la GEOMETRIA DEL ESPACIO se siguen necesariamente de estos supuestos básicos. En LOS ELEMENTOS las cosas demostradas son de dos clases. Algunas son leyes universales como por ejemplo la proposición 17 del libro I que dice: LA SUMA DE LOS ANGULOS INTERNOS DE CUALQUIER TRIANGULO ES IGUAL A DOS ANGULOS RECTOS. O la proposición 47 del libro I que se enuncia como sigue: EN LOS TRIANGULOS RECTANGULOS, EL CUADRADO DEL LADO OPUESTO AL ANGULO RECTO ES IGUAL A LOS CUADRADOS CONSTRUIDOS SOBRE LOS LADOS DEL ANGULO RECTO. (que es lo mismo que el TEOREMA DE PITAGORAS). Sin embargo, hay otros teoremas no formulados como leyes universales, sino presentados más bien como tareas a realizar; Un ejemplo de ellos es la proposición del libro III que dice: ENCONTRAR EL CENTRO DE UN CIRCULO.

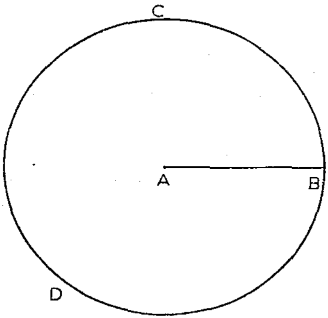
Para tener una visión del método de Euclides, veamos su tratamiento de la proposicion 1, LIBRO I.

CONSTRUIR UN TRIANGULO EQUILATERO SOBRE UNA LINEA RECTA FINITA DADA.

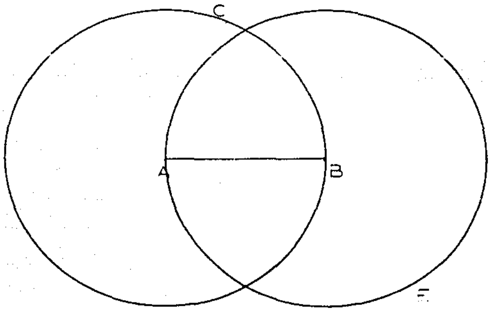
1) Sea AB la línea finita dada.



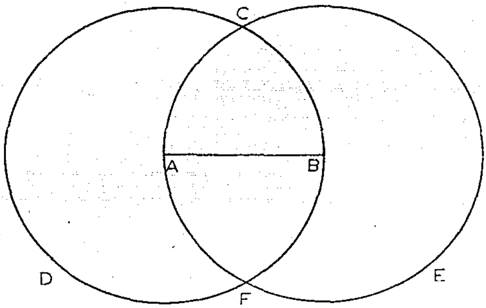
2) Con centro en A y radio AB se traza el círculo BCD (postulado 3).



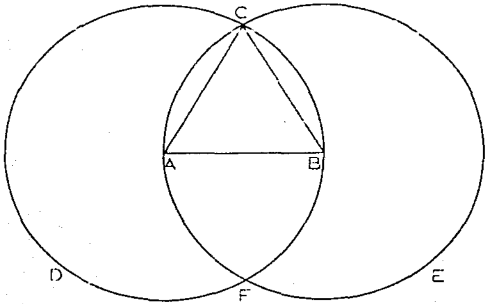
3) Nuevamente con centro en B y radio BA se traza el círculo ACE (postulado 3).



4) A los puntos donde los círculos se encuentran les ponemos C y F.



5) Se unen con líneas rectas los puntos A con C y B con C (postulado 1).



6) Digo que el triángulo ABC es equilátero.

Lo que me queda por hacer, es demostrar que la afirmación 6) es cierta.

Demostración:

a) Puesto que el punto A es centro del círculo CDB, AC es igual a AB (según la definición 15).

b) Y puesto que el punto B es centro del círculo CAE, BC es igual a BA (según la definición 15).

c) Pero ya se demostró que AC es igual a AB y que BC es igual a BA, o sea que cada una de las lineas rectas AC y CB es igual a AB.

d) Por lo que AC es igual a CB (según la noción común 1). Es decir que las lineas AC, AB y BC, son iguales entre sí.

e) Luego el triángulo ABC es equilatero, y ha sido construido sobre la linea recta finita dada AB.

FUENTES DE INFORMACION.
Capítulo IV.

(IV.1) Juan David García Bacca. "Introducción Filosófica a los Elementos de Geometría de Euclides". p.LIII en OBRAS COMPLETAS DE EUCLIDES. ELEMENTOS DE GEOMETRIA. Libros I y II. UNAM. México, 1944.

(IV.2) Stephen Barker. FILOSOFIA DE LAS MATEMATICAS. Edit. Uthea, México, 1965, p. 24.

(IV.3) Ibid. p. 30.

V.- GEOMETRIAS NO-EUCLIDIANAS.

V.1. LA RENOVACION DE LA GEOMETRIA EN EL SIGLO XIX.

Entre las ramas de las matemáticas, la importancia de la GEOMETRIA ha sido la que más ha variado a través del tiempo. Parece ser que tuvo su origen en el arte de la medición, ya en la época griega se le atribuyó el estatuto de una disciplina situada en la cúspide de las actividades matemáticas de esa época. Con Euclides se convirtió en una ciencia definitiva del espacio pero, a la caída del imperio romano, la actividad del matemático se orientó hacia direcciones tales como el álgebra o la trigonometría.

"durante la Edad Media y la Epoca del Renacimiento, reapareció tímidamente en las obras de este periodo, aunque una nueva faceta de la geometría se manifestó en los trabajos de los pintores, quienes tenían una necesidad perentoria de técnicas y reglas convencionales para representar configuraciones espaciales de líneas y de puntos en el plano." (V.1)

En medio de esta fascinación, los pintores del Renacimiento empezaron a darse cuenta del importante papel que desempañaba la geometría para alcanzar la PERSPECTIVA óptica. Pues hasta entonces, al tema principal de cada cuadro se le había dado un tratamiento prominente.

En los principios del siglo XVII, la GEOMETRIA pasa a ocupar un lugar preponderante en la actividad matemática de la época, sobre todo gracias a los trabajos originales de

Fermat y Descartes. En este mismo siglo se elabora un estudio detalladado de las perspectivas. Desargues y Pascal encuentran un cierto número de teoremas fundamentales que les permiten establecer las bases de la GEOMETRIA PROYECTIVA.

Con esta geometría, se hacen los primeros intentos matemáticos de la PERSPECTIVA en el siglo XV, resultado que forjó un ferviente clima intelectual en Florencia y del cual se valieron los pintores de la época, para crear una realidad sólida sobre lienzos planos que se extendió rápidamente por Europa entera.

" El primer gran exponente de la PERSPECTIVA al Norte de los Alpes fue Alberto Durero. Este gran artista alemán imaginaba el lienzo como una gran pantalla de vidrio donde el artista puede copiar literalmente en papel cuadriculado la imagen que observa a través de un vidrio rayado igualmente."
(V.2)

Un grabado en madera de Alberto Durero muestra un artista estudiando un escorzo.

En 1700 las leyes de la perspectiva eran tan conocidas que los artistas se divertían con obras exhibicionistas tales como la parodia de William Hogart (perspectiva falsa).

William Hogart. Perepectiva Falsa. 1700.

Una vez agotadas las posibilidades que proporcionaba la perspectiva a los artistas, estos empiezan a incursionar en otros campos, mientras los trabajos de Desargues y Pascal son olvidados hasta que Monge y su escuela se dedican a la difícil tarea de revalorizar la geometía mediante aportaciones nuevas y llenas de promesas. Pero en el siglo XVI se establece la controversia entre los defensores de la utilización exclusiva de los métodos geométricos y los que recurren al álgebra y al análisis para tratar la geometría.

Es en esta época, cuando surge la renovación de la GEOMETRIA PROYECTIVA, con el estudio de las propiedades geométricas que se conservan en la PROYECCION CENTRAL o PERSPECTIVA de un cuadro.

Y no es, sino hasta el siglo XIX cuando nacen las GEOMETRIAS NO-EUCLIDEAS con Gauss, Bolyai, Lobachevski y Riemann.

Finalmente cabe decir decir que Riemann fundó verdaderamente la TOPOLOGIA, y su desarrollo posterior estará influenciado por la teoria cantoriana de conjuntos, por la teoría de los números reales y por la teoría de funciones de variable real.

El propósito de este capítulo será discutir la GEOMETRIA DE CUATRO DIMENSIONES y las GEOMETRIAS NO-EUCLIDIANAS. Temas que no van más allá de la comprensión de cualquier no-matemático que esté preparado para realizar un razonamiento correcto. Las ideas básicas sobre las que se fundan estas geometrias son sencillas y esto es lo que nos proponemos demostrar.

V.2. GEOMETRIA DE CUATRO DIMENSIONES.

"Una GEOMETRIA DE CUATRO DIMENSIONES es un juego, también lo es la GEOMETRIA de EUCLIDES. Poner reparos a la GEOMETRIA DE CUATRO DIMENSIONES basándose en que solamente hay tres dimensiones es absurdo". (V.3)

El concepto de CUARTA DIMENSION generalmente está rodeado de misterio y desconfianza, pues para nosotros criaturas que poseemos longitud, altura y ancho, es un atrevimiento hablar de espacio de CUATRO DIMENSIONES, nos parece imposible imaginar un SUPER ESPACIO GEOMETRICO aún utilizando toda nuestra inteligencia tridimensional.

La noción de CUARTA DIMENSION, aunque precisa, es muy abstracta y, para la gran mayoria, está más allá de la imaginación y en la región más pura del conocimiento.

A pesar de que el concepto de CUARTA DIMENSION presentó controvecia entre los diferentes sectores de la ciencia y del arte durante finales del siglo pasado, fue tema de inspiración para que se realizaran todo tipo de alegorías y ficciones para instar y halagar a los que dudaban. A fin de hacer más aceptable la idea de las CUATRO DIMENSIONES, algunas novelas describian cuan imposible parecía un mundo de tres dimensiones a seres que vivieran en un mundo de dos dimensiones, hubo cuentos de aparecidos, de golpecitos en la mesa y del pais de los muertos etc.

Ptolomeo señaló que podían trazarse en el espacio tres rectas perpendiculares entre sí, pero una cuarta recta, perpendicular a ellas, carecía de medida o profundidad. Otros matemáticos no deseando arriesgarse a cometer una heregía contra Euclides advirtieron que ir más allá de las tres dimensiones equivalía a ir contra la naturaleza.

En el siglo XIX varios matemáticos sobresalientes crearon una revolución en la geometría. Las GEOMETRIAS DE CUATRO y más DIMENSIONES, llegaron a ser una parte de las matemáticas relacionadas con muchas otras ramas.

Finalmente nacieron los usos y aplicaciones directas de la GEOMETRIA TETRADIMENSIONAL a la física, y al sustituir el TIEMPO por la CUARTA DIMENSION se encontró que ésta resolvía muchos de los enigmas del Universo. A tal punto se perdieron los matemáticos en el júbilo general, que algunos de ellos comenzaron a hablar de CUARTA DIMENSION, dando así lugar a que fuese una realidad física, como un nuevo elemento. Así la confusión se extendió desde las matemáticas hasta la gramática, desde los principios del dos más dos hasta la ciencia de los usos correctos del artículo definido e indefinido.

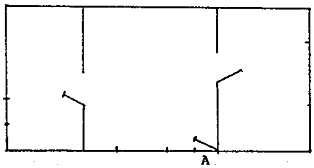
Evidentemente, en las obras de arte se reflejaron también estas condiciones e impresiones espaciales en las que se encontraba el creador. "Los títulos de las obras como por ejemplo CONSTRUCCION ESPACIAL EN LA TERCERA Y CUARTA DIMENSION, de Antoine Pevsner o MODULADOR DEL ESPACIO, de Laszlo Moholi-Nagy, subrayan que, en la práctica artística de nuestro siglo, se trata con frecuencia de "relaciones espaciales llenas de sentido", para expresarlo con cierta agudeza. Actualmemte el espacio ya no se concibe como una condición abstracta e inmutable de formas materiales, sino que se considera como un resultado específico del proceso configurativo."
(V.4)

V.3. UN VIAJE POR EL MUNDO DE DOS DIMENSIONES.

Imaginemos que de pronto caemos en un mundo donde todas las criaturas que lo habitan son planas. Dicho mundo lleva el nombre de PLANOLANDIA. Algunos de sus habitantes son cuadrados, otros son triángulos, hay quienes se encuentran inmersos en RECTANGULOS AUREOS, algunos tienen formas más complejas. Todos los seres de PLANOLANDIA tienen ANCHURA y LONGITUD, pero carecen de altura, conocen la derecha y la izquierda, el delante y atrás pero no tienen idea de lo que es el arriba y el abajo.

La pregunta es ¿Cómo vería un cuadrado de PLANOLANDIA a otro cuadrado que estuviera junto? La respuesta es sencilla, le parecería que su compañero no es otra cosa, mas que un segmento de línea. Para poder ver los otros lados de su colega tendría que dar un paseo alrededor de éste. Sin embargo, para los seres de tres dimensiones esto no es un enigma, podemos conocer los cuatro lados del cuadrado, sin tener que rodearlo, y sin dificultad observamos lo que se encuentra dentro de él.

Si viviésemos en un mundo de dos dimensiones nuestra casa sería una figura plana, como la que muestra la figura:



" Entrando por la puerta A, estaríamos a salvo de nuestros amigos y enemigos una vez cerrada la puerta, aún cuando no hubiese techo sobre nuestra cabeza y las paredes y las ventanas fuesen simplemente líneas. Encaramarse por encima de éstas, significaría salirse del plano entrando en una tercera dimension" (V.5) cosa que para los habitantes de PLANOLANDIA es imposible.

Pertenecer a una familia de criaturas bidimensionales es algo práctico, pues los seres de PLANOLANDIA tienen frente, espalda o perfil, pero no están dotados de los tres atributos a la vez. Supongamos que conocemos dos amigas bidimensionales, una de ellas tiene frente, y la otra perfil. La niña que tiene frente y no perfil, no se puede llevar a la boca los dulces que sostiene en la mano, mientras que su amiga Dina, que es una gatita puede comerse uno a uno, todos los dulces de Alicia, pero sólo puede caminar hacia la izquierda y tiene que retroceder para moverse hacia la derecha.

Dina es un animalito de perfil que mira siempre hacia su izquierda, si existiera otra gatita que mirara a la derecha, no sería Dina, sino otra gata muy diferente aún cuando pareciera que estamos viendo el otro perfil de Dina. Puesto que ambos felinos están limitados a la superficie serian justamente tan distintas desde el punto de vista bidimensional como el guante derecho y el izquierdo de nuestro espacio común, ya que no podemos superponer una gatita izquierda a una derecha, pues para poner juntos sus hocicos y sus colas, tendríamos que poner una de ellas al revés y así tendríamos que sacarla de la superficie y hacerla girar sobre el espacio, cosa que en PLANOLANDIA no es fácil hacer. Pero si se pudiera, tendríamos que Dina y la otra gata serian la misma. Por analogía se podría decir que un guante derecho se podría convertir en izquierdo sacándolo de nuestro espacio, hacia la CUARTA DIMENSION y girándolo de un modo adecuado antes de traerlo de nuevo a la TERCERA DIMENSION.

Un día un ser tridimensional llega a PLANOLANDIA y se queda mirando desde arriba, al ver a un jardinero de forma oblonga y aplanada entra a su casa, el ser tridimensional que es un Gato de Cheshire en un gesto de amistad interdimensional decide saludarlo.

¿Cómo estás? le dice al jardinero.

Al oir lo cuel, éste, mira por todo su jardín y no ve a nadie. Peor todavía: se imagina que el sonido que entra desde arriba es una emanación de su propio cuerpo plano, una voz de su interior. La familia a estado algo chiflada, piensa quizás para darse ánimos.

El Gato de Cheshire al ver que ha desafiado al jardinero sonrie y así sonriendo desciende a PLANOLANDIA. Sólo puede verse una sección de él, si se desliza empezando por la punta de la cola aparece como un punto y luego como rodajas cada ves mayores, hasta terminar por la sonrisa.

El jardinero que no es más que un Naipe de Tréboles, ve que aparece un punto en el jardín que es un lugar cerrado de su mundo BIDIMENSIONAL, que crece lentamente hasta formar la sombra de un gato. Lo que al naipe le parece es que ha visto un ser de forma cambiante y extraña que ha surgido de la NADA. El gato desafiado por la obstinación de las figuras planas, da un golpe al naipe y lo eleva por los aires, revoloteando por esta misteriosa TERCERA DIMENSION. Al principio el jardinero es incapaz de entender lo que le sucede, ya que todo eso es algo que escapa totalmente de su experiencia, Pero al final se da cuenta que mira a Planolandia desde ARRIBA, ahora puede ver el interior de las habitaciones cerradas, puede ver el interior de sus congéneres planos. Está contemplando su universo desde otra perspectiva, única y arrolladora. El viaje por otra dimensión ofrece como ventaja adicional una especie de visión de rayos X, al final el naipe desciende lentamente hasta la superficie como una hoja que cae. Desde el punto de vista de los habitantes de PLANOLANDIA, el jardinero desapareció inexplicablemente de un jardín cerrado y luego se materializó penosamente de la NADA.

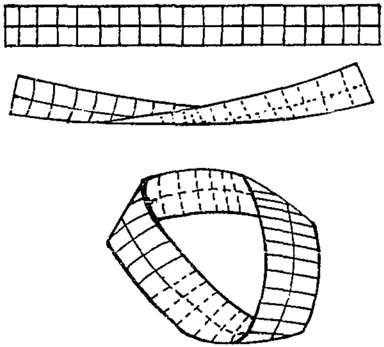
V.4. UN VIAJE POR EL MUNDO DE CUATRO DIMENSIONES.

"Si para la solución de ciertos problemas en dos dimensiones es esencial una TERCERA DIMENSION, del mismo modo, una CUARTA DIMENSION haria posible la solución de otros problemas insolubles en tres dimensiones". (V.6)

Si nos transportáramos a un mundo de CUATRO DIMENSIONES, no habría fin a la cantidad de milagros que realizaríamos, empezando por la rehabilitación de todos los guantes mal apareados. Ninguna celda encerraría al convicto TETRADIMENCIONAL, que sería una amenaza mucho más seria que un hombre simplemente invisible. Podríamos tomar un nudo y desatarlo sin romperlo, con sólo transportarlo a la CUARTA DIMENSION, o bien separar dos eslabones de una cadena sin romperlos. Estando en un mundo de CUATRO DIMENSIONES sería posible espiar a nuestros amigos y enemigos que viven en un mundo TRIDIMENSIONAL sin que estos lo advirtieran jamás. Entraríamos y saldríamos de las habitaciones sin tener que cruzar las puertas y mucho menos las ventanas, escucharíamos charlas secretas sin necesidad de micrófonos ocultos, y sorprenderiamos a nuestros profesores desapareciendo de pronto, cuando su clase es aburrida.

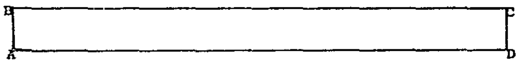
V. 5. UN VIAJE POR EL MUNDO DE LA TOPOLOGIA.

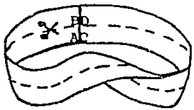
Regresemos de nuevo a nuestro mundo bidimensional, pero en lugar de considerar una superficie común, investiguemos las propiedades de la llamada SUPERFICIE DE MOBIUS. Esta superficie, a la cual se le dio el nombre de un matemático alemán que la estudió por primera vez, en siglo pasado, se puede hacer fácilmente tomando una larga tira de papel común y pegándola en forma de anillo, retorciéndola una vez antes de que se unan los dos extremos.

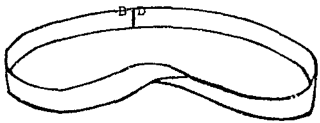


ELABORACION DE UNA BANDA DE MOBIUS.

La SUPERFICIE DE MOBIUS tiene muchas propiedades peculiares, una de las cuales se puede descubrir fácilmente mediante el corte con un par de tijeras, siguiendo una linea paralela a los bordes a todo lo largo de la tira en dirección de las flechas de la figura.







El resultado que se espera es que el anillo quede cortado en partes separadas. Al hacerlo se verá que la suposición era errónea: en lugar de los dos anillos se hallará solamente uno, pero, el doble de largo que el original y la mitad de ancho.

Veamos ahora que ocurre a la sombra de la gatita Dina cuando anda por la SUPERFICIE DE MOBIUS. Supongamos que comienza en la posición 1 (Fig. a) que se ve en este momento como un gato de perfil izquierdo. Continuamente va pasando por las posiciones 2 y 3, visibles en el dibujo, y finalmente se aproxima al punto desde el cual partió. Andando alrededor de la SUPERFICIE DE MOBIUS, nuestra gatita de perfil izquierdo se ha convertido en una de perfil derecho. Y hay que observar que esto ocurrió a pesar del hecho de que la gatita permaneció sobre la superficie todo el tiempo y no ha sido girada en el espacio. Así encontramos que sobre una SUPERFICIE DE MOBIUS, un objeto derecho se puede convertir en izquierdo, y viceversa, por el simple transporte alrededor de la torcedura.

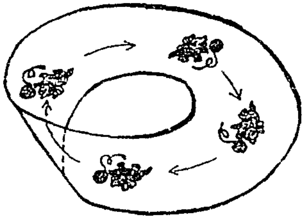
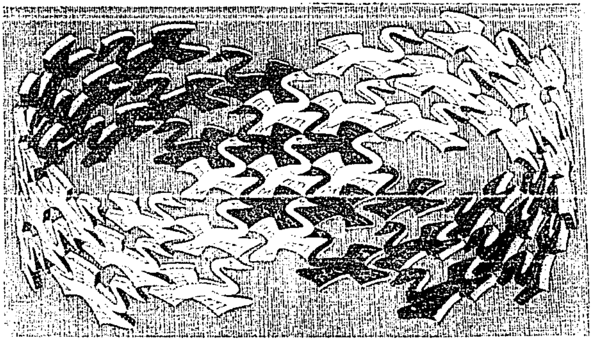
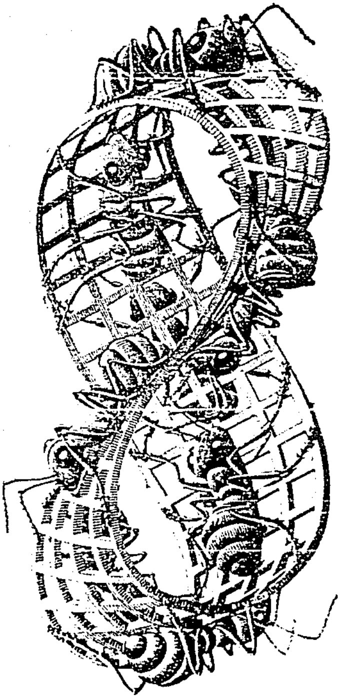


Fig. 8

La TIRA DE MOBIUS que aparece en la figura representa una parte de una superficie general, conocida como BOTELLA DE KLEIN que solamente tiene un lado, que se cierra sobre si misma, y que no tiene limites definidos. Si esto es posible sobre una superficie bidimensional lo mismo debe ser cierto también en nuestro espacio tridimensional, con tal que por supuesto, este se retueza del modo adecuado. Naturalmente no es fácil imaginar una torcedura de MOBIUS en el espacio. No podemos contemplar nuestro espacio desde afuera como miramos la superficie en donde se encuentra Dina, y siempre es difícil ver las cosas claramente cuando se está en medio de ellas. Pero no es del todo imposible que el espacio astróno-



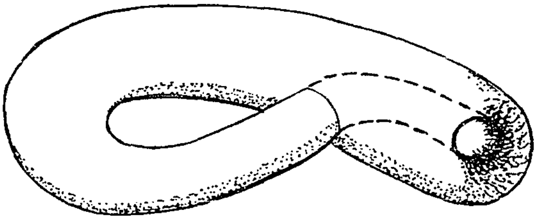
Mauritus C. Escher. Cisnes. 20x32 cm. (1956).



Mauritus C. Escher. Banda de Möbius II.
45x20 cm. (1963).

mico se cierre sobre si mismo y además se retuerza a la manera de MOBIUS.

" Si esto es realmente así, los viajeros que dieran una vuelta alrededor del universo volverían izquierdos, con el corazón en la parte derecha del torax, y los fabricantes de guantes y zapatos tendrían la ventaja de poder simplificar la producción con la confección de una sola clase de zapatos y de guantes, y mediante el embarque de la mitad de ellos en un viaje alrededor del universo los convertirían en el tipo necesario para la otra mitad de los pies del mundo." (V.7)



V.5.1. GEOMETRIA SIN MEDIDAS.

Esta tesis caerá quizas en manos de un lector curioso que querrá tener una idea, expresada en pocas lineas y en un lenguaje no técnico de lo que es la TOPOLOGIA, también llamada ANALYSIS SITUS.

Comúnmente los geómetras distinguen dos clases de geometrías, la primera de las cuales califican de METRICA y la segunda de PROYECTIVA; la GEOMETRIA METRICA está fundada en la noción de DISTANCIA, y la GEOMETRIA PROYECTIVA está fundada en la noción de LINEA RECTA. En ésta, para que dos figuras sean equivalentes, no necesitan ser iguales, basta que podamos pasar de una a otra, por medio de una transformación proyectiva, es decir que una sea la perspectiva de la otra.

Pero existe una tercera geometria, en la cual la cantidad está suprimida por completo, y que es puramente cualitativa: LA TOPOLOGIA.

En esta disciplina dos figuras son equivalentes, siempre que podamos pasar de una a otra por medio de una transformación continua, cualquiera que sea la ley de esta tranformación a condición de que respete la continuidad.

Un ejemplo de ésta, lo encontramos en el cuento ALICIA EN EL PAIS DE LAS MARAVILLAS, cuando Alicia se estira como un telescopio, " como el telescopio más grande del mundo". "¡Adios pies! gritó, pues al mirar hacia abajo y buscarse los pies con la mirada se estaban alejando tan rápidamente que parecia que los fuera a perder de vista de un momento a otro." (V.8) Aquí la Alicia que se alarga como un telescopio es topológicamente igual a la Alicia normal.

La TOPOLOGIA es por lo tanto una geometria NO cuantitativa. Sus propiedades son tan verdaderas en las figuras hechas de hule como en las figuras rigidas que se encuentran en la geometría métrica.

A la TOPOLOGIA se le define como el estudio de las propiedades de los espacios, o sus configuraciones, invariantes bajo transformaciones continuas uno a uno; como el estudio de la posición y relación de las partes de una figura con respecto a otra, sin tener en cuenta la forma o el tamaño.

"¿Quién eres tú?, preguntó la oruga.

"No era ésta precisamente la manera más alentadora de iniciar una conversación. Alicia replicó algo intimidada: "Pues verá usted, señor..., yo... yo no estoy muy segura de quien soy ahora, en este momento; pero al menos si se quien era cuando me levanté esta mañana; lo que pasa, es que me parece que he sufrido varios cambios desde entonces.

"¿Qué es lo que quieres decir?, dijo la oruga con severidad. ¡Explícate!

"Mucho me temo, señor, que no sepa explicarme a mi misma- respondió Alicia -Pues no soy la que era, ¿ve usted?

"¡No veo nada!- dijo la oruga.

"Temo no poder decírselo con mayor claridad- insistió Alicia muy cortésmente, -Pues para empezar, ni yo misma lo comprendo; y además cambiar tantas veces de tamaño en un solo día resulta muy desconcertante.

"No lo es- replió la oruga.

"Bueno, quiza para usted aún no lo parezca asi- dijo Alicia- pero cuando se haya transformado en una crisálida, y eso ha de pasarle algún dia, ¿sabe? y después cuando se convierta en mariposa, ¿no cree usted qué le parecerá todo eso un poco extraño?

"¡En absoluto!— declaró la oruga." (V.9)

Así un círculo es equivalente a una elipse o a una curva cerrada cualquiera, pero no es equivalente a un segmento de recta, porque tal segmento no es cerrado; una esfera es equivalente a una figura convexa cualquiera, una esfera es equivalente a Alicia que se levantó aquella mañana y que cayó en el "PAIS DE LAS MARAVILLAS", y esa misma esfera es equivalente a aquella Alicia víctima de transformaciones que la hacían alargarse tanto al grado de no poderse ver los pies, pero también es equivalente a la Alicia que de pronto empieza a menguar tanto que se ahoga en la paradoja de sus propias lágrimas.

Esa misma esfera es equivalente a la oruga con la que platica Alicia y más aun es equivalente a la crisálida en la que se transformará la oruga, y también a esa mariposa, que según la lógica de la GEOMETRIA METRICA, o de la GEOMETRIA PROYECTIVA no serán la misma; pero según la lógica de la GEOMETRIA TOPOLOGICA no habrá otra que la misma oruga igual a crisálida igual a mariposa.

Alicia no alcanza a comprender esto, pues Alicia acostumbrada al mundo de la GEOMETRIA METRICA, no entiende el mundo TOPOLOGICO de la oruga.

Se ha dicho muchas veces que la topologia es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas. Esto no es una broma, sino una verdad que merece ser reflexionada. Entendiéndose por figura mal hecha aquella que puede ejecutar el dibujante poco diestro alterando las proporciones más o menos groseramente, sus lineas rectas tienen zigzags inquietantes, sus círculos presentan protuberancias faltas de gracia. Todo esto no importa: no perturbará en lo más mínimo al topólogo, ni le impedirá razonar bien. " (V.10)

Lo que está prohibido , es que el artista inexperto represente una curva cerrada por medio de una curva abierta, tres líneas que se cortan en un punto por tres líneas que no tengan ningún punto en común, una superficie con abertura por una superficie sin abertura.

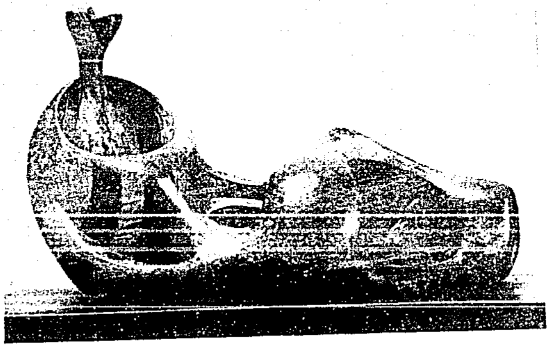
Pero no solamente un dibujante mal hecho puede incursionar en el CAMPO de la TOPOLOGIA, también lo puede hacer un excelente artista, como ejemplos son los casos de Henry Moore y de Mauritus Escher entre otros.

Moore como escultor, da a la figura humana formas vigorosas y muy organizadas, pero no están organizadas tomando como base el esqueleto. Esas formas dicen sobre el cuerpo humano mucho más que el hecho de tener huesos; persuaden "que los miembros están relacionados por una geometría que es característicamente humana y (en sus desnudos de mujer) femenina. Las formas que crea son humanas, gracias a su TOPOLOGIA característica." (V.11)

Esta observación bien simple, nos muestra el verdadero papel de la intuición geométrica.

Escher por ejemplo, creó la mayoria de sus litografias bajo la idea de transmutar figuras, desde las más simples como el caso de OCHO CABEZAS, hasta desarrollar sus METAMORFOSIS.

El contenido filosófico de este tipo de representaciones se puede explicar como la necesidad de ampliarse interiormente y alcanzar el exterior, es decir, romper la concepción de un interior limitado con la imposibilidad de tener



Henry Moore. Figura Acostada. 33x56 cm. (1951).
(Kunsthalle, Mannheim).

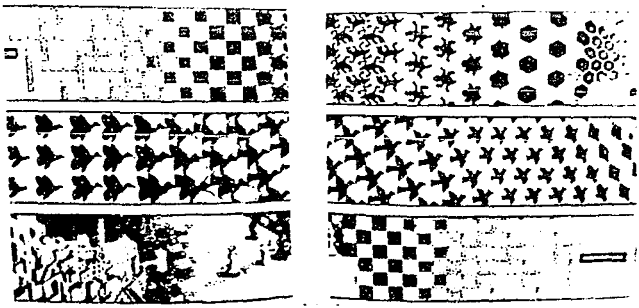
Mauritus C. Escher. Ocho Cabezas. (1922).

una relación con el exterior.

El contenido topológico se explica en la facilidad que tiene Escher de abrirse las fronteras y crear básicamente toda su obra, siendo una de las más conocidas METAMORFOSIS II.

En este grabado se aprecia en primer lugar que el principio coincide con el fin, de lo que se deduce una forma continua que los une a ambos, y nos da la posibilidad de jugar con lo indeterminado.

En segundo lugar, se muestran todas las posibilidades de encadenamiento de formas y lo más importante la transmutación de formas con base en su contexto. Esto se logra en primera instancia cuando las formas cambian de hexágonos a celdas de panal de abeja, en este momento surge la transmutación de contexto, ya que de los panales surgen abejas que dan lugar a nuevas figuras; una nueva transmutación ocurre cuando la torre se convierte en pieza de ajedrez en su tablero y este se transforma en cuadrados.



Mauritus Escher. Metamorfosis II (1939-1940)

V.5.2 SEPARACION DE SUPERFICIES CON CUATRO COLORES.

Supongamos que tenemos una superficie, ya sea plana o la superficie de una esfera subdividida en un cierto número de regiones separadas y se nos pide que las coloreemos separadas de tal modo que dos regiones adyacentes (es decir, que posean una misma frontera común) no tengan el mismo color. ¿cuál es el menor número de colores diferentes que podemos usar para una tarea semejante?

Si el mapa tiene más de tres regiones cuyas fronteras converjan en un solo punto, la conjetura se basa en que cuatro colores siempre bastan para ello. Este es el famoso teorema de LOS CUATRO COLORES. No se ha encontrado ningún mapa en el que falle; pero demostrarlo de un modo general ha sido un problema de varios siglos. Este teorema corresponde a la geometría compleja (en la que las figuras pueden tener cualquier forma) que es la misma TOPOLOGIA. "Todo el mundo sabe que los números son matemáticas; pero el lector corriente no considera como matemáticas las raras formas geométricas, la disposición topológica de un mapa. Dichas formas carecen de la clase de exactitud que, según se nos ha enseñado, debemos esperar de las matemáticas u de la ciencia." (V.12)

El problema de los colores se puede resolver de una manera relativamente sencilla para un globo, un plano o para superficies más complicadas tales como las de una ROSCA DE REYES (cámara de auto o toro). Por ejemplo, se ha concluido que siete colores distintos son suficientes para colorear cualquier combinación posible de subdivisiones de una rosca sin colorear nunca dos secciones adyascentes con un mismo color, y se han dado ejemplos en los cuales los siete colores son necesarios.

Un mapa trazado en una tira de MOBIUS requiere seis colores nada más.

V.5.3. PROBLEMAS CONCERNIENTES A LA TOPOLOGIA.

Algunos problemas concernientes a la TOPOLOGIA son por ejemplo el hecho de poder demostrar que en un plano es imposible unir cada uno de los cinco vértices de un pentágono con todos los demás vértices por arcos (de curva) simples que no se corten.

El hecho de que una persona se pueda quitar el chaleco sin quitarse el saco o chaqueta que lo cubre.

O bien el hecho de que una cámara neumática para rueda de automóvil, la cual tiene un agujero, pueda ser vuelta al revés sin necesidad de ningún corte.

V.5.4. PROPIEDADES TOPOLOGICAS.

a) Dos superficies son topológicamente equivalentes, si puede pasarse de una a otra por un proceso de alargamiento, contracción o flexión (sin desgarros, ni soldaduras o enmiendas) efectuando cortes, si se desea, siempre que se reunan finalmente los dos bordes de cada corte en la misma forma en que estaban unidos antes de hacerlo.

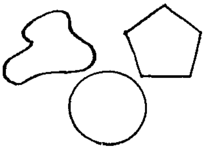
b) Una esfera y un cubo son topologicamente equivalentes, ya que podemos convertir una en otro alargándola o flexionándola. Así mismo, el CUBO se puede transformar en TETRAEDRO, el TETRAEDRO en OCTAEDRO, éste a su vez en DODECAEDRO, el DODECAEDRO en ICOSAEDEO y más aún, las soluciones topologicas en las que se puede transformar una esfera, van desde los POLIEDROS REGULARES hasta los IRREGULARES y viceversa, la superficie cualquier poliedro puede deformarse continuamente hasta transformarse en la superficie una esfera.

Pero no sólo eso, esa misma esfera puede transformarse poco a poco, a condición de que la transformación sea continua, en una niña como la protagonista de del cuento ALICIA EN EL PAIS DE LAS MARAVILLAS que cayó en un mundo fantástico siendo víctima de transformaciones extrañas que la hacían alargarse tanto, al grado de no poderse ver los pies, pero también es equivalente a la Alicia que de pronto empieza a menguar tanto que se ahoga en la paradoja de sus propias lágrimas.

b) La TOPOLOGIA es el estudio de la posición y relación de las partes de una figura con respecto a otra, sin tener en cuenta la forma o el tamaño, así la oruga del cuento que alguna vez será crisálida y luego mariposa topológicamente siempre es la misma. Por esta propiedad, un círculo será equivalente a una elipse o a cualquier curva cerrada, y de aquí se sigue que:

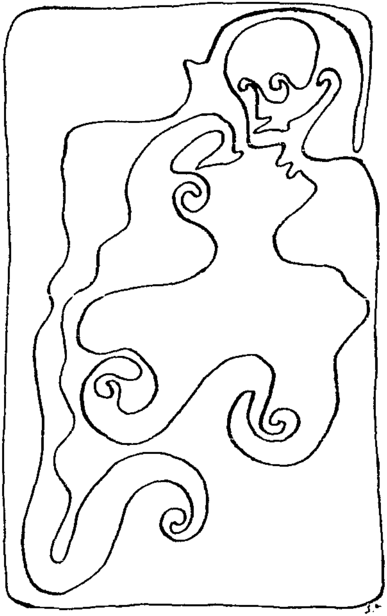
c) TODA CURVA CERRADA DEL PLANO QUE NO SE CRUZA ASI MISMA DIVIDE AL PLANO EN DOS PARTES , UNA INTERIOR Y OTRA EXTERIOR. Este teorema fue expresado por primera vez por Camille Jordán en el siglo XIX, y es un teorema majestuoso, porque es tan simple, modesto y al mismo tiempo importante que para cualquier persona es evidente que cualquier curva cerrada divida al espacio en dos partes, la que está dentro de la curva y la que está fuera de ella.

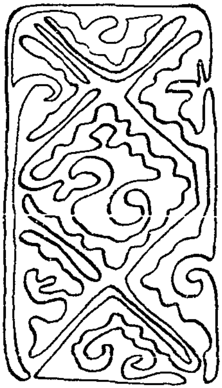
Curvas de Jordan.



Curvas que no son de Jordan.

Debe admitirse que el TEOREMA DE JORDAN parece trivial cuando se aplica a figuras fáciles, pero en figuras como las siguientes es dificil saber cuales son puntos interiores y cuales están fuera de ellas, a pesar de su apariencia tortuosa y su caracter laberintico tienen solamente un interior.





Por extraño que parezca dichas curvas pueden ser consideradas como circulos deformados.

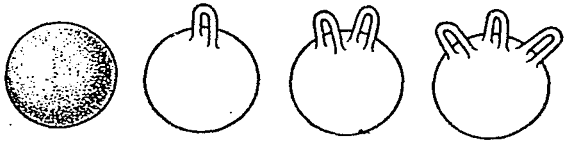
Cuando el TEOREMA DE JORDAN se extiende a tres dimensiones, se enuncia diciendo que:

CUALQUIER SUPERFICIE CERRADA, QUE NO SE CRUZA A SI MISMA, DIVIDE AL ESPACIO EN UNA PARTE INTERIOR Y OTRA EXTERIOR.

Para aclarar esto, recordemos el pasaje en el cual Alicia se encontró sola en un amplio vestibulo, de techo bajo e iluminado por una hilera de lámparas colgadas del techo. Alrededor de todo el vestibulo, las lámparas, la misma Alicia y todo lo que se encuentra encerrado en ese cuarto están adentro de la superficie cerrada de Jordán mientras que el resto de todo el universo, todo lo que está fuera, el jardin etc. estan en la parte exterior de la superficie de Jordán.

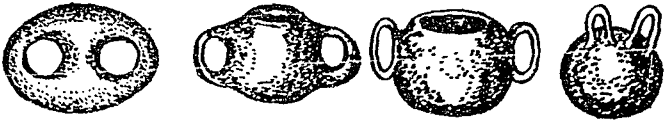
V.5.5. TRANSFORMACIONES TOPOLOGICAS.

Como ya se ha dicho, desde el punto de vista de la TOPOLOGIA dos superficies se pueden considerar idénticas si se puede llevar la una sobre la otra mediante una transformación continua. Toda superficie cerrada del espacio ordinario es topológicamente equivalente a una esfera, o bien si tiene huecos a una esfera con el mismo número de asas como tantos huecos tenga aquella superficie.



Por ejemplo la superficie toroidal (en forma de dona o rosquilla) se puede deformar continuamente en una esfera de una sola asa.

Una superficie de genero 2 se puede deformar en una cacerola por ejemplo, y así sucesivamante hasta transformarse en una esfera de dos asas.



V.5.6. NUDOS.

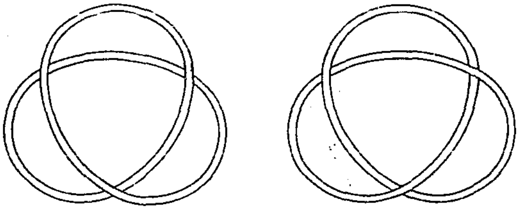
Un nudo es una curva cerrada del espacio ordinario tridimensional su forma puede ser muy variada, en otras palabras, un nudo se hace curvando y ligando un trozo de cuerda y uniendo después los extremos

Dos nudos se dicen equivalentes si uno de ellos se puede transformar en otro mediante un proceso continuo sin roturas ni autopenetraciones de la curva. inmediatamente surgen dos problemas:

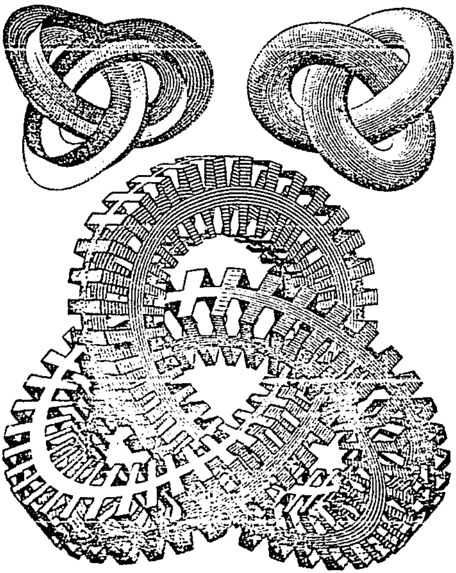
a) ¿Cómo podemos determinar si dos nudos dados por sus proyecciones planas son o no equivalentes?

b) ¿Cómo podemas clasificar todos los nudos no equivalentes?

Ambos problemas están todavía sin resolver.



Nudos topológicamente equivalentes que no son transformables uno en otro por deformación.



Mauritus C. Escher. Nudos. 43x32 cm. (1965).

V.6 GEOMETRIA RIEMANNIANA.

Imaginemos un Mundo semejante a PLANOLANDIA, poblado por seres carentes de espesor, todos estos seres están en un mismo plano del cual no pueden salir, pero su universo bidimensional curvado a través de una tercera dimensión, como la superficie de una esfera. Llamemos a este mundo ESFEROLANDIA.

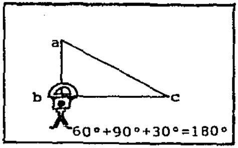
Cuando los habitantes de ESFEROLANDIA hacen excursiones cortas, su universo les resulta suficientemente plano, pero si uno de ellos hace un paseo lo bastante largo, en "LINEA RECTA", descubre un gran misterio: a pesar de no haber dado la vuelta en ningún momento ha llegado al mismo lugar del cual partió. En un universo bidimensional curvado, a través de una tercera dimensión, no hay centro, por lo menos no lo hay sobre la superficie de una esfera. El centro de este universo, está situado en una inaccesible tercera dimensión.

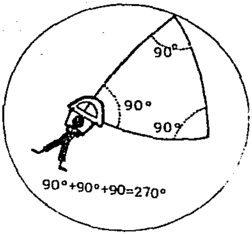
Pero supongamos que esos seres imaginarios, que permanecen carentes de espesor, tienen la forma de figuras esféricas y no de figuras planas, y están todos sobre una misma esfera, sin poder alejarse de ella. ¿Qué geometria podrán construir? En primer lugar es evidente que atribuirán al espacio sólo dos dimensiones; lo que desempeñará para ellos el papel de la recta, será la distancia más corta de un punto a otro de la superficie esférica, es decir un arco de circulo máximo en una palabra, su geometria será la GEOMETRIA ESFERICA.

Lo que llamaran espacio será esa superficie de la cual no pueden salir y sobre la que ocurren todos los fenómenos que pueden conocer. El espacio de estos seres será ilimitado, ya que sobre una esfera se puede ir siempre hacia adelante sin detenerse nunca, y además será finito, no se encontrará jamás el extremo, pero se podrá dar la vuelta.

La GEOMETRIA DE RIEMANN es la geometría esférica llevada a tres dimensiones. Al construirla, el matemático alemán tuvo que arrojar por la borda, no solamente el quinto postulado de Euclides, sino también el primero que dice : Por dos puntos no se puede hacer pasar más que una recta, y que en la GEOMETRIA DE RIEMANN expresa lo siguiente: SOBRE UNA ESFERA, POR DOS PUNTOS DADOS EN GENERAL, SOLO SE PUEDE HACER PASAR UN CIRCULO MAXIMO que como acabamos de ver, desempeñara el papel de la RECTA para los seres de ESFEROLANDIA. Pero hay una excepción: si los dos puntos dados son diametralmente opuestos, entonces se podrá hacer pasar por esos dos puntos un número infinito de círculos máximos.

Para entender como un ser humano tridimensional comprende la curvatura del espacio en el que vive, supongamos que científicos que habitan ESFEROLANDIA y científicos que habitan en un mundo bidimensional, están interesados en estudiar la geometría de sus espacios. Una de las figuras más accesibles para ellos, es el triángulo, es decir, la figura formada por tres líneas rectas que unen tres puntos geométricos, sabemos por el capitulo anterior, que LA SUMA DE LOS TRES ANGULOS INTERNOS DE UN TRIANGULO DIBUJADO SOBRE UN PLANO, ES SIEMPRE IGUAL A 180 GRADOS (prop. I.32 de EUCLIDES), es fácil verificar que dicho teorema no se aplica a los triángulos dibujados sobre la superficie de una esfera, pues como se muestra (Fig. b) un triángulo esférico formado por las secciones de dos meridianos geográficos que divergen desde el polo, y la sección del paralelo, cortado por ellos, tiene dos ángulos rectos en la base y puede tener cualquier ángulo entre cero y 360 grados en la parte superior.

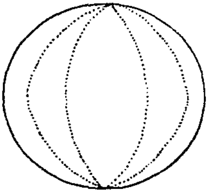




Dos científicos bidimencionales en mundos superficiales plano y curvo verifican el teorema de Euclides de la suma de los ángulos de un triángulo.

Si los seres de esferolandia quisieran seguir estudiando geometría descubririan que:

1) Las rectas paralelas no existen en su mundo, recordemos que para ellos, LINEA RECTA corresponde a la definición de CIRCULO MAXIMO.



2) La línea recta no es infinita sino indeterminada.

3) Todas las rectas perpendiculares a una recta dada, levantadas a un lado de dicha recta se cortan en un punto.

4) Es posible tener dos rectas distintas que unan los mismos puntos.

5) Existen triángulos que tienen todos sus ángulos rectos.

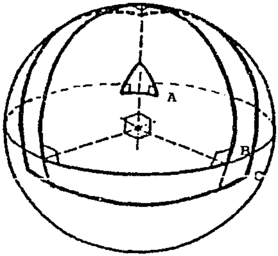
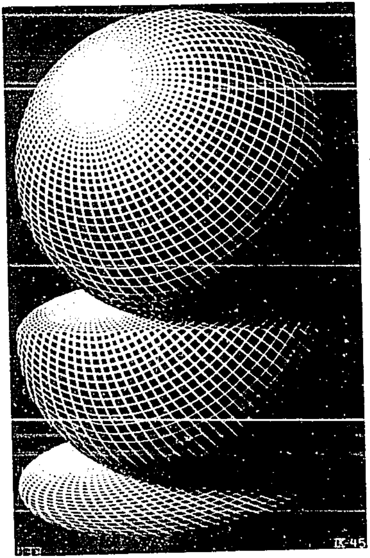
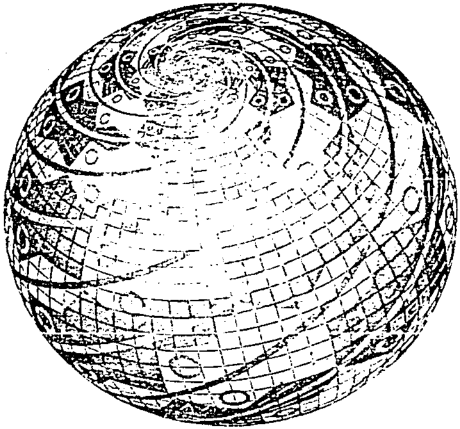


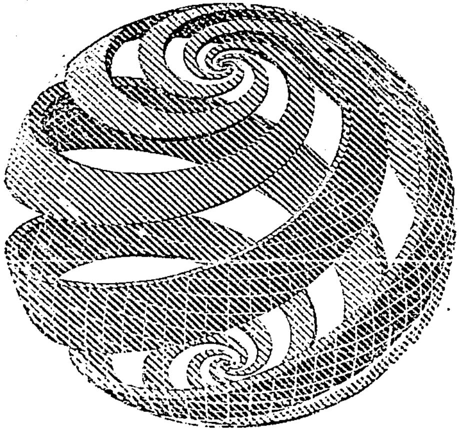
Fig. b
Los ángulos de los triángulos A,B y C son rectos.



Mauritus C. Escher. Tres Esferas I.
28x17 cm. (1948)



Mauritus C. Escher. Superficie Esférica con Peces.
Diámetro 32 cm. 1958.



Mauritus C. Escher. Espirales Esféricas.
. Diámetro 32 cm. 1958.

V.7 EL QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES

A lo largo de los siglos, muchos pensadores, insatisfechos con el QUINTO POSTULADO, (ver capitulo IV.4.1 de este trabajo) intentaron encontrar modos de eliminarlo y demostrar que no es necesario considerarlo como tal.

Los griegos y árabes comentadores de EUCLIDES, intentaron demostrárlo como si fuese un Teorema, pero su trabajo siempre resultaba insatisfactorio. En todos los casos, la supuesta demostración contenia algún error lógico directo, o bien suponia implicitamente algún principio geométrico tan dificil como el mismo QUINTO POSTULADO .

Recordemos de qué trata el quinto postulado:

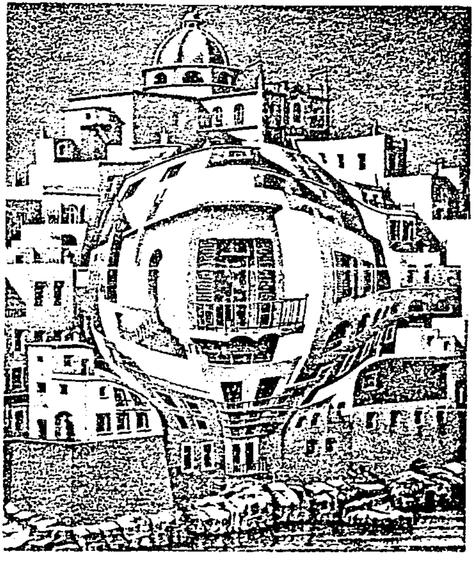
SI UNA LINEA RECTA CORTA A OTRAS DOS LINEAS RECTAS DE MANERA QUE LA SUMA DE LOS DOS ANGULOS INTERIORES DE UN LADO SEA MENOR QUE DOS ANGULOS RECTOS, ENTONCES LAS OTRAS DOS LINEAS RECTAS, SI SE PROLONGAN LO SUFICIENTE SE CORTARAN AL MISMO LADO DE LA PRIMERA LINEA EN QUE SE ENCUENTRAN AQUELLOS ANGULOS.

La preocupación de poder probar el quinto postulado se fue ahondando a medida que se reflexionaba más en ello. Por ejemplo, en los comentarios de Proclo, 31 años A.de C.aparece ya el llamado AXIOMA de PLAIFAIR que sustituyó al quinto postulado de Euclides y que se enuncia como sigue:

DADO UN PUNTO Y UNA RECTA QUE ESTEN EN EL MISMO PLANO POR ESE PUNTO EXTERIOR A LA RECTA PASA UNA Y SOLO UNA PARALELA.

También afirmar que LA SUMA DE LOS ANGULOS DE UN TRIANGULO ES IGUAL A DOS ANGULOS RECTOS es otro principio capaz de hacer el oficio que hace el quinto postulado de Euclides; o bien decir que DADOS TRES PUNTOS QUE NO ESTEN EN LA MISMA LINEA RECTA, SOLAMENTE SE PUEDE CONSTRUIR UN CIRCULO QUE PASE POR LOS TRES.

Estos son algunos entre los diversos principios, que pueden sustituir al QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES sin debilitar la serie de teoremas que serian deducibles de él.



Mauritus C. Escher. Balcón. 30x23.5 cm. 1945.

V.8 GEOMETRIA DE LOBACHEVSKY.

No fue sino hasta el siglo XIX, cuando los matemáticos se dieron cuenta de que el QUINTO POSTULADO realmente es independiente de los demás.

Durante la primera parte de ese siglo, varios matemáticos desarrollaron independientemente un nuevo tipo de geometria entre ellos Lobachevsky. Quien tomó como punto de partida la aserción opuesta al QUINTO POSTULADO:

DADOS UN PUNTO Y UNA RECTA QUE ESTEN EN EL MISMO PLANO, POR ESE PUNTO EXTERIOR A LA RECTA SE PUEDEN TRAZAR AL MENOS DOS RECTAS QUE NO CORTAN A AQUELLA.

De aqui dedujo numerosas consecuencias que constituyeron una nueva geometria.

V.8.1 UN VIAJE POR EL MUNDO DE LOBACHEVSKY.

Regresemos nuevamente a Planolandia todo en Planolandia ocurre tal como ocurriría en el plano euclidiano ordinario. Imaginemos ahora un círculo y consideremos solamente su interior, supongamos que nosotros hemos caído, por algún motivo en el interior de ese circulo, y no conocemos su frontera, es decir, excluimos de nuestro estudio la circunferencia que lo envuelve.

Al interior de ese circulo donde nos encontramos le llamanos plano puesto que como nunca podremos conocer la frontera todo lo que nos suceda será dentro de él.

Las CUERDAS del circulo, serán llamadas RECTAS y de acuerdo con el convenio anterior, los puntos extremos, es decir, los puntos donde se cortan las cuerdas con la circunferencia serán excluidos por pertenecer a ésta. Finalmente, pensaremos que MOVIMIENTO será cualquier transformación que aplique el circulo en sí mismo y que transforme RECTAS EN RECTAS.

En otras palabras, pensemos que de pronto el circulo empieza a rotar y a rotar alrededor de su centro, nosotros que estamos ahi, sentimos como si nos marearamos sin embargo el circulo, sigue siendo circulo y las CUERDAS a las que llamamos RECTAS, siguen siendo rectas, aunque el circulo continúe rotando.

Introduciendo estos convenios de nomenclatura, los teoremas de la GEOMETRIA EUCLIDIANA se transforman en los teoremas de la GEOMETRIA DE LOBACHEVSKY e inversamente, cada teorema de la GEOMETRIA DE LOBACHEBSKY se interpreta como un hecho de la GEOMETRIA DE EUCLIDES dentro del circulo.

Por ejemplo, el AXIOMA DE LOBACHEVSKY dice que: POR UN PUNTO EXTERIOR A UNA RECTA SE PUEDEN TRAZAR AL MENOS DOS RECTAS PARALELAS A LA RECTA DADA. Lo que se cumple en el interior de nuestro circulo. (Fig. c) Según los convenios establecidos, RECTAS son CUERDAS, con lo que obtenemos el siguiente enunciado:

POR UN PUNTO INTERIOR A UN CIRCULO Y EXTERIOR A UNA CUERDA, SE PUEDEN TRAZAR AL MENOS DOS CUERDAS QUE NO CORTAN A LA PRIMERA.

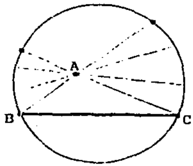


Fig.c

V.8.2. DESARROLLO DE LA TEORIA DE LAS PARALELAS.

En la geometría -escribe lobachevsky-"he encontrado, ciertas imperfecciones por las cuales esta ciencia, sin considerar la transición a la analítica, no ha hecho ningún avance desde Euclides.

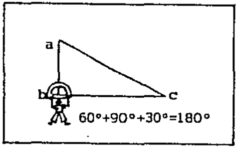
Como parte de estas imperfecciones, considero la oscuridad en los conceptos fundamentales de las magnitudes geométricas asi como la manera y método como se representa la medida de estas mismas magnitudes y finalmente la grave LAGUNA en la TEORIA DE LAS PARALELAS, en la que además todos los intentos de los matemáticos por llenarla han sido más que inutiles." (V.13)

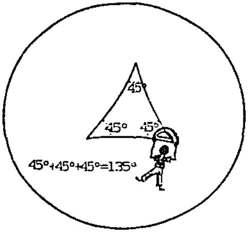
Para exponer de modo rápido el método utilizado por Lobachevsky en la construcción de la geometría imaginaria (PANGEOMETRIA), refirámonos a sus investigaciones geométricas sobre la TEORIA DE LAS PARALELAS.

En éllas, Lobachevski, después de haber establecido un grupo de teoremas independientes de esta teoría considera lo siguiente:

Una recta se ajusta a si misma en todas sus posiciones, es decir, que durante la revolución de la superficie que contiene a la recta, ésta no cambia de lugar si pasa por dos puntos fijos de la superficie, en otras palabras, si transformamos la superficie que contiene a esa recta, al rededor de dos puntos de élla, la línea no se mueve. (Fig. c)

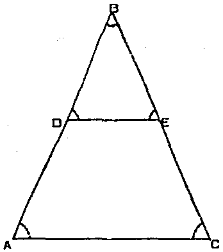
Para comprender lo que sucede en un mundo de Lobachebsky tridimensional, imaginemos que nos volvemos a encontrar en el cascarón de una esfera, sólo que esta vez estamos en el interior de ese cascarón, donde los cientificos que ahí se encuentran, también se interesan por estudiar la geometria de su espacio. Para dicho efecto utilizan el TRIANGULO y descubren que la suma de los tres lados internos de éste, no siempre es igual a 180 grados, es más, ni siquiera es mayor que dos rectos como sucedia en esferolandia.





LLamemos a este mundo de Lobachevsky, LOBACHEVSLANDIA, donde una recta se interpreta como una cuerda y un plano como un circulo cuya circunferencia está sobre el cascarón interior de la esfera, y por lo tanto los puntos extremos de las cuerdas y las circunferencias de esos circulos, se excluyen; finalmente un movimiento se define como una transformación de la esfera en sí misma que transforma cuerdas en cuerdas.

Con esto los matemáticos descubren que mientras en la geometria euclidiana, dos triángulos pueden tener los mismos ángulos, pero distintas áreas, es decir uno puede ser amplificación del otro, en LOBACHEBSLANDIA, los ángulos disminuyen cuando las áreas crecen, por lo que solamente los triángulos de igual área pueden tener los mismos ángulos. Así es imposible construir una figura semejante a una figura dada.



El triángulo ABC tiene un área diferente a la del triángulo DBE, sin embargo:

ángulo CAB = ángulo EDB

ángulo ABC = ángulo DBE

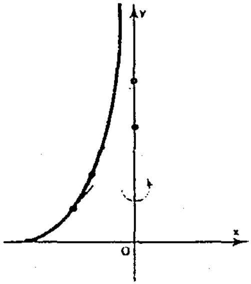
ángulo BCA = ángulo BED.

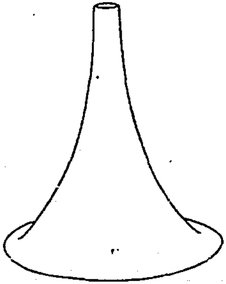
En geometría euclidiana si se divide una circunferencia en n partes iguales y se trazan tangentes por los puntos de división, estas n tangentes formarán un polígono. Lo mismo sucede en la geometría de Lobachevsky si el radio es suficientemente pequeño; pero si dicho radio es bastante grande, las tangentes no se encuentran entre sí.

Sabemos bien, que si nos dan un punto C y una recta AB en el mismo plano, el número de paralelas a la recta AB que se pueden trazar por el punto C es UNO en geometría euclidiana. INFINITO en LOBACHEBSLANDIA, e igual a CERO en ESFEROLANDIA.

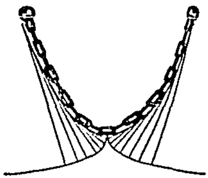
V.B.3. REPRESENTACION DE LA GEOMETRIA DE LOBACHEVSKY SEGUN BELTRAMI.

La GEOMETRIA DE LOBACHEVSKY fue intuitivamente interpretada en 1864 por el matemático italiano Beltrami, quien hizo notar que esta geometría coincidía con la geometría intrínseca de una cierta superficie, la cual se denomina actualmente SEUDOESFERA.

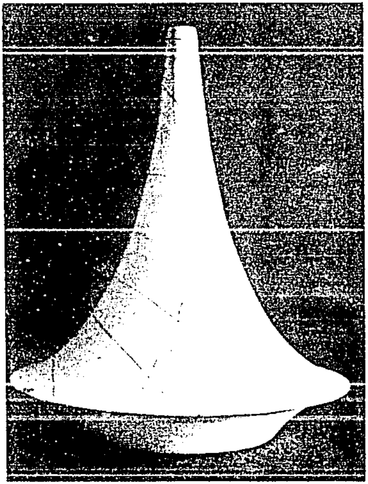




Dicha superficie es aquella engendrada por la revolución de una curva llamada TRACTRIZ alrededor de un eje central.



La curva formada por una cadena que cuelga libremente se denomina catenaria. Si se trazan las tangentes a una catenaria, la curva normal a ellas y que encuentra a la catenaria en su punto más bajo es, de nuevo, la tractriz



Seudoesfera de Beltrami.

Dicha interpretación viene a decir que todas las relaciones geométricas sobre una parte del plano de Lobachevsky coinciden con las relaciones geométricas sobre una parte conveniente de la SEUDOESFERA de lo que se deducen los siguientes convenios:

1) Por SEGMENTOS DE RECTA se entienden las líneas de menor longitud sobre dicha superficie, a tales líneas se les llama geodésicas.

2) La distancia entre dos puntos se define como la longitud de la línea más corta que une a ambos sobre la superficie.

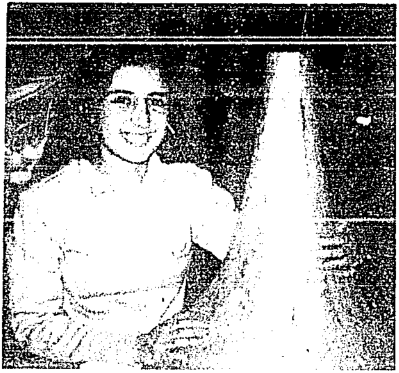
3) Se dice que dos figuras son iguales si entre sus puntos se puede establecer una correspondencia, de forma que la distancia entre puntos correspondientes sea la misma.

4) Un movimiento sobre la SEUDOESFERA que conserve las dimensiones desde un punto de vista de la geometria intrinseca, aunque vaya acompañado de torsiones, representa un movimiento en el plano de Lovachevski. ( )

5) Las longitudes, áreas y ángulos se miden, como de costumbre, sobre la superficie, y coresponden a las longitudes, áreas y ángulos en la GEOMETRIA DE LOBACHEVSKI.

6) Encontramos por lo tanto que la geometría aplicable a una esfera es la de Lobachevski. por ejemplo, sobre la SEUDOESFERA, desde un punto dado, pueden trazarse dos líneas paralelas a una tercera, que se aproximan asintóticamente a ella sin llegar a cortarla. (Fig. d)

De este modo, la GEOMETRIA DE LOBACHEVSKI queda satisfecha por una entidad de la geometría de Euclides, cumpliendo, así con el criterio de compatibilidad.



Jeannette Escalera B. Seudoesfera.
Escultura en Yeso. Diametro 50 cm.
altura 50 cm. (1982)

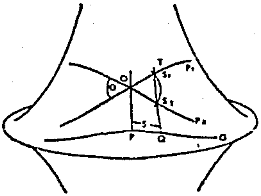


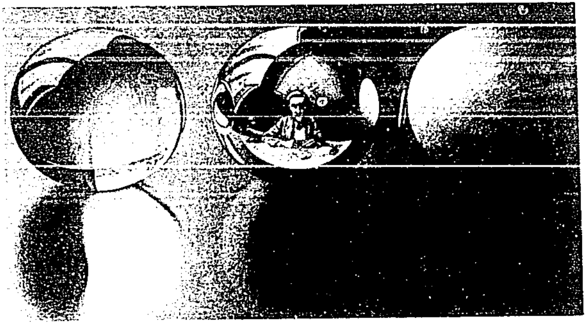
Fig.d

Este diagrama es un ejemplo, algo detallado, de esta proposición, donde se traza una perpendicular a la línea G perteneciente a la seudoesfera; desde un punto O deben trazarse dos paralelas a la línea G. Márquese la distancia S sobre G, determinando el punto Q. Por Q levántese una perpendicular a G. Luego, si trazamos un círculo con centro O y radio S, esta circunferencia, cortará a QT en S_1 y S_2. Estos dos puntos al ser unidos con O, determinan las dos paralelas a G, P_1 y P_2. Todas las líneas que pasan por O, formando un ángulo menor que θ no cortan a G, aun cuando no son paralelas a ello. (V.14)

V.9. LAS GEOMERIAS NO EUCLIDIANAS EN LA OBRA DE ARTE.

Un ejemplo de la aplicación de estas geometrías como herramienta en la obra de arte lo encontramos en MANO CON ESFERA REFLEJANTE, litografía de Mauritus Escher realizada en 1935, en donde el autor juega con la GEOMETRIA ESFERICA introduciéndose en el ESPACIO RIEMANNIANO. De esta forma, al reflejar su imagen en una esfera sujetada por él, recupera la contradicción de tener su vida en su propia mano.

Dicho efecto da la sensación de que el autor se ha metido dentro del cascarón de la esfera, creando ahí su mundo imaginario, lo que nos hace pensar que Escher ha entrado en el ESPACIO DE LOBACHEVSKI. Pasar de una geometría a otra, ese es el juego en este grabado.



Mauritus C. Escher. Tres Esferas II. 26 x 47 cm. (1946).

Mauritus C. Escher. Mano con Esfera Reflejante.
32 x 21.5 cm. (1935)

FUENTES DE INFORMACION.

Capitulo V.

(V.1) J.P. Collette. HISTORIA DE LAS MATEMATICAS. Tomo II, 2a ed., Siglo XXI Editores, México, 1986, p.441.

(V.2) D. Bergamini. MATEMATICAS. Time-Life, Col. Científicos, México, 1979, p.101.

(V.3) E. Kesner y J. Newman. MATEMATICAS E IMAGINACION. Edit. C.E.C.S.A., México, 1972, p.101.

(V.4) J. Albrecht. ESCULTURA EN EL SIGLO XX. Edit. Blume, Barcelona, 1981, p.15.

(V.5) E.Kesner y J. Newman. Op. cit. P.110.

(V.6) Ibid.

(V.7) G. Gamow. UNO, DOS, TRES,...,INFINITO. 2a ed., edit. Espasa-calpe, Madrid, 1979, p.73.

(V.8) L. Carroll. ALICIA EN EL PAIS DE LAS MARAVILAS. 9a ed. Alianza Editorial, Madrid, 1981, p.45.

(V.9) Ibid., p.85.

(V.10) K. Fan y M. Frechet. INTRODUCCION A LA TOPOLOGIA CONVINATORIA. 3a ed., EUDEBA, Buenos Aires, 1967, p.5.

(V.11) J. Bronowski. "El Descubrimiento de la Forma". p.55 en LA ESTRUCTURA DEL ARTE Y LA CIENCIA de G. Kepes, edit. Novaro, México, 1970.

(V.12) Ibid.

(V.13) N. Lobachebski. "Investigaciones Geométricas en la Teoría de las Paralelas." p. 11 en un suplemento de NON-EUCLIDEAN GEOMETRY de Roberto Bonola, Dover Publications, Inc., New York,1955.

(V.14) E. Kesner y J. Newman. Op. cit. p.129.

C O N C L U S I O N E S

1) Desde el monento en que nace la filosofía el ser humano se preocupa por explicar los fenómenos naturales en base a reglas generales, su interes por la búsqueda de principios que den una explicación al origen de todo lo ha llevado de la mano ha perseguir y elaborar METODOS de trabajo y normas de vida. Los logros matemáticos de los pitagóricos, sugieren que necesariamente existe una indiferencia por todo lo material, y si este es el criterio de la ciencia puede decirse que jamás es completamente pura o completamente impura Sin embargo, la validez general se establecía después de observar muchos resultados particulares que conducían a una misma conclusión. A esto es a lo que se le llamó método inductivo. Hay que recordar que en un principio la diferencia entre filosofía y ciencia no era clara, nacen juntas y caminan de la mano. La ciencia como propiamente la entendemos data de tiempos de Galileo y Descartes.

2) Ya antes de los albores de la época helenistica, el espiritu griego había llegado a su madurez en cuanto a la busqueda de un balance estético y lógico, aplicado a todas las ramas del saber humano, donde en primer plano figuraba la visión de conjunto antes de la meticulosidad en el detalle, lo cual era evidente en arquitectura, literatura, y en el arte en general.

La voluntad helénica muestra apareados entre si, el arte del escultor, arte apolineo y el arte no-escultórico de la música, que es el arte dionisiaco fusionados, engendran la obra de arte.

El mundo apolineo invitaba al heleno a quedar enredado en la apariencia del mundo onírico en cuya producción cada hombre es un artista pues el sueño valora el fondo misterioso del ser, de donde surge el arte figurativo.

3) Si al espanto que sufre el ser humano cuando el conocimiento de la apariencia toma alguna de sus configuraciones, le añadimos el éxtasis delicioso que produce esa misma infracción, estamos hechando una mirada a la esencia del arte dionisiaco en donde el individuo con todos sus límites y medidas se sumerge en el olvido de sí, penetrando en una profunda embriaguez en donde la desmesura se devela como única verdad, entonces surge, el arte sin imagen, el arte lírico, místico y simbólico.

4) Presos en el continuo devenir del espacio y el tiempo, de la estática y el movimiento, del ritmo y la armonía, de la seriedad y la embriaguez, del sueño y el juego, de la ilusión y la locura, de la ingenuidad y el desenfreno, se encuentra el hombre griego cautivo en la preferencia por la luz, frente al universo de las cosas físicas, todas de suyo iguales.

Uno de los indicios más significativos del heléno clásico, fue, elegir aquella cosa preferida como metáfora explicativa de todas las demás para conjeturar su mundo frente al Universo. Tanto en geometría como en filosofía se sirvió de la luz para explicarse todo.

5) Esta dirección luminosa no se interrumpe en la geometría de Euclides, donde la palabra superficie significa sobre haz luminoso, misma que tuvo un lugar privilegiado en la geometría griega, porque en élla, se refleja lo primeramente visible, y porque es el lugar de aparición de todas las figuras.

Desde este punto de vista, la tercera dimensión es por necesidad oscura y está privada de luz.

Esta privación presupone una realidad, lo que el heleno busca es la luz, por eso centró la geometría en lo visible, que es la superficie, centró todos los elementos geométricos en ésta, unos como el punto y la linea, que por su visibilidad imperfecta aluden o señalan hacia la superficie. Otro, como el cuerpo, que en su dimensión propia, la tercera, no es directamente visible y que está privado de luz.

Así, la estatua, en cuanto bloque de mármol, es algo muy real en cuanto figura onirica. Pues mientras que ésta, flota como imagen de la fantasía ante los ojos del artista, éste continua jugando con lo real.

6) Dos son los estados en que el ser humano alcanza la delicia de su existencia, el sueño y el juego, así, mientras el sueño es el juego del ser humano individual con lo real, el juego se constituye en el discurso de lo irreal, pues se aparta de la vida corriente por su lugar y su duración, pero tiene su propio espacio interno y su propio tiempo interno. Es un deleite de plazmación en si, multivoco y multidimensional.

7) Así, jugando con la geometría se pueden deducir gran cantidad de propiedades estéticas y artisticas.

8) De lo que se infiere que por su belleza y gran valor estético, por la elegancia de sus construcciones y la nitidés de sus razonamientos la geometría ha representado un papel importante en el arte, como estructura en algunas ocaciones, como obra misma, en otras, como manifestación propia algunas veces. Muchas otras parecen estar enmarcadas en el

rectángulo dorado, que no es otra cosa que uno de tantos teoremas de LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES.

9) Los RECTANGULOS y los BLOQUES AUREOS entre todos los posibles, son considerados como los más agradables a la vista, sin dejar de lado otro tipo de bloques armónicos que también son interesantes y que se mencionaron en la tesis.

10) Para el pedagogo, la geometría se distingue como la disciplina más apropiada para desarrollar la capacidad de razonamiento del alumno y despertar su interés en todos los niveles, tanto cientificos como filosoficos y artísticos.

En el nivel más elemental, cuando al alumno únicamente puede exigirsele que distinga una figura de otra, que se fije en los conceptos intuitivos más simples, las figuras más sencillas inspiran en él, un agradable sentido de estética de simetría de regularidad y belleza.

Sin embargo, desde hace varios años, se ha notado la tendencia de suprimir las matemáticas en la enseñanza de las escuelas de arte, a veces parcialmente otras totalmente. Esto, creo yo, es un grave error, no unicamente por el valor que las matemáticas, en especial la GEOMETRIA, presentan como asignaturas formativas sino, como base para que el alumno sea capaz de efectuar razonamientos lógicos y más adelante, para que a través de éllas, se le proporcione al estudiante el mejor medio para que perfeccione sus facultades de investigación.

Es por eso que en este trabajo se muestra algo de lo que deberían incluir los programas en las escuelas dedicadas a la enseñanza de las ARTES VISUALES.

11) Piet Mondrian en sus teorias de diseño y color ha explorado conceptos espacio temporales buscando en estos la

pureza trascendente de la pintura geométrica, ha utilizado en su obra todos los teoremas del LIBRO II de los ELEMENTOS de EUCLIDES combinando unos con otros, y mezclándolos entre si con algunos teoremas de los libros I, IV y VI.

El elemento fundamental de su obra lo obtiene a través de colores primarios, la forma rectangular y la composición asimétrica, creando con ello, las bases del lenguaje del STIJL, cuyas teorías son llevadas a la escultura, la arquitectura, el diseño gráfico y aun, a diseño de muebles y proyectos arquitectónicos. Entre los colaboradores del STYJL nos encontramos pintores tanto futuristas, como constructivistas, escultores, poetas, arquitectos y diseñadores. Todos con una misma intensión, traspasar los límites de la forma bidimensional y tridimencional para llevarla a la abstracción hasta sus últimos extremos. La nueva imagen pictórica debía representar la dualidad fundamental de la vida mediante la oposición de lo horizontal y lo vertical a través de la armonía perfecta que le da, como resultado la SECCION AUREA (def. 3 del libro 6 de los elementos de Euclides).

De lo que se deduce que el arte abstracto viene a ser la unión y ruptura del arte con la geometría.

12) Vivimos en un espacio tridimensional rodeado de formas definidas que se mantienen o que cambian, y sin embargo, pocos, muy pocos, encontramos un pequeño escape a nuestra situación de a este mundo, imaginando una CUARTA DIMENSION y muchos menos aún, nos atrevemos a pensar en espacios de cinco o más dimensiones.

Cuestionamientos como los siguientes se dieron lugar en el siglo pasado: si en un espacio de dos dimenciones podemos dibujar, sin dificultad poligonos regulares de cualquier número de lados, es curioso que en un espacio tridimensional sólo podamos construir cinco poliedros regulares (como ya se demostró en el capitulo III) ¿qué pasará en espacios n-dimensionales, habrá en tales espacios "CUERPOS o lo que sea que puedan considerarse REGULARES ? La busqueda de estos objetos y la realización de ellos, a los que llamaremos politopos, considero yo, es una buena alternativa que se le presenta a los artistas plásticos para el desarrollo de su obra.

13) Alguien podria asegurar que carece de sentido pensar en objetos tetradimensionales o pentadimensionales, etc, por el hecho de que nuestros cerebros están educados a concebir sólo imagenes tridimensionales. Pero ¿por qué tres dimensiones? ¿Es el tres un hecho, o un artefacto? ¿Por qué ha de haber formas regulares en medio de tanta confusión? Este argumento quizás pueda tener alguna fuerza pero no la suficiente, cuando uno dibuja en perspectiva hace arreglos de lineas unidimensionales en hojas bidimensionales para obtener representaciones de objetos tridimennsionales ¿Acaso no somos capaces de concebir arreglos tridimensionales de representaciones tetradimensionales etc.?

14) A mediados del siglo XIX Shlafli demostro que en todos los espacios de n-dimensiones hay en efecto. politopos regulares equivalentes a los cuerpos plátonicos clásicos.

En el espacio de 0 dimensiones existe uno que es el punto. En el de 1-dimension la recta, en el bidimensional, los poligonos regulares. En el espacio tridimensional los cinco polieddros regulares. En el tetradimensional hay sus y sólo sus politopos regulares que se conocen con los siguientes nombres

Pentatopo o simlex-4 que posee 5 vértices, 10 caras, 10 aristas, y 5 tetraedros.

El Hipercubo-4, con 16 vértices 24 caras, 32 aristas y 8 cubos.

El hiperoctaedro-4 que tiene 8 vértices, 32 caras, 24 aristas y 16 tetraedros.

El 24-politopo-4 con 24 vértices 96 caras, 96 aristas y 24 octaedros.

El 600 politopo-4 en el que se encuentran 600 vértices 720 caras, 1200 aristas, 120 dodecaedros.

El 120 politopo-4, con 120 vértices 1200 caras, 720 aristas y 600 tetraedros.

Se deja al artista plástico, elucubrar sobre dichos objetos, imaginarlos, desglosarlos, construirlos, analizarlos, sintetizarlos y aplicar dichos objetos a su obra. (En cuanto respecta a hipercubo-4 hay quienes afirman que han podido visualizar su imagen (la construcción se da en el apéndice)

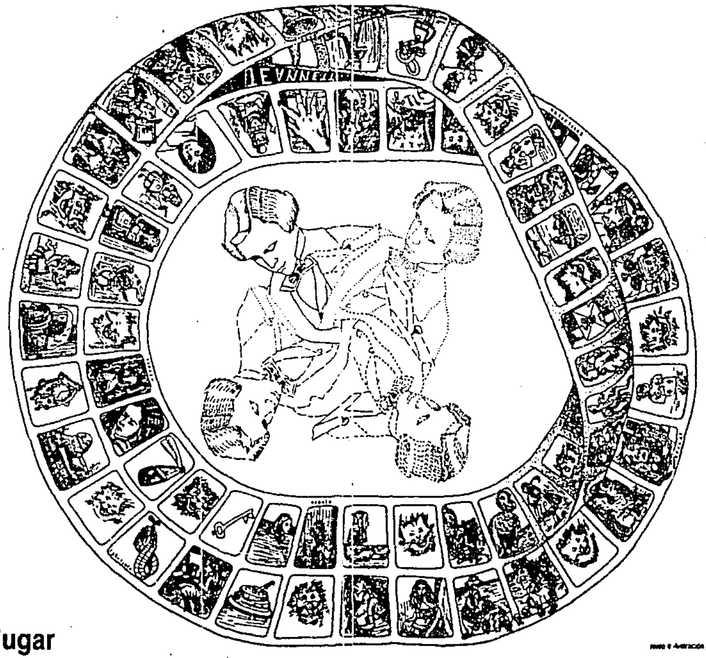
15) Tanto la familia de los simplex, como la de los hipercubos, asi como la de los hiperoctaedros están intimamente relacionados con EL NUMERO DE ORO. La figura mágica y hermética por excelencia, el pentagrama aureo, sello distintivo de la hermandad pitagórica y emblema de la ciencia oculta, la ESTRELLA PENTAGONAL, no es sino la proyección en el plano del simplex-4, cuyo esqueleto tridimensional es topologicamente equivalente al átomo de carbono, principio de la VIDA.

16) La experimentación creadora en el campo de las artes ha sacado a la luz paralelismos significativos con la investigación científica.

Las investigaciones referentes a la ciencia del lenguaje muestran que sus propiedades extructurales tienen efectos de gran alcance en la manera de pensar. Porque la extructura de los procesos mentales de una persona se basa en la compleja estructura de su lenguaje, el cual le comunica ciertas categorías y le niega el acceso a otras. Complementan el estudio matemático y lógico del lenguaje algunos instrumentos tan rápidos como las computadoras.

Con el material de esta tesis, es posible implementar y diseñar programas que produzcan todo tipo de elementos gráficos contemplados y planteados en este trabajo.

Con ayuda de las microcomputadoras pensonales. Dicha tarea es otra alternativa que queda abierta tanto a los estudiantes de artes visuales o de diseño gráfico así como a estudiantes de otras facultades como podrían ser de arquitectura, matemáticas, actuaria, ingeniería en computación, entre algunas, para la creación y desarrollo de otras tesis profesionales.



Alicia te invita a jugar

[illegible] e ilustración por [illegible]

356

FUENTES DE INFORMACION.

Acha, Juan. ARTE Y SOCIEDAD LATINOAMERICANA: EL SISTEMA DE PRODUCCION. Editorial, F.C.E, Mexico, 1979, 323 pág.

Ahlfors, Lars V. COMPLEX ANALYSIS. AN INTRODUCTION TO THE THEORY OF ANALITIC FUNCTIONS OF ONE COMPLEX VARIABLE. Mc Graw W. Hill Book Company, Inc. 1953 New York. 247 pág.

Albrecht Hans, Joachim. ESCULTURA EN EL SIGLO XX. Editorial Blume, Barcelona 1981, 244 pág.

Aleksandrov, A. D., y otros. LA MATEMATICA SU CONTENIDO, METODOS Y SIGNIFICADO. Tomo III Alianza Editorial, Madrid, 1973, 408 pág.

Apostol, Tom M. CALCULUS. INTRODUCION CON VECTORES Y GEOMETRIA ANALITICA. Vol I Edit. Reverté, S. A. Barcelona 1965, 575 pág.

Aristóteles. METAFISICA. 8a. ed., edit. Porrua, México, 1980, 260 pág.

Balmori, Santos. AUREA MESURA Edit. U.N.A.M. México, 1978, 189 pag.

Bamz, J. MOVIMIENTO Y RITMO EN LA PINTURA. 4a ed., edit. Leda, Barcelona, 1970, 47 pág.

Barker, Stephen F. FILOSOFIA DE LAS MATEMATICAS. Edit. UTEHA. México, 1965, 170 pág.

Becatti, Gioranni. LAS GRANDES EPOCAS DEL ARTE. LA EPOCA CLASICA Edit. EDAF. Madrid, 420 pág.

Bergamini, David. (editor) MATEMATICAS. TIME-LIFE, Col. Cientifica. México, 1979, 200 pág.

Birkhoff, George D. MEDIDA ESTETICA. Edit. Rosario, Argentina, 1945, 269 pág.

Bonola, Roberto. NON-EUCLIDEAN GEOMETRY. Dover Publications, Inc., New York. 1955, 400 pag.

Cantor, Georg. CONTRIBUTIONS TO THE FOUNDING OF THE THEORY OF TRANSFINITE NUMBERS. Dover Publications, Inc. New York. 1955, 220 pág.

Carroll, Lewis. ALICIA A TRAVES DEL ESPEJO. Alianza Editorial, Madrid 1973, 218 pág.

Carroll, Lewis. ALICIA EN EL PAIS DE LAS MARAVILLAS. 6a ed., Alianza Editorial, Madrid 1979, 208 pág.

Carroll Lewis. EL JUEGO DE LA LOGICA. Alianza Editorial, 3a ed., Madrid 1979, 172 pág.

Carroll, Lewis. EL PARAGUAS DE LA RECTORIA. CAJON DE SASTRE CON ILUSTRACIONES DEL AUTOR. Ediciones del Cotal S. A., Barcelona, 1979, 190 pág.

Carroll, Lewis. LA CAZA DEL SNAK. Edición Bilingue, Mascarón Barcelona 1982, 92 pág.

Carroll, Lewis. NIÑAS. Edit. Lumen, 3a ed., Barcelona 1980, 74 pág.

Carroll, Lewis. SILVIA Y BRUNO. La Fontana Literaria Núm. 13, España. 204 pág.

Collette, Jean-Paul. HISTORIA DE LAS MATEMATICAS Tomo II 2a ed., Siglo XXI editores, México 1986, 607 pág.

Durero, Alberto. INSTITUCIONES DE GEOMETRIA. Edit. U.N.A.M., México, 1979, 250 pág.

Echague, J. A. " Cinco y Sólo Cinco. Cavilaciones Platónicas". pág 6 en CACUMEN. Año II. Núm. 16, Barcelona, mayo 1984.

Escalera Bourillon, Jeannette. TEOREMA DEL MAPEO DE RIEMANN. Tesis presentada para obtener el titulo de Matemático. Fac. de Ciencias U.N.A.M. México, 1983.

Escalera Bourillon, Jeannette. "La Oca Loca. Alicia te Invita a Jugar". pág. 4 en TIEMPO LIBRE No. 348, México, enero 1987.

Escher, Mauritus C. THE GRAPHIC WORK OF M. C. ESCHER. 6a ed. edit. Ballantine Books, New York, 1973, 94 pág.

Euclid. THE THIRTEEN BOOKS OF THE ELEMENTS. Traducido al Ingles con introdución y comentarios por Thomas L. Heath, Dover Publications Inc. New York. 3 Vol. New York. 1955 United States.

Euclides. LES OEUVRES D EUCLID Traducido al francés por F. Peyrard 9a. ed., edit . Albert Blanchard, 1966, París, 626 pág.

Fan, ky y Fréchet, M. INTRODUCCION A LA TOPOLOGIA CONVINATORIA. 3a. ed. EUDEBA, Buenos Aires, 1967, 61 pág.

Fink Eugen. OASIS DE LA FELICIDAD. PENSAMIENTOS PARA UNA ONTOLOGIA DEL JUEGO. Centro de Estudios Filosóficos. U.N.A.M., México, 1966, 30 pág.

Friedman, Mildred (coordinador) DE STIJL: 1917 - 1931. VISIONES DE UTOPIA Alianza Edit. Madrid, 1986, 254 pág.

García Bacca, Juan David. (traductor y compilador) LOS PRESOCRATICOS. 3a. ed., Edit F.C.E., México, 1982, 391 pág.

Garcia Bacca, Juan David. "Introducción Filosófica a los Elementos de Geometria de Euclides" p. LIII en OBRAS COMPLETAS DE EUCLIDES.

Gamow, George. UNO, DOS, TRES... INFINITO. 2a ed., edit. Espasa-Calpe S. A., Madrid, 1979,

Ghyka, Matila C. ESTETICA DE LAS PROPORCIONES EN LA NATURALEZA Y EN LAS ARTES. 3a. ed., edit. Poseidón, Barcelona, 1983, 298 pág.

Ghyka, Matila C. EL NUMERO DE ORO. LOS RITMOS. Volumen I, 2a ed. Edit. Poseidón, Barcelona, 1978, 210 pág.

Ghyka, Matila C. EL NUMERO DE ORO. LOS RITOS. Volumen II, 2a ed., edit. Poseidón, Barcelona, 1978, 222 pág.

Grassmann, Hermann. TEORIA DE LA EXTENSION. Epasa Calpe, Serie Menor, Buenos Aires, 1947, 33 pág.

Hauser, Arnold. HISTORIA SOCIAL DE LA LITERATURA Y DEL ARTE, 3 Vol. 16a ed., Edit. Guadarrama, Punto Omega, Barcelona, 1980.

Hofstadther, Douglas R. GODEL, ESCHER, BACH: UNA ETERNA TRENZA DORADA. Edit. CONACIT, Ciencia y Desarrollo, México, 1982, 915 pág.

Hofstader Douglas R. GODEL, ESCHER, BACH: AN ETERNAL GOLDEN BRAID. Vitage Books, A Division of Random House New York. 1980, 774 pág.

Huizinga Johan. HOMO LUDENS, EL JUEGO Y LA CULTURA. Edit. F.C.E. México, 1943, 500 pág.

Ieronim Stoichita, Victor. MONDRIAN. Abbey Library, London, 1979, 27 pág.

Iglesias Janeiro, J. LA ARCANA DE LOS NUMEROS. Edit Kier S. A., 7a. ed. Buenos Aires, 1978, 311 pág.

Irving, Adler. MATEMATICAS. LA HISTORIA DE LOS NUMEROS, LOS SIMBOLOS Y EL ESPACIO. Edit. Novaro, México, 1967, 54 pág.

Kant, Manuel. CRITICA DE LA RAZON PURA. 5a ed. Editorial Porrúa, S. A., México. 1979, 369 pág.

Kasner E. y Newman J. MATEMATICAS E IMAGINACION. Edit. C.E.C.S.A. México, 1972, 291 pág.

Kepes, Gyorgy. (Cordinador) LA ESTRUCTURA EN EL ARTE Y EN LA CIENCIA. Edit. Novaro, México, 1970, 189 pág.

Koestler, Artur. LOS SONAMBULOS. Edit. CONACIT., México, 1981, 598 pág.

Lara Aparicio, Miguel. ANTOLOGIA DE MATEMATICAS. 2 Vol, 2a ed. Edit. U.N.A.M., México, 1983, 176 pág.

López de Medrano, Santiago. "Principios y Métodos de la Enseñanza de las Matemáticas". pág. 43 en REVISTA MATEMATICA. Serie II. Núm. 8. S.M.M. México, agosto 1970.

LLuis, Emilio. "Algunos Aspectos de la Geometría". Pág. 7 en REVISTA MATEMATICA. Serie II. Num 8. S.M.M., México, agosto 1970.

Mace, Federico y Eduardo Alfonso. LA SABIDURIA PITAGORICA. Edit. Orion, México, 1970, 125 pág.

Morris, Kline. MATHEMATICAL THOUGHT FROM ANCIENT TO MODERN TIMES. 4a ed., Oxford U.P., N. York. 1976, 200 pág.

Nach, J. M. EL CUBISMO, EL FUTURISMO Y EL CONSTRUCTIVISMO. Edit. Labor, Barcelona 1975, 65 pág.

Newman James R. SIGMA. El MUNDO DE LAS MATEMATICAS. 6 Vol. Edit. Grijalvo, México, 1983.

Nietzsche, Federico. EL NACIMIENTO DE LA TRAGEDIA. 5a ed., edit. Alianza, Madrid, 1980, 278 pág.

Pacioli, Luca. LA DIVINA PROPORCION. Edit. Losada, Buenos Aires, 344 pág.

Pedoe, Dan. LA GEOMETRIA EN EL ARTE. Edit. Gustavo Gili, Barcelona, 1979, 289 pág.

Pierre José. EL CUBISMO. Edit. Aguilar, Madrid, 1968, 207 pág.

Platón. DIALOGOS, APOLOGIA DE SOCRATES. TEETETES O DE LA CIENCIA. LA REPUBLICA O DE LO JUSTO. FEDRO O DEL AMOR. TIMEO O DE LA NATURALEZA. Editorial Porrúa S.A. México, 1971, 727 pág.

Poincare, Henri. FILOSOFIA DE LA CIENCIA. 2a ed., edit. U.N.A.M. México, 1978, 271 pag.

Riemann. OEUVRES MATHEMATIQUES. 9e tirage, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1968, Paris, 448 pág.

Rosci, Marco. LEONARDO. Edit. Mayflower Books. New York, 1976, 127 pág.

Salas de, Xavier. LA OBRA PICTORICA COMPLETA DEL GRECO. Noguerl-Rizzoli editores, Barcelona, 1977, 128 pág.

Smith Edwarrd, Lucie. MOVIMIENTO EN EL ARTE DESDE 1945. Emecé Editores, Buenos Aires, 1977, 288 pág.

Tosto, Pablo. LA COMPOSICION AUREA EN LAS ARTES PLASTICAS. 2a ed., edit. Hachette S. A. Buenos Aires, 1969, 310 pág.