

UNA INTRODUCCIÓN
A LA TEORÍA
DE GRÁFICAS
NOTAS DE CLASE

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

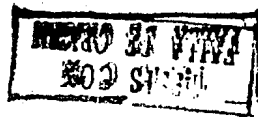
María del Carmen Curco' Cobos

MÉXICO, D. F.

1989

A mis padres

A Patu



Y también a Burundanga

2013



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

		Y EL TEOREMA DE LOS CINCO COLORES	160
INTRODUCCIÓN	i	CAPÍTULO 8: APAREAMIENTOS	177
CAPÍTULO 1: CONCEPTOS BÁSICOS	1	CAPÍTULO 9: PASEOS EULERIANOS Y CICLOS HAMILTONIANOS	198
CAPÍTULO 2: BLOQUES	47	El ratón conquistador	213
CAPÍTULO 3: ARBOLES	66	Las torres de Hanoi	217
El solitario del reloj	79	CAPÍTULO 10: RELACIONES DE LA TEORÍA DE GRÁFICAS CON OTRAS CIENCIAS	225
CAPÍTULO 4: CONEXIDAD	86	-Teoría de Gráficas y Química	227
El teorema de Henger	91	• La representación de las moléculas	228
CAPÍTULO 5: COLOCACIÓ DE VÉRTICES	107	• Enumeración de isómeros	233
CAPÍTULO 6: PLANARIDAD	139	-Teoría de Gráficas y Lingüística	237
Gráficas duales	151	-Teoría de Gráficas y Geografía	250
CAPÍTULO 7: GRÁFICAS PLANAS, POLIEDROS REGULARES		-Teoría de Gráficas y Ciencias Sociales	255
		• Teoría del balance	257
		• Decisiones grupales y	

elección social	261
• El teorema de imposibilidad de Arrow	262
- Teoría de Gráficas y Antropología	267
• Gráficas bipartitas y organización dual.	267
• Las rutas marítimas, la distancia y el centro de una gráfica	268
• El anillo Kula y los ciclos dirigidos en una digráfica	269
• Gráficas y parentescos	269
- Una aplicación dentro de las matemáticas .	271
• Reducción del ancho de banda de una matriz simétrica	271
• Algoritmo para reducir el ancho de banda de una gráfica	275
- El juego de los colores	280
• Cuestionarios óptimos	295

BIBLIOGRAFIA

303

INDICE

309

INTRODUCCIÓN

"No está". Esta es una frase familiar para muchos estudiantes del área de Teoría de Gráficas que solicitan libros en las bibliotecas de la Universidad. La escasez de material sobre el tema, así como el hecho de que la mayor parte de aquel que se encuentra disponible esté en una lengua extranjera, motivaron este trabajo.

Una vez que se ha iniciado una obra no es fácil concluir la. A las preguntas iniciales: ¿Qué incluir y qué no? ¿Con qué profundidad abordar cada tema? ¿Qué método de exposición emplear?, se van añadiendo otras interrogantes de manera casi permanente. En la convicción de que toda actividad matemática involucra un componente esencialmente lúdico, se han incluido algunas actividades de carácter recreativo cuyo tratamiento adecuado deberá, en ocasiones, conducir a la formación de conceptos, en otros casos, a una mayor comprensión de los mismos y, en el mejor de ellos, al surgimiento de nuevas ideas. Estos jue-

gos son, a nuestro parecer, muy pocos todavía. Una tarea que aún queda pendiente, consiste precisamente en reunir muchos más y trabajar con ellos de manera que puedan ser utilizados con fines didácticos.

Una segunda inquietud ha estado presente: ¿Cuáles son los vínculos de la teoría de gráficas con otras disciplinas si es que estos existen y qué carácter tienen? ¿Es posible hacer este conocimiento accesible a quienes inician su estudio de la teoría de gráficas? El nuestro sobre el tema era casi nulo. Fue preciso sumergirse en un mar de literatura, en ocasiones casi impenetrable. La mayor parte del material consultado consistía en trabajos sobre otras áreas en donde la teoría de gráficas aparecía sólo de manera marginal; o bien, en resultados de la teoría de gráficas ajustados, no siempre de forma natural, a fenómenos pertenecientes a otros terrenos del saber. Existen, sin embargo, ejemplos interesantes de relaciones entre la materia objeto de nuestro estudio y otros campos. Hemos querido compartir estas primeras lecturas con quienes utilicen estas notas con el fin de o-

freer al menos un panorama general sobre ello. Esto ha dado origen a una tarea más: adentrarse en estas aplicaciones y disuñirlas con objeto de comprender qué es lo que efectivamente está sucediendo en estos trabajos interdisciplinarios.

Pero además de inquietudes y tareas que quedan abiertas, dos necesidades urgentes han estado presentes: la de disponer de este material de consulta y apoyo cuanto antes y la de terminar, también cuanto antes, una tesis de licenciatura. Es por ello que aún cuando han surgido muchas ideas nuevas que podrían haber dado lugar a una restructuración de este trabajo, hemos decidido concluirlo, al menos, en esta primera etapa. Si además de cumplir con un trámite, este logra contribuir en alguna medida a la formación de los estudiantes de teoría de gráficas, así como al desarrollo de nuevos trabajos, el esfuerzo realizado habrá valido la pena.



CONCEPTOS BÁSICOS

La antigua ciudad universitaria de Königsberg, (hoy Kaliningrado y perteneciente a la URSS), es atravesada por el río Pregel, en el que se encuentran dos islas que también son parte de ella. Cuentan que en el siglo XVIII, cuando pertenecía a Prusia Oriental, sus habitantes discutían en las tabernas del lugar la posibilidad de planear un paseo dominical de modo que se visitaran las cuatro partes de la ciudad, atravesando todos sus puentes exactamente una vez. En aquella época, dichos puentes eran siete: cuatro de ellos unían las orillas o-puestas con la pequeña isla de Kneiphof. Un puente comunicaba Kneiphof con otra isla y los dos restantes unían esta con tierra firme.

Además, el paseo debería concluir en el mismo punto en el que se hubiera iniciado (Fig. 1)

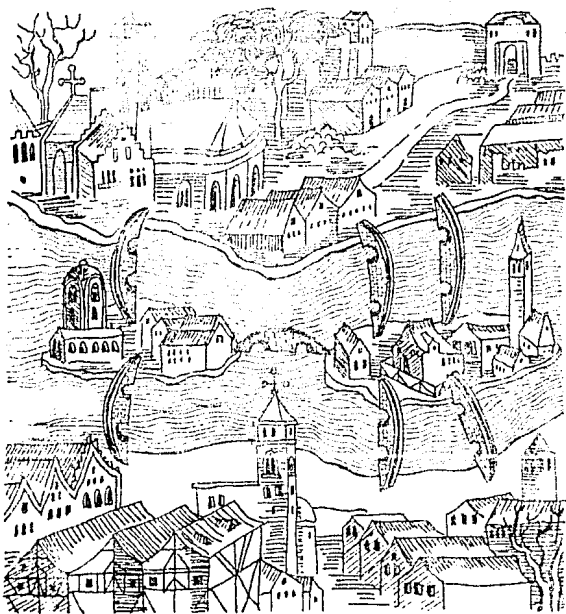


Figura 1

Pruebas repetidas los llevaron a la conclusión de que era imposible hacerlo aunque no fue sino hasta que

el matemático suizo Leonard Euler atacó el problema, que fue posible demostrarlo. Para ello, elaboró un modelo matemático que lo representara gráficamente. Dibujó un punto por cada parte de la ciudad y una recta por cada uno de sus puentes de la manera siguiente:

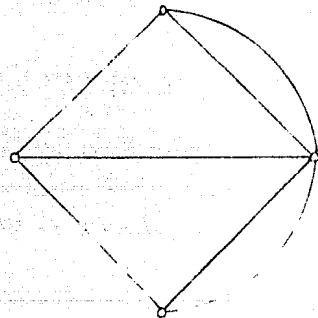


Figura 2

De esta forma, el problema se reduce a trazar esta figura sin pasar dos veces por una misma recta y terminando el trazo en el punto en el que se inició. Euler supuso que el recorrido si era

posible y procedió a analizar las circunstancias que permitirían tal paseo. Su razonamiento, que presenté ante la Academia Rusa de San Petersburgo en 1735, se expone a continuación:

- 1) Se empieza en un punto cualquiera al que llamaremos ORIGEN (0).
- 2) Sabemos que el paseo termina necesariamente en 0.
- 3) Hay que pasar por todos los puntos al menos una vez.
- 4) Hay que atravesar todos los puentes exactamente una vez.
- 5) Considerando la situación en cualquier punto $p \neq 0$ observamos que:
 - a) en algún momento hay que llegar a p por un puente. (Fig. 3a)
 - b) como $p \neq 0$, el paseo no concluye allí y hay que abandonar p por un puente distinto al que se usó para llegar. (Fig. 3b)
 - c) si por algún motivo se volviera a pasar por p , la entrada y la salida habrían de tener lugar por dos puentes distintos

entre sí y que, además, no hubieran sido utilizados en el recorrido anteriormente. (Fig. 3c)

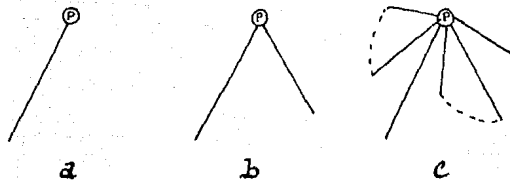


Figura 3

Es decir, cada vez que se pasa por p se entra por un puente y se sale por otro (todos los puentes distintos entre sí).

- 6) Por lo tanto, debe haber siempre un número par de puentes que lleguen a todo $p \neq 0$.
- 7) La situación en el origen es similar:
 - a) cada vez que se pasa por 0 se usa una pareja de puentes
 - b) al iniciar el recorrido se sale por un puente y al finalizarlo se regresa por otro diferente; estos forman una pareja más.

- 8) Por lo tanto, a 0 también debe llegar un número par de puentes.
- 9) Lo anterior indica que si es posible hacer un paseo sin repetir puentes, pasando por todos los puntos y por todos los puentes y terminando en el punto de partida, entonces, en cada punto el número de puentes es par.

Con este razonamiento, no sólo se resuelve el problema anterior, (conocido como El problema de los puentes de Königsberg), sino también todos los similares con más o menos puntos y puentes. También puede entenderse porque es imposible dibujar "la firma del diablo", que intentábamos trazar cuando éramos niños, sin levantar el lápiz y sin volver sobre el mismo trazo. (Fig. 4)

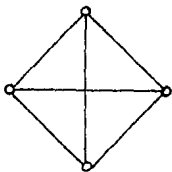


Figura 4

Muchas situaciones de la vida real pueden describirse adecuadamente por medio de diagramas como el de nuestro ejemplo. Estos constan de un conjunto de puntos y un conjunto de líneas que unen a algunos de ellos. Por ejemplo, los puntos pueden representar a personas y las líneas unir a parejas de amigos; o bien, los puntos podrían simbolizar centros de población y las líneas, las vías de comunicación, que los unen. Es importante destacar que lo que realmente es relevante en este tipo de diagramas, no es la clase de relación que se describa, sino el hecho de que dos puntos estén unidos por una línea o no; es decir, el hecho mismo de estar relacionados. Una abstracción matemática de esta naturaleza es lo que da origen al concepto de gráfica.

DEFINICIÓN 1.1: Una GRÁFICA $G = \{V(G), A(G)\}$ consiste en un conjunto finito, no vacío, de objetos llamados VERTICES (NODOS) y un conjunto de pares no ordenados de vértices llamados ARISTAS (RAMAS, LÍNEAS). Los vértices de G se denotan

$V(G)$ y sus aristas, $A(G)$ de una gráfica G consta solamente de un vértice, se dice que la gráfica es TRIVIAL de otra forma, G es NO TRIVIAL. Los EXTREMOS de una arista son los dos elementos del conjunto de vértices que la determinan. Cuando estos son iguales, obtenemos un LAZO. A dos o más aristas con los mismos extremos las llamaremos ARISTAS MÚLTIPLES.

De acuerdo a esta definición, la figura 2 es una gráfica.

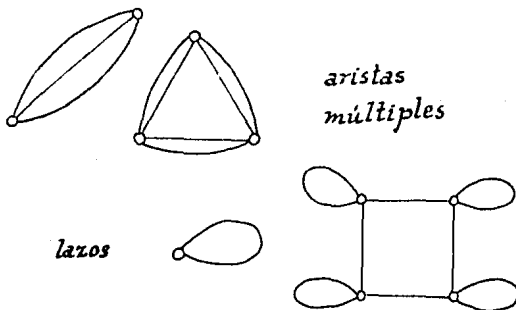


Figura 5

En general, estudiaremos sólo algunos tipos de gráficas en donde $A(G)$ también es finito y no aparecen lazos ni aristas múltiples a menos que se especifique lo contrario. A ellas se les llama GRÁFICAS SIMPLES.

Si u y v son dos vértices de una gráfica G y $a = uv \in A(G)$ diremos que u y v son ADYACENTES. Dos aristas son ADYACENTES si tienen un extremo en común, y un vértice y una arista INCIDENTES si esta última tiene como uno de sus extremos a aquel.

En la gráfica de la figura 6, u_1 y u_2 son los extremos de g , mientras que los vértices u_1 y u_3 son adyacentes, al igual que u_3 y u_6 . Del mismo modo, las aristas a y f son adyacentes y b y u_2 incidentes. (O bien, b incide en u_2 .)

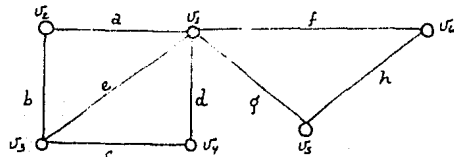


Figura 6

Algunos autores llaman *INCIDENTES* a las aristas adyacentes y reservan este último término para los vértices exclusivamente.

Dado que una gráfica está formada por dos conjuntos, tiene sentido pensar en la gráfica formada por subconjuntos de ellos.

DEFINICIÓN 1.2: Dada una gráfica G , una *SUBGRÁFICA* H de G es una gráfica tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$. También se dice que H está contenida en G .

En la figura 7, las gráficas H con $V(H) = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $A(H) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$ y J con $V(J) = \{v_4, v_5, v_6\}$ y $A(J) = \{v_4v_5, v_5v_6, v_6v_4\}$ son ambas, subgráficas de G .

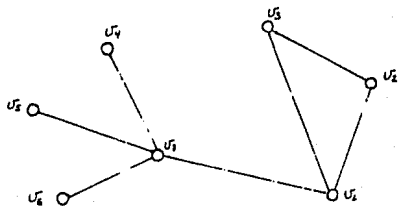


Figura 7

En el problema de los puentes de Königsberg advertimos que lo importante para su resolución era el número de puentes que llegaban a cada punto de la ciudad. En la representación gráfica, esto equivale al número de aristas que inciden en cada vértice. Este concepto es muy relevante en el estudio de las gráficas y por ello se le da una definición.

DEFINICIÓN 1.3: Para todo $v \in V(G)$ el *GRADO* de v en G es el número de aristas de G que inciden en v y se denota por $g_G(v)$. Algunos autores llaman al grado de v *VALENCIA* de v y lo denotan $val_G(v)$. En general, el subíndice G puede omitirse siempre que se tenga claro cual es la gráfica G en la que se considera a v .

Pensemos ahora en una gráfica simple G con p vértices. Está acotado el valor de $g_G(v)$. Para averiguarlo, debemos pensar en cuántos vértices pueden ser adyacentes a un vértice cualquiera v . Como en G no hay lazos a lo más

cada vértice es adyacente a todos los demás. Esto nos lleva a la siguiente relación:

$$0 \leq g_G(v) \leq p-1 \text{ para todo } v \in V(G)$$

Y con estas pocas definiciones y la observación anterior podemos demostrar un hecho interesante: en un grupo de p personas siempre existen al menos dos que tienen el mismo número de amigos dentro de él. La gráfica correspondiente a esta situación tiene p vértices, cada uno representando a una de las personas del grupo en cuestión. Dos vértices son adyacentes si y sólo si las personas a las que representan son amigos. Demostrando el siguiente teorema, confirmaremos la verdad del hecho que mencionamos, como un caso particular del mismo.

TEOREMA 1.4: En una gráfica G siempre existen dos vértices que tienen el mismo grado.

demonstración: Sea G una gráfica con p vértices.

Sabemos que $0 \leq g_G(v) \leq p-1$ para todo $v \in V(G)$. Supongamos que si $v_i \neq v_j$ y $v_i, v_j \in V(G)$, entonces $g_G(v_i) \neq g_G(v_j)$ para toda $i \neq j$; es decir, que todos

los vértices de G tienen grado distinto entre sí. De este modo, existen v_0 tal que $g_G(v_0) = 0$, v_1 tal que $g_G(v_1) = 1$, v_2 tal que $g_G(v_2) = 2, \dots$ y v_{p-1} tal que $g_G(v_{p-1}) = p-1$. Sin embargo, es fácil ver que esto es imposible, pues de ser así, v_{p-1} debería ser adyacente a todos los demás vértices de la gráfica mientras que v_0 no lo es a ninguno. Esto indica que v_0 y v_{p-1} no pueden existir simultáneamente. Eliminando alguno de estos dos valores en los grados, concluimos que al menos dos de los vértices de G deben coincidir en el valor de sus grados. ■

TEOREMA 1.5: Si G es una gráfica con q aristas, entonces,

$$2q = \sum_{v \in V(G)} g_G(v)$$

demonstración: En la suma de los grados se cuenta el número de aristas que incide en cada vértice. Como cada arista tiene

dos extremos, está contada dos veces en la sumatoria. ■

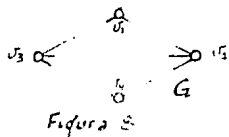
COROLARIO 1.6: En toda gráfica G , el número de vértices de grado impar es par

demostración: Sean $V_1 = \{v \in V(G) \mid \text{gr}(v) \text{ es impar}\}$ y $V_2 = \{v \in V(G) \mid \text{gr}(v) \text{ es par}\}$. Claramente, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $V_1 \cup V_2 = V(G)$, por lo que

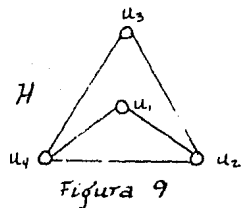
$$2|A(G)| = \sum_{v \in V(G)} \text{gr}(v) = \sum_{v \in V_1} \text{gr}(v) + \sum_{v \in V_2} \text{gr}(v)$$

Como $2|A(G)|$ es par y $\sum_{v \in V_2} \text{gr}(v)$ también lo es, $\sum_{v \in V_1} \text{gr}(v)$ no puede ser impar. Como cada sumando de esta sumatoria es impar, necesariamente el número de ellos debe ser par. ■

Supongamos que queremos representar por medio de una gráfica a cuatro personas, algunas de las cuales se conocen entre sí y otras no y que es nuestra intención reflejar este hecho.



Consideremos también la gráfica H de la figura 9. Esta tiene una característica importante con respecto a la anterior (Fig. 8): ¿Cuál es?



Podemos encontrar varias semejanzas entre estas dos gráficas. Las siguientes, son algunas de ellas.

- 1) $|V(G)| = |V(H)| = 4$
- 2) $|A(G)| = |A(H)| = 5$
- 3) En G hay dos vértices de grado 3 (u_1 y u_2)
- 4) En H hay dos vértices de grado 3 (u_2 y u_4)
- 5) En G hay dos vértices de grado 2 (u_3 y u_4)
- 6) En H hay dos vértices de grado 2 (u_1 y u_3)
- 7) u_1 ady. u_3
- 8) u_2 ady. u_4
- 9) u_3 no ady. u_4
- 10) u_1 no ady. u_2

Estas observaciones nos llevan a fijar nuestra atención en la similitud entre ambas gráficas. De hecho, si estableciéramos una función f de la siguiente manera:

$$f: G \rightarrow H$$

$$f(v_1) = u_2$$

$$f(v_2) = u_1$$

$$f(v_3) = u_4$$

$$f(v_4) = u_3$$

y estudiáramos qué ocurre con las adyacencias entre vértices de G al aplicarles la función, advertiríamos un hecho notable. Veamos:

$$v_1 \text{ ady}_G v_2 \quad u_1 \text{ ady}_H u_2$$

$$v_1 \text{ ady}_G v_3 \quad u_1 \text{ ady}_H u_4$$

$$v_1 \text{ ady}_G v_4 \quad u_2 \text{ ady}_H u_3$$

$$v_2 \text{ ady}_G v_3 \quad u_2 \text{ ady}_H u_4$$

$$v_3 \text{ ady}_G v_4 \quad u_3 \text{ ady}_H u_1$$

Aplicando la función f tenemos que:

$$f(v_1) = u_2 \text{ ady}_H u_1 = f(v_2)$$

$$f(v_1) = u_2 \text{ ady}_H u_4 = f(v_3)$$

$$f(v_1) = u_2 \text{ ady}_H u_3 = f(v_4)$$

$$f(v_2) = u_1 \text{ ady}_H u_4 = f(v_3)$$

$$f(v_3) = u_4 \text{ ady}_H u_1 = f(v_4)$$

Lo cual muestra que la función f preserva las adyacencias. Además, según hemos definido a f , esta es una función biyectiva. Es decir, que a pesar de que G y H estén dibujadas de manera distinta, ambas representan lo mismo, a saber, cuatro personas y la relación de conocerse entre sí. La persona representada por v_i en G , estaría representada por u_2 en H y así sucesivamente. Todo lo anterior nos conduce a la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.7: Dos gráficas G y H son **ISOMORFAS** si y sólo si existe una función biyectiva $f: V(G) \rightarrow V(H)$ que preserve las adyacencias de sus vértices.

Las gráficas G y H de nuestro ejemplo, son isomorfas.

Continuemos definiendo algunos conceptos más:

DEFINICIÓN 1.8: Un **CAMINO** $v_0, a_0, v_1, a_1, \dots, a_{n-1}, v_n$ en una gráfica G , es una sucesión alternada de vértices y aristas de G tal que $a_i = v_i v_{i+1}$ $i=0, 1, \dots, n-1$

$$C_1 = u_4, u_1, u_2, u_4, u_3$$

$$C_2 = u_1, u_2, u_3, u_4$$

$$C_3 = u_3, u_2, u_1, u_2, u_4$$

$$C_4 = u_4, u_1, u_4$$

$$C_5 = u_2, u_3, u_4, u_2$$

$$C_5 = u_1, u_2$$

son todos caminos en la gráfica \mathcal{N} de la figura 9. Al describirlos, se han omitido las aristas y sin embargo, estos quedan bien definidos. De hecho, la notación $C = (v_0, a_0, v_1, a_1, \dots, v_{n-1})$ es redundante al tratar con gráficas simples, ya que dados dos vértices, la arista que los une, si existe, es única. Por esto, puede definirse un camino en una gráfica G como una sucesión de vértices (v_0, v_1, \dots, v_n) donde v_i ady. v_{i+1} , para $i=0, \dots, n-1$.

Regresemos al problema de los puentes de Königsberg y recordemos que, en ese caso, nuestro interés era recorrer la ciudad sin pasar dos veces por el mismo puente. En el modelo gráfico de esta situación, ello equivale a encontrar un camino en el que no se repitan aristas. Este concepto posee una definición especial.

DEFINICIÓN 1.7: Un **PASEO** en una gráfica G es un camino en el que no se repiten aristas.

En otros casos, lo que interesa es no repetir vértices.

DEFINICIÓN 1.8: Una **TRAYECTORIA** en una gráfica G es un paseo en el que no se repiten vértices.

En la siguiente figura, $P = v_3, v_5, v_6, v_8, v_9, v_2, v_1$ es un paseo en G y $T = v_3, v_4, v_5, v_6, v_8, v_9, v_2, v_1$ es una trayectoria.

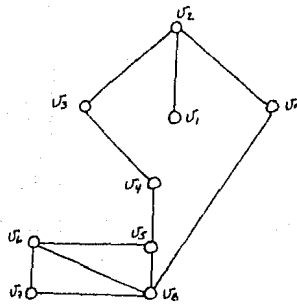


Figura 10

DEFINICIÓN 1.9: Un **CAMINO (PASEO) CERRADO**, es un camino (paseo) cuyo vértice inicial coincide con su vértice final.

$$C_1 = v_2, v_1, v_2, v_9, v_8, v_5, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2$$

$$C_2 = v_5, v_6, v_8, v_7, v_6, v_5$$

son caminos cerrados en la gráfica de la figura 10 y P_1 y P_2 son paseos cerrados en la misma.

$$P_1 = v_5, v_6, v_6, v_7, v_8 \quad P_2 = v_2, v_5, v_4, v_5, v_5, v_7, v_2$$

No puede definirse lo que es una trayectoria cerrada puesto que en una trayectoria no se repite ningún vértice, pero un concepto que describe esta idea es el siguiente:

DEFINICIÓN 1.9: Un CICLO es un camino cerrado $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ donde $v_i \neq v_j$ para toda $i \neq j$.

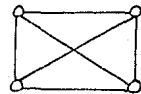
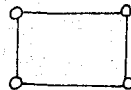
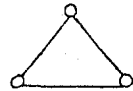
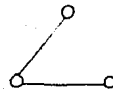
$C_1 = v_5, v_6, v_7, v_8, v_5$; $C_2 = v_6, v_7, v_8, v_6$ y $C_3 = v_2, v_5, v_4, v_5, v_7, v_2$ son algunos ciclos de la gráfica de la Fig. 10

¿Puede el lector dar otros caminos, paseos, trayectorias y ciclos en esta gráfica (Fig. 10) y las anteriores? En ocasiones se utilizan los términos recién definidos para indicar las subgráficas determinadas por estos recorridos. Ahora bien ¿qué relación guardan entre sí estos conceptos? Contesta las siguientes preguntas:

- ¿ Todo paseo es un camino?
- ¿ Todo camino es un paseo?
- ¿ Toda trayectoria es un camino?
- ¿ Todo camino es una trayectoria?
- ¿ Toda trayectoria es un paseo?
- ¿ Todo paseo es una trayectoria?

DEFINICIÓN 1.10: La LONGITUD de un camino es el número de aristas que lo forman. A un camino con vértice inicial u y vértice final v se le llama u -CAMINO.

Los siguientes pares de gráficas tienen el mismo número de vértices, pero las gráficas no son iguales entre sí



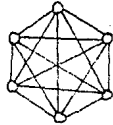
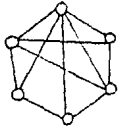
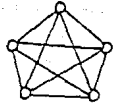
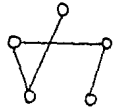


Figura 11

Todas las gráficas de la derecha tienen algo en común. ¿qué es? Observándolas, notaremos que para cada una de ellas es imposible añadir alguna arista más sin obtener lazos o aristas múltiples.

DEFINICIÓN 1.11: Una gráfica G es **COMPLETA** si todo par de vértices es adyacente. La gráfica completa con n vértices se denota por K_n

¿Cuántas aristas tiene la gráfica K_n ?

EJERCICIO 1.12- Demuestra que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$|A(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

La gráfica de la figura 12 representa los trabajos que debe realizar el personal de una compañía. Hay un vértice $(x_i; i=1, \dots, 5)$ por cada empleado y uno $(y_j; j=1, \dots, 9)$ tarea a realizar

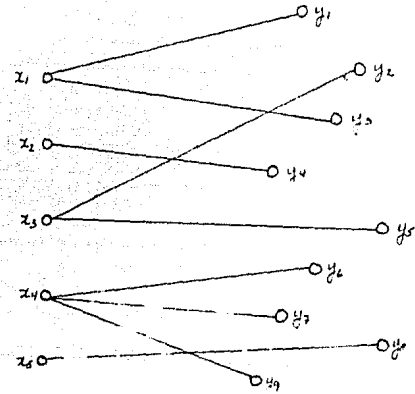
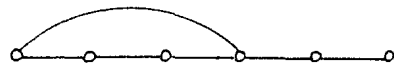
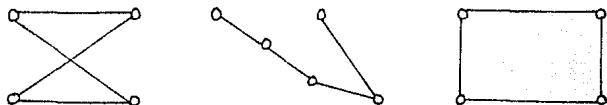


Figura 12

Esta gráfica posee la particularidad de que sus aristas siempre tienen un extremo en el conjunto de empleados y otro en el de los trabajos. Este tipo de gráficas aparecen con frecuencia en un buen número de problemas y se definen del

siguiente modo:

DEFINICIÓN 1.13: Una gráfica G es **BIPARTITA** si existe una partición de $V(G)$ en dos conjuntos V_1 y V_2 de forma que cada arista de G tenga un extremo en V_1 y el otro en V_2 .



GRAFICAS BIPARTITAS

Figura 13

Seguramente el lector conocerá los diseños hechos con hilo y clavos sobre un trozo de madera, en los cuales se colocan dos conjuntos de clavos y cada uno de ellos se une con hilo a todos los del otro conjunto, como se muestra en la figura 14.

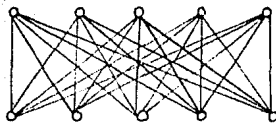


Figura 14

DEFINICIÓN 1.14: Una gráfica G es **BIPARTITA COMPLETA** si existe una bipartición $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ de tal manera que cada vértice de V_1 es adyacente a todos los de V_2 . Estas graficas se denotan por $K_{n,m}$; donde $n=|V_1|$ y $m=|V_2|$.
¿Qué relación existe entre K_2 y $K_{1,1}$?

EJERCICIO 1.15: Dar un ejemplo de una gráfica bipartita que posea más de una bipartición de sus vértices.

TEOREMA 1.16: En una gráfica bipartita completa existe una única bipartición.

demostración: Sea G una gráfica bipartita completa y $\{V_1, V_2\}, \{U_1, U_2\}$ dos biparticiones de $V(G)$. Si $v \in V_1$, entonces $v \in U_1$ ó $v \in U_2$. Supongamos que $v \in U_i$ ($i=1,2$) y tome-

mos $u \in V_2$; u ady v puesto que G es bipartita completa. Como $v \in U_i$ se tiene que $u \in U_j$, $j = 1 \text{ o } 2$, $j \neq i$; por lo tanto $v \in U_j$, $j \neq i$. Análogamente $v \in U_i$ y como $\{V_1, V_2\}$ y $\{U_1, U_2\}$ son particiones de $V(G)$, entonces $U_i = V_1$ y $U_j = V_2$, $j \neq i$

DEFINICIÓN 1.17: El GRADO MÍNIMO de una gráfica G es el menor de los grados de sus vértices y se denota por $\delta(G)$. Análogamente se define $\Delta(G)$, el GRADO MÁXIMO de G .

En una gráfica G , el grado de cualquier vértice satisface

$$\delta(G) \leq \text{gr}(v) \leq \Delta(G), \text{ y por lo tanto,}$$

$$|V(G)| \delta(G) \leq \sum_{v \in V(G)} \text{gr}(v) \leq |V(G)| \Delta(G)$$

Aplicando el teorema 1.5 tenemos que, si G es una gráfica con p vértices y q aristas, entonces

$$\frac{p}{2} \delta(G) \leq q \leq \frac{p}{2} \Delta(G)$$

Todas las gráficas de la figura 15 poseen una

característica notable en relación al grado de sus vértices.

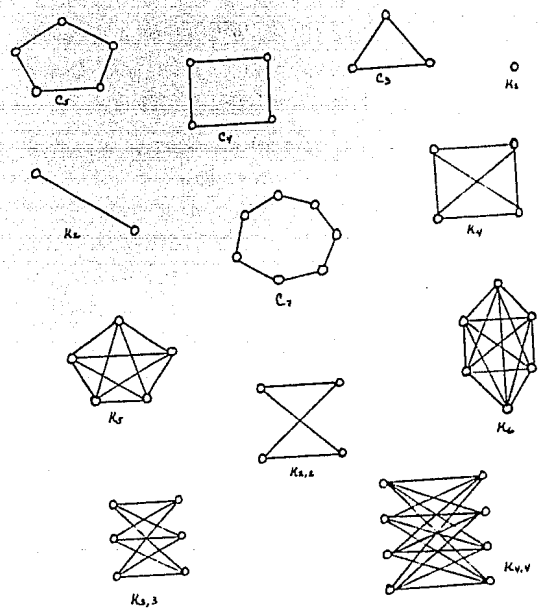


Figura 15

En cada gráfica todos los vértices tienen igual grado.

DEFINICIÓN 1.18: Una gráfica k -REGULAR, o DE GRADO k , es aquella en la que todos los vértices son de grado k .

Todos los ciclos son de grado 2, K_p es regular de grado $p-1$ y $K_{r,n}$ es n -regular.

EJERCICIO 1.19: Demuestra la siguiente proposición, o, en su caso, da un contraejemplo:
Si G es k -regular y k es impar, entonces G tiene un número impar de vértices.

TEOREMA 1.20: Si G es bipartita y k -regular ($k > 0$), entonces, toda bipartición $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ es tal que $|V_1| = |V_2|$.

demonstración: Contemos las aristas de G de dos maneras:

- 1) Como cada arista tiene exactamente un extremo en V_1 , entonces

$$|A(G)| = \sum_{u \in V_1} \text{gr}(u) = |V_1|k$$

- 2) Lo mismo se tiene para V_2 , de donde

$$|A(G)| = \sum_{u \in V_2} \text{gr}(u) = |V_2|k$$

De lo anterior sabemos que

$$|V_1|k = |V_2|k \quad \text{y como } k > 0, \\ |V_1| = |V_2| \quad \square$$

TEOREMA 1.21: Si $\delta(G) = k$, entonces, existe en G una trayectoria de longitud al menos k .

demonstración: Sea $T = (u_0, u_1, \dots, u_m)$ una trayectoria de longitud máxima en G . Si u_0 fuera adyacente a algún vértice $v \neq u_1$ para toda $i = 1, 2, \dots, m$, se tendría $\bar{T} = (v, u_0, u_1, \dots, u_m)$, una trayectoria de longitud mayor a la de T , lo cual contradiría su elección. Esto indica que $\text{gr}(u_0) \leq m$. Como $k = \delta(G) \leq \text{gr}(u_0) \leq m$, se tiene que la longitud de T es, al menos, k .

Las dos gráficas que se presentan en la figura 16, además de tener distinto número de vértices, son diferentes por una razón más ¿cuál es esta?

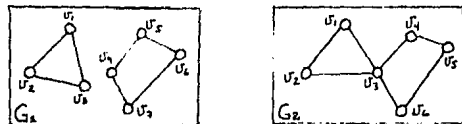


Figura 16

Mientras que G_1 está compuesta por dos "pedazos," G_2 está formada por uno sólo.

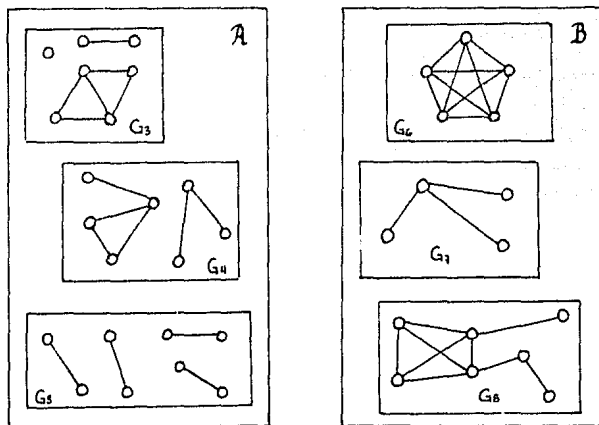


Figura 17

Las gráficas del conjunto A tienen en común el estar todas formadas por varios "pedazos," y para trazarlas sería necesario levantar el lápiz. Las del conjunto B, están todas constituidas por un único "pedazo" y podrían dibujarse con un trazo continuo. Esta propiedad es la más elemental que una gráfica puede poseer y se le conoce

como CONEXIDAD. Al "pedazo" (o "pedazos") que conforma(n) a una gráfica se le(s) llama COMPONENTE(S) CONEXA(S). A continuación definiremos formalmente este concepto.

Consideremos dos vértices cualesquiera de la gráfica G_2 de la figura 16 e intentemos, a partir de uno de ellos llegar al otro, utilizando las aristas de G_2 , sin pasar más de una vez por alguna de ellas y sin repetir vértices. ¿Es esto posible? Es fácil ver que puede hacerse en cualquier caso, sin importar qué vértices se elijan. Lo mismo sucede con las gráficas G_6 , G_7 y G_8 de la figura 17. Ahora bien, consideremos los vértices v_1 y v_2 de la gráfica G_1 . De inmediato notaremos que es imposible unirlos por medio de una trayectoria. La situación es igual para v_1 y v_2 o v_1 y v_3 , y, en general, para cualquier pareja de vértices ubicada en componentes distintas de una gráfica. Parece natural definir a la conexidad en términos de este hecho

DEFINICIÓN 1.22: Una gráfica G es CONEXA si y sólo si para cualquier par

de vértices de G existe una trayectoria que los une.

Las figuras 16 y 17 dan ejemplos de algunas gráficas conexas y de otras disconexas. Además, sabemos que K_n es conexas para toda $n \in \mathbb{N}$ y que $K_{n,m}$ también lo es para cualesquiera n y $m \in \mathbb{N}$. Lo mismo puede afirmarse de los ciclos y trayectorias de cualquier longitud.

Sin duda, la anterior es una caracterización bastante natural de la conexidad; sin embargo, existen otras condiciones que son equivalentes a ella.

TEOREMA 1.23: Una gráfica G con $p \geq 2$ es conexas si y sólo si para cualquier partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ existe una arista $a \in A(G)$ con un extremo en V_1 y el otro en V_2 .

demonstración: Sea G una gráfica conexas y $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(G)$. Sean $u \in V_1$ y $w \in V_2$. Como G es conexas, existe una uw -trayectoria en G . Como $u \in V_1$ y $w \in V_2$, al menos una arista de dicha trayectoria tiene

un extremo en V_1 y el otro en V_2 .

Ahora supongamos que para toda partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ existe una arista con un extremo en V_1 y el otro en V_2 .

Sean u y v dos vértices de G .

Sea $V_1 = \{w \in V(G) \mid \text{existe una } uw\text{-trayectoria en } G\}$ y

$$V_2 = V(G) - V_1.$$

Por construcción, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y

$$V_1 \cup V_2 = V(G).$$

Supongamos que $v \in V_2$; entonces $\{V_1, V_2\}$ es una partición de $V(G)$. Por hipótesis, existe una arista $a = xy$ tal que $x \in V_1$ y $y \in V_2$. Según se ha definido a V_1 , existe una ux -trayectoria T en G . $T \cup \{a\}$ es una uv -trayectoria y esto significa que $v \in V_1$. Por lo anterior, $v \in V_1$ y en consecuencia existe \bar{T} , una uv -trayectoria en G , de donde concluimos que G es conexas. ■

Existe una condición más, que también es equivalente a la definición de conexidad, lo cual puede demostrar el lector como un ejercicio:

TEOREMA 1.24: Una gráfica G es conexa si y sólo si existe un camino cerrado que pasa por todas sus vértices y todas sus aristas.

En ocasiones es útil trabajar con gráficas que se obtienen a partir de otra, mediante la eliminación de algunos de sus vértices y/o aristas.

Sea G una gráfica, $V' \subseteq V(G)$ y $A' \subseteq A(G)$

DEFINICIÓN 1.25: $G-V'$ es la subgráfica de G que resulta al quitar los vértices de V' y, como consecuencia, las aristas que tienen algún extremo en V' . De igual modo, $G-A'$ es la subgráfica de G que se obtiene quitando a G las aristas de A' pero no sus extremos.

La figura 18 muestra una gráfica G y las gráficas $G-V'$ y $G-A'$ correspondientes a los conjuntos $V' = \{a, b, e, f\}$ y $A' = \{(a, b), (e, d), (f, d), (f, e), (b, d)\}$.

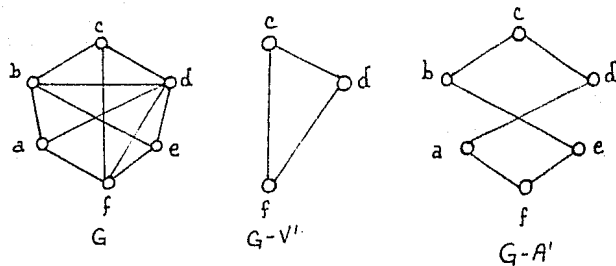


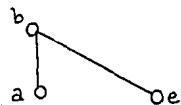
Figura 18

También puede darse origen a nuevas gráficas al considerar solamente a ciertos subconjuntos de vértices o aristas de una gráfica dada.

DEFINICIÓN 1.26: La subgráfica de G INDUCIDA por V' es aquella que tiene a V' como conjunto de vértices y sus aristas son las de G que tienen sus dos extremos en V' . Dicha gráfica se denota por $\langle V' \rangle$. Análogamente puede definirse a la gráfica $\langle A' \rangle$ INDU-

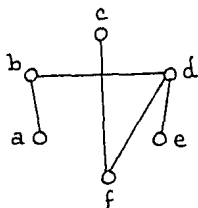
CIDA por A' como aquella que tiene a A' como conjunto de aristas y cuyos vértices son los extremos de las mismas. (Figura 19)

Si $V' = \{u, v\}$ se escribe $G - v$ en lugar de $G - \{v\}$ y de igual manera, escribiremos $G - a$ y no $G - \{a\}$ siempre que $A' = \{a\}$



$\langle V' \rangle$

Figura 19



$\langle A' \rangle$

En páginas anteriores dijimos que los "pedaços" de los cuales consta una gráfica se llaman componentes. A continuación se define este concepto con mayor formalidad.

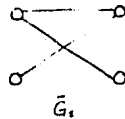
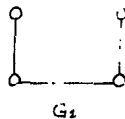
DEFINICIÓN 1.27: Las COMPONENTES CONEXAS de una gráfica G son las subgráficas de G

que son máximas con respecto a la propiedad de ser conexas. Dada una gráfica G , su número de componentes conexas se denota por $c(G)$. (Algunos autores emplean la notación $w(G)$ para este mismo número.)

Notemos que $c(G) = 1$ si y sólo si G es conexa, y que, si G tiene p vértices, $c(G) \leq p$.

DEFINICIÓN 1.28: Si G es una gráfica, su COMPLEMENTO es la gráfica que consta del mismo conjunto de vértices que G , en donde dos de ellos son adyacentes si y sólo si no lo son en G . Se le denota por \bar{G} y, en ocasiones, por G^c .

La figura 20 muestra algunas gráficas y sus complementos.



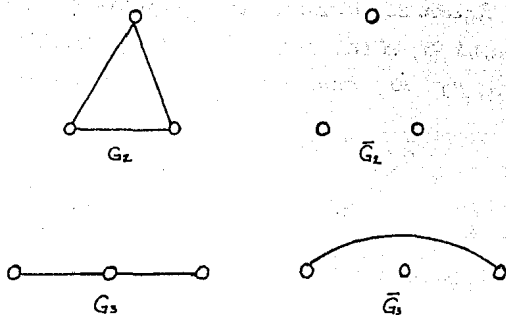


Figura 20

Para terminar, demostraremos dos resultados relativos a los ciclos de una gráfica y que los relacionan con otros aspectos de la misma. En el primero de ellos retomaremos la idea de paseo cerrado.

TEOREMA 1.29: En una gráfica todo paseo cerrado es unión de ciclos ajenos en aristas.

demonstración: Sea G una gráfica y sea P un paseo cerrado de G .

Sea $S(P)$ el conjunto de vértices repetidos en P . La demostración se hará por inducción sobre $|S(P)|$

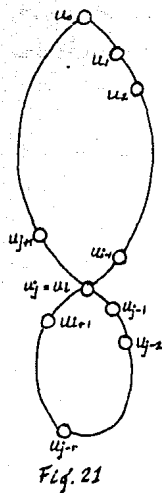


Fig. 21

Si $|S(P)| = 1$, entonces $S(P) = \{v_0\}$, donde v_0 es el vértice inicial y final de P . En este caso, por definición, P es un ciclo.

Si $|S(P)| = 2$ y $P = u_0, u_1, \dots, u_n = u_0$, llamemos u_i y u_j a los vértices que se repiten ($0 < i < j < n$; $u_i = u_j$) distintos de $u_0 = u_n$. Entonces,

$C_1 = u_0, u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_n = u_0$ y $C_2 = u_j, u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, u_{j+k} = u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+r} = u_j$ son dos ciclos ajenos en aristas, cuya unión es P . (Figura 21).

Supongamos que todo paseo cerrado con $|S(P)| \leq k$ es unión de ciclos ajenos en aristas y sea $P = v_0, v_1, v_2, \dots, v_n = v_0$ un paseo con $|S(P)| = k+1$, i, j tales que $0 < i < j < n$ donde $v_i = v_j$. Entonces

$P_1 = v_0, v_1, \dots, v_i = v_j, v_{j+1}, \dots, v_n = v_0$ y $P_2 = v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$ son dos paseos cerrados cuya unión es P y $|S(P_1)| \leq k$, $|S(P_2)| \leq k$. Por hipótesis de inducción, P_1 y P_2 son la unión

de ciclos ajenos en aristas y como $P = P_1 \cup P_2$, se tiene que P también lo es. ■

Ya hemos dicho que si G es una gráfica conexa y $u, v \in V(G)$, entonces existe al menos una uv -trayectoria en G cuya longitud puede ser corta o larga. Además, puede haber más de una uv -trayectoria y en este caso, tener longitudes diversas. A continuación definiremos un concepto importante que se basa en este hecho y que interviene en varios resultados.

DEFINICIÓN 1.30: Dada una gráfica G , la **DISTANCIA** entre cada par de vértices de G se define como:

$$d(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u=v \\ \infty & \text{si no existe en } G \text{ una } uv\text{-trayectoria} \\ m & \text{si } m \text{ es el mínimo valor de las longitudes de las } uv\text{-trayectorias en } G. \end{cases}$$

La figura 22 muestra dos gráficos en donde $d(a, b) = 1$, $d(a, c) = 2$, $d(f, g) = 2$, $d(f, h) = 3$ y $d(a, f) = \infty$, para ejemplificar lo anterior.

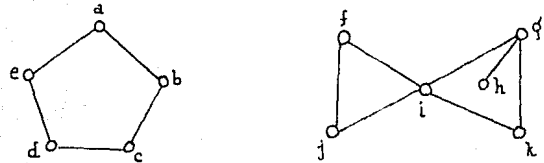


Figura 22

Por último veremos una condición para que una gráfica sea bipartita y que está dada en términos de las características de sus ciclos.

TEOREMA 1.31: Una gráfica G es bipartita si y sólo si todos los ciclos de G son de longitud par.

demonstración: Sea G una gráfica bipartita y $\{V_1, V_2\}$ una bipartición de $V(G)$.

Sea $C = u_0, u_1, \dots, u_k = u_0$ un ciclo en G , de longitud k . Como $\{V_1, V_2\}$ es una bipartición de G sabemos que $u_0 \in V_1 \Rightarrow u_1 \in V_2 \Rightarrow u_2 \in V_1 \Rightarrow$

En general, si $u_0 \in V_1$, entonces

$$u_i \in \begin{cases} V_1 & \text{si } i \text{ es par} \\ V_2 & \text{si } i \text{ es impar,} \end{cases} \quad (A)$$

y, análogamente, si $u_0 \in V_2$, entonces

$$u_j \in \begin{cases} V_2 & \text{si } j \text{ es par} \\ V_1 & \text{si } j \text{ es impar} \end{cases} \quad (B)$$

Por lo tanto, si $u_0 \in V_1$, k es par pues $u_0 = u_k \in V_1$ por (A) y si $u_0 \in V_2$, k es par pues $u_0 = u_k \in V_2$ por (B), de donde concluimos que todos los ciclos de G son pares. \blacksquare

Ahora sea G una gráfica sin ciclos impares. Sin perder generalidad, podemos suponer que G es conexa, pues de lo contrario, la demostración se aplicaría a cada componente. Del mismo modo, supondremos que $p \geq 1$

Sea $u \in V(G)$. Definimos

$$U_0 = \{v \in V(G) \mid d(u, v) \text{ es par}\} \text{ y}$$

$$U_1 = \{v \in V(G) \mid d(u, v) \text{ es impar}\}$$

Demostraremos que $\{U_0, U_1\}$ es una bipartición de $V(G)$

Claramente $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$ y $U_0 \cup U_1 = V(G)$

Resta por demostrar que para todos $v, w \in U_i$ ($i=0,1$), v no ady. w .

Sean $v, w \in U_0$ y T_1, T_2 uv - y uw - trayectorias mínimas en G respectivamente. Sean x_1, x_2, \dots, x_k los vértices que T_1 y T_2 tienen en común. Como T_1 y T_2 son trayectorias mínimas de u a v y de u a w respectivamente, las secciones ux_1 de T_1 y ux_1 de T_2 son de igual longitud. Asimismo, para cada $i < k$, la sección $x_{i-1}x_i$ de T_1 es de igual longitud que la sección $x_{i-1}x_i$ de T_2 . De hecho, las secciones $x_k w$ de T_2 y $x_k v$ de T_1 son ambas de longitud par o impar. Esto quiere decir que si v es adyacente a w , $x_k v$ de T_1 unido a $x_k w$ de T_2 más la arista vw forman un ciclo de longitud impar, lo cual contradice la hipótesis. De ahí que v y w no

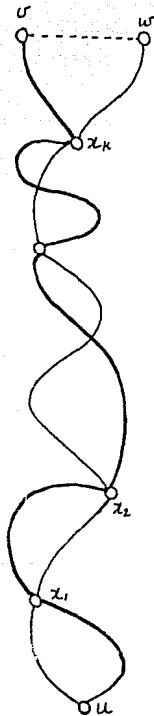


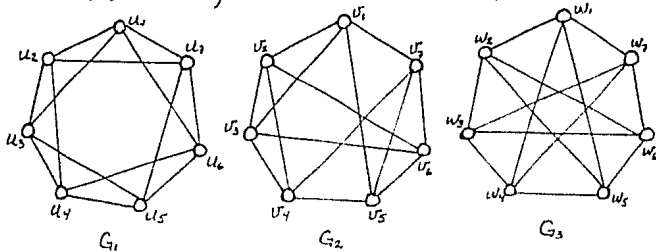
Fig. 23

puedan ser adyacentes. Análogamente se demuestra que dos vértices de U_2 no pueden ser adyacentes. Con todo lo anterior, podemos concluir que $\{U_0, U_1\}$ es una bipartición de $V(G)$ y que si $a = xy \in A(G)$ entonces $x \in U_i$ y $y \in U_j$; $i, j \in \{0, 1\}$; $i \neq j$, de donde G es bipartita. \square

EJERCICIOS

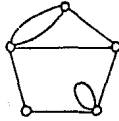
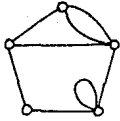
- 1: Enlista cinco situaciones de la vida cotidiana que puedan plantearse a través de una gráfica.
- 2: Muestra que hay once gráficas no isomorfas con cuatro vértices.
- 3: Sea G una gráfica y R la relación que denota "estar conectado por medio de una trayectoria a " en el conjunto $V(G)$. Muestra que R es una relación de equivalencia y caracteriza a sus clases de equivalencia.

4: ¿Qué parejas de las siguientes gráficas son isomorfas y cuáles no? Da los isomorfismos correspondientes a los que lo sean.



- 5: Sea G una gráfica conexa donde todos los vértices son de grado par. Demuestra que si $v \in V(G)$, entonces $e(G-v) \leq \frac{1}{2} g(v)$.
- 6: Demuestra que en toda gráfica conexa, cualesquiera dos trayectorias de longitud máxima tienen al menos un vértice en común.
- 7: Demuestra que si G es una gráfica no conexa, entonces \bar{G} es conexa.
- 8: Demuestra que si G es una gráfica y d la función distancia, entonces $(V(G), d)$ es un espacio métrico.

9. Muestra que las siguientes gráficas no simples, no son isomorfas.



10. Prueba que

$$a) |A(K_{n,m})| = nm$$

b) si G es simple y bipartita, entonces

$$|A(G)| \leq \frac{|V(G)|^2}{4}$$

11. Sea G una gráfica y $v_0 \in V(G)$. Demuestra que $G - v_0 = \{v_0^c\}$.

12. Demuestra que todo uv -camino contiene una uv -trayectoria.

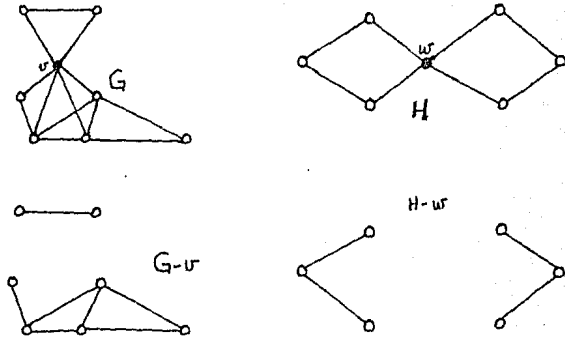
2 BLOQUES

En este estudio inicial de la teoría de gráficas centraremos nuestra atención fundamentalmente en aquellas que sean conexas. Sin embargo, algunas gráficas son conexas con tanta debilidad que es posible desconectarlas eliminando uno solo de sus vértices o aristas. Tales elementos juegan un papel importante y hablaremos de ellos en este capítulo.

DEFINICIÓN 2.1.- Dada una gráfica G y un vértice $v \in V(G)$, se dice que v es un VÉRTICE DE CORTE si $c(G-v) > c(G)$

Claramente, si G es conexa, un vértice $w \in V(G)$ es de corte si y sólo si $G-w$ no es conexa. En general, un vértice v de una gráfica G es de

corde si al eliminarlo se desconecta a alguna componente de G . (Fig. 1)



Partiendo de esta definición, ya podemos demostrar dos resultados importantes:

TEOREMA 2.2: Sea G una gráfica conexa. Un vértice $v \in V(G)$ es de corte si y sólo si existen dos subconjuntos U y W de $V(G)$, $v \notin U \cup W$, tales que v está contenido en toda trayectoria que una a un vértice de U con uno de W .

demostración: Sea G una gráfica conexa y sea v un vértice de corte. $G-v$ no es conexa y tiene al menos dos componentes. Sean H_1, H_2, \dots, H_j las componentes de $G-v$ y $U = V(H_1)$ y $W = V(H_2) \cup V(H_3) \cup \dots \cup V(H_j)$. Tomemos $u \in U$ y $w \in W$. Claramente, estos dos vértices están en componentes distintas de $G-v$, lo que indica que en esta gráfica no existe ninguna uw -trayectoria. Esto quiere decir que en caso de haber uw -trayectorias en G , todas ellas deben contener a v necesariamente. (Fig. 2) *

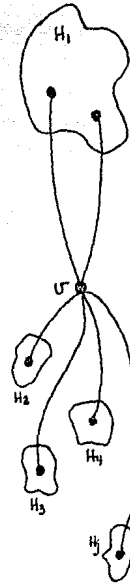


Fig. 2

Consideremos ahora una gráfica conexa G y sean U y W subconjuntos de $V(G)$ como los de la hipótesis. $G-v$ no puede ser conexa puesto que toda uw -trayectoria ($u \in U$ y $w \in W$) contiene a v , lo que indica que este es un vértice de corte. *□

A continuación demostraremos un corolario del resultado anterior.

COROLARIO 2.3: Toda gráfica con $|V(G)| > 1$ tiene al menos dos vértices que no son de corte.

demostración: Analizaremos solamente el caso en el que la gráfica G es conexa, pues de no serlo, el resultado se aplica a cada una de sus componentes.

Sea G una gráfica conexa y $u, v \in V(G)$ tales que la distancia entre ellas es máxima.

Supongamos que $G-u$ es desconexa. Entonces existen U y $W \subseteq V(G)$ tales que u está contenido en toda trayectoria que una a un vértice de U con uno de W . Para el vértice v hay dos posibilidades: $v \in U$ o $v \in W$. Si $v \in U$, consideremos $w \in W$. Como u está contenido en toda wv -trayectoria, entonces $d(w, v) \geq d(u, v) + 1$, lo que contradice la elección de los vértices u y v . Lo mismo sucede si $v \in W$. Análogamente se puede demostrar que v no es de corte. (Fig. 3)

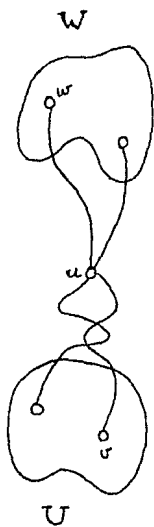


Fig. 3

Al inicio de este capítulo hablamos también de aristas cuya eliminación desconecta a gráficas conexas. Ahora procederemos a caracterizarlas.

DEFINICIÓN 2.4: Dada una gráfica G y una arista $a \in A(G)$, se dice que a es una **A-RISTA DE CORTE** o un **PUNTE** si y sólo si $c(G-a) > c(G)$.

Existe una manera sencilla de identificar a las aristas de corte de una gráfica que presentaremos en el siguiente resultado.

TEOREMA 2.5: Una arista a de una gráfica conexa G es un puente de G si y solamente si a no pertenece a ningún ciclo de G .

demostración: Sea a un puente de G . Como $c(G-a) > c(G)$, existen vértices u y v en $V(G)$ que están conectados en G pero no en $G-a$. Entonces, existe una uv -trayectoria en G , a la que llamaremos P , que necesariamente contiene a a . Supongamos que $a = xy$ y que x precede a y en P . En $G-a$ u está conectado a x por una

sección de P y y está conectado a v por otra sección de la misma trayectoria. Si a estuviera en algún ciclo C de G , x y y estarían conectados en $G-a$ por la trayectoria $C-a$. La unión de la sección de P que une a x y a u con la trayectoria $C-a$ y con la sección de P que conecta a y con v , conecta a u y a v en $G-a$ lo cual es una contradicción. \times

Supongamos ahora que $a=xy$ es una arista de G que no está en ningún ciclo de G y que a no es un puente. Esto quiere decir que $G-a$ es conexa y que por lo tanto, existe una trayectoria en $G-a$ a la que llamaremos P . Podemos observar que la unión de a y P produce un ciclo en G que contiene a a y esto contradice a la hipótesis. $\times \blacksquare$



Fig. 4

Cabe preguntarnos ahora si la existencia de puentes en una gráfica está relacionada con la

de vértices de corte. ¿Será verdad que si una gráfica tiene un puente, entonces también tiene un vértice de corte? ¿y viceversa? Observemos que K_2 tiene un puente, pero no tiene vértices de corte y que la gráfica de la figura 5 tiene puntos de corte pero no contiene ningún puente.

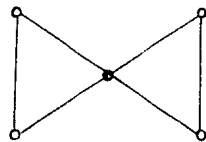


Figura 5

El teorema que a continuación se establece proporciona información sobre esta relación.

TEOREMA 2.6: Si una gráfica conexa G con $V(G) \geq 3$ tiene una arista de corte, entonces G tiene también un vértice de corte.

demonstración: Sea G una gráfica conexa con $V(G) \geq 3$ y $a \in A(G)$ un puente con extremos u y v . $G-a$ no es conexa y tiene al me-



Fig. 6

nos dos componentes conexas H_1 y H_2 tales que $u \in V(H_1)$ y $v \in V(H_2)$. Como G es conexa con al menos tres vértices, entonces, existe $w \in V(G-a)$, $w \neq u, w \neq v$. Si $w \in V(H_1)$, entonces en $G-u$ no existen wv -trayectorias. Análogamente, si $w \in V(H_2)$, entonces, en $G-v$ no hay wu -trayectorias; con lo cual concluimos que $G-u$ es disconexa, o $G-v$ es disconexa; es decir, u o v son vértices de corte. \square

Según hemos definido a los vértices y aristas de corte, su eliminación altera el número de componentes conexas de una gráfica. ¿Será posible establecer cotas para este número? Veamos:

TEOREMA 2.7: Sea G una gráfica conexa con $p \geq 2$ y sea $v \in V(G)$ y $a \in A(G)$. Entonces

$$1 \leq c(G-v) \leq gr(v) \quad \text{y}$$

$$1 \leq c(G-a) \leq 2$$

demonstración: Claramente $1 \leq c(G-v)$ y $1 \leq c(G-a)$. Como G es conexa, cada componente de $G-v$ contiene al menos uno de los

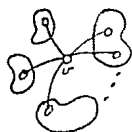


Fig. 7

vértices adyacentes a v en G . Por lo tanto $c(G-v) \leq gr(v)$. Asimismo, cada componente de $G-a$ contiene por lo menos a uno de los extremos de a , por lo que $c(G-a) \leq 2$. \square

Una pregunta natural ahora es: ¿todas las gráficas tienen puntos de corte? ¿y aristas de corte? Esta última tiene respuesta inmediata si recordamos el teorema 2.5: las gráficas cuyos aristas pertenecen a algún ciclo no tienen puentes. Por ejemplo, K_3, K_4, K_5, \dots y K_n en general no poseen aristas de corte. Podemos observar también que los ciclos no tienen vértices de corte. La figura 8 muestra algunas gráficas sin vértices de corte.

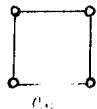
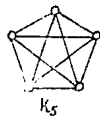


Figura 8

Este tipo de gráficas reciben un nombre especial y podemos pensar en ellas como aquellas a las que no es

posible desconectar mediante la supresión de alguno de sus vértices.

DEFINICIÓN 2.8: Un BLOQUE es una gráfica conexa sin puntos de corte.

DEFINICIÓN 2.9: Los BLOQUES DE UNA GRÁFICA G son las subgráficas máximas de G con la propiedad de ser bloques.

La figura 9 muestra una gráfica y sus bloques.

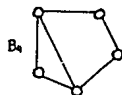
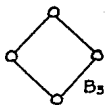
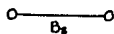
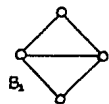
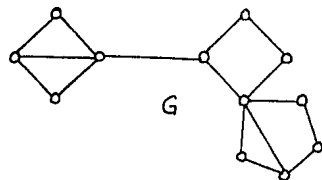


Figura 9

Existen varias formas equivalentes de caracterizar a los bloques con tres o más vértices. El siguiente teorema las enuncia y demuestra sus equivalencias.

TEOREMA 2.10: Sea G una gráfica conexa con tres o más vértices. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1) G es un bloque.
- 2) Cada par de puntos de G está en un ciclo común.
- 3) Dados un vértice y una arista de G existe un ciclo que contiene a ambos.
- 4) Cada par de aristas de G está en un ciclo común.

demostración.- (1) implica (2)

Haremos la demostración por inducción sobre la distancia entre dos vértices de G .

Consideremos $u, v \in V(G)$ con $d(u, v) = 1$

y $a = uv$. Como G es un bloque y $|V(G)| \geq 3$ a no es un puente (Teo. 2.6), por lo tanto, a está en algún ciclo de

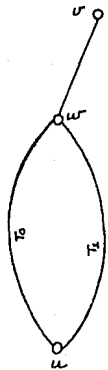


Fig. 10

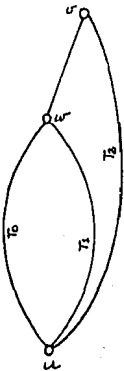


Fig. 11

G y, en consecuencia, u y v están en un ciclo común.

Supongamos ahora (hipótesis de inducción), que todo par de vértices cuya distancia sea menor que k , está en un ciclo común.

Sean $u, v, w \in V(G)$ tomados de forma que $d(u, w) = k-1$ y $v \text{ ady}_G w$. Por hipótesis de inducción u y w están en un ciclo común. Llamemos T_0 y T_1 a las dos uw -trayectorias que forman este ciclo. (Fig. 10) Como G es un bloque, w no es un vértice de corte y, por lo tanto, existe una uv trayectoria que no lo contiene, a la que llamaremos T_2 . T_2 puede intersectar a T_i ($i=0, 1$), o no hacerlo. Consideremos ambos casos:

1) Si T_2 no intersecta a T_i ($i=0, 1$), entonces, $T_i \cup uv \cup T_2$ es un ciclo que contiene a u y a v . Como $d(u, v) = k$, en este caso el teorema es válido. (Fig. 11)

2) Si T_2 intersecta a T_0 o a T_1 (o, por supuesto, a ambas), llamemos w_0 al último vértice de T_2 que está en T_0 o en T_1 (claramente $w_0 \notin V(T_0) \cap V(T_1)$ puesto que $T_0 \cap T_1 - uv = \emptyset$). Sin pérdida de generalidad supondremos que $w_0 \in V(T_0)$. Si

$$T_0 = u, u_1, u_2, \dots, w_0, \dots, v$$

$$T_1 = u, w_1, w_2, \dots, v$$

$$T_2 = u, v_1, v_2, \dots, v_k, w_0, v_{k+1}, \dots, v,$$

la siguiente construcción muestra la existencia de dos uv -trayectorias ajenas:

$$T_3 = u, u, u_2, \dots, w_0, v_{k+1}, \dots, v$$

$$T_4 = T_1 \cup w_0 v$$

cuya unión da por resultado un ciclo \mathcal{B} que contiene a u y a v . (Fig. 12)

$$\mathcal{B} = u, u, u_2, \dots, w_0, v_{k+1}, \dots, v, v, \dots, w_0, w_1, u.$$

lo que demuestra la implicación también para este caso. *

(2) implica (3)

Sea $u \in V(G)$ y $a \in A(G)$, $a = uv$. Por hipótesis, existe un ciclo \mathcal{B} que con-

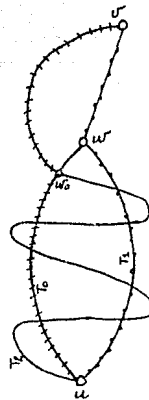


Fig. 12

tiene a u y a w . En cuanto a v hay dos posibilidades: que sea parte de los vértices del ciclo o que no lo sea.

Si $v \in V(C)$ obtenemos un ciclo C_0 que contiene a u y a la arista a de la siguiente manera:

$$C_0 = u, u_1, \dots, w, w_1, \dots, v, v_1, \dots, u$$

$$C_0' = u, u_1, \dots, w, v, v_1, \dots, u$$

Es decir, sustituimos la parte de C entre w y v por la arista a , según ilustra la figura 13.

Si $v \notin V(C)$ tenemos una situación igual a la demostración anterior y podemos encontrar dos trayectorias de u a v , una de las cuales contiene a la arista a .

(3) implica (4)

Sean a y b dos aristas de G y sean w y v los extremos de b . Por hipótesis, existe un ciclo C_1 que contiene a la arista a y al vértice w . Al igual que en la demostración anterior,

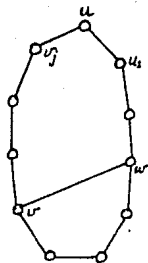


Fig. 13

tenemos dos casos, según v esté o no en $V(C_1)$. Para ambos casos, las demostraciones son análogas a las anteriores.

(4) implica (1)

Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que se cumplen las hipótesis, pero no la conclusión; es decir, asumiremos que G tiene al menos un vértice de corte al cual llamaremos u . $G-u$ no es conexa. Sean v y w dos vértices que pertenecen a distintas componentes conexas de $G-u$. Consideremos ahora dos aristas a y b , de modo que a incida en v y b en w . Por hipótesis, sabemos que en G existe un ciclo que contiene a ambas aristas. Como todo ciclo, éste está formado por dos trayectorias ajenas. En este caso, podemos pensar en dos vw -trayectorias. Como u es de corte, debe estar contenido en toda trayectoria que una a dos vértices pertenecientes



Fig. 14

a componentes conexas distintas de $G-u$, pero esto es imposible puesto que las dos trayectorias en cuestión son ajenas en todo vértice diferente a v y w . Esto contradice el hecho de que w y v estén en componentes distintas y en consecuencia, u no es de corte, con lo que se demuestra que G es un bloque (Fig. 14) ■

EJERCICIOS

- 1: Da otra demostración para el corolario 2.3 (Sugerencia: procede por reducción al absurdo).
- 2: Determina el número máximo de vértices de corte que pueden estar en un bloque B de una gráfica conexa con p vértices, p 73.
- 3: Sea G un bloque con p vértices, p 73, y sean u y v dos vértices distintos de G . Dada una uv -trayectoria P en G ¿existe siempre una uv -trayectoria Q tal que P y Q son ajenas?

- 4: Sea G una gráfica con cuatro bloques tal que $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$. Supongamos que todo v_i $1 \leq i \leq 6$ está en un bloque exactamente y que v_2 y v_6 pertenecen exactamente a dos bloques. Prueba que G es disconexa.
- 5: Sea G una gráfica conexa con uno o más vértices de corte. Demuestra que G contiene por lo menos dos bloques, cada uno de los cuales contiene exactamente un vértice de corte de G . (Los bloques de una gráfica que contengan exactamente un vértice de corte de dicha gráfica se llaman BLOQUES TERMINALES de G .)
- 6: Sea G una gráfica conexa con al menos un vértice de corte. Demuestra que G contiene un vértice de corte v con la propiedad de que, con a lo más una excepción, todos los bloques que contienen a v son bloques terminales.
- 7: Demuestra que si G no tiene ciclos pares, entonces, todo bloque de G es K_2 o un ciclo impar.
- 8: Demuestra que el número de bloques de una

gráfica G es igual a $c(G) + \sum_{v \in V(G)} (b(v) - 1)$, donde $b(v)$ denota el número de bloques de G que contienen a v .

- 9.- Describe un buen algoritmo para encontrar los bloques de una gráfica.
- 10.- Demuestra que una gráfica conexa que tiene exactamente dos vértices que no son de corte es una trayectoria.
- 11.- Demuestra que si $a \in A(G)$, entonces $c(G) \leq c(G-a) \leq c(G) + 1$
- 12.- Sea $v \in V(G)$. Prueba que en general no puede sustituirse $G-a$ por $G-v$ en la desigualdad del ejercicio 11.

3 ARBOLES

En un país que inicia su desarrollo se ha decidido comunicar a las seis poblaciones más importantes a través de una red de carreteras (Fig. 1).

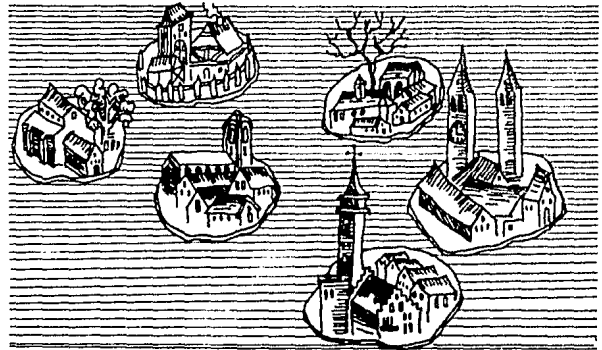


Figura 1

La situación es tal que el costo de construcción de cualquier tramo de carretera es esencialmente el mismo, pues entre las poblaciones cercanas algunas características del terreno dificultan la obra, mientras que la mayor distancia entre otras es compensada por un terreno poco accidentado. Se pretende construir una red que permita la comunicación entre todas las ciudades al menor costo posible. De las opciones que se muestran en la figura 2, ¿cuáles resultan mejores para este propósito?

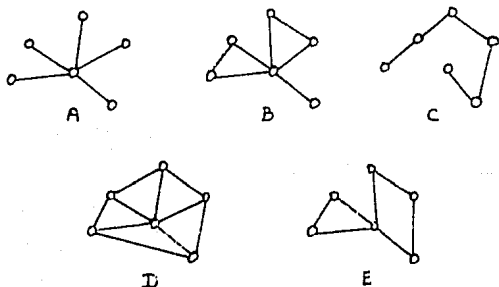


Figura 2

Es claro que las posibilidades B, D y E no representan la mejor opción dado que tienen un mayor

número de aristas, lo que representa más tramos de construcción. Quedan la A y la C con cinco tramos. Por otras razones, podríamos pensar que el modelo A es óptimo, aunque en términos de costo, ambos son equivalentes. Esta situación nos permite advertir que la ausencia de ciclos en una gráfica origina una menor cantidad de aristas. Este tipo de gráficas es de extraordinaria importancia y recibe un nombre especial.

DEFINICIÓN 3.1: Un ARBDL es una gráfica conexa sin ciclos no triviales (Figura 3).

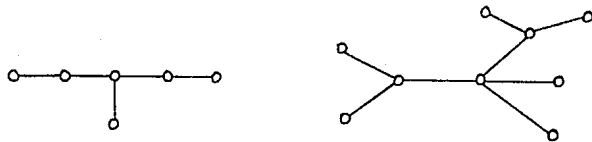


Figura 3

Si solamente se exige que la gráfica no tenga ciclos, sin imponer condiciones sobre su conexidad, se estará hablando de gráficas cuyos componentes son acíclicas.

DEFINICIÓN 3.2: Un BOSQUE es una gráfica acíclica

cuyos componentes conexos son árboles.
(Fig. 4)

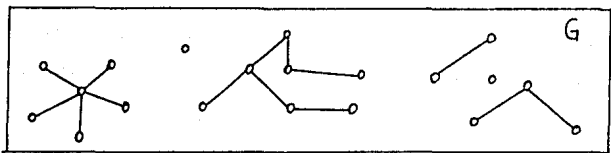


Figura 4

En general, toda gráfica sin ciclos es un bosque y si además es conexa, es también un árbol.

La figura 5 muestra todos los árboles no isomorfos de uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis vértices. Solamente hay un árbol de orden 1, de orden 2 y de orden 3. De orden 4 existen dos, mientras que existen tres de orden 5 y seis de orden 6. Observando estos árboles podemos advertir varias propiedades e intuir que se cumplen en general para todos los árboles. En este capítulo enunciaremos algunas de ellas y las demostraremos.

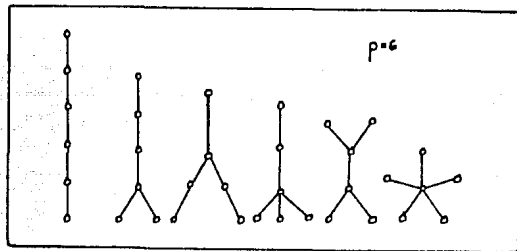
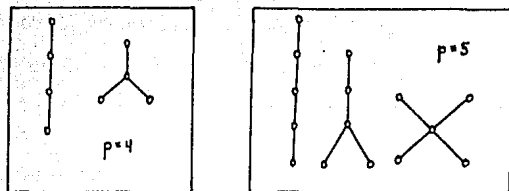
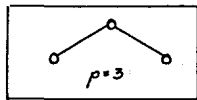
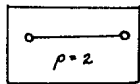
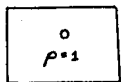


Figura 5

En principio, notemos que al dibujar un árbol sucede lo siguiente: trazamos un vértice y a continuación una arista con otro vértice que será su segundo extremo; este procedimiento continúa hasta concluir. Veamos la relación entre el número de vértices de un árbol y sus aristas, apoyándonos en las gráficas de la figura 5. (Denotaremos a $|V(G)|$ por p y a $|A(G)|$ por q).

$$\begin{array}{ll} p=1, & q=0 \\ p=2, & q=1 \\ p=3, & q=2 \end{array} \quad \begin{array}{ll} p=4, & q=3 \\ p=5, & q=4 \\ p=6, & q=5 \end{array}$$

Podemos afirmar que en general un árbol tiene una arista menos que el total de sus vértices.

TEOREMA 3.3: Si G es un árbol, entonces $q = p - 1$.

demostración: Procederemos por inducción sobre el número de vértices de G .

Si $p=1$, $G=K_1$ y $q=0 = p-1$.

Supongamos que el resultado es válido para todos los árboles con menos de p vértices. (Hipótesis de inducción)

Sea G un árbol con p vértices y $a \in A(G)$. Como G no tiene ciclos, a es un puente (Teo. 2.5). La gráfica $G-a$ es disconexa y tiene exactamente dos componentes (Teo. 2.7) que claramente son acíclicas y conexas; por lo tanto son árboles y cada una tiene menos de p vértices. Llamemos G_1 y G_2 a estas componentes.

Sean $p_1 = |V(G_1)|$, $p_2 = |V(G_2)|$, $q_1 = |A(G_1)|$ y $q_2 = |A(G_2)|$.

Por hipótesis de inducción, sabemos que $q_1 = p_1 - 1$ y $q_2 = p_2 - 1$. Tenemos entonces que

$$V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$$

$$|V(G)| = p = p_1 + p_2$$

$$A(G) = A(G_1) \cup A(G_2) \cup \{a\}$$

$$|A(G)| = q = q_1 + q_2 + 1$$

$$= p_1 - 1 + p_2 - 1 + 1$$

$$= p_1 + p_2 - 1$$

$$= p - 1$$

Como los árboles son graficas conexas, para dos vértices cualesquiera existe una trayectoria que los une. La particularidad de los árboles consiste en que esa trayectoria es única, puesto que de no ser así, la unión de dos trayectorias distintas entre los puntos generaría un ciclo. Expresemos formalmente este hecho:

TEOREMA 3.4: Una gráfica es un árbol si y sólo si para cualesquiera $u, v \in V(G)$

existe una única uv -trayectoria.

demostración: Como G es un árbol, es conexa y por lo tanto existe T_1 una uv -trayectoria en G para cualquier par de vértices $u, v \in V(G)$. Supongamos que dicha trayectoria no es única y que por lo tanto existe T_2 una uv -trayectoria distinta de T_1 . Si $T_1 \cap T_2 = \{u, v\} = \emptyset$, entonces $T_1 \cup T_2$ es un ciclo. Si T_1 y T_2 no son ajenas, sea w el primer vértice donde T_1 y T_2 se intersectan ($w \neq u, v$).



Fig. 6

Si $T_1 = u, u_1, u_2, \dots, u_k, w, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, v$ y

$T_2 = u, v_1, v_2, \dots, v_j, w, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n, v$ consideremos \mathcal{C} del siguiente modo:

$\mathcal{C} = u, u_1, u_2, \dots, u_k, w, v_j, v_{j-1}, \dots, v_1, v_2, u$

Claramente \mathcal{C} sería un ciclo en G lo que es imposible ya que G es un árbol. *

Por otro lado, si entre cada par de vértices de G existe exactamente una trayectoria que los une, entonces G es conexa y no tiene ciclos, pues si existiera \mathcal{C} un ciclo de G ,

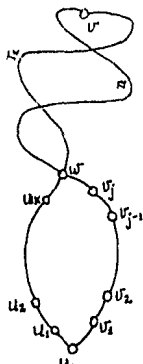


Fig. 7

$\mathcal{C} = u, u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u$; entonces

$T_1 = u, u_1, u_2, \dots, u_r$ y

$T_2 = u_r, u_{r+1}, \dots, u$

serían dos uv -trayectorias distintas, lo que es contrario a nuestra hipótesis. * ■

Los graficos de la figura 5 son todos distintos y en ellos puede advertirse diversidad en el grado de sus vértices, pero en todas ellas notamos una característica común: la existencia de al menos dos vértices de grado 1, a excepción del caso del árbol trivial. Probemos este hecho para cualquier árbol.

TEOREMA 3.5: Todo árbol no trivial tiene al menos dos vértices de grado 1.

demostración: Sea G un árbol no trivial y sea T una trayectoria de longitud máxima en G , $T = v_1, v_2, \dots, v_m$; $\ell(T) = m - 1$.

Demostremos ahora que v_1 y v_m tienen grado 1. Si no fuera así, tendríamos que $g(v_1) \geq 2$ y $g(v_m) \geq 2$. Esto querría decir que existe un vértice $v_{m+1} \neq v_2$ tal que $v_1 \text{ ady}_G v_{m+1}$

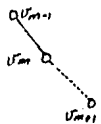


Fig. 8

Si $v_{m+1} \in V(T)$, como G es conexa, existe una $v_i v_{m+1}$ -trayectoria para cualquier $v_i \in V(T)$, $i=1, 2, \dots, m$. Llamémosla T_i y consideremos a B del siguiente modo:

$$B = \{v_1, \dots, v_i \cup T_i \cup v_{m+1}, v_i\}$$

B es un ciclo, lo que contradice la hipótesis de que G es un árbol.

Si $v_{m+1} \notin V(T)$, entonces $T_0 = \{v_{m+1}\} \cup T$ tiene longitud m , con lo que $\ell(T_0) \neq \ell(T)$ y esto contradice la elección de T .

De lo anterior se concluye que necesariamente, $gr(v_1) = 1$.

La situación para v_m se analiza de manera análoga, con lo que hemos demostrado que $gr(v_1) = gr(v_m) = 1$.

DEFINICIÓN 3.6: En un árbol, los vértices de grado 1 se llaman **VÉRTICES TERMINALES**.

Ya hemos percibido que todas las aristas de un árbol son puentes dado que ninguna de ellas es parte de un ciclo. El teorema 3.7 da una demostración formal de este hecho.

TEOREMA 3.7: Una gráfica conexa es un árbol si y sólo si toda arista es un puente.

demostración: Sea G un árbol y sea $a \in A(G)$. Claramente, a no puede estar en ningún ciclo de G y por el teorema 2.5, es un puente de G .

Ahora supongamos que G es conexa y que toda arista de G es un puente.

Esto significa que ninguna arista de G está en un ciclo, lo que indica que G es acíclica y por lo tanto, G es un árbol. \square

Retornemos ahora el problema con el que iniciamos el capítulo. La solución B puede mejorarse de modo que el costo sea menor. ¿Cómo habremos de proceder para lograrlo? Tenemos que eliminar aristas, pero cuidando siempre de no desconectar a la gráfica ya que de hacerlo así, en el problema real estaríamos dejando incomunicada a una o varias poblaciones. Es decir, no debemos eliminar a ninguna arista que sea un puente y esto se logra quitando aristas a los ciclos hasta llegar a una

gráfica acíclica. lo mismo puede hacerse con las opciones D y E (Fig. 9)

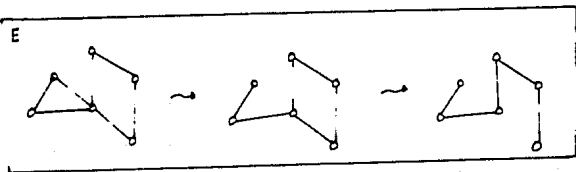
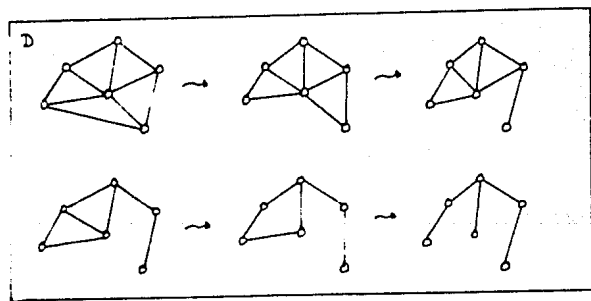
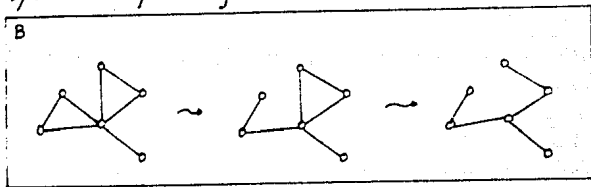


Figura 9

Mediante este procedimiento, a partir de una gráfica G se obtiene otra acíclica G' donde $V(G) = V(G')$ y $A(G) \subseteq A(G')$

DEFINICIÓN 3.8: Dada una gráfica G una subgráfica T de G es un **ARBOL GENERADOR** de G si y sólo si T es un árbol, $V(T) = V(G)$ y $A(T) \subseteq A(G)$.

Los pasos que se muestran en la figura 9 sugieren la forma en que puede encontrarse un árbol generador T de una gráfica G .

TEOREMA 3.9: Toda gráfica conexa contiene un árbol generador.

demostración: Procederemos por inducción sobre el número de ciclos de G .

Sea G una gráfica conexa sin ciclo. Entonces G misma es un árbol generador.

Sea G una gráfica conexa con un ciclo al que llamaremos δ . Sea $a \in A(\delta)$. $G - a$ es acíclica y conexa. Además, $V(G - a) = V(G)$ y $A(G - a) \subseteq A(G)$,

de donde $G-a$ es un árbol generador de G .

Supongamos que toda gráfica conexa con menos de n ciclos tiene un árbol generador. (Hipótesis de inducción)

Sea G una gráfica con n ciclos a los que llamaremos $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Sea $a \in \delta_i$ ($i=1, \dots, n$) $G-a$ tiene $n-1$ ciclos y por lo tanto tiene un árbol generador T con $V(T) = V(G-a) = V(G)$ y $A(T) \subseteq A(G-a) \subseteq A(G)$. Esto significa que T también es un árbol generador de G . \square

Una gráfica puede tener varios árboles generadores distintos y estos son siempre gráficas generadoras conexas mínimas.

Aunque no se conoce una fórmula que determine el número de árboles no isomorfos de orden p , sí existe una que proporciona el número de árboles no idénticos de un orden dado. Esta fórmula se debe a Cayley y existen varias demostraciones de su validez. El lector interesado en una prueba

puede consultar [7, p.35]

TEOREMA 3.10: (Fórmula de Cayley para árboles)

Sea $G = K_p$. El número de árboles generadores de G es p^{p-2} .

EL SOLITARIO DEL RELOJ [14, p.232]

El hombre también juega solo. No podríamos decir desde cuando, pero sin duda la inventiva humana se ha echado a andar en multitud de ocasiones para desarrollar pasatiempos individuales. Entre los más conocidos están los "solitarios", juegos de cartas en los que interviene una sola persona. Gran parte del reto que plantea un juego de solitario radica en el hecho de que no basta con ser el único participante para resultar vencedor. El triunfo puede parecer una cuestión azarosa ya que el juego es una actividad mecánica que no requiere de habilidades especiales. Sin embargo, aunque el azar interviene en gran medida, hay relaciones determinadas por la forma del juego mismo que desempeñan un papel importante y su descubrimiento es de interés.

¿CÓMO SE JUEGA EL SOLITARIO DEL RELOJ?

El nombre de este solitario obedece a la disposición que se da a las cartas durante el juego. La baraja debe repartirse en trece pilas de cuatro cartas, todas boca abajo y dispuestas como si se tratara de los números de la carátula de un reloj, colocando una de ellas al centro del círculo. A cada pila se le asocia el valor de la hora que ocupa y a la del centro, el del rey. (Fig. 10)

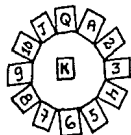


Figura 10

El juego inicia levantando la carta superior de la pila del centro y colocándola boca arriba en lo más bajo de la pila que corresponda a su valor. (Por ejemplo, si se trata de un cinco, se colocará debajo de la pila situada a las cinco; si es una reina, debajo de las doce, etcétera). A continuación se destapa la carta situada sobre la pila ba-

jo la cual se acaba de insertar la anterior y se procede de igual modo con ella. El juego continúa de esta manera y se gana si se consigue voltear las cincuenta y dos cartas siguiendo este procedimiento.

¿PUEDE GANARSE SIEMPRE?

Jugando este solitario se descubrirá que hay ocasiones en las que es imposible seguir destapando cartas antes de haber concluido. ¿A qué se debe esto? En realidad, la posibilidad de terminar depende exclusivamente de cuáles sean las cartas situadas en la parte más baja de cada pila, exceptuando la del centro. La repartición de las cuarenta cartas restantes es indiferente.

Un procedimiento para saber si puede o no ganarse consiste en analizar las características de la gráfica que se obtenga como resultado de hacer lo siguiente:

- Dibujemos otro diagrama con la estructura de la carátula de un reloj indicando en cada pila el valor de la carta situada en su parte más baja, sin incluir la pila central.

-Tracemos una línea desde cada uno de esos doce valores hasta la pila correspondiente a ese mismo número. Cuando el valor de la carta coincide con su posición no debe trazarse línea alguna (Fig. 11)

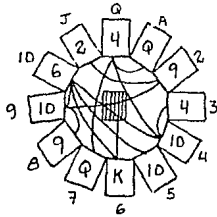


Figura 11

Este sistema de adyacencias da origen a una gráfica, según se muestra en la figura 12.

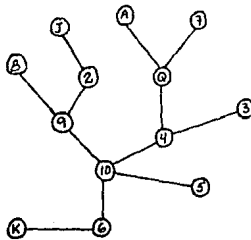


Figura 12

¿Qué características debe tener la gráfica representativa de la disposición de las doce cartas inferiores para que sea posible ganar? ¿Por qué? Para iniciar el lector puede jugar un solitario utilizando la colocación de las cartas de la figura 12 y otras con las que se dan a continuación y obtener las gráficas respectivas.

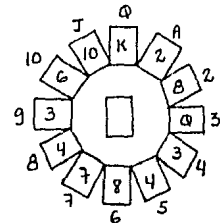
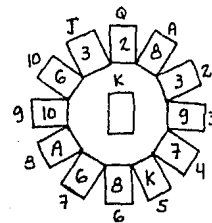
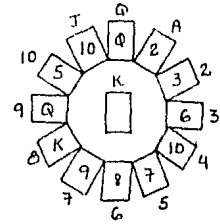
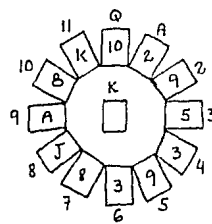


Figura 13

EJERCICIOS

- 1: Demuestra el teorema 3.5 como un corolario del teorema 3.3
- 2: Demuestra que si $gr(u) \geq 2$ para todo $u \in V(G)$, entonces G contiene un ciclo.
- 3: Demuestra que si $q \geq p$, entonces G contiene un ciclo.
- 4: Demuestra que todo árbol con exactamente dos vértices de grado 1 es una trayectoria.
- 5: Sea G una gráfica con $p-1$ aristas. Muestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - a) G es conexa
 - b) G es acíclica
 - c) G es un árbol
- 6: Demuestra que si G es un árbol con $\delta \geq k$, entonces G tiene al menos k vértices terminales.
- 7: Prueba que G es un brogue si y sólo si $q = p - c(G)$
- 8: EL CENTRO de G es un vértice u tal que $\max_{v \in V} \{d(u, v)\}$ es lo más pequeño posible. Muestra que un árbol tiene uno o dos centros que, en su caso, son adyacentes.

4 CONEXIDAD

Entre los problemas interesantes y que, bajo ciertas circunstancias, pueden ser bastante complejos, se encuentran los relacionados con los sistemas de comunicación (teléfonos, telegrafos, etcétera) y rutas de transporte (marítimas, aéreas o terrestres). Seguramente, cada uno de nosotros se ha encontrado tratando de hallar el camino más corto de la escuela a la casa, del trabajo al cine o cualquier posibilidad similar. En algunas ocasiones es sencillo pues las opciones son pocas, pero cuando estas aumentan, la obtención de la solución se complica. Con respecto a esto, podríamos plantearnos la idea de encontrar un modelo funcional que represente los ejes viales de la Ciudad de México, los sentidos de la circulación de cada uno de ellos, señalamientos, semáforos, etcétera, en el que además se establezcan "buenas" comunicaciones entre los di-

versos lugares sin ocasionar embotellamientos. La respuesta no es trivial y se requiere de mucha herramienta para encontrar una solución óptima. En este capítulo, estudiaremos algunos conceptos y resultados que ayudan a atacar algunos problemas de esta naturaleza.

Ya hemos definido el concepto de conexidad y se ha trabajado con él al abordar los temas de bloques y árboles. Ahora consideraremos algunos aspectos más sobre él. Observemos las siguientes gráficas:

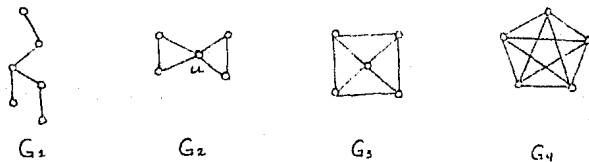


Figura 1

Todas ellas son conexas, pero ¿qué hace falta para desconectarlas? ¿Será posible obtener una gráfica desconexa a partir de una conexa? Analicemos cada una por separado:

G_1 es un árbol. ¿Qué ocurrirá si le quitamos un vértice o una arista? Sea $a \in A(G_1)$. Claramente

$G_1 - a$ es una gráfica desconexa. Ahora bien, si $v \in V(G_1)$ $G_1 - v$ es conexa si y solamente si $gr(v) = 1$

¿Podremos desconectar a G_2 quitándole una arista únicamente? Evidentemente, dado que todas ellas pertenecen a algún ciclo de G_2 , es necesario eliminar al menos un par de aristas para que esto ocurra y, desde luego, no cualquier par resultará útil para este fin. Sin embargo, bastará con remover el vértice u para desconectarla.

En G_3 no hay ningún vértice ni arista cuya eliminación desconecte por sí sola a la gráfica. Si quisieramos hacerlo, deberíamos remover al menos tres aristas y en el caso de G_4 haría falta borrar cuatro o más.

Las observaciones anteriores parecen conducir a dos ideas intuitivas: en primer lugar, que algunas gráficas son conexas "con más fuerza" que otras; es decir, que no todas pueden "romperse" con la misma facilidad; y en segundo, que el número de vértices cuya remoción desconecta a una gráfica G coincide necesariamente con el número de aristas que es necesario eliminar para el mismo fin.

En primera instancia nos ocuparemos de una de las dos maneras de desconectar a una gráfica: la que consiste en eliminar vértices de ella.

Ya hemos establecido el concepto de vértice de corte. Ahora extendemos esta idea a un conjunto de vértices.

DEFINICIÓN 4.1: Sea G una gráfica conexa. Un **CORTE** de G es un subconjunto \bar{V} de los vértices de G tal que $G - \bar{V}$ es desconexa. Si G es desconexa, diremos que \bar{V} es un corte de G si y sólo si $c(G - \bar{V}) > c(G)$. \bar{V} es un **k-CORTE** si \bar{V} es un conjunto con k elementos que es un corte.

¿Toda gráfica G tiene un corte? ¿Qué subconjunto de vértices habría que remover para desconectar a cada una de las siguientes gráficas?

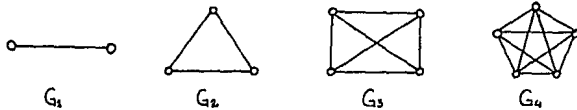


Figura 2

En realidad, una gráfica completa no tiene cortes. Veamos ahora con cuántos vértices podríamos obtener un corte para algunas otras gráficas (Fig. 3).

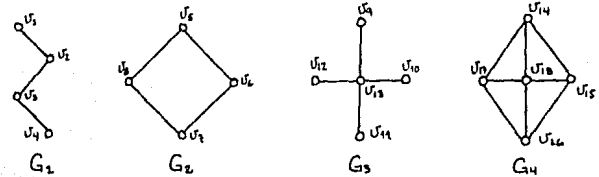


Figura 3

Los conjuntos $V_1 = \{v_2, v_3\}$, $V_2 = \{v_2\}$, $V_3 = \{v_3\}$ desconectan a G_1 . Para desconectar a G_2 se requiere un 2-corte. Los conjuntos $V_4 = \{v_5, v_7\}$ y $V_5 = \{v_6, v_8\}$ son 2-cortes para G_2 . En el caso de G_3 , el conjunto $V_6 = \{v_3\}$ es un 1-corte y además, es el único 1-corte posible para esta gráfica. Por otro lado, no existe ningún 1-corte ni 2-corte para G_4 ; para obtener una gráfica con mayor número de componentes hay que eliminar tres vértices de G_4 . El conjunto $V_7 = \{v_{14}, v_{16}, v_{18}\}$ es un 3-corte de G_4 , al igual que $V_8 = \{v_{15}, v_{17}, v_{19}\}$. Como vemos, el número de vértices necesario para desconectar a una gráfica es una propiedad importante que depende de las características de la gráfica misma y mere-

ce una definición.

DEFINICIÓN 4.2: la CONEXIDAD PUNTUAL $K(G)$ de una gráfica conexa G con $p \geq 2$ es el mínimo número de vértices de G cuya remoción aumenta el número de componentes de G o la hace trivial. Es decir, $K(G) = k$ si k es el mínimo número para el cual G tiene un corte.

A continuación enlistamos la conexidad puntual de algunas gráficas conocidas.

a) Para cualquier gráfica con p vértices K_p , $p \geq 1$,

$$K(K_p) = p - 1$$

b) Para cualquier ciclo C no trivial

$$K(C) = 2$$

c) Para cualquier árbol T , con $p \geq 1$

$$K(T) = 1$$

Es importante resaltar el hecho de que las definiciones anteriores NO afirman que si la conexidad puntual de una gráfica G es k , entonces, para cualquier conjunto $\bar{V} \subseteq V(G)$ tal que $|\bar{V}| = k$ se cumple que $c(G - \bar{V}) < c(G)$; es decir, que la remoción de cualesquiera k

vértices desconecte a G . Lo que sí establecen, es que existe al menos un conjunto de esa naturaleza.

DEFINICIÓN 4.3: Una gráfica G es k -CONEXA si y sólo si $K(G) \geq k$.

De esto se desprende que todas las gráficas conexas no triviales son 1-conexas.

EL TEOREMA DE Menger

Hasta ahora hemos hablado de la conexidad de una gráfica globalmente. Hay situaciones en las que es necesario considerar algo muy similar a la "conexidad local" de una gráfica G . Es decir, la facilidad con la que podemos hacer que dos vértices $u, v \in V(G)$ queden en componentes distintas al remover un subconjunto de vértices de G .

DEFINICIÓN 4.4: Se dice que un conjunto $S \subseteq V(G)$ SEPARA a dos vértices u y $v \in V(G)$, $u \text{ no ady. } v$, si u y v están en distintos componentes de $G - S$. (S es un SEPARADOR)

Nuestro interés ahora es ver como podemos encontrar el mínimo número de vértices que separan a dos vértices

no adyacentes de G . Estudiemos un ejemplo:

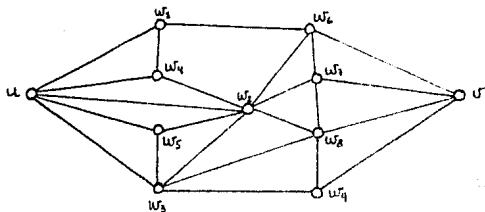


Figura 4

Observa la gráfica de la figura 4 e intenta separar a u y v .

Una forma segura de hacerlo consiste en considerar todas las trayectorias que unen a u y v y eliminar un vértice de cada una de ellas. Sin embargo, dado que nada garantiza que todas estas trayectorias sean ajenas internamente (es decir, que no se intersecten en ningún vértice distinto de u y v), este no tiene por qué ser el menor número de vértices con el que se logre este objetivo.

En la gráfica de la figura 4 hay tres uv -trayectorias ajenas y el conjunto $S = \{w_1, w_2, w_3\}$ separa a u de v . ¿Tendrán alguna relación estos hechos? El siguiente teorema debido a Menger y cuya prueba

fue dada por Dirac establece esa relación.

TEOREMA 4.5: (Teorema de Menger)

Si u y v son dos vértices distintos, u no ady. v , de una una gráfica G , entonces, el máximo número de uv -trayectorias ajenas en G es igual al mínimo número de vértices de G que separan a u de v .

demostración: Si u y v son dos vértices de distintos componentes de la gráfica G el resultado es trivial. Podemos considerar entonces, sin pérdida de generalidad, solamente gráficas conexas.

Si el mínimo número de vértices que separan a dos vértices distintos y no adyacentes u y v es $n \geq 1$, entonces, no puede haber más de n uv -trayectorias internamente ajenas en G . De esta manera, el teorema es válido para $n=1$.

Si u y v son dos vértices distintos y no adyacentes de una gráfica conexas, denotaremos por $S_n(u, v)$ la propiedad de

que ningún conjunto de vértices de cardinalidad menor que n separe a u y v .

Supongamos que el teorema no se cumple. Entonces, existe un entero positivo m para el cual existen gráficas conexas G con u, v , vértices distintos y no adyacentes, para los cuales ocurre que $S_m(u, v)$ y sin embargo, no hay en G un conjunto de m uv -trayectorias ajenas internamente. Como hemos probado que el teorema se cumple para $m=1$, sabemos que $m \geq 2$. Entre estas gráficas, consideremos a F una gráfica con el menor número posible de vértices y sea H una subgráfica generadora de F que satisfaga $S_m(u, v)$ y tal que $H-a$ no cumpla con $S_m(u, v)$ para toda $a \in A(H)$. Podemos desprender tres propiedades de H :

- 1) Para cualquier arista $e = uv_2$, $e \in A(H)$, la gráfica $H-e$ no satisface $S_m(u, v)$. Esto quiere decir que en H existe un conjunto $U(e) \subseteq V(H)$, $|U(e)| < m$ que separe a u de v . Dado que v_1 ady. v_2

necesariamente ocurre que v_1 o v_2 son distintos de u y v . Supongamos que $v_1 \neq u$ y $v_2 \neq v$. $|U(e)| = m-1$, ya que de otro modo, si $|U(e)| < m-1$, como $U(e) \cup \{v_1\}$ separe a u y v en H , entonces, H no cumpliría $S_m(u, v)$, contrariamente a lo que hemos supuesto al elegirla. De aquí que existe un conjunto de m vértices que separe a u y v en H . Ese conjunto es $U(e) \cup \{v_1\}$ o bien $U(e) \cup \{v_2\}$.

- 2) Para cualquier $w \in V(H)$, $w \neq u$ y $w \neq v$ podemos ver que uw y vw no son simultáneamente aristas de H , ya que de ser así, $H-w$ cumpliría con $S_{m-1}(u, v)$ y $H-w$ contendría un conjunto de $m-1$ uv -trayectorias internamente ajenas; así fuera, H tendría m uv -trayectorias internamente ajenas, lo que es contrario a la forma en que H fue elegida.

- 3) Si $W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ es cualquier conjunto de m vértices que separen a u y v en H , entonces, alguna de las dos posibilidades siguientes ocurre:

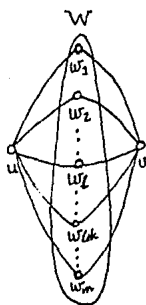


Fig. 5

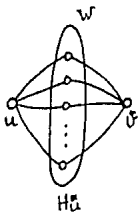
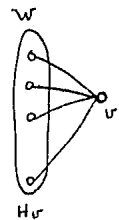
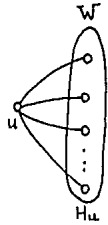


Fig. 6

i) $uw_i \in A(H)$ para toda $i=1,2,\dots,m$

ii) $vw_i \in A(H)$ para toda $i=1,2,\dots,m$.

Para verificar esto, llamemos H_u a la subgráfica determinada por todas las uw_i -trayectorias de H que contienen exactamente un elemento de W y H_v a la subgráfica definida de manera semejante. De este modo, $V(H_u) \cap V(H_v) = W$. Supongamos que ni $uw_i \in A(H)$, ni $vw_j \in A(H)$ para $i=1,2,\dots,m$.

Denotemos por H_u^* a la gráfica que se obtiene a partir de H_u añadiendo un nuevo vértice u^* y las aristas u^*w_i , $i=1,2,\dots,m$. Igualmente, denotaremos por H_v^* a la gráfica que se obtiene al añadir a H_v un nuevo vértice v^* y las aristas u^*w_i , $i=1,2,\dots,m$. H_u^* y H_v^* tienen menos vértices que H , sin embargo, H_u^* satisface $S_m(u, v^*)$ y H_v^* satisface $S_m(u^*, v)$.

Esto implica que H_u^* contiene un conjunto de m u^*w_i -trayectorias ajenas y, de igual modo, H_v^* contiene un conjunto de m u^*w_i -trayectorias ajenas. Sin embargo, estas $2m$ trayectorias determinan

un conjunto de m uv -trayectorias en H , lo cual es una contradicción.

Ahora, sea T la uv -trayectoria más corta en H . Por la propiedad (2), la longitud de T es al menos tres. De esta forma, podemos denotar a T como $T = u, u_1, u_2, \dots, v$; donde $u_1, u_2 \neq v$.

Si hacemos $e = u, u_1, u_2$, entonces, por (2), $U(e) \cup \{u_1\}$ es un conjunto de m vértices que separan a u de v . Como $uw_i \in A(H)$, de (2) y (3) podemos desprender que u es adyacente a todo vértice en $U(e)$. Sin embargo, $U(e) \cup \{u_2\}$ es también un conjunto de m vértices que separan a u de v . Como $U(e) \neq \emptyset$, por (2) y (3) tenemos que $u, u_2 \in A(H)$. Pero esto contradice el hecho de que T sea la uv -trayectoria más corta de H . ■

Este resultado constituye uno de los aspectos más importantes de la conexidad.

Hemos visto que puede aumentarse el número de componentes conexas de una gráfica por la vía de eliminar vértices o bien, removiendo algunos de sus aristas, y hablamos de que este problema está relacionado con las redes de comunicación.

Podemos pensar en una gráfica como la representación de una red de comunicación (telégrafos, autobuses, tren, caminos, teléfonos, etcétera) entre varias ciudades o puntos geográficos simbolizados por vértices. Cada arista significa que hay comunicación entre los puntos que corresponden a sus extremos. La preocupación habitual al construir este tipo de sistemas, además de su costo, es que estos resulten confiables. A menudo interesa saber cuál es el mínimo número de fallas en la comunicación entre dos puntos que provocaría que la red no pudiera dar servicio entre todos ellos. Resulta claro que la propiedad de conexidad de una gráfica está relacionada con la confiabilidad de la red de comunicación a la que representa y, que podríamos asociar una falla en la comunicación entre dos ciudades, con la desaparición de la arista que une en la gráfica a los dos vértices que la re-

presentar.

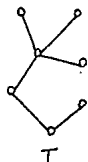
Pueden establecerse conceptos análogos a los que hemos estudiado respecto a la conexidad puntual, para conjuntos de aristas y esto es lo que haremos a continuación.

DEFINICIÓN 4.6: Un CORTE LINEAL de una gráfica conexa G es un subconjunto \bar{A} de $A(G)$ tal que $G - \bar{A}$ es discoconexa. Un K -CORTE LINEAL es un corte lineal de K elementos.

DEFINICIÓN 4.7: La CONEXIDAD LINEAL $\lambda(G)$ de una gráfica conexa G es el mínimo número de aristas $A(G)$ cuya remoción descoconecta a G . Es decir, $\lambda(G) = K$ si K es el mínimo número para el cual G tiene un corte lineal. Decimos que G es K -CONEXA LINEALMENTE si $\lambda(G) \geq K$.

De estas definiciones sabemos que si G es conexa y tiene un puente, entonces $\lambda(G) = 1$, y que, todas las gráficas conexas no triviales son 1-conexas linealmente.

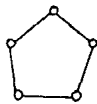
Es natural preguntarnos si la conexidad lineal y la conexidad puntual están relacionadas de alguna manera y, de ser así, cómo es esa relación. Podemos empezar observando algunos casos:



T

$$K(T) = 1$$

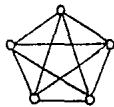
$$\lambda(T) = 1$$



C

$$K(C) = 2$$

$$\lambda(C) = 2$$

 K_5

$$K(K_5) = 4$$

$$\lambda(K_5) = 4$$

Figura 7

Tal vez los ejemplos de los árboles, los ciclos y K_5 nos orillen a pensar que ambas conexidades coinciden siempre, pero un vistazo a la figura 8 no hará abandonar esta idea. Por otro lado, la conexidad lineal no puede nunca ser mayor que la valencia mínima de la gráfica (¿por qué?). Si siguiéramos analizando ejemplos, veríamos que $K(G)$ no excede nunca a $\lambda(G)$. Todas estas reflexiones pueden conducirnos a un resultado que relaciona las dos conexidades y la valencia mínima de una gráfica.

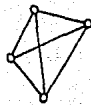
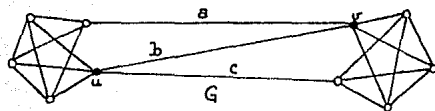
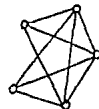
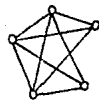
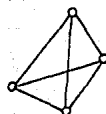
 $G - \{u, v\}$  $G - \{a, b, c\}$

Figura 8

TEOREMA 4.B.- Para cualquier gráfica G se cumple que

$$K(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

demostración.- Si G es trivial, $K(G) = \lambda(G) = \delta(G) = 0$

De otro modo, sea $z_0 \in V(G)$ tal que $\delta_G(z_0) = \delta(G)$ y sea $\bar{A} = \{a \in A(G) \mid a \text{ incide en } z_0\}$. Como la conexidad sólo se ha definido para gráficas conexas, sin pérdida de generalidad podemos considerar que G lo es; además, \bar{A} es un corte lineal, por lo que $\lambda(G) \leq \delta_G(z_0) = \delta(G)$ y

$$\lambda(G) \leq \delta(G),$$

con lo que obtenemos una de las desigualdades.

Para demostrar que $\kappa(G) \leq \gamma(G)$ procederemos por inducción sobre $\gamma(G)$

Si $\gamma(G) = 1$ y $|V(G)| = 2$, entonces $G = K_2$ y como $K_2 - \{uv\}$, $uv \in V(G)$ es la gráfica trivial, $\kappa(G) = 1$, por lo cual, para este caso se cumple la desigualdad.

Si $\gamma(G) = 1$ y $|V(G)| \geq 3$, sabemos que G tiene un puente y , en consecuencia, al menos un vértice de corte; es decir $\kappa(G) = 1$ y la desigualdad se cumple también en este caso.

Ahora supongamos que la desigualdad se cumple para todas las gráficas cuya conexidad lineal sea menor que k .

Sea G una gráfica tal que $\kappa(G) = k$, y sean e una arista de un k -corte lineal de G y $H = G - e$. Entonces $\gamma(H) = k - 1$ y por hipótesis de inducción $\kappa(H) \leq k - 1$.

Sea \bar{V} un corte puntual de H con $\kappa(H)$ elementos. Como $H - \bar{V}$ es disconexa, necesariamente ocurre una de las posibilidades siguientes:

i) $G - \bar{V}$ es disconexa

Esto indica que $\kappa(G) \leq \kappa(H) \leq k - 1$ y entonces $\kappa(G) \leq \gamma(G) = k$.

ii) $G - \bar{V}$ es conexa, en cuyo caso, e es un puente de $G - \bar{V}$. Nuevamente, existiendo dos posibilidades:

a) $|V(G - \bar{V})| = 2$. Entonces:

$$\kappa(G) \leq |V(G)| - 1 = \kappa(H) + 1 \leq k, \text{ es decir } \kappa(G) \leq \gamma(G)$$

b) $|V(G - \bar{V})| \geq 3$ y entonces $G - \bar{V}$ tiene un vértice de corte al que llamaremos v . Esto indica que $\bar{V} \cup \{v\}$ es un corte puntual de G y por lo tanto

$$\kappa(G) \leq \kappa(H) + 1 \leq k$$

con lo que obtenemos también que

$$\kappa(G) \leq k = \gamma(G)$$

De todo lo anterior sabemos que

$$\kappa(G) \leq \gamma(G) \leq \delta(G) \quad \blacksquare$$

EJERCICIOS

1: Para $k > 0$, encuentra una gráfica G que sea k -conexa y un conjunto \bar{V} de k vértices de G tal

que $c(G-v) \geq 2$.

- 2: Demuestra que una gráfica completa no tiene cortes que aumenten su número de componentes conexas.
- 3: Demuestra que para cualquier gráfica simple que cumpla con que $\delta(G) \geq |V(G)| - 2$ se tiene que $\lambda(G) = \delta$.
- 4: Encuentra una gráfica simple G con $\delta = |V(G)| - 3$ tal que $\lambda(G) < \delta$.
- 5: Demuestra que si G es simple y $\delta \geq \frac{|V(G)| + k - 2}{2}$ entonces G es k -conexa.
- 6: Una gráfica G es n -PARTITA, $n \geq 2$, si es posible encontrar una partición de $V(G)$ en n conjuntos V_1, V_2, \dots, V_n de manera que para toda $a = uv$, $a \in A(G)$, sucede que $u \in V_i$ y $v \in V_j$ con $i \neq j$. Determina la conexidad puntual de toda gráfica n -partita.
- 7: Sea G una gráfica n -conexa y sean v_1, v_2, \dots, v_n n vértices distintos de G . Sea H la gráfica que se obtiene añadiendo a G un nuevo vértice ad-

yacente a todos los v_i anteriores. Demuestra que H es n -conexa.

- 8: Sea $H = G + H_1$, donde G es n -conexa. Demuestra que H es $n+2$ conexa. (Si G_1 y G_2 son dos gráficas, se define $G_1 + G_2$ de modo que
- $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$
 - $A(G_1 + G_2) = A(G_1) \cup A(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1) \text{ y } v \in V(G_2)\}$
- siempre que G_1 y G_2 sean ajenas.
- 9: Demuestra que si G es k -conexa linealmente, $k \geq 0$ y \bar{A} es un conjunto de k aristas de G , entonces $c(G - \bar{A}) \leq 2$.
- 10: Muestra que si G es k -conexa linealmente, entonces $|A(G)| \geq \frac{k|V(G)|}{2}$.
- 11: Demuestra que si G es simple y $\delta(G) \geq |V(G)| - 2$, entonces $\lambda(G) = \delta$.
- 12: Encuentra una gráfica simple G con $\delta = \lfloor \frac{|V(G)|}{2} - 1 \rfloor$ y $\lambda(G) < \delta(G)$.
- 13: Demuestra que si G es simple y 3-regular, enton-

$$\text{es } \chi(G) = \gamma(G)$$

14: Construye una gráfica con $\chi(G) = 3$, $\gamma(G) = 4$ y $\delta(G) = 5$

15: Dados l, m y n enteros tales que $0 < l \leq m \leq n$, construye una gráfica simple G de modo que $\chi(G) = l$, $\gamma(G) = m$ y $\delta(G) = n$.

16: Dadas dos uv -trayectorias ajenas T_1 y T_2 en una gráfica 3-conexa ¿es siempre posible encontrar una tercera trayectoria T_3 que una a u y v y que sea ajena tanto a T_1 como a T_2 ?

17: Demuestra que si G es regular de grado r y $\chi(G) = 2$, entonces $\lambda(G) \leq \lfloor r/2 \rfloor$.

5 COLORACION de VERTICES

Probablemente, la coloración de los vértices de una gráfica sea una de las áreas de la Teoría de Gráficas que más atención haya recibido a lo largo de los años. Sin duda, este hecho se debe en gran medida a la relación que esta guarda con el conocido problema de los Cuatro Colores, que ha inquietado profundamente a los matemáticos desde el siglo pasado hasta la fecha. Hay quien afirma que los antiguos fabricantes de mapas sabían ya que era posible colorear cualquier mapa, ya fuera en el globo terráqueo o en el plano, de manera que las regiones que tuvieran frontera común fueran pintadas de distinto color, y que, para lograrlo, bastaba con disponer de cuatro colores. En

algunos casos, era posible hacerlo con menos colores, pero nunca se requería de más. Sin embargo, ni en los libros sobre la historia de la elaboración de mapas, ni en los atlas y cartografías que se han consultado expresamente para ahondar sobre el origen de esta conjetura, se han encontrado indicios de que efectivamente se hubiera conciencia de este sorprendente hecho. Pudiera ser que aquellos artesanos estuvieran tan familiarizados con él, que no tuvieran necesidad de registrarlo, pero al parecer, el cuestionamiento formal sobre su verdad y la razón por la que este fenómeno debería ocurrir, es algo que se originó y desarrolló en la mente de los matemáticos.

La primera referencia al problema [6] parece ser una carta enviada por A. de Morgan a Sir William Rowan Hamilton con fecha del 23 de octubre de 1852. De Morgan era entonces catedrático del University College de Londres y Hamilton lo era en el Trinity College de Dublin. En dicha carta se lee:

"... Un alumno mío me pidió hoy que le explicara la razón de un hecho que yo desconocía y aún

ahora no estoy seguro de que efectivamente lo sea. El sostiene que si se divide una figura arbitrariamente en varias regiones y posteriormente se procede a colorearlas cuidando que si dos regiones tienen una línea en común, entonces sean coloreadas con distinto color, puede ocurrir que se lleguen a necesitar cuatro colores, pero ni uno sólo más... Yo me pregunto si no existirá un caso en el cual se requieran por lo menos cinco colores... He intentado construirlo, pero me parece que es algo muy complicado... ¿Tú que opinas? y en caso de ser cierto, ¿sabes si alguien lo había advertido ya? Mi alumno dice que él lo descubrió mientras coloreaba un mapa de Inglaterra. Mientras más lo pienso, más evidente me parece. Si al contestarme exhibes como contraejemplo un caso muy simple que me haga quedar como un estúpido animal, creo que no tendré más alternativa que hacer lo mismo que hizo la Esfinge..."

Hamilton contestó a De Morgan el 26 de octubre de 1852 mostrando su franca falta de interés en torno al asunto:

"No creo que ataque tu problema del cuaternión"

de colores muy pronto."

Sin embargo, para 1879 el problema ya era bastante conocido e incluso A. B. Kempe dio una primera aproximación a su solución en ese año [21].

En 1880, Frederick Guthrie, el estudiante mencionado en la carta de De Morgan, publicó una nota explicando el origen de su pregunta:

"Hace aproximadamente treinta años, cuando yo era alumno del profesor De Morgan, mi hermano, Francis Guthrie, que había dejado de asistir a sus clases recientemente y es actualmente profesor de matemáticas en la Universidad de Ciudad del Cabo, Sudáfrica, me demostró que el máximo número de colores necesario para colorear un mapa evitando la igualdad de colores sobre los distritos linealmente contiguos, es cuatro. No me corresponde a mí, y menos después de tanto tiempo, intentar proporcionar la demostración que él me dio entonces... Con el permiso de mi hermano, le expuse el teorema al profesor De Morgan, quien se mostró muy complacido con él y lo aceptó como un resultado nuevo. Según me han informado quienes asistie-

ron a sus clases después de mí, siempre reconocía la fuente de la cual él había obtenido esta información. Si mal no recuerdo, la demostración que hizo mi hermano, no le parecía del todo satisfactoria ni siquiera a él mismo, pero quienes tengan interés en este problema deben remitirse a él directamente."

Según estas notas, la Conjetura de los Cuatro Colores podría ser una creación de un tal Francis Guthrie, pero lo que realmente tiene importancia es el fuerte impulso que recibió la Teoría de Gráficas a raíz de esta idea, así como la gran cantidad de resultados que se encontraron como consecuencia de este desarrollo. En cuanto al problema mismo, no fue sino hasta 1977 que K. Appel, W. Haken y J. Koch lograron demostrarlo con ayuda de métodos computacionales [3]. Pero, ¿cuál es la relación de todo esto con la Teoría de Gráficas? ¿por qué el Teorema de los Cuatro Colores tiene que ver con la coloración de los vértices de una gráfica? A continuación veremos en qué consiste este tema y cómo es que la cuestión de la coloración de las regiones de un mapa pue-

de modelarse en base a esto.

Consideremos un mapa cualquiera:

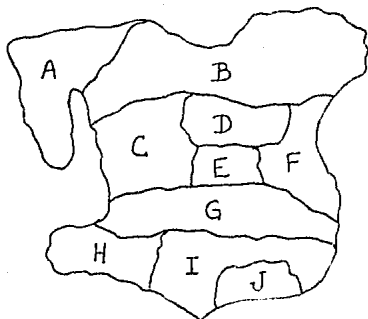


Figura 1

Ahora construyamos una gráfica G que represente al mapa, de la siguiente manera:

- a) Cada región (A, B, C, ..., J) estará representada por un vértice.
- b) Dos vértices serán adyacentes si y solamente si las dos regiones a las que representan tienen una frontera en común. (Entenderemos por frontera una curva y no un punto solamente.)

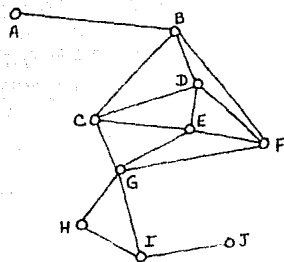


Figura 2

Con esta representación, la coloración del mapa que buscamos es equivalente a colorear los vértices de G de forma que si dos vértices son adyacentes, entonces tengan colores distintos. Este concepto es incómodo de manejar si cada vez que queramos utilizarlo o hablar de él, tenemos que explicar todas las condiciones que estamos estableciendo para hacer la asignación de colores; por esto, resulta conveniente dar una definición para él.

DEFINICIÓN 5.1 Sea G una gráfica. Una **COLORACIÓN** de G es una asignación de elementos de un conjunto \mathcal{L} a los

que llamaremos COLORES) a los vértices de G de manera que a cada $v \in V(G)$ le corresponda un color y sólo uno. Una coloración en la que se emplean k colores es una k -COLORACIÓN.

Sin embargo, la definición anterior no excluye la posibilidad de que a dos vértices adyacentes les sea asignado el mismo color y, de hecho, esto es algo que, al menos en lo que al problema de los Cuatro Colores respecta, quisiéramos evitar. Definiremos entonces un tipo particular de coloración:

DEFINICIÓN 5.2: Sea G una gráfica. Una COLORACIÓN PROPIA o BUENA COLORACIÓN de G es una asignación de colores a los vértices de G de manera que para cualesquiera $u, v \in V(G)$ con $uv \in A(G)$, el color de u es distinto al color de v .

En adelante, para simplificar, siempre que hablemos de una coloración, estaremos pensando en una coloración propia, a menos que se especifi-

que lo contrario.

Supongamos que una gráfica G tiene una n -coloración. Entonces, también tiene una $n+1$ -coloración, una $n+2$ coloración y, en general, una $n+z$ -coloración con $z \in \mathbb{N}$ y $n+z \leq |V(G)|$. Este es un hecho importante que da origen a la siguiente definición:

DEFINICIÓN 5.3: Una gráfica G es n -COLOREABLE si existe una m -coloración de G para alguna $m \leq n$.

Claramente, toda gráfica de orden p es p -coloreable y encontrar una p -coloración de la misma no presenta dificultad alguna. Un problema que resulta más interesante es saber cuál es el mínimo número k para el cual una gráfica G es k -coloreable y este sí tiene relación estrecha con el teorema de los Cuatro Colores, ya que si pudiéramos probar que para una gráfica G que represente a un mapa de n regiones, el mínimo número para el cual G es k -coloreable es cuatro, entonces, habríamos demostrado el famoso teorema de Guthrie. Resulta natural, por lo tanto, darle un

nombre distintivo a dicho número.

DEFINICIÓN 5.4: El mínimo número para el cual una gráfica G es m -colorable se llama **NÚMERO CROMÁTICO** de G y se denota por $\chi(G)$. Si G es una gráfica para la cual $\chi(G) = n$, entonces se dice que G es **n -CROMÁTICA**.

Al colorear los vértices de una gráfica, de hecho estamos obteniendo varios subconjuntos de $V(G)$, según sea la coloración que hayamos dado. Un conjunto de vértices a los que se ha asignado el mismo color tiene la particularidad de que ningún elemento del conjunto es adyacente a otro elemento del mismo conjunto. Un conjunto de esta naturaleza tiene una definición propia.

DEFINICIÓN 5.5: Dada una coloración de una gráfica G al conjunto cuyos elementos son todos los vértices a los que se les ha asignado un mismo color se le llama **CLASE CROMÁTICA**.

DEFINICIÓN 5.6: Sea G una gráfica y $\bar{V}(G) \subseteq V(G)$. $\bar{V}(G)$ es un **CONJUNTO INDEPENDIENTE** si y

sólo si para cualesquiera $u, v \in \bar{V}(G)$ sucede que $uv \notin A(G)$.

Claramente, toda clase cromática es un conjunto independiente. Con esta definición, podríamos pensar al número cromático como el mínimo número de clases cromáticas en que se puede partir a los vértices de una gráfica.

Ahora bien, ¿cómo se determina el número cromático de una gráfica? Intentemos encontrar el de algunas gráficas conocidas. Consideremos en primer lugar a los ciclos pares (fig. 3):

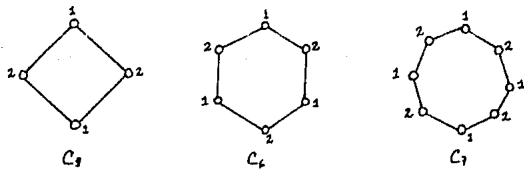


Figura 3

El procedimiento de coloración que se muestra en los ciclos de la figura 3 permite ver que siempre es posible encontrar una 2-coloración para tales gráficas y que por lo tanto $\chi(C_{2n}) = 2$.

Siguiendo un método de coloración similar al anterior, advertiremos que para dar una buena coloración de un ciclo impar no bastan dos colores; *hace falta uno más* (fig. 4)

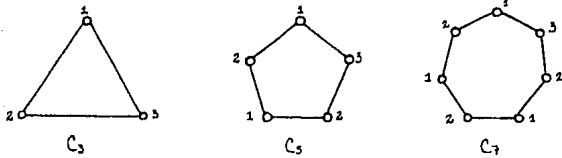


Figura 4

De aquí que $\chi(C_{2n+1}) = 3$

Ahora pensemos en $\chi(K_n)$, es decir, en el número cromático de una gráfica completa con n vértices. En una gráfica de este estilo, cada vértice es adyacente a todos los demás, por lo que podemos ver que $\chi(K_n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$ (fig. 5)

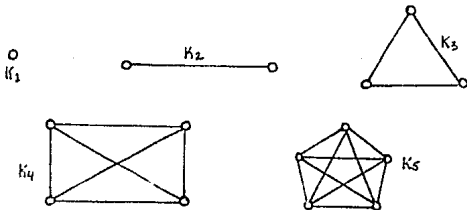


Figura 5

Ahora que hemos encontrado unas gráficas particulares cuyo número cromático es 2, (C_{2n}), podríamos preguntarnos si es posible caracterizar a todas las gráficas que cumplan con esto. Si recordamos que el número cromático puede definirse como el mínimo número de conjuntos independientes de vértices, y buscamos gráficas para las cuales exista algún par de conjuntos de esta naturaleza V_1, V_2 , tales que $V(G) = V_1 \cup V_2$, nos daremos cuenta de que estas gráficas son las bipartitas. Esto nos conduce a plantear el siguiente teorema:

TEOREMA 5.7: Para toda gráfica G , $\chi(G) = 2$ si y solamente si G es bipartita.

demonstración: Sea G una gráfica tal que $\chi(G) = 2$. Entonces existen en G dos clases cromáticas que son dos conjuntos independientes e inducen una bipartición de los vértices de G , ya que si llamamos V_1 y V_2 a las clases cromáticas de una coloración sabemos que $V_1 \cup V_2 = V(G)$; $V_1 \neq \emptyset$; $V_2 \neq \emptyset$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, por lo que G es bipartita. \square

Por otro lado, si G es una gráfica bipartita, $V(G) = V_1 \cup V_2$, donde V_1 y V_2 son dos conjuntos independientes tales que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Asignando un color a todos los vértices de V_1 y otro a todos los de V_2 , lo cual es posible dado que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, habremos encontrado una 2-coloración de $V(G)$.

Como un ejercicio, el lector puede demostrar el siguiente corolario del teorema anterior:

COROLARIO 5.8: Si T es un árbol, con $p \geq 2$, $\chi(T) = 2$.

A continuación, se enuncia un resultado equivalente al teorema 5.7. ¿Puedes establecer por qué se da esta equivalencia?

TEOREMA 5.9: Una gráfica G es 2-cromática si y solo si no contiene ciclos impares.

Sigamos intentando caracterizar a todas las gráficas que tienen un cierto número cromático fijo. Por ejemplo, ¿qué propiedad deben cumplir todas las gráficas cuyo número cromático sea 1? Veamos: si $\chi(G) = 1$, entonces, existe una sola clase cromá-

tica a la cual pertenecen todos los vértices, es decir, $V(G)$ es en sí mismo un conjunto independiente y, por lo tanto, G es una gráfica sin aristas.

En el capítulo 1 definimos al complemento de una gráfica. Ahora bien, ¿cómo es el número cromático de las gráficas que son el complemento de un ciclo impar? Veamos algunos ejemplos particulares.

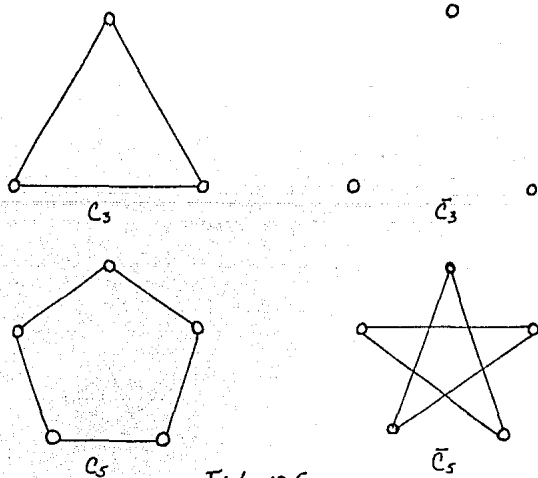


Figura 6

Como \bar{C}_3 no tiene aristas, $\chi(\bar{C}_3) = 1$. \bar{C}_5 es a su vez un ciclo impar y por lo tanto $\chi(\bar{C}_5) = 3$. Sin embargo, con esta información, aún no es posible formular una conclusión general. Estudiemos un caso más:

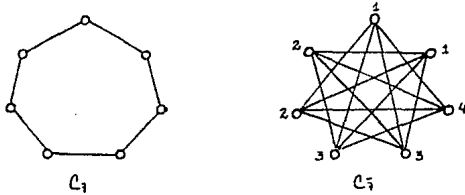


Figura 7

La figura 7 muestra una 4-coloración para \bar{C}_7 , pero ¿cómo podemos estar seguros de que no hay una n -coloración de $V(\bar{C}_7)$ con $n < 4$?

Un razonamiento general que considere la estructura de los complementos de los ciclos impares puede ayudarnos. Recordemos que una buena coloración induce una partición de los vértices de una gráfica en conjuntos independientes, que corresponden a las clases cromáticas de la coloración. Esto quiere decir que encontrar el número de conjuntos independientes de una gráfica proporciona una buena aproximación

al número cromático. Ahora bien, ¿cuántos vértices puede tener cada conjunto independiente de una gráfica $G = \bar{C}_{2n+1}$? Como en C_{2n+1} cada vértice es adyacente a otros dos, en \bar{C}_{2n+1} cada conjunto independiente no puede tener como elementos a más de dos vértices y como $|V(\bar{C}_{2n+1})| = 2n+1$, entonces, el número de conjuntos independientes es mayor o igual que $n+1$. Por supuesto, el mínimo número de estos conjuntos independientes es también menor o igual que $n+1$, y este mínimo es justamente el número cromático. Todo esto nos conduce al siguiente resultado:

$$\chi(\bar{C}_{2n+1}) \geq n+1$$

En el caso particular de \bar{C}_7 tendríamos que mostrar que es imposible dar una 3-coloración de \bar{C}_7 para así ver $\chi(\bar{C}_7) = 4$

La figura 8 muestra que $\bar{C}_5 \subseteq \bar{C}_7$ y exhibe una 3-coloración de \bar{C}_5 .

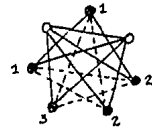


Figura 8

Ahora intentemos colorear los otros dos vértices empleando únicamente los tres colores que ya han sido utilizados. El vértice señalado con la flecha es adyacente a vértices que tienen asignados los colores 1, 2 y 3 y, por lo tanto, se requiere de un nuevo color para él. Tenemos ahora la siguiente relación:

$$3 \leq \chi(\bar{C}_7) \leq 4$$

y como ya hemos encontrado una 4-coloración, sabemos que

$$\chi(\bar{C}_7) = 4$$

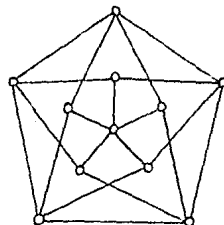
EJERCICIO 5.10: Demuestra que $\chi(\bar{C}_{2nr}) = nr + 1$.

El número cromático de una gráfica es un parámetro importante de esta y el procedimiento para hallarlo a menudo consiste en proporcionar buenas cotas para él. En este capítulo estudiaremos algunos resultados relativos a esto y el lector interesado puede encontrar algoritmos eficientes para acotar a $\chi(G)$ en [12].

Como un primer intento para encontrar el número cromático de G , observen os que este es precisamente el máximo de los números cromáticos toma-

do sobre todas las componentes conexas de G . En el caso de que G sea conexa, el número cromático de G resulta ser el máximo de los números cromáticos de sus bloques (El lector puede demostrar este hecho con precisión, como un ejercicio). Para poder acotar al número cromático es útil estudiar las gráficas que definimos a continuación:

DEFINICIÓN 5.11: Una gráfica G es **CRÍTICA** con respecto al **NÚMERO CROMÁTICO** si $\chi(H) < \chi(G)$ para toda H , subgráfica propia de G . Una gráfica **K-CRÍTICA** es una gráfica K -cromática y crítica.



Gráfica de Grötzsch

Figura 9

Todo gráfica k -cromática tiene una subgráfica k -crítica. La figura 9 muestra una gráfica 4-crítica ideada por Grötzsch en 1958. Las gráficas críticas han sido estudiadas ampliamente por Dirac (1952).

EJERCICIO 5.12: Encuentra una gráfica crítica que sea disconexa. (Si crees que no existe tal gráfica, demuéstralo).

TEOREMA 5.13: Si G es k -crítica, entonces $\delta \geq k-1$.

demostración: Procederemos por contradicción.

Supongamos que existe una gráfica G k -crítica tal que $\delta < k-1$ y sea v un vértice de grado δ en G . Como G es k -crítica, $G-v$ es $(k-1)$ -coloreable.

Sean V_1, V_2, \dots, V_{k-1} las clases cromáticas de una $k-1$ coloración de $G-v$. Como el grado de v es igual a $\delta < k-1$ en G , v es adyacente a menos de $k-1$ vértices, por lo tanto, existe $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ tal que v no es adyacente a ningún vértice del conjunto V_j . Esto quiere decir que $\{V_1, V_2, \dots, V_j \cup \{v\}, \dots, V_{k-1}\}$ es una

$(k-1)$ -coloración de G ; pero esto es una contradicción puesto que G es k -cromática. Con esto concluimos que $\delta \geq k-1$. \square

COROLARIO 5.14: Toda gráfica k -cromática tiene por lo menos k -vértices de grado al menos $k-1$.

demostración: Sea G una gráfica k -cromática y sea H una subgráfica k -crítica de G . Por el teorema 5.14, todo vértice de H tiene grado mayor o igual a $k-1$ en H y, en consecuencia, también en G . Como H es k -cromática, H tiene al menos k vértices, lo cual demuestra el resultado. \square

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de lo anterior, y el lector puede demostrarlo como un ejercicio.

COROLARIO 5.15: Para toda gráfica G , $\chi(G) \leq \delta + 1$

DEFINICIÓN 5.16: Si S es un corte de una gráfica conexa G y llamamos V_1, V_2, \dots, V_n a los conjuntos de vértices de las

componentes de $G-S$, las subgráficas $G_i = \langle V_i \cup S \rangle$ se conocen como las S -COMPONENTES de G .

La figura 10 muestra las S -componentes de una gráfica. En este caso, $S = \{u, v\}$

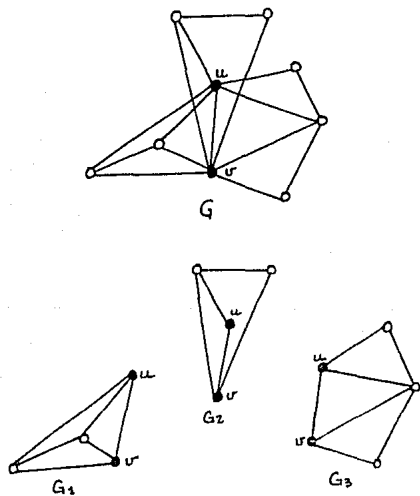


Figura 10

DEFINICIÓN 5.17.- Se dice que las coloraciones de G_1 , G_2, \dots, G_n COINCIDEN en S para todo

$v \in S$, S un corte, v tiene asignado el mismo color en cada una de ellas.

DEFINICIÓN 5.18.- Un CLAN de G es una subgráfica H de G que es completa.

TEOREMA 5.19.- En una gráfica crítica G , ninguno de sus cortes es un clan.

demostración.- Sea G una gráfica crítica y supongamos que G tiene un corte S tal que $\langle S \rangle$ es un clan.

Denotemos por G_1, G_2, \dots, G_n a las S -componentes de G . Como G es k -crítica, para cualquier $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, G_j es $(k-1)$ -coloreable. Además, como S es un clan, todos sus vértices deberán tener colores distintos bajo cualquier $(k-1)$ -coloración de G_j . Esto quiere decir que pueden tomarse $(k-1)$ -coloraciones de G_1, G_2, \dots, G_n que coinciden en S , y estas $(k-1)$ -coloraciones de las S -componentes de G constituyen una $(k-1)$ -coloración de G ; pero esto es una contradicción ya que G es k -crítica. De lo

anterior se concluye que ningún corte de G es un clan. ■

COROLARIO 5.20: Toda gráfica crítica es un bloque.

demonstración: Supongamos que existe G , una gráfica crítica que no es un bloque. Sea $v \in V(G)$ un vértice de corte de G . $S = \{v\}$ es un corte y $S = K_1$. Esto significa que S es un clan, lo que contradice el Teorema 5.20 y por lo tanto, toda gráfica crítica es un bloque. ■

En general, la cota $\chi(G) \leq \Delta + 1$ que hemos establecido puede estar muy alzada del valor preciso de $\chi(G)$. Por ejemplo, en el caso de las gráficas bipartitas se advierte claramente que no es de gran ayuda, ya que si G es una de estas gráficas, sabemos que $\chi(G) = 2$, mientras que $\Delta(G)$ puede ser muchísimo mayor (figura 12).

En 1941, Brooks demostró que las únicas gráficas cuyo número cromático coincide con su grado máximo más uno, son las gráficas completas y los ciclos impares. Este hecho queda establecido en el

siguiente teorema. Para una demostración del mismo puede consultarse [7, p. 122]

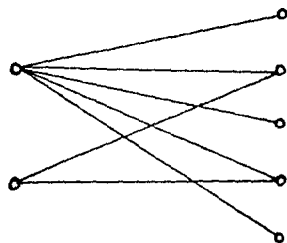


Figura 12

TEOREMA 5.21: (Teorema de Brooks)

Si G es una gráfica simple y conexa y no es completa ni es un ciclo impar, entonces $\chi(G) \leq \Delta$.

Se han encontrado otras cotas superiores para el número cromático, una de las cuales está dada en términos de la longitud de una de las trayectorias máximas de G .

Para demostrar el siguiente resultado llamaremos K a $\mathcal{L}(T)$ donde T es una trayectoria de longitud máxima.

TEOREMA 5.22: Para toda gráfica G , $\chi(G) \leq 1 + k$

demostración: Si G es una gráfica sin aristas, el resultado es inmediato, así es que supondremos que G tiene al menos una arista.

Sea V_i un conjunto independiente de vértices, de cardinalidad máxima, la gráfica $G - V_i$ no tiene trayectorias de longitud igual a k

(Si $G - V_i$ tuviera una trayectoria $T = u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$, entonces, el vértice u_{k-1} debería ser adyacente a algún vértice en V_i , pues de otra manera, $V_i \cup \{u_{k-1}\}$ sería un conjunto independiente de cardinalidad mayor a la de V_i). Por otro lado, la trayectoria $T' = u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, v_i$ es una trayectoria en G cuya longitud es $k+1$, lo que también es imposible).

Para $i = 1, 2, k-1$, sea V_{i+1}

de modo que $V_{i+1} \subseteq V$, V_{i+1} es de cardinalidad máxima e independiente en $G - U_{j_i}^i V_j$. Si para alguna i se tiene que $V(G) = U_{j_i}^i V_j$, entonces ocurre que $\chi(G) \leq i \leq k < k+1$.

De otra forma, siguiendo el razonamiento de la primera parte de la demostración, $G - U_{j_i}^i V_j$ no contiene ninguna trayectoria de longitud $k-i+1$, donde $1 \leq i \leq k$.

En particular, $G - U_{j_i}^k V_j$ no tiene aristas, de modo que $V_{k+1} = V(G) - U_{j_i}^k V_j$ es independiente y $V(G) = U_{j_i}^{k+1} V_j$, lo que implica que

$$\chi(G) \leq 1 + k \quad \square$$

Hasta aquí hemos dado algunas cotas superiores para el número cromático. También, existen cotas inferiores para este parámetro; una de ellas está dada en función del orden de un clan de cardinalidad máxima contenido en una gráfica G , al que denotaremos $\omega(G)$.

Puede verse que para toda gráfica G sucede que $\omega(G) \leq \chi(G)$ puesto que sabemos que $\chi(K_n) = n$. El siguiente teorema proporcionará un resultado más preciso sobre la relación de estos dos números.

TEOREMA 5.23 - Si una gráfica G no contiene a T_4 como subgráfica, entonces $\chi(G) = \omega(G)$.

La demostración de este resultado requiere de un poco más de material del que hemos abarcado en estas notas, pero el lector interesado puede consultar [6, p.238]

APLICACIONES

En general, la coloración de vértices ayuda a resolver problemas de almacenamiento. Un ejemplo claro son las compañías productoras de compuestos químicos, muchos de los cuales reaccionan entre sí cuando están en contacto. Como una medida de precaución para evitar explosiones, las bodegas deben dividirse en compartimentos en los cuales se almacenarán juntos los compuestos que no reaccionen entre sí.

Si construimos una gráfica cuyos vértices representen a los compuestos químicos y cada una de sus aristas indique que los compuestos correspondientes a sus extremos reaccionan entre sí, el número cromático nos dará el mínimo número de conjuntos independientes de los vértices; lo que en el problema real será el mínimo número de compartimentos necesario para almacenar los compuestos con seguridad. Almacenando en cada compartimento a los compuestos que estén en una clase cromática, el problema estará resuelto.

EJERCICIOS:

1: Sea G una gráfica simple con n vértices, regular de grado δ . Prueba que $\chi(G) \geq \frac{n}{(n-\delta)}$

2: Prueba que

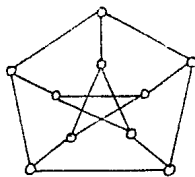
i) C_n es crítica si y sólo si n es impar.

ii) $C_n + C_n$ es una gráfica crítica cuyo número cromático es 6.

3: Muestra que si cualesquiera dos ciclos impares

de G tienen un vértice en común, entonces
 $\chi(G) \leq 5$.

- 4: Sean G_1 y G_2 dos gráficas k -críticas con exactamente un vértice en común, y sean $uv_1 \in A(G_1)$ y $uv_2 \in A(G_2)$. Muestra que la gráfica $H = [G_1 - uv_1 \cup G_2 - uv_2] + uv_1, uv_2$, a la que se llama UNIÓN de HAJOS, es k -crítica.
- 5: Para $n=4$ y para toda $n \geq 6$, construye una gráfica 4-crítica con n -vértices.
- 6: Demuestra que toda gráfica n -cromática es subgráfica de alguna gráfica n -partita completa.
- 7: ¿Cuál es el número cromático de la Gráfica de Petersen? Da una buena coloración (fig. 13)



- 8: Encuentra buenas coloraciones y el número cromático para cada una de las gráficas platónicas.
- 9: Demuestra que toda gráfica n -cromática crítica con $n \geq 2$ es $(n-1)$ -conexa linealmente.
- 10: Muestra que si G es una gráfica n -cromática crítica con $n \geq 2$, entonces, no necesariamente G es $(n-1)$ -conexa puntualmente.

6 PLANARIDAD

En el capítulo 3 tocamos el tema de las redes de comunicación. En aquella ocasión nos interesaba construir una red de carreteras que conectara a un cierto número de poblaciones, utilizando el mínimo número de tramos de construcción. Ahora abordaremos un problema similar, pero con una preocupación distinta, como veremos a continuación.

En una cierta región existen seis poblaciones y se pretende intercomunicarlas a través de un sistema ferroviario (Fig. 1)

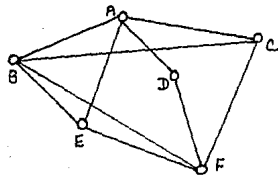


Figura 1

La gráfica de la figura 1 representa el modelo inicial para la construcción de las vías de tren que intercomunicarán a seis lugares, a los cuales se les han asignado las letras A, B, C, D, E y F. Sin embargo, a fin de reducir las posibilidades de choque entre los trenes, se ha pensado en elaborar un nuevo diseño que evite que las vías se intersecten a lo largo del recorrido. Mediante una modificación de la gráfica de la figura 1, obtenemos la de la figura 2, que representa el nuevo proyecto. Como es importante que haya el mismo número de vías que se planeó originalmente y que estas se construyan exactamente entre los puntos que se midieron en la figura 1, el nuevo modelo ha respetado estas características.

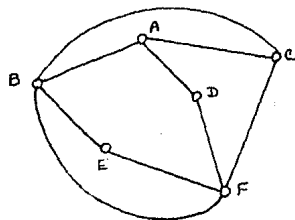


Figura 2

Con esta nueva idea, probablemente se requieran más kilómetros de vía y, desde otros puntos de vista, tal vez esta no sea la red ferroviaria ideal, pero la preocupación de que las vías se intersequen solamente en las ciudades, ha quedado resuelta. Preguntémonos ahora que habría sucedido si la red diseñada hubiera sido la siguiente (Fig. 3):

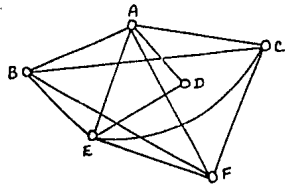


Figura 3

Esta nueva gráfica tiene más aristas que la original (fig. 1), lo que hace pensar que el procedimiento que nos condujo a la gráfica de la figura 2 será más complicado esta vez. Recordemos que se trata de lograr dos cosas:

- 1) disponer las aristas de la gráfica de manera que estas no se intersequen en puntos distintos a los vértices de la misma, y
- 2) preservar la adyacencia de los vértices.

La figura 4 muestra un intento de lograr lo anterior, a partir de la gráfica de la figura 3.

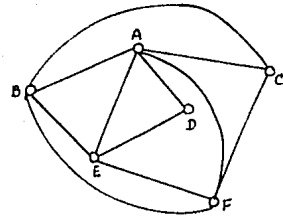


Figura 4

Puede verse que no hay forma de dibujar la arista ED sin atravesar alguna otra y que, de hecho, cualquier intento que hagamos por lograrlo nos conducirá a una situación similar. Al parecer, la posibilidad de redibujar una gráfica respetando las condiciones que hemos mencionado, depende de las características de la gráfica misma y, podemos pensar que no siempre se puede obtener una representación de esta naturaleza. Para iniciar el estudio de esta propiedad definiremos algunos conceptos:

DEFINICIÓN 6.1 Se dice que una gráfica es **PLANA** si está dibujada en el plano de ma-

nera tal que sus aristas sólo se intersecan en vértices de la gráfica misma.

DEFINICIÓN 6.2: Una gráfica G es **APLANABLE** si es isomorfa a una gráfica plana.

La gráfica de la figura 1 no es plana, pero si es aplanable, según lo muestra la figura 2. La gráfica de la figura 3 no es plana y parece ser que tampoco es aplanable. En este capítulo veremos criterios y resultados para caracterizar a las gráficas planas, aplanables y no planas.

Pensemos ahora en la representación gráfica del siguiente problema: En algún lugar del planeta se encuentran tres casas de tres familias vecinas que no desean verse entre sí. Irremediablemente tienen que acudir a pagar la luz, el agua y el teléfono el mismo día y casi a la misma hora los tres. Para esto, deberán asistir a las compañías correspondientes y, por supuesto, no quisieran encontrarse en el camino. Si llamamos a la Compañía de Luz L , a la de Teléfono T , y a la de agua R , y a cada familia le asignamos un número (1, 2 ó 3), obtenemos la siguiente representación (Fig. 5)

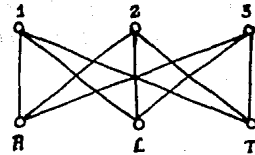


Figura 5

La figura 6 ilustra el tipo de situación al que nos enfrentaremos al pretender aplanar la gráfica anterior.

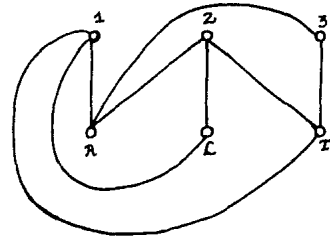


Figura 6

A través de varios intentos por trazar la arista que une al vértice 3 con el L sin cruzar alguna otra, nos convenceremos de que esto es imposible. Hasta aquí, nos hemos encontrado con dos casos similares: el trazo de la arista CD en la gráfica de

la figura 4 y este último, por lo cual sería conveniente explorarlos con más detalle. Volvamos a la figura 4 y observemos el ciclo $C_1 = A, E, F, A$. Este ciclo rodea al vértice D , pero no al C . En el caso de la figura 6, el ciclo $C_2 = T, L, A, T$ circunda a L , pero no a B . Podemos pensar a un ciclo como a una curva continua que no se intersecta a si misma en ningún punto más que en su origen, el cual coincide con su extremo final. Puede advertirse que siempre que un ciclo rodea a un punto, cualquier arista que lo una a un vértice que se encuentre fuera del ciclo deberá atravesarlo necesariamente; al menos, si este procedimiento tiene lugar en el plano. Esto nos lleva a pensar que las propiedades de planaridad de una gráfica no dependen exclusivamente de la gráfica misma, sino también de la superficie en que la consideremos. El estudio de las gráficas aplanables está, por lo tanto, estrechamente vinculado a la topología del plano. Sin ser muy estrictos en cuanto a esto, definiremos un concepto de su importancia para el tema que nos ocupa y, también definiremos un resultado fundamental.

DEFINICIÓN 6.3: Una CURVA DE JORDAN es una curva cerrada simple.

Notemos que la unión de las aristas de un ciclo de una gráfica plana es una curva de Jordan. Todas las curvas de la figura 7 son también curvas de Jordan.

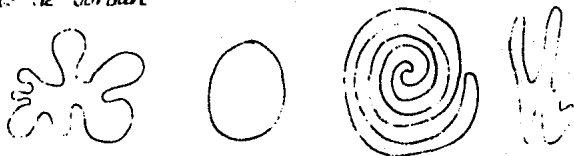


Figura 7

Una curva de Jordan J trazada en \mathbb{R}^2 , divide a \mathbb{R}^2 en dos conjuntos abiertos, ajenos entre sí: uno es el formado por todos los puntos a los que "rodea" la curva, es decir, lo que está dentro de ella, y el otro, el formado por todos los que quedan fuera. La llamaremos al primero INTERIOR de J , ($Int J$), y al segundo EXTERIOR de J ($Ext J$) (Figura 8)

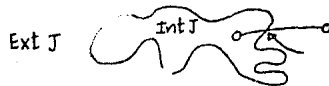


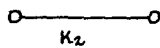
Figura 8

La idea que hemos manejado intuitivamente en nuestros dos ejemplos es de hecho un teorema cuya demostración escapa al material de estas notas, pero que puede encontrarse en la mayoría de los libros de análisis, topología y variable compleja [2]

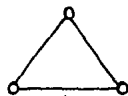
TEOREMA 6.4: Sea J una curva de Jordan en el plano. Cualquier línea que una a un punto del $\text{Int} J$ con otro del $\text{Ext} J$, debe cruzar a la curva J en algún punto. (Figura 8)

Las situaciones a las que hemos llegado al querer aplanar a ciertas gráficas, y, que están representadas en las figuras 4 y 6, nos han hecho pensar que existen gráficas que no son aplanables. Para encontrar ejemplos de este tipo, resulta natural buscar entre las gráficas que más aristas tienen, por ejemplo, las completas. Veamos algunos ejemplos:

K_1



K_2



K_3

Figura 9

K_1 , K_2 y K_3 son todas gráficas planas. La figura 10 muestra que K_4 no es plana, pero sí aplanable. En la misma figura se exhibe un aplanamiento de ella.

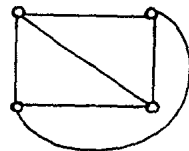
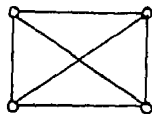


Figura 10

El caso de K_5 es distinto y de hecho, al intentar aplanarla nos encontramos con una situación similar a la de nuestros dos primeros ejemplos. Esto nos hace pensar que probablemente no sea aplanable y también nos sugiere que el Teorema de Jordan seguramente interviene en la demostración formal de este hecho. La figura 11 aclara estos ideas.

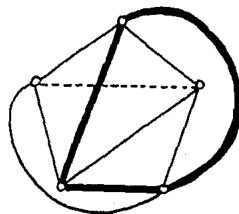
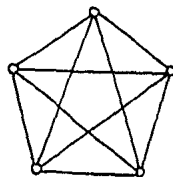


Figura 11

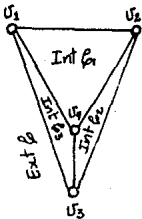
Probaremos formalmente este resultado.

TEOREMA 6.5: K_5 no es aplanable.

demostración: Procederemos por reducción al absurdo.

Supongamos que existe una gráfica G que es un aplanamiento de K_5 .

Sean v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 sus vértices. Como G es completa, cualesquiera dos de sus vértices son adyacentes. Consideremos por ejemplo el ciclo $C = v_1, v_2, v_3, v_4$. C es una curva de Jordan en el plano y por lo tanto el vértice v_5 debe estar en el $\text{Int } C$ o en el $\text{Ext } C$ (Figura 12)



Supongamos que $v_5 \in \text{Int } C$ (el caso $v_5 \in \text{Ext } C$ es análogo). Entonces, las aristas v_4v_1, v_4v_2 y v_4v_3 dividen a C en tres regiones a las que denotaremos por $\text{Int } C_1, \text{Int } C_2$ e $\text{Int } C_3$, donde $C_1 = v_1, v_4, v_2, v_1$, $C_2 = v_2, v_4, v_3, v_2$ y $C_3 = v_3, v_4, v_1, v_3$ (Figura 12). Ahora bien, v_5 debe estar en una de las cuatro regiones $\text{Ext } C, \text{Int } C_1, \text{Int } C_2$ o $\text{Int } C_3$. Si $v_5 \in \text{Ext } C$, entonces, como $v_4 \in \text{Int } C$,

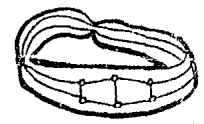
por el Teorema de Jordan, la arista v_4v_5 debe intersectar a la curva C en algún punto, pero esto contradice la hipótesis de que G sea plana. Los casos en que $v_5 \in \text{Int } C_i$ ($i=1,2,3$) son análogos. Por lo tanto, K_5 no es aplanable.

Utilizando el mismo razonamiento puede probarse que la gráfica bipartita $K_{3,3}$ no es aplanable.

La propiedad de planaridad de una gráfica depende también de la superficie en que la consideremos, como ya habíamos hecho notar. Como ejemplos de esto podemos ver el caso de K_5 en el toro y el de $K_{3,3}$ en la banda de Möbius (Figura 13)



Una inmersión de K_5 en el Toro



Una inmersión de $K_{3,3}$ en la Banda de Möbius.

Figura 13

Podríamos preguntarnos que relación existe

entre las gráficas que pueden sumergirse en el plano y las que pueden sumergirse en la esfera, donde de sumergir indica representar sin cruces de aristas. La respuesta es que son las mismas. Para ver este hecho claramente utilizaremos una función conocida como Proyección Estereográfica y que identifica a la esfera con el plano.

Sea S una esfera que descansa sobre un plano P y sea z el punto de S que es diagonalmente opuesto al punto de contacto de S y P .

DEFINICIÓN 6.6: La función $\pi: S \setminus \{z\} \rightarrow P$ definida por $\pi(s) = p$ si y sólo si los puntos z , s y p son colineales se llama **PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA** desde z .

La figura 14 da una idea gráfica de esta función.

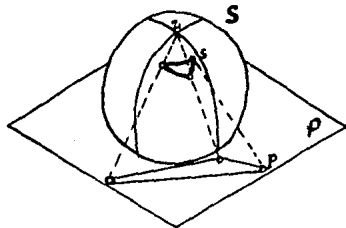


Figura 14

Con este apoyo, probaremos el resultado que hemos esbozado.

TEOREMA 6.7: Una gráfica G es aplanable si y sólo si es sumergible en la esfera.

demonstración: Supongamos que G puede sumergirse en la esfera y sea \tilde{G} esta representación de G . Sea z un punto de la esfera que no está en \tilde{G} y consideremos la proyección estereográfica de la esfera desde z . La imagen de \tilde{G} bajo esta representación es una representación plana de G . El inverso del teorema se demuestra análogamente. ■

GRÁFICAS DUALES

Una gráfica plana G divide al resto del plano en un número de regiones conexas. Llamaremos **CERRADURA** de una **REGIÓN** a la unión de esta con las aristas que la delimitan.

DEFINICIÓN 6.8: Una **CARRA** de una gráfica G es la cerradura de una de las regiones del

plano generadas por G .

Toda gráfica tiene una cara que no está delimitada por sus aristas. A esta cara, que es única, la llamaremos **CARA EXTERIOR**. La figura 15 muestra una gráfica con seis caras: $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$. La cara exterior de esta es f_1 .

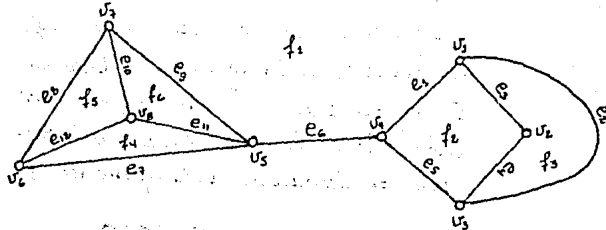


Figura 15

Si G es una gráfica plana, denotaremos por $F(G)$ al conjunto de las caras de G y por $\phi(G)$ a la cardinalidad de $F(G)$.

TEOREMA 6.9: Sea v un vértice de una gráfica aplanable G . G puede sumergirse en el plano de manera que v esté en la cara exterior del aplanamiento.

demonstración: Sea \bar{G} una representación plana de G en la esfera. \bar{G} existe por el teorema 6.8) Sea z un punto en el interior de alguna cara que contenga a v , y sea $\pi(\bar{G})$ la imagen de \bar{G} bajo la proyección estereográfica desde z . $\pi(\bar{G})$ es un aplanamiento de G en donde v está en la cara exterior. ■

DEFINICION 6.10: Llamaremos a la unión de las aristas que bordean a una cara f de una gráfica plana G , **FRONTERA** de f y la denotaremos por $b(f)$

Con esta definición, podemos decir que una cara de una gráfica G es una de sus regiones unida a su frontera. Notemos que si G es conexa, $b(f)$ es un camino cerrado. Si $b(f)$ no contiene puentes, entonces $b(f)$ es un ciclo de G .

Se dice que una cara **INCIDE** en los vértices y aristas de su frontera. Si e es un puente de una gráfica plana, solamente una de sus caras incide en e . De otra forma, hay dos caras que inciden en e . En la figura 15, $b(f_2) = \{v_1, v_2, v_2, v_3, v_3, v_4, v_4, v_2\}$.

Decimos que una arista *SEPARA* a las caras que inciden en ella.

DEFINICIÓN 6.11: El GRADO de una cara de una gráfica plana G es el número de aristas que inciden en ella, es decir, el número de aristas de $b(f)$. Los puentes deben contarse dos veces. El grado de f se denota $d_G(f)$.

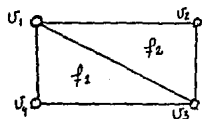


Fig. 16

En la figura 16, f_1 incide en los vértices v_1, v_3 y v_4 y en las aristas v_1v_3, v_3v_4 y v_4v_1 . La arista v_1v_2 separa a f_1 de f_2 y $d_G(f_1) = d_G(f_2) = 3$.

Ahora bien, dada una gráfica plana G podemos definir otra gráfica G^* como sigue:

- 1) A cada cara f de G le corresponde un vértice f^* de G^* y a cada arista e de G una arista e^* de G^* .
- 2) Sean f_1 y f_2 dos caras en G y f_1^* y f_2^* los vértices que las representan en G^* . Entre f_1^* y f_2^* existen tantas aristas como en la frontera común de f_1 y f_2 .
- 3) Dos vértices f_1^* y f_2^* de G^* son adyacentes en G^* si y sólo si las dos caras correspondientes f_1 y f_2 están separadas en G por la arista e .

A la gráfica G^* obtenida de esta forma se le llama GRÁFICA DUAL de G . La figura 17 muestra una gráfica y su dual. Al observarla advertiremos que aunque G sea una gráfica simple, G^* no necesariamente lo es.

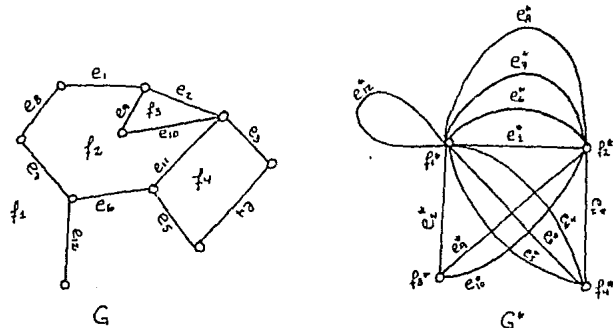


Figura 17

La gráfica dual de una gráfica plana no siempre es plana, pero siempre es aplanable. En general, resulta ser una multigráfica, como en nuestro ejemplo.

Veamos una manera de aplanar a G^* en caso de que no resulte plana (Fig. 18).

- 1) Coloquemos cada vértice f^* de G^* en la cara f correspondiente de G .

2) Tracemos cada arista e_i^* de forma que cruce a la arista correspondiente e_i de G solamente una vez, cuidando además que e_i^* no cruce a ninguna otra arista de G .

Intuitivamente, podemos ver que este procedimiento produce siempre gráficas planas, pero no demostraremos formalmente este hecho.

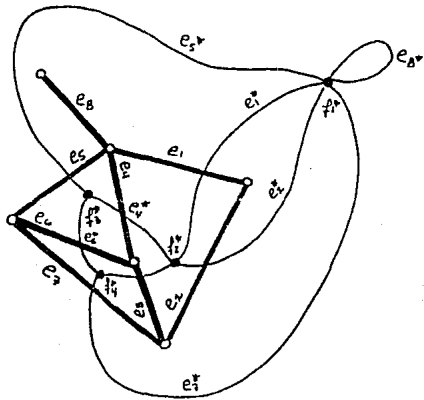


Figura 18

Notemos que si e^* es un lazo de G^* , entonces e es un puente de G y viceversa.

Las relaciones siguientes son consecuencia di-

recta de la definición de G^* :

$$i) |V(G^*)| = \Phi(G)$$

$$ii) |A(G^*)| = |A(G)|$$

$$iii) d_G^*(f^*) = d_G(f) \text{ para toda } f \in F(G).$$

Para finalizar este capítulo, veremos un último resultado en torno a planaridad y gráficas duales.

TEOREMA 6.12: Si G es una gráfica aplanable, entonces $\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2|A(G)|$

demostración: Sea G^* la gráfica dual de G . Entonces

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = \sum_{f^* \in V(G^*)} d(f^*)$$

$$= 2|A(G^*)| \quad (\text{Teo. 1.5})$$

$$= 2|A(G)| \quad \text{por definición de } G^*. \quad \square$$

EJERCICIOS:

1: Demuestra que $K_{3,3}$ no es plana.

2: Demuestra que $K_5 - e$ es plana para toda $e \in A(K_5)$

- 3: Demuestra que $K_{3,3}$ -e es plana para toda $c \in A(K_{3,3})$
 4: Demuestra que todas las gráficas pueden representarse sin cruces de aristas en \mathbb{R}^3 .
 5: Prueba que la siguiente gráfica es una representación plana de K_7 en el toro.

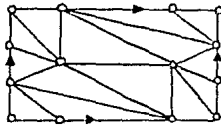


Fig. 19

- 6: Encuentra una representación plana de la siguiente gráfica, en donde cada arista sea una línea recta. (Fáry demostró en 1948 que toda gráfica aplanable simple tiene una representación de esa naturaleza).

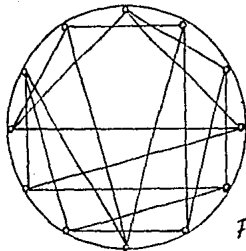


Figura 20

- 7: Demuestra que una gráfica es aplanable si y sólo si todos sus bloques lo son.
 8: Prueba que una gráfica G que sea mínima no aplanable (es decir, que G no es aplanable, pero si $e \in A(G)$, $G-e$ si lo es) es un bloque simple.
 9: Una gráfica plana es AUTODUAL si es isomorfa a su dual. Demuestra que si G es auto dual con p vértices, entonces $q = 2p - 2$ (donde $q = |A(G)|$)
 10: Encuentra una gráfica auto dual de n vértices para toda $n \geq 4$.
 11: Sea G una gráfica plana y G^* su dual. Prueba que $G^{**} \cong G$ si y sólo si G es conexa.

7 GRAFICAS PLANAS, POLIEDROS REGULARES y EL TEOREMA de los CINCO COLORES

En el capítulo anterior definimos los conceptos de cara y región de una gráfica. Euler y Descartes encontraron una relación entre el número de vértices, de aristas y de caras de una gráfica. Este resultado constituye un conocido teorema que enunciamos y demostramos a continuación.

TEOREMA 7.1: (FORMULA DE EULER)

Si G es una gráfica conexa y plana con p vértices, q aristas y ϕ caras, entonces

$$p - q + \phi = 2$$

demostración: Procederemos por inducción sobre q .

Si $q=0$, entonces $p=1$, $\phi=1$ y el resul-

tado se cumple.

Si $q=1$, $p=2$ y $\phi=1$ y también es válida la relación.

Supongamos que el teorema es verdadero para cualquier gráfica plana y conexa con menos de q aristas ($q > 1$)

Sea G una gráfica con q aristas. Si G es un árbol, entonces, $p = q + 1$ y $\phi = 1$, con lo que se satisface la fórmula. De otra manera, sea e una arista de un ciclo de G y consideremos a la gráfica $G - e$. Esta gráfica es plana y conexa y tiene p vértices, $q - 1$ aristas y $\phi - 1$ caras. Por hipótesis de inducción, $p - (q - 1) + (\phi - 1) = 2$ y, por lo tanto, $p - q + \phi = 2$, que es lo que queríamos demostrar. ■

Podríamos preguntarnos si cualesquiera dos representaciones planas de una gráfica dada tienen el mismo número de caras o si, por el contrario, este número varía con cada representación. Afortunadamente, con ayuda del teorema 7.1 podemos probar que se trata de una constante, lo que nos permite hablar del número de

caras y de regiones de una gráfica dada sin ambigüedad.

COROLARIO 7.2: Sea G una gráfica conexa y aplanable. Cualquier gráfica plana, isomorfa a G tiene el mismo número de caras.

demonstración: Sean H_1 y H_2 dos gráficas planas, isomorfas a G , que tiene las características de la hipótesis. Como H_1 y H_2 son isomorfas, $|V(H_1)| = |V(H_2)|$ y $|A(H_1)| = |A(H_2)|$. Por el teorema 7.1 sabemos que

$$\varphi(H_1) = |A(H_1)| - |V(H_1)| + 2 = |A(H_2)| - |V(H_2)| + 2 = \varphi(H_2)$$

Hasta aquí hemos observado que mientras menor es el número de aristas de una gráfica, más fácil resulta aplanarla. De hecho, dado un número p de vértices en una gráfica aplanable, su número q de aristas está agotado, como se muestra en el siguiente resultado.

COROLARIO 7.3: Si G es una gráfica simple, aplanable y conexa con $p \geq 3$, entonces

$$q \leq 3p - 6$$

demonstración: Sea G una gráfica con las características de la hipótesis.

Como toda cara está limitada por al menos tres aristas, $d_G(f) \geq 3$, para toda cara de G se cumple entonces

$$\sum_{f \in F} d_G(f) \geq 3\varphi$$

Como

$$\sum_{f \in F} d_G(f) = 2q \text{ tenemos que}$$

$$2q \geq 3\varphi$$

Por el teorema 7.1 sabemos que

$$p - q + \frac{2q}{3} \geq 2$$

o lo que es lo mismo

$$q \leq 3p - 6 \quad \blacksquare$$

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es que toda gráfica aplanable tiene al menos un vértice de grado menor o igual a cinco. Este hecho es de suma importancia, puesto que nos permitiría demostrar un teorema relacionado con lo que durante más de 120 años fuera la Conjetura

de los Cuatro Colores de la que ya hemos hablado.

LEMA 7.4: Toda gráfica aplanable contiene un vértice de grado a lo más 5.

demonstración: Sea G una gráfica aplanable con p vértices y q aristas.

Sea $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$

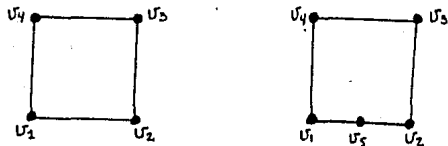
Si $p \leq 6$, el resultado se sigue trivialmente. De otro modo, como $q \leq 3p - 6$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^p gr(v_i) = 2q \leq 6p - 12$$

No puede ocurrir que todos los vértices de G tengan grado mayor o igual que 6, pues si así fuera, sucedería que $2q \geq 6p$, lo que es imposible. De aquí que exista al menos un vértice $v_0 \in V(G)$ tal que $gr(v_0) \leq 5$.

Ya hemos visto que K_5 y $K_{3,3}$ no son aplanables. Esto proporciona un criterio para saber si una gráfica es aplanable o no lo es. A continuación definiremos dos conceptos y enunciaremos un teorema sobre este aspecto, que se debe a Kuratowski.

DEFINICIÓN 7.5: Se llama **SUBDIVISIÓN** de una **ARISTA** al procedimiento que consiste en borrarla de una gráfica y reemplazarla por una trayectoria de longitud 2. El nuevo vértice se considera elemento del conjunto de vértices de la gráfica. (Fig. 1)



Subdivisión de la arista v_1v_2

Figura 1

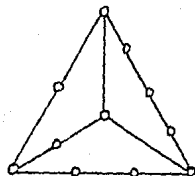
DEFINICIÓN 7.6: Una **SUBDIVISIÓN** de una **GRÁFICA** G es una gráfica que puede obtenerse a partir de G a través de una secuencia de subdivisiones de sus aristas. (Fig. 2)

TEOREMA 7.7: (Teorema de Kuratowski)

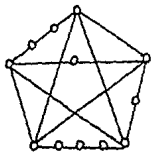
Una gráfica es aplanable si y sólo si no contiene ninguna subdivisión de K_5

ni de $K_{3,3}$ (Fig. 2)

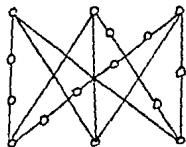
Para una demostración de este resultado puede consultarse [7, p. 153]



Una subdivisión de K_4



Una subdivisión de K_5



Una subdivisión de $K_{3,3}$

Figura 2

Ahora si, retomemos el corolario 7.4 y nuestro ya conocido Problema de los Cuatro Colores. En el capítulo 5 comentamos que en 1879, Kempe publicó una "demostración" de lo que entonces era una con-

jetura; pero en 1890 Heawood encontró un error en el razonamiento de Kempe. Mediante la revisión de la demostración de Kempe, Heawood pudo demostrar que cinco colores son siempre suficientes para colorear un mapa. [7, p. 156]

TEOREMA 7.8: Toda gráfica plana es cinco-coloreable.
demostración: Procederemos por reducción al absurdo.

Supongamos que el resultado es falso. En estas condiciones, existe una gráfica 6-coloreable que es crítica a la que llamaremos G . Por el corolario 7.4 sabemos que $\delta(G) \leq 5$ y, por el teorema 5.24, que $\delta(G) \geq 5$; de donde concluimos que $\delta(G) = 5$. Sea $v \in V(G)$ tal que $g_G(v) = 5$. Como G es crítica, la gráfica $G-v$ es 5-coloreable. Sea $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ una 5-coloración de $G-v$. Dado que G no es 5-coloreable, v debe ser adyacente a un vértice a un vértice de cada una de las cinco clases cromáticas. Ha-

memos v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 a los vecinos de v , donde $v_i \in V_i$, $1 \leq i \leq 5$, tomados siguiendo el sentido de las agujas del reloj (Figura 3).

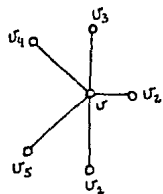


Fig. 3

Sea $G_{ij} = \langle V_i \cup V_j \rangle$. De este modo, v_i y v_j deben estar en la misma componente conexa de G_{ij} , pues de no ser así, podríamos considerar a la componente de G_{ij} que contuviera a v_i e intercambiar en ella los colores i y j . Se obtendría así una nueva 5-coloración de $G-v$ en la cual solamente se utilizarían cuatro colores (todos los anteriores excepto i) para colorear a los vecinos de v , pero ya hemos visto que esto no puede ocurrir. Podemos entonces considerar a T_{ij} , una $v_i v_j$ -trayectoria en G_{ij} y sea C el ciclo v, v_1, T_{13}, v (suponiendo $i=1, j=3$; los demás casos son análogos, Figura 4). Como C separa a v_2 y v_4 (en la figura 4, $v_2 \in \text{Int } C$ y $v_4 \in \text{Ext } C$), entonces, por el teorema 6.4, cualquier T_{24} trayectoria debe cruzar a C en al-

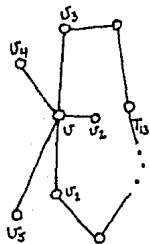


Fig. 4

gún punto. Pero esto es imposible, ya que los vértices de una T_{24} trayectoria están coloreados con los colores 2 y 4, que no están asignados a ningún vértice de C . Esto nos conduce a que toda gráfica plana es 5-colorable. ■

Un hecho notable relativo a este problema es que los teoremas correspondientes para superficies más complicadas fueron demostrados con anterioridad. Por ejemplo, sobre la superficie del toro, cualquier mapa puede colorearse utilizando siete colores [6].

La teoría de gráficas aplanables está estrechamente relacionada con el estudio de los poliedros. De hecho, a cada poliedro P puede asociarse una gráfica conexa aplanable $G(P)$ cuyos vértices y aristas son los vértices y aristas de P . Necesariamente, entonces, todo vértice de $G(P)$ tiene grado por lo menos 3. Además, si $G(P)$ es una gráfica plana, entonces, las caras de P son las regiones de $G(P)$ y toda arista de $G(P)$ está en la frontera de dos regio-

nes. La figura 5 muestra un poliedro y su gráfica asociada.

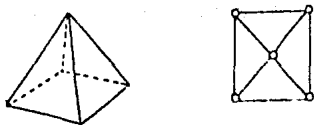


Figura 5

A partir de esta forma de definir a la gráfica $G(P)$ podemos ver que la Fórmula de Euler del teorema 7.1 se cumple también para los poliedros.

TEOREMA 7.9: Si V , A y F son el número de vértices, aristas y caras de un poliedro, entonces

$$V - A + F = 2 \quad \blacksquare$$

Al trabajar con un poliedro, así como con su gráfica $G(P)$ se acostumbra representar al número de vértices de grado n por V_n y al número de caras (regiones) cuya frontera es un ciclo de longitud n por F_n . De lo anterior se sigue que

$$2A = \sum_{n \geq 3} n V_n = \sum_{n \geq 3} n F_n$$

Por el corolario 7.4 sabemos que todo poliedro tiene por lo menos un vértice de grado 3, 4 ó 5. Como un resultado análogo a este tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 7.10: La frontera de al menos una cara de cualquier poliedro es un ciclo de longitud n para alguna $n \in \{3, 4, 5\}$.

demostración: Por reducción al absurdo.

Supongamos que $F_3 = F_4 = F_5 = 0$.

Por el teorema 7.1

$$2A = \sum_{n \geq 6} n F_n \geq 6 F_n = 6 \sum_{n \geq 6} F_n = 6F$$

Por lo que $A \geq 3F$

También tenemos que

$$2A = \sum_{n \geq 3} n V_n \geq 3 V_n = 3 \sum_{n \geq 3} V_n = 3V$$

Por el teorema 7.9, $V - A + F = 2$ y por lo tanto

$$A \leq \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}A - 2 = A - 2,$$

lo cual es una contradicción. \blacksquare

Un poliedro regular es un poliedro tal que las fronteras de sus caras son polígonos regulares con —

gruentes y todos los ángulos en sus vértices son iguales. Para un poliedro regular, $V = V_k$ para alguna k y $F = F_h$ para alguna h . Por ejemplo, un cubo es un poliedro regular con $V = V_3$ y $F = F_4$. Los griegos encontraron, hace más de dos mil años, que solamente existen cinco poliedros regulares. El hecho es verdaderamente sorprendente si pensamos que existen polígonos regulares con cualquier número de lados. La figura 6 muestra estos poliedros, a los que también se conoce por el nombre de sólidos platónicos.

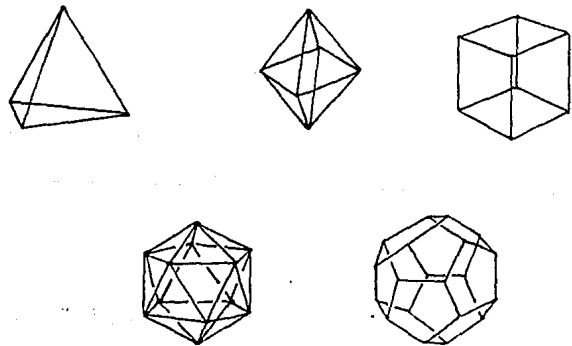


Figura 6

Para concluir este capítulo, demostraremos esto formalmente.

TEOREMA 7.11: Existen exactamente cinco poliedros regulares.

demostración: Sea P un poliedro regular y sea $G(P)$ su gráfica plana asociada. Entonces, $V + A + F = 2$, donde V , A y F denotan el número de vértices, aristas y caras de P y $G(P)$. Entonces,

$$\begin{aligned} -B &= 4A - 4V - 4F \\ &= 2A + 2A - 4V - 4F \\ &= \sum_{n \geq 3} n F_n + \sum_{n \geq 3} n V_n - 4 \sum_{n \geq 3} V_n - 4 \sum_{n \geq 3} F_n \\ &= \sum_{n \geq 3} (n-4) F_n + \sum_{n \geq 3} (n-4) V_n \end{aligned}$$

Como P es regular, existen enteros h y k ($h \geq 3$, $k \geq 3$) tales que $F = F_h$ y $V = V_k$.

De aquí que $-B = (h-4)F_h + (k-4)V_k$.

Además, podemos advertir que

$$3 \leq h \leq 5, \quad 3 \leq k \leq 5$$

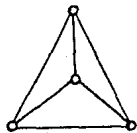
y también que

$$h F_h = 2A = k V_k$$

Esto no da nueve casos por considerar:

Caso 1: $h=3, k=3$

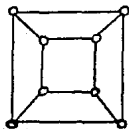
En este caso, $-B = -F_3 - V_3$ y $3F_3 = 3V_3$, de manera que $F_3 = V_3 = 4$, con lo que concluimos que P es el TETRAEDRO.



tetraedro

Caso 2: $h=3, k=4$

Entonces $-B = -F_3$ y $3F_3 = 4V_4$, de donde $F_3 = 8$ y $V_4 = 6$, lo que implica que P es el OCTAEDRO.



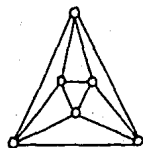
cubo

Caso 3: $h=3, k=5$

Bajo estas condiciones $-B = F_3 + V_5$ y $3F_3 = 5V_5$, por lo que $F_3 = 20$ y $V_5 = 12$ con lo que obtenemos que P es el ICOSAEDRO.

Caso 4: $h=4, k=3$

Aquí tenemos que $-B = -V_3$ y $4F_4 = 3V_3$, de modo que $V_3 = 8$, $F_4 = 6$, por lo que sabemos que P es el CUBO.



octaedro

Caso 5: $h=4, k=4$

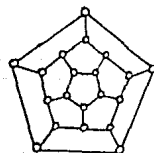
De aquí obtendríamos $-B = 0$, lo que nos lleva a concluir que este caso es imposible.

Caso 6: $h=4, k=5$

Este caso tampoco es posible porque no puede suceder que $-B = V_5$.

Caso 7: $h=5, k=3$

Para estos valores, $-B = F_5 - V_3$ y $5F_5 = 3V_3$. Resolviendo para F_5 y V_3 encontramos que $F_5 = 12$ y $V_3 = 20$, por lo cual P es el DODECAEDRO.



dodecaedro

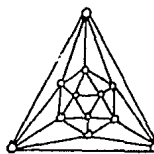
Caso 8: $h=5, k=4$

Nuevamente llegamos a algo que no puede suceder, pues obtenemos $-B = F_5$.

Caso 9: $h=5, k=5$

Este último caso también es imposible puesto que $-B \neq F_5 + V_5$

Con este análisis, terminamos la demostración. Las figuras al margen son las gráficas de los sólidos platónicos. ■



icosaedro

Fig. 7

EJERCICIOS

- 1: Demuestra que K_5 no es aplanable, utilizando el Teorema de Euler.
- 2: Demuestra que $K_{3,3}$ no es aplanable, utilizando el Teorema de Euler.
- 3: Da un ejemplo de una gráfica plana que no con-

- tenga ningún vértice de grado menor que cinco.
- 4: Prueba que toda gráfica aplanable de orden $p \geq 4$ tiene al menos cuatro vértices de grado menor o igual que 5.
- 5: Prueba que una gráfica aplanable con p vértices y q aristas es máxima (es decir, si se le añade otra arista deja de ser plana) si y sólo si ocurre que $q = 3p - 6$

8 APAREAMIENTOS

¿Crees que sería posible cubrir un tablero de ajedrez con fichas de dominó colocando cada una en posición vertical u horizontal, de manera que cada ficha cubriera exactamente dos casillas del tablero? La respuesta es trivial pues claramente esto puede lograrse con treinta y dos fichas. Imaginemos ahora el mismo problema, pero usando un tablero de ajedrez del que han sido eliminadas la esquina superior izquierda y la inferior derecha. ¿Qué sucede? La solución ya no es inmediata y tal vez resulte útil plantear la nueva situación en términos de gráficas.

La figura 1 muestra el tablero de ajedrez y segmentos de gráficas resultantes según algunas colocaciones de las fichas. Cada vértice es un casilla. La arista representa a la ficha que las cubre.

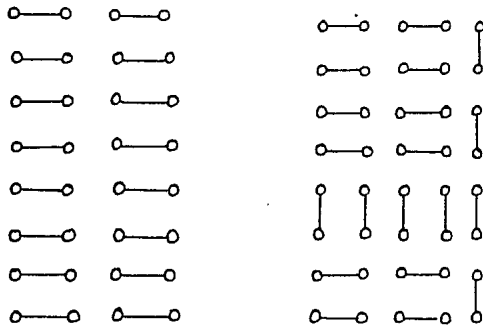
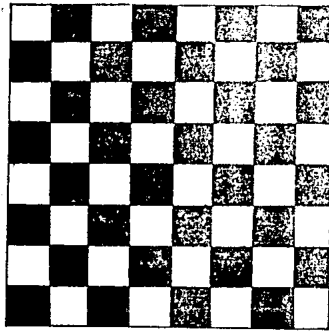


Figura 1

Podemos pensar en representar a cada cuadro del tablero por medio de un vértice. Por la forma en que nos está permitido colocar a las fichas de domi-

nó, cada una de ellas cubrirá exactamente a dos cuadros de diferente color, ya que no pueden colocarse fichas en diagonal y tampoco es válido sobreponerlas. Esto sugiere la construcción de una bipartición $\{V_1, V_2\}$ de los vértices que representan a los cuadros del tablero en donde V_1 y V_2 serán respectivamente los conjuntos que contienen a los vértices correspondientes a los cuadros blancos y negros. Obtenemos así una gráfica bipartita regular de grado 1.

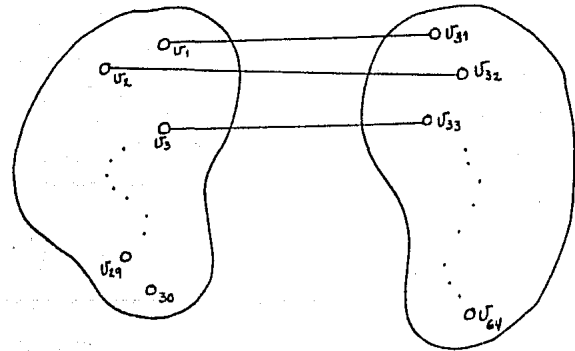


Figura 2

Quedan en el tablero 62 cuadros por cubrir ya que hemos eliminado dos. Supongamos que V_1 representa a los cuadros blancos y V_2 a los negros. Seguiré que esquinás hayamos eliminado, $|V_1| > |V_2|$ o $|V_2| > |V_1|$, ya que hemos quitado del tablero dos casillas de igual color. Esto hace que existan dos vértices de V_1 (o V_2), v_1 y v_2 tales que $g(v_1) = g(v_2) = 0$. En la gráfica que hemos planteado, dos vértices son adyacentes si y sólo si son cubiertos por una misma ficha de dominó. El hecho de que dos vértices de V_1 (o V_2) no puedan "aparearse" con dos vértices de V_2 (o V_1) indica que no pueden ser cubiertos. Esto sugiere que si quitamos las casillas superior e inferior izquierda, nuestro problema sí tiene solución. ¿Tiene solución si se elimina una casilla blanca y otra negra? ¿y si se quitan $2k$ blancas y $2k$ negras? ¿Puede el lector establecer condiciones generales para que sea posible cubrir el tablero de la forma en que lo hemos indicado?

Siguiendo con el tablero de ajedrez y recobrando su uso tradicional, narraremos la desesperación de la secretaria de una cierta asociación de ajedrecistas, a quien se encomendó la elaboración del

horario de un torneo en el mínimo número de sesiones posible, por supuesto, con partidas simultáneas. Afortunadamente para ella, sólo participarían seis jugadores, quienes deberían jugar todos contra todos. La secretaria creía que el mínimo número de sesiones era cinco, pero no estaba segura. ¿Estaría en lo correcto? Si planteamos el problema representando la situación por medio de H_6 , podremos verificar su solución.

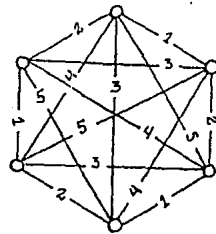


Figura 3

La figura 3 muestra una asignación de colores a las aristas de H_6 de modo que dos aristas adyacentes tienen siempre distinto color (esto es lo que se conoce como una COLORACIÓN DE LAS ARISTAS de una gráfica). Cada color representa una sesión. El hecho de que no haya aristas adyacentes con igual color re-

fleja el de que ningún jugador puede sostener partidas simultáneas.

Los dos problemas anteriores van esbozando un concepto que definiremos a continuación.

DEFINICIÓN B.1: Dada una gráfica G , un APAREAMIENTO en G es un conjunto independiente de aristas (Es decir, aristas dos a dos no adyacentes)

En la gráfica de la figura 3 cada color representa una sesión de juegos. Cada sesión es un conjunto independiente de aristas y, por lo tanto, un apareamiento. Con esta organización, todos los jugadores participan en todas las sesiones y esto reduce el número necesario de ellas. Podrían haberse organizado más sesiones (hasta 15, con una partida por sesión) con menos partidas en cada una. De todas maneras, cada sesión habría resultado ser un apareamiento, ya que a ningún jugador se le permite celebrar partidas simultáneas. Generalicemos algunos conceptos:

DEFINICIÓN B.2: Sea M un apareamiento en G . Si $uv \in M$

y $uv \in M$, diremos que u y v están APAREADOS. Además, si $u \in V(G)$ y u incide en alguna arista de G , diremos que u está M -SATURADO. En otro caso diremos que u no está M -saturado.

Una pregunta natural es si un apareamiento de cardinalidad máxima satura a todos los vértices de su gráfica. La gráfica de la figura 4 nos da la respuesta.

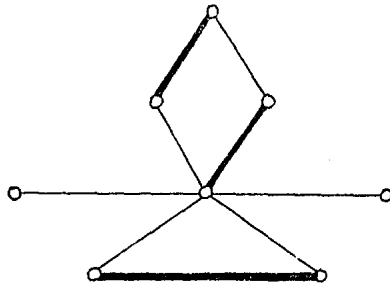


Figura 4

El apareamiento que se muestra no es único, pero no es posible encontrar uno de cardinalidad mayor, por lo que siempre quedan vértices sin saturar.

rar. La figura 5 muestra un apareamiento que satura a todos los vértices de una gráfica.

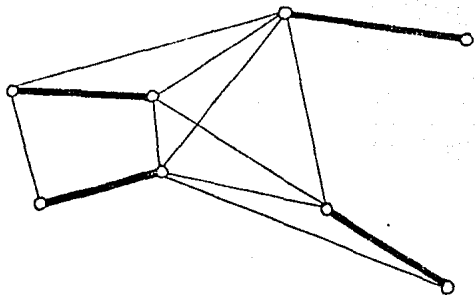


Figura 5

Por su gran importancia, este tipo de apareamientos recibe un nombre especial.

DEFINICIÓN 8.3: Un apareamiento M en G es **PERFECTO** si cada vértice de G está M -saturado.

Las únicas gráficas que no pueden tener algún apareamiento son las que no tienen aristas, ya que una sola arista genera un apareamiento. Sin embargo, no siempre es posible encontrar apareamientos perfectos. Si M es un apareamiento y $|M| = k$,

M satura exactamente a $2k$ vértices, por lo que si G es una gráfica y $|V(G)| = 2m+1$ para alguna m , G no contiene apareamientos perfectos. ¿Bastará con que una gráfica tenga un número par de vértices para que tenga un apareamiento perfecto? Claramente no es una condición suficiente; por ejemplo, puede haber vértices aislados (fig. 6)

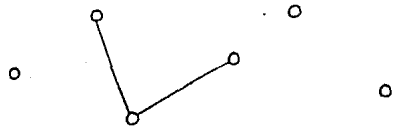


Figura 6

Tampoco basta con que G sea conexa y $|V(G)| = 2m$ (Fig. 7)

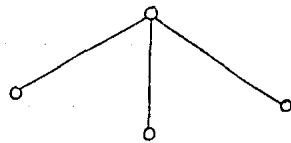


Figura 7

Vemos entonces que no todo apareamiento de cardinalidad máxima es perfecto, pero todo apa-

reamiento perfecto es máximo dado que no existen más vértices por saturar. Vamos a buscar la manera de reconocer apareamientos máximos. Consideremos el siguiente

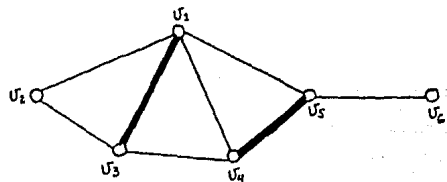


Figura 8

Este apareamiento no está contenido en otro mayor, pero no es máximo pues la figura 9 muestra dos apareamientos de cardinalidad mayor.

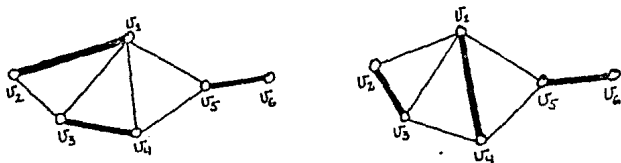


Figura 9

Tal vez no podamos aún formular con claridad

una razón para ello, pero unos cuantos intentos mostrarán que los apareamientos de la figura 9 no pueden ser mejorados en el sentido de su cardinalidad. ¿Qué tiene el apareamiento de la figura 8 que no tienen los de la figura 9? Estos últimos fueron obtenidos a partir del primero tomando una trayectoria que empieza y termina en vértices no saturados. (En el primer caso se consideró $T_1 = U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$; en el segundo, $T_2 = U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$). Después se eliminaron las aristas que estaban en el primer apareamiento y se incluyeron las que no estaban. Da la impresión de que si un apareamiento está sobre una trayectoria que empieza y termina en vértices no saturados, es posible aumentar su cardinalidad.

DEFINICIÓN 8.4: Sea G una gráfica y M un apareamiento en G . Una **TRAYECTORIA M-ALTERNADA** es una trayectoria en G cuyas aristas están alternadamente en M y en M^c (M^c denota al complemento de M).

Un apareamiento tiene esencialmente cuatro

formas de aparecer en una trayectoria M -alternada
(Figura 10)

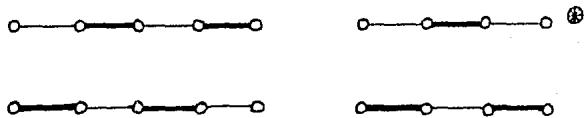


Figura 10

La posibilidad marcada con un asterisco (*) es la única que permite aumentar la cardinalidad del apareamiento.

DEFINICIÓN 8.5: Una TRAYECTORIA M -AUMENTANTE es una trayectoria M -alternada que empieza y termina en vértices que no están M -saturados.

Notemos que en una trayectoria M -aumentante se tiene un número par de vértices s y un número impar de aristas $s+1$, de las cuales s están en M y $s+1$ no están en M .

Enunciaremos el resultado que intuimos anteriormente y lo demostraremos formalmente, pero antes definiremos un concepto que necesitaremos en

nuestra prueba.

DEFINICIÓN 8.6: Sean M y M' dos apareamientos.

$M \Delta M' = (M - M') \cup (M' - M)$ es la DIFERENCIA SIMÉTRICA de M y M' .

El siguiente teorema se debe a Berge, quien lo demostró en 1957.

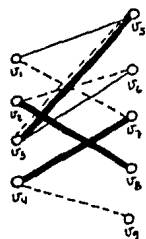
TEOREMA 8.7: Un apareamiento M en G es de cardinalidad máxima si y sólo si G no contiene ninguna trayectoria M -aumentante.

demostración: Sea M un apareamiento en G y supongamos que G contiene una trayectoria M -aumentante $T = v_0, v_1, \dots, v_{2m+1}$. Definamos $M' \subseteq A(G)$ del siguiente modo:

$$M' = \{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2m-1}v_{2m}\} \cup \{v_0v_1, v_2v_3, \dots, v_{2m}v_{2m+1}\}$$

Por construcción M' es un apareamiento. Además, $|M'| = |M| + 1$, en consecuencia, M no tiene cardinalidad máxima.*

P: otra parte, sea M^* un apareamiento de cardinalidad máxima en G .



— M
 --- M*

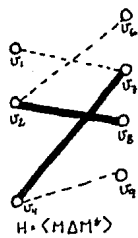


Fig. 11

Entonces, $|M^*| > |M|$.

Sea $H = \langle M \Delta M^* \rangle$ (Figura 11)

Si $v \in V(H)$, $gr(v) \leq 2$, pues a lo más es incidente con una arista de M y una de M^* . Esto quiere decir que toda componente de H es un ciclo o una trayectoria. En cualquier caso, sus aristas se encuentran de manera alternada una en M y la siguiente en M^* . Como $|M^*| > |M|$, H contiene más aristas de M^* que de M , por lo cual, alguna componente de H que sea una trayectoria, debe empezar y terminar con aristas de M^* . Si el origen y el fin de esta trayectoria están M^* -saturados en H , como efectivamente ocurre, entonces, estos vértices no están M -saturados en G y dicha trayectoria es M -aumentante en G . ■

El problema de decidir si una gráfica tiene apareamientos perfectos o no, no es trivial en primera instancia. Sin embargo, si la gráfica es bipartita se

simplifica bastante. En 1935, Hall encontró condiciones necesarias y suficientes para la existencia de tales apareamientos. Estas están dadas por la cardinalidad de un conjunto que definimos a continuación:

DEFINICIÓN 8.8: Para cualquier conjunto S de vértices de G definimos al CONJUNTO de los VECINOS de S en G como el conjunto de todos los vértices adyacentes a algún vértice de S . Este conjunto se denota por $N_G(S)$. El conjunto $N_G(S) - S$ se llama VECINDAD de S .

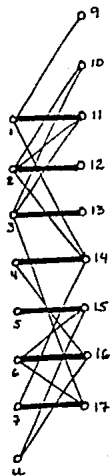
Dada una gráfica bipartita, en muchas ocasiones interesa saber si es posible encontrar, si no un apareamiento perfecto, si al menos uno que sature a todos los vértices de uno de los conjuntos de la bipartición. Esta posibilidad resulta estar estrechamente vinculada al conjunto $N_G(S)$.

TEOREMA 8.9: Sea G una gráfica bipartita con bipartición (X, Y) . Entonces G contiene un apareamiento que satura a todo vértice

de X si y sólo si

$$|N_G(s)| \geq |S| \text{ para todo } S \subseteq X$$

demonstración: Supongamos que G contiene un apareamiento M que satura a todo vértice de X y sea S un subconjunto de X . Como los vértices de S están apareados en M con vértices distintos de $N(S)$, tenemos claramente que $|N_G(S)| \geq |S|$.



$$S = \{4, 5, 6, 7, u\}$$

$$T = \{14, 15, 16, 17\}$$

$$= N_G(S) - S$$

Fig. 12

Supongamos ahora que G es una gráfica bipartita que cumple con que $|N_G(s)| \geq |S| \forall S \subseteq X$, pero que no contiene un apareamiento que sature a todos los vértices X . El suponer esto nos llevará a una contradicción. Sea M^* un apareamiento máximo en G . Según hemos supuesto, M^* no satura a todos los vértices de X . Sea u un vértice no M^* -saturado de X y sea Z el conjunto de todos los vértices conectados a u por trayectorias M^* -alternantes. Como M^* es un apareamiento de cardinalidad máxima, por el Teorema de Berge (Teo 8.7), podemos inferir que u es el único vértice no M^* -saturado en Z . Sea $S = Z \cap X$ y

$T = Z \cap Y$ (Figura 12). Claramente, los vértices en $S - \{u\}$ están apareados bajo M^* con los vértices en T , por lo tanto

$$|T| = |S| - 1,$$

y $N_G(S) \supseteq T$. Pero como todo vértice en $N_G(S)$ está conectado a u por una trayectoria M^* -alternante, $N_G(S) = T$. Entonces, como $|T| = |S| - 1$ y $N_G(S) = T$ tenemos que $|N_G(S)| = |S| - 1 < |S|$, lo que contradice nuestra hipótesis inicial de que $|N_G(s)| \geq |S|$. Por lo tanto, M^* satura a los vértices de X y con esto concluye la demostración del teorema. ■

La prueba de este teorema establece las bases de un buen algoritmo para encontrar apareamientos máximos en una gráfica bipartita. Para mayor conocimiento de este tema ver [7, cap. 5.4]

COROLARIO 8.10: Si G es una gráfica bipartita k -regular con $k > 0$, entonces G tiene un apareamiento perfecto.

demonstración: Sea G una gráfica bipartita k -regular con bipartición (X, Y) . Como G es k -re

gular, $k|X| = A(G) = k|Y|$ y como $k \geq 2$ tenemos que $|X| = |Y|$. Consideremos ahora S , un subconjunto de X y demos-tramos por A_1 y A_2 los conjuntos de aristas orientadas con S y con $N_G(S)$ respectivamente. Por definición de $N_G(S)$, $A_1 \subseteq A_2$ y por lo tanto

$$k|N_G(S)| = |A_2| \geq |A_1| = k|S|.$$

De esto se desprende que $|N(S)| \geq |S|$ y por el teorema 8.9, G tiene un apareamiento M que satura a todo vértice de X . Como $|X| = |Y|$ y todas las aristas de G tienen un extremo en X y otro en Y , concluimos que M es perfecto. ■

El corolario anterior resuelve un problema conocido como el Problema de los matrimonios, que se pregunta lo siguiente: si en un pueblo cada muchacha conoce exactamente a k muchachos, cada uno de los cuales conoce también a k muchachas exactamente, ¿es posible que cada muchacho se case con una de las k muchachas a las que conoce y viceversa? Es por ello que a menudo se haga referencia a este re-

sultado como el Teorema de los matrimonios.

En 1947, Tutte encontró una condición necesaria y suficiente para que una gráfica tenga un apareamiento perfecto. La misma está dada en términos del número de componentes conexas de una gráfica que tienen un número impar de vértices, al cual se denota por $o(G)$.

TEOREMA 8.11: (Teorema de Tutte)

Una gráfica G tiene un apareamiento perfecto si y sólo si $o(G-S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V$.

El lector interesado en una demostración de este resultado puede consultar [7, p. 76]

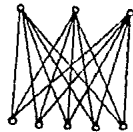
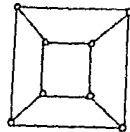
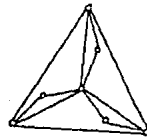
Una de las aplicaciones más conocidas de la teoría de apareamientos es la asignación de personal, que consiste en asignar a cada empleado de una empresa una tarea para la cual esté capacitado, suponiendo que en ella existen n trabajadores, cada uno de los cuales es capaz de realizar uno o más trabajos. Puede construirse una gráfica bipartita con bipartición (X, Y) , donde X es el conjunto de empleados, Y el de tareas y dos

vértices $x \in X$ y $y \in Y$ son adyacentes si y sólo si el empleado representado por el vértice x está calificado para desempeñar el trabajo correspondiente al vértice y . Existe un algoritmo para resolver este problema que encuentra un apareamiento que satura a todo vértice de X , o bien, un conjunto $S \subseteq X$ tal que $|N(S)| < |S|$. El lector interesado puede consultar [7, p. 81]

EJERCICIOS

- 1: Encuentra el número de apareamientos perfectos diferentes de K_{2n} y $K_{n,n}$.
- 2: Demuestra que un árbol tiene a lo más, un apareamiento perfecto.
- 3: Para toda $k > 1$, encuentra un ejemplo de una gráfica k -regular simple que no tenga un apareamiento perfecto.
- 4: Un k -FACTOR de G es una subgráfica generadora de G , k -regular. G es k -FACTORIZABLE si existe k -factores ajenos en aristas H_1, H_2, \dots, H_n tales que $G = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n$.
 - a) Muestra que
 - i) $K_{n,n}$ y K_{2n} son 1-factorizables

- ii) la gráfica de Petersen (p. 136) no es 1-factorizable.
- b) De las gráficas siguientes ¿cuáles tienen 2- factores?



- 5: Muestra que una gráfica bipartita tiene un apareamiento perfecto si y sólo si $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq V$.
- 6: Da un contraejemplo que muestre que la proposición del ejercicio 5 no es necesariamente cierta si G no es bipartita.
- 7: El N -CUBO Q_n es la gráfica cuyos vértices son las n -adas binarias (a_1, a_2, \dots, a_n) ($a_i = 0$ ó $a_i = 1, 1 \leq i \leq n$) y $ab \in E(Q_n)$ si y sólo si las n -adas a y b difieren exactamente en una entrada (Ver figura , Capítulo 9)

Prueba que el n cubo tiene un apareamiento perfecto.

9 PASEOS EULERIANOS y CICLOS HAMILTONIANOS

En 1736, en el primer artículo sobre Teoría de Gráficas que se conoce, Euler demostró la imposibilidad de atravesar todos los puentes de Königsberg exactamente una vez durante un recorrido por dicha ciudad. Desde entonces, a un paseo que cruza todas las aristas de una gráfica G una única vez se le llama **PASEO EULERIANO**, en virtud de que fue precisamente Euler el primero en investigar sobre su existencia a través del citado problema. Si el origen y el final de un paseo de esta naturaleza coinciden, estaremos hablando de un **PASEO EULERIANO CERRADO**.

No todas las gráficas pueden recorrerse con paseos eulerianos. La gráfica que representa al problema de los puentes de Königsberg es un ejemplo de ello. Por otra parte, en la gráfica G de la figura 1,

$P = v_1, v_2, v_3, v_7, v_1, v_4, v_8, v_7, v_6, v_5, v_4, v_5, v_8, v_3$, es un paseo euleriano.

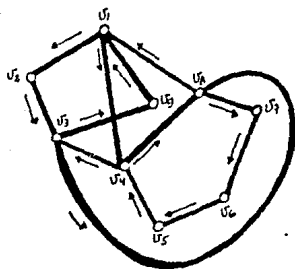


Figura 1

Esto nos conduce a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 9.1: Una gráfica G es **EULERIANA** si contiene un paseo euleriano cerrado.

En el Capítulo Uno, al estudiar las posibilidades de solución del problema de los puentes de la ciudad de Königsberg, advertimos una condición necesaria para la existencia de un paseo euleriano cerrado: que en la gráfica no haya vértices de grado impar, e incluso argumentamos un poco la necesidad de dicha condición. Ahora lo demostraremos formal

mente y probaremos también su suficiencia.

TEOREMA 9.3: Una gráfica conexa no trivial es euleriana si y sólo si no contiene vértices de grado impar.

demonstración: Sea G euleriana y sea P un paseo euleriano cerrado en G con origen en el vértice u . Si $v \in V(P)$, $v \neq u$, cada vez que se pasa por v se utilizan dos aristas de P : una al llegar a v y otra al abandonarlo. Como un paseo euleriano contiene a todas las aristas de G , $gr(v)$ es par para todo $v \neq u$. Como P inicia en u y termina en ese mismo vértice se habrán utilizado dos aristas distintas incidentes en u para empezar el paseo y para finalizarlo. Si en algún momento, antes del fin del paseo, se pasó por u , con un razonamiento análogo al utilizado por $v \neq u$ concluiremos que $gr(u)$ también es par. *

Ahora supongamos que todos los vértices de G son de grado par y que G no es

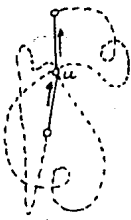
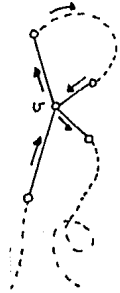


Fig. 2

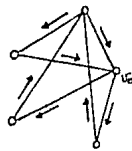
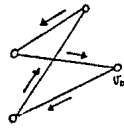
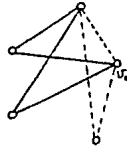
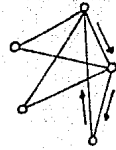


Fig. 3

euleriana. Además, supondremos que G es una gráfica de este estilo con el menor número posible de aristas. Como todo vértice de G tiene grado al menos igual a dos, G contiene un paseo cerrado. Sea P un paseo cerrado de longitud máxima en G . Por hipótesis, P no es un paseo euleriano en G , lo que indica que $G - A(P)$ tiene alguna componente G' tal que $|A(G')| > 0$. Como P mismo es euleriano no tiene vértices de grado impar, lo que quiere decir que la gráfica conexa G' tampoco los tiene. Como sabemos que $|A(G')| < |A(G)|$, por la manera en que hemos elegido a G tenemos que G' contiene un paseo euleriano P' . Como G es conexa, hay un vértice v_0 en el conjunto $V(P) \cap V(P')$ y podemos asumir sin pérdida de generalidad que v_0 es el origen y el fin de P y P' . Esto indica que $P \cup P'$ es un paseo cerrado en G y como $|A(P \cup P')| > |A(P)|$ hemos llegado a una contradicción ya que se eligió

a P como un paseo cerrado de longitud máxima; de aquí que G debe ser euleriana. ■

Con este resultado podemos decidir si una gráfica es o no euleriana. Existe una manera de caracterizar a las gráficas que contienen un paseo euleriano. Como no se trata de paseos cerrados, la condición no deberá ser tan fuerte en este caso.

TEOREMA 9.3: Una gráfica conexa tiene un paseo euleriano si y sólo si tiene, a lo más, dos vértices de grado impar.

demonstración: Si G contiene un paseo euleriano podemos notar a través del mismo razonamiento del teorema 9.2 que todos los vértices distintos al origen y al final del paseo tienen grado par. Estos dos tienen grado impar sólo en el caso de que no coincidan. Por otro lado, supongamos que G es una gráfica conexa no trivial. En el caso de que G no tenga vértices de grado impar, el resultado se obtiene de manera inmediata. Por otra parte, sabemos que G no

puede tener solamente un vértice de grado impar (corolario 1.6); de aquí que la posibilidad que queda por analizar consiste en suponer que G tiene dos vértices de grado impar exactamente. En este caso, sea $G+a$ la gráfica que se obtiene añadiendo una nueva arista a a la gráfica G , $a = v_i v_j$ donde v_i y v_j son los vértices de grado impar. (En caso de que $v_i \text{ ady}_c v_j$ estaremos obteniendo una gráfica que no es simple, pero esto no alterará la demostración). Claramente, todo vértice de $G+a$ tiene grado par y, por lo tanto, $G+a$ posee un paseo euleriano cerrado $P = v_0, a_1, v_1, \dots, a_n, v_n$; donde $a_i = a$. El paseo $P' = v_1, a_2, v_2, \dots, a_n, v_n$ es un paseo euleriano en G . ■

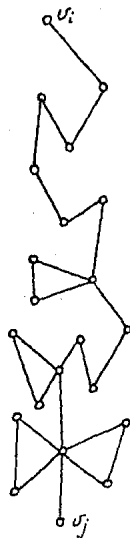


Fig. 4

Ya hemos visto como el concepto de gráfica euleriana se desarrolló a partir del interés de Euler en el problema de los puentes de Königsberg. Ahora haremos de un tipo de gráficas que posee una característica similar a la de las gráficas eulerianas y

que, sin embargo, difiere de ellas notablemente. Este concepto adquirió importancia cuando en 1857 Sir William Rowan Hamilton introdujo un juego consistente en un dodecaedro regular de madera, veinte clavos (cada uno insertado en una esquina del sólido) y un trozo de cuerda. A cada clavo se le asignó el nombre de una ciudad importante de la época, y el objetivo era encontrar una ruta a través de las aristas del dodecaedro, que pasara por todas las ciudades exactamente una vez y que, además, terminara en la ciudad en la que el recorrido se hubiese iniciado. Para permitir al jugador recordar qué ciudades ya habían sido visitadas, se conectaban los clavos con ayuda de la cuerda en el orden correspondiente. El dodecaedro resultó ser bastante incómodo de manejar, de manera que Hamilton construyó una versión plana de este cuerpo (Figura 7, Capítulo 8). Es interesante mencionar que en 1855, dos años antes de que Hamilton expusiera su juego, el matemático inglés Thomas P. Kirkman planteó el siguiente problema en un artículo dirigido a la Sociedad Real: Dada la gráfica de un poliedro, ¿puede siempre encontrarse un ciclo que pase por todos sus vértices?

De este modo, Kirkman introdujo el estudio general de las gráficas que poseen un ciclo de esta naturaleza, aunque el juego de Hamilton generó interés en el tema.

DEFINICIÓN 9.4: Un **CICLO HAMILTONIANO** en una gráfica G es un ciclo que pasa por todos los vértices de G . Una **GRÁFICA HAMILTONIANA** es una gráfica que contiene un ciclo hamiltoniano.

La figura 5 muestra un ciclo hamiltoniano en el dodecaedro.

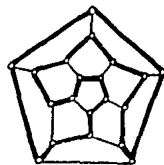


Figura 5

Dada la similitud de las definiciones de gráfica euleriana y gráfica hamiltoniana y ya que existe una caracterización útil de las primeras, podría suponerse la existencia de un criterio análogo para las segundas; sin embargo, no es así y de hecho, este

es uno de los principales problemas aún no resueltos de la Teoría de Gráficas. Lo que sí se ha establecido son varias condiciones suficientes para que una gráfica sea hamiltoniana y algunas necesarias. En primer lugar, veremos una condición necesaria muy simple, pero bastante útil.

TEOREMA 9.5: Si G es hamiltoniana, entonces, para cualquier subconjunto propio no vacío S de los vértices de G

$$e(G-S) \leq |S|$$

demostración: Sea C un ciclo hamiltoniano de G . Entonces, para todo subconjunto propio no vacío S de los vértices de G , tenemos que $e(C-S) \leq |S|$. Por otro lado, dado que $C-S$ es una subgráfica generadora de $G-S$, obtenemos que $e(G-S) \leq e(C-S)$, por lo que $e(G-S) \leq |S|$, que es lo que queríamos demostrar. ■

Para ilustrar el teorema anterior, consideremos la gráfica G de la figura 6. G tiene nueve vértices. Si se eliminan los tres negros, se obtienen cuatro componentes conexas. Como no se cumple

la condición, podemos concluir que G no es hamiltoniana.

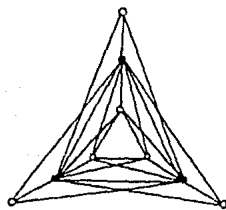


Figura 6

la figura 7 muestra las componentes conexas que se obtienen al eliminar los vértices negros.



Figura 7

Vemos así que este resultado puede aplicarse en ocasiones para mostrar que una gráfica particular

no es hamiltoniana; pero como es una condición necesaria, el teorema no siempre aclara la situación. Por ejemplo, la gráfica de Petersen (p. 136) no es hamiltoniana, pero no podemos deducirlo utilizando este criterio.

Ahora discutiremos condiciones suficientes para que una gráfica sea hamiltoniana. Empecemos por un resultado debido a Dirac (1952)

TEOREMA 9.6: Si G es una gráfica simple con p vértices, $p \geq 3$ y $\delta \geq p/2$, entonces, G es hamiltoniana.

demonstración: Procederemos por reducción al absurdo.

Supongamos que el teorema es falso y sea G una gráfica simple no hamiltoniana, G máxima con respecto a esta propiedad y con las características de la hipótesis. Como

$p \geq 3$, G no puede ser completa. Sean u y v dos vértices no adyacentes en G .

Por la forma en que hemos elegido a G , $G + uv$ es hamiltoniana. Además, dado que G no es hamiltoniana, cualquier ciclo hamiltoniano en $G + uv$

debe contener a la arista uv . Esto permite ver que existe T una trayectoria hamiltoniana en G , $T = v_1, v_2, \dots, v_n$ con origen en $u = v_1$ y término en $v = v_n$. Sean

$$R = \{v_i \mid uv_{i+1} \in A(G)\} \quad \text{y}$$

$$S = \{v_i \mid v_i v \in A(G)\}$$

Como $v_n \notin R \cup S$ tenemos que

$$|R \cup S| < p$$

y además

$$|R \cap S| = 0$$

ya que si existiera $v_i \in R \cap S$, entonces G tendría un ciclo hamiltoniano, a saber, $C = v_1, v_2, \dots, v_i, v_n, v_{n-1}, \dots, v_i$, contradiciendo nuestra hipótesis (Figura 8)

De esto obtenemos que

$gr(u) + gr(v) = |R| + |S| = |R \cup S| + |R \cap S| < p$, lo que contradice nuestra hipótesis de que $\delta \geq p/2$ ■

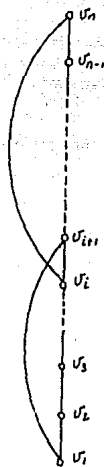


Fig. 8

En 1974, Bondy y Chvátal observaron que la prueba del teorema anterior puede modificarse

para obtener condiciones suficientes más fuertes que la de Dirac. Su enfoque se basa en el siguiente lema:

LEMA 9.10: Sea G una gráfica simple y sean u y v vértices no adyacentes en G tales que $gr(u) + gr(v) \geq p$. Entonces G es hamiltoniana si y sólo si $G + uv$ es hamiltoniana.

demonstración: Si G es hamiltoniana, entonces, claramente $G + uv$ también lo es. \checkmark

Por otro lado, supongamos que $G + uv$ es hamiltoniana y que G no lo es. Entonces, como en la demostración del teorema anterior, obtenemos que $gr(u) + gr(v) < p$, lo que contradice la hipótesis. \blacksquare

El lema anterior motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN 9.11: La **CERRADURA** de G es la gráfica que se obtiene a partir de G uniendo recursivamente parejas de vértices no adyacentes cuya suma de grados sea al menos p , hasta agotar este tipo de parejas. Denotaremos a

la cerradura de G por $\beta(G)$.

TEOREMA 9.12: $\beta(G)$ está bien definida.

demonstración: Sean G_1 y G_2 dos gráficas obtenidas a partir de G , uniendo recursivamente parejas de vértices no adyacentes cuya suma de grados sea al menos p , hasta que ya no pueda continuarse con el procedimiento. Denotaremos por a_1, a_2, \dots, a_m y b_1, b_2, \dots, b_n las secuencias de aristas añadidas a G para obtener G_1 y G_2 respectivamente. Mostraremos que cada arista a_i es una arista de G_2 y cada b_j es una arista de G_1 .

Si es posible, sea $a_{k+1} = uv$ la primera arista de la secuencia a_1, a_2, \dots, a_m que no es arista de G_2 . Sea $H = G + \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Por la definición de G_1 sabemos que

$$gr_H(u) + gr_H(v) \geq p$$

Dada la elección de a_{k+1} , H es una subgráfica de G_2 , en consecuencia

$$gr_{G_2}(u) + gr_{G_2}(v) \geq p.$$

Como u y v no son adyacentes en G_2 ,

lo anterior es una contradicción. Entonces toda a_i es una arista de G_2 y análogamente, toda b_j es una arista de G_1 . Esto indica que $G_1 = G_2$ y por lo tanto $\mathcal{L}(G)$ está bien definida. ■

La figura 9 muestra la construcción de la cerradura de una gráfica. En este ejemplo, $\mathcal{L}(G)$ es completa, pero cabe resaltar que no siempre sucede así.

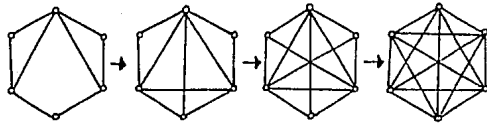


Figura 9

Con este concepto podemos establecer un criterio más para encontrar gráficas hamiltonianas.

TEOREMA 9.13: Una gráfica simple es hamiltoniana si y sólo si su cerradura es hamiltoniana.

demostración: Solamente hay que aplicar el lema 9.10 cada vez que se añada una arista a G para la formación de su cerradura. *

Si la cerradura de G es hamiltoniana, G lo es también trivialmente. ■

Este resultado tiene varias consecuencias interesantes. Una de ellas es inmediata a partir de la observación de que todas las gráficas completas de tres o más vértices son hamiltonianas.

COROLARIO 9.14: Sea G una gráfica simple con $p \geq 3$.

Si $\mathcal{L}(G)$ es completa, entonces G es hamiltoniana.

demostración: La demostración se sigue a partir del teorema anterior.

EL RATÓN CONQUISTADOR

Cuentan de un ratón que, queriendo conquistar el corazón de una pequeña ratoncita, le narró una de sus hazañas del siguiente modo:

“No puedes imaginarte, querida ratoncita, lo que me sucedió no hace mucho tiempo en esta casa. Me encontraba paseando por la despensa cuando me topé con un queso en forma de cubo. Casi de inmediato descubrí que se trataba en realidad de 27 quesitos cúbicos

apilados. Se me ocurrió entonces que podría devorarlos rápidamente, antes de que Paff, el terrible gato de la familia, pudiera descubrireme. Ideé entonces la siguiente estrategia: Empezaría comiéndome el queso de una de las esquinas; después iría acabando con todos los cubitos, pasando siempre a uno adyacente al que acabara de engullir. De este modo arrasaré con los 27 quesitos en menos tiempo del que puedes imaginarte. Cuando termine con el último cubo de queso, que resultó ser el colocado justo al centro de la pila, escapé corriendo a mi agujero. ¡El pobre Paff ni siquiera pudo reaccionar!"

Al finalizar el relato, la ratoncita, visiblemente indignada, exclamó:

"¡No he conocido a ningún ratón tan embustero como tú. No volveré a hablar contigo!"

¿Cómo descubrió la cortejada las mentiras del fantástico ratón?

Aunque parezca sorprendente, un poco de Teoría de Gráficas puede ayudarnos a comprender este triste desenlace.

La pila de quesos de nuestra historia era aproximadamente como la de la figura 10.

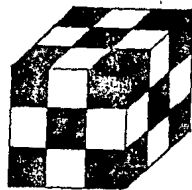


Figura 10

Podemos construir una gráfica que represente la colocación de los pequeños manjares del ratón si asignamos un vértice a cada cubito de queso y los hacemos adyacentes si y sólo si estos también lo son en la pila. La gráfica así obtenida es la de la figura 11

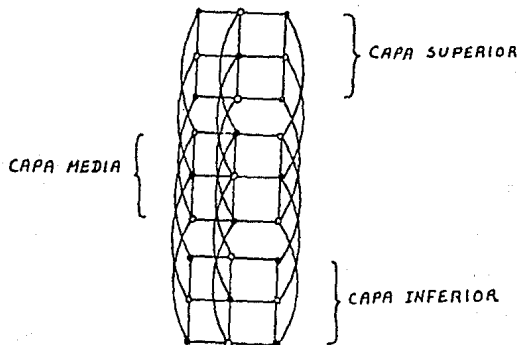


Figura 11

La coloración de los quesitos en el cubo y de los vértices de la gráfica en las figuras 10 y 11 nos muestran que esta es bipartita. A través de la bipartición que inducen los colores podemos notar que dos vértices adyacentes pertenecen siempre a conjuntos distintos, y que lo mismo sucede con el cubo central y el de cualquier esquina. Además, existen trece vértices en un conjunto de la bipartición y catorce en el otro. La hazaña del ratón, según su versión, consistió en encontrar una trayectoria hamiltoniana de un conjunto de la bipartición al otro. Llamemos T a esta trayectoria

$$T = u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, \dots, u_{27}$$

Llamemos V_1 al conjunto de vértices a los que asignamos el color negro y V_2 al conjunto de vértices blancos. De este modo $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$, $u_3 \in V_1$, $u_4 \in V_2$ y en general

$$V_1 = \{ u_i \mid i = 2n+1, n \leq 13 \}$$

$$V_2 = \{ u_i \mid i = 2n, n \leq 13 \}$$

Según lo anterior, $u_{27} \in V_1$, pero esto es imposible, pues en la gráfica se advierte que $u_{27} \in V_2$, donde u_{27} es el cubo central.

El error del ratón consistió entonces en no haber recapacitado antes de narrar su invención. Si hubiera dicho que su banquete había iniciado en una esquina y ter-

minado en otra, la ratoncita hubiera quedado impactada por su ingenio y velocidad y seguramente habría succumbido a los encantos del ratón.

LAS TORRES DE HANOI

La ciudad de Varanasi (antiguamente Benarés), situada a orillas del río Ganges, en la India, es un centro religioso e intelectual. Existe en ella un gran templo con una cúpula que, según se dice, marca el centro del mundo. Bajo ella, se halla colocada una placa de bronce sobre la que están fijas tres delgadas agujas de diamante de aproximadamente 42 cm. de altura. Alrededor de una de ellas hay sesenta y cuatro discos de oro puro, aplastados en orden decreciente de tamaño, el mayor de los cuales descansa sobre la placa de bronce. Este acomodo ha sido llamado TORRE DE BRAHMA y se asegura que fue colocado así por Dios al crear el mundo, quien exigió a los sacerdotes brahmanes trasladar los discos a una de las dos agujas restantes de acuerdo al siguiente procedimiento:

- 1) Debe moverse solamente un disco por vez.
- 2) Durante el traspaso pueden utilizarse las tres agujas, pero en ningún momento deberá colocarse

se alguno de los discos sobre otro de menor tamaño.

- 3) Al finalizar, la pila deberá encontrarse alrededor de una nueva aguja y, por supuesto, los discos dispuestos en el orden inicial.

Cuando los sacerdotes hayan concluido su misión, la torre, el templo y los brahmanes se convertirán en polvo y, en medio de un inconcebible trueno, el mundo desaparecerá.

La tarea de los sacerdotes se ha popularizado entre los niños del mundo, quienes, creyentes o no, han jugado a realizarla en el menor número de movimientos posible, desde luego, con una cantidad inferior de discos. El juego se conoce como *Las torres de Hanoi* (ignoramos la razón por la cual no se llama *Las torres de Benarés*) y en las siguientes ocho figuras se muestra el conjunto de pasos necesarios para el traspaso de tres discos. (Fig. 12)

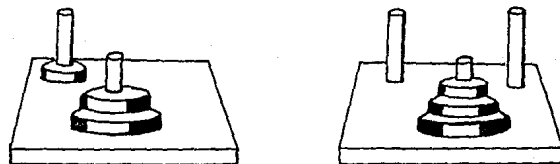
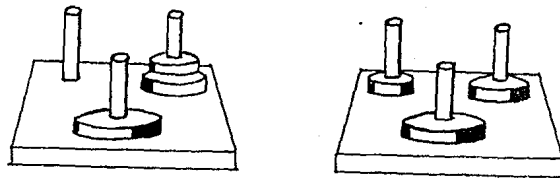
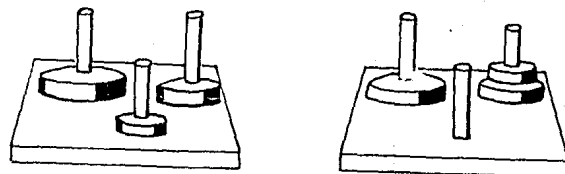


Figura 12

A través de varios ensayos puede advertirse que es

imposible realizar el traslado con menos de siete movimientos. Puede probarse, mediante un procedimiento inductivo, que para n discos, el mínimo número de pasos necesarios es $2^n - 1$.

Para no tener que dibujar cada una de las etapas del juego, puede utilizarse la siguiente notación:

- 1) Si se tienen n discos, sea $a = (a_1, \dots, a_n)$ un vector.
- 2) Hagamos $a = (0, \dots, 0)$ al iniciar el juego.
- 3) Numeremos a los discos de 1 a n en orden creciente de tamaño.
- 4) La entrada a_i cambia de 0 a 1 (ó de 1 a 0) si el disco i se ha movido en la tirada correspondiente, sin importar la posición en la que este se coloque.

A continuación se presenta la sucesión de vectores correspondiente al caso $n=3$ que se ilustra en la figura

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &\rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1) \\ &\rightarrow (1, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 1) \end{aligned}$$

El hecho de que solamente pueda moverse un disco cada vez, obliga a que cada vector difiera del siguiente

te en una única entrada. Las n -adas resultantes son todas las combinaciones posibles de cero y unos en n lugares; es decir, 2^n . Como sabemos que se requiere de $2^n - 1$ pasos, si agregamos la posición inicial $(0, 0, 0)$, notaremos que es necesario pasar por todas las posibles n -adas. Podemos entonces, representar el juego mediante el n -cubo, gráfica que hemos definido en el ejercicio 7 de la página 196 y de la cual se muestran algunos ejemplos en la figura 13

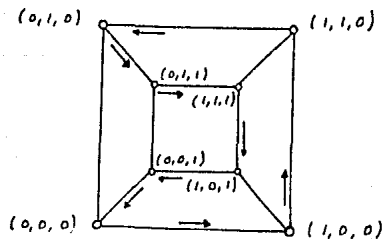


Figura 13

03 es la gráfica del caso $n=3$ que hemos desarrollado. Las flechas muestran que el problema de los torres de Hanoi es equivalente a encontrar un ciclo hamiltoniano en el n -cubo.

Vale la pena retomar la leyenda de la Torre de Brahma para calcular el tiempo en el que, de acuerdo a ella, deberá desaparecer el mundo. El número de movimientos necesarios para el traspaso es $2^{64} - 1$; es decir, 18 446 744 073 704 551 615. Si los sacerdotes trasladaran un disco de una aguja a la otra, sin equivocarse, cada segundo y trabajaran 24 horas diarias durante 365 días al año, el cumplimiento de su tarea les tomaría 58 454 204 609 siglos y seis años más.

EJERCICIOS:

- 1: Si es posible, dibuja una gráfica euleriana G con $|V(G)|$ igual a un número par y $|A(G)|$ impar. Si no puede construirse, explica por qué.
- 2: Muestra que si G es euleriana, entonces todo bloque de G es también euleriano.
- 3: Prueba que si G no tiene vértices de grado impar, entonces, existen C_1, C_2, \dots, C_m , ciclos ajenos en

en aristas, tales que $A(G) = \bigcup A(C_i)$

- 4: Demuestra que si G tiene $2k$ vértices de grado impar, entonces existen k paseos ajenos en aristas, P_1, P_2, \dots, P_k en G tales que $A(G) = \bigcup A(P_i)$
- 5: Sea G una gráfica no trivial y euleriana y sea $v \in V(G)$. Prueba que todo paseo de G con origen en v puede extenderse a un paseo euleriano si y sólo si $G-v$ es un bosque.
- 6: Demuestra que
 - a) si G no es 2-conexa, G no es hamiltoniana
 - b) si G es bipartita con bipartición (X, Y) donde $|X| \neq |Y|$, entonces G no es hamiltoniana.
- 7: Prueba que si G tiene una trayectoria hamiltoniana (es decir, que pasa por todos sus vértices), entonces, para todo subconjunto propio S de $V(G)$ ocurre que $o(G-S) \leq |S| + 1$.
- 8: G es HIPDHAMILTONIANA si G no es hamiltoniana pero $G-v$ lo es para todo $v \in V(G)$. Demuestra que la gráfica de Petersen es hipohamiltoniana
- 9: Describe un algoritmo para
 - a) construir la cerradura de una gráfica
 - b) encontrar un ciclo hamiltoniano en una gráfica si su cerradura es completa.

10: Nueve amigos asistieron a un congreso de matemáticas. Al regresar, el hermano de uno de ellos preguntó: "¿Cuántos días duró el congreso? Por respuesta, sólo recibió la siguiente información: "Nosotros nueve cenamos juntos todas las noches y cada vez nos sentamos entre dos compañeros distintos sin repetir nunca nuestras posiciones relativas." ¿Puede el hermano inferir algo sobre su pregunta a partir de este comentario?

11: ¿Es posible jugar dominó de manera que el juego termine con todas las fichas colocadas y de manera que éstas formen un ciclo; es decir, que el extremo libre de la última ficha pueda empalmarse con el extremo libre de la ficha inicial? En caso de ser así, ¿en qué casos puede hacerse? ¿Puedes modelar el juego usando una gráfica? ¿Cuál sería un problema equivalente en dicha gráfica? Si encuentras que no es posible hacerlo, explica por qué.

10 RELACIONES DE LA TEORÍA DE GRÁFICAS CON OTRAS CIENCIAS

Ya es un lugar común hablar de la necesidad de especialización requerida para producir nuevo conocimiento, debido al apresurado desarrollo de la ciencia en este siglo. Poseer una formación universal, como a menudo sucedía anteriormente, ha dejado de ser factible. Con frecuencia, para aportar nuevos elementos se debe sacrificar la posibilidad de dominar diversos terrenos del saber. Como es sabido, esta fragmentación necesaria ha producido un gran número de avances; sin embargo, por su carácter mismo de parcialidad, es dudoso que su prolongación indefinida resulte benéfica. Los estudios interdisciplinarios pueden ser una opción frente a esta situación. En el campo de las matemáticas, una mani-

festación de esta tendencia son los trabajos sobre modelación de fenómenos que tradicionalmente son estudiados por otras ciencias. La Teoría de Gráficas ha resultado ser una útil herramienta para este fin. Con su ayuda se ha logrado describir el comportamiento de diversos objetos de la naturaleza y la sociedad con distintos grados de precisión. En ocasiones es posible hacer predicciones sobre el mismo e incluso se han hecho algunos descubrimientos que, sin la ayuda de este instrumento, seguramente habrían demandado mayor tiempo para ser comprendidos. Intentar describir un fenómeno social, biológico, químico, etcétera, en términos matemáticos, no es en modo alguno tarea sencilla. Este debe ser simplificado en primera instancia para, posteriormente, añadir nuevas variables, sofisticar el modelo y aproximarse así un poco más a lo que sucede en la realidad. Es importante recalcar este hecho: un modelo matemático no refleja siempre con precisión lo que sucede en la naturaleza o en la sociedad; y no sólo eso, sino que en ocasiones los resultados están tan alejados de la situación verdadera que los trabajos carecen de interés. En otras, se hace uso de falacias matemáticas para justificar resultados, o bien, se fuerza la descripción de las condi-

ciones reales para hacerlas encajar en un concepto matemático. La verdad de las conclusiones de este tipo de intentos es, por supuesto, muy discutible. Las aplicaciones de las matemáticas requieren, por lo tanto, de una actitud cautelosa y crítica permanente y no puede perderse de vista que algunas de ellas poseen sólo un alcance limitado.

TEORÍA DE GRÁFICAS Y QUÍMICA

A partir del siglo XVIII la química y la teoría de gráficas han coincidido en varios puntos de su desarrollo. Hasta la fecha se han escrito más de mil artículos y un libro [5] sobre el tema. Podemos decir que el primer paso dado en esta interdisciplina fue dado por Bosovich [33] al representar a los átomos como puntos en el espacio. Las primeras gráficas con un contenido claramente químico en su diseño fueron dibujadas por William Higgins en 1789 para simbolizar tres de los óxidos de nitrógeno. Estas gráficas se reproducen en la figura 1. En ellas, cada letra representa a un átomo y las líneas entre ellos se señalan por medio de líneas rectas. Los números indican la magnitud supues-

ta de cada una de ellas

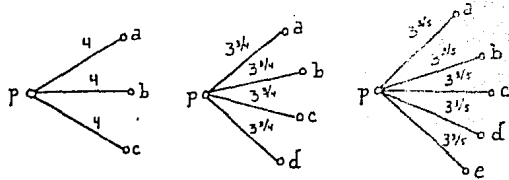


Figura 1

La noción de fuerza entre los átomos evolucionó gradualmente hasta el concepto químico moderno de valencia y desde entonces se utilizaron aristas para representarla. El primero en emplear esta notación fue el químico Couper en 1858 [10], lo que le facilitó el camino a Laurent para descubrir que el número de átomos de valencia impar en una molécula es siempre par [23] [Corolario 1.6]. De esta manera se inició la representación gráfica de las moléculas, hecho que impulsó el desarrollo de las conexiones entre la química y la teoría de graficas.

1: LA REPRESENTACIÓN de las MOLECULAS

Las fórmulas moleculares condensadas que sólo dan el número y clase de los átomos que constituyen a una molécula (C_4 para el metano, C_2H_6 para el etano,

no, etcétera) no son siempre adecuadas ya que, a menos que la molécula sea pequeña, la fórmula condensada representa a más de un compuesto, debido a que la disposición espacial de los átomos de una molécula, que es un factor importante que influye en las propiedades físicas y químicas de un compuesto, no se describe en esta notación. Además, tampoco da indicación alguna sobre como este puede sintetizarse.

Una gráfica proporciona una descripción de la estructura topológica de un compuesto si se representa cada uno de sus átomos por medio de un vértice y los enlaces de valencia entre parejas de átomos a través de aristas. Para ilustrar el tipo de predicciones que pueden hacerse en base a esta forma de representación, consideremos las gráficas de la figura 2.

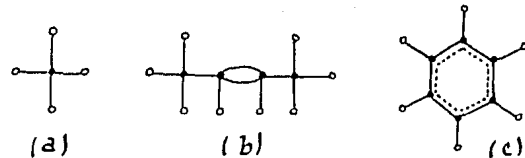


Figura 2

Cada gráfica representa una molécula de hidrocarburo (los hidrocarburos son compuestos que contienen solamente carbono e hidrógeno en su molécula). Los vértices negros simbolizan átomos de carbono y los blancos, átomos de hidrógeno. Las aristas indican los enlaces que mantienen a la molécula unida. En una molécula estable los átomos de carbono deben tener valencia cuatro y los de hidrógeno ser univalentes; es decir, en la gráfica los vértices negros deben tener grado cuatro y los blancos uno.

Observando la gráfica se advertiremos de inmediato una irregularidad: parece ser que los átomos de carbono solamente tienen valencia tres y hemos dicho que esto no puede ser así. ¿Qué ocurre? Recordemos que los enlaces no son siempre del mismo tipo: pueden ser iónicos, covalentes, etcétera. Si pensamos en asignar a cada enlace entre carbonos el número $1\frac{1}{2}$ y a los demás el 1, las valencias que darían satisfechas. Debido a que hay enlaces de intensidades diversas podemos decir que esto es aproximadamente lo que sucede. Aunque hemos dicho que una arista representa un enlace en una gráfica en química, esto no basta para aclarar su significado. Si se hace referencia a una clase de moléculas con el mismo tipo de enlace, por ejemplo, los alcanos, entonces, no hay ambigüedad.

Sin embargo, en moléculas que poseen distintos tipos de enlaces, la situación es más compleja. En consecuencia, no puede pensarse en una arista como un elemento con significado único en este contexto y en la práctica este se define según el tipo de problema que se esté abordando. Desafortunadamente, algunos autores no aclaran los conceptos a los que se refieren con la precisión debida y utilizan aristas para simbolizar todo tipo de enlaces, desde las más débiles interacciones moleculares hasta los enlaces covalentes más fuertes. En realidad, la representación de cualquier enlace por medio de una arista únicamente constituye una simplificación drástica de un complejo conjunto de interacciones electrónicas y de otros tipos que conforman un enlace químico, pero en ocasiones facilita la modelación de ciertos fenómenos.

Los ALCANOS, los ALQUENOS, los ALQUINOS y los HIDROCARBUROS AROMÁTICOS son cuatro clases distintas de hidrocarburos. Los tres primeros se llaman en conjunto HIDROCARBUROS ALIFÁTICOS y cada uno de estos tres grupos es lo que se llama una SERIE HOMÓLOGA. A cada una de ellas se le puede asignar una fórmula general que representa a un miembro cualquiera de la serie. Veamos:

SERIE de los ALCANOS (Fórmula general $C_n H_{2n+2}$)

$C_1 H_4$ Metano	$C_5 H_{12}$ Pentano	$C_9 H_{20}$ Nonano
$C_2 H_6$ Etano	$C_6 H_{14}$ Hexano	$C_{10} H_{22}$ Decano
$C_3 H_8$ Propano	$C_7 H_{16}$ Heptano	$C_{15} H_{32}$ Pentadecano
$C_4 H_{10}$ Butano	$C_8 H_{18}$ Octano	

SERIE de los ALQUENOS (Fórmula general $C_n H_{2n}$)

$C_2 H_4$ Etileno	$C_4 H_8$ Buteno
$C_3 H_6$ Propeno	$C_5 H_{10}$ Penteno

SERIE de los ALQUINOS (Fórmula general $C_n H_{2n-2}$)

$C_2 H_2$ Acetileno	$C_4 H_6$ Butino
$C_3 H_4$ Propino	$C_5 H_8$ Pentino

Según estas fórmulas generales, podemos observar que las moléculas de cada miembro difieren del anterior y del siguiente por un número constante de átomos.

La gráfica *a* de la figura 2 muestra la representación gráfica del metano. Un resultado sorprendente es que la fórmula estructural desarrollada de cualquier alcano es un árbol, como veremos a continuación.

Se define al NÚMERO CICLOMÁTICO de una gráfica plana como el número de ciclos que esta con-

tiene y puede demostrarse que este número μ está dado por

$$\mu = q - p + 1.$$

Sabemos que en un árbol $q = p - 1$. Esto indica que para un árbol, $\mu = 0$, como efectivamente sucede. Veamos que ocurre con esta ecuación para la serie de los alcanos. Según su fórmula, las gráficas de estos compuestos tienen $n + 2n + 2$ vértices (n átomos de carbono y $2n + 2$ de hidrógeno). Por el teorema 1. su número de aristas es $\frac{1}{2}(4n + 2n + 2)$, de donde

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2}(4n + 2n + 2) - (n + 2n + 2) + 1 \\ &= 2n + n + 1 - (n + 2n + 2) + 1 \\ &= 3n + 1 - 3n - 2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

con lo que concluimos que estos alcanos son compuestos de cadena abierta.

2: ENUMERACIÓN DE ISÓMEROS

En la sección anterior hablamos del hecho de que el mismo conjunto de átomos unidos químicamente para producir una única molécula puede estar conectado de varias formas distintas y que esto produce compuestos diferentes desde el punto de vista de sus propiedades físicas y químicas, a pesar de que sus moléculas

contengare igual cantidad de átomos de los mismos elementos. Estas variantes se conocen como ISÓMEROS y determinar el número existente de ellos para una molécula específica no es un problema trivial e involucra al análisis combinatorio y a la teoría de gráficas. Mucho del trabajo sobre la enumeración de estas moléculas se ha centrado en los miembros de las series homólogas. Cayley intentó resolver este problema y sus aportaciones en este campo son de las más importantes en la modelación matemática de fenómenos químicos en las que se hace uso de la teoría de gráficas.

Dada una molécula C_nH_{2n+2} de algún alcano existe un número $m(n)$ de formas topológicamente posibles de conformarla. La figura 3 muestra las combinaciones estructuralmente posibles para los primeros seis miembros de esta serie. Solamente se muestran los árboles de carbono y no se han incluido los átomos de hidrógeno a fin de simplificar la visualización de las distintas configuraciones. Es interesante hacer notar la gran cercanía de estas a los árboles de p puntos, así como el hecho de que la gráfica de la figura 4 no puede representar a ningún iso-

mero del hexano (¿Por qué?)

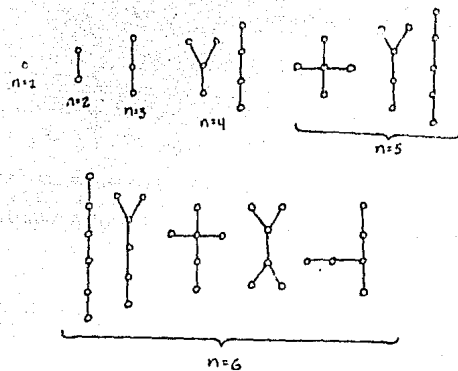


Figura 3

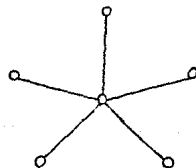


Figura 4

Los dos métodos principales para evaluar $m(n)$ han sido los de los químicos Henze y Blair en 1931 y

el del matemático Pólya [26]. La innovación de Cayley consistió en representar a los miembros de una serie homóloga por medio de árboles para después determinar $m(n)$. Estudió en particular a los alcanos (árboles de carbono), los radicales alquinos C_nH_{2n-2} (árboles de carbono enraizados, es decir, en los cuales se distingue un vértice en particular) y compuestos donde todos los vértices tienen valencia 3 ó 1 (árboles de boro) o bien, valencia 2 ó 1 (árboles de oxígeno). Su método consistía esencialmente en determinar el número de árboles enraizados de p vértices. A continuación se señalan los números calculados para algunos isómeros posibles. En los casos de moléculas mayores el problema es sumamente complicado. Por ejemplo, el $C_{20}H_{42}$ tiene 366 319 disposiciones estructurales diferentes que son posibles

Molécula	No. de Isómeros	Molécula	No. de Isómeros
C_5H_{12}	3	$C_{10}H_{22}$	75
C_6H_{14}	5	C_4H_8	3
C_7H_{16}	9	C_5H_{10}	5
C_8H_{18}	18	C_4H_6	2
C_9H_{20}	35	C_5H_8	3

TEORÍA DE GRAFICAS Y LINGÜÍSTICA

La reflexión sobre el lenguaje es contemporánea a la historia de la humanidad y esto no parece sino natural: la capacidad del lenguaje articulado es una de las más sorprendentes que posee el ser humano.

Las matemáticas en la investigación de la estructura del lenguaje natural aparecen a finales de la década de los cincuenta. Conviene esbozar el contexto en el que esto sucede.

Convencionalmente, se señala el año de 1916 como fecha de nacimiento de la lingüística debido a la publicación del libro Curso de lingüística general de Ferdinand de Saussure. Aparentemente, en esta obra se sistematizan por primera vez algunos de los conceptos fundamentales sobre el lenguaje que venían perfilándose desde tiempo atrás y se sientan las bases para su estudio en sí mismo y no en función de otras disciplinas como la filosofía, la lógica, la crítica literaria, la religión, etcétera. Para Saussure, la lingüística debía ser el estudio de la lengua exclusivamente y, por ello, entendía el estudio de los signos y sus relaciones, sin atender a su significado ni a su

uso social.

Casi simultáneamente que en Europa, en Estados Unidos surge la lingüística como ciencia para investigar las lenguas indígenas. Nace con un carácter fundamentalmente descriptivo. Uno de los principales autores de este movimiento es Bloomfield. Para él y sus seguidores, influidos por la psicología conductista, el aprendizaje de las lenguas es el aprendizaje de un comportamiento que se adquiere, como otros, a través del mecanismo estímulo-respuesta-refuerzo. Por consiguiente, una estructura lingüística se aprende y automatiza por imitación y memorización de oraciones modelo.

Aunque las escuelas europea y norteamericana de la primera mitad del siglo XX son diferentes entre sí, coinciden en muchos aspectos, por lo que desde fines de los años cincuenta se usa el término ESTRUCTURALISMO en un sentido amplio para distinguirlos del movimiento posterior, el GENERATIVISMO, iniciado en 1957 por Noam Chomsky como reacción a muchos postulados estructuralistas. Es este último quien introduce las matemáticas en el estudio del lenguaje.

Chomsky acepta varios elementos del estructuralis-

mo, pero hace dos observaciones fundamentales en su contra:

- 1) Los hablantes de una lengua son creativos respecto a ella. Son capaces de entender y producir oraciones nunca antes oídas o dichas; no son meros repetidores de frases escuchadas y almacenadas en su memoria.
- 2) La lingüística estructuralista renuncia a explicar este fenómeno y se conforma con describir el lenguaje agrupando a sus elementos en categorías. Debe ser tarea del lingüista explicar esta capacidad creativa.

Esto quiere decir que es necesario formular un modelo teórico claro y coherente que explique en base a ciertas reglas, que deben ser descubiertas, la capacidad de los hablantes de producir, a partir de un número limitado de elementos, un número infinito de oraciones y expresiones así como su capacidad de reflexionar sobre su lengua y una tercera capacidad de suma importancia: la de distinguir qué oraciones son posibles o aceptables y cuáles no lo son.

Podemos decir que el lenguaje tiene que ver con ciertos conjuntos de unidades y con secuencias formadas

a partir de ellas. Por ejemplo, letras como unidades y palabras como secuencias; o bien, palabras como unidades y oraciones como secuencias. Lo que permite vincular a la lingüística con la teoría de gráficas es el hecho de que no todas las secuencias son lingüísticamente aceptables. Chomsky propone crear GRAMÁTICAS GENERATIVAS para cada lengua que deberán consistir en un conjunto de reglas cuya aplicación mecánica deberá producir todos los enunciados admisibles de la lengua y sólo ellos. Además, en esta gramática también debe poder representarse el saber intuitivo de los hablantes sobre los enunciados de su idioma (cada enunciado ambiguo debe poder ser engendrado de tantas maneras distintas como sentidos posea, por ejemplo). En la perspectiva de la escuela chomskiana, la descripción total de una lengua, es decir, su gramática, comporta un componente generativo, que a decir de Chomsky es la SINTAXIS (combinación de las palabras en la frase)

Para engendrar el conjunto de series o secuencias que constituyen una lengua es preciso:

- a) un conjunto finito de símbolos (ALFABETO)
- b) un símbolo de partida en el interior de este conjunto (AXIOMA; se le asigna la letra S)

c) un conjunto de reglas.

Se dice que una serie A de símbolos ha sido ENGENDRADA si

- 1) ninguna regla permite actuar ulteriormente sobre A (A se denomina entonces SERIE TERMINAL)
- 2) puede construirse una serie $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tal que:
 - a) cada x_i es una serie de símbolos del alfabeto
 - b) $x_0 = S$
 - c) $x_n = A$
 - d) para toda pareja (x_i, x_{i+1}) existe una regla que permite ir de x_i a x_{i+1} .

Entre la multitud de reglas posibles, pueden distinguirse dos tipos particularmente importantes:

- 1) LAS REGLAS SINTAGMÁTICAS: (o PS por abreviatura del inglés PHRASE STRUCTURE. Se llaman también REGLAS de REESCRITURA). Son del tipo $VXW \rightarrow VYW$, donde X es un símbolo único del alfabeto y V, Y y W pueden ser series de varios símbolos (V y W pueden ser nulos). El manejo permitido por una regla de este tipo consiste en, dada una serie que contenga al símbolo X rodeado por V y W , reemplazar X por Y .

Si una gramática contiene sólo reglas PS, la derivación de una serie puede representarse mediante un árbol. Por ejemplo, la oración EL PRINCIPITO BUSCA A LOS HOMBRES se genera aplicando las siguientes reglas:

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------------|
| 1: $O \rightarrow FN + FV$ | 6: $S \rightarrow \text{principito}$ |
| 2: $FN \rightarrow A + S$ | 7: $V \rightarrow \text{busca}$ |
| 3: $FV \rightarrow V + FN$ | 8: $P \rightarrow a$ |
| 4: $FN \rightarrow P + A + S$ | 9: $A \rightarrow \text{los}$ |
| 5: $A \rightarrow \text{el}$ | 10: $S \rightarrow \text{hombres}$ |

Lo anterior quiere decir que los símbolos de las columnas izquierdas pueden siempre ser reemplazados por los de las derechas (O = oración, FN = frase nominal, FV = frase verbal, A = artículo, S = sustantivo, V = verbo, P = preposición). El árbol correspondiente sería:

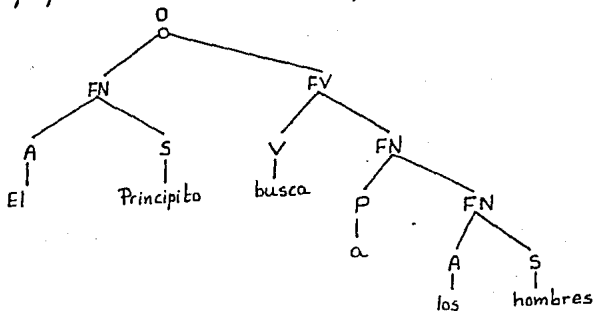


Figura 5

Otras oraciones que podrían ser engendradas por la misma gramática son:

EL ZORRO PERSIGUE A LAS GALLINAS.

LOS CAZADORES CAZAN A LOS ZORROS.

EL PRINCIPITO AMA A LA ROSA.

Tal vez al lector le interese construir los árboles

para las siguientes oraciones

YO ESCUCHARÉ TU RISA.

EL AVIADOR DIBUJÓ UN BOZAL PARA EL PRINCIPITO.

ESTOY SOLO.

EL ECO RESPONDIÓ.

Se dice que los elementos de la oración que son adyacentes a un mismo vértice están DOMINADOS por él.

Observemos ahora el árbol de la oración inglesa JANE LIKES THE DOG (A Jane le gusta el perro)

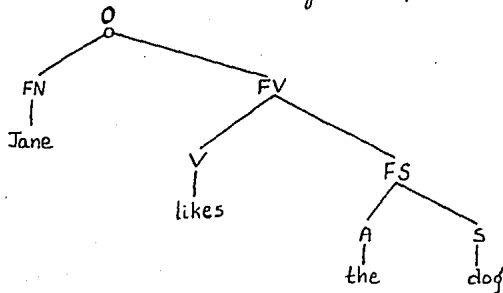


Figura 6

El tipo de reglas que producen árboles de esta naturaleza (fig. 7)

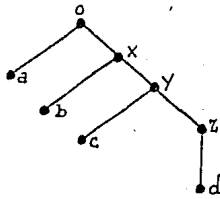


Figura 7

son las de la forma $X \rightarrow Y$, donde X es un símbolo inicial y donde Y es, o bien un símbolo terminal (es decir, una palabra), o bien, una serie constituida por un terminal y uno no terminal y además, en todas las que corresponden a la condición última, el orden de sucesión del terminal y del no terminal es idéntico. En este caso, la gramática se llama **REGULAR, DE KLEENE ó GRAMÁTICA CON NÚMERO FINITO DE CASOS** (autómata finito)

Para que una gramática PS, que sólo comprende un número finito de reglas, pueda engendrar una serie infinita de frases, es matemáticamente necesario que, en los árboles correspondientes a las derivaciones, algunos símbolos puedan dominarse a sí mismos y puedan tenerse árboles con ramas del tipo que se ilustra a conti-

nuación (fig. 8)

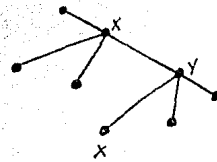


Figura 8

Las gramáticas que poseen exclusivamente árboles como los de la figura 7 no pueden engendrar todas las oraciones aceptables de la lengua inglesa y de otras muchas

Estos árboles tienen un aspecto muy similar al análisis gramatical de las oraciones realizado por los gramáticos tradicionales. En ambos casos, la oración está dividida en una jerarquía de unidades y subunidades. En cada nivel, las unidades están clasificadas como los **CONSTITUTIVOS INMEDIATOS** de las unidades del nivel siguiente. Evidentemente, esto es paralelo al análisis gramatical de una oración en términos de sujeto (FSV) y predicado (FV), prosiguiendo luego la subdivisión, lo notable del enfoque de Chomsky radica en la forma de las reglas que utilizan para expresar esta información. Al pretender proporcionar una serie de reglas de reescritura que generen un número infinito de árboles,

hace notar que no es suficiente que los lingüistas sean capaces de analizar los constitutivos de una muestra limitada de oraciones. Esto implica un contraste: las reglas generativas de Chomsky son dinámicas; el análisis constitutivo tradicional es estático.

2) LAS REGLAS DE TRANSFORMACIÓN (o reglas transformacionales) Son reglas que desempeñan operaciones de permutación, supresión y adición en los árboles generados por las reglas PS, para producir todas las posibles oraciones de un lenguaje. (Estas reglas se abrevian RT). La aplicabilidad de una RT a una serie depende no sólo de la constitución de esta serie, sino también del modo en que esta serie ha sido derivada, información que proporciona el árbol correspondiente. Las RT son, pues, reglas que no obran sobre series sino sobre árboles y también llegan a árboles; es decir, son operaciones binarias entre árboles.

Este tipo de reglas son las que permiten, por ejemplo, pasar de "A VECES VOLTAIRE CONTRADICE A VOLTAIRE EN UNA SOLA PAGINA" a "A VECES VOLTAIRE SE CONTRADICE EN UNA SOLA PÁGINA"

También explican la generación de oraciones pasivas como:

"EL CONCIERTO FUE ESCUCHADO POR MILLONES DE PERSONAS"

a partir de oraciones activas del estilo de:

"MILLONES DE PERSONAS ESCUCHARON EL CONCIERTO"

El funcionamiento detallado de este tipo de reglas escapa al contenido de estas notas, pero el paso del árbol de la figura 9 al de la figura 10 puede dar una idea aproximada:

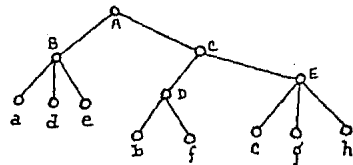


Figura 9

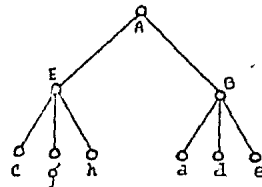


Figura 10

La utilización de árboles ha simplificado el trabajo de los gramáticos generativos. Antes de finalizar esta sección es pertinente señalar algunos puntos. A pesar de las concepciones innovadoras de Chomsky, sus ideas han suscitado críticas. Entre algunas de ellas podemos mencionar las siguientes:

- 1) La gramática generativa pudiera ser, en el fondo, un retorno a la concepción normativa de la gramática, que pretendía establecer preceptos sobre lo correcto y lo no correcto en la lengua, ya que las reglas generativas y transformacionales que Chomsky supone sean aprendidas empíricamente, podrían en realidad ser efecto de las reglas aprendidas en la escuela.
- 2) Chomsky habla de tres tipos de agramaticalidad (locuciones inaceptables en una lengua, según el juicio intuitivo de los hablantes nativos de la misma) que todo hablante reconoce. Se argumenta que estas tres clases podrían ser constructos teóricos chomskianos y no percepciones de cada individuo.
- 3) En toda lengua existe un considerable número de frases sobre cuya aceptabilidad ningún hablante nativo puede pronunciarse con certeza.

El sentimiento de extrañeza que ciertos enunciados pueden producir sobre los hablantes nativos de una lengua se debe a que tales enunciados llevan la utilización de las reglas generativas más allá de los límites habituales, pero no a que las infrinjan. Un ejemplo es el siguiente:

"Y EL HACHA MALDICE A LOS HOMBRES"

(Et la hache maudit les hommes)

escrita por Víctor Hugo en Las contemplaciones.

Una regla semántica indica que el verbo MALDECIR requiere de un sujeto humano. Sin embargo, la intención de Víctor Hugo es humanizar al sujeto HACHA y esto, desde luego, no puede considerarse una violación a ninguna regla, y, mucho menos, una oración inaceptable en la lengua francesa.

Estas observaciones, entre muchas otras, han sido hechas por sicolingüistas que han pretendido explicar las consecuencias que las ideas chomskianas tendrían en relación a los procesos de aprendizaje de una lengua.

Cabe hacer notar que Chomsky ha respondido que "lo se trata de suministrar una caracterización matemática de una competencia poseída por los usuarios de

una lengua determinada y no un modelo psicológico de su actividad. No se supone que el sujeto habla al producir una frase lo haga según el proceso que la engendra en la gramática generativa, la producción de las frases del discurso cotidiano involucra muchos otros factores y es un mecanismo complejo.

TEORÍA DE GRÁFICAS Y GEOGRAFÍA

Puede hablarse de tres momentos importantes en la conexión de la geografía con la teoría de gráficas. El primero puede ubicarse cuando Leonard Euler plantea el problema de los siete puentes de Königsberg en 1736. A partir de entonces, se evidenciaron varias relaciones entre estas dos ciencias y Cayley tuvo la preocupación de hacer llegar a los geógrafos la Conjetura de los Cuatro Colores al publicarla en 1879 en los Anales de la Sociedad Real de Geografía. Pero en realidad, los trabajos más importantes en este área se iniciaron hacia 1960. En esta sección comentaremos brevemente dos de ellos. El primero se refiere a la geografía física; en particular, a la descripción de un sistema de corrientes. El segundo está dentro del

campo de la geografía humana y de hecho, comprende varios aspectos que mencionaremos de manera muy general.

A excepción de las secciones que forman un larzo, las corrientes hidrológicas tienen la forma de un árbol enraizado. Los geógrafos han estudiado su evolución y la relación de la morfología de una red con su hidrología; por ejemplo, las características de su caudal y su flujo. Aunque los estudios sobre morfología se han centrado sobre todo en la geometría de los cauces de los ríos, su anchura y su pendiente, al concebir a un sistema de corrientes como una gráfica, se han explorado también sus propiedades topológicas básicas.

Consideremos la siguiente red de corrientes hidrológicas (fig. 11)



Figura 11

que puede representarse como en la figura 12

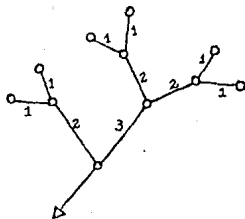


Figura 12

Strahler propuso numerar las aristas de esta gráfica de este modo:

- Se asigna el número 1 a las aristas que inciden en algún vértice terminal y se dice que son **CANALES DE PRIMER ORDEN**.
- Donde convergen dos canales de primer orden se forma un **CANAL DE SEGUNDO ORDEN** y a la arista que lo representa se le asigna el número 2.
- Donde convergen dos canales de segundo orden se forma un **CANAL DE TERCER ORDEN** y a la arista que lo representa se le asigna el número 3.

Todas las aristas se numeran siguiendo este procedimiento. Si n es el mayor número que aparece en la asignación

se dice que se trata de un **SISTEMA de ORDEN n** . Esta numeración permite calcular un conjunto de números R_i ($i=1,2,\dots,n-1$) cada uno de los cuales es llamado **RAZÓN DE BIFURCACIÓN** y se define así:

$$R_i = \frac{N_i}{N_{i+1}}$$

donde N_i es el número de corrientes de orden i . Después puede encontrarse la razón promedio \bar{R} de todos los R_i . Estos números pueden usarse para determinar varios parámetros de las redes de corrientes.

Trabajos recientes sugieren que a medida que aumenta el orden del sistema, las razones de bifurcación tienden a disminuir ligeramente. Su importancia práctica radica en su relevancia para calcular el caudal de un río o una red hidrológica. Una razón promedio alta se asocia casi siempre a una cuenca alargada, lo que se traduce en un tope hidrográfico bajo y atenuado, mientras que una razón baja, que es más común, corresponde en general a una cuenca compacta con un pico más alto y contraído (Figura 13). Más generalmente: mientras menor sea la razón de bifurcación, mayor será el pico hidrográfico cuando el río esté sujeto a tormentas, ciecidas, inundaciones, etcétera. Kirkby [22]

ha mostrado que este parámetro también es importante en la predicción del tiempo que transcurrirá entre una tormenta de lluvia y el subsecuente desbordamiento de la cuenca de un río.

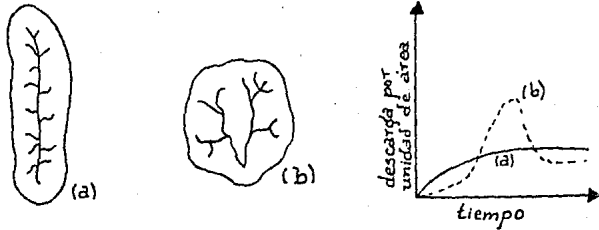


Figura 13

Otra de las aplicaciones de la teoría de gráficas a la geografía es la relativa a la conectividad de las redes de transporte y de comunicación de las que hemos hablado en capítulos anteriores y que corresponde al campo de la geografía humana.

Por último, los asentamientos humanos pueden concebirse como una gráfica cuyos vértices corresponden a los núcleos de población y cuyas aristas representan posibilidades de comunicación entre ellos. El centro de esta gráfica, que hemos definido en el capítulo 3, de la

ubicación ideal de puestos de abastecimiento o de distribución (centrales de correos, terminales de autobuses, centros comerciales, depósitos de agua, estaciones de bomberos, etcétera) ya que es el punto más accesible a todos los puntos simultáneamente.

TEORÍA DE GRÁFICAS Y CIENCIAS SOCIALES.

En la introducción a este capítulo señalamos algunas de las limitaciones que a menudo presenta la modelación matemática. Creemos que en el caso del empleo de las matemáticas en la descripción de problemáticas propias de las ciencias sociales la situación es particularmente delicada. En primera instancia se presentan varias dificultades metodológicas: el objeto de estudio es único: la sociedad humana. Además de su extraordinaria complejidad, la experimentación con ella tiene un *sin fin* de implicaciones éticas y morales, lo que dificulta el control de las situaciones y la fijación de parámetros. La reproducción o repetición natural de las condiciones en las que tiene lugar un determinado evento es virtual-

mente imposible. Para superar esto, se recurre con frecuencia a la abstracción. Ciertas variables se desprecian o bien, se consideran fijas y, mediante el razonamiento, se intenta llegar a conclusiones. El resultado final de este procedimiento corre algunos riesgos. Muchas veces en el camino de la abstracción se olvidan condiciones que de hecho son determinantes o, por el contrario, se atribuyen al objeto a estudiar propiedades que éste no tiene. En la búsqueda de descubrir reglas que regulen el comportamiento social, con frecuencia se quiere ajustar la teoría matemática a la realidad aún a costa de tergiversar lo que en esta ocurre.

A pesar de lo anterior, es conveniente mencionar algunos de los temas sobre los que han girado los trabajos sobre teoría de gráficas y ciencias sociales y describirlos de manera muy general. En muchos de los casos, la relación se reduce a la utilización de gráficas o de sus matrices de adyacencia (una matriz de ceros y unos con un uno en una entrada a_{ij} indica que el vértice i es adyacente al vértice j en la gráfica G) para presentar datos, o bien, de terminología de la teoría de gráficas para resumirlos. En aplicaciones más teóricas se hace uso de herramientas más complejas, e incluso se ha plan-

teado la necesidad de desarrollar nuevas técnicas y resultados dentro del área teórica de gráficas para afinar los modelos propuestos.

2: TEORÍA DEL BALANCE

Una forma típica de aplicación de la teoría de gráficas a las ciencias sociales consiste en la utilización de una gráfica o DIGRÁFICA (una digráfica, o gráfica orientada, es una gráfica cuyas aristas, a las que se les llama FLECHAS, tienen dirección. Figura 14) para representar las relaciones entre ciertas variables que pueden ser personas, países, conceptos u objetos sujetos a comparación y que constituyen los vértices de la gráfica en cuestión.

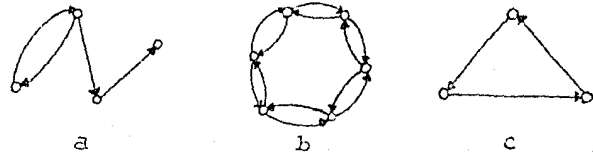


Figura 14

Se describen algún tipo de relación o interacción entre estas variables uniéndolo a los vértices correspondientes por medio de flechas, o bien de aristas, si la relación es simétrica. Algunas veces interesa registrar la relación

cualitativamente pues se habla de "GUSTO POR-RECHAZO A", "ACUERDO-DESACUERDO", "ESTÍMULO-INHIBICIÓN", etcétera. En estos casos se asigna un signo (+ o -) a cada flecha o arista de una gráfica a la que se denomina entonces **GRÁFICA SEÑALIZADA**.

Los sociólogos y psicólogos industriales han empleado gráficas al estudiar el trabajo en pequeños grupos de individuos que deben realizar alguna tarea en equipo. Cuando una situación así se presenta, por ejemplo, en una empresa o industria, es interés de los propietarios obtener el mayor rendimiento al menor costo posible. Esto supone que el trabajo en grupo se realice de la manera más eficiente y se asume que esto sucede cuando entre las personas que lo componen prevalecen buenas relaciones y no hay tensiones. Informalmente, cuando un grupo trabaja bien en equipo se dice que es un **GRUPO BALANCEADO**.

En 1946 [19] Heider inició los trabajos sobre una definición más precisa del balance. Para ilustrar un poco como se ha manejado este concepto, supongamos que en un grupo de trabajo hay tres personas, cada una de las cuales evalúa a las demás. Si asumimos que las evaluaciones son simétricas (es decir, a *a* le agrada *b* si

y sólo si *a* le agrada *a*), entonces, todas las posibilidades están reflejadas en las cuatro gráficas de la figura 15

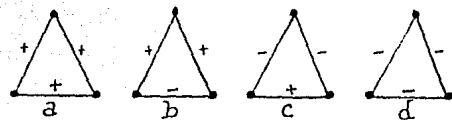


Figura 15

El trabajo empírico de Heider sugirió que las situaciones representadas en las gráficas *a* y *c* de la figura anterior corresponden en general a grupos balanceados y que las otras dos no. Sus investigaciones mostraban que los grupos cuya evaluación interpersonal podía expresarse en gráficas como la *b* o la *d* no trabajaban en equipo adecuadamente y sostenían relaciones tensas. Cabe resaltar que las gráficas *a* y *c* son gráficas señalizadas con un número par de signos negativos. Posteriormente, Cartwright y Harary generalizaron esta observación y definieron a una **GRÁFICA SEÑALIZADA BALANCEADA** como aquella en la que todo circuito tiene un número par de ciclos negativos (un circuito es un paseo cerrado o trivial). En este mismo orden de ideas se asocia un signo a cada trayectoria o ciclo de una

gráfica del siguiente modo:

- + si contiene un número par de signos negativos
- si contiene un número impar de signos negativos

De esta manera, una gráfica señalizada está balanceada si y sólo si todo circuito de G es positivo.

Hacia 1954 [17], Harary descubrió el siguiente teorema fundamental en el estudio del balance:

TEOREMA 10.1: Una gráfica señalizada está balanceada si y sólo si existe una bipartición de sus vértices tal que toda arista cuyos extremos estén en el mismo conjunto de la bipartición tiene signo positivo y toda arista cuyos extremos estén en conjuntos distintos tiene signo negativo.

Si se asocia un signo menos a cada arista de una gráfica no señalizada originalmente, el teorema anterior es una generalización del teorema 1. que afirma que una gráfica es bipartita si y sólo si no contiene ciclos impares.

El concepto de balance también ha sido empleado por los politólogos al estudiar relaciones internacionales y grupos de poder. El lector interesado puede consultar [8, 18]

El concepto de balance planteado así no toma en cuenta la intensidad de las relaciones entre las variables; además, no considera el hecho de que este tipo de situaciones están en cambio permanente y pretende describirlas con un modelo estático. Por otro lado, se define al balance en términos de ausencia de tensión, conflicto, lucha y contradicciones sociales, mientras que matemáticamente se asocia estos estados a la cardinalidad del conjunto de los signos de una gráfica. Aún cuando se reporta que esta asociación es producto de la evidencia empírica, no es fácil visualizar la relación real entre el concepto social de balance y su equivalente matemático.

El único intento de incorporar intensidades a las relaciones así como elementos dinámicos a este tipo de modelos es el de Hubbel et. al [20] que en 1978 propusieron llamar s_{ij} al sentimiento que la persona i siente por la j (donde s_{ij} puede ser cualquier número real) y después hacer variar a s_{ij} en el tiempo.

2: DECISIONES GRUPALES Y ELECCIÓN SOCIAL

El modelo mencionado anteriormente considera las preferencias y elecciones de individuos; sin embargo se han

hecho muchísimos trabajos estudiando las posibilidades de conciliar las opiniones y voluntades diversas de individuos diferentes. En esta sección consideraremos muy superficialmente uno de ellos que tiene estrecha relación con la problemática electoral.

EL TEOREMA DE IMPOSIBILIDAD DE ARROW

Dado un conjunto I de n individuos, donde cada uno pueda expresar sus preferencias entre los candidatos u opciones de un conjunto V es posible representar las preferencias de cada individuo i a través de una digráfica D_i . El conjunto de vértices de dicha gráfica es V y uv es una flecha en D_i si y sólo si la persona i prefiere estrictamente v a u . Para facilitar la exposición eliminaremos la posibilidad de que un sujeto sea indiferente a dos opciones distintas en V . Es importante distinguir dos tipos de digráficas que se presentan en estos modelos. Si en una digráfica D sucede que siempre que uv es una de sus flechas, entonces vu también lo es, se dice que D es una digráfica SIMÉTRICA. Por otra parte, si para toda flecha uv en D , vu no lo es, se trata de una digráfica ASIMÉTRICA. La gráfica b de la figura 14 es simétrica y la c asimétrica. Esta última cumple con una

característica más: para cualesquiera u y v elemento de su conjunto de vértices ocurre al menos una de las dos siguientes posibilidades: uv es una flecha de la digráfica o bien, vu lo es. Las digráficas que satisfacen esta propiedad se llaman COMPLETAS.

Las situaciones en las que no se presentan casos de indiferencia entre dos opciones distintas se denominan PREFERENCIAS ESTRICTAS y las digráficas que las representan son completas y asimétricas; a ellas se les conoce en general como TORNEOS. Además, si un torneo cumple con que siempre que uv y vw son elemento de su conjunto de flechas también uw lo es, el torneo se llama TRANSITIVO.

Si una preferencia estricta define un torneo transitivo (al que también se le llama ORDEN LINEAL), definimos el PERFIL DE PREFERENCIAS DEL GRUPO como el vector (F_1, F_2, \dots, F_n) , donde F_i es el conjunto de flechas de D_i . Para quienes realizarán este tipo de estudios, el problema de las decisiones colectivas radica en encontrar una gráfica que refleje una preferencia que sea un consenso entre todos los individuos del grupo. Para ello se define la siguiente función:

DEFINICIÓN 10.2: Una FUNCIÓN DE BIENESTAR SOCIAL (6

FUNCIÓN DE TOMA DE DECISIONES COLECTIVAS) es una regla Ψ que a cada perfil de preferencias $P = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ en un conjunto V le asigna una digráfica $\Psi(P)$ cuyo conjunto de vértices es V y donde se dibuja una flecha de u a v en $\Psi(P)$, (esto es, el grupo prefiere a u sobre v), si y sólo si una mayoría de individuos en el grupo prefiere u a v . (Es decir, el número de D_i en donde se incluye a la flecha uv es mayor que la mitad del total de individuos).

Esta definición plantea un problema, ya que la regla de la mayoría simple no siempre define un torneo. (Por ejemplo, en casos en donde el número de votantes lo par). En otras ocasiones se obtiene un torneo pero que no es transitivo. Para ejemplificar esto, la figura 16 muestra tres torneos y la figura 17, la que se origina a partir de ellos al aplicar la regla de mayoría simple.

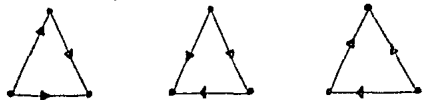


Figura 16

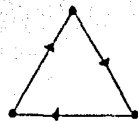


Figura 17

Esto obliga a definir las funciones de bienestar social axiomáticamente. Arrow estableció los siguientes tres axiomas hacia 1963 [4]

- AXIOMA 1: Si $P = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ y si $xy \in F_i$ para toda $i = 1, \dots, n$, entonces xy es una flecha de $\Psi(P)$.
- AXIOMA 2: Este axioma compara dos perfiles P y Q del mismo conjunto V y establece que si algún individuo i prefiere y a x en Q y el perfil P se obtiene a partir de Q invirtiendo la preferencia entre x y y y dejando el resto igual, y si además la preferencia del grupo no colocó a y por encima de x en Q , entonces x debe preferirse a y en P .
- AXIOMA 3: Si todos los individuos de un grupo están de acuerdo en sus preferencias de x respecto a u , también deben coincidir en su colocación de y respecto a x .

Además, definió su concepto de dictador en los términos siguientes:

DEFINICIÓN 10.3: Un individuo i es un DICTADOR sobre la PAREJA (x, y) si siempre que $P \succsim F_i$, F_2, \dots, F_n es un perfil de preferencias y xy está en F_i , entonces, xy es una flecha de $\Psi(P)$. Se dice que i es un DICTADOR si es un dictador sobre todas las parejas (x, y) de V

También en 1963, Arrow obtuvo el siguiente teorema conocido como **TEOREMA de IMPOSIBILIDAD de ARROW**.

TEOREMA 10.4: Supongamos que existen al menos tres opciones en V y por lo menos dos individuos en I . Supongamos también que Ψ es cualquier función de bienestar social en el conjunto de todos los perfiles de preferencias de los torneos transitivos de V que se derivan de los sujetos en I y que $\Psi(P)$ es un torneo transitivo donde Ψ satisface los axiomas 1, 2 y 3. Entonces, debe haber un dictador.

Este teorema se llama de "imposibilidad" porque

si se agrega un cuarto axioma exigiendo que no haya dictadores, entonces no existe ninguna función de bienestar social que los satisfaga.

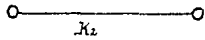
TEORÍA DE GRÁFICAS Y ANTROPOLOGÍA

Hage y Harary han sostenido que para todo concepto básico de la teoría de gráficas existe un fenómeno antropológico real que puede modelarse gráficamente por medio de aquel. [16]. Afirmar también que lo mismo es válido para la química y otros campos ya que, en su opinión "la teoría de gráficas es el modelo universal de estructura". Para ilustrar su aseveración, ofrecen cuatro ejemplos que a continuación resumimos.

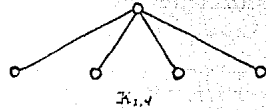
1: GRÁFICAS BIPARTITAS Y ORGANIZACIÓN DUAL

Una forma de organización social muy extendida en la Melanesia es la llamada organización dual, en la cual cada tribu o sociedad se divide en dos partes ajenas para fines de festividades, iniciaciones y matrimonios. A veces, la división dual es una bipartición de un número de clanes o grupos en la que los dos partes, a pesar de no ser reconocidas formalmente

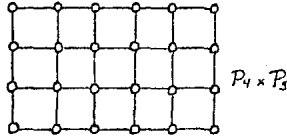
por los nativos, determinan la estructura de los intercambios (Fig. 1B)



K_2 representa una sociedad consistente en dos partes exógamas en Lesu, Nueva Irlanda.



Representación de una sociedad formada por cinco clanes exógamos en Tanja.



Sociedad conformada por veinte linajes exógamos en Etoro, Nueva Guinea.

Figura 1B

2: LAS RUTAS MARÍTIMAS, LA DISTANCIA Y EL CENTRO DE UNA GRÁFICA

La sobrevivencia en las Islas Carolinas en la Micronesia depende en gran medida de la participación en la red marítima de intercambio comercial. Se viaja de isla en isla, navegando por rutas que unen a cada par de islas. Las islas de mayor importancia económica son las centrales, en el sentido que se asigna a esta palabra en gráficas; es decir, midiendo la distancia entre dos

islas por el número de vías marítimas que las separan. Las vías poderosas políticamente son aquellas que son adyacentes (es decir, que están conectadas por una ruta de navegación) a todos las demás.

3: EL ANILLO KULLA Y LOS CICLOS DIRIGIDOS EN UNA GRÁFICA.

En Melanesia se presenta un tipo de intercambio conocido como KULLA. Consiste en un anillo de veinte comunidades isleñas cuyos miembros intercambian anualmente dos tipos de pertenencias: escudos y collares. Estos circulan en el sentido de las manecillas del reloj y en el sentido inverso a ellas respectivamente. Un escudo puede ser cambiado sólo por un collar y viceversa, los cuales no pueden retenerse permanentemente, pero la posesión temporal de los mismos proporciona gran prestigio y también posibilidades potenciales de enriquecimiento cuando, en ocasiones, se integran otro tipo de bienes al intercambio. El flujo de los objetos puede representarse a través de una gráfica.

4: GRÁFICAS Y PARENTESCOS.

La unidad fundamental de los parentescos en varias comunidades es un pequeño grupo que consta de

un esposo, una esposa, su descendencia y un representante de la tribu que debe haber entregado a la mujer a su esposo y que en general, es su hermano



Figura 19

La figura anterior muestra la estructura de ese núcleo social. El signo = significa "matrimonio"; la línea vertical, "descendencia"; y la horizontal, "hermandad" o "consanguinidad". Los triángulos, que representan al género masculino, y los círculos al femenino, se sustituyen por unos y ceros respectivamente.

Esta forma de expresar los parentescos resulta cómoda y económica y permite estudiar las relaciones entre miembros del mismo sexo y de sexos opuestos con más facilidad.

Un ejercicio interesante para el lector sería criticar las ideas expuestas hasta aquí.

UNA APLICACIÓN DENTRO DE LAS MATEMÁTICAS

REDUCCIÓN DEL ANCHO DE BANDA DE UNA MATRIZ SIMÉTRICA

Una matriz con un porcentaje pequeño de elementos distintos de cero es conocida como MATRIZ RALA. El problema que nos ocupa está relacionado con la forma de encontrar por computadora la solución de un sistema de ecuaciones lineales $Ax=b$, donde A es una matriz simétrica y rala. Se puede elegir un buen esquema para almacenar la matriz en la máquina en el cual se guarde la menor cantidad posible de elementos iguales a cero, con lo que se reduce el espacio utilizado en la memoria. El tiempo de procesador también se minimiza si se evitan, en la medida de lo posible, las operaciones triviales. En este contexto el concepto de ANCHO DE BANDA $\beta(A)$ de una matriz $A=(a_{ij})$ es de gran importancia. Este se define como el máximo del conjunto $\{|i-j|: a_{ij} \neq 0\}$. Reducir el ancho de banda de una matriz es un problema importante que ha merecido gran atención en los últimos años ya que está relacio-

nado con el de disminuir hasta donde sea posible el tiempo de procesamiento y el espacio en la memoria, así como con la solución del sistema $Ax=b$. Cabe aclarar que en muchas ocasiones es difícil optimizar estos tres parámetros a la vez.

Existe una correspondencia entre matrices de orden n y gráficas con n vértices, lo que permite expresar adecuadamente algunos algoritmos para reordenar los renglones y columnas de una matriz simétrica y rala. A una matriz A de este tipo se le asocia una gráfica G^A de n vértices, numerados del 1 al n , donde dos de ellos, U_i y U_j , son adyacentes si y sólo si $i \neq j$ y $A_{ij} \neq 0$. La figura 20 ilustra lo anterior:

$$A = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & & & \\ x & & x & & x \\ x & & & x & x \\ x & & x & x & x \end{pmatrix}$$

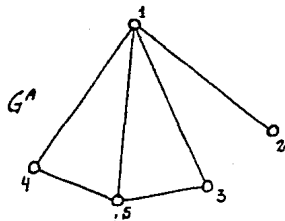


Figura 20

Desde luego, la forma de numerar los vértices de G^A no es única y hay $n!$ maneras de hacerlo.

Para una gráfica también es posible definir el ancho de banda y esto es lo que haremos a continuación.

Sea G una gráfica y f una numeración de sus vértices. El ANCHO DE BANDA RELATIVO a f , $\beta_f(G)$, se define como

$$\beta_f(G) = \max \{ |f(U_i) - f(U_j)| : U_i U_j \in A(G) \}$$

y el ANCHO DE BANDA de G , $\beta(G)$ como

$$\beta(G) = \min_{f \in N_G} \beta_f(G)$$

donde N_G denota al conjunto de todas las numeraciones de G .

Se dice que una numeración f^* es ÓPTIMA si

$$\beta_{f^*}(G) = \beta(G)$$

Si A es una matriz y G^A su gráfica asociada, entonces

$$\beta(A) = \beta(G^A)$$

donde I es la numeración de G^A dada por

$$I(U_i) = i \quad \text{con } i=1, 2, \dots, n$$

Sea A una matriz simétrica y G^A su gráfica asociada. Para cada numeración f de G^A , la matriz de permutaciones $P_f = (P_{ij})$ dada por

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } f(U_j) = i \\ 0 & \text{si } f(U_j) \neq i \end{cases}$$

es tal que $\beta(P_f A P_f^t) = \beta_f(G^A)$ puesto que por definición de P_f , la permutación de renglones y columnas de A es la misma permutación de los vértices de G^A definida por la numeración f . Así pues, si queremos encontrar una matriz P de permutaciones tal que

$$\beta(PAP^t) < \beta(A),$$

basta con encontrar una numeración f de G^A tal que $\beta_f(G^A) < \beta_x(G^A)$. Nos interesa entonces, encontrar alguna numeración en los vértices de una gráfica que reduzca su ancho de banda. A continuación describiremos un algoritmo para hacerlo, incluyendo un ejemplo en el que se muestra su funcionamiento. El algoritmo pertenece a Cuthill y Mc. Kee. Para ello, es importante introducir algunos conceptos:

Dado un vértice $v \in V(G)$, la ESTRUCTURA DE NIVEL CIMENTADA EN EL VÉRTICE v , es una partición de $V(G)$ $N(v) = \{N_0(v), N_1(v), \dots, N_{e(v)}(v)\}$, en donde

$$N_0(v) = \{v\} \quad N_1(v) = \text{Ady}(N_0(v)) \quad \text{y}$$

$$N_i(v) = \text{Ady}(N_{i-1}(v)) - N_{i-2}(v) \quad \text{con } i=2,3,\dots,e(v)$$

y $\text{Ady}(N_i(v))$ representa al conjunto de vecinos del vértice v que ya hemos definido. El entero $e(v)$ es la PROFUNDIDAD de la estructura $N(v)$; $N_0(v), \dots, N_{e(v)}$

se conocen como NIVELES y al vértice v se le llama RAÍZ. También es importante distinguir al número de elementos del nivel $N_i(v)$. Este se denota por $a_i(N)$ y se denomina ANCHURA del nivel i . Para una estructura de nivel N dada con raíz v se define como ANCHO de la misma al número

$$a(N) = \max \{a_i : i=1, \dots, e(v)\}$$

ALGORITMO PARA REDUCIR EL ANCHO DE BANDA DE UNA GRÁFICA.

- 1: Encontrar el grado mayor entre todos los vértices de la gráfica, el grado menor y el grado promedio = $[\text{grado mayor} + \text{grado menor}] / 2$.
- 2: Comparar el grado menor y el grado promedio y tomar el mayor de ellos.
- 3: Generar la estructura de nivel cimentada en cada uno de los vértices que tenga grado menor o igual que el valor encontrado en el paso 2.
- 4: Para cada estructura de nivel generada en 3 reenumerar los vértices del siguiente modo:
 - a) Asignar el número 1 a la raíz de la estructura.
 - b) En el nivel siguiente, etiquetar consecutivamente a los vértices, siguiendo el orden creciente de sus grados.

Al terminar, pasar al próximo nivel y repetir el paso 4b siempre que sea posible.

6. Seleccionar el menor de los valores encontrados en el paso 5.

UN EJEMPLO DEL FUNCIONAMIENTO DEL ALGORITMO.

Sea A una matriz simétrica de orden 8 (Fig. 21)

$$A = \begin{pmatrix} x & x & x & \cdot & \cdot & x & x & x \\ x & x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x & x \\ x & \cdot & x & \cdot & \cdot & x & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & x & \cdot & x & \cdot & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x & \cdot & x & \cdot \\ x & \cdot & x & x & \cdot & x & \cdot & x \\ x & x & \cdot & \cdot & x & \cdot & x & \cdot \\ x & x & \cdot & x & \cdot & x & \cdot & x \end{pmatrix}$$

Figura 21

y sea G^A la gráfica asociada A (Fig. 22)

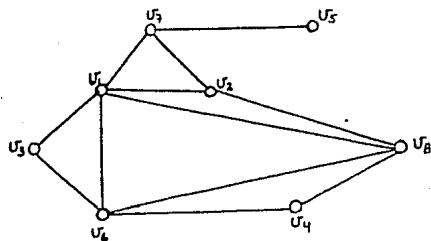


Figura 22

El grado mayor es 5, el menor 1 y el promedio 3. Los vértices de grado menor o igual que 3 son u_5, u_4 y u_3 . Las siguientes figuras muestran las estructuras de nivel respectivas y las reenumeraciones correspondientes dadas por las u_i .

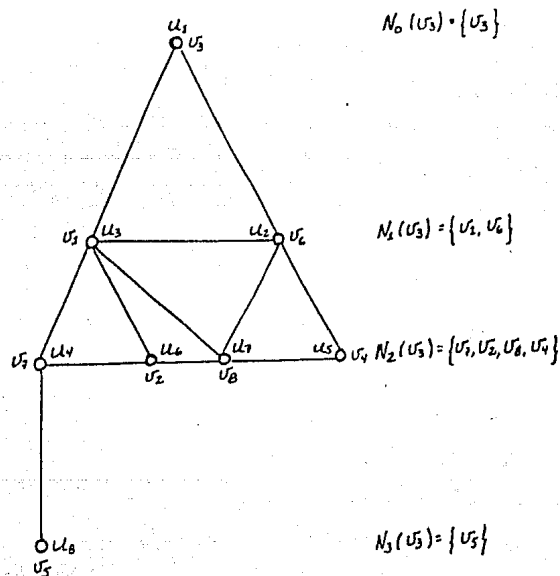


Figura 23

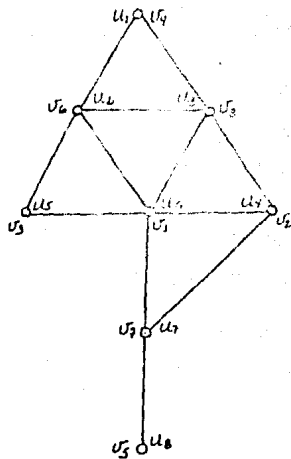


Figura 24

$$N_0(u_1) = \{u_2\}$$

$$N_1(u_1) = \{u_3, u_4\}$$

$$N_2(u_1) = \{u_5, u_6, u_7\}$$

$$N_3(u_1) = \{u_8\}$$

$$N_4(u_1) = \{u_8\}$$

$$N_0(u_2) = \{u_3\}$$

$$N_1(u_2) = \{u_4\}$$

$$N_2(u_2) = \{u_1, u_5\}$$

$$N_3(u_2) = \{u_6, u_7, u_8\}$$

$$N_4(u_2) = \{u_4\}$$

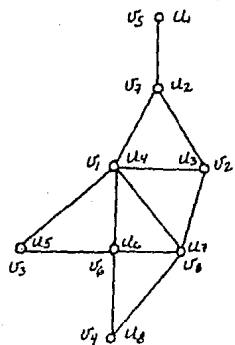


Figura 25

Los anchos de banda que se obtienen con estas reenumeraciones son los siguientes:

$$\beta_f(G) = \max \{ |Z(u_i) - Z(u_j)| : \{u_i, u_j\} \in A(G) \}$$

si la raíz es u_3 , $\beta_f(G) = 5$

si la raíz es u_4 , $\beta_f(G) = 4$

si la raíz es u_5 , $\beta_f(G) = 3$

Esto nos conduce a elegir la numeración que surge al seleccionar a u_5 como raíz. La figura 26 muestra la matriz asociada a esa gráfica, cuyo ancho de banda es 3, en contraste con el de la original, que es 7.

$$\begin{pmatrix} x & x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & x & x & x & \cdot & x & \cdot & \cdot \\ \cdot & x & x & x & x & x & x & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & x & x & \cdot & x & \cdot \\ \cdot & \cdot & x & x & \cdot & x & x & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & x & x & x & x & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x & x & x \end{pmatrix}$$

Figura 26

El lector interesado en este tema puede consultar [1, 29]

ESTE LIBRO NO DEBE SER DE LA BIBLIOTECA

EL JUEGO DE LOS COLORES^[31]

Hay diversas maneras de jugar para ganar dinero. Entre las más conocidas están las partidas de póker y las de dominó. Un juego no tan popular, pero que también puede ser redituable si se elige la estrategia adecuada es el de los colores, que describimos a continuación:

En una urna se colocan cien esferas de once colores distintos a los que denotaremos F_1, F_2, \dots, F_{11} . Denotemos a la frecuencia del color F_i por p_i . En general, las frecuencias que se utilizan en el juego son 30, 19, 11, 10, 9, 6, 5, 4, 3, 2 y 1. La partida tiene lugar entre dos jugadores. El primero de ellos extrae al azar una esfera sin permitir que el segundo vea su color. Este intentará descubrirlo a través de formular una serie de preguntas a las que el primer jugador deberá responder "sí" o "no" y por supuesto, no está permitido engañar. Una primera pregunta podría ser, por ejemplo: "¿la esfera es de color F_3, F_4 ó F_9 ?" La respuesta sería "sí" si la esfera fuera de cualquiera de esos tres colores y "no" en caso contrario. El pago del dinero es como sigue:

1) por cada pregunta formulada, el segundo jugador

deberá pagar \$100 al primero.

2) al descubrir el color de la esfera, el segundo jugador recibirá \$300 del primero.

¿Existe una estrategia que permita al segundo jugador ganar si se repite el juego un número suficiente de veces?

La pregunta anterior se relaciona estrechamente con una problemática más general, que es la naturaleza de los cuestionarios, sobre la cual hablaremos un poco a continuación.

Consideremos los siguientes conjuntos:

$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ un conjunto de n eventos.

(En el juego de los colores $n=11$ y el evento y_i corresponde a la extracción de una esfera de color F_i , lo cual tiene una probabilidad $p(y_i)$ de ocurrir). De este modo:

$$0 < p(y_i) < 1 \quad \sum_{i=1}^n p(y_i) = 1 \quad n \geq 2$$

Establezcamos además un conjunto finito de preguntas posibles al que llamaremos X

$$X = \{x_0, \dots, x_m\} \quad Y \cap X = \emptyset$$

Nuestra intención ahora es representar un posible

cuestionario y las posibilidades de llegar a conocer el color de la esfera extraída por medio de una gráfica. Dado que nos interesa establecer un modelo adecuado que permita distinguir el orden cronológico en el que tengan lugar las preguntas y los aciertos, construiremos una digráfica, ya que, como sabemos, sus aristas tienen dirección. Llamemos $F(V, A)$ a esta gráfica en donde el conjunto de vértices V tiene tantos elementos como $|X \cup Y|$ de tal manera que podemos asignar un vértice a cada elemento de $X \cup Y$. A los vértices que corresponden a elementos de Y se les denomina VERTÉDEDES de la gráfica. A la primera pregunta le hacemos corresponder el vértice x_0 y lo llamaremos la FUENTE. También queremos reflejar el hecho de que a una pregunta puede sucederle otra, o bien, el descubrimiento del color de la esfera; pero a un acierto no puede seguirle otro inmediatamente. Es decir, el conjunto de flechas de F debe ser un subconjunto de $(X \times X) \cup (X \times Y)$ de modo que solamente existan flechas del estilo (x_i, x_j) y (x_k, y_ℓ) .

Denotemos ahora por $\Gamma(x)$ al conjunto de sucesores inmediatos de un vértice x y por $\Gamma^{-1}(x)$ al conjunto de sus predecesores inmediatos. En la gráfica que estamos

construyendo deben cumplirse las siguientes relaciones:

a) $\Gamma^{-1}(x_0) = \emptyset$, con lo cual se establece que hay una primera pregunta.

b) $|\Gamma(x)| \geq 2$ para toda $x \in X$, lo que permite que haya al menos dos respuestas distintas para cada pregunta, una de las cuales puede originar la identificación de un evento, de modo que $\Gamma(x) \cap Y \neq \emptyset$, o la formulación de una nueva pregunta de forma que $\Gamma(x) \cap X \neq \emptyset$.

c) $\Gamma(y) = \emptyset$ para toda $y \in Y$. Esta característica queda determinada en realidad al definir A e indica que una vez que se ha identificado un evento (el color de la esfera en nuestro juego) no se realiza ninguna pregunta más.

d) Para toda $y_i \in Y$ existe una trayectoria $(x_0 = x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, y_i)$ con $x_{i_j} \in X$ y $(x_{i_r}, x_{i_{r+1}}) \in A(F)$ para $r = 0, 1, \dots, k-1$ y $(x_{i_k}, y_i) \in A$. Es decir, que el conjunto de preguntas disponibles de i es de tal naturaleza que cualquiera de los eventos puede ser identificado por medio de un

número finito de preguntas.

Este tipo de gráfica es útil para estudiar el juego que hemos descrito, el cual es sólo un ejemplo entre otros muchos, que obedecen a situaciones y objetivos similares, sin ser juegos necesariamente. Cualquier gráfica que cumpla con las condiciones que hemos señalado es conocida con el nombre de CUESTIONARIO: la figura 27 muestra un ejemplo de este tipo de gráficas

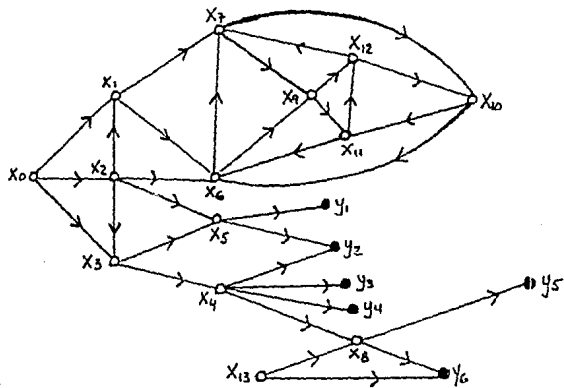


Figura 27

En esta gráfica no se han indicado las probabilidades de la ocurrencia del evento y_i , pero puede apreciarse que para ahorrar preguntas (y dinero en el

juego de los colores), no debe hacerse la pregunta x_0 , puesto que todos los eventos accesibles por x_2 , lo son también por x_3 . Puede entonces iniciarse en x_3 y ahorrar así la pregunta x_0 . En general, las preguntas que no tienen un evento como sucesor mediano o inmediato, así como las que no pueden realizarse después de una secuencia infinita de preguntas que se inicien en x_0 , son irrelevantes y por lo tanto, es posible hacer reducciones a este tipo de gráficas sin ninguna limitante. La figura 28 muestra una reducción de la gráfica de la figura 27.

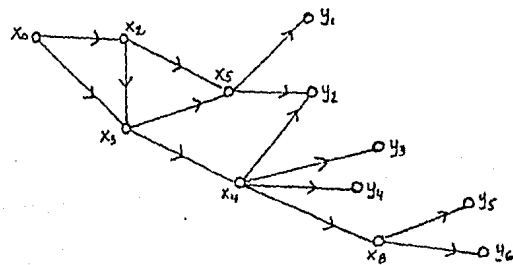


Figura 28.

El siguiente paso consiste en definir lo que debe ser un CUESTIONARIO ÓPTIMO. Al igual que en el juego de los colores, el objetivo es minimizar el número

promedio de preguntas necesarias para identificar un evento (el color de la esfera extraída, en nuestro caso). Desde luego, no conviene identificar un buen número de eventos haciendo muy pocas preguntas si por otro lado es necesario realizar muchas para determinar los eventos de muy baja probabilidad (Fig. 29)

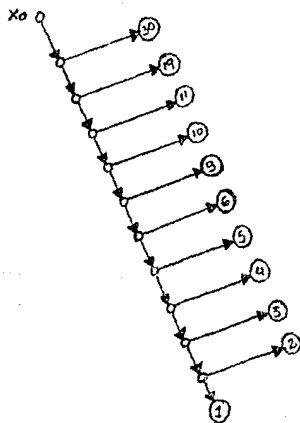


Figura 29

En este punto debemos detenernos para definir algunos conceptos necesarios para resolver el problema de encontrar una estrategia óptima en el interrogatorio.

DEFINICIÓN 10.5: Se dice que un cuestionario es HOMOGENEO de ORDEN a si para todo vértice $x \in X$ se cumple que $|P(x)| = a$

no veremos más adelante, los cuestionarios llamados CASI-HOMOGENEOS también son de gran importancia.

DEFINICIÓN 10.6: Un cuestionario es CASI HOMOGENEO de ORDEN (a, b) si para toda $x \in X - \{x_i\}$ se cumple que $|P(x)| = a$ y $|P(x_i)| = b(a)$.

También debemos definir la clase de cuestionarios que queremos considerar para poder hablar de cuestionarios óptimos. Dos cuestionarios F y F' casi homogéneos de orden (a, b) son EQUIVALENTES si existe φ una función inyectiva del conjunto \mathcal{Y} de verdaderos de F al conjunto \mathcal{Y}' de verdaderos de F' que preserva la distribución de probabilidades, es decir

$$p(y) = p(\varphi(y)) \text{ para todo } y \in \mathcal{Y}$$

Ahora estableceremos el concepto de LONGITUD PROMEDIO de un cuestionario, el cual no plantea ninguna dificultad si la gráfica considerada es un árbol enraizado en x_0 . En tal caso, dado que no existen

ciclos en el cuestionario, para cada evento $y \in Y$ existe exactamente una trayectoria dirigida de x_0 a y . El número de aristas de dicha trayectoria es conocido como LONGITUD $l(y)$ del evento y . Por LONGITUD PROMEDIO del cuestionario $F(V, A)$ se entiende el valor

$$L(F) = \sum_{y \in Y} p(y) l(y)$$

Intuitivamente y según lo anterior, podríamos sentirnos inclinados a definir un cuestionario casi homogéneo óptimo como aquel que tuviera una longitud promedio mínima respecto a todos los cuestionarios equivalentes a él. Sin embargo, una clase de cuestionarios equivalentes también contiene cuestionarios con ciclos o circuitos (Fig. 30)

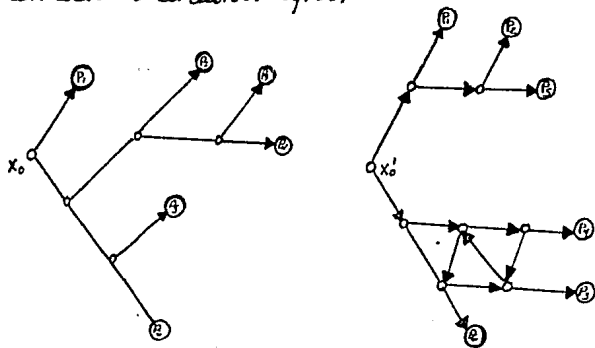


Figura 30

En los cuestionarios F y F' de la figura 30 puede observarse que cualquier trayectoria que una a x_0 con y en F' ($y \in Y'$, $y' = \psi(y)$, $y \in Y$) tiene longitud igual o mayor que la trayectoria que une a x_0 con y en F . Por lo anterior, se prefiere el cuestionario F al F' . Se pretende entonces generar cuestionarios F sin ciclos a partir de un cuestionario F' que si los contenga, de forma tal que la longitud de x_0 a y sea menor o igual que la de cualquier trayectoria de x_0 a y en F' para toda $y \in Y$. De este modo, se restringen las clases de equivalencia de manera que estas sólo contengan CUESTIONARIOS ARBORESCENTES, es decir, aquellos que son árboles enraizados, y entre ellos se busca uno de longitud mínima. En general, éste no es único. Es natural preguntarse si efectivamente puede generarse siempre un cuestionario arborescente a partir de uno que no lo sea. La respuesta es afirmativa y existe un algoritmo para tal fin.

ALGORITMO PARA GENERAR UN CUESTIONARIO SIN CICLOS.

1) Sea K' un circuito en F' . Como $IP''(x_0) = 0$, $x_0 \notin K'$. Sea W' una trayectoria de x_0 a z' , $z' \in V(K')$, tal que la longitud de ésta es mínima. La flecha de K' cuyo extremo

final es x' puede eliminarse sin causar ninguna alteración en la distancia entre cualquier vértice v' y x_0' en F' . Este paso hace que X' desaparezca. (Consideraremos como un circuito a todo ciclo dirigido en F') (Fig. 31)

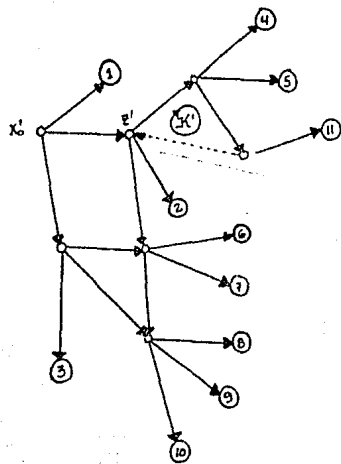


Figura 31

2) Elimínense todos los circuitos de F' de acuerdo al procedimiento del paso 1. Consideremos a C' un ciclo en la gráfica que resulte de esto, a la que por sim-

plicidad seguiremos llamando F' . Como C' no es un circuito, $|F'(x')| \geq 2$ para algún vértice x' en C' , de donde puede afirmarse que existen al menos dos trayectorias distintas (es decir, que contienen al menos un vértice diferente) de x_0' a x' . Omítase la última flecha de la más larga de ellas (si son de igual longitud puede borrarse la última flecha de cualquiera de las dos). Después de esta operación, sigue existiendo al menos una x_0' -trayectoria dirigida para todo $v' \in V(F')$, y la longitud de cualquiera que sea mínima no habrá aumentado. Si se eliminan todos los ciclos de este modo, la gráfica resultante será un árbol con fuente en x_0' , pero no necesariamente será equivalente a F' , ya que podría suceder que para algunas preguntas $|F'(x_i)| < a$ (Fig. 32)

3) Sea $x' \in X$ un vértice de la gráfica generada (a la que continuaremos llamando F') que no tenga sucesores. Como no puede accederse a ningún evento $y_i \in Y$ via x' , podemos omitir ese vértice y también a la flecha que llega a él, la cual es única y... que F' no contiene ciclos. Se repite este paso siempre que sea posible (Fig. 34)

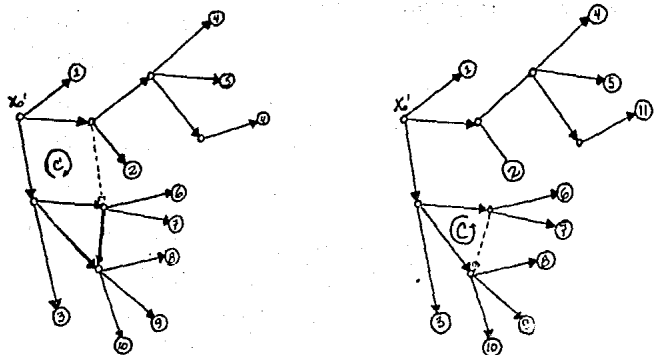


Figura 32

4) Consideremos a $x' \in X'$ un vértice con menos de a sucesores ($|\Pi(x')| < a$) y a $x'_i \in X'$ una pregunta que tenga algún evento $y_i \in Y'$ como sucesor. Si $l(x'_i) > l(x')$, entonces debe eliminarse la flecha $x'_i y_i$ y añadir la flecha $x' y_i$ (Fig. 33). De este modo se obliga a todas las preguntas a tener a sucesores, a excepción tal vez, de algunas cuya distancia a x_0' sea máxima. Después de este proceso, no se accede a ningún vértice a través de trayectorias de longitud mayor a la que se tenía anteriormente. En algunos casos, como en el de nuestro ejemplo, es posible aplicar el paso 3 al fina-

lizar el 4. De ser así, se regresa a él (Fig. 34); de lo contrario, el algoritmo continúa.

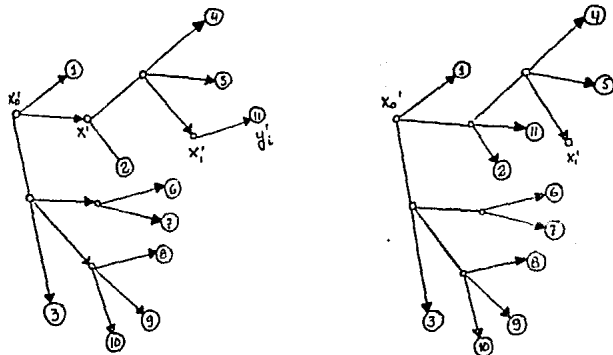


Figura 33

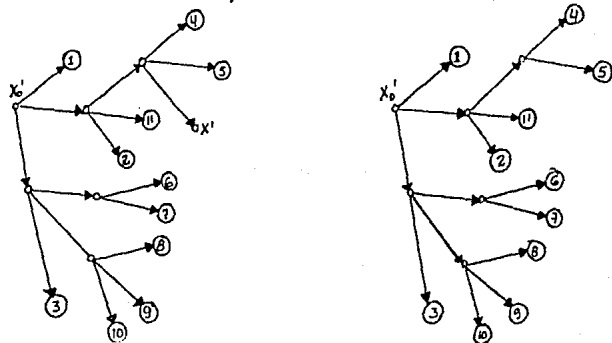


Figura 34

5) Las preguntas con menos de a sucesores se completan (mientras éstas existan, todas ellas estarán a la misma distancia de x_0). Si se sigue aplicando el paso 3 siempre que sea posible quedará, a lo más, una pregunta x_n tal que $|\Gamma(x_n)| < a$. En tal caso, $l(x_n)$ es máxima (Fig. 35)

Como el cuestionario es finito, en algún momento no pueden aplicarse ni el paso 3, ni el 4 o el 5.

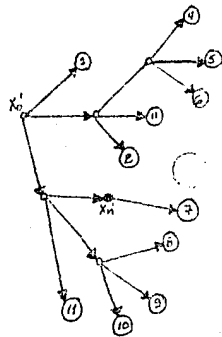


Figura 35

6) Si x_n tiene exactamente un sucesor y' e y , entonces, si x_i es el predecesor inmediato de x_n , se eliminan las flechas $x_i x_n$ y $x_n y'$, así como la pregunta x_n . Se añade la flecha $x_i y'$ (Fig. 36)

Si puede aplicarse el paso 6, entonces, la gráfica generada por el algoritmo es un cuestionario homogéneo de orden a . En otro caso, se trata de uno casi homogéneo de orden (a, b) (Fig. 36)

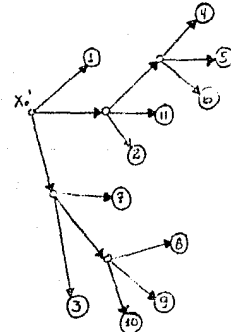


Figura 36

CUESTIONARIOS ÓPTIMOS

Habiendo encontrado un cuestionario sin ciclos, nos resta ahora hacer uno que sea óptimo, es decir, uno cuya longitud sea mínima.

Recuerde que en un cuestionario cada evento tiene asignada una probabilidad. En uno arborescente podemos también asignar recursivamente una proba-

bilidad a cada pregunta. Sea x una pregunta tal que todos sus sucesores inmediatos tengan ya una probabilidad asignada. Se asigna a x la suma de las probabilidades de sus sucesores inmediatos como probabilidad.

DEFINICIÓN 10.7: Dado un cuestionario arborescente F , una **SUBARBORESCENCIA** H de F es una subgráfica de F que contiene a uno de sus vértices junto con todos sus sucesores respecto a F y a un vértice más (al que llamaremos raíz de la subarborescencia), tal que todos los vértices de H , a excepción de él mismo, son sus sucesores mediatos o inmediatos. (Fig. 37)

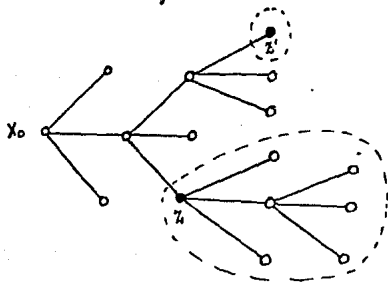


Figura 37

Las probabilidades tanto de las preguntas como de los eventos son las mismas en H que en F , pero en general, una subarborescencia no es siempre un cuestionario.

Sean Z y Z' las raíces de dos subarborescencias ajenas H y H' respectivamente con probabilidades $p(Z)$ y $p(Z')$. Si se cambia H por H' incluyendo las probabilidades de los vértices predecesores de Z y Z' se genera un cuestionario arborescente equivalente a F (Fig. 38)

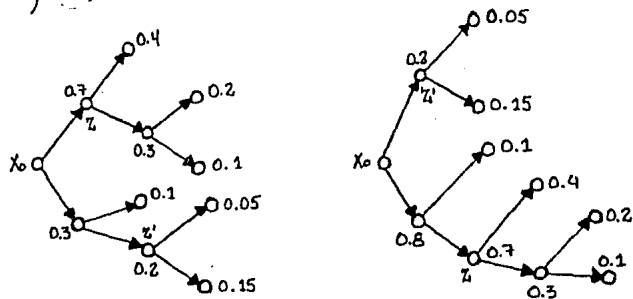


Figura 38

A continuación se proporciona un algoritmo cuya aplicación permite construir un cuestionario arborescente a partir de otro de manera que su longitud promedio sea igual o menor que la del original.

PASO 1: PERMUTACIÓN DE EVENTOS

Sean x y x' eventos tales que $l(x) < l(x')$ y $p(x) < p(x')$; entonces, los eventos x y x' deben intercambiarse. El cuestionario así obtenido tiene longitud promedio menor a la del original.

PASO 2: PERMUTACIÓN DE SUBARBORESCENCIAS.

Sean H y H' dos subarborescencias ajenas con raíces x y x' respectivamente, en donde una de estas tiene al menos un evento. Si $l(x) < l(x')$ y $p(x) < p(x')$, entonces, el intercambio de las arborescencias produce un cuestionario de menor longitud.

Podría pensarse que aplicando repetidamente los pasos 1 y 2 se obtiene siempre un cuestionario óptimo. La siguiente figura muestra que esto no es siempre así:

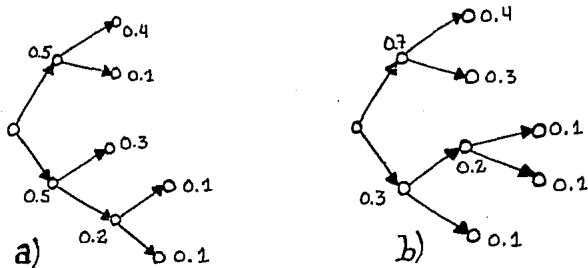


Figura 39

Existe un tercer paso, pero para aplicarlo es necesario definir una especie de "codificación" de las preguntas y los eventos de un cuestionario casi homogéneo. A cada vértice x de la gráfica se le asignan dos números naturales r y s del siguiente modo:

- 1) s es la distancia de x_0 a x
- 2) r consta de s cifras en el sistema de numeración en base a que se fijan como sigue: Consideremos la trayectoria W que va de x_0 a x . Sea $\Gamma(x_0) = \{g_i(x_0), i=0, 1, \dots, a-1\}$. Si el sucesor inmediato de x_0 en W es $g_i(x_0)$ se fija i como la primera cifra de r . El procedimiento continúa de manera análoga (fig. 40)

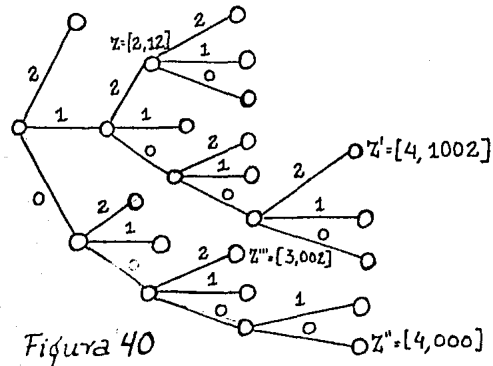


Figura 40

El tercer paso del que hemos hablado altera las probabilidades de algunos vértices que no son eventos, sin modificar la longitud promedio y esto permite aplicar nuevamente los pasos 1 o 2 en algunos casos.

PASO 3: Se reorganizan los vértices de manera que para cualesquiera dos vértices $\alpha_i = [s_i, r_i]$ y $\alpha_j = [s_j, r_j]$ con $r_i < r_j$ siempre se cumpla que $p(\alpha_i) \leq p(\alpha_j)$. Si es posible, a continuación se aplica el paso 1 o el 2.

Aplicando el paso 3 a la gráfica \bar{A} de la figura 39 se obtiene el cuestionario \bar{B} de la misma figura, al cual puede aplicarse el paso 2.

En conclusión, puede buscarse un cuestionario arborescente de la clase de equivalencia del original y después aplicar los tres pasos hasta que el algoritmo termine; o bien, combinar los b eventos de menor probabilidad en una pregunta, transformar esta "temporalmente" en un nuevo evento y después combinar los eventos restantes de menor probabilidad en una nueva pregunta y transformarla "temporalmente" en un nuevo evento, etcétera. Para el juego de

los colores se obtiene una estrategia de interrogación óptima de acuerdo a la figura 41.

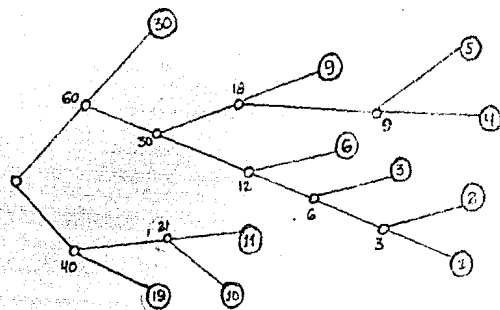


Figura 41

En la figura 40, los eventos se indican por medio de círculos más grandes que los que corresponden a las preguntas y en ellos se ha inscrito su probabilidad.

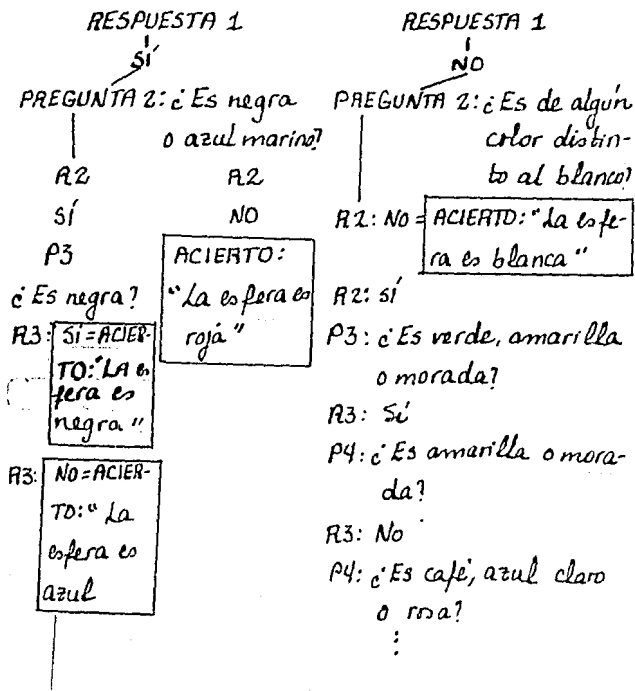
Supongamos que la distribución de los colores es la siguiente

30	blancas	10	azul marino	5	amarillas
19	rojas	9	verdes	4	moradas
11	negras	6	anaranjadas	3	café

2 azul claro 1 rosa

El interrogatorio representado en la figura 4b iniciaría del siguiente modo:

PREGUNTA 1: ¿La esfera es roja, negra o azul marino?



BIBLIOGRAFIA

- 1: Abrin, Virginia, Algoritmos para reordenar matrices raras, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, UNAM,
- 2: Alfors, Lars, Complex Analysis, Mc Graw Hill, Tokio, 1979.
- 3: Appel, Kenneth y Wolfgang Haken, "The Solution of the Four-Color-Map Problem" en Scientific American, vol. 237, num. 4, octubre 1977, pp. 108-121
- 4: Arrow, K. "Social Choice and Individual Values," en Countless Commission Monograph 12, 2ª ed., John Wiley and Sons, Nueva York, 1965.
- 5: Balaban, A.T. (ed.) Chemical Applications of Graph Theory, Academic Press, Londres, 1976.
- 6: Behzad M. Mohdi; Gary Chartrand y Linda L. Foster, Graphs and Digraphs, Prindle, Weber and

Schmidt International Series, Massachusetts, 1979.

- 7: Bondy, J.A. y U.S.R. Murty, Graph Theory with Applications, Macmillan Press Ltd., Londres, 1976.
- 8: Bonham, H. y M. Shapiro, "Explanation of the Unexpected: The Syrian Intervention in Jordan in 1970" in The Structure of Decision (ed. R.H. Axelrod), Princeton University Press, Princeton, Nueva Jersey, 1976, pp. 113-141.
- 9: Cliff, Andrew; Peter Haggett y Keith Ord, "Graph Theory and Geography" in Applications of Graph Theory (ed. Wilson), Academic Press, Londres, 1979, pp. 293-325.
- 10: Couper, A.S. "Sur une nouvelle théorie chimique," Ann. Chim. Phys. 53, 1858, pp. 469-485.
- 11: Chartrand, Gary y Mehdi Behzad,

- 12: Christofides, Nicos, Graph Theory: An Algorithmic Approach, Academic Press, Nueva York, 1975.
- 13: Du rot, Oswald y Tereita Todorov, Diccionario enciclopédico de las ciencias del lenguaje, Siglo XXI, México, 1984.
- 14: Gardner, Martin, Festival mágico-matemático, Alianza Editorial, Madrid, 1986.
- 15: Greene, Judith, Psycholinguistics, Penguin Books, Suffolk, 1979. (Español traducido al español por Federico Patán, Ed. Trilium, México 1980)
- 16: Hage, P. y F. Harary, "Some Genuine Graph Models" en Journal of Graph Theory, vol. 1, núm. 3, 1986, pp. 353-361.
- 17: Harary, F. "On the notion of balance of a signed graph," Michigan Math. J. 2, (MR 16# 733), 1954, pp. 143-146.
- 18: Hart, J. "Symmetry and Polarization in the European International System, 1870-79: A Methodolo-

- gical Study," J. Peace Res. 11, 1974, pp. 229-244.
- 19- Heider, F. "Attitudes and Cognitive Organization," J. Psychol. 21, 1946, pp. 107-112.
- 20- Hubbel, C. A. et al., "Structural balance in group networks" en Handbook of Social Science Methods (ed. B. Anderson y R. B. Smith), Irvington Publishers, Newsted Press, Nueva York, 1978.
- 21- Kempe, A. B., "On the geographical problem of the four colors" en American Journal of Mathematics, vol. 2, 1879, pp. 193-200.
- 22- Kirkby, M. J., "Tests of the random network model and its application to basin hydrology," en Earth Surface Processes I, 1976, pp. 197-212
- 23- Laurent, A., "Recherches sur les combinaisons azotées," Ann. Chim. Phys. 18, 1864, pp. 266-298.
- 24- Lyons, John. Chomsky, William Collins Sons and Co. Ltd., Glasgow, 1981.

- 25- Nebeshij, Ladislav, "Graph Theory and Linguistics" en Applications of Graph Theory (ed. Wilson), Academic Press, Londres, 1979, pp. 357-379.
- 26- Pólya, G., "Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen," Acta Math. 68, 1937, pp. 145-254.
- 27- Rivera, Eduardo, "Una nota sobre el problema de ancho de banda",
- 28- Roberts, Fred S. "Graph Theory and the Social Sciences" en Applications of Graph Theory (ed. Wilson), Academic Press, Londres, 1979, pp. 255-291.
- 29- Rowray, Dennis y Alexandru D. Balaban, "Chemical Applications of Graph Theory" en Applications of Graph Theory, (ed. Wilson), Academic Press, Londres, 1979, pp. 177-221

- 30: Strahler, A.N., "Quantitative geomorphology of drainage basins and channel networks" en Handbook of Applied Hydrology (ed. V.T. Chow), Mc Graw Hill, Nueva York, 1964, pp. 4.40- 4.74.
- 31: Walther, Hansjoachim, "Coding and Decision Graphs" en Ten Applications of Graph Theory (Walther), D. Reidel Publishing Company, , 1984. cap.7, pp 172-186.
- 32: Ten Applications of Graph Theory. D. Reidel Publishing Company, , 1984
- 33: Whyte, L., "Boskovich's Atomism" en Roger Joseph Boskovich (ed. L.L. Whyte), George Allen and Unwin, Londres, 1961, pp. 102-126.
- 34: Wilson, Robin J. y Lowell W. Beineke (ed.) Applications of Graph Theory. Academic Press, Londres, 1979.

INDICE

- ancho de banda, 273
- de una grafica, 273
 - de una matriz, 273
 - relativo, 273
- ancho de una estructura de nivel, 275
- anchura de un nivel, 275
- apareamiento, 182
- perfecto, 184
- árbol, 67
- enraizado, 236
 - generador, 77
- arista, 8
- adyacente, 9
 - de corte, 51
 - múltiple, 8
- hloque, 56
- bosque, 67
- camino, 17
- cerrado, 19
- cara, 151
- exterior, 152

centro, 84
 cerradura
 - de una gráfica, 210
 - de una región, 151
 ciclo, 20
 - hamiltoniano, 205
 circuito, 259
 clan, 129
 clase cromática, 116
 coloración, 113
 - de aristas, 181
 - buena, 114
 - k -coloración, 114
 - propia, 114
 - coloraciones que coinciden,
 complemento de una gráfica, 37
 componente, 31
 - conexa, 36
 - s -componente, 127
 conexidad, 31
 - lineal, 99
 - puntual, 90
 cubo

 - n cubo, 197
 cuestionario, 284
 - cuestionarios equivalentes, 2
 - casi homogéneo, 287
 - homogéneo de orden a , 287.
 curva de Jordan,
 diferencia simétrica, 189
 digráfica, 257
 - completa, 263
 - simétrica,
 distancia, 40
 estructura de nivel, 274
 extremo, 8
 frontera, 153
 factor,
 - k -factor, 196
 flecha, 257
 frontera, 153
 fuente, 282
 grado, 11
 - de una cara, 154
 - máxima, 26
 - mínimo, 26

- gráfica, 7
- aplanable, 142
- autodual, 159
- balanceada, 259
- bipartita, 24
- bipartita completa, 22
- completa, 22
- dual, 159
- euleriana, 199
- hamiltoniana, 205
- hipohamiltoniana, 223
- k -coloreable, 115
- k -conexa, 9
- k -conexa linealmente, 9
- k -crítica respecto al número cromático, 125
- k -factorizable, 196
- inducida, 35
- isomorfa, 17
- n -cromática, 116
- n -partita, 104
- plana, 141
- regular, 28
- señalizada, 258

- simple, 9
- trivial, 8
- lazo, 8
- línea, 7
- longitud
 - de un camino, 21
 - de un cuestionario, 288
 - de un evento, 288
 - promedio de un cuestionario, 288
- nivel, 275
- nodo, 7
- numeración óptima, 273
- número ciclomático, 232
- número cromático, 116
- paseo, 18
 - cerrado, 19
 - euleriano, 198
 - euleriano cerrado, 198
- profundidad
 - de una estructura de nivel cimentada, 274
- proyección estereográfica, 150
- raíz, 275
- rama, 7

- s-componentes, 128
- separador, 91
- subdivisión
 - de una arista, 165
 - de una gráfica, 165
- subgráfica, 10
- torneo, 263
- trayectoria, 19
 - M -alternada, 184
 - M -aumentante, 188
- unión de H ás, 136
- valencia, 11
- vecindad, 191
- verteadero, 282
- vértice, 7
 - vértices adyacentes, 9
 - vértices apareados, 183
 - de corte, 47
 - saturado, 183
 - terminal, 74