



295
Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

TRANSFORMACIONES
COMPLEJAS

T E S I S

Que para obtener el Título de:

M A T E M Á T I C O

P r e s e n t a:

JOSE MATIAS ALVARADO MENTADO

México. D. F.

1989

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Introducción

Capítulo I Transformaciones de Moebius

1. El grupo de Transformaciones de Moebius
2. Clasificación de las Transformaciones de Moebius

Capítulo II Geometrías

1. Lápices de círculos

- 1.1 Puntos simétricos y ortogonalidad
- 1.2 La transformación de simetría
- 1.3 Lápiz de círculos
- 1.4 Lápices conjugados
- 1.5 Transformaciones de Moebius generadas por dos reflexiones
- 1.6 Representación de una Transformación de Moebius como composición de inversiones en círculos de un lápiz.

2. Haces de Círculos y Subgrupos de Transformaciones

- 2.1 Haces de círculos
- 2.2 Composición de inversiones en círculos de una haz
- 2.3 Subgrupos de Transformaciones
- 2.4 Invariantes de las Transformaciones: distancia entre dos puntos, y ángulo de inclinación entre dos rectas.
- 2.5 Geometría hiperbólica

Capítulo III El teorema de Progresión Aritmética

1. Series de Dirichlet
2. L -funciones y la función ζ de Riemann
3. Producto de L -funciones relativas al mismo entero
4. Densidad y teorema de Dirichlet

Capítulo IV Superficies de Riemann

1. Definiciones y ejemplos
2. Superficies cubrientes
3. El grupo fundamental
4. Subgrupos y superficies cubrientes
5. El Teorema de Uniformización
6. Superficies de Riemann en general

Introducción

El objetivo de esta tesis es ilustrar la relación entre áreas de la matemática aparentemente ajenas.

En el capítulo I se estudia el grupo de *Transformaciones de Moebius* y se da la clasificación de dichas transformaciones en parabólica, elíptica, hiperbólica y loxodromicas.

En el capítulo II se definen los *lápices* de círculos parabólico, elíptico e hiperbólico, y para cada uno de ellos se da un modelo canónico. Una generalización de los lápices son los *haces* de círculos. La composición de dos reflexiones en círculos de cada haz son transformaciones de Moebius parabólicas, elípticas e hiperbólicas, respectivamente, y forman subgrupos del grupo total. Se describen los invariantes de estas transformaciones: la *distancia* entre dos puntos y el *ángulo* de inclinación entre dos rectas. Habiendo definido los invariantes para cada subgrupo de transformaciones, se obtienen las ecuaciones generales para las transformaciones respectivas y se sugiere la posibilidad de obtener la geometría propia de cada subgrupo de transformaciones. Estas son, respectivamente, la parabólica, elíptica e hiperbólica. Se presenta un esbozo de la geometría hiperbólica.

En el capítulo III se expone una demostración analítica del *Teorema de Progresión Aritmética*; una demostración que vincula a la Teoría de Funciones de Variable Compleja con la Teoría de Numeros.

El capítulo IV se expone una panorámica, sin demostraciones, de la teoría de *Superficies de Riemann*. Se inicia con la definición y se dan dos ejemplos. Se define el grupo fundamental, la Superficie Cubriente y las Transformaciones de Cubierta de una Superficie de Riemann. De entre todas las cubrientes de una Superficie de Riemann, existe una que es cubriente de todas: es la llamada Cubriente Universal, que es simplemente conexa. Estos conceptos junto con el Teorema de Uniformización, que nos dice que son esencialmente tres las SR simplemente conexas, hacen posible la clasificación de todas las superficies de Riemann.

Capítulo I

1. Transformaciones de Moebius

Definición

Sea \mathbb{C}^* la esfera de Riemann. La función de \mathbb{C}^* en \mathbb{C}^*

$$Tz = (az+b)/(cz+d),$$

con a, b, c y d números complejos es una *Transformación de Moebius* si y solo si $ad-bc \neq 0$.

Denotamos $w = Tz$. Tz es una transformación analítica excepto en $z = -d/c$ (donde el denominador se anula) y para $z = \infty$.

$$\text{En } z = \infty, T(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c};$$

$$\text{y en } T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty.$$

Basta con mostrar que la derivada de w es distinta de cero para concluir su conformalidad en ese punto.

Cuando $c=0$

$$w = Tz = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

la derivada $\frac{d(w)}{d(z)} = \frac{a}{d} \neq 0$ para todo z finito. Cuando $z = \infty$

utilizamos las variables $z' = \frac{1}{z}$ y $w' = \frac{1}{w}$. Hecho esto

$$w' = \frac{1}{\frac{a}{d}z + \frac{b}{d}} = \frac{d}{a}z' + \dots$$

la derivada $\frac{d(w')}{d(z')} = \frac{d}{a} + \dots$, que evaluada en $z'=0$ no es cero. Por tanto w' es conforme en $z'=0$, y en consecuencia w lo es en $z = \infty$.

Cuando $c \neq 0$, $\frac{d(w)}{d(z)} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ que es no nula en $z = \frac{d}{c}$ y en $z = \infty$.

Por tanto w es conforme en el complemento de estos dos puntos.

Para mostrar su conformalidad en $z = \frac{d}{c}$, utilizamos las variables

$$z' = z + \frac{d}{c} \quad \text{y} \quad w' = \frac{1}{w};$$

la podemos reescribir como

$$w = -\frac{ad-bc}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c};$$

$$\therefore w' = -\frac{c^2}{ad-bc} z' + Bz'^2 + \dots$$

por tanto la derivada

$$\left(\frac{d(w')}{d(z')}\right)_{z'=0} = \left(\frac{d(w')}{d(z')}\right)_{z=-d/c} \neq 0.$$

Por tanto w es conforme en $z = -\frac{d}{c}$.

Para el caso $z = \infty$ las variables adecuadas son $z' = \frac{1}{z}$ y $w' = w$.
 w se puede escribir de la siguiente manera:

$$w' = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2} z' + \dots$$

$$\therefore \left(\frac{d(w')}{d(z')} \right)_{z'=0} = \left(\frac{d(w)}{d(z)} \right)_{z=\infty} \neq 0.$$

Por tanto w es conforme en $z = \infty$.

Todo lo anterior lo podemos resumir en el siguiente

Teorema

La transformación de Moebius

$$Tz = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{con } ad-bc \neq 0$$

de \mathbb{C}^* en \mathbb{C}^* es un **automorfismo conforme** (función biyectiva y conforme).

Observaciones

1. Si S y T son transformaciones de Moebius, su composición ST tambien lo es.

2. Toda transformación de Moebius tiene una inversa, a saber

$$z = T^{-1}w = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

$T^{-1}w$ es de Moebius, puesto que $da-bc \neq 0$.

3. $Tz = z$, la transformación identidad es de Moebius.

En virtud de estas observaciones podemos concluir que el conjunto de transformaciones de Moebius del plano complejo extendido en si mismo forman un **grupo**, el **grupo de las Transformaciones de Moebius**.

Es claro que si $w = Tz = (az+b)/(cz+d)$ es una transformación de Moebius y λ es una constante compleja arbitraria no nula, la transformación $(\lambda az + \lambda b)/(\lambda cz + \lambda d)$ es Tz . Recíprocamente, si

$$Tz = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{y} \quad T_1z = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$$

son la misma transformación de Moebius, deben tener los mismos ceros y polos.

Sea z_0 un un cero, entonces

$$az_0 + b = a'z_0 + b' = 0$$

$$\Rightarrow z_0 = -b/a = -b'/a'; \text{ sea } \lambda = a/a' = b/b'.$$

Sea z_1 un polo, entonces

$$cz_1 + d = c'z_1 + d' = 0,$$

$$\Rightarrow z_1 = -d/c = -d'/c'; \text{ sea } \mu = c/c' = d/d'.$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1},$$

$$\therefore \lambda/\mu = 1, \therefore \lambda = \mu; \therefore a = \lambda a', \quad b = \lambda b', \quad c = \lambda c', \quad d = \lambda d' \quad \text{y}$$

$$\det T_1 = \lambda^2 \det T.$$

Tomando $\bar{\lambda} = \frac{1}{(ad-bc)^{1/2}}$, para una transformación arbitraria T,

$$Tz = \frac{\bar{\lambda}az + \bar{\lambda}b}{\bar{\lambda}cz + \bar{\lambda}d} = (\bar{\lambda}T)z$$

sucede, que $\det(\bar{\lambda}T) = 1$, la cual es una representación normalizada de T. Obsérvese que $\lambda(Tz)$ denota $(\lambda az + \lambda b) / (\lambda cz + \lambda d)$.

Al grupo de transformaciones de Moebius normalizadas lo denotamos \bar{M}_C .

Sea T una transformación de Moebius normalizada. T es igual, solamente a una transformación de la forma ρT . Como $\det(T) = \det(\rho T) = \rho^2 \det(T) = \rho^2 = 1$, debe suceder que $\rho = \pm 1$; es decir una transformación de Moebius normalizada esta univocamente determinada salvo por un factor de ± 1 . Es plausible entonces identificar a la transformación con las matrices $\pm T$, donde

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ con } ad-bc = 1.$$

De hecho el producto de matrices de 2×2 con coeficientes complejos corresponde a la composición de las transformaciones correspondientes. Denotamos M_C al grupo de matrices $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$. En virtud de lo anterior tenemos el siguiente isomorfismo:

$$\bar{M}_C \cong M_C / (0, -1).$$

Si $T \in \bar{M}_C$ y $S \in \bar{M}_C \rightarrow STS^{-1} \in \bar{M}_C$: de hecho STS^{-1} es la matriz de cambio de coordenadas en el plano. Mediante un cambio de coordenadas conveniente es posible considerar al punto ∞ como un punto ordinario.

2. Clasificación de las transformaciones de Moebius

La clasificación de las transformaciones de Moebius está dada por el tipo de puntos fijos que presentan, es decir, por los puntos en \mathbb{C} tales que $Tz = z$.

Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$\frac{az+b}{cz+d} = z.$$

Estos puntos son las soluciones de la ecuación compleja de 2o. grado

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

$$\zeta_{1,2} = \frac{a-d \pm (\chi^2 - 4)^{1/2}}{2c}, \text{ donde } \chi = a+d, \text{ la traza de } T.$$

$\zeta_1 = \zeta_2 \leftrightarrow \chi = \pm 2$. En éste caso se dice que la transformación es parabólica.

1. Sea $c=0$,

$$\rightarrow Tz = az + b/d = az/d + b/d.$$

Un punto fijo es $\xi_1 = \infty$.

I.1. Si $a \neq d$, $\xi_2 = \frac{b}{d-a}$ es el otro punto fijo.

I.2. $a=d$, $Tz = z \pm b$ (pues $ad=1 \Rightarrow a=d=\pm 1$), y el único punto fijo, doble, es $\xi_1 = \xi_2 = \infty$, que corresponde por definición, a una transformación parabólica.

I.3. Si $a=d$ y $b=0$, $Tz = z$, $\Leftrightarrow T=0$, la transformación identidad, parabólica también.

II. Consideremos ahora ξ_1, ξ_2 puntos fijos finitos y distintos de T , es decir, $c \neq 0$ y $\chi \neq \pm 2$.

Una transformación de Moebius que mapea z_1 en w_1 y z_2 en w_2 puede escribirse en la forma

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} = k \frac{z-z_1}{z-z_2}, \quad k \neq 0, 1 \quad (1)$$

Cuando ξ_1 y ξ_2 son puntos fijos

$$\frac{w-\xi_1}{w-\xi_2} = k \frac{z-\xi_1}{z-\xi_2}$$

Para calcular el valor de k , sustituimos el valor de w en $z=\infty$, $w(\infty) = a/c$, en (1):

$$\frac{\frac{a}{c} - \xi_1}{\frac{a}{c} - \xi_2} = \lim_{z \rightarrow \infty} k \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2} = k \frac{\frac{z}{z} - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\xi_1}{z}}{\frac{z}{z} - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\xi_2}{z}} = k$$

$$\therefore k = \frac{a - c\xi_1}{a - c\xi_2} \text{ finito.}$$

Es un hecho que $\xi_2 = a/c$, pues se debe satisfacer la Ec. $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Si $\xi_2 = a/c \Rightarrow a^2/c + ad/c - a^2/c - b = 0 \Rightarrow ad - bc = 0$, lo cual no puede suceder.

A k se le llama el *multiplicador* de T , y la representación

$$\frac{w-z_1}{w-z_2} = k \frac{z-z_1}{z-z_2}$$

es la *forma normal* de $w = Tz$.

Si se permuta el orden de los puntos en la Ec. anterior, la forma normal es

$$\frac{w-z_2}{w-z_1} = k^{-1} \frac{z-z_2}{z-z_1}$$

y k^{-1} es el *multiplicador* de T . Para evitar esta ambigüedad, se define a la pareja (k, k^{-1}) como el *multiplicador* de T .

Cuando $c=0$ pero $\chi \neq \pm 2$, $\xi_1 = \infty$, $\xi_2 = b/(d-a)$, y la forma normal es $w - \xi_2 = k(z - \xi_2)$. (caso ya considerado sin haber dado la forma normal).

Para $z=0$ tenemos $w(0) - \xi_2 = -k\xi_2$

$$\therefore k = \frac{w(0) - \zeta_2}{-\zeta_2}$$

Puesto que $c=0$, $w=Tz=(az+b)/d$, $\Rightarrow w(0)=b/d$. $\therefore k=a/d$.
En todos estos casos (casos no parabólicos)

$$k + k^{-1} = \chi^2 - 2$$

Consideremos ahora $\zeta_1 = \zeta_2$ finitos, es decir, $c \neq 0$ y $\chi = \pm 2$.
la transformación

$$\frac{1}{w - \zeta_1} = \frac{1}{z - \zeta_1} \pm c, \quad \zeta_1 = \frac{a-d}{2c}$$

es la forma normal de una transformación parabólica con un punto fijo finito. Definimos en este caso $k=1$.

La forma normal de T cuando $\zeta_1 = \zeta_2 = \infty$ es $w=z+b$

Escribamos k en su forma polar $k = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$, $0 < \theta \leq 2\pi$.

La clasificación de las transformaciones es la siguiente:

- $\rho=1$ $\theta \neq 0$ T es elíptica
- $\rho \neq 1$ $\theta=0$ T es hiperbólica,
- $\rho=1$ $\theta=0$ $\Rightarrow k=1$, T es parabólica
- $\rho \neq 1$ $\theta \neq 0$ T es loxodromica

Teorema

Sea T una transformación de Moebius:

1. T es elíptica si y sólo si χ es real y $|\chi| < 2$.
2. T es hiperbólica si y sólo si χ es real y $|\chi| > 2$
3. T es parabólica si y sólo si χ es real y $|\chi| = 2$
4. T es loxodromica si y sólo si χ no es real

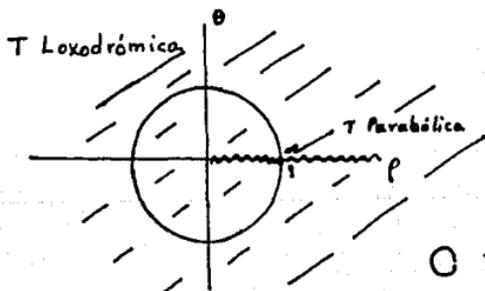


Fig. 1

- T Elíptica
- ~~~~~ T Hiperbólica
- ////// T Loxodromica

Demostración

I. \Rightarrow

1. Sea T una transformación elíptica, $\rho=1$ y $\theta \neq 0$

$$\text{De (2)} \quad \chi = (k + k^{-1} + 2)^{1/2}$$

$$(k + k^{-1} + 2)^{1/2} = (e^{i\theta} + e^{-i\theta} + 2)^{1/2} = (2\cos\theta + 2)^{1/2} = 2^{1/2}(\cos\theta + 1)^{1/2}$$

$$\therefore |\chi| = |2^{1/2}| |(\cos\theta + 1)^{1/2}| < |2^{1/2}| |2^{1/2}| < 2.$$

Por ser $\theta \neq 0$, $|\cos\theta| < 1$, y por tanto χ es real.

2. Sea T una transformación hiperbólica, $\rho \neq 1$ y $\theta = 0$.

$$\therefore (\rho + \rho^{-1} + 2)^{1/2} \in \mathbb{R}$$

$$\text{y } |\chi| = |(\rho + \rho^{-1} + 2)^{1/2}| = \rho + \rho^{-1} + 2 > 2$$

3. Sea T parabólica, $k = 1$

$$\therefore \chi = 4^{1/2}, \quad \therefore |\chi| = 2 \text{ y } \chi \in \mathbb{R}.$$

II. \Rightarrow

Los puntos fijos de T son:

$$\xi_{1,2} = \frac{a-d \pm (\chi^2 - 4)^{1/2}}{2c}, \quad \chi = a+d.$$

1. χ real y $|\chi| = 2 \Rightarrow \chi^2 = 4 \Rightarrow \xi_1 = \xi_2$. $\therefore T$ es parabólica.

Para el caso no parabólico usaremos las relaciones

$$k = \frac{a-c\xi_1^2}{a-c\xi_2^2} \quad \text{y} \quad k+k^{-1} = \chi^2 - 2$$

2. χ real y $|\chi| > 2$. P. D. Que T es hiperbólica, es decir, $\rho \neq 1$ y $\theta = 0$.

$$|a-c\xi_1^2| = |a-c \left(\frac{a-d + (\chi^2 - 4)^{-1/2}}{2c} \right)| = |(a+d-t)^{1/2}/2|$$

$$|a-c\xi_2^2| = |a-c \left(\frac{a-d - (\chi^2 - 4)^{-1/2}}{2c} \right)| = |(a+d+t)^{1/2}/2|$$

En ambos casos $t = \chi^2 - 4$

Las hipótesis implican que $t > 0$, y por tanto $t^{1/2} \in \mathbb{R}$

$$\therefore |a-c\xi_1^2| = |(\chi-t)^{1/2}/2| \neq |(\chi+t)^{1/2}/2| = |a-c\xi_2^2|$$

$\therefore |k| \neq 1$.

Por hipótesis $\chi^2 - 2 \in \mathbb{R}$; también $\chi^2 - 2 = k+k^{-1} = \rho e^{i\theta} + \rho^{-1} e^{-i\theta}$. Si $\theta \neq 0$ $\text{Im}(k+k^{-1}) \neq 0$. Contradicción! $\therefore \theta = 0$.

3. χ real $|\chi| < 2$. P. D. T es elíptica, es decir, $\rho = 1$ y $\theta \neq 0$.

Analogamente que en 2.

$$|a-c\xi_1^2| = |(\chi+t)^{1/2}/2| \text{ y } |a-c\xi_2^2| = |(\chi-t)^{1/2}/2| \text{ con } t = \chi^2 - 4.$$

Pero en este caso $\chi^2 < 4$, por lo que $t < 0$, y la parte imaginaria de $a-c\xi_1^2$ y de $a-c\xi_2^2$ es $\neq 0$ y la misma. Por tanto

$$|a-c\xi_1^2| = |(\chi-t)^{1/2}/2| = |(\chi+t)^{1/2}/2| = |a-c\xi_2^2|$$

$\therefore |k| = 1$

Si $\theta = 0$, $k+k^{-1} = 1+1=2$, es decir, $2 = \chi^2 - 2 \Rightarrow \chi^2 = 4 \Rightarrow \chi = 2$ contradicción. $\therefore \theta \neq 0$.

4. χ no es real. P. D. T es loxodrómica, es decir, $\rho \neq 1$ y $\theta \neq 0$.

Por hipótesis $\text{Im}(\chi) \neq 0$,

$$\Rightarrow \text{Im}(\chi^2 - 2) = \text{Im}(\rho e^{i\theta} + \rho^{-1} e^{-i\theta}) \neq 0$$

$\Rightarrow \theta \neq 0$.

Por (2), ρ debe ser $\neq 1$.

l q q d.

Capítulo II

GEOMETRIAS

En este capítulo hablaremos, en general, de círculos en la esfera de radio 1 S ; las rectas en el plano complejo extendido C^* las consideraremos como círculos que pasan por ∞ , y que son la imagen estereográfica de círculos que en S que pasan por el punto $N(0,0,1)$.

1. Puntos Simétricos y Ortogonalidad

Definición

Sea γ un círculo en C^* . Los puntos z_1, z_2 en C^* son simétricos respecto de γ si y sólo si cualquier círculo que pase por z_1 y z_2 es ortogonal a γ .

La transformación del plano extendido tal que a cada punto z lo mapea en su simétrico respecto a un círculo γ es la transformación de simetría respecto de γ . Cuando γ es un círculo que no pasa por el punto al infinito (círculo común), a la transformación también se le denomina una inversión, y a los puntos simétricos respecto de γ puntos inversos respecto de γ .

Puntos simétricos y ortogonalidad

Sean z_1 y z_2 puntos simétricos respecto a la recta γ . Por definición, la recta que une z_1 con z_2 es ortogonal a γ . Por otro lado, las circunferencias que pasan por ambos puntos tiene su centro en γ , y son por tanto ortogonales a γ . Inversamente, si la recta ortogonal a γ pasa por un punto z_1 también pasa por su simétrico respecto de γ , y en el caso en que una circunferencia ortogonal a γ pase por z_1 también debe de pasar por su simétrico z_2 respecto de γ .

Esto último es sencillo de comprobar si γ es el eje real y aplicamos una T de Moebius que mapea γ en esa circunferencia.

Si γ es una circunferencia diremos que z_1 y z_2 son simétricos respecto a γ si cualquier recta o circunferencia que pase por ambos es ortogonal a γ .

La Transformación de simetría.

Consideremos la transformación $T: C^* \rightarrow C^*$ que mapea a cada $z \in C^*$ en su simétrico y hallemos su expresión analítica.

1. Sea γ una recta que pasa por a con un ángulo de inclinación θ .

Sea

$$w = Tz = a + e^{i\theta} z.$$

T es tal que $T(\text{eje real}) = \gamma$; z, \bar{z} son simétricos respecto al eje real, y por ser T una transformación de Moebius $w^* = T(\bar{z})$ es el simétrico de $w = T(z)$.

$$w^* = a + e^{i\theta} \bar{z} \quad w = a + e^{i\theta} z.$$

Despejando z : $z = (w-a)e^{-i\theta}$, y sustituyendo en w^* ,

$$w^* = a + e^{i\theta} \overline{(w-a)e^{-i\theta}} = a + e^{2i\theta} \overline{(w-a)} = a + \overline{(w-a)} e^{2i\theta}.$$

Por lo tanto para obtener la transformación de simetría respecto a la recta γ , es necesario conjugar el vector $w-a$ y luego rotarlo un ángulo 2θ alrededor del punto a . La expresión final de la transformación de simetría cuando γ es una recta es por tanto

$$w = Tz = a + ze^{2i\theta}$$

2. Sea γ es una circunferencia con centro a de radio R .

$$w = Tz = a + R \frac{1+iz}{1-iz}$$

Esta transformación de Moebius es tal que $T(-i) = a - iR$, $T(i) = a + iR$. Por tanto $T(\text{eje real}) = \gamma$. Esto implica que $w = T(z)$ es simétrico de $w^* = T(\bar{z})$ respecto a γ :

$$w^* - a = R \frac{1+i\bar{z}}{1-i\bar{z}}$$

$$w - a = R \frac{1+iz}{1-iz} \quad \rightarrow \quad \overline{w-a} = R \frac{1-i\bar{z}}{1+i\bar{z}}$$

$$\therefore \overline{(w-a)}(w^*-a) = R^2$$

$$w^* = \frac{R^2}{w-a} + a.$$

Obsérvese que

$$\arg(w^*-a) = \arg R^2 - \arg(w-a) = -\arg(w-a) = \arg(w-a)$$

por lo que w y su simétrico w^* están situados en la misma línea recta que pasa por a .

También

$$|w^*-a| = |w-a| = R^2$$

Lo anterior implica que esta transformación es la reflexión (o inversión) en el círculo con centro en a y radio R .

Por tanto la transformación de Moebius que mapea un punto en su simétrico respecto a una circunferencia γ es

$$w = Tz = R^2 z^{-1} + a$$

3. Lápiz de círculos

Definición

Sean k_1 y k_2 dos círculos distintos en \mathbb{C}^* . El lápiz de

círculos (k_1, k_2) es el conjunto de círculos en \mathbb{C}^* ortogonales a k_1 y k_2 .

Sean T_1 y T_2 las inversiones en los círculos k_1 y k_2 respectivamente, y $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tal que z_0 no es punto de k_1 ni de k_2 . Por construcción, el círculo k que pasa por $z_0, T_1(z_0)$ y $T_2(z_0)$ es ortogonal a k_1 y k_2 . Por tanto todo punto $z \in \mathbb{C}^*$ que no pertenezca a k_1 ó k_2 debe ser punto de algún círculo del lápiz (k_1, k_2) . Por la conformalidad de las transformación de Moebius, todo lápiz de círculos es transformado en otro lápiz de círculos; ésta invariancia permite clasificar los lapices (k_1, k_2) según que $k_1 \cap k_2 = \emptyset$, $k_1 \cap k_2 = \{P\}$, ó $k_1 \cap k_2 = \{P, Q \mid P, Q \in \mathbb{C}^*, P \neq Q\}$, casos que estudiamos a continuación.

$$1) k_1 \cap k_2 = \{P, Q \mid P, Q \in \mathbb{C}^*, P \neq Q\}$$

Sea T transformación de Moebius tal que $T(P)=0$ y $T(Q)=\infty$. Entonces $T(k_1)=\gamma_1$ y $T(k_2)=\gamma_2$ son dos rectas en el plano que pasan por el origen $z=0$. El lápiz de círculos en éste caso lo constituyen todos los círculos concéntricos alrededor del origen $z=0$:

$$\{|z|=r^2 \mid r \in \mathbb{R}\}$$

Todo punto $z \in \mathbb{C}^*$, $z \neq 0$ y $z \neq \infty$, está en un círculo, y sólo en un círculo del lápiz. Llamamos a cero e infinito puntos límite del lápiz.

A un lápiz de éste tipo, de círculos ortogonales a dos círculos que se intersectan en dos puntos distintos de \mathbb{C}^* , se le llama **lápiz hiperbólico** $H = \{|z|=r^2 \mid r \in \mathbb{R}\}$ (Fig 1):

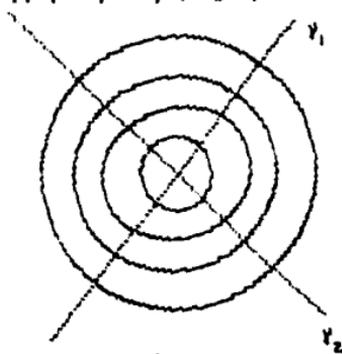


Fig. 1

$$2. k_1 \cap k_2 = \emptyset$$

Sea T una transformación de Moebius tal que $T(k_1)=l_1$ es un círculo y $T(k_2)=l_2$ una recta. Por conformalidad de T , l_2 está fuera

totalmente de l_1 . Sea μ_1 la línea recta que pasa por el centro M de l_1 e intersecta ortogonalmente a l_2 en N , y μ_2 el círculo con centro N ortogonal a l_1 (Fig. 2)

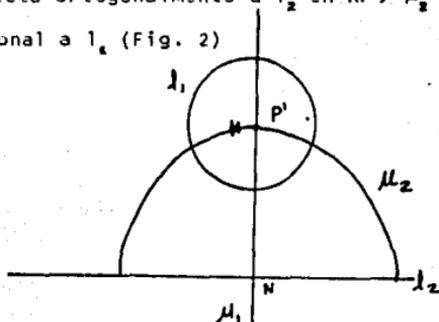


Fig. 2

Tenemos dos círculos ortogonales a l_1, l_2 que se intersectan en P', Q' ; entonces $T^{-1}(\mu_1)$ y $T^{-1}(\mu_2)$ deben intersectar a k_1, k_2 en los puntos $P=T^{-1}(P')$ y $Q=T^{-1}(Q')$ y ser ortogonales a ambos. Consideremos ahora la transformación de Moebius S que mapea P' en el origen y Q en el punto al infinito. Entonces $S(\mu_1)$ y $S(\mu_2)$ círculos del lápiz ($ST(k_1), ST(k_2)$) son dos líneas rectas que pasan por el origen, y en consecuencia $S(T(k_1))$ y $S(T(k_2))$ son dos círculos concéntricos con centro en el origen y, por tanto, el lápiz en cuestión está constituido por todas las rectas del plano \mathbb{C}^* que pasan por el origen y el punto del infinito. Los puntos $z=0$ y $z=\infty$ son los únicos comunes al lápiz y uno es mapeado en el otro por medio de una inversión sobre círculos ortogonales al lápiz.

Este tipo de lápices, que contienen dos puntos fijos comunes son los *haces elípticos* Σ (Fig. 3)

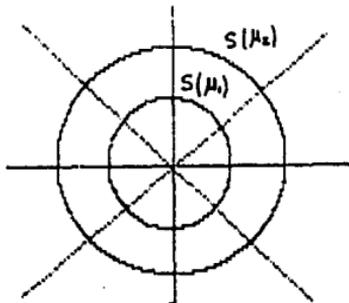


Fig. 3

3. $k \cap k = \{P \mid P \in \mathbb{C}^*\}$

Sea T una transformación de Moebius tal que $T(P) = \infty$. Entonces $T(k_1) = \gamma_1$, $T(k_2) = \gamma_2$ son dos rectas paralelas en \mathbb{C}^* . Por tanto el lápiz $(T(k_1), T(k_2))$ lo constituyen todas las rectas paralelas en \mathbb{C}^* ortogonales a γ_1, γ_2 . Estas rectas también pasan por ∞ , y en consecuencia, en el lápiz original, son círculos ortogonales a k_1 y k_2 que pasan por el punto P . Estos lápices de círculos son los *parabólicos*. (Fig. 4).

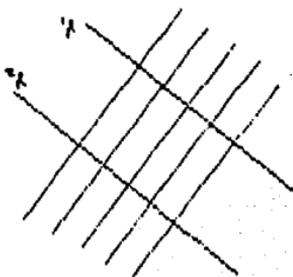


Fig. 4

3.1 Lápices Conjugados

Definición

El lápiz H_1 es *conjugado* del lápiz H_2 , si todo círculo de H_1 es ortogonal a todo círculo de H_2 .

La relación *de conjugación* es simétrica, y por lo anterior el lápiz conjugado de un lápiz elíptico es un lápiz hiperbólico, e inversamente, en tanto que el conjugado de un lápiz parabólico, es nuevamente un lápiz parabólico.

4. Transformaciones de Moebius generadas por dos reflexiones

La reflexión en un círculo k_1 de los círculos ortogonales a él, mapea a cada círculo en sí mismo: luego entonces, las reflexiones sucesivas del lápiz (k_1, k_2) en los círculos k_1, k_2 lo dejan invariante. Inversamente:

Teorema

Sea T una transformación de Moebius que mapea cada círculo de una lápiz H en sí mismo. Entonces $T = T_2 \circ T_1$, donde T_1 y T_2 son reflexiones, respectivamente, en los círculos k_1 y k_2 . Los círculos k_1 y k_2 pertenecen al lápiz conjugado de H . Habiendo

elegido k_1 arbitrario, k_2 se elige tal que satisfaga la composición.

Demostración

Se hará una demostración por separado para cada tipo de lápiz, haciendo referencia en los tres casos, a los lápices canónicos.

1. Lápiz hiperbólico $\mathcal{R} = \{ |z| = r^2 \mid r \in \mathbb{R} \}$

La transformación de Moebius que deja invariante este lápiz debe ser tal que una recta $g \in \mathbb{C}^*$ que pase por el origen $z=0$ sea mapeada en otra recta g^* que también pase por $z=0$. Sea H la reflexión en una de las bisectrices de g y g^* , y $z_0 \in g$;

entonces $T(z) = H(z) = z^* \in g^*$; ∞ y 0 son puntos fijos de T y H y se satisfacen

$$\begin{aligned} TH^{-1}(0) &= 0 \\ TH^{-1}(\infty) &= \infty \\ TH^{-1}(z_0^*) &= z_0^* \end{aligned}$$

Sea $G = TH^{-1}$ la transformación que preserva círculos (ver apéndice) con puntos fijos 0 , ∞ , y z_0^* .

La única transformación con tales puntos fijos es la reflexión en la recta g^* , y puesto que conocemos la imagen de 0 , ∞ y z_0 bajo T , hemos determinado completamente a T en términos de G y H . De acuerdo a la sección anterior las ecuaciones de h y g^* son $re^{i\theta}$ y $re^{i\phi}$, respectivamente, con $r \in \mathbb{R}$; el reflejado de z en h es $z^* = H(z) = \bar{z}e^{2i\theta}$, y el de éste en g^* es $w = G(z^*) = G(H(z)) = \frac{\bar{z}e^{2i\theta}}{ze^{-2i\theta}} = z e^{2i(\phi-\theta)}$. Es decir, $w = Tz = ze^{2i(\phi-\theta)}$. Es una rotación de ángulo $(\phi-\theta)$, donde se ha escogido arbitrariamente a ϕ o θ , y por tanto a h o a g : tomado uno el otro solo debe de satisfacer la diferencia. Finalmente recordemos que h y g^* pertenecen al lápiz elíptico conjugado de \mathcal{R} .

Lápiz elíptico $\mathcal{E} = \{ re^{i\theta} \mid r \in \mathbb{R}, 0 \leq \theta < 2\pi \}$

Este lápiz tiene como su conjugado al hiperbólico de círculos concéntricos en el origen. Sean $k_1 = \{ z \mid |z| = a^2 \}$, $k_2 = \{ z \mid |z| = b^2 \}$ dos círculos de éste lápiz. La reflexión de $z \in \mathbb{C}^*$ en k_1 , $z^* = a^2/z$, $\arg(z^*) = \arg(a^2) - \arg(z) = -\arg(z)$, y de éste en k_2 , $w = b^2 z / a^2$, dejan invariantes las rectas del lápiz elíptico \mathcal{E} , pues $\arg w = \arg z$; es decir, $w = Tz = (T_2 T_1)z$, donde T_1 y T_2 son las reflexiones en los círculos k_1 y k_2 , respectivamente.

Puesto que $w = Tz = b \frac{z^2}{z^2 + a^2}$ depende solamente de la razón de los radios, uno de ellos puede ser escogido arbitrariamente, y el otro solo debe ser tal que satisfaga el cociente.

Lápiz Parabólico \mathcal{P}

Sean $k_1 = \{z | z = a + re^{i\theta}, r \in \mathbb{R}\}$, $k_2 = \{z | z = b + re^{i\theta}, r \in \mathbb{R}\}$, en ambos casos $0 \leq \theta < 2\pi$ fijo. Las dos rectas paralelas en las cuales reflejamos el lápiz parabólico \mathcal{P} de las rectas perpendiculares a k_1 y k_2 . Sea $z \in \mathbb{C}^*$, $z \notin \mathcal{P}$; el reflejado de z en k_1 , $z^* = a + (\overline{z-a})e^{2i\theta}$ y el de éste en k_2 , $w = b + (\overline{z^* - b})e^{2i\theta} = b + \overline{(a + (\overline{z-a})e^{2i\theta} - b)}e^{2i\theta} = b + \overline{(a - b + \overline{z-a})}e^{2i\theta} = (b-a) + (\overline{a-b})e^{2i\theta} + z$.

Resumiendo:

$$w = (T_2 T_1)z = z + m, \quad m = (b-a) + (\overline{a-b})e^{2i\theta} \text{ es constante.}$$

$\therefore w = Tz = (T_2 T_1)z$, composición de reflexiones en dos rectas paralelas es una traslación de \mathbb{C}^* que deja invariante a \mathcal{P} .

5. Representación de una transformación de Moebius como composición de inversiones en círculos.

Teorema

Toda transformación de Moebius T se puede escribir como composición de dos o de cuatro inversiones en círculos.

Demostración

En el capítulo I se clasificaron las transformaciones de Moebius de acuerdo a las características de sus puntos fijos, que corresponden a las soluciones de la Ec. $cz^2 + (d-a)z - b = 0$

$$\xi_1, \xi_2 = \frac{a-d \pm \Delta^{1/2}}{2}, \quad \Delta = \chi^2 - 4,$$

que a saber $\xi_1 = \xi_2$ sii $\Delta = 0$, $\xi_1 \neq \xi_2$ sii $\Delta \neq 0$.

La transformación T es parabólica sii $\xi_1 = \xi_2$.

Caso 1.- Cuando $\xi_1 = \xi_2 = \infty$, T es una traslación de la forma $Tz = z + b$

Caso 2.- Cuando $\xi_1 = \xi_2$ finitos, $Tz = \frac{1}{w - \xi_1} + \frac{2c}{a+d}$, que

haciendo la reparametrización $\eta = \frac{1}{w - \xi_1}$, $Tz = \eta + 2c/(a+d)$.

En ambos casos $w = Tz$ es una traslación, que es posible expresar como composición de dos reflexiones en círculos de un lápiz parabólico.

Consideramos ahora $\xi_1 \neq \xi_2$

Caso 1.- $\xi_1 \neq \xi_2$ finitos

$$\frac{w-\zeta_1}{w-\zeta_2} = k \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}$$

haciendo la reparametrización $\eta = \frac{w-\zeta_1}{w-\zeta_2}$ y $\zeta = \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}$ toma la forma

$$\eta = k\zeta$$

que es una rotación.

Caso 2. ζ_1 finito y $\zeta_2 = \infty$

La forma normal de $w=Tz$ es

$$w-\zeta_1 = k(z-\zeta_1) \text{ y } k=a/d.$$

Sustituyendo $\eta=w-\zeta_1$ y $\zeta=z-\zeta_1$, la transformación toma la forma

$$\eta = k\zeta$$

que es también una rotación.

Si k es real de módulo diferente de 1, $w=Tz$ es una transformación hiperbólica que se puede expresar como composición de dos reflexiones en círculos concéntricos con centro en el origen y que pertenecen a un lápiz hiperbólico, en tanto que si $|k|=1$ es una transformación elíptica que consiste en una rotación de ángulo $=\arg k$, que se puede expresar como composición de dos reflexiones en dos líneas rectas k_1, k_2 en \mathbb{C}^* que pasan por el origen de coordenadas; hemos visto que éstas rectas pertenecen a un lápiz elíptico \mathfrak{L} .

Este teorema es la contraparte geométrica de los resultados algebraicos obtenidos en el capítulo anterior.

6. Hazes de Círculos

Definición

Un haz de círculos en \mathbb{C}^* es el conjunto de círculos cuyos planos pasan por un punto fijo M de \mathbb{R}^3 , inclusive el ∞ .

Proposición

Si dos círculos c_1 y c_2 pertenecen a un haz, entonces todo círculo del lápiz al que pertenecen c_1 y c_2 es elemento del haz.

Demostración

Sea (k_1, k_2) el lápiz al que pertenecen c_1 y c_2 . Los centros de c_1 y c_2 son puntos del círculo \mathfrak{R} que es eje radical de k_1 y k_2 ; de hecho los centros de todos los círculos de (k_1, k_2) son puntos de \mathfrak{R} . Sea \mathfrak{L} la recta de intersección de los planos P_1 y P_2 de los círculos c_1 y c_2 , respectivamente. Todo círculo cuyo plano pase por \mathfrak{L} es ortogonal a \mathfrak{R} y tiene su centro en \mathfrak{R} . Por tanto pertenece a (k_1, k_2) , y puesto que $M \in \mathfrak{L}$, también son círculos del haz.

lqgd.

Proposición.

Cualesquiera 3 círculos c_1, c_2 y c_3 que no pertenecen al mismo lápiz, determinan unívocamente un haz. Dicho de otra forma: La

intersección de los planos P_1 , P_2 y P_3 de círculos que no pertenecen a un mismo lápiz, determinan un único punto, el punto M del haz.

Demostración

Sea $\mathcal{L} = P_1 \cap P_2$. Si k_3 no está en el lápiz al que pertenecen k_1 y k_2 , no puede suceder que $\mathcal{L} = P_1 \cap P_2 \cap P_3$; tampoco puede suceder que la intersección sea vacía, pues en caso de paralelismo la intersección es el punto al infinito. Por tanto esta intersección es un punto, el punto M que genera al haz. *lqgd.*

Corolario

Cualquier círculo c del haz que no sea elemento del lápiz determinado (al que pertenecen) por c_1 y c_2 , pertenece al lápiz determinado por c_1 y algún círculo c' del lápiz determinado por c_1 y c_2 .

Sea (k_1, k_2) el lápiz determinado por c_1 y c_2 con generadores k_1 y k_2 , cuyo eje radical es \mathcal{L} . Sea \mathcal{L}' la el círculo que pasa por el centro de c_1 y c. Como c_2 no es elemento de (k_1, k_2) \mathcal{L} y \mathcal{L}' se intersecan en un punto Q. Sea c' el círculo con centro en Q en el lápiz (k_1, k_2) ; luego entonces c está en el lápiz determinado por c_1 y c, pues su centro está en el \mathcal{L}' .

lqgd.

Definición

Un haz es *hiperbólico, parabólico ó elíptico* si el punto M está respectivamente, *fuera, sobre ó dentro* de S.

Las siguientes observaciones muestran como los haces de círculos en el plano extendido pueden ser definidos independientemente de los haces de círculos en S y caracterizarse análogamente.

1. Haz hiperbólico: el punto M está fuera de la esfera.

Sea Z el círculo en S de los puntos de tangencia del cono con vértice en M (Fig. 5)

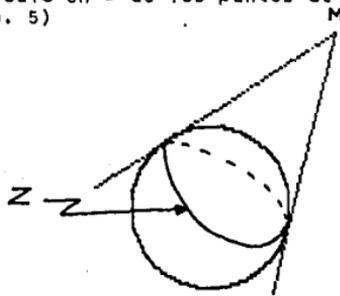


Fig. 5

Todo círculo en S cuyo plano pase por M interseca a Z ortogonalmente. Por tanto todo círculo del haz en M interseca a Z ortogonalmente. En la proyección estereográfica existe entonces un

Sustituyendo D en la Ec. del círculo

$$A(z+\bar{z})+iB(\bar{z}-z)+C(z\bar{z}-1)+D(z\bar{z}+1)=0$$

y tomando A, B y C como parámetros variables, obtenemos las ecuaciones de los círculos de un haz arbitrario.

Sean $\zeta_0 = \zeta_0 = \eta_0 = 0$; el haz elíptico canónico está formado por

los círculos máximos en \mathbb{C}^* , siendo por tanto $D=0$ y las ecuaciones de los círculos

$$A(z+\bar{z})+iB(\bar{z}-z)+C(z\bar{z}-1)=0 \quad (1)$$

Tomando $M=(\zeta_0, \zeta_0, \eta_0)=(0,0,1)$ obtenemos las ecuaciones

$$A(z+\bar{z})+iB(\bar{z}+z)+C(z\bar{z}+1)-C(z\bar{z}-1)=0$$

$$\therefore A(z+\bar{z})+iB(\bar{z}-z)+C(z\bar{z}-1)-2C=0 \quad (2)$$

que corresponden a los círculos del haz parabólico canónico.

Finalmente, con $M=(\zeta_0, \eta_0, \zeta_0)=(0,0,\zeta_0 > 1)$ obtenemos las ecuaciones

$$A(z+\bar{z})+B(\bar{z}-z)-D(z\bar{z}-1)/\zeta_0+D(z\bar{z}+1)=0 \quad (D=-C\zeta_0 \rightarrow C=-D/\zeta_0)$$

que al hacer tender ζ_0 a infinito resultan

$$A(z+\bar{z})+B(\bar{z}-z)+D(z\bar{z}-1)=0$$

que son las ecuaciones de los círculos ortogonales al círculo unitario $z\bar{z}=1$ en \mathbb{C}^* que constituyen el haz hiperbólico canónico, siempre que satisfagan la condición $D^2 < A^2 + B^2$ (para asegurar que el plano interseca a \mathbb{S}). En ocasiones se toma como haz hiperbólico canónico, el formado por las rectas ortogonales a \mathbb{R} en \mathbb{C}^* . Esto último porque existe una transformación de Moebius que mapea al círculo unitario en el eje real.

$$A(z+\bar{z})+C(z\bar{z}-1)+D(z\bar{z}+1)=0 \quad (3)$$

siempre que $D^2 < A^2 + C^2$

Lema 1

Sea T, una transformación que preserva círculos, entonces T mapea un lápiz de círculos en otro lápiz del mismo tipo.

Demostración

Si T es una transformación de Moebius, por conformalidad se prueba el lema. Si T no es de Moebius, invierte el sentido de los ángulos entre círculos, pero el tipo de lápiz se preserva en cualquiera de los tres casos.

Lqdd.

Lema 2

- (a) Un haz elíptico consta de lápices elípticos, solamente.
- (b) Un haz parabólico consta de lápices elípticos y parabólicos,

solamente.

(c) Un haz hiperbólico consta de los tres tipos de lápices: elípticos, parabólicos e hiperbólicos.

Demostración

(a) Todos los lápices de un haz elíptico constan de círculos cuyos planos se intersecan en líneas que tienen un segmento que es cuerda de S . Sean P y Q los puntos de intersección de S con la recta L de intersección de los planos de un lápiz; P y Q son por tanto los puntos de intersección de los círculos del lápiz, y por definición el lápiz es elíptico.

(b) Los lápices de círculos que pertenecen a un haz parabólico son aquellos que están en planos que se intersecan en rectas que:

(i) uno de sus segmentos es cuerda de S , en cuyo caso el lápiz es elíptico (a).

(ii) son rectas tangentes a S , en cuyo caso todos los círculos del lápiz se intersecan en el punto de tangencia, y por definición, el lápiz es parabólico.

(c) Los lápices de círculos de un haz hiperbólico están en planos que se intersecan en rectas que:

(i) un segmento es cuerda de S , en cuyo caso el lápiz es elíptico.

(ii) es recta tangente a S , en cuyo caso el lápiz es parabólico.

(iii) recta ajena a S , en cuyo caso los círculos del lápiz no se intersecan, y por definición el lápiz es hiperbólico.

Lqgd.

Teorema

Toda transformación que preserva círculos, mapea un haz en otro que es del mismo tipo.

Demostración

La primera parte de la afirmación del teorema es consecuencia del teorema de la sección 6 y del lema 1. La segunda parte del lema 2.

Lqgd.

Teorema

Sea H , un haz de círculos arbitrario ya sea elíptico, parabólico o hiperbólico. Entonces existe una transformación de Moebius que mapea al haz, respectivamente, en el haz (1), (2) y (3).

Demostración

Para la demostración conviene recurrir a la caracterización del haz en su proyección estereográfica. El ecuador de un haz elíptico puede ser mapeado mediante una traslación seguida de una homotecia en el círculo unitario. El punto por el que pasan todos los círculos y rectas de un haz se puede mapear con una transformación conforme en ∞ . Finalmente, el único círculo o recta al cual son ortogonales todos los círculos de un haz hiperbólico se puede mapear conformemente en el círculo unitario.

Lqgd.

7. Composición de Inversiones en círculos de un haz

Teorema

Sea H un haz de círculos arbitrario. El conjunto de transformaciones que se obtienen como composición de un número par de inversiones en círculos del haz, forman un subgrupo del grupo

de transformaciones de Moebius.

Demostración

Basta con demostrar la cerradura del conjunto, misma que se logra, mostrando que toda composición de cuatro reflexiones en círculos de un haz es reducible a una composición de dos inversiones en círculos del mismo haz.

Sean k_1, k_2, k_3 y k_4 los círculos del haz en los cuales se harán las reflexiones T_1, T_2, T_3 y T_4 , sucesivamente.

Por el teorema de la sección (x) sabemos que estas transformaciones son tales que dejan invariantes los círculos de un lápiz y son la composición de dos inversiones en círculos del lápiz conjugado.

Sea $P \in k_1$ arbitrario. En el lápiz determinado por k_2 y k_3 , conjugado del lápiz invariante bajo la transformación $T_3 T_2$, existen k_2' y k_3' (Teo x) tales que $T_3' T_2' = T_3 T_2$ y tal que k_2' pase por el punto P. Análogamente, en el lápiz determinado por la pareja k_3 y k_4 , conjugado del lápiz invariante bajo la transformación $T_4 T_3$, existen círculos k_3'' y k_4'' tales que $T_4' T_3'' = T_4 T_3$ y $P \in k_3''$. P es un punto común de k_1, k_2' y k_3'' ; luego entonces k_1, k_2' y k_3'' son círculos de un mismo lápiz del haz; por tanto es posible sustituir a k_2 y k_3 por el círculo k_1 y otro círculo k_4' , de tal manera que $T_4' T_3'' = T_4' T_2'$. Luego entonces

$$T_4 T_3 T_2 T_1 = T_4' T_4' T_4' T_1$$

Pero $T_4' T_4' = I$. Por tanto

$$T_4 T_3 T_2 T_1 = T_4' T_1'$$

Sea $k_2'' = k_4'$, es decir $T_2'' = T_1'$.

$$\therefore T_4 T_3 T_2 T_1 = T_2'' T_4'$$

lqqd.

En virtud de éste teorema tenemos al menos tres subgrupos: una para cada tipo de haz.

B. Movimientos rígidos de la geometría euclídea y no euclídea

Estudiemos ahora las transformaciones de Moebius generadas como composición de un número par de inversiones en círculos de los haces canónicos (1), (2) y (3). En cada caso se interpreta al grupo de transformaciones como el grupo de movimientos rígidos de una geometría. Desarrollamos esto último para el grupo hiperbólico solamente.

De la sección (3) podemos ver que los puntos fijos de las transformaciones generadas por la composición de dos inversiones en dos círculos k_1, k_2 tales que $k_1 \cap k_2 = \emptyset$, coinciden con los puntos de intersección de los círculos ortogonales a k_1, k_2 .

Analogamente cuando $k_1 \cap k_2 = \{P\}$, la transformación de Moebius T que resulta de la composición de las inversiones en k_1, k_2 es tal que $T(P)=P$.

En virtud de lo dicho en la sección 2, si los círculos de inversión k_1 y k_2 pertenecen al haz hiperbólico canónico (3) cuya composición sea T tal que $T(0)=0$, los círculos invariantes de T se debe intersectar en $z=0$, y son por tanto líneas rectas cuyas ecuaciones son de la forma

$$A(z+\bar{z})+iB(\bar{z}-z)=0.$$

Lo mismo ocurre con los haces elíptico y parabólico canónicos

$$A(z+\bar{z})+iB(\bar{z}-z)+C(z\bar{z}-1)=0 \quad \text{y} \quad A(z+\bar{z})+iB(\bar{z}-z)-2C=0$$

Nuevamente, por sencillez, si un punto fijo de T es $z=a$, hacemos la traslación de a , al origen y consideramos T con punto fijo en $z=0$, de manera canónica.

Las transformaciones que dejan fijo el origen en cualquiera de los tres casos son de la forma

$$w = e^{i\theta} z. \quad (4)$$

La reflexión más general que preserve círculos

$$A(w+\bar{z})+iB(\bar{z}-w)+C(w\bar{z}-1)+D(w\bar{z}+1)=0 \quad (5)$$

y que tiene como círculo de reflexión

$$A(z+\bar{z})+iB(\bar{z}-z)+C(z\bar{z}-1)+D(z\bar{z}+1)=0 \quad (6)$$

al componerla con una reflexión en el eje real resulta la transformación de Moebius

$$A(w+z)+iB(z-w)+C(wz-1)+D(wz+1)=0 \quad \dots(7)$$

Del caso particular en que $z=a$ es mapeado en $w = 0$ tenemos

$$(A+iB)a+(D-C)=0,$$

de donde por ser A, B, C y D reales

$$(A+iB)a=C-D \quad \text{y} \quad (A-iB)\bar{a}=C-D$$

Despejando w en (7) y sustituyendo los valores anteriores

$$w = \frac{\bar{a} (C-D)(a-z)}{a (C-D) + (C+D)\bar{a}} \quad \dots(8)$$

Por tanto el movimiento rígido más general generado por reflexiones en los haces canónicos (1), (2) y (3) y que deja fijo

al origen, es entonces la composición de una traslación de a al origen y de una transformación (4).

Estudiamos a continuación las transformaciones de Moebius resultantes de la composición de reflexiones en círculos de cada uno de los haces (1), (2) y (3) con punto fijo en $z=0$.

Para el haz (1) con $D=0$, tenemos

$$w = \frac{\bar{a}(a-z)}{a(1+\bar{a}z)}$$

Sea $e^{i\phi} = \frac{\bar{a}}{a} e^{i\nu}$; para éste caso la transformación (8) resulta

$$w = e^{i\phi} \frac{a-z}{1+\bar{a}z} \quad (9)$$

Sustituyendo $a = \frac{c}{d}$ y $e = -\frac{\bar{d}}{d}$, (9) se escribe

$$w = \frac{\bar{d}z - \bar{c}}{cz + d} \quad \dots(9')$$

que es un movimiento rígido del grupo de transformaciones elípticas, que corresponde a la composición de dos reflexiones en los círculos del haz elíptico (1) si y sólo si $d\bar{d} + c\bar{c} \neq 0$.

Cuando $d=0$ escribimos $e^{i\phi} = -\frac{\bar{c}}{c}$

$$y \quad w = e^{i\phi} \frac{1}{z}$$

que es una transformación que mapea $z=0$ en $z=\infty$ y viceversa.

En la Ec (9) el caso particular $d=0$ no está considerado, por lo que es necesario añadirlo.

Pongamos ahora atención en las transformaciones de Moebius que son composición de dos reflexiones en círculos del haz hiperbólico (3), con $C=0$. Siguiendo el mismo razonamiento que en el caso anterior

$$w = e^{i\phi} \frac{a-z}{1-\bar{a}z} \quad (10)$$

Sean $a = \frac{c}{d}$ y $e^{i\phi} = -\frac{\bar{d}}{d}$, (10) toma la forma

$$w = \frac{\bar{d}z + \bar{c}}{cz + d} \quad \dots(10')$$

Utilizando (5) y la hipótesis $C=0$,

$$D^2 = a\bar{a}(A^2 + B^2)$$

$$\therefore D^2 / (A^2 + B^2) = a\bar{a} < 1 \quad (\text{En este caso } A^2 + B^2 > D^2)$$

$$\therefore d\bar{d} - c\bar{c} > 0, \text{ y por tanto la transformación no es loxodrómica.}$$

Finalmente: los movimientos generados por composición de reflexiones en los círculos del haz (2) son de la forma

$$w = e^{i\phi}(a-z) \quad \dots (11)$$

Por el lema de la sección 7 el conjunto de los movimientos rígidos (9), (10) y (11) son subgrupos del grupo de transformaciones de Moebius.

Estudiamos a continuación los invariantes de cada subgrupo de transformaciones: distancia entre dos puntos de una recta y ángulo entre rectas.

9. Distancias Invariantes

La transformación (11) es un movimiento rígido del plano euclideo. Si z_1 y z_2 son mapeados en w_1 y w_2 , respectivamente,

$$|w_1 - w_2| = |z_1 - z_2|$$

Una igualdad similar se satisface para (7) y (8).

Sean

$$\zeta = \frac{z_2 - z_1}{1 + \bar{z}_2 z_1} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{w_2 - w_1}{1 + \bar{w}_2 w_1}$$

Por ser un grupo, la composición de éstas dos transformaciones es de nuevo una transformación del mismo tipo, que satisface $\omega(0) = 0$; por (4),

$$\omega = e^{i\theta} \zeta$$

$$\therefore \left| \frac{w_1 - w_2}{1 + \bar{w}_2 w_1} \right| = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 + \bar{z}_2 z_1} \right|$$

Un razonamiento análogo es aplicable al grupo de transformaciones (8), y la relación

$$\left| \frac{w_1 - w_2}{1 - \bar{w}_2 w_1} \right| = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_2 z_1} \right|$$

se satisface.

Proposición

$$1. \tau(z_1, z_2) = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 + \bar{z}_2 z_1} \right|$$

$$2. \tau'(z_1, z_2) = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_2 z_1} \right|$$

$$3. \tau''(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

son invariantes de los grupos de transformaciones (9), (10) y (11), respectivamente.

La invariante $\tau'(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ es la distancia euclidea, invariante en el plano de Euclides.

Por tanto si z_1, z_2 y z_3 son tres puntos colineales

$$\tau(z_1, z_3) = \tau(z_1, z_2) + \tau(z_2, z_3) \quad \dots (10)$$

siempre que z_2 sea un punto entre z_1 y z_3 .

Sin embargo no se satisface una condición semejante para los invariantes τ' y τ'' en el plano euclideo, pero considerando que una inversión en un círculo de un haz elíptico corresponde, en la esfera de Kiemann a la inversión en un círculo máximo, y que la composición de este con otra inversión en otro círculo es una rotación de la esfera, podríamos suponer que el invariante τ' está relacionado con la distancia esférica $E_s(z_1, z_2)$ de las proyecciones estereográficas de los puntos z_1 y z_2 .

El objetivo es entonces obtener una función tal que

$$E_s(z_1, z_2) = f(\tau'(z_1, z_2))$$

y que satisfaga la aditividad lineal (10). La construcción de la función es detallada y clara en (10), y la ecuación que se define para $E_s(z_1, z_2)$ es

$$\operatorname{tg} \frac{E_s(z_1, z_2)}{2} = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 + \bar{z}_1 z_2|}$$

Un razonamiento análogo se aplica con el invariante τ'' y se construye una distancia invariante $E_n(z_1, z_2)$ tal que

$$\operatorname{tgh} \frac{E_n(z_1, z_2)}{2} = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|}$$

Esta distancia se interpreta como la distancia invariante del plano no-euclideo.

Un modelo del plano no euclideo con la distancia $E_n(z_1, z_2)$, y en la cual el ángulo de inclinación entre curvas es igual al ángulo euclideo usual fue dado por Poincaré. En este modelo el plano no-euclideo corresponde al semiplano $H = \{z \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$, llamado el semiplano de Poincaré. Damos en seguida una exposición detallada del mismo y de la geometría a él asociada.

10. Geometría Hiperbólica

Se ha visto que las inversiones en círculos del haz hiperbólico (3) son tales que $|z| < 1$ son mapeados en puntos $|w| < 1$.

Este hecho hace posible identificar al disco unitario Δ como la imagen del plano no-euclideo. En este contexto las "líneas rectas" del plano no-euclideo, corresponden a los círculos interiores y ortogonales al círculo $|z| < 1$, al que se denomina horizonte del plano no-euclideo.

En este contexto, los cuatro primeros axiomas de la geometría de Euclides se satisfacen:

- Por dos puntos pasa una y solo una línea recta.
- Dos rectas se intersectan en un solo punto.
- Los axiomas de congruencia de triángulos se satisfacen para este grupo de movimientos rígidos.

Sin embargo, por un punto P exterior a una recta dada g, pasa más de una recta que no intersecciona a g:

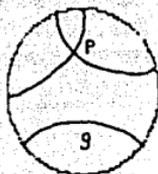


Fig. 7

Toda recta tiene dos puntos finales distintos que están sobre el círculo de radio 1. Todo punto interior de Δ se une a un punto dado del horizonte mediante una única recta.

Definición

Se dice que dos H-rectas que tienen un punto final común, son **paralelas**.

Por tanto dada una línea g con puntos finales A y D, existen dos rectas paralelas a g con puntos finales A y B y C y D, respectivamente. El haz de círculos que pasa por el punto P, está formado por rectas que interseccionan a g y por rectas que no lo hacen. En la figura la recta l_1 es tal que $l_1 \cap g = T$, en tanto que $l_2 \cap g = \emptyset$. A las rectas de este segundo tipo se les llama **ultra-paralelas** a g, de las cuales existe más de una. Por tanto el 5o. postulado de Euclides no se satisface.

La modificación del axioma de las paralelas modifica los teoremas que de él se deducen. Así por ejemplo, la suma de los ángulos interiores de un H-triángulo no es π , sino $\langle \pi$. Tomando esta consideración, los axiomas de congruencia se satisfacen en la geometría hiperbólica. Por otro lado, los teoremas cuyas demostraciones no utilizan el postulado euclideo de las paralelas se preservan, por ejemplo: *La H-línea perpendicular al H-segmento ab en su punto medio, es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de a y b.*

Sea $\Omega_{\mathbb{R}}$ el conjunto de transformaciones de Moebius con coeficientes reales:

$$\Omega_{\mathbb{R}} \left\{ w = \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc \neq 0 \right\}.$$

Teorema

$T \in \Omega_{\mathbb{R}}$ si y sólo si T preserva H.

Demostración

←

Sea T tal que $T(H) = H$. Por continuidad $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Si $z \in \mathbb{R}$, $z = \bar{z} \rightarrow T(z) = \bar{T}(\bar{z}) = \bar{T}(z)$.

$\therefore T = \bar{T}$

Puesto que los coeficientes de T difieren solamente en un factor de ± 1 debe suceder que los coeficientes de T sean iguales a sus conjugados o iguales a sus conjugados negativos. En el segundo caso

$$\operatorname{Im}(T(i)) = \frac{\operatorname{Im}\{(ai+b)(-\bar{c}i+d)\}}{|ci+d|^2} = \frac{bc-ad}{|ci+d|^2} = -|ci+d|^{-2} < 0$$

lo cual no es posible. \therefore los coeficientes de T son reales,

$\therefore T \in \Omega_{\mathbb{R}}$.

\hookrightarrow

Si $T \in \Omega_{\mathbb{R}}$, entonces $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Por ser T de Moebius T es conforme, $\therefore T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.

lqgd.

Obsérvese que $\Omega_{\mathbb{R}}$ es un subgrupo del grupo de transformaciones de Moebius, cuyos elementos se denominan **transformaciones reales**.

Por definición $\chi = a+d$ es siempre real si T es real; por tanto una T real nunca es loxodromica: es elíptica, parabólica o hiperbólica según que $|\chi|$ es mayor, igual, o menor a dos.

Los puntos fijos de una transformación están dados por

$$\zeta_{1,2} = \frac{a-d \pm (\chi^2 - 4)^{1/2}}{2c}$$

de donde se deduce que una transformación elíptica tiene dos puntos fijos reales conjugados, una hiperbólica dos puntos fijos reales distintos, en tanto que una parabólica tiene un único punto fijo doble real.

Definición

La **distancia hiperbólica** se definirá por medio de la diferencial

$$ds = \frac{|d\tau|}{y}, \quad \tau = x+iy$$

Proposición

Sea una transformación T en $\Omega_{\mathbb{R}}$ arbitraria. Entonces ds es una invariante de T .

Demostración

Sea $T \in \Omega_{\mathbb{R}}$, $\tau' = T\tau = x'+iy'$

$$y' = \frac{y}{|c\tau+d|^2}, \quad y \, d\tau' = \frac{1}{(c\tau+d)^2} = \frac{d\tau}{(c\tau+d)^2}$$

$$\therefore \frac{|d\tau'|}{y'} = \frac{|d\tau|/|(c\tau+d)^2|}{y/|c\tau+d|^2} = \frac{|d\tau|}{y}$$

$$\therefore ds = ds'$$

Definición

La **distancia hiperbólica** entre dos puntos se define como

$$\int_C ds$$

donde C es la H -línea que une los dos puntos.

La siguiente proposición es corolario de la anterior:

Proposición

Sea C la H-línea que une los puntos a y b , y $C' = T(C)$ la H-línea que une los H-puntos $T(a)$ y $T(b)$. Entonces

$$\int_a^b \frac{|d\tau|}{y} = \int_{T(a)}^{T(b)} \frac{|d\tau|}{Y}$$

Es decir $d(a,b) = d(Ta, Tb)$, para toda $T \in \Omega_{\mathbb{R}}$.

Proposición

Las H-líneas son las geodésicas de la geometría hiperbólica.

Demostración

Basta con demostrarlo para un segmento en el eje imaginario, pues la transitividad de $\Omega_{\mathbb{R}}$ lo hace extensivo para cualquier H-línea.

Sea $L = \{\tau = iy \mid 1 \leq y \leq y_0\}$

y L' una curva diferenciable en H , que une los puntos finales de L :

$$L' = \{\tau = x + iy\}$$

tal que: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \leq t \leq 1$
 $x(0) = x(1) = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = y_0$.

La longitud $|L'|$ está dada por

$$|L'| = \int_{L'} \frac{|d\tau|}{y} = \int_0^1 \frac{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{1/2}}{y(t)} dt$$

$$\geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \log y(t) \Big|_0^1 = \log \frac{y(1)}{y(0)} =$$

$$= \log y_0 = \int_0^{y_0} \frac{dy}{y} = |L|.$$

lqgd.

De ésta proposición se deduce que la H-distancia satisface la desigualdad del triángulo. Todo lo anterior nos permite establecer la siguiente

Proposición

El semiplano H junto con la H-distancia es un espacio métrico.

El conjunto de H-discos

$$S(\tau_0, r) = \{\omega \in H \mid d(\omega, \tau_0) < r, r > 0\}$$

constituyen una base de la topología inducida por la H-distancia. Mas aun:

Lema

un H-disco es un disco euclideo.

Demostración

Sea $\tau_0 \in H$, y $M \in \Omega_{\mathbb{R}}$ una transformación elíptica con puntos fijos

τ_0 y $\bar{\tau}_0$ y multiplicador k .

Los círculos fijos de M son círculos euclideos ortogonales a los que pasan por τ_0 y $\bar{\tau}_0$. Sea C un círculo fijo y $\zeta, \zeta' \in C$ tales que $\zeta' = M\zeta$

$$d(\tau_0, \zeta) = d(M\tau_0, M\zeta) = d(\tau_0, \zeta') = r$$

Por tanto todo punto en C está a la misma distancia r de τ_0 .
Por otro lado, si

$$d(\tau_0, \omega) = r,$$

el círculo que pasa por τ_0 , ω y $\bar{\tau}_0$, es ortogonal a C e interseca a C en ω .

Por tanto, un círculo hiperbólico es un círculo euclídeano. lqgd.

De ésta equivalencia deducimos la siguiente

Proposición

La topología inducida por la H-métrica es equivalente a la topología euclídeana usual.

Esta última equivalencia confirma la interpretación a los elementos de $\Omega_{\mathbb{R}}$ como movimientos rígidos no euclídeanos.

Si T es elíptica con punto fijo τ_0 , un círculo fijo C de T es un círculo con centro τ_0 y T es tal que un H-círculo perpendicular a C es mapeado, en otro H-círculo perpendicular a C que forma con el primero un ángulo θ . Por tanto T es una rotación hiperbólica en τ_0 . Si T es hiperbólica, sus círculos fijos son tales que se intersecan en los puntos fijos de T . Por tanto T es una traslación hiperbólica. Finalmente: cuando los puntos fijos de una transformación elíptica son conjugados (complejos) y tienden al eje real, y por tanto a ser uno y el mismo, T , es, una transformación parabólica de $\Omega_{\mathbb{R}}$ a la que se llama rotación límite.

Capítulo III

EL TEOREMA DE PROGRESION ARITMETICA

En este capítulo se expone una demostración no elemental, utilizando teoría de funciones de variable compleja del Teorema de Progresion Aritmética conjeturado por Legendre y demostrado por Dirichlet.

TEOREMA

Sean a, m , dos números enteros positivos tales que $(a, m) = 1$. El conjunto de números primos p que satisfacen $p \equiv a \pmod{m}$ es infinito.

1. Caracteres de grupos abelianos finitos

Definición 1

Sea G un grupo abeliano finito multiplicativo. Un caracter de G es un homomorfismo $\chi: G \rightarrow C^*$ en el grupo multiplicativo C^* tal que $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1) \chi(g_2)$. El dual de G es el grupo

$$\hat{G} = \text{Hom}(G, C^*) = \{ \chi: G \rightarrow C^* \mid \chi \text{ es homomorfismo} \}$$

Proposición 1

Sea H un subgrupo de G . La restricción

$$\rho(\chi) = \chi|_H$$

de \hat{G} en \hat{H} es suprayectiva. De hecho, $\text{Ker}(\rho) = \{ \chi \mid \chi|_H = I_H \}$.

Por otro lado $G/H = \{ Hg \mid g \in G \} \rightarrow \hat{G}/\hat{H} = \{ \chi(Hg) \mid \chi \in \hat{G} \} = \{ \chi(H) \chi(g) \mid \chi \in \hat{G} \}$. La cardinalidad de este conjunto es entonces el número de caracteres $\neq 0$, $\chi(H) \neq 0_H$ más uno.

Por tanto el grupo formado por los homomorfismos χ tales que $\chi|_H \neq 0_H$ es isomorfo a \hat{G}/\hat{H} .

Proposición 2

El grupo \hat{G} es un grupo abeliano finito del mismo orden que G .

Demostración (Por inducción sobre el orden n de G).

Si $n=1$ $G=0$, y $\hat{G}=1$, y $o(G) = o(\hat{G})$

Sea $n \geq 2$ y H un subgrupo cíclico de G . En virtud de la observación anterior

$$o(\hat{G}) = o(\hat{H})o(\hat{G}/\hat{H})$$

pero $o(\hat{H}) = o(H)$, por ser H cíclico, y $o(\hat{G}/\hat{H}) = o(G/H)$, pues $o(G/H) < n$.

$$\therefore o(\hat{G}) = o(H)o(G/H) = o(G) \quad \text{lqdd.}$$

Hemos demostrado que los órdenes de $G(m)$ y de su dual coinciden. De hecho

$$G(m) \cong \hat{G}(m)$$

Si $x \in G$, la función $\chi \mapsto \chi(x)$ es un carácter de \hat{G} ; más explícito:

Sea $x \in G$. Definimos la función $\epsilon_x: \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ tal que

$$\epsilon_x(\chi) = \chi(x)$$

para todo $\chi \in \hat{G}$. La generalización para todo $x \in G$ es el homomorfismo $\epsilon: G \rightarrow \hat{\hat{G}}$, tal que $\epsilon(x) = \epsilon_x$.

Proposición 3

ϵ es un isomorfismo de G en $\hat{\hat{G}}$.

Demostración

Por la proposición 2

$$o(\hat{\hat{G}}) = o(\hat{G}) = o(G)$$

Sea $x \in G$, $x \neq 1$. Basta con demostrar que exista algún $\chi \in \hat{G}$ tal que $\chi(x) \neq 1$, pues si para todo carácter en \hat{G} $\chi(x) = 1 \Rightarrow x \in \text{Ker}(\epsilon)$, y ϵ no es sería inyectivo.

Sea H el subgrupo cíclico generado por x ; entonces $\exists \chi \in \hat{H}$ tal que $\chi(x) \neq 1$. El carácter χ extendido a todo G es el buscado. lqdd.

1.2 Relaciones de Ortogonalidad

Proposición 4

Sea $n = \text{Card}(G)$ y $\chi \in \hat{G}$. Entonces

$$\sum_{x \in G} \chi(x) = n \text{ si } \chi = 1, \text{ y es } 0 \text{ si } \chi \neq 1.$$

Demostración

Si $\chi = 1 \Rightarrow \chi(x) = 1 \quad \forall x \in G$

$$\therefore \sum_{x \in G} \chi(x) = n \text{ si } \chi = 1.$$

Sea $y \in G$ tal que $\chi(y) \neq 1$, es decir, $\chi \neq 1$

$$\chi(y) \sum_{x \in G} \chi(x) = \sum_{x \in G} \chi(y)(x) = \sum_{x \in G} \chi(xy) = \sum_{x \in G} \chi(x)$$

$$\therefore (\chi(y) - 1) \sum_{x \in G} \chi(x) = 0,$$

como $\chi(y) \neq 1 \rightarrow \sum_{x \in G} \chi(x) = 0$.

lqgd.

Corolario

Sea $x \in G$. Entonces $\sum_{x \in G} \chi(x)$ es n si $x=1$, y es 0 si $x \neq 1$.

La demostración es una aplicación de la proposición al dual \hat{G}

$$\text{Card}(\hat{G}) = \text{Card}(G) = n$$

$$\text{Si } x=1, \epsilon_x = \epsilon_1 \text{ y } \epsilon_1(x) = 1 \quad \forall x \in \hat{G}$$

$$\text{Pero } \epsilon(x) = \chi(1) = 1 \quad \forall x \in \hat{G}. \therefore \sum_{x \in \hat{G}} \chi(x) = n \text{ si } x=1.$$

Sea $x \neq 1$ y $\chi \in \hat{G}$ tal que $\epsilon_x(\chi) = \chi(x) \neq 1$

$$\begin{aligned} \epsilon(x) \sum_{x \in \hat{G}} \epsilon(x) &= \chi(x) \sum_{y \in \hat{G}} \chi(y) = \sum_{x \in \hat{G}} \chi(y) \chi(x) = \sum_{x \in \hat{G}} \chi(xy) = \sum_{y \in \hat{G}} \chi(y) \\ &= \sum_{y \in \hat{G}} \epsilon_y(x). \end{aligned}$$

$$\therefore (\epsilon_x(x) - 1) \sum_{y \in \hat{G}} \epsilon_y(x) = 0; \therefore \sum_{y \in \hat{G}} \chi(y) = 0, \text{ si } y \neq 1.$$

lqgd.

En particular

χ es un caracter de $G(m) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$
 $\text{Card}(G(m)) = \phi(m)$ y $p \in P_m = \{p \in P \mid p \equiv a \pmod{m}\}$

\therefore por el corolario anterior

$$\sum_{x \in G} \chi(a^{-1}p) = \phi(m) \text{ si } a^{-1}p \equiv 1 \pmod{m}, \text{ pues } p \text{ es}$$

representante de cada una de las clases de equivalencia que son elementos de $G(m)$.

lqgd.

Definición (Función ϕ de Euler)

Si d es un entero ≥ 1 , La función ϕ de Euler de d es el número de entero $1 \leq x \leq d$ tales que $(x, d) = 1$.

Definición 2

Sea m un entero positivo. Denotamos por $G(m) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ el grupo multiplicativo de elementos invertibles del anillo $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. $G(m)$ es un grupo abeliano finito de orden $\phi(m)$. Un elemento χ del dual $\hat{G}(m)$ se llama *caracter módulo m* y se puede considerar como una función $\chi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{Z} \mid (z, m) = 1\}$, tal que $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$. Por conveniencia se define $\chi(z) = 0$ para todo z en el complemento de \mathcal{A} .

Ejemplo

$$G(4) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$$

El anillo $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \{[0], [1], [2], [3]\}$, donde

$$[0] = \{0, \pm 4, \pm 8, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -1, -3, -5, -7, -9, 1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

$$[2] = \{\pm 2, \pm 6, \pm 10, \dots\}$$

$$\{3\} = \{ \dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots \}$$

$$\therefore G(4) = \{ [1], [3] \}$$

$$\rightarrow o(\hat{G}(4)) = o(G(4)) = 2,$$

\therefore hay solo dos caracteres en el dual de G : $\chi=0$ y un χ no trivial. Este último es $\chi:G(m) \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que

$$\chi(x) = (-1)^{e(x)} = (-1)^a = 1 \text{ si } x \in [1], \text{ y } (-1)^1 = -1 \text{ si } x \in [3].^{(4)}$$

2. Series de Dirichlet

Definición

Sea (λ_n) una sucesión creciente de números reales que tiende a $+\infty$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\lambda_n \geq 0$ para todo n . La *serie de Dirichlet* con exponentes λ_n es

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \quad a_n, z \in \mathbb{C}.$$

Los términos de la serie son analíticos, y se hace necesario establecer criterios de convergencia para estas series. El teorema central sobre convergencia de funciones analíticas es el de Weirstrass:

Lema 1

Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{C} y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en U que convergen a f uniformemente en todo subconjunto compacto. Entonces f es holomorfa en U y la sucesión de derivadas $\{f'_n\}$ converge uniformemente en todo subconjunto compacto a la derivada f' de f .

En términos de series el teorema puede expresarse como sigue:

Si la serie de términos analíticos

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$$

converge uniformemente en todo subconjunto compacto de U , entonces la suma $f(z)$ es analítica en U y la serie puede ser derivada término a término.

Lema 2 (de Abel)

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones. Sean

$$A_{m,p} = \sum_{n=m}^p a_n \quad \text{y} \quad S_{m,t} = \sum_{n=m}^t a_n b_n$$

entonces

$$S_{m,t} = \sum_{n=m}^{n=t} A_{m,n} (b_n - b_{n+1}) + A_{m,t} b_t$$

Lema 3

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \beta$. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ una serie entera. Entonces $|e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}| \leq |z|/x (e^{-\alpha x} + e^{-\beta x})$.

Proposición 5

Si la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge para $z = z_0$, entonces converge uniformemente en todo dominio

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z - z_0) \geq 0, \operatorname{Arg}(z - z_0) \leq \alpha; \alpha < \pi/2\}$$

Demostración

Si denotamos con $S_t = \sum_{n=1}^{n=t} a_n e^{-\lambda_n z}$ y $S_m = \sum_{n=1}^{n=m} a_n e^{-\lambda_n z}$

y $S_{m,t} = S_t - S_m = \sum_{n=m}^{n=t} a_n e^{-\lambda_n z}$; por lema anterior esta expresión es

$$\text{igual a } \sum_{n=m}^{n=t} A_{m,n} (e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}) + A_{m,t} e^{-\lambda_t z}$$

Se demostrará la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ mostrando que $S_{m,t}$ satisface las condiciones de Cauchy de convergencia uniforme. Es decir, que dado $\epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$ tal que si $m, t \geq N$, entonces $|S_{m,t}| < \epsilon$ para todo z en el dominio de H .

Sea $T_{z_0}: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ la traslación sobre z_0 , $T_{z_0}(z) = z - z_0$ tal que $T_{z_0}(z_0) = 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $z_0 = 0$.

Esto implica que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y que dado $\epsilon > 0 \exists N$ tal que

$$|A_{m,t}| = \left| \sum_{n=m}^{n=t} a_n \right| < \epsilon \text{ si } m, t \geq N.$$

Aplicando lema con $(b_n) = (e^{-\lambda_n z})$ tenemos

$$S_{m,t} = \sum_{n=m}^{n=t-1} A_{m,n} (e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}) + A_{m,t} e^{-\lambda_t z};$$

Escribiendo $z = x + iy$ y aplicando el lema 3

$$|S_{m,t}| \leq \sum_{n=m}^{n=t-1} |A_{m,n}| |e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}| + |A_{m,t}| |e^{-\lambda_t z}|$$

Aplicando de nuevo lema 3 a $z = x + iy$ con $x = \operatorname{Re}(z) > 0$ la expresión anterior es menor o igual que

$$\begin{aligned} & \sum_{n=m}^{n=t-1} \epsilon |z|/x (e^{-\lambda_n x} + e^{-\lambda_{n+1} x}) + \epsilon \\ & = \epsilon (1 + |z|/x \sum_{n=m}^{n=t-1} (e^{-\lambda_n x} + e^{-\lambda_{n+1} x})) \end{aligned}$$

$$= \varepsilon(1+|z|/x (e^{-\lambda_m x} - e^{-\lambda_1 x})) \dots\dots\dots (*)$$

haciendo $\sec(\arg(z)) = |z|/x \leq k$, $k = \sec \alpha$, lo cual implica $\arg z \leq \pi/2$ (ver apéndice), (*) es menor o igual a

$$\varepsilon(1+k(e^{-\lambda_m x} - e^{-\lambda_1 x})) \leq \varepsilon(1+k).$$

Retomando los extremos de esta serie de desigualdades concluimos

$$|S_{m,l}| \leq \varepsilon(1+k);$$

$\sum a_n e^{-\lambda_n z}$ converge uniformemente en H . lqgd

Corolario 1

Si $f(z) = \sum a_n e^{-\lambda_n z}$ converge en $z = z_0$, entonces converge en el semiplano $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)\}$ y la función es holomorfa.

Demostración.

La proposición anterior asegura la convergencia. Por otro lado, si CSH es compacto, por el teorema de Weierstrass, la función f es uniformemente convergente en C , y holomorfa en H .

Corolario 2

El conjunto de convergencia de la serie f contiene un semiplano máximo de convergencia, llamado el **semiplano de convergencia**.

Corolario 3

En el dominio $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z - z_0) \geq 0 \text{ y } |\arg(z - z_0)| \leq \alpha, \alpha < \pi/2\}$ $f(z)$ converge a $f(z_0)$ cuando $z \rightarrow z_0$.

Corolario 4

La función $f(z)$ es idénticamente cero si y sólo si $a_n = 0 \forall n$.

Consideremos ahora la serie de Dirichlet que se obtiene de tomar $\lambda_n = \log n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\log n z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\log n^{-z}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n / n^z;$$

La serie $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n / n^s$ se llama la **serie ordinaria de Dirichlet**.

Proposición 6

Si los coeficientes a_n son acotados, la serie ordinaria de Dirichlet es absolutamente convergente en el semiplano $\operatorname{Re}(s) > 1$, $s \in \mathbb{C}$.

Demostración

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ es convergente si $\alpha > 1$;

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n/n^s| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|/n^{\text{Re}(s)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} k/n^x;$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ es absolutamente convergente.

lqqd

3. Z-funciones y la función ζ de Riemann

Definición

La función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es **multiplicativa** si $f(mn) = f(m)f(n)$ siempre que $(m, n) = 1$.

Un ejemplo de función multiplicativa es la función ϕ de Euler (ver Niven-Zukerman.- Introducción a la teoría de números).

Sea f función multiplicativa acotada

Lema 4

La serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s$ es absolutamente convergente

en $H = \{s \in \mathbb{C} | \text{Re}(s) > 1\}$ e igual al producto infinito

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + f(p)p^{-s} + f(p^2)p^{-2s} + \dots),$$

donde \mathbb{P} es el conjunto de los números primos.

Demostración

La convergencia absoluta, en H se sigue de que $f(n)$ es acotada para toda n y de la proposición 8. Sea $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n | p_k \text{ es primo}\}$

y $N(S) = \{n \in \mathbb{N} | n = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}, p_k \in S, 1 \leq k \leq n\}$, entonces

$$\sum_{n \in N(S)} f(n)/n^s = \prod_{p \in S} \left(\sum_{m=0}^{\infty} f(p^m)/p^{ms} \right)$$

En efecto, cuando $S \rightarrow \mathbb{P}$, $N(S) \rightarrow \mathbb{N}$, y en el límite corresponde a

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = 1/1-r \text{ si } |r| < 1$$

lqqd

Definición

La función f es **estrictamente multiplicativa**, si

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

En virtud de la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \text{ si } |r| < 1 \text{ tenemos la siguiente igualdad}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} f(p^m)/p^{ms} \right)$$

Lema 5

Si f es estrictamente multiplicativa

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - f(p)/p^s)^{-1}$$

Demostración

Por el lema 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + \sum_{m=1}^{\infty} f(p^m)/p^{ms}),$$

$$\begin{aligned} \text{por hipótesis} &= \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + \sum_{m=1}^{\infty} f(p)^m/p^{ms}) \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + \sum_{m=1}^{\infty} (f(p)/p^s)^m) \end{aligned}$$

Por ser f acotada y $\operatorname{Re}(s) > 1$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$|f(p)/p^s| < 1$$

$$\therefore \sum_{m=1}^{\infty} (f(p)/p^s)^m = \frac{1}{1 - f(p)/p^s}$$

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + \sum_{m=1}^{\infty} (f(p)/p^s)^m) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^s}}$$

lqcd.

Observación

La función $f=0$ es estrictamente multiplicativa y acotada,

Definición

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - 1/p^s} \quad \text{para } \operatorname{Re}(s) > 1$$

es la función ζ de Riemann.

Proposición 7

(a) La función ζ es holomorfa y $\neq 0$ en el semiplano

$$H = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1\}$$

(b) $\zeta(s)$ se puede escribir como $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \phi(s)$ donde $\phi(s)$ es función holomorfa en $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}$.

Demostración

La afirmación (a) sólo enfatiza un hecho implícito.

$$(b) \quad \frac{1}{s-1} = \int_1^{\infty} t^{-s} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} t^{-s} dt;$$

$$\begin{aligned} \therefore \phi(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \frac{1}{s-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} t^{-s} dt + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \\ &= \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n^{-s} - \int_n^{n+1} t^{-s} dt) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (n^{-s} - t^{-s}) dt$$

$$\text{señal } \phi_n(s) = \int_n^{n+1} (n^{-s} - t^{-s}) dt \quad \text{y} \quad \phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(s).$$

$\phi_n(s)$ es una función bien definida y analítica para $\text{Re}(s) > 1$

$$|\phi_n(s)| = \left| \int_n^{n+1} (n^{-s} - t^{-s}) dt \right| \leq \int_n^{n+1} |n^{-s} - t^{-s}| dt$$

$$\leq \sup_{n \leq t \leq n+1} |n^{-s} - t^{-s}|. \text{ Por otro lado } \frac{d(n^{-s} - t^{-s})}{dt} = -\frac{s}{t^{s+1}},$$

que en norma es decreciente cuando $\text{Re}(s) > 0$.

$$\therefore |\phi_n(s)| \leq \frac{|s|}{n^{s+1}}, \text{ con } x = \text{Re}(s) > 0.$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(s) \text{ converge en norma para } \text{Re}(s) > 0,$$

$$\therefore \phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(s) \text{ es convergente y holomorfa.}$$

lqgd.

Corolario 1

La función $\zeta(s)$ tiene un polo simple en $s=1$.
Es claro, pues $\phi(s)$ es holomorfa.

Corolario 2

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \sum_{p \in \mathcal{P}} p^{-s} \approx \lim_{s \rightarrow 1^+} \log \frac{1}{s-1} \quad \text{y} \quad \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \geq 2}} \frac{1}{p^{k^s}}$$

es acotada cuando s tiende a 1.

Demostración

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - 1/p^s};$$

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \log \frac{1}{1 - 1/p^s} = - \sum_{p \in \mathcal{P}} \log(1 - 1/p^s)$$

El desarrollo de la serie de Taylor de $\log(1 - 1/p^s)$ alrededor de $z=0$ permite escribir la expresión anterior como

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^k} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k};$$

$$\sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ k \geq 2}} \frac{1}{kp^k} \text{ es un mayorante de } \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^{s+1}} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s(p-1)}$$

$$\leq \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1;$$

$\therefore f(s) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ k \geq 2}} \frac{1}{kp^k}$ es acotada y en consecuencia su
 módulo $|f(s)| \leq M \forall s$.
 Por otro lado

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} p^{-s} + \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ k \geq 2}} \frac{1}{kp^k}$$

y también

$$\log \zeta(s) = \log\left(\frac{1}{s-1} + \phi(s)\right);$$

cuando $s \rightarrow 1$ $\sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ k \geq 2}} \frac{1}{kp^k}$ está acotada y $\phi(s)$ es convergente.

Esto implica que en la primera igualdad

$$\log \zeta(s) \cong \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ s > 1}} p^{-s}$$

puesto que $\zeta(s)$ tiene un polo simple en $s=1$, y en la segunda igualdad

$$\log \zeta(s) \cong \log \frac{1}{s-1};$$

$$\therefore \log \frac{1}{s-1} \cong \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ s > 1}} p^{-s}$$

lqgd

3.1 χ -funciones

Sea $m \in \mathbb{N}$ y χ un caracter módulo m . La serie de Dirichlet

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

es la L -función correspondiente a χ .

Los términos de la serie que corresponden a primos relativos a m son $\neq 0$.

Proposición 8

Si $F(s) = \prod_{p|m} (1 - 1/p^s)$, entonces

$$F(s)\zeta(s) = L(s, 1)$$

Demostración

$$\begin{aligned} F(s)\zeta(s) &= \prod_{p|m} (1 - 1/p^s) \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - 1/p^s} \\ &= \prod_{p|m} (1 - 1/p^s) \prod_{p|m} \frac{1}{1 - 1/p^s} \prod_{p \notin m} \frac{1}{1 - 1/p^s} \end{aligned}$$

$$\prod_{p \nmid m} (1 - 1/p^s)$$

$$\therefore \Gamma(s)\zeta(s) = L(s, 1).$$

lqgd.

Definición

Sea $C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva plana. Sea f_0 analítica en $B_{r_0}(C(0))$, f_1 analítica en $B_{r_1}(C(1))$. Se dice que f_1 es la **continuación analítica de f_0** a lo largo de C si existe una familia de funciones analíticas f_t definidas en $B_{r_t}(C(t))$, $r_t > 0$, $t \in [0, 1]$, de tal manera que para cada t_0 exista $\epsilon > 0$ tal que

1. $C(t) \in B_{r_{t_0}}(C(t))$ para $|t - t_0| < \epsilon$;
2. f_t es continuación analítica directa² de f_{t_0} para $|t - t_0| < \epsilon$.

También $\zeta(s, 1)$ tiene un polo simple en $s=1$ y se puede extender analíticamente en $\{s | \operatorname{Re}(s) > 1\}$.

3.2 Producto de L-funciones relativas al mismo entero

Sea m un número natural fijo y $p \in \mathbb{Z}$ tal que $p \nmid m$. Sea \bar{p} el representante de p en $G(m) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$, $\langle \bar{p} \rangle$ el subgrupo generado por \bar{p} en $G(m)$ y el grupo cociente $G(m)/\langle \bar{p} \rangle$.

Sea $f(p)$ el orden de p en $G(m)$, es decir, el natural más pequeño tal que $p^{f(p)} \equiv 1 \pmod{m}$; el orden de $G(m)/\langle \bar{p} \rangle$ es $\phi(G(m))/\phi(\langle \bar{p} \rangle) = \phi(\phi(m))/\phi(f(p)) = g(p)$.

Por otro lado sea $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ el conjunto de raíces $f(p)$ -ésimas de la unidad, entonces existen $g(p)$ caracteres χ de $G(m)$ tales que $\chi(p) = w_i$ para alguna i , $1 \leq i \leq f(p)$. Esto junto con la igualdad (ver apéndice 4)

$$\prod_{i=1}^{f(p)} (1 - w_i T) = 1 - T^{f(p)}$$

nos permite establecer el siguiente

Lema 6

$$\text{Si } p \nmid m, \quad \prod_{\chi \in G(m)} (1 - \chi(p)T) = (1 - T^{f(p)})^{g(p)}.$$

Demostración.

Sea χ uno de los $g(p)$ caracteres tales que $\chi(p) = w_i$

$$\prod_{\chi} (1 - \chi(p)T) = \prod_{i=1}^{f(p)} (1 - w_i T) = 1 - T^{f(p)}$$

$$\rightarrow \prod_{\chi}^{g(p)} [\prod (1-\chi(p)T)] = (1-T^{f(p)})^{g(p)}$$

Pero

$$\prod_{\chi}^{g(p)} [\prod (1-\chi(p)T)] = \prod_{\chi \in G(m)} (1-\chi(p)T)$$

$$\therefore \prod_{\chi \in G(m)} (1-\chi(p)T) = (1-T^{f(p)})^{g(p)}$$

lqcd.

Definimos la función $\zeta_m(s)$ como sigue:

$$\zeta_m(s) = \prod_{\chi \in G(m)} L(s, \chi)$$

Proposición 9

$$\zeta_m(s) = \prod_{p \nmid m} \frac{1}{(1 - 1/p^{f(p)s})^{g(p)}}$$

es igual a una serie de Dirichlet con coeficientes enteros positivos que converge en $H = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1\}$.

Demostración.

$$L(s, \chi) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \chi(p)/p^s}$$

$$\therefore \zeta_m(s) = \prod_{\chi \in G(m)} \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \chi(p)/p^s}$$

$$= \prod_{p \in P} \prod_{\chi \in G(m)} \frac{1}{1 - \chi(p)/p^s}$$

$$= \prod_{p \nmid m} \prod_{\chi \in G(m)} \frac{1}{1 - \chi(p)/p^s} = \prod_{p \nmid m} \prod_{\chi \in G(m)} \frac{1}{1 - \chi(p)/p^s}$$

$$= \prod_{p \nmid m} \prod_{\chi \in G(m)} \frac{1}{1 - \chi(p)/p^s};$$

Por lema, tomando $T = p^{-s}$

$$\prod_{\chi \in G(m)} \frac{1}{1 - \chi(p)/p^s} = \frac{1}{(1 - 1/p^{f(p)s})^{g(p)}};$$

$$\therefore \prod_{p \nmid m} \prod_{\chi \in G(m)} \frac{1}{1 - \chi(p)/p^s} = \prod_{p \nmid m} \frac{1}{(1 - 1/p^{f(p)s})^{g(p)}}$$

Por otro lado

$$\prod_{p \in m} \frac{1}{(1 - 1/p^{f(p)a} g(p)^{g(p)})} = \prod_{p \in m} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p^{f(p)a} g(p)^{g(p)}} \right)^n \right)^{g(p)}$$

$\therefore a_n = 1$ para toda n

El producto converge en H por definición, pues cada uno de sus factores es convergente en H .

lqgd.

Teorema 1

(a) $\zeta_m(s)$ tiene un polo simple en $s=1$.

(b) $L(1, \chi) \neq 0$ para todo $\chi \neq I$.

Mostraremos primero el inciso (b).

Supongamos $L(1, \chi) = 0$ para algún $\chi \neq I$. Entonces

$$\zeta_m(s) = \prod_{\chi \in G(m)} L(s, \chi) = 0 \quad \text{en } s=1$$

$\rightarrow \zeta_m(s)$ es holomorfa en $s=1$.

Por la proposición 11 $L(s, 1)$ se puede extender analíticamente en $\text{Re}(s) > 0$, para todo $\chi \neq I$. Esto implica que $\zeta_m(s)$ es holomorfa en $\text{Re}(s) > 0$.

Por otro lado el p -ésimo factor de $\zeta_m(s)$ es:

$$\frac{1}{(1 - 1/p^{f(p)a} g(p)^{g(p)})} = (1 + p^{-f(p)a} + \dots + p^{-f(p)an} + \dots)^{g(p)}$$

que es un mayorante de la serie

$$1 + p^{-\phi(m)a} + \dots + p^{-n\phi(m)a} + \dots$$

\therefore los coeficientes de $\zeta_m(s)$ son mayores que los de la serie

$$\sum_{(n,m)=1} n^{\phi(m)a}$$

la cual diverge para $s = \frac{1}{\phi(m)}$ *contradicción!*

$\therefore L(1, \chi) \neq 0$ para todo $\chi \neq I$

Demostración de (a)

$$\zeta_m(s) = \prod_{\chi \in G(m)} L(s, \chi) = L(s, 1) \prod_{\substack{\chi \in G(m) \\ \chi \neq I}} L(s, \chi)$$

$L(s, \chi)$ converge en $H = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$ para todo $\chi \neq I$, es $\neq 0$ y $L(s, 1)$ tiene un polo simple en $s=1$ (Proposición 12 y 14 respectivamente). $\therefore \zeta_m(s)$ tiene un polo simple en $s=1$

lqgd.

4. DENSIDAD Y TEOREMA DE DIRICHLET

Definición

Decimos que el subconjunto A de \mathbb{P} tiene densidad k , $0 \leq k \leq 1$, si

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\sum_{p \in A} p^{-s}}{\log \frac{1}{s-1}} \rightarrow k.$$

Vimos que cuando s tiende a 1

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} p^{-s} \approx \log \frac{1}{s-1}$$

\therefore la densidad de \mathbb{P} , $d(\mathbb{P})$, tiende a 1 cuando s tiende a 1.

Teorema 2

Sea m entero mayor o igual a 1 y $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a, m) = 1$. Sea $\mathbb{P}_a = \{p \in \mathbb{P} \mid p \equiv a \pmod{m}\}$. El conjunto \mathbb{P}_a tiene densidad $1/\phi(m)$.

Necesitamos los siguientes elementos para demostrarlo.

Sea χ un caracter de $G(m)$, definimos

$$f_\chi(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}_m} \frac{\chi(p)}{p^s},$$

la cual es una serie de Dirichlet convergente en $H = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1\}$

Lema 2.1

Si $\chi = \mathbf{I}$, $f_\chi \approx \log \frac{1}{s-1}$ cuando $s \rightarrow 1$

Demostración

$f_1(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}_m} \frac{1}{p^s}$; $\sum_{p \in \mathbb{P}_m} \frac{1}{p^s}$ difiere de $\sum_{p \in \mathbb{P}} p^{-s}$ en un número

finito de términos, y hemos visto que $\sum_{p \in \mathbb{P}} p^{-s} \approx \log \frac{1}{s-1}$ cuando s

tiende a 1.

$$\therefore f(s) \approx \log \frac{1}{s-1}$$

lqgd.

Lema 2.2

La función

$$f_\chi(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}_m} \frac{\chi(p)}{p^s}$$

es acotada para todo $\chi \neq \mathbf{I}$ cuando $s \rightarrow 1$.

Demostración

$$L(s, \chi) = \prod_{\chi \in G(m)} \frac{1}{1 - \chi(p)/p^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

$$\therefore \log L(s, \chi) = \sum_{\chi \in G(m)} \log \frac{1}{1 - \chi(p)/p^s} = - \sum_{\chi \in G(m)} \sum_{p \in \mathbb{P}_m} \frac{\chi(p)}{p^s}$$

Al considerar su desarrollo en serie de Taylor alrededor de $z=0$ en

el círculo de convergencia $|z| < 1$, obtenemos

$$\log L(s, \chi) = \sum_{\substack{p \in P \\ n \in \mathbb{N}}} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}}$$

en la franja principal de logaritmo; por otro lado

$$\sum_{\substack{p \in P \\ n \in \mathbb{N}}} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}} = f_{\chi}(s) + \sum_{\substack{p \in P \\ n \geq 2}} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}},$$

por teorema 1 $L(s, \chi)$ converge cuando $s \rightarrow 1$, y por tanto $\log L(s, \chi)$ está acotado. Por el corolario 2 a la proposición 10.

$$\sum_{\substack{p \in P \\ n \in \mathbb{N}}} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}} \text{ está acotada cuando } s \rightarrow 1.$$

$\therefore f_{\chi}(s)$ está acotada cuando $s \rightarrow 1$, $\chi \neq 1$.

□

Sea $g_a(s) = \sum_{p \in P_a} p^{-s}$; entonces, cuando $s \rightarrow 1$,

$$g(s) \approx \log \frac{1}{s-1}.$$

Lema 2.3

$$g(s) = \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\chi \in G(m)} \chi(a)^{-1} f_{\chi}(s)$$

Demostración

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \in G(m)} \chi(a)^{-1} f_{\chi}(s) &= \sum_{\chi \in G(m)} \chi(a)^{-1} \sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p)}{p^s} \\ &= \sum_{p \nmid m} \sum_{\chi \in G(m)} \frac{\chi(a^{-1}) \chi(p)}{p^s} \\ &= \sum_{p \nmid m} \sum_{\chi \in G(m)} \frac{\chi(a^{-1} p)}{p^s} \end{aligned}$$

Por el corolario de la proposición 4

$$\sum_{\chi \in G(m)} \chi(a^{-1} p) \text{ es } \phi(m) \text{ si } a^{-1} p \equiv 1 \pmod{m} \text{ y cero en}$$

el complemento de este conjunto.

Como en este caso $a \equiv p \pmod{m} \Rightarrow a^{-1} p \equiv 1 \pmod{m}$,

$$\therefore \phi(m)g(s) = \sum_{p \nmid m} \sum_{\chi \in G(m)} \frac{\chi(a^{-1}p)}{p^s} = \sum_{p \nmid m} \frac{\phi(m)}{p^s} = \sum_{p \in P_a} \frac{\phi(m)}{p^s}$$

$$\therefore g(s) = \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\chi \in G(m)} \chi(a)^{-1} f_{\chi}(s)$$

lqgd

demostración del teorema:

Por el lema 7 $f_{\mathbf{1}}(s) = \sum_{p \nmid m} \frac{1}{p^s} \approx \log \frac{1}{s-1}$ en general.

Por el lema 8, para toda $\chi \neq \mathbf{1}$, $f_{\chi}(s)$ es acotada.

Por tanto puesto que $\log \frac{1}{s-1} \rightarrow \infty$ cuando $s \rightarrow 1$, usando

lema 9 tenemos

$$\sum_{p \nmid m} \frac{1}{p^s} = \sum_{\chi \in G(m)} \chi(a)^{-1} f_{\chi}(s) \approx \frac{1}{\phi(m)} \log \frac{1}{s-1},$$

es decir,

$$\frac{\sum_{p \in P_a} p^{-s}}{\log \frac{1}{s-1}} \rightarrow \frac{1}{\phi(m)} \quad \text{cuando } s \rightarrow 1,$$

$$\therefore d(P_a) = \frac{1}{\phi(m)}$$

lqgd.

Por tanto el conjunto P_a es infinito.

De hecho la densidad de un subconjunto A finito de P es cero.

Capítulo IV

SUPERFICIES DE RIEMANN

La función $z = w^{1/n}$ es la inversa de

$$w = z^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si $w = \rho e^{i\phi}$, las n raíces de w son de la forma

$$w_i = \rho^{1/n} e^{i(\phi + 2\pi/n)}$$

$1 \leq i \leq n$. Pero entonces $z = w^{1/n}$ no es una función bien definida.

Si $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, la función $w = z^n = r^n e^{in\theta}$ cubre n veces el plano complejo \mathbb{C} , pues $0 \leq n\theta \leq n(2\pi)$; de hecho la región $\{z \mid (i-1)2\pi/n \leq \theta \leq i2\pi/n, 1 \leq i \leq n\}$

se mapea bajo $w = z^n$ en todo \mathbb{C} . Por tanto $w = z^n$ "produce" n copias de \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} R_1 &= \{z \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi/n\} && \rightarrow && C_1 \\ R_2 &= \{z \mid 2\pi/n \leq \theta \leq 4\pi/n\} && \rightarrow && C_2 \\ &\vdots && && \vdots \\ R_n &= \{z \mid (n-1)2\pi/n \leq \theta \leq 2\pi\} && \rightarrow && C_n \end{aligned}$$

donde cada C_i es \mathbb{C} y el subíndice es una mnemotecnica para distinguir de que región proviene cada copia bajo el mapeo w .

Los puntos en el dominio de w con argumento $i(2\pi)/n$ son mapeados en \mathbb{R}^+ , por lo que copias sucesivas de \mathbb{C} están unidas en el semieje real positivo. Al hacer un "corte" de cada copia a lo largo de su semieje real positivo obtendremos un plano semicortado como se ilustra a continuación (Fig. 1).

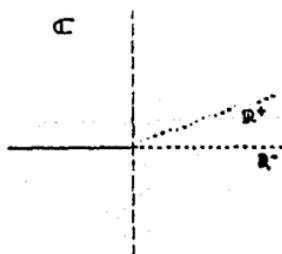


Fig 1

La arista superior corresponde al mapeo de los puntos con argumento $(i-1)2\pi/n$ de la región R_i , y la arista inferior es

mapeada por los puntos de argumento $i(2\pi)/n$ que están en la región R_{i+1} . Si unimos la arista inferior de C_i con la arista superior de C_{i+1} obtenemos dos planos superpuestos unidos a lo largo del "corte" que corresponden al mapeo de las regiones R_i y R_{i+1} bajo w .

Este procedimiento es aplicable a las $n-2$ copias restantes, tomando la consideración de identificar la arista inferior de C_n con la arista superior de C_1 . Si "despegamos" las n copias superpuestas tendríamos una "espiral cerrada" W de n hojas, donde cada hoja es una copia de C (mapeada por $w = z^n$) de la región R_i (Fig. 2).

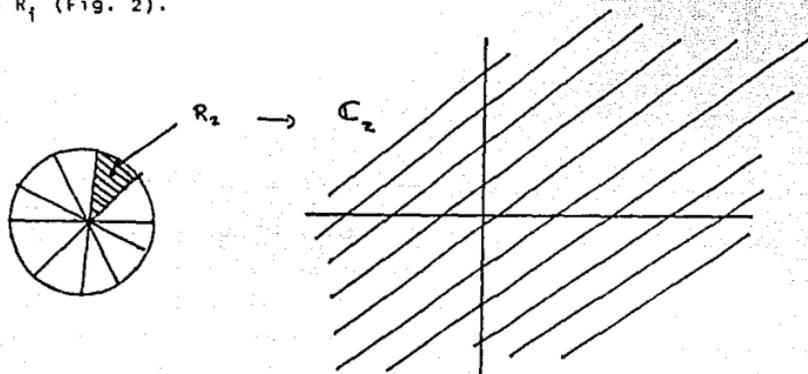


Fig 2

Si consideramos a W como dominio del mapeo $z = w^{1/n}$, se elimina la ambigüedad antes mencionada y $w^{1/n}$ es una función bien definida con dominio W y rango C .

Un tratamiento análogo se tendría que realizar con las funciones inversas de e^z , $\cos z$ y $\sin z$, entre otras, que son no inyectivas.

Este tratamiento, novedoso en el sentido de *buscar el dominio adecuado para que una función este bien definida sin modificar la regla de correspondencia* fue introducido por Bernard Riemann (fechas), y los nuevos dominios de definición se denominan *superficies de Riemann*.

La axiomatización y el desarrollo sistemático y riguroso de estos conceptos fue hecha por Herman Weyl (fechas) en su obra "La idea de una Superficie de Riemann" (Ref.). En este capítulo haremos un breve estudio sobre estos conceptos desde puntos de

vista algebraico y geometrico.¹

1. Definiciones y Generalización

Definición.

Una *superficie de Riemann* es un espacio W , conexo, de Hausdorff provisto de un conjunto de *cartas* (U_α, z_α) con las siguientes propiedades:

- (i) $\{U_\alpha\}$ forman una cubierta abierta de W . Más aún, $\{U_\alpha\}$ forma una base de topología para W .
- (ii) El mapeo z_α es un homeomorfismo de U_α en un subconjunto abierto de \mathbb{C} .
- (iii) Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $z_{\alpha\beta} = z_\alpha z_\beta^{-1}$ es analítica en $z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Observaciones.

- 1) El sistema (U_α, z_α) define una *estructura conforme* en W .
- 2) La topología de W esta completamente determinada por las funciones z_α .
- 3) Un punto p de U_α esta completamente determinado por el numero complejo $z_\alpha(p)$. Por eso a z_α se le llama *variable* o *parámetro local*.
- 4) La identificación anterior de los puntos de W con valores de la variable local facilitan el estudio y comprensión de conceptos que son invariantes, bajo una función conforme, tales como funciones analíticas, armónicas y subarmónicas, y arcos analíticos.

Antes de proseguir con estas observaciones damos la siguiente Definición

Sean W_1 y W_2 superficies de Riemann con estructuras conformes respectivamente, $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ y $\{U_\beta, z_\beta\}$. Se dice que f es una *función analítica* de W_1 en W_2 si la composición $z_\alpha f z_\beta^{-1}$ es analítica para todas z_α y z_β en $z_\beta(U_\beta)$.

5) Dos superficies de Riemann SR son conformemente equivalentes si existe una función analítica y biyectiva de una en otra. Si esto sucede, ambas funciones son esencialmente la misma.

6) Todo subconjunto conexo de una superficie de Riemann es una superficie de Riemann.

¹Recordemos que una función se define como una regla de correspondencia que asocia a cada elemento de un conjunto D (llamado dominio) un elemento, y solo un elemento de otro conjunto R (llamado contradominio). En el Calculo usual, D y R estan dados (y son generalmente euclidianos) y el estudio se limita a la regla de correspondencia.

Ejemplos.

1. Sea W la esfera de radio 1, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ en el espacio de tres dimensiones. Sean $U_1 = W - \{(0,0,1)\}$ y $U_2 = W - \{(0,0,-1)\}$ y $z_1 = (x_1 + ix_2)/(1 - x_3)$ y $z_2 = (x_1 - ix_2)/(1 + x_3)$ definidos en U_1 y U_2 , respectivamente.

Afirmación

W junto con $\{U_i, z_i\}_{i=1}^2$ es una superficie de Riemann.

i) $\{U_1, U_2\}$ son una cubierta abierta de W .

ii) El mapeo z_1 es la proyección estereográfica de W en \mathbb{C} a partir de $(0,0,1)$, y por lo tanto homeomorfismo de U_1 en un abierto (\mathbb{C}) de \mathbb{C} . El mapeo z_2 es la proyección estereográfica de W en \mathbb{C} a partir de $(0,0,-1)$, y por tanto homeomorfismo de U_2 en \mathbb{C} .

Observese que $z_1 z_2 = 1$ en $U_1 \cap U_2$, lo cual implica que $z_1((x_1, x_2, x_3))$ es el punto inverso, respecto al círculo de radio uno, de $z_2((x_1, x_2, x_3))$. Por tanto $z_1 z_2^{-1}$ es compleja analítica en $z_2(U_2) = \mathbb{C}$ y $z_2 z_1^{-1}$ en $z_1(U_1) = \mathbb{C}$.

2. Sean w_1 y w_2 números complejos tales que w_1/w_2 no es real. Geométricamente

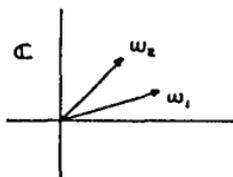


Fig 3

Definimos una relación de equivalencia \approx en \mathbb{C} como sigue: Son equivalentes z_1 y z_2 , $z_1 \approx z_2$ si $z_1 - z_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2$ con $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Sea π la proyección natural definida en \mathbb{C} tal que $\pi(z)$ es la inclusión de z en su clase de equivalencia. Sea $T = \pi(\mathbb{C}) = \{[z] \mid z \in \mathbb{C}\}$. Definimos una estructura conforme en T de la siguiente:

Sea Δ_α un subconjunto abierto de \mathbb{C} que no contiene puntos \approx equivalentes; $U_\alpha = \pi(\Delta_\alpha)$ y $z_\alpha = \pi^{-1}|_{\Delta_\alpha}$

Afirmación

T junto con las cartas $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ definen una Superficie de Riemann.

El conjunto $\{n w_1 + m w_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ son un conjunto de puntos en \mathbb{C} que son vértices de paralelogramos con lados de longitud $|w_1|$ y $|w_2|$ y dirección la dirección de w_1 y w_2 . Dado z existen r y s en

\mathbb{R} tales que

$$z = r w_1 + s w_2$$

Si $z_1 = r_1 w_1 + s_1 w_2$ y $z_2 = r_2 w_1 + s_2 w_2$, y por tanto $z_1 \sim z_2 \iff (r_1 - r_2) w_1 + (s_1 - s_2) w_2$ son equivalentes si y solo si $r_1 - r_2 = m$ y $s_1 - s_2 = n$ con m y n en \mathbb{Z} . Por tanto $z_1 \sim z_2$ si y solo si

$$z_1 = (r_2 + m) w_1 + (s_2 + n) w_2$$

$$z_1 = r_2 w_1 + m w_1 + s_2 w_2 + n w_2$$

Vistos en la reticula generada por w_1 y w_2 , z_1 y z_2 son equivalentes si se encuentran en identica posicion dentro de cualquiera de los paralelogramos (Fig 4).

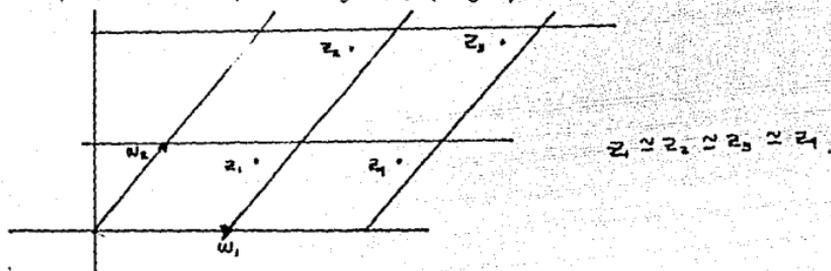


Fig 4

Por tanto cualquier paralelogramo que no contenga a una pareja sucesiva de lados, consta de un unico representante de todas y cada una de las clases de equivalencia. La identificacion en clases consiste en "pegar" todos los rectangulos, y "pegar" despues por parejas, los lados correspondientes (Fig 5).

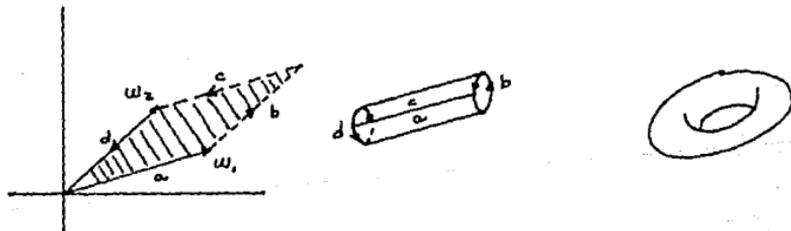


Fig 5

El resultado final es una "dona hueca", llamada toro. La figura que resulta del paso previo a identificar la segunda pareja de lados es un cilindro (fig 5.b).

- i) Por construcción, T es conexa y de Hausdorff.
- ii) Sea $\tau \in T \rightarrow$ existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $\pi(z) = \tau$ y Δ_α subconjunto abierto de \mathbb{C} sin dos puntos α equivalentes tal que $z \in \Delta_\alpha$ y $\tau \in \pi(\Delta_\alpha) = U_\alpha$. Por

tanto $\{U_\alpha\}$ es una cubierta abierta de τ .

iii) Sean U_α y z_α en $\{U_\alpha, z_\alpha\}$, $\rightarrow U_\alpha = \pi(\Delta_\alpha)$ y $z_\alpha = \pi^{-1}|_{[\Delta_\alpha]} \rightarrow$

$$z_\alpha(U_\alpha) = \pi^{-1}|_{[\Delta_\alpha]}(U_\alpha) = \Delta_\alpha.$$

$\therefore z_\alpha$ es un homeomorfismo de U_α en Δ_α .

iv) Sea $z = z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, $z = rw_1 + sw_2$; si $\tau = z_\alpha^{-1}(z)$,

$$\rightarrow z_\beta(\tau) = (z_\beta \circ z_\alpha^{-1})(\tau) = rw_1 + mw_1 + sw_2 + nw_2$$

$\therefore z_\beta \circ z_\alpha^{-1}$ es analítica.

2. SUPERFICIES CUBRIENTES

Definición

Sean W y W^* superficies y consideremos la función $f: W^* \rightarrow W$; f es un homeomorfismo local si todo punto de W^* tiene una vecindad V^* tal que la restricción de f a V^* sea un homeomorfismo. Cuando esto pasa decimos que W^* es una *superficie cubriente* de W , (W^*, f) .

Si W es una superficie de Riemann con cartas (U_α, z_α) , en W^* se puede definir una única estructura que haga a la función f analítica compleja. Debemos pedir que las cartas $\{U_\beta^*, z_\beta^*\}$ sean tales que f sea inyectiva en U_β^* y que $z_\alpha \circ f \circ z_\beta^{*-1}$ sea compleja y analítica en $z_\beta^*(U_\beta^*)$ para todo β .

La función f no es necesariamente inyectiva en, cuyo caso (W^*, f) se considera una *cubriente ramificada* de W .

Definición

Sea V un subconjunto abierto de W : V está *igualmente cubierto* por (W^*, f) si cada componente de la imagen inversa de f en V está en correspondencia inyectiva con V .

Definición

Una superficie cubriente (W^*, f) de W es *completa* si cada punto de W tiene una vecindad igualmente cubierta.

Lema

Una superficie cubriente completa cubre todos los puntos el mismo número de veces.

El número de veces que cada punto es cubierto se llama el *número de hojas*.

Definición (Levantamiento de arco)

Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow W$ una función continua, y γ' el arco parametrizado. El arco $\gamma'^*: [a, b] \rightarrow W^*$ es un *levantamiento* del

arco γ si $\gamma^*(t) = \gamma(t)$ para todo t en $[a, b]$. El punto inicial $\gamma^*(a)$ de $\gamma^*(t)$, está sobre el punto inicial de $\gamma(a)$ de $\gamma(t)$.

Teorema

Si (W^*, f) es completa, todo arco γ puede ser levantado a un único arco γ^* a partir de cualquier punto inicial p_0^* sobre p_0 , donde p_0 es punto inicial de γ .

Hasta ahora hemos dado una definición general de superficie de Riemann que se constituyen como dominios adecuados para las "inversas" de funciones no inyectivas sobre el plano complejo.

De manera natural nos preguntamos sobre las características esenciales de estos objetos y lo que entre ellos tengan en común. Para resolver nos valdremos del algebra de grupos. En primer termino se definen curvas en la superficie, que definen grupos multiplicativos. Esto permite un tratamiento algebraico de la topología de las superficies y facilita su clasificación.

3. El Grupo Fundamental

Sean γ_1 y γ_2 curvas de $[0, 1]$ en W con extremos comunes $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ y $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Una función continua $\gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow W$ es una deformación de γ_1 en γ_2 si $\gamma(0, u) = \gamma_1(0)$, $\gamma(1, u) = \gamma_1(1)$, $\gamma(t, 0) = \gamma_1(t)$ y $\gamma(t, 1) = \gamma_2(t)$. Mas claramente: a partir de un arco inicial γ_1 , existe una función continua $\gamma(t, u)$ cuya imagen final es γ_2 ; todos estos arcos tienen sus extremos en común.

Cuando esta función de cambio continuo existe, decimos, que los arcos γ_1 y γ_2 son homotopicos, $\gamma_1 \approx \gamma_2$ y que γ es la función de homotopía. La relación \approx es de equivalencia.

Sea $p_0 \in W$ un punto arbitrario, y consideremos todos los arcos cerrados sobre p_0 . Si $\{\gamma\}$ es la clase de homotopía del arco cerrado γ sobre p_0 , podemos definir el producto de las clases de homotopía de arcos sobre p_0 :

$$\{\gamma_1\} \{\gamma_2\} = \{\gamma_1 \gamma_2\}$$

El neutro multiplicativo es $\gamma(t) = p_0$, y el inverso multiplicativo es $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$. El producto es asociativo, y por tanto el conjunto de clases de equivalencia forman un grupo que se denomina *El grupo fundamental* de W en p_0 , $\Pi_1(W, p_0)$.

Si $p_1 \in W$ es distinto de p_0 , y W es conexa, $\Pi_1(W, p_1) \approx \Pi_1(W, p_0)$. Esto permite hacer abstracción del punto base del grupo fundamental en una superficie de Riemann conexa y en tal caso hablamos de $\Pi(W)$.

Proposición

W es simplemente conexa si $\Pi_1(W)$ se reduce al elemento identidad 1 .

El grupo de homotopía sobre una superficie de Riemann, y el concepto de superficie cubriente que definimos a continuación nos ayudara en la clasificación de las superficies de Riemann simplemente conexas.

4. Subgrupos y Superficies Cubrientes

De ahora en adelante consideraremos solamente superficies cubrientes completas.

Sean (W_1, f_1) y (W_2, f_2) superficies cubrientes de W . (W_2, f_2) es *superficie cubriente más fuerte* que (W_1, f_1) de W , si existe una función $f_{21}: W_2 \rightarrow W_1$ tal que $f_2 = f_1 \circ f_{21}$ y (W_2, f_{21}) es superficie cubriente de W_1 .

La relación "ser más fuerte" define un orden parcial. Si una superficie es más fuerte que otra, y viceversa, entonces se dice que son equivalentes y esencialmente la misma.

Teorema de monodromía

Sea (W^*, f) superficie cubriente de W , $p_0 \in W$ y p_0^* sobre p_0 . Sea γ una curva cerrada de p_0 en W y γ^* el levantamiento de γ con punto inicial p_0^* . Si γ es homotópica a la identidad 1 en W , por el teorema de monodromía γ^* también lo es en W^* .

Definición

Sea D el conjunto de las clases de homotopía $\{\gamma\} \in \Pi_1(W, p_0)$ tales que γ^* es cerrada.

En principio D es un subgrupo de $\Pi_1(W, p_0)$ que depende del punto p_0 .

Si p_1^* es otro punto en W^* con la misma proyección p_0 de p_0^* , y σ^* es un arco que une p_0^* con p_1^* , la proyección σ de σ^* es un arco cerrado en W de p_0 . Si D_1 es el grupo correspondiente a p_1^* , entonces $D_1 = \{\sigma\}^{-1} D \{\sigma\}$, es decir, D y D_1 son subgrupos conjugados de $\Pi_1(W, p_0)$ (fig 5). Inversamente: todo grupo conjugado de D es de la forma $\{\sigma\}^{-1} D \{\sigma\}$, donde $\{\sigma\}$ es un arco cuyo levantamiento σ^* une dos puntos p_0^* y p_1^* en W^* con la misma proyección p_0 (Fig 6).

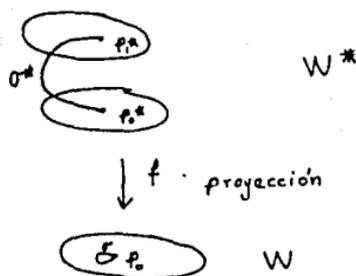


Fig. 6

Teorema

Existe una correspondencia uno a uno entre las clases de subgrupos conjugados de $\pi_1(W, p_0)$ y las clases de equivalencia de superficies cubrientes (W^*, f) ; De hecho, si g es la función inyectiva de $\{[D]\}$ en $\{[W^*]\}$ y si \bar{D} y \bar{W}^* son representantes de las clase de equivalencia de D y W^* tales que $g([D]) = [W^*]$, entonces $\pi_1(W^*, p_0^*)$ es isomorfo a D .

Lo dicho en el párrafo anterior prueba que una superficie cubriente W^* de W , determina una clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(W, p_0)$. Es claro que una cubriente equivalente determina la misma clase de conjugación que W^* .

Sea D un subgrupo de $\pi_1(W, p_0)$. Definimos en D una relación de equivalencia \approx como sigue:

Sean σ_1 y σ_2 dos arcos en W con extremo inicial p_0 . $\sigma_1 \approx \sigma_2$ si:

i) σ_1 y σ_2 tienen el mismo extremo final p .

ii) $\sigma_1 \sigma_2^{-1} \in D$.

Sea $W^* = \{[\sigma]\}$. Si $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ es la estructura de W , para $q_0 \in U_\alpha$ sea $q_0^* = [\sigma_0]$; si $q \in U_\alpha$ y σ es el arco que une q_0 y q contenido en U_α , $q^* = [\sigma_0 \sigma]$. $U_\alpha^*(q_0^*) = \{[\sigma_0 \sigma] \mid q \in U_\alpha\}$, y $z_\alpha^* = z_\alpha \circ f$.

Por construcción W^* es conexa y la topología inducida es de Hausdorff. El conjunto $\{U_\alpha^*(q_0^*), z_\alpha^*\}$ define una estructura conforme para W^* .

Interesa mostrar ahora que si D^* es el subgrupo de $\pi_1(W, p_0)$ formado por las clases $\{\gamma\}$ tal que γ^* es cerrada en W^* , entonces D y D^* pertenecen a la misma clase de conjugación.

Si γ^* es cerrada, entonces dados $\gamma_1, \gamma_2 \in \{\gamma\}$, $\{\gamma\} \in D^*$, γ_1 y γ_2

tienen el mismo extremo final p_0 y $\gamma_1 \gamma_2^{-1} \approx 1$, $\therefore D^* \subseteq D$. Inversamente, si $\gamma_1, \gamma_2 \in \{\gamma\}$, con $\{\gamma\} \in D$, entonces $[\gamma_1 \gamma_2^{-1}] = [\sigma_0] = q_0^* \rightarrow \gamma^*$ es cerrada $\Rightarrow D^* \subseteq D$, $\therefore D = D^*$.

Finalmente, sea γ^* una curva cerrada en W^* de p_0^* con proyección γ : si $\gamma_1^* \approx \gamma_2^*$, sus proyecciones γ_1 y γ_2 también son homotópicas. Por tanto la proyección f define una función de $\pi_1(W^*, p_0^*)$ en D . El mapeo f es un homomorfismo suprayectivo; es inyectivo pues si $\gamma \approx 1$, entonces, por el teorema de monodromía $\gamma^* \approx 1$. Por tanto $\pi_1(W^*, p_0^*) \approx D$.

Los dos casos extremos del teorema anterior corresponden a:

(i) $D = \pi_1(W, p_0)$ en cuyo caso W^* y W son esencialmente la misma, pues por el teorema anterior $\pi_1(W^*, p_0^*) \approx \pi_1(W, p_0)$.

(ii) $D = 1$, en cuyo caso W^* se llama la *cubriente universal* de W y se identificará con el símbolo \bar{W} . Obsérvese que en virtud del teorema anterior $\pi_1(W^*, p_0^*) = 1$, por lo que \bar{W} es, *siempre, simplemente conexa*.

Los subgrupos de $\pi_1(W)$ presentan el mismo orden parcial que sus correspondientes superficies cubrientes, a saber, si $D_1 \subseteq D_2$, entonces W_1^* es más fuerte que W_2^* , e inversamente, si W_1^* es más fuerte que W_2^* entonces D_2 contiene a algún conjugado del grupo D_1 . Observemos que la *cubriente universal es la cubriente más fuerte*, pues 1 es subgrupo de todo subgrupo conjugado D .

5. El Teorema de Uniformización

El mapeo $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ del disco en el plano es un homeomorfismo, por tanto Δ y \mathbb{C} son topológicamente equivalentes. Sin embargo no existe una función analítica del disco en el plano, por lo que no son variedades *conformemente* equivalentes; es decir, tienen *estructuras conformes distintas*.

La pregunta es entonces: cuáles son las superficies de Riemann con igual estructura conforme, y, cuáles son las superficies de Riemann simplemente conexas canónicas?, entendiendo por esto último, las de más sencilla representación y estudio y tales que cualquier otra sea *conformemente equivalente* o con igual *estructura conforme* a alguna de estas.

El teorema de uniformización establece cuáles son las superficies de Riemann *simplemente conexas esencialmente distintas*, es decir, cuáles son las superficies de Riemann simplemente conexas con *estructura conforme esencialmente distinta* junto con sus modelos canónicos.

Teorema de Uniformización

Toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente al disco unitario abierto Δ , al plano complejo \mathbb{C} o a la esfera de Riemann S .

La esfera de Riemann es *superficie compacta*, en tanto que el disco unitario y el plano complejo son *superficies no compactas o abiertas*.

Obsérvese que en el plano extendido \mathbb{C}^* que es conformemente equivalente a S , Δ tiene frontera "grande": es el círculo de radio 1; el plano \mathbb{C} tiene frontera "chica": es el punto al infinito, y S no tiene frontera. A las superficies de Riemann simplemente conexas con frontera "grande", conformemente equivalentes a Δ se les llama *hiperbólicas* y a las que tienen frontera "chica", conformemente equivalentes a \mathbb{C} , *parabólicas*. Por tanto las superficies de Riemann simplemente conexas, abiertas, son hiperbólicas y parabólicas, dependiendo del "tamaño" de su frontera.

6. Transformaciones de Cubierta.

Sea $\phi: W^* \rightarrow W^*$ un homeomorfismo. Si (W^*, f) es una superficie cubierta y $f = f \circ \phi$ entonces ϕ es una *transformación de cubierta* de W^* sobre W . Por tanto si ϕ es transformación de cubierta, p^* y $\phi(p^*)$ tienen la misma proyección. Intuitivamente, una transformación de cubierta mapea entre sí puntos en W^* de una hoja a otra, de tal manera que esos puntos se proyectan en uno mismo de W .

Si una transformación de cubierta "mueve" un punto de W^* de una hoja a otra, entonces los "mueve" a todos. Mas precisamente

Teorema

Una transformación de cubierta que no sea la identidad, no tiene puntos fijos.

Proposición

Las transformaciones de cubierta de (W^*, f) sobre W forman un grupo.

Recordemos: D es el grupo de las clases de homotopía $\{\gamma\}$ tales que γ es cerrada.

El siguiente teorema relaciona las transformaciones de cubierta con las clases de homotopía $\{\gamma\}$ de $\Pi_1(W, p_0)$ tales que γ^* no es cerrada en W^* . Obsérvese que el extremo inicial p_0^* de γ^* y el extremo final p^* , tienen la misma proyección p_0 . Esto nos podría sugerir la existencia de una transformación de cubierta ϕ tal que $\phi(p_0^*) = p^*$, para cada γ^* . Con más precisión:

Teorema

El grupo de transformaciones de cubierta de (W^*, f) sobre W es isomorfo a $N(D)/D$, donde $N(D)$ es el grupo normalizador de D en $\Pi_1(W, p_0)$.

Recordemos que $N(D) = \{[\gamma] \in \Pi_1(W, p_0) \mid [\gamma]^{-1}D[\gamma] = D\}$. Por tanto el grupo cociente $N(D)/D$ está formado por las clases de homotopía $\{\gamma\}$ tales que γ^* no es cerrada en W^* . Lo que el teorema nos dice es que a cada una de estas clases le corresponde una única transformación de cubierta, y viceversa. Por lo demás, es de esperarse, pues γ^* es cerrada si y solo si ϕ es la identidad (fig 7).

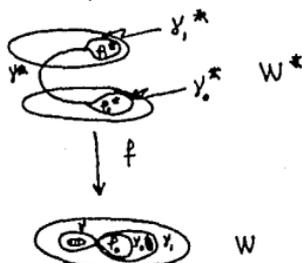


Fig. 7

Un caso particular importante del teorema anterior ocurre cuando el grupo D es normal, es decir, $N(D) = \Pi_1(W, p_0)$. Cuando esto ocurre se dice que la superficie cubriente es *regular* y puntos p^* con la misma proyección p son indistinguibles.

Estamos en condiciones de clasificar cualquier superficie de Riemann.

6. Superficies de Riemann en General

Eliminemos la condición de conexidad simple en W , y refiramonos a superficies de Riemann en general.

Vimos que la cubriente universal \bar{W} de W es simplemente conexa.

Sea (\bar{W}, f) cubriente universal de W , donde $f: \bar{W} \rightarrow W$ es la proyección de \bar{W} en W . De hecho podemos considerar a f una función con dominio \bar{W} y rango W .

Por lo visto en el capítulo I sabemos que toda transformación de cubierta de la esfera, el plano o el disco en sí mismos es una transformación de Moebius de la forma $Tz = az + b/cz + d$, $ad - bc \neq 0$.

Estas transformaciones tienen al menos un punto fijo en la esfera. Por tanto la única transformación de cubierta de la esfera en sí misma es la identidad. En el plano una transformación de cubierta solo puede tener como punto fijo al ∞ , y debe ser por

tanto de la forma $Tz=z+b$, b constante. Finalmente, las transformaciones del disco en el disco deben tener sus puntos fijos en el círculo unitario y son entonces de la forma $\phi(z)=az+b/bz+a$, y corresponden a movimientos del plano euclidiano que no son rotaciones.

Para hacer una clasificación completa de las superficies de Riemann, es de nuevo útil el álgebra de grupos a través de los teoremas que se establecieron en la sección precedente, de los cuales mencionamos a continuación un caso particular que nos será de gran utilidad.

La cubriente universal \bar{W} es simplemente conexa y su grupo fundamental se reduce a la identidad. Por el teorema de la sección 4, el subgrupo D de $\pi_1(W, p_0)$, formado por las clases de equivalencia $\{\gamma\}$ tales que γ^* es cerrada en \bar{W} , es también la identidad 1 , pues es isomorfo a $\pi_1(\bar{W})$. Además, por el último teorema de la sección anterior sabemos que el grupo de transformaciones de cubierta es isomorfo a $N(D)/D$, que en este caso resulta $N(I)/I = \pi_1(W)$.

Por otro lado el teorema de uniformización no dice que superficies de Riemann simplemente conexas, esencialmente distintas, son tres: el disco unitario abierto Δ , el plano complejo \mathbb{C} y la esfera de Riemann S . Puesto que toda cubriente universal es simplemente conexa, el disco, el plano y la esfera son las cubrientes universales de todas las superficies de Riemann. La pregunta es entonces: Dada una de las tres cubrientes universales, como obtener las distintas superficies de Riemann de las que son cubriente? El proceso inverso ya lo sabemos: dada la superficie de Riemann y sus superficies cubrientes podemos obtener con el método de las secciones 3 y 4, su cubriente universal.

Analicemos por casos las tres posibilidades de cubriente universal de una superficie de Riemann arbitraria y el mecanismo con el que a partir de ella se obtienen las distintas SR de las que es cubriente universal.

Caso 1. \bar{W} la esfera de Riemann

Ya hemos mencionado que en este caso el grupo de transformaciones de cubierta es el grupo identidad 1 , por tanto $\pi_1(W^*, p_0^*) \cong N(D)/I = \pi_1(W, p_0)$. Como \bar{W} es compacta también lo es W , y por tanto W es la esfera (caso trivial).

Caso 2. \bar{W} el plano complejo

El grupo de transformaciones de cubierta Γ está constituido por traslaciones paralelas del plano de la forma $\phi(z)=z+b$, puesto que las transformaciones de cubierta ϕ no tienen puntos fijos, existen vecindades ajenas de p y $\phi(p)$, para todo $p \in W$. A los grupos de transformaciones con esta característica se les conoce como grupos discontinuos, y hay tres casos típicos de ellos:

- (i) $\Gamma=1$, en cuyo caso $W = \mathbb{C}$
- (ii) Γ el grupo cíclico infinito generado por $\phi(z)=z+b$, $b \neq 0$,

en cuyo caso \mathbb{W} es un cilindro infinito conformemente equivalente al plano agujerado

- (iii) El grupo abeliano generado por $\phi_1(z) = z + b_1$ y $\phi_2(z)$, con b_1/b_2 irracional; la superficie \mathbb{W} es un toro (Ejemplo 2).

Nota; La teoría de funciones automorfas en el toro coincide con la teoría de funciones elípticas.

Caso 3. \mathbb{W} es el disco unitario abierto.

En este caso Γ es un grupo discontinuo de transformaciones de cubierta del disco en el disco sin puntos fijos. Inversamente, dado un grupo Γ con estas características, es posible obtener una superficie de Riemann identificando puntos equivalentes bajo transformaciones del grupo, es decir,

$$\mathbb{W} = \mathbb{D}/\Gamma, \text{ donde } \mathbb{D} = \Delta$$

El conjunto $\Gamma z = \{\phi(z) | \phi \in \Gamma, z \in \mathbb{W}\}$, es el conjunto de puntos Γ -equivalentes, también llamados la órbita de z en Γ .

Teorema

Si una superficie de Riemann \mathbb{W} , no es conformemente equivalente a una esfera, al plano, o al plano agujerado, entonces existe un grupo propiamente discontinuo Γ de transformaciones del disco en sí mismo que no tienen puntos fijos tal que la superficie Δ/Γ es conformemente equivalente a \mathbb{W} .

La teoría de funciones analíticas en \mathbb{W} es entonces la teoría de funciones automorfas bajo el grupo Γ .

Bibliografía

1. Lehner Joseph. A Short Course in Automorphic Functions. Holt, Reinhart & Winston Inc. EEUU. 1966.
2. Markyshevich A. Teoría de las Funciones Analíticas. Mir. Moscú, URSS. 1978.
3. Caratheodory C. Theory of Analytic Functions. Chelsea Publishing Company. Nueva York, EEUU. 1964.
4. Efimov N. V. Higher Geometry. Mir. Moscú, URSS. 1980.
5. Hilbert D. & Chon Vossen. The Foundations of Geometry. Goetingen. 1932.
6. Newman R., James & Nagel E. Geometría e Imaginación. C.E.C.S.A., Mexico. 1980.
7. Serre J. Paul. A Course in Arithmetic. Springer Verlag. Nueva York, EEUU. 1973.
8. Niven & Zyckerman. Introducción a la Teoría de los Números. Limusa. Mexico. 1976.
9. Ahlfors, Lars V. Complex Analysis. McGraw-Hill International. 1979.
10. Weyl, André. La Idea de una Superficie de Riemann. Springer Verlag. Alemania. 1932.
11. Ahlfors, Lars. Conformal Invariants Topics in Geometric Function Theory. McGraw-Hill International. EEUU. 1973.
12. Springer George. Introduction to Riemann Surface. Addison-Wesley. Massachusetts, EEUU. 1957.