2
6
31

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias.

PROPIEDADES TOPOLOGICAS INDUCIDAS POR PROPIEDADES DE CONTINUIDAD DE FUNCIONES ENTRE HIPERESPACIOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MATEMATICO

PRESENTA:

SERGIO LOPEZ VAZQUEZ.

CIUDAD UNIVERSITARIA, FEBRERO DE 1989.

S I M B O L O G I A

NOTA: Expresiones que utilizamos a lo largo del trabajo y que no definimos formalmente.

$(\underline{\overline{Y}},d')$ = Un espacio métrico $\underline{\overline{Y}}$ con métrica d'.

$B_{\varepsilon}(x) = \{y \in \underline{\overline{X}} : d(x,y) < \varepsilon\}$.

$B^{H}_{\varepsilon}(A) = \{B \in 2^{\underline{\overline{X}}} : H(A,B) < \varepsilon\}$.

$\underline{\overline{X}} - A$ = Complemento de A relativo a $\underline{\overline{X}}$.

A^{0} = Interior de A.

$\overline{A}$ = Cerradura de A.

I N D I C E

PÁG.

INTRODUCCION

En este trabajo consideramos sólo espacios continuos. Es decir, espacios métricos $\underline{X}$,s que sean conexos, compactos y con más de un punto.

Los hiperespacios de $\underline{X}$ son los espacios

$$2^{\underline{X}} = \{A \subset \underline{X} : A \text{ es compacto y } A \neq \phi\}$$

$$C(\underline{X}) = \{A \in 2^{\underline{X}} : A \text{ es conexo}\}$$

con la métrica de Hausdorff.

A lo largo de todo el trabajo estudiamos tres funciones F,G y H: $2^{\underline{X}} \to C^2(\underline{X})$ definidas por:

$$F(A) = \{K \in C(\underline{X}) : A \subset K\}$$

$$G(A) = \{K \in C(\underline{X}) : A \subset K^0\}$$

$$H(A) = \{K \in C(\underline{X}) : A \cap K \neq \phi\}$$

El primero en estudiar las funciones F y G fué W.J.Charatonik, quien observó que había relaciones agradables entre las propiedades de continuidad de F y G y algunas propiedades topológicas de $\underline{X}$. Por ejemplo:

F es continua si y sólo si $\underline{X}$ es localmente conexo.

$\underline{X}$ es suave en p si y sólo si $F|F_2(p,\underline{X})$ es continua.

El objetivo de este trabajo, es presentar en una forma autocontenida los resultados debidos a Charatonik, así como introducir la Función H definida arriba, y para la cual obtuvimos algunos resultados similares, como por ejemplo:

H es continua si y sólo si $\underline{X}$ tiene la propiedad de Kelley.

Como todos sabemos, los autores de artículos de investigación escriben sus trabajos para que sean leidos por especialistas. Resulta que el autor da como un hécho que el lector tiene todos los conocimientos requeridos para entenderlo. Lo cuál no siempre resulta cierto. Para un estudiante de licenciatura, las demostraciones de lemas y teoremas a veces resultan tan obscuras que parecieran hechas sólo para elegidos.

Por todo lo anterior, hemos querido hacer un trabajo donde se tenga garantizado que un estudiante que haya estudiado los cursos de Topología I y II y que maneje algunos resultados básicos de Hiperespacios de un continuo, pueda entender los resultados que presentamos, sin tener que hacer esfuerzos heróicos.

Para llevar a cabo lo anterior nos pareció conveniente dividir el trabajo en dos partes.

En la primera parte se dan todas las definiciones que se usan a lo largo de la tesis, así como los resultados de carácter general que usaremos más adelante.

En la segunda parte entramos de lleno al contenido, que es el estudio de las tres funciones mencionadas anteriormente y su relación con propiedades topológicas de un continuo $\underline{X}$.

Además damos varios ejemplos gráficos que permiten familiarizarse con las funciones estudiadas y tener una mejor visión de ellas.

Por último, así como introducimos la función H se nos ocurrió pensar en la función $I \; 2^{\underline{X}} \to C^2(\underline{X})$, definida como sigue:

$I(A) = \{K \in C(\underline{\overline{X}}) :$ para toda componente C de A, $K \cap C \neq \phi\}$.

Estudiando esta función vimos que esta bien definida. Además logramos probar que I es semicontinua por arriba. Esto nos hizo pensar que la continuidad de la Función I podría relacionarse con algunas propiedades topológicas de $\underline{\overline{X}}$. Sin embargo al final de la tesis mostramos que la Función I nunca es continua.

PRELIMINARES

A. CONVENCIONES

A través del siguiente trabajo, por un continuo entenderemos un espacio métrico compacto y conexo consistente de más de un punto. La palabra mayúscula $\underline{\overline{X}}$ denotará un continuo con una métrica d, a menos que otra cosa se establezca.

Un subcontinuo , es un subespacio compacto y conexo y no vacío de un espacio (un subcontinuo puede ser un espacio que conste de un solo punto).

Los hiperespacios de $\underline{\overline{X}}$ son:

$$2^{\underline{\overline{X}}} = \{A \subset \underline{\overline{X}} : A \text{ es compacto y } A \neq \phi\}$$

$$C(\underline{\overline{X}}) = \{ A \in 2^{\underline{\overline{X}}} : A \text{ es conexo} \}$$

Considerados con la métrica de Hausdorff que definiremos en seguida:

(I.A) <u>DEFINICION</u>. Si $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^{\underline{\overline{X}}}$, entonces

$$N_d(\varepsilon, A) = \{x \in \underline{\overline{X}} : d(x,a) < \varepsilon \text{ para alguna } a \in A\} .$$

Si $A, B \in 2^{\underline{\overline{X}}}$, entonces definimos

$$H_d(A,B) = \operatorname{Inf} \{ \varepsilon > 0 : A \subset N_d(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\varepsilon, A) \}$$

En efecto (ver [Nadler , Teorema 0.2, p. 2]), H_d es una métrica para $2^{\underline{X}}$.

Cuando no haya confusión escribiremos H en lugar de H_d y $N(,)$ en lugar de $N_d(,)$.

Daremos como un hecho que $2^{\underline{X}}$ y $C(\underline{X})$ son campactos y conexos por arcos (ver [Nadler , Teorema 0.8 y 1.13, págs. 7 y 65]), de modo que $C(\underline{X})$ y $2^{\underline{X}}$ resultan ser continuos; por tanto podemos hablar, por ejemplo, de $C(C(\underline{X}))$ ó $2^{2^{\underline{X}}}$.

Denotaremos por $C^2(\underline{X})$ al hiperespacio $C(C(\underline{X}))$ con la métrica de Hausdorff correspondiente la cual denotaremos por H^2. De la misma manera si $M \in 2^{2^{\underline{X}}}$, $N^2(\varepsilon,M)$ es el conjunto $\{A \in 2^{\underline{X}} :$ existe $B \in M$ tal que $H(A,B) < \varepsilon\}$.

Dado un continuo $\underline{X}$ y $p \in \underline{X}$ adoptaremos la siguiente notación:

$2^{\underline{X}}_p = \{A \in 2^{\underline{X}} : p \in A\}$ y

$C(p,\underline{X}) = \{A \in C(\underline{X}) : p \in A\}$.

Además, dado un número natural n denotaremos por $F_n(\underline{X})$ al subespacio de $2^{\underline{X}}$ consistente de todos los subconjuntos de a lo más n puntos. Y por último, $F_n(p,\underline{X})$ será el conjunto $\{A \in F_n(\underline{X}) : p \in A\}$.

B. LIMITES SUPERIORES E INFERIORES.

La siguiente definición nos da la notación clásica de convergencia de conjuntos.

(I.B.I) <u>DEFINICION.</u> Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\overline{X}}$. Entonces definimos

Lim Inf $A_n = \{x \in \overline{X}$: toda vecindad de x intersecta a casi todos los $A_{n's}\}$.

Lim Sup $A_n = \{x \in \overline{X}$: toda vecindad de x intersecta a una infinidad de las $A_{n's}\}$.

Si Lim Inf A_n=A=Lim Sup A_n, entonces decimos que la sucesión $(A_n)_n$ converge a A y escribiremos

$$\text{Lim } A_n = A \quad \text{ó} \quad A_n \to A$$

(I.B.2) Observación (ver [Nedler,06,p.4])

Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\overline{X}}$. Entonces es fácil comprobar que

(B.2.1) Lim Inf $A_n \subset$ Lim Sup A_n ;

(B.2.2) Tanto Lim Inf A_n como Lim Sup A_n son subconjuntos cerrados de $\overline{X}$;

(B.2.3) Si $(A_{n(m)})_m$ es una subsucesión de $(A_n)_n$, entonces:

$$\text{Lim Inf } A_n \subset \text{Lim Inf } A_{n(m)} \quad \text{y}$$

$$\text{Lim Sup } A_{n(m)} \subset \text{Lim Sup } A_n$$

(I.B.3) TEOREMA (ver |Nadler, Teorema 0.7, p.4|).

Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\overline{X}}$.

Si la sucesión $(A_n)_n$ converge a A en el sentido (I.B.I), entonces $A \in 2^{\overline{X}}$ y la sucesión $(A_n)_n$ converge con respecto a la métrica de Hausdorff a A.

De igual manera, si la sucesión $(A_n)_n$ converge con respecto a la métrica de Hausdorff a algún $A \in 2^{\overline{X}}$, entonces la sucesión $(A_n)_n$ converge a A en el sentido de (I.B.I).

El teorema anterior nos permite utilizar cualquiera de las dos definiciones de convergencia de una sucesión $(A_n)_n$ en $2^{\overline{X}}$ indistintamente.

(I.B.4) OBSERVACION. Dados $A,B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, entonces $H(A,B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subset N(\varepsilon,B)$ y $B \subset N(\varepsilon,A)$. Esta equivalencia nos será de gran utilidad a lo largo del presente trabajo.

A continuación veremos algunos resultados que nos permitirán manejar de una manera más conveniente la idea de límite.

(I.B.5) PROPOSICION. Si $(A_n)_n$ es una sucesión en $2^{\overline{X}}$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) $x \in \text{Lim Sup } A_n$

ii) Existen $n_{(1)}, n_{(2)}, \ldots$, con $n_{(1)} < n_{(2)} < \ldots$ y existen $x_m \in A_{n(m)}$ tales que $x_m \to x$

DEMOSTRACION.

i)⇒ii) Supongamos que $x \in \operatorname{Lim\,sup} A_n$, entonces para $\varepsilon=1$, $B_1(x)$ intersecta a una infinidad de A_n's. Así que podemos elegir $n_{(1)}$ en los naturales y $x_1 \in B_1(x) \cap A_{n(1)}$. Como $B_{1/2}(x)$ intersecta también una infinidad de A_n's, en particular intersecta a A_n's con $n > n(1)$. De modo que podemos elegir $n(2) \in \mathbb{N}$ con $n(2) > n(1)$ y un punto $x_2 \in B_{1/2}(x) \cap A_{n(2)}$. Procediendo de esta manera, podemos elegir una subsucesión de números $(n(m))_m$ y una sucesión $(x_m)_m$ de puntos de $\underline{X}$ tales que $n(1) < n(2) < \ldots$, y $x_m \in B_{\frac{1}{m}}(x) \cap A_{n(m)}$. Claramente $x_m \to x$.

ii)⇒i) Sea $\varepsilon > 0$. Como $x_n \to x$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x) < \varepsilon$ si $m \geq M$ entonces $x_m \in B_\varepsilon(x) \cap A_{n(m)}$ para toda $m \geq M$. Por tanto $B_\varepsilon(x)$ intersecta a una infinidad de A_n's. En conclusión $x \in \operatorname{Lim\,sup} A_n$.

(I. B.6) PROPOSICION. Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\underline{X}}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

i) $x \in \operatorname{Lim\,inf} A_n$.

ii) Existe una sucesión $(x_n)_n$ en $\underline{X}$, con $x_n \in A_n$ y $x_n \to x$.

DEMOSTRACION.

i)⇒ii) Supongamos que $x \in \operatorname{Lim\,inf} A_n$. Como cada A_n es compacto, podemos elegir $x_n \in A_n$ con la propiedad de que $d(x, x_n) = \min \{d(x,y) : y \in A_n\}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \phi$ para $n \geq N_0$. De lo anterior tenemos que $d(x,y) < \varepsilon$ para alguna $y \in A_n$.

Como $d(x,y) \geq d(x,x_n)$, por definición de x_n, se tiene que $d(x,x_n) < \varepsilon$ y esto se cumple a partir de N_0. En conclusión $x_n \to x$.

ii)⇒i) Sea $\varepsilon > 0$. Como $x_n \to x$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ si $n \geq N_0$ entonces $x_n \in B_\varepsilon(x) \cap A_n$ para toda $n \geq N_0$ por tanto $B_\varepsilon(x)$ intersecta a casi todas las A_n's. En conclusión $x \in \operatorname{Lim\,inf} A_n$.

(I.B.7) PROPOSICION. Sean $(A_n)_n$ y $(B_n)_n$ dos sucesiones en $2^{\underline{X}}$ tales que $A_n \to A$, $B_n \to B$ y $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $A \subset B$.

DEMOSTRACION.

Sea $a \in A$ y $\varepsilon > 0$. Como $A = \operatorname{Lim\,inf} A_n$ tenemos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon(a) \cap A_n \neq \phi$ para $n \geq N_0$ y por hipótesis $A_n \subset B_n$. De lo anterior deducimos que $B_\varepsilon(a) \cap B_n \neq \phi$ para $n \geq N_0$. Esto nos dice que $a \in \operatorname{Lim\,inf} B_n = B$. En conclusión $A \subset B$.

C. CONTINUIDAD

El siguiente teorema nos da una caracterización de continuidad que nos será muy útil.

(I.C.I) TEOREMA. Sean $\underline{\overline{Y}}$ un continuo, $f: \underline{\overline{X}} \to \underline{\overline{Y}}$ una función y $x_0 \in \underline{\overline{X}}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes,

i) f en continua en x_0.

ii) Si $(x_n)_n$ una sucesión en $\underline{\overline{X}}$ y $y_0 \in \underline{\overline{Y}}$ son tales que: $x_n \to x_0$ y $f(x_n) \to y_0$. Entonces $y_0 = f(x_0)$.

DEMOSTRACION.

i)⇒ii) Supongamos que f es continua en x_0. Sean $(x_n)_n$ una sucesión en $\underline{\overline{X}}$ y $y_0 \in \underline{\overline{Y}}$ tales que $x_n \to x_0$ y $f(x_n) \to y_0$.

Como f es continua en x_0, tenemos que $f(x_n) \to f(x_0)$ y como el límite es único concluimos que $f(x_0) = y_0$.

ii)⇒i) Supongamos que f no es continua en x_0. Es decir existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe $x \in \underline{\overline{X}}$ con $d(x, x_0) < \delta$ y $d'(f(x), f(x_0)) > \varepsilon$.

Para $\delta = 1/n$ podemos elegir x_n con $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ y $d'(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$.

Claramente $x_n \to x_0$, además, como $\underline{\overline{Y}}$ es compacto, la sucesión $(f(x_n))_n$ tiene una subsucesión

$\{f(x_{n(m)})\}_m$ convergente a un $y_0 \in \overline{Y}$.

Entonces $x_{n(m)} \to x_0$ y $f(x_{n(m)}) \to y_0$. De acuerdo con la hipótesis, $y_0 = f(x_0)$. Así que $f(x_{n(m)}) \to f(x_0)$. De modo que existe m tal que $d'(f(x_{n(m)}), f(x_0)) < \varepsilon/2$. Pero, por la elección de $x_{n(m)}$, sabemos que $d'(f(x_{n(m)}), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Esta contradicción prueba que f debe ser continua en x_0 .

El tipo de funciones que vamos a estudiar hacen necesario la introducción de la idea de semicontinuidad por abajo y semicontinuidad por arriba de una función en un punto x_0 .

En seguida daremos la definición precisa de semicontinuidad y además probaremos un teorema que nos enlaza esta idea con la de continuidad.

(I.C.2) DEFINICION. Dado un continuo $(\overline{Y}, d')$ y un punto $x_0 \in \overline{X}$, a una función $f : \overline{X} \to 2^{\overline{Y}}$ la llamaremos.

(I.C.2.1) semicontinua por abajo en x_0 ($\underline{SC}$ en x_0) siempre que para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in \overline{X}$ con $d(x, x_0) < \delta$ se cumple que $f(x_0) \subset N'(\varepsilon, f(x))$.

(I.C.2.2) semicontinua por arriba en x_0 ($\overline{SC}$ en x_0) siempre que para toda $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que para toda $x \in \overline{X}$ con $\delta(x, x_0) < \delta$ se cumple que $f(x) \subset N'(\varepsilon, f(x_0))$.

Diremos que $f : \overline{X} \to 2^{\overline{Y}}$ es semicontinua por abajo (semicontinua por arriba), si esta lo es en cada punto de $\overline{X}$.

(I.C.3) OBSERVACION. Si $f: \underline{X} \to 2^{\underline{Y}}$ es SC en x_0 y $\overline{SC}$ en x_0 entonces para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,x_0) < \delta$, entonces $f(x) \subset N(\varepsilon, f(x_0))$ y $f(x_0) \subset N(\varepsilon, f(x))$. Es decir si $d(x,x_0) < \delta$, entonces $H(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. De manera que f es continua en x_0. Y claramente si es continua en x_0, entonces f es SC en x_0 y f es $\overline{SC}$ en x_0.

(I.C.4) TEOREMA. Sean $f: \underline{X} \to 2^{\underline{Y}}$ y $x_0 \in \underline{X}$ entonces

(I.C.4.1) f es SC en x_0 si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_n$ de $\underline{X}$ tal que $x_n \to x_0$, se tiene que $f(x_0) \subset \operatorname{Lim\,inf} f(x_n)$.

(I.C.4.2) f es $\overline{SC}$ en x_0 si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_n$ de $\underline{X}$ tal que $x_n \to x_0$ si se tiene que $\operatorname{Lim\,sup} f(x_n) \subset f(x_0)$.

DEMOSTRACION. Demostraremos primero (C.4.1).

(⇒) Supongamos que f es semicontinua por abajo en x_0. Sea $(x_n)_n \subset \underline{X}$ tal que $x_n \to x_0$. Sea $z \in f(x_0)$ y sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \underline{X}$ con $d(x,x_0) < \delta$ se cumple que $f(x_0) \subset N'(\varepsilon, f(x))$. Ahora bien como $x_n \to x_0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_0) < \delta$ para $n \geq N_0$.

De lo anterior se tiene que $f(x_0) \subset N'(\varepsilon, f(x_n))$ para $n \geq N_0$. De modo que $B_\varepsilon(z) \cap f(x_n) \neq \phi$ para $n \geq N_0$, ya que para $z \in f(x_0)$, existe $y_n \in f(x_n)$ tal que $d(z, y_n) < \varepsilon$ para $n \geq N_0$. En conclusión $z \in \operatorname{Lim\,inf} f(x_n)$.

(⇐) Supongamos que f no es SC en x_0. Es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $d > 0$, existe $x \in \underline{X}$ con

$d(x,x_0) < \delta$ y $f(x_0) \not\subset N'(\varepsilon,f(x))$.

Para $d=1/n$ podemos elegir $x_n \in \underline{\overline{X}}$ con $d(x_n,x_0) < \frac{1}{n}$ y $f(x_0) \not\subset N'(\varepsilon,f(x_n))$. De modo que elegimos $z_n \in f(x_0)$ tal que $z_n \notin N(\varepsilon,f(x_n))$.

Como $f(x_0)$ es compacto existe una subsucesión $(z_{n(m)})_m$ de $(z_n)_n$ que converge a un z_0 en $f(x_0)$.

Por hipótesis $f(x_0) \subset \text{Lim inf } f(x_n)$. En particular $z_0 \in \text{Lim inf } f(x_n)$. Así que existe N_0 tal que $B_{\varepsilon/2}(z_0) \cap f(x_n) \neq \phi$ para $n \geq N_0$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $d'(z_0,z_{n(m)}) < \varepsilon/2$ y $n(m) \geq N_0$. Entonces existe $y_{n(m)} \in B_{\varepsilon/2}(z_0) \cap f(x_{n(m)})$. De aquí que $d'(z_{n(m)},y_{n(m)}) < \varepsilon$ y $y_{n(m)} \in f(x_{n(m)})$. Es decir $z_{n(m)} \in N'(\varepsilon,f(x_{n(m)}))$. Esto contradice la elección $z_{n(m)}$ y prueba que f es <u>SC</u> en x_0.

Ahora probaremos (C.R.2).

Supongamos que f es $\overline{SC}$ en x_0. Sea $(x_n)_n \subset \underline{X}$ tal que $x_n \to x$. Tomemos $z \in \text{Lim sup } f(x_n)$. Mostraremos que $z \in f(x_0)$. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es $\overline{SC}$ en x_0, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,x_0) < \delta$, entonces $f(x) \subset N'(\varepsilon/2\ f(x_0))$. Ya que $x_n \to x$, existe N_0 tal que $d(x_n,x_0) < \delta$ para $n \geq N_0$. De manera que $n \geq N_0$ implica que $f(x_n) \subset N'(\varepsilon/2, f(x_0))$. Como $B_{\varepsilon/2}(z) \cap f(x_n) \neq \phi$ para una infinidad de n's, existe m tal que $m \geq N_0$ y $B_{\varepsilon/2}(z) \cap f(x_m) \neq \phi$. Sea $y \in f(x_m) \subset N'(\varepsilon/2, f(x_0))$ tal que $d(y,z) < \varepsilon/2$. Entonces existe $x \in f(x_0)$ tal que $d(y,x) < \varepsilon/2$. Esto muestra que $B_\varepsilon(z) \cap f(x_0) \neq \phi$. Como esto ocurre para toda $\varepsilon > 0$, tenemos que $z \in \overline{f(x_0)} = f(x_0)$. Por tanto $\text{Lim sup } f(x_n) \subset f(x_0)$.

Supongamos que f no es $\overline{SC}$ en x_0. Es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe $x \in \underline{X}$ con $d(x,x_0) < \delta$ y $f(x) \not\subset N(\varepsilon, f(x_0))$.

Para $d=1/n$ podemos elegir $x_n \in \underline{X}$ con $d(x_n,x_0) < \frac{1}{n}$ y $f(x_n) \not\subset N(\varepsilon, f(x_0))$. De modo que podemos escoger $z_n \in f(x_n) - N(\varepsilon, f(x_0))$.

Como $\underline{X} - N(\varepsilon, f(x_0))$ es compacto existe una subsucesión $(z_{n(m)})_m$ de $(z_n)_n$ que converge a un z_0 en $\underline{X} - N(\varepsilon, f(x_0))$. En particular, $z_0 \notin f(x_0)$.

Por otra parte, como $z_{n(m)} \to z_0$, aplicando el Teorema (I.B.5) tenemos que $z_0 \in \text{Lim sup } f(x_n) \subset f(x_0)$. Esta contradicción prueba que f es $\overline{SC}$ en x_0.

(I.C.5) OBSERVACION.

f es $\underline{SC}$ en x_0 y $\overline{SC}$ en x_0 si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_n$ de $\underline{X}$ tal que $x_n \to x_0$ se tiene que $\lim f(x_n) = f(x_0)$. Es decir, f es $\underline{SC}$ en x_0 y $\overline{SC}$ en x_0 si y sólo si f es continua en x_0.

D. CONEXIDAD.

En vista de que en el presente trabajo daremos una caracterización de conexidad local, conexidad en pequeño, propiedad de Kelley y suavidad de un continuo $\underline{X}$ en términos de la continuidad de tres funciones y sus restricciones, nos parece conveniente dar las definiciones precisas de estas ideas y algunos resultados útiles.

(I.D.1) CONVENCION. Una vecindad de un punto x es un abierto que lo contiene.

(I.D.2) DEFINICION. Un espacio $\underline{X}$ es localmente conexo si para cualquir $x \in \underline{X}$ y cualquier vecindad U de x existe una vecindad conexa V de x tal que $V \subseteq U$.

(I.D.3) TEOREMA. (ver |Willard), teorema 2.7.9, pág. 200|) $\underline{X}$ es localmente conexo si y sólo si cada componente de cada conjunto abierto es abierta.

(I.D.4) DEFINICION. $\underline{X}$ es conexo en pequeño en x si para cualquier vecindad U de x existe una vecindad V tal que $V \subset U$, $x \in V$ y para toda $y \in V$ existe un conjunto conexo A tal que $x, y \in A$ y $A \subseteq U$.

(I.D.5) <u>TEOREMA</u>. $\underline{X}$ es conexo en pequeño en x si y sólo si para cualquier vecindad U de x, la componente conexa C de U que tiene a x, lo tiene en su interior.

DEMOSTRACION.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\underline{X}$ es conexo en pequeño en x. Sea U una vecindad de x y sea C la componente conexa de U que tiene a x.

Sea V la vecindad de x que existe por la conexidad en pequeño y sea $y \in V$. Por la elección de V existe un conexo A tal que $x, y \in A$ y $A \subseteq U$. Observamos que $A \subset C$, por que C es componente. De modo que $y \in C$. Y por lo tanto $V \subset C$. Así que $x \in C^0$.

($\Leftarrow$) Sea U una vecindad de x y sea C la componente de U que tiene a x.

Haciendo $V = C^0$ se obtiene que V satisface las condiciones requeridas en la definición de conexidad en pequeño.

(I.D.6) <u>DEFINICION</u>.

$\underline{X}$ es suave en p siempre que para todo $x \in \underline{X}$, para toda sucesión $(x_n)_n$ de $\underline{X}$ que converge a x y para todo continuo K que contiene a p y a x, existe una sucesión $(K_n)_n$ de subcontinuos de $\underline{X}$ tal que $x_n, p \in K_n$ para toda n y $K_n \to K$.

(I.D.7) PROPOSICION.

Si $\overline{X}$ es suave en p entonces $\overline{X}$ es conexo en pequeño en p.

DEMOSTRACION.

Sea U una vecindad de p. Sea C la componente de U que tiene a p.

Supongamos que $p \notin C^0$. Esto quiere decir que para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que $B_\varepsilon(p) \cap \chi - C \neq 0$. Es decir, podemos construir una sucesión $(x_n)_n$ con $x_n \in \overline{X}-C$ y $x_n \to p$. Para $K=\{p\}$ existe una sucesión $(K_n)_n$ con $K_n \in C(\overline{X}),p$, $x_n \in K_n$ y $K_n \to K$.

Sea $\varepsilon > 0$, tal que $B_\varepsilon(p) \subset U$. Como $K_n \to K$ existe N_0 tal que $K_{N_0} \subset N(\varepsilon,\{P\}) = B_\varepsilon(P)$. Esto implica que $K_{N_0} \cup C$ es un subconjunto conexo de U. Y por lo tanto $K_{N_0} \cup C \subset C$.

De manera que $x_{N_0} \in C$. Esto contradice la manera en que tomemos las $x_{n's}$. Por lo tanto $p \in C^0$.

(I.D.8) Corolario. Si $\overline{X}$ es suave en p para cada $p \in \overline{X}$, entonces $\overline{X}$ es localmente conexo.

DEMOSTRACION.

Si $\overline{X}$ es suave en p para cada $p \in \overline{X}$, entonces $\overline{X}$ es conexo en pequeño en todos sus puntos. De manera que (Ver [Willard, teorema 27.16, pág. 201]). $\overline{X}$ es localmente conexo.

(I.D.9) PROPOSICION. Si $\underline{\overline{X}}$ es localmente conexo, entonces $\underline{\overline{X}}$ es suave en cada uno de sus puntos.

DEMOSTRACION.

Sean $p,x \in \underline{\overline{X}}$, $K \in C(\underline{\overline{X}})$, con $p,x \in K$ y $(x_n)_n$ una sucesión en $\underline{\overline{X}}$ tal que $x_n \to x$.

Por la conexidad local podemos construir la sucesión $(V_n)_n$ de subconjuntos abiertos y conexos de $\underline{\overline{X}}$ tales que $V_1 = \underline{\overline{X}}$ y para $n \geq 2$, $x \in V_n \subset B_{1/n}(x) \cap V_{n-1}$.

Sea n tal que $x_n \neq x$. Entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{M} < d(x,x_n)$. Si $m \geq M$, $V_m \subset B_{1/m}(x) \subset B_{\frac{1}{M}}(x)$. Así que $x_n \notin V_m$ para toda $m \geq M$. Por otra parte $x_n \in V = \underline{X}$. Entonces tiene sentido definir $m(n) = \max\{r : x_n \in V_r\}$. Construimos la sucesión $(K_n)_n$ como sigue

$$K_n = \begin{cases} K \text{ si } x_n = x \\ K \cup \overline{V_{m(n)}} \text{ si } x_n \neq x \end{cases}$$

Afirmamos que $K_n \to K$.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe N tal que $V_N \subset B_{\varepsilon/2}(x)$. Como $x \in V_N$, existe N_0 tal que $x_n \in V_n$ a partir de N_0, vamos a probar que, para toda $n \geq N_0$, $K_n \subset N(\varepsilon, K)$.

Sea $n \geq N_0$. Si $x_n = x$, entonces $K_n = K$ y por lo tanto

$K_n \subset N(\varepsilon,K)$. Si $x_n \neq x$, entonces $K_n = K \cup \overline{V_{m(n)}}$. Ya que $x_n \in V_N$ y $m(n) = \max \{r : x_n \in V_r\}$ observamos que $m(n) \geq N$. De modo que $V_{m(n)} \subset V_N \subset B_{\varepsilon/2}(x)$. Y por lo tanto $\overline{V_{m(n)}} \subset B_\varepsilon(x) \subset N(\varepsilon,K)$. Llegamos entonces a que $K_n \subset N(\varepsilon,K)$ para $n \geq N_0$ y como $K \subset N(\varepsilon,K_n)$ para todo n, concluimos que $H(K_n,K) < \varepsilon$ para $n \geq N_0$. Como esto ocurre para toda $\varepsilon > 0$ concluimos que $K_n \to K$.

(I.D.10) <u>Corolario.</u> $\overline{X}$ es localmente conexo si y sólo si $\overline{X}$ es suave en cada uno de sus puntos.

(I.D.11) <u>Lema.</u> Sea U subconjunto abierto de $\overline{X}$ y sean:

$$H = \{A \in 2^{\overline{X}} : A \subset U\}$$

$$I = \{A \in 2^{\overline{X}} : A \cap U \neq \phi\},$$

entonces H e I son abiertos en $2^{\overline{X}}$.

DEMOSTRACION.

Sea $A \in H$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon,A) \subset U$. Tomemos $B \in B^H_\varepsilon(A)$. Como $H(A,B) < \varepsilon$, tenemos que $B \subset N(\varepsilon,A) \subset U$. De donde deducimos que $B \in H$. Concluimos por lo tanto que $B^H_\varepsilon(A) \subset U$.

Ahora sea $A \in I$ y $x \in A \cap U$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset U$. Tomemos $B \in B^H_\varepsilon(A)$. Como $H(B,A) < \varepsilon$, tenemos que $A \subset N(\varepsilon,B)$. En particular para x existe $b \in B$ tal que $d(x,b) < \varepsilon$. De modo que $b \in B_\varepsilon(x) \subset U$. Y por lo tanto $B \cap U \neq \phi$, en consecuencia $B \in I$. Concluimos entonces que $B^H_\varepsilon(A) \subset U$.

(I.D.12) PROPOSICION. Sea $K \in C(\overline{X})$. Entonces $2^{\overline{X}}$ es conexo en pequeño en K si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ existe $B \in C(\overline{X})$ tal que $H(K,B) < \varepsilon$ y $K \subset B^0$.

DEMOSTRACION.

(⇒) Sea $\varepsilon > 0$. Sea P la componente de $B^H_{\varepsilon/2}(K)$ que tiene a p. Entonces por (I.D.5) P tiene a K en su interior. Sea $B = (\cup\{A \mid A \in \overline{P}\})$, entonces B resulta ser subcontinuo de $\overline{X}$ (Ver [Nadler, teorema 1.49, pág 102]).

Como $K \in P^0$ existe δ tal que $B^H_\delta(K) \subset P$. Si $x \in N(\delta, K)$, vemos que $K \cup \{x\} \in B^H_\delta(K) \subset P$ y por lo tanto $x \in B$. En consecuencia $N(\delta, K) \subset B$. Es decir $K \subset B^0$.

Ahora, como $P \subset B^H_{\varepsilon/2}(K)$, tenemos que $\overline{P} \subset \overline{B^H_{\varepsilon/2}(K)}$ de donde $\overline{P} \subset B^H_{3/4\,\varepsilon}(K)$. Si $A \in \overline{P}$, entonces $A \subset N(3/4\,\varepsilon, K)$, de modo que $\cup\{A \mid A \in \overline{P}\} \subset N(\varepsilon, K)$. De lo anterior concluimos que $B \subset N(\varepsilon, K)$ y como además $K \subset N(\varepsilon, B)$ tenemos que $H(B,K) < \varepsilon$.

(⇐) Sea $K \in C(\overline{X})$ con las condiciones de la hipótesis. Sea $\varepsilon > 0$ y $\S$ la componente de $B^H_\varepsilon(K)$ que tiene a K. Vamos a mostrar que $K \in \S^0$.

Sea $B \in C(\overline{X})$ tal que $K \subset B^0 \subset B \subset N(\varepsilon, K)$. Como K es compacto podemos encontrar $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que $K \subset B_{\varepsilon/2}(x_1) \cup \ldots B_{\varepsilon/2}(x_n)$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ hacemos $V_i = B_{\varepsilon/2}(x_i)$.

Definimos $P_1 = \{ A \varepsilon 2^{\underline{X}} ; A \subset B^0$ y $A \cap V_i \neq \phi$ para toda $i \varepsilon \{1, \ldots, n\} \}$.

Por el lema (I.D.11) tenemos que P_1 es abierto y notemos que $K \varepsilon P_1$. Definimos ahora $P = \{ A \varepsilon 2^{\underline{X}} : A \subset B$ y $A \cap V_i \neq \phi$ para todo $i \varepsilon \{i, \ldots, n\} \}$.

Afirmamos lo siguiente:

1) P es conexo

2) $P \subset B^H_\varepsilon(K)$

3) $P_1 \subset P$.

1) Sean $A_1, A_2 \varepsilon P$. Como cada componente de B intersecta tanto a A_1 como a A_2 y $A_1, A_2 \subset B$, existen arcos ordenados $\alpha_1, \alpha_2 \varepsilon 2^{\underline{X}}$ que van de A_1 a B y de A_2 a B respectivamente (Ver [Nadler, teorema(1.8) pág 59]).

Entonces $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$ será una trayectoria en $2^{\underline{X}}$ de A_1 a A_2, además si $L \varepsilon \alpha$, entonces $A_1 \subset L \subset B$ ó $A_2 \subset L \subset B$, de donde concluimos que $L \varepsilon P$ y por tanto α es una trayectoria en P. En conclusión P es conexo por trayectorias.

2) Sea $A \varepsilon P$. Entonces $A \subset B \subset N(\varepsilon, K)$. Dada $k \varepsilon K$, entonces $k \varepsilon V_i$ para alguna $i \varepsilon \{1, \ldots, n\}$, es decir $d(k, x_i) < \varepsilon/2$. Como $V_i \cap A \neq \phi$, entonces $d(x_i, a) < \varepsilon/2$ para alguna $a \varepsilon A$. De modo que $d(k, a) < \varepsilon$ para alguna $a \varepsilon A$. Esto nos dice que $K \subset N(\varepsilon, A)$ y por lo

lo tanto $H(K,A) < \varepsilon$, de donde concluimos que $P \subset B^H_\varepsilon(K)$.

3) Es inmediato

De (1),(2) y (3) tenemos que $P \subset \S$ y por lo tanto $\S$ tiene a K en su interior.

(I.D.13) Corolario. $\underline{X}$ es conexo en pequeño en p si y sólo si $2^{\underline{X}}$ es conexo en pequeño en $\{p\}$.

DEMOSTRACION.

(⇒) Sea $\varepsilon > 0$ y sea C la componente conexa de $B_{\varepsilon/2}(p)$. Entonces por (I.D.5) C tiene a p en su interior y por lo tanto $\{p\} \subset C^0$. Haciendo $L = \overline{C}$ vemos que $H(L,\{p\}) < \varepsilon$ y $L \in C(\underline{X})$, de manera que por la proposición anterior, $2^{\underline{X}}$ es conexo en pequeño $\{p\}$.

(⇐) Sea U una vecindad de p, y sea C la componente de U que tiene a p. Sea $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subset U$. Para δ existe $B \in C(\underline{X})$ tal que $H(\{p\},B) < \delta$ y $\{p\} \subset B^0$. Como $B \subset N(\delta,\{p\}) \subset U$ y $B \cap C \neq \phi$ llegamos a que $B \subset C$. De lo cual concluimos que $p \in C^0$.

(I.D.14) DEFINICION. Un continuo $\overline{X}$ tiene la propiedad de Kelley en un punto $x \in \overline{X}$ siempre que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $y \in \overline{X}$, $d(x,y) < \delta$ y $x \in K \in C(\overline{X})$, entonces existe un continuo L con $y \in L$ y $H(L,K) < \varepsilon$.

Si $\underline{X}$ tiene la propiedad de Kelley en cada uno de sus puntos, decimos que $\underline{X}$ tiene la propiedad de Kelley.

(I.D.15) PROPOSICION. Si $\overline{X}$ es localmente conexo entonces $\overline{X}$, entonces tiene la propiedad de Kelley.

DEMOSTRACION.

Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in \overline{X}$. Sea C la componente de $B_{\varepsilon/2}(x)$ que tiene a x. Por la conexidad local $x \in C^0$ y en consecuencia existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset C^0$. Dados $y \in \overline{X}$ y $K \in C(\overline{X})$ tales que $d(x,y) < \delta$ y $x \in K$, hacemos $L = \overline{C} \cup K \subset B_\varepsilon(x) \cup K \subset N(\varepsilon, K)$. De modo que $H(L,K) < \varepsilon$, $L \in C(\overline{X})$ y $y \in L$. Por tanto $\overline{X}$ tiene la propiedad de Kelley.

E. UNICOHERENCIA.

(I.E.1) DEFINICION.

Un continuo es hereditariamente unicoherente si la intersección de cualesquiera dos de sus subcontinuos es conexa.

(I.E.2) PROPOSICION. Si $\overline{X}$ es hereditariamente unicoherente y $\{A_i : i \in I\}$ una familia de subcontinuos, entonces

$$\bigcap_{i \in I} A_i \quad \text{es un subcontinuo.}$$

DEMOSTRACION.

Como $\bigcap_{i \in I} A_i$ es cerrado, es suficiente demostrar que es conexo.

Supongamos que no lo es. Entonces existen subconjuntos cerrados L y K de $\underline{\overline{X}}$ tales que $\bigcap_{i\in I} A_i = L\cup K$, $L,K\neq\phi$ y $L\cap K=\phi$.

Por la normalidad de $\underline{\overline{X}}$, existen dos subconjuntos abiertos U y V de $\underline{\overline{X}}$ tales que $U\cap V=\phi$, $K\subset U$ y $L\subset V$.

Para cada $x\in\underline{\overline{X}}-(U\cup V)$, $x\notin\bigcap_{i\in I} A_i$ así que $x\notin A_i$ para alguna $i\in I$, en consecuencia $x\in\underline{\overline{X}}-A_i$. Por lo tanto $\{\underline{\overline{X}}-A_i\}_{i\in I}$ es una cubierta para $\underline{\overline{X}}-(U\cup V)$.

Por la compacidad de $\underline{\overline{X}}-(U\cup V)$ podemos encontrar una subfamilia finita $\{\underline{\overline{X}}-A_{i_1},\dots,X-A_{i_n}\}$ tal que $\underline{\overline{X}}-(U\cup V)\subset\bigcup\{\underline{\overline{X}}-A_{i_j}: j=1,\dots,n\}$. La última expresión es equivalente a $\underline{\overline{X}}-(U\cup V)\subset\underline{\overline{X}}-\bigcap\{A_{i_j}: j=1,\dots,n\}$ de la cual se sigue que $\bigcap\{A_{i_j}: j=1,\dots,n\}\subset U\cup V$.

Por hipótesis $\bigcap\{A_{i_j}: j=1,\dots,n\}$ es conexo. Esto implica que debe estar contenido en U o en V. Si, por ejemplo, estuviera contenido en U, tendríamos que $\bigcap\{A_i: i\in I\}\subset U$ y entonces $\bigcap\{A_i: i\in I\}$ es ajeno a V. Esto es absurdo pues ambos contienen a $L\neq\phi$. Por tanto $\bigcap\{A_i: i\in I\}$ es conexo.

"...Como era un hombre fuerte y sano, acostumbrado a trabajar duramente, caminaría cincuenta Kilómetros y encontraría algún trabajo. También podía encontrarse por allí algún puerquito extraviado y venderlo en uno de los pueblos que cruzara, y con el producto llenarse bien la barriga con suficientes tortillas, frijoles, chile verde y unas copitas de mezcal. El estómago lleno le haría olvidar su pena. Cuando encontrara algún trabajo permanente, se establecería en ese lugar, y no transcurriría ni una semana sin que alguna mujer colgara de un clavo de su jacalito la canasta o el costal con su vestido dominguero, empezando desde luego a cocinar los frijoles y hacer tortillas para él..."

*B.Traven...

CAPITULO II

II.A.0 <u>DEFINIMOS</u>. F,G y H: $2^{\underline{X}} \to C^2(\overline{X})$ por:

$F(A) = \{K \varepsilon C(\overline{X}) : A \subset K\}$,

$G(A) = \{K \varepsilon C(\overline{X}) : A \subset \overline{K^0}\}$ y

$H(A) = \{K \varepsilon C(\overline{X}) : A \cap K \neq \phi\}$.

Lo primero que checaremos es que F(A),G(A) y H(A) así como los hemos definido son compactos y conexos, y por lo tanto son realmente elementos de $C^2(\overline{X})$. Es decir, que F,G y H estan bien definidas.

II.A.1 <u>DEFINICION</u>. Un <u>arco ordenado</u> en 2^X (respectivamente $C(\overline{X})$) es un subcontinuo α de 2^X (respectivamente $C(\overline{X})$) tal que $A,B \varepsilon \alpha$ implica que $A \subset B$ ó $B \subset A$. Los <u>extremos</u> de α son $\cap\alpha$ y $\cup\alpha$ que por (|Nadler, teorema 1.5,pág. 59|) pertenecen a α también. Y por (|Nadler, Lema 1.3, pág 57|), α es una trayectoria en $2^{\underline{X}}$ (respectivamente $C(\overline{X})$).

II.A.2 <u>Lema</u>. Si $A,B \varepsilon 2^{\underline{X}}$ tal que $A \subset B$, $A \neq B$ y cada componente de B intersecta a A. Entonces existe un arco ordenado α en $2^{\underline{X}}$ tal que $\cap\alpha = A$ y $\cup\alpha = B$.

DEMOSTRACION.

(Ver |Nadler, teorema 1.8, pág.59|)

II.A.3 PROPOSICION. $F(A)$ es compacto y conexo.

DEMOSTRACION.

Probaremos que $F(A)$ es conexo por trayectoria y compacto.

Sean $K_1, K_2 \in F(A)$. Como $K_1 \subset \overline{X}$ y $K_2 \subset \overline{X}$, entonces por el lema II.A.2, existen dos arcos ordenados α_1, α_2 en $2^{\overline{X}}$ tales que $K_1 = \cap \alpha_1$, $\overline{X} = \cup \alpha_1$, $K_2 = \cap \alpha_2$, $\overline{X} = \cup \alpha_2$. Sea $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$. Como $\overline{X} \in \alpha_1 \cap \alpha_2$, entonces α es una trayectoria de K_1 a K_2.

Como además $K_1, K_2 \in C(\overline{X})$, sabemos que $\alpha_1, \alpha_2 \subset C(\overline{X})$ (Ver [Nadler, lema 1.11, pág.64]). Por lo que α será una trayectoria en $C(\overline{X})$. Dada $D \in \alpha_1$, tenemos que $A \subset K_1 \subset D \subset \overline{X}$, de manera que $D \in F(A)$ para toda $D \in \alpha_1$. Es decir $\alpha_1 \subset F(A)$. Similarmente $\alpha_2 \subset F(A)$. Por tanto $\alpha \subset F(A)$. Esto muestra que $F(A)$ es conexo por trayectorias.

Como $F(A) \subset C(\overline{X})$ es suficiente con demostrar que $F(A)$ es cerrado en $C(\overline{X})$. Para esto, tomamos una sucesión $(K_n)_n$ de elementos de $F(A)$ que converjan a un $K \in C(\overline{X})$). Entonces $A \subset K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la proposición I.B.7, tenemos que $\lim_{n\to\infty} A \subset \lim_{n\to\infty} K_n$. Es decir, $A \subset K$.

Por tanto $K \in F(A)$. De modo que $F(A)$ es cerrado en $C(\overline{X})$.

II.A.4 Lema $G(A) \subset F(A)$

DEMOSTRACION.

Como $\{K \in C(\overline{X}) : A \subset K^0\} \subset \{K \in C(\overline{X}) : A \subset K\}$. Cerrando ambos conjuntos obtenemos que

$$G(A) = \overline{\{K \in C(\overline{X}) : A \subset K^0\}} \subset \overline{\{K \in C(\overline{X}) ; A \subset K\}} = \overline{F(A)} = F(A).$$

II.A.5 <u>PROPOSICION</u>. $G(A)$ y $H(A)$ son conexos y compactos.

DEMOSTRACION.

Primero demostraremos que $G(A)$ es conexo por trayectoria y compacto.

Sea $K_1, K_2 \in G(A)$. Entonces $K_1, K_2 \in F(A)$, por el lema anterior. Y por tanto existen dos arcos ordenados $\alpha_1, \alpha_2 \in C(\overline{X})$ tales que $K_1 = \cap \alpha_1$, $\overline{X} = \cup \alpha_1$, $K_2 = \cap \alpha_2$, $\overline{X} = \cup \alpha_2$. Sea $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$. Como $\overline{X} \in \alpha_1 \cap \alpha_2$, entonces α es una trayectoria de K_1 a K_2 en $C(\overline{X})$.

Sea $B \in \alpha_1$ y $\varepsilon > 0$. Como $K_1 \in G(A)$, existe $K \in C(\overline{X})$ tal que $A \subset K^0$ y $H(K, K_1) < \varepsilon$. Haciendo $L = B \cup K$, y ya que $A \subset K_1 \subset B$ y $A \subset K^0$ vemos que $L \in C(\overline{X})$ y $A \subset L^0$. Y como $L = B \cup K \subset B \cup N(\varepsilon, K_1) \subset B \cup N(\varepsilon, B) \subset N(\varepsilon, B)$, también tenemos que $H(L, B) < \varepsilon$. Entonces existe $L \in C(\overline{X})$ tal que $A \subset L^0$ y $H(L, B) < \varepsilon$. Y como esto ocurre para toda $\varepsilon > 0$ llegamos a que $B \in \overline{\{K \in C(\overline{X}) : A \subset K^0\}} = G(A)$.

Similarmente $\alpha_2 \subset G(A)$. Por tanto $\alpha \subset G(A)$. Esto muestra que $G(A)$ es conexo por trayectoria.

Para probar la compacidad de $G(A)$ nos fijamos en que $G(A)$ es un subconjunto cerrado de $C(\overline{X})$ que es compacto, por lo tanto concluimos que $G(A)$ es compacto.

Por último probaremos que $H(A)$ es conexo por trayectorias y compacto.

Sea $K_1, K_2 \in H(A)$. Como $K_1 \subset \overline{X}$ y $K_2 \subset \overline{X}$, entonces por el lema II.A.2, existen dos arcos $\alpha_1, \alpha_2 \in 2^{\overline{X}}$; tales que $K_1 = \cap\alpha_1$, $\overline{X} = \cup\alpha_1$, $K_2 = \cap\alpha_2$ y $\overline{X} = \cup\alpha_2$. Sea $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$. Como $\overline{X} \in \alpha_1 \cap \alpha_2$, entonces α es una trayectoria de K_1 a K_2 en $2^{\overline{X}}$. Como además $K_1, K_2 \in C(\overline{X})$ sabemos que α_1, α_2 $C(\overline{X})$ y por lo tanto α será una trayectoria de K_1 a K_2 en $C(\overline{X})$. Si tomamos $K \in \alpha$, entonces $K_1 \subset K \subset \overline{X}$ ó $K_2 \subset K \subset \overline{X}$ de donde deducimos que $A \cap K \neq \phi$. Por tanto $K \in H(A)$. Y en conclusión $H(A)$ es conexo por trayectorias.

Como $H(A) \subset C(\overline{X})$ es suficiente con demostrar que $H(A)$ es cerrado en $C(\overline{X})$.

Para esto tomamos una sucesión $(K_n)_n$ de elementos de $F(A)$ que converjan a $K \in C(\overline{X})$. Como $K_n \cap A \neq \phi$ para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos construir la sucesión $\{x_n\}_n$ en A tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in K_n \cap A$. Como A es compacto existe una subsucesión $(x_{n(m)})_m$ que converge a un punto $a \in A$.

Ya que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\{x_{n(m)}\}_m \subset K_{n(m)}$, aplicando la proposición I.B.7, tenemos que

$$\underline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} \{x_{n(m)}\} \subset \underline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} K_{n(m)}$$

Es decir, $\{a\} \subset K$.

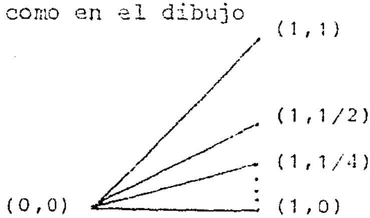
De manera que $A \cap K \neq \phi$. Por tanto $K \in H(A)$, concluyendo entonces que $H(A)$ es compacto.

B. EJEMPLOS

(II.B.0) Más adelante probaremos resultados caracterizando la continuidad de F. G y H. Por el momento mostraremos algunos ejemplos que nos ayudarán a familiarizarnos con estas funciones.

(II.B.1) <u>Ejemplo</u>.

La función F no siempre resulta continua. Consideremos una escoba como en el dibujo

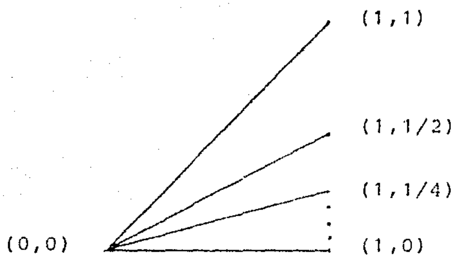


Sean $A=\{(1,0)\}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n=\{(1,1/n),(1,0)\}$, entonces $A_n \to A$. Aseguramos que $F(A) \not\subset \text{Lim inf } F(A_n)$. Sea K el segmento que une a los puntos $(1/2,0)$ y $(1,0)$. Claramente $K \in F(A)$. Supongamos que $K \in \text{Lim inf } F(A_n)$, entonces existe una sucesión $(K_n)_n$ en $C(X)$ tal que $\text{Lim } K_n=K$ y $(1,1/n),(1,0) \in K_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De modo que podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que $A(K,K_N) < \frac{1}{4}$. Como K_N es conexo y $(1, \frac{1}{N}),(1,0) \in K_N$ tenemos que $(0,0) \in K_N$ y $K_N \subset N(1/4,K)$. Es decir $(0,0) \in N(1/4,K)$. Esto es una contradicción pues la distancia de cualquier punto de K a $(0,0)$ es $\geq 1/2$. Por tanto $K \notin \text{Lim inf } F(A_n)$. De manera que F no es continua.

(II.B.2) Ejemplo.

La función G no siempre resulta continua.

Consideremos otra vez la escoba como en el dibujo

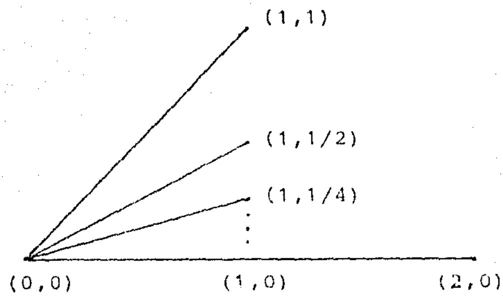


Sean $A=\{(1,0)\}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n=\{(1,1/n)\}$, entonces $A_n \to A$. Aseguramos que $\mathrm{Lim\ sup}\ G(A) \not\subset G(A)$. Sean K el segmento que une a los puntos $(1/2,0)$ y (1.0) y, para cada $n \in \mathbb{N}$, K_n es el segmento que une los puntos $(1/2,1/2n)$ y $(1,1/n)$. Como $K_n \to K$ y $K_n \in G(A_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $K \in \mathrm{Lim\ inf}\ G(A_n) \subset \mathrm{Lim\ sup}\ G(A_n)$. Supongamos que $K \in G(A)$. Es decir que para toda $\varepsilon > 0$ existe $L \in C(\underline{\overline{X}})$ tal que $A \subset \mathrm{int}\ L^0$ y $H(L,K) < \varepsilon$. En particular para $\varepsilon=1/4$ existe $L \in C(\underline{\overline{X}})$ tal que $(1,0) \in L^0$ y $H(L,K) < 1/4$.

Como $(1,0) \in L^0$ y $A_n \to A$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(1,\frac{1}{N}) \in L^0$. Y ya que L es conexo, tenemos que $(0,0) \in L$. Es decir $(0,0) \in N(1/4,K)$. Esto es una contradicción pues la distancia de cualquier punto de K a $(0,0)$ es $\geq 1/2$. Por tanto $K \notin G(A)$. De manera que G no es continua.

(II.B.3) Ejemplo.

La función H no es siempre continua, consideremos una vez más la escoba con el segmento límite alargado como el dibujo.



Sean $A=\{(1,0)\}$ y, para cada $n\in\mathbb{N}$, $A_n=\{1,1/n)\}$, entonces $A_n\to A$. Aseguramos que $H(A)\notin \text{Lim inf } H(A_n)$. Sea K el segmento que une a los puntos (1,0) y (2,0). Claramente $K\in H(A)$. Vamos a probar que $K\notin \text{Lim inf } H(A_n)$. Supongamos que $K\in \text{Lim inf } H(A_n)$, entonces existe una sucesión $(K_n)_n$ en $C(\overline{X})$ tal que $\text{Lim } K_n=K$ y $(1,1/n)\in K_n$ para toda $n\in\mathbb{N}$. De modo que podemos tomar $N\in\mathbb{N}$ tal que $H(K,K_N)<1/2$. En particular $(2,0)\in N(1/2,K_N)$, de modo que existe $p\in K_N$ tal que $d(p,(2,0))<1/2$. Esto implica $p\in K$. De manera que $K_N\cap K\neq\phi$ y $(1,1/N)\in K_N$. Como K_N es conexo, tenemos que $(0,0)\in K_N\subset N(1/2,K)$. Esto es una contradicción pues la distancia de cualquier punto de K a (0,0) es ≥ 1. Por tanto $K\notin \text{Lim inf } H(A_n)$. De manera que H no es continua.

Ya vimos, pues, que F,G y H no siempre resultan ser continuas. Más adelante veremos que propiedad debe tener $\overline{X}$ para que se cumpla la continuidad de estas funciones.

Sin embargo las funciones F,G y H cumplen algunas propiedades de continuidad. A continuación demostraremos algunas de ellas.

C. PROPIEDADES GENERALES.

(II.C.1) PROPOSICION. La función F es semicontinua por arriba.

DEMOSTRACION.

Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\overline{X}}$, tal que $A_n \to A$. Probaremos que

$$\text{Lim sup } F(A_n) \subset F(A)$$

Sea $K \in \text{Lim sup } F(A_n)$. Entonces por la proposición (I.B.5), existe una sucesión $(K_{n(m)})_m$ con $K_{n(m)} \in F(A_{n(m)})$ tal que $K_{n(m)} \to K$. Como $A_{n(m)} \subset K_{n(m)}$ y $A_{n(m)} \to A$, entonces por la proposición (I.B.7) llegamos a que $A \subset K$. Además, como cada $K_{n(m)}$ es un continuo por definición de F, $K \in C(\overline{X})$. Y concluimos entonces que $K \in F(A)$.

(II.C.2) PROPOSICION. La función G es semicontinua por abajo.

DEMOSTRACION.

Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\underline{X}}$, tal que $A_n \to A$. Probaremos que

$$G(A) \subset \lim\inf G(A_n).$$

Sea $K \in G(A)$ y sea $\varepsilon > 0$.

Entonces existe $L \in C(\underline{X})$, $A \subset L^0$ y $H(K,L) < \varepsilon$. Como A es compacto entonces existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \subset L^0$. Además, ya que $A_n \to A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset N(\delta, A) \subset L^0$ para $n \geq N$. De modo que $L \in G(A_n)$ a partir de N. Por lo tanto tenemos que $B^H_\varepsilon(K) \cap G(A_n) \neq \phi$ para $n \geq N$.

Como esto sucede para todos $\varepsilon > 0$, concluimos que $K \in \operatorname{Lim}\inf G(A_n)$.

(II.C.3) <u>PROPOSICION</u>. La función H es semicontinua por arriba.

DEMOSTRACION.

Sea una sucesión $(A_n)_n$ en $2^{\underline{X}}$, tal que $A_n \to A$. Probaremos que

$$\operatorname{Lim}\sup H(A_n) \subset H(A)$$

Sea $K \in \operatorname{Lim}\sup H(A_n)$. Entonces existen dos sucesiones

$(K_{n(m)})_m$ y $(A_{n(m)})_m$ tales que $A_{n(m)} \cap K_{n(m)} \neq \phi$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $K_{n(m)} \to K$ y $A_{n(m)} \to A$.

Tomemos una sucesión $(x_{n(m)})_m$ en $\underline{X}$ tal que $x_{n(m)} \in A_{n(m)} \cap K_{n(m)}$, por la compacidad de $\underline{X}$ existe una subsucesión $(x_{n(m(l))})_l$ que converge a un punto $x_0 \in X$. Ya que $x_0 \in \operatorname{Lim\,sup} K_{n(m)} \subset K$ y $x_0 \in \operatorname{Lim\,sup} A_{n(m)} \subset A$ concluimos que $x_0 \in A \cap K$ y por lo tanto, como $K \in C(\underline{X})$ y $A \cap K \neq \phi$, llegamos a que $K \in H(A)$.

D. UNICOHERENCIA

En esta sección supondremos que $\underline{X}$ es hereditariamente unicoherente.

Goodykootz ha considerado dos funciones $f, g : 2^{\underline{X}} \to C(\underline{X})$ definidas como sigue:

$$f(A) = \cap \{K \in C(\underline{X}) \ : \ A \subset K\}$$

$$g(A) = \cap \{K \in C(\underline{X}) \ : \ A \subset K^0\}$$

En esta sección mostraremos su conexión con las funciones F y G.

(II.D.1) TEOREMA. Sea $A \in 2^{\underline{X}}$. Entonces la función F es continua en A si y sólo si la función f es continua en A.

DEMOSTRACION.

($\Rightarrow$) Para esta implicación usaremos el teorema (I.C.1).

Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\overline{X}}$, tal que $A_n \to A$ y $f(A_n) \to B$. Vamos a demostrar que $f(A)=B$.

Primero demostraremos que $f(A) \subset B$.

Por definición de f sabemos que $A_n \subset f(A_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, además tenemos que $A_n \to A$ y $f(A_n) \to B$. Usando (I.B.7) tenemos que $A \subset B$, y ya que $B \in C(\overline{X})$ concluimos que $f(A) \subset B$.

Ahora demostraremos que $B \subset f(A)$.

Sabemos que $A \subset f(A)$ y $f(A) \in C(\overline{X})$. De modo que $f(A) \in F(A) = \text{Lim } F(A_n)$. Por lo tanto existe una sucesión $(K_n)_n$ (Ver proposición I.B.6) tal que $K_n \to f(A)$, con $K_n \in F(A_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Notemos que cada K_n es un continuo conteniendo a A_n y por lo tanto $f(A_n) \subset K_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la proposición (1.B.7) concluimos que $B = \text{lim } f(A_n) \subset \text{Lim } K_n = f(A)$.

($\Leftarrow$) Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\overline{X}}$ tal que $A_n \to A$.

Por la proposición II.C.1 es suficiente con demostrar que

$$F(A) \subset \text{Lim inf } F(A_n).$$

Sea $K \in F(A)$ y $\varepsilon > 0$. Definimos $B_n = A_n \cup A$ para toda

$n \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que $B_n \to A$. Y como f es continua en A por hipótesis, tenemos que $\mathrm{Lim}\, f(B_n) = f(A)$. De modo que para la ε dada exista $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H(f(B_n), f(A)) < \varepsilon$ para $n \geq N_0$.

Hacemos $L_n = K \cup f(B_n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Como $A \subset K$ y $A \subset B_n \subset f(B_n)$, tenemos que $L_n \in C(\underline{\overline{X}})$ y $A_n \subset L_n$.

Además, para $n \geq N_0$ ocurre que

$$L_n \subset K \cup f(B_n) \subset K \cup N(\varepsilon, f(A)) \subset K \cup N(\varepsilon, K) = N(\varepsilon, K).$$

Y por lo tanto $H(L_n, K) < \varepsilon$ para $n \geq N_0$. Como esto ocurre para cada $\varepsilon > 0$, concluimos que $(L_n)_n$ es una sucesión en $2^{\underline{\overline{X}}}$ con $L_n \in F(A_n)$ para $n \in \mathbb{N}$ y $L_n \to K$. Aplicando la proposición I.B.6 obtenemos que $K \in \mathrm{Lim\,inf}\, F(A_n)$.

El siguiente resultado nos da relación interesante entre F y G.

(II.D.2) <u>PROPOSICION.</u> Sea $A \in 2^{\underline{\overline{X}}}$. Entonces

$$G(A) = F(g(A))$$

DEMOSTRACION.

Mostraremos primero que $G(A) \subset F(g(A))$.

Sea $K \in G(A)$. Entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe $L \in C(\overline{X})$, con $A \subset L^0$ y $H(K,L) < \varepsilon$.

Para $\varepsilon = 1/n$ podemos elegir $L_n \in C(\overline{X})$, con $A \subset L_n^0$ y $H(K,L_n) < \frac{1}{n}$. Entonces $L_n \to K$, y puesto que $g(A) = \cap\{K \in C(\overline{X}) : A \subset K^0\}$, observamos que $g(A) \subset L_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $L_n \to K$ y $g(A) \to g(A)$, utilizando la proposición (I.B.7), concluimos que $g(A) \subset K$. Y por lo tanto $K \in F(g(A))$.

Mostraremos ahora que $F(g(A) \subset G(A)$.

Sea $K \in F(g(A))$ y $\varepsilon > 0$. Mostraremos que existe $L \in C(\overline{X})$, con $A \subset L^0$ y $H(L,K) < \varepsilon$.

Sabemos que $g(A) = \cap\{K \in C(X) : A \subset K^0\} \subset K \subset N(\varepsilon, K)$. De modo que $\overline{X} - N(\varepsilon,K) \subset \overline{X} - (\cap\{K \in C(\overline{X}) : A \subset K^0\})$. La expresión anterior es equivalente a $\overline{X} - N(\varepsilon,K) \subset \cup\{\overline{X} - K : A \subset K^0\}$. Y debido a la compacidad de $\overline{X} - N(\varepsilon,K)$, podemos encontrar una subfamilia finita $\{\overline{X}-K_1, \ldots, \overline{X}-K_n\}$ tal que $\overline{X} - N(\varepsilon,K) \subset \cup\{\overline{X}-K_i : i=1,\ldots,n\}$. Con lo cual llegamos a que $K_1 \cap, \ldots, \cap K_n \subset N(\varepsilon,K)$.

Haciendo $L = (K_1 \cap \ldots \cap K_n) \cup K$ vemos que $A \subset L^0$, $L \in C(\overline{X})$ y $H(L,K) < \varepsilon$ concluyendo entonces que $K \in G(A)$. Y por tanto $G(A) = F(G(A))$.

(II.D.3) <u>TEOREMA</u>. Sea $A \in 2^{\overline{X}}$. Entonces la función G es continua en A si y sólo si la función g es continua en A.

DEMOSTRACION.

(⇒) En esta implicación usaremos el teorema (I.C.I).

Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\underline{X}}$, tal que $A_n \to A$ y $g(A_n) \to B$. Vamos a demostrar que $g(A)=B$.

Demostraremos primero que $B \subset g(A)$.

Por la proposición (II.D.2) tenemos que $G(A)=F(g(A))$, y además sabemos que $g(A) \in F(g(A))$, de donde se sigue que $g(A) \in G(A)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $L \in C(\underline{X})$ tal que $A \subset L^0$ y $H(L,g(A)) < \varepsilon$. Como $A \subset L^0$ y A es compacto, entonces existe δ tal que $N(\delta,A) \subset L^0$. Y ya que $A_n \to A$, entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset N(\delta,A) \subset L^0$ para toda $n \geq N_0$. De esta forma tenemos que $g(A_n) \subset L$ para toda $n \geq N_0$. De modo que $\operatorname{Lim} g(A_n) \subset L \subset N(\varepsilon,g(A))$. Como esto ocurre para toda ε concluimos que $B = \operatorname{Lim} g(A_n) \subset g(A)$.
Demostraremos ahora que $g(A) \subset B$.

Por la proposición (II.D.2) tenemos que $G(A_n)=F(g(A_n))$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y además sabemos que $g(A_n) \in F(g(A_n))$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De donde se sigue que $g(A_n) \in G(A_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De modo que $\{g(A_n)\} \subset G(A_n)$, $\{g(A_n)\} \to \{B\}$ y $G(A_n) \to G(A)$ (Ya que G es continua en A). Por la proposición (I.B.7) concluimos que $\{B\} \subset G(A)$. De modo que $B \in G(A) = F(g(A))$. Por lo tanto $g(A) \subset B$.

(⇐) Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\underline{X}}$ tal que $A_n \to A$.

Por la proposición (II.C.2) es suficiente con demostrar que

$$\text{Lim sup } G(A_n) \subset G(A)$$

Por la proposición (II.D.2) sabemos que $G(A_n)=F(g(A_n))$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De modo que Lim sup $G(A_n) =$ Lim sup $F(g(A_n))$. Como F es semicontinua por arriba y $g(A_n) \to g(A)$ por hipótesis, tenemos que Lim sup $F(g(A_n)) \subset F(g(A))=G(A)$. De manera que Lim sup $G(A_n) \subset G(A)$.

E. CONTINUIDAD DE G.

(II.E.1) TEOREMA. Sea $A \in 2^{\overline{X}}$. Entonces F es continua en A sí y sólo si $F(A)=G(A)$.

DEMOSTRACION.

$(\Rightarrow)$ Como $G(A) \subset F(A)$ (lema II.A.4), es suficiente con demostrar la otra contención.

Sea $\underline{K} \in F(A)$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos la sucesión $(A_n)_n$ en $2^{\overline{X}}$, tal que $A_n = \overline{N(1/n,A)}$. Es fácil ver que $A_n \to A$, y como por hipótesis F es continua en A, tenemos que $\text{Lim } F(A_n)=F(A)$. De modo que para ε existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(F(A_N),F(A)) < \varepsilon$.

En particular tenemos que $F(A) \subset N(\varepsilon,F(A_N))$. Como $K \in F(A)$, sabemos que existe $L \in F(A_N)$ tal que $H(K,L) < \varepsilon$. Notemos que $A \subset A_N^0$ y como $A_N \subset L$, llegamos a que $A \subset L^0$. Por lo tanto encontramos $L \in C(\overline{X})$ tal que $A \subset L^0$ y $H(K,L)<\varepsilon$. Como esto ocurre para toda $\varepsilon>0$, concluimos que $K \in \overline{G(A)}=G(A)$.

$(\Leftarrow)$ Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\overline{X}}$, tal que $A_n \to A$. Por las proposiciones (II.C.1) y (II.C.2) tenemos que:

$$\text{Lim sup } F(A_n) \subset F(A)=G(A) \subset \text{Lim inf } G(A_n) \subset \text{Lim inf } F(A_n) \subset \text{Lim sup } F(A_n).$$

Así que $F(A)=\text{Lim sup } F(A_n)= \text{Lim inf } F(A_n)$. Por lo tanto

F es continua en A.

(II.E.2) **Corolario**. Sea $A \in 2^{\overline{X}}$. Si F es continua en A, entonces G es continua en A.

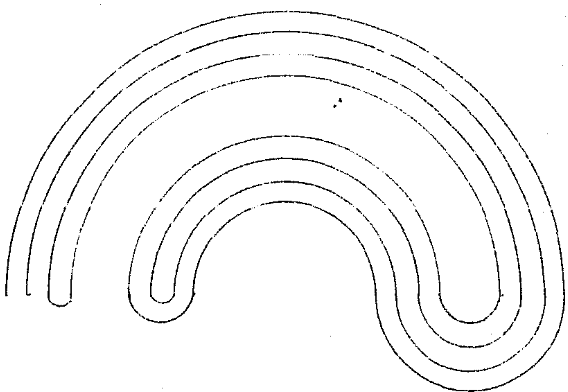
Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\overline{X}}$ tal que $A_n \to A$. Por la proposición (II.C.2) es suficiente demostrar que $\text{Lim sup } G(A_n) \subset G(A)$.

Por el Lema (II.A.4) tenemos que $G(A_n) \subset F(A_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

De modo que $\text{Lim sup } G(A_n) \subset \text{Lim Sup } F(A_n) \subset F(A)$. Y por el teorema (II.E.1) tenemos que $F(A)=G(A)$, concluyendo entonces que $\text{Lim sup } G(A_n) \subset G(A)$. Por tanto G es continua en A.

Ahora veremos que la continuidad de G en A no implica la continuidad de F en A.

(II.E.3) <u>Ejemplo.</u>



ARCOIRIS

(II.E.4) <u>DEFINICION</u>. $\underline{X}$ es <u>descomponible</u> si existen $A, B \in C(\underline{X}) - \{\underline{X}\}$ tales que $\underline{X} = A \cup B$. $\underline{Y}$ es <u>indescomponible</u> si no es descomponible.

El ejemplo más sencillo de un espacio indescomponible aparece en [Kuratouski pp.200-231] el cual se ilustra en la página anterior de este trabajo y que a continuación describiremos:

El arcoiris se construye de la siguiente forma. Consideremos el conjunto de Cantor sobre el conjunto $[0,1] \times \{0\}$. Ahora trazamos semicirculos en el plano superior con centro en el punto $(1/2,0)$ y radio $|(1/2,0)-(p,0)|$, donde p es un punto del conjunto de Cantor en el intervalo $[0,1/3]$. De igual manera para $i=0,1,\ldots,$ trazamos semicirculos en el plano inferior con centro en el punto $(5/6\cdot 3^{i},0)$ y radio $|(5/6\cdot 3^{i},0)-(p,0)|$, donde p es un punto de Cantor en el intervalo

$$[2/3^{(i+1)},\ 7/3^{(i+2)}].$$

Ahora veremos una caracterización de espacio indescomponible, la cuál nos permitirá mostrar que, en uno de estos espacios la función G es continua.

(II.E.5) <u>Lema</u>. Sea $\underline{Y}$ un espacio topológico conexo y A un subespacio conexo de $\underline{Y}$. Si $\underline{Y} - A = H \cup K$ con H y K conjuntos separados diferentes de vacío, entonces $A \cup H$ y $A \cup K$ son conexos.

DEMOSTRACION. Supongamos, por ejemplo que $A \cup H$ no es conexo. Entonces existe E y F conjuntos separados tales que $A \cup H = E \cup F$. Aseguramos que $A \subset E$ ó $A \subset F$. Sí no ocurririera así, tendríamos que $A \cap E \neq \phi$ y $A \cap F \neq \phi$. De manera que $A = (A \cap E) \cup (A \cap F)$ y $A \cap F$, $A \cap E$ son conjuntos separados, lo cuál es una contradicción con la conexidad de A. Así, tenemos que $A \subset E$ ó $A \subset F$. Supongamos por ejemplo que $A \subset E$. Entonces $F \subset H$. De modo que $\overline{F} \cap K \subset \overline{H} \cap K = \phi$, $\overline{F} \cap E = \phi$, $\overline{E} \cap F = \phi$, $\overline{K} \cap F \subset H \cap \overline{K} = \phi$. De manera que $\underline{Y} = F \cup (E \cup K)$ es una separación de $\underline{Y}$, lo cuál contradice la conexidad de $\underline{Y}$. Esto nos permite concluir que $A \cup H$ es conexo. De la misma forma se prueba que $A \cup K$ es conexo y por tanto queda demostrado el Lema.

(II.E.6) <u>TEOREMA</u>. $\underline{X}$ es indescomponible si y sólo si el único subcontinuo con interior no vacío es $\underline{X}$ mismo.

DEMOSTRACION.

($\Rightarrow$) Supongamos que existe un subcontinuo A diferente de $\underline{X}$ con interior distinto del vacío. Analizamos dos casos:

a) $\underline{X} - A$ conexo. Como $A^0 \neq \phi$, entonces $\overline{(\underline{X} - A)} \neq \underline{X}$, así que A y $\overline{(\underline{X} - A)}$ son una descomposición de $\underline{X}$, lo cual es una contradicción.

b) $\underline{X} - A$ no es conexo. Por la disconexidad de $\underline{X} - A$ existen dos conjuntos separados y no vacíos H, K tales que $\underline{X} - A = H \cup K$. Entonces por el Lema (II.E.5) tenemos que $A \cup H$ y $A \cup K$ son conexos. Y ya que $\overline{(A \cup H)} =$

$= A \cup H, \overline{(A \cup K)} = A \cup K$ y los puntos de K no están en $A \cup H$, llegamos a que $A \cup H \neq \underline{X}$. De modo que $A \cup H$ y $A \cup K$ son una descomposición de $\underline{X}$, lo cuál es nuevamente una contradicción.

(⇐) Supongamos que $\underline{X}$ es descomponible. Es decir, existen $A, B \varepsilon C(\underline{X}) - \{\underline{X}\}$ tales que $\underline{X} = A \cup B$.

Como $\underline{X} - B$ es abierto y $\underline{X} = A \cup B$, entonces $(\underline{X} - B) \subset A^0$. De manera que $A^0 \neq \phi$. Probando con ésto que si $\underline{X}$ es el único subcontinuo con interior no vacío, entonces resulta ser indescomponible.

(II.E.7) <u>Corolario.</u> Si $\underline{X}$ es indescomponible, entonces G es constante en $2^{\underline{X}}$.

DEMOSTRACION.

En efecto, para toda $A \varepsilon 2^{\underline{X}}$ se tiene:

$$G(A) = \overline{\{K \varepsilon C(\underline{X}) : A \subset K^0\}} = \overline{\{\underline{X}\}} = \{\underline{X}\}.$$

Como los espacios indescomponibles no son localmente conexos y la función F es continua si y sólo si $\underline{X}$ es localmente conexo (Ver teorema (II.G.I)). Concluimos que si $\underline{X}$ es indescomponible entonces G es continua mientras que F no es continua.

(II.E.8) TEOREMA . Sea $A \in 2^{\overline{X}}$. Entonces, si la restricción $G|F_1(\overline{X}): F_1(\overline{X}) \to C^2(\overline{X})$ es continua en $\{a\}$ para cada $a \in A$, entonces la función G es continua en A.

DEMOSTRACION.

Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\overline{X}}$, tal que $A_n \to A$. Por la proposición (II.C.2) es suficiente demostrar que $\text{Lim sup } G(A_n) \subset G(A)$.

Tomemos $K \in \text{Lim sup } G(A_n)$. Tenemos que demostrar que para toda $\varepsilon > 0$, existe $L \in C(\overline{X})$ tal que $A \subset L^0$ y $H(K,L) < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la proposición (1.B.5) existen $n_{(1)},\ldots,n_{(2)},\ldots$, con $n_{(1)} < n_{(2)}$ y existen $L_{n(m)} \in G(A_{n(m)})$ tales que $L_{n(m)} \to K$. Además para cada m, existe $K_{n(m)} \in C(\overline{X})$ tal que $A_{n(m)} \subset K^{o}_{n(m)}$ y $H(L_{n(m)},K_{n(m)}) < \frac{1}{m}$. Como $H(K,K_{n(m)}) < H(K,L_{n(m)}) + \frac{1}{m}$ para toda $m \in \mathbb{N}$ tenemos que $K_{n(m)} \to K$.

En resumen vemos que $K_{n(m)} \to K$, $A_{n(m)} \to A$ y $A_{n(m)} \subset K_{n(m)}$. Y aplicando la proposición (I.B.7) llegamos a que $A \subset K$.

Ahora tomemos un punto arbitrario $x \in A$ y notemos que existe una sucesión $(x_{n(m)})_m$ tal que $x_{n(m)} \to x$ y $x_{n(m)} \in A_{n(m)} \subset K^{o}_{n(m)}$. Aplicando la proposición (I.B.5), llegamos a que $K \in \text{Lim sup } G(\{x_{n(m)}\})$.

Por hipótesis sabemos que

$$\text{Lim sup } G(\{x_{n(m)}\}) = \text{Lim } G(\{x_{n(m)}\}) = G(\{x\}),$$

lo cual implica que $K \in G(\{x\})$.

De aquí que exista un continuo $K(x)$ tal que $x \in K(x)^0$ y $H(K,K(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Hacemos $L = K \cup (\overline{\cup\{K(x) : x \in A\}})$.

Dada $x \in A \subset K$, tenemos que $x \in K \cap (K(x))^0$ y $K(x) \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, K)$. De aquí que $K \cup (\overline{\cup\{K(x) : x \in A\}})$ es conexo, contiene a A en su interior y esta contenido en $N(\frac{\varepsilon}{2}, K)$. De modo que $L \in C(\overline{X})$, $A \subset L^0$ y $L \subset N(\varepsilon, K)$. De donde concluimos que $H(K,L) < \varepsilon$ y $A \subset L^0$. Y por tanto $K \in G(A)$.

(II.E.9) Corolario . La función G es continua si y sólo si la restricción $G \mid F_1(\overline{X}) : F_1(\overline{X}) \to C^2(\overline{X})$ es continua.

(II.E.10) Corolario . Sea $\overline{X}$ hereditariamente unicoherente. Entonces la función g es continua si y sólo si la restricción $g|F_1(\overline{X})$ es continua.

DEMOSTRACION.

En efecto, la continuidad de g es equivalente, por el teorema (II.D.3) a la continuidad de G, la cual es a su vez equivalente a la continuidad de $G|F_1(\overline{X})$ por el corolario (II.E.5).

Probaremos ahora la equivalencia entre la continuidad de $G|F_1(\overline{X})$ y la de $g\ |F_1(\overline{X})$, con lo cual habremos terminado.

Si $G|F_1(\overline{X})$ es continua, entonces G es continua por el corolario (II.E.5). De modo que g resulta ser continua por el teorema (II.D.3). De donde concluimos que $g|F_1(\overline{X})$ es continua.

Supongamos ahora que $g|F_1(\overline{X})$ es continua en A. Por la proposición (II.C.2) es suficiente con demostrar que $G|F_1(\overline{X})$ es $\overline{SC}$ en A.

Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $F_1(\overline{X})$, tal que $A_n \to A$. Por la proposición (II.D.2) sabemos que

$$G(A_n) = F(g(A_n)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. De modo que

$$\text{Lim sup } G(A_n) = \text{Lim sup } F(g(A_n))$$

Como por hipótesis $g|F_1(\overline{X})$ es continua, $g(A_n) \to g(A)$ y como F es semicontinua por arriba, tenemos que

$$\text{Lim sup } F(g(A_n)) \subset F(g(A)) = G(A)$$

Y por lo tanto concluimos que:

$$\text{Lim sup } G(A_n) \subset G(A)$$

F. SUAVIDAD

(II.F.0) El objetivo de esta sección es relacionar la suavidad en puntos de $\underline{X}$ con la continuidad de la función F.

(II.F.I) Lema . Sean $x, p \in \underline{X}$ y sea $(x_n)_n$ una sucesión en $\underline{X}$ tal que $\{x_n,p\} \to \{x,p\}$. Entonces $x_n \to x$.

DEMOSTRACION.

Sea $\varepsilon > 0$. Si $p \neq x$. Hacemos $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, \frac{d(p,x)}{2}\}$.

Como $x \in \text{Lim inf}\{p,x_n\}$, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\varepsilon_1}(x) \cap \{p,x_n\} \neq \phi$ para toda $n \geq N$. Esto implica que $x_n \in B_{\varepsilon_1}(x)$ para toda $n \geq N$. Y por lo tanto $d(x,x_n) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. De donde concluimos que $x_n \to x$. Si $p=x$. Entonces, como $\{p,x_n\} \to \{p\}$, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(\{p,x_n\},\{p\}) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$.

En particular tenemos que $\{p,x_n\} \subset N(\varepsilon,\{p\})$ para toda $n \geq N$. Y por lo tanto $d(x_n,p) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. De donde concluimos que $x_n \to x$.

(II.F.2) Lema . $F_2(p,\underline{X})$ es compacto.

DEMOSTRACION.

Sea $(\{x_n,p\})_n$ una sucesión en $F_2(p,\overline{X})$. Por la compacidad de $\overline{X}$ podemos encontrar una subsucesión $(x_{n(m)})_m$ convergente a un punto $x \in \overline{X}$. De manera que

$$\{x_{n(m)},p\} \to \{x,p\} \in F_2(p,\overline{X}) \text{ y } (\{x_{n(m)},p\})$$

es subsucesión de $(\{x_n,p\})_n$. Por lo tanto $F_2(p,\overline{X})$ es compacto.

(II.F.3) PROPOSICION.

$\overline{X}$ es suave en un punto $p \in \overline{X}$ si y sólo si la restricción $F|F_2(p,\overline{X}) \to C^2(\overline{X})$ es continua.

DEMOSTRACION.

($\Rightarrow$) Sea $\{p,x\} \in F_2(p,\overline{X})$ y sea $(\{x_n,p\})_n$ una sucesión en $F_2(p,\overline{X})$ tal que $\{x_n,p\} \to \{x,p\}$. Por la proposición II.C.I es suficiente demostrar que

$$F(\{x,p\}) \subset \text{Lim inf } F(\{x_n,p\}).$$

Sea $K \in F(\{x,p\})$. Entonces $K \in C(\underline{\overline{X}})$ y $x,p \in K$. Además, utilizando el Lema (II.F.1) y el hecho de que $\{x_n,p\} \to \{x,p\}$, tenemos que $x_n \to x$.

Como $\underline{\overline{X}}$ es suave en p, podemos encontrar una sucesión $(K_n)_n$ en $C(\underline{\overline{X}})$ tal que $x_n, p \in K_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $K_n \to K$. Lo cual nos permite concluir, por el Lema (I.B.6), que $K \in \text{Lim inf } F(\{x_n,p\})$.

($\Leftarrow$) Vamos a demostrar que $\underline{\overline{X}}$ es suave en p.

Sean $x \in \underline{\overline{X}}$ y $(x_n)_n$ en $\underline{\overline{X}}$, tal que $x_n \to x$. Y sea $K \in C(\underline{\overline{X}})$ con $p,x \in K$.

Hagamos $A=\{p,x\}$ y $A_n=\{p,x_n\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $x_n \to x$, entonces $A_n \to A$. Debido a que la restricción $F|F_2(p,\underline{\overline{X}})$ es continua en A, se cumple que $F(A) \subset \text{Lim inf } F(A_n)$. De manera que $K \in F(A) \subset \text{Lim inf } F(A_n)$. Aplicando la proposición (I.B,6) concluimos que existe una sucesión $(K_n)_n$ de subcontinuos de $\underline{\overline{X}}$ tales que $p, x_n \in K_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $K_n \to K$.

(II.F.4) <u>PROPOSICION</u>. Si $\underline{\overline{X}}$ es suave en p, entonces para toda $A \in 2^{\underline{\overline{X}}}_p$ la función F es continua en A.

DEMOSTRACION.

Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\underline{\overline{X}}}$, tal que $A_n \to A \in 2^{\underline{\overline{X}}}_p$.

Por la proposición (II.C.I) es suficiente demostrar que

$$F(A) \subset \operatorname{Lim\,inf} F(A_n)$$

Sea $K \in F(A)$ y $\varepsilon > 0$. Por la proposición (II.F.3) sabemos que $F|F_2(p,\underline{\overline{X}})$ es continua, y por la compacidad de $F_2(p,\underline{\overline{X}})$ (Lema II.F.2) también uniformemente continua. De modo que existe $\delta > 0$ tal que siempre que $P,Q \in F_2(p,\underline{\overline{X}})$, con $H(P,Q) < \delta$, entonces $H(F(P),F(Q)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Es decir, que existe $\delta > 0$ tal que siempre que $P,Q \in F_2(p,\underline{\overline{X}})$, con $H(P,Q) < \delta$ y $K_1 \in F(P)$, entonces existe $L_1 \in F(Q)$ tal que $H(K_1,L_1) < \varepsilon/2$.

Sea $B \in 2^{\underline{\overline{X}}}$ tal que $H(A,B) < \delta$, y sea $x \in B$. Entonces existe $y \in A$ tal que $d(x,y) < \delta$. Como $\{p,x\}$, $\{p,y\} \in F_2(p,\underline{\overline{X}})$, $H(\{p,x\}, \{p,y\}) < \delta$ y $K \in F(\{p,y\})$, tenemos que existe $L_x \in F(\{p,x\})$ tal que $H(K,L_x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Haciendo $L=(\overline{\cup\{L_x : x \in B\}})$, vemos que $p \in L_x$ y $L_x \subset N(\varepsilon/2,K)$ para toda $x \in B$. Y por lo tanto $(\overline{\cup\{L_x : x \in B\}}) \in C(\underline{\overline{X}})$, $B \subset (\overline{\cup\{L_x : x \in B\}})$ y $H(K,(\overline{\cup\{L_x : x \in B\}})) < \varepsilon$. Por tanto si $H(A,B) < \delta$, entonces $B_\varepsilon^H(K) \cap F(B) \neq \phi$.

De manera que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon^H(K) \cap F(A_n) \neq \phi$ para $n \geq N$, concluyendo entonces que $K \in \operatorname{Lim\,inf} F(A_n)$.

(II.F.5) PROPOSICION. Sea $p \in \underline{\overline{X}}$. Si F es continua en K para toda $K \in C(p,\underline{\overline{X}})$, entonces $\underline{\overline{X}}$ es suave en p.

DEMOSTRACION.

Sean $x \in \underline{\overline{X}}$, $(x_n)_n$ una sucesión de $\underline{\overline{X}}$ tal que $x_n \to x$ y K un continuo con $p,x \in K$.

Haciendo $A_n = K \cup \{x_n\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es fácil ver que $A_n \to k$. Y por la continuidad de F en K, tenemos que

$$\mathrm{Lim}\ F(A_n) = F(K).$$

En particular tenemos que $F(K) \subset \mathrm{Lim\ inf}\ F(A_n)$. Y ya que $K \in F(K)$, entonces por la proposición (I.B.6) sabemos que existe una sucesión $(K_n)_n$ con $K_n \in F(A_n)$ y $K_n \to K$. Y por tanto una sucesión $(K_n)_n$ con $x_n, p \in K_n$ y $K_n \to K$. Con lo cual concluimos que $\underline{\overline{X}}$ es suave en p.

Finalizaremos esta sección con un teorema interesante.

(II.F.6) TEOREMA. Sea $p \in \underline{\overline{X}}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $\underline{\overline{X}}$ es suave en p ;

ii) Para toda $A \in 2^{\overline{X}}_{p}$ la función F es continua en A;

iii) Para toda $K \in C(p,\underline{\overline{X}})$ la función F es continua en K;

iv) La restricción $F|F_2(p,\underline{\overline{X}})$ es continua;

DEMOSTRACION.

i) → ii) Sea $A \in 2^{\overline{X}}_{p}$. Entonces por la proposición (II.F.4) tenemos que F es continua en A.

ii) → iii) Sea $K \in C(p,\underline{\overline{X}})$. Como $C(p,\underline{\overline{X}}) \subset 2^{\overline{X}}_{p}$, entonces F es continua en K.

iii) → iv) La proposición (II.F.5) nos permite decir que $\underline{\overline{X}}$ es suave en p. Y de la proposición (II.F.3) concluimos que la restricción $F|F_2(p,\underline{\overline{X}})$ es continua.

iv) → i) Nuevamente, por la proposición (II.F.3) tenemos que $\underline{\overline{X}}$ es suave en p.

G. CONEXIDAD LOCAL Y CONEXIDAD EN PEQUEÑO.

(II.G.O) El teorema (II.F.6) y el corolario (I.D.10) nos permite dar un corolario que nos relaciona la conexidad local con la continuidad de F.

(II.G.I) <u>Corolario</u>. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para $\underline{\overline{X}}$.

i) $\underline{\overline{X}}$ es localmente conexo;

ii) F es continua;

iii) Para $n \geq 2$, la restricción $F|F_n(\underline{\overline{X}})$ es continua.

iv) La restricción $F|F_2(\underline{\overline{X}})$ es continua.

v) Para toda $p \in \underline{\overline{X}}$ la restricción $F|F_2(p,\underline{\overline{X}})$ es continua.

vi) Para toda $p \in \underline{\overline{X}}$, $\underline{\overline{X}}$ es suave en p.

DEMOSTRACION.

i) → ii) Por el corolario (I.D.10) tenemos que para toda $p \in \underline{\overline{X}}$, $\underline{\overline{X}}$ es suave en p. Entonces, del inciso ii) (teorema II.F.6) y del hecho de que $2^{\underline{X}} = \bigcup_{p \in \underline{X}} 2^{\underline{X}}_p$ se desprende que F es continua en $2^{\underline{X}}$.

Las implicaciones ii) → iii), iii) → iv) y iv) → v) son inmediatas.

v) → vi) El inciso iv de (II.F.6) nos lleva a que $\underline{X}$ es suave en p para toda $p \in \underline{X}$.

vi) → i) Por el corolario (I.D.10) tenemos que $\underline{X}$ es localmente conexo.

Ahora mostraremos algunos resultados que nos relacionan la conexidad en pequeño y la continuidad de la función F y sus restricciones.

(II.G.2) TEOREMA. Sea $K \in C(\underline{X})$. Entonces $2^{\underline{X}}$ es conexo en pequeño en K si y sólo si F es continua en K.

DEMOSTRACION.

(⇒) Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\underline{X}}$, tal que $A_n \to K$. Es suficiente demostrar que

$$F(K) \subset \text{Lim inf } F(A_n).$$

Sea $L \in F(K)$ y $\varepsilon > 0$. Por el teorema (I.D.12) existe $B \in C(\underline{\overline{X}})$ tal que $K \subset B^0$ y $H(B,K) < \varepsilon$. Como K es compacto y $K \subset B^0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta,K) \subset B^0$. Y en vista de que $A_n \to K$, llegamos a que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset N(\delta,K) \subset B^0$ para $n \geq N$.

Hacemos $M = L \cup B$. tenemos que $K \subset L$, $K \subset B$ y $A_n \subset B \subset L \cup B = M$ para $n \geq N$. Lo cual nos permite afirmar que $M \in F(A_n)$ para $n \geq N$.

Por otra parte tenemos que $L \subset N(\varepsilon, L \cup B)$ y

$$L \cup B \subset N(\varepsilon,L) \cup N(\varepsilon,K) \subset N(\varepsilon,L) \cup N(\varepsilon,L) = N(\varepsilon,L),$$

de manera que $H(L,M) < \varepsilon$.

Con estas consideraciones concluimos que $B_{\varepsilon}^{H}(L) \cap F(A_n) \neq \phi$ para $n \geq N$. Y por lo tanto $L \in \text{Lim inf } F(A_n)$.

$(\Leftarrow)$ Sea $\varepsilon > 0$. Nuevamente, por el teorema (I.D.12), es suficiente mostrar un $B \in C(\underline{\overline{X}})$ tal que $K \subset B^0$ y $H(K,B) < \varepsilon$.

Por la continuidad de F en K, para la ε dada existe $\delta > 0$ tal que $H^2(F(K), F(A)) < \varepsilon$ siempre que $H(A,K) < \delta$ y $A \in 2^{\underline{\overline{X}}}$.

Hagamos $A = \overline{N(\frac{\delta}{2},K)}$. Entonces $H(A,K) < \delta$ y $A \in 2^{\underline{\overline{X}}}$, de modo que $H^2(F(K), F(A)) < \varepsilon$.

En particular tenemos que $F(K) \subset N^2(\varepsilon, F(A))$. Por lo tanto, para $K \in F(K)$, existe $B \in F(A)$ tal que $H(K,B) < \varepsilon$. Además $K \subset A^0 \subset B$. Con lo cual terminamos la prueba.

El teorema anterior nos permite relacionar una propiedad topológica de $\underline{X}$, con una de su Hiperespacio $2^{\underline{X}}$.

(II.G.3) Corolario $\underline{X}$ es suave en p si y sólo si para todo $L \in C(\underline{X})$ con $p \in L$, $2^{\underline{X}}$ es conexo en pequeño en L.

DEMOSTRACION.

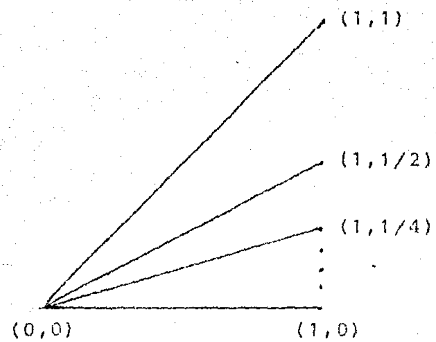
(⇒) Sea $L \in C(\underline{X})$ y $p \in L$.

Por el inciso iii (II.F.6) sabemos que para toda $K \in C(p, \underline{X})$, F es continua en K. De manera que F es continua L. Y por lo tanto, del teorema (II.G.2) concluimos que $2^{\underline{X}}$ es conexo en pequeño en L.

(⇐) Nuevamente, por el teorema (II.G.2), tenemos que F es continua en L para toda $L \in C(p, \underline{X})$. Entonces el inciso i) (II.F.6) nos permite conluir que $\underline{X}$ es suave en p.

Regresando al teorema (II.G.2) hacemos la observación de que si $K \in 2^{\underline{X}}\ C(\underline{X})$, entonces el regreso no siempre se cumple. Veamos el siguiente ejemplo:

(II.G.4) Ejemplo. Consideremos nuevamente a la escobita de batalla E, como en el dibujo.



Es fácil ver que E es suave en p=(0,0). Y utilizando el inciso ii) (II.F.6) tenemos que F es continua en $A=\{(0,0),(1,0)\}$.

Veremos que 2^E no es conexo en pequeño en A.

Supongamos que si lo es.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea L_n el segmento que une los puntos

$(0,0)$ y $(1,1/n)$. Sea $\varepsilon=1/4$. Y consideramos a la componente $\mathcal{Z}$ de $B_{\varepsilon}^{H}(A)$ que tiene a A. Por el teorema (I.D.5) sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $B_{\delta}^{H}(A)\subset\mathcal{Z}$.

Tomamos la primera L_N tal que $L_N \cap B_\delta(1,0)) \neq \phi$. Y sea $y \in B_\delta((1,0)) \cap L_N$. Entonces vemos que $\{0,0),y\} \in B_{\delta}^{H}(A)\subset\mathcal{Z}$.

Hacemos $S= L_N \cap (B_\varepsilon(1,0))$ y definimos los siguientes conjuntos:

$$H_1 = \{K \in B_{\varepsilon}^{H}(A): \ K \cap \overline{S} = \phi\}$$

$$= \{K \in B_{\varepsilon}^{H}(A): \ K \subset \underline{X} - \overline{S}\}, \ y$$

$$H_2 = \{K \in B_{\varepsilon}^{H}(A): K \cap S \neq \phi\}$$

Por el lema (I.D.11) sabemos que H_1 y H_2 son abiertos ajenos de $2^{\underline{X}}$ tales que $\mathcal{Z} \subset H_1 \cup H_2$. Pero $A \in H_1 \cap \mathcal{Z}$ y $\{(0,0), y\} \in H_2 \cap \mathcal{Z}$. Esta contradicción prueba que 2^E no es conexo en pequeño en $A=\{(0,0),(1,0)\}$.

(II.G.5) **Corolario** $\underline{X}$ es conexo en pequeño en p si y sólo si **F** es continua en $\{p\}$.

DEMOSTRACION.

(⇒) Por el corolario (I.D.13) sabemos que $2^{\underline{X}}$ es conexo en pequeño en $\{p\}$. Y como $\{p\} \in C(\overline{X})$, concluimos por el teorema (II.G.2) que F es continua en $\{p\}$.

(⇐) Nuevamente por el teorema (II.G.2) y el hecho de que $\{p\} \in C(\overline{X})$, tenemos que $2^{\overline{X}}$ es conexo en pequeño en $\{p\}$. Concluyendo, por el corolario (I.D.13), que $\overline{X}$ es conexo en pequeño en p.

(II.G.6) TEOREMA. Sea $p \in \overline{X}$. Entonces $\overline{X}$ es conexo en pequeño en p si y sólo si la restricción $F|F_2(p,\overline{X})$ es continua en $\{p\}$.

DEMOSTRACION.

(⇒) Por el corolario (II.G.5) sabemos que F es continua en $\{p\}$. De manera $F|F_2(p,\overline{X})$ también lo es en $\{p\}$.

(⇐) Por el corolario (I.D.13) es suficiente demostrar que $2^{\overline{X}}$ es conexo en pequeño en $\{p\}$. Para lo cual es suficiente que para toda $\varepsilon > 0$ exista $B \in C(\overline{X})$ tal que $H(\{p\},B) < \varepsilon$ y $\{p\} \subset B^0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $H(\{p\}, \{p,x\}) < \delta$ y $\{p,x\} \in F_2(p,\overline{X})$, entonces $H^2(F(\{p\}), F(\{p,x\})) < \varepsilon/2$.

Dada $x \in B_\delta(p)$, tenemos entonces que $\{p\} \in F(\{p\}) \subset N(\varepsilon/2, F(\{p,x\}))$. De manera que existe $L_x \in F(\{p,x\})$ tal que $H(\{p\},L_x) < \varepsilon/2$.

Hacemos $B=\overline{(\cup\{L_x : d(x,p) < \delta\})}$.

Para $x \in B_\delta(p)$, $p \in L_x$. De aquí que $B \in C(\underline{X})$. Además $L_x \subset B_{\varepsilon/2}(p)$ para cada $x \in B_\delta(p)$ implica que $B \subset B_\varepsilon(p)$ y claramente $B_\delta(p) \subset B$. De manera que B cumple las condiciones requeridas.

(II.G.7) Corolario. Las afirmaciones del corolario (II.G.1) son equivalentes a las siguientes:

vii) Para todo $\{x\} \in F_1(\underline{X})$, F es continua en $\{x\}$;

viii) Para todo $\{x\} \in F_1(\underline{X})$ $F|F_2(\underline{X})$ es continua en $\{x\}$.

ix) Para toda $p \in \underline{X}$, $F|F_2(p,\underline{X})$ es continua en $\{p\}$.

DEMOSTRACION.

ii) $\rightarrow$ vii), vii) $\rightarrow$ viii) y viii) $\rightarrow$ ix) son inmediatas.

iv) $\rightarrow$ i) Por el teorema (II.G.6) tenemos que $\underline{X}$ es conexo en pequeño en p para toda $p \in \underline{X}$. Y utilizando un resultado conocido ([Willard, 27.16, pág.201]), concluimos que $\underline{X}$ es localmente conexo.

Vimos que el teorema (II.G.2) no es cierto si $k \notin C(\underline{X})$. Sin embargo, una de las implicaciones se cumple, aún sin que la condición anterior se de.

(II.G.8) <u>TEOREMA</u>. Si $2^{\underline{X}}$ es conexo en pequeño en A, entonces F es continua en A.

DEMOSTRACION.

Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\underline{X}}$ tal que $A_n \to A$. Probaremos que $F(A) \subset \text{Lim inf } F(A_n)$.

Sea $K \in F(A)$.

Por el teorema (I.D.5) sabemos que la componente ¶ de $B_{\varepsilon/2}(A)$ que tiene a A, la contiene en su interior. De manera que existe $\delta > 0$ tal que $B^H_\delta(A) \subset$ ¶ . Y ya que $A_n \to A$, entonces llegamos a que $A_n \in$ ¶ a partir de $N \in \mathbb{N}$.

La función γ: $\overline{¶} \to 2^{\underline{X}}$ dada por $\gamma(B) = K \cup B$ es continua. Hacemos $L = \cup\{D: D \in \text{Im}\,\gamma\} = \cup\{K \cup B: B \in \overline{¶}\}$. Como $A \in$ ¶ y $A \subset K$ tenemos que $K \in \text{Im}\,\gamma \cap C(\underline{X})$. Por tanto (Aplicando [Nadler, Lema 1.49, pág.108]) obtenemos que $L \in C(\underline{X})$.

Por último, vemos que $A_n \subset L$ a partir de N, y para cada $B \in$ ¶ se tiene que:

$K \cup B \subset N(\varepsilon/2,K) \cup N(\varepsilon/2,A) \subset N(\varepsilon/2,K) \cup N(\varepsilon/2,K) = N(\varepsilon/2,K)$
De modo que $L \in F(A_n)$ a partir de N y

$$L = \cup\{K \cup B : B \in \P\} \subset N(\varepsilon,K).$$

Todo esto nos hace concluir que

$$B_\varepsilon^H(K) \cap F(A_n) \neq \phi$$

para $n \geqslant N$. Y por tanto $K \in \mathrm{Lim\ inf}\ F(A_n)$.

H. PROPIEDAD DE KELLEY

(II.H.O) El amable lector de este trabajo tal vez piense que ya se nos olvido la función H. En esta sección nos ocuparemos un poco de ella. Pero antes veremos los últimos resultados relacionados con F.

(II.H.I) TEOREMA. Sea $p \in \underline{X}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $\underline{X}$ tiene la propiedad de Kelley en p ;

ii) La restricción $F|F_1(\underline{X})$ es continua en $\{p\}$;

iii) Para toda $A \in C(p,\underline{X})$, $F|C(\underline{X})$ es continua en A.

DEMOSTRACION.

La implicación iii) → ii) es inmediata. Por lo que únicamente probaremos que ii) → i) y i) → iii).

ii)→ i) Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de $F|F_1(\underline{X})$ en $\{p\}$ existe $\delta > 0$ tal que si $H(\{p\},\{y\}) < \delta$ entonces $H^2(F(\{p\}),F(\{y\}) < \varepsilon$. Es decir, que si $d(p,y) < \delta$ y $K \in F(\{p\})$, entonces exista $L \in F(\{y\})$ tal que $H(K,L) < \varepsilon$. Por tanto $\underline{X}$ tiene la propiedad de Kelley en p.

i) →iii) Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $C(\underline{X})$ tal que $A_n \to A$. Vamos a demostrar que $F(A) \subset \text{Lim inf } F(A_n)$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $K \in F(A)$.

Tomemos la δ de la definición de propiedad de Kelley. Hagamos $\varepsilon_0 = \min\{\delta,\varepsilon\}$. Entonces, como $A_n \to A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n,A) < \varepsilon_0$ para $n \geq N$.

Dada $n \geq N$, se cumple que $A \subset N(\varepsilon_0,A_n)$. De modo que, como $p \in A$, existe $y_n \in A_n$ tal que $d(p,y_n) < \varepsilon_0$. Y por la elección de δ existe un continuo L_n con $y_n \in L_n$ y $H(L_n,K) < \varepsilon$. Hacemos $M_n = L_n \cup A_n$. Como $y_n \in A_n \cap L_n$ y

$A_n \cup L_n \subset N(\varepsilon,K) \cup N(\varepsilon,A) \subset N(\varepsilon,K)$, tenemos que $A_n \subset M_n \in C(\underline{X})$ y $H(K,M_n) < \varepsilon$.

Por tanto $B^H_\varepsilon(K) \cap F(A_n) \neq \phi$ para toda $n \geq N$. Y en conclusión $K \in$ Lim inf $F(A_n)$.

(II.H.2) Corolario. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) $\underline{X}$ tiene la propiedad de Kelley.

ii) La restricción $F|F_1(\underline{X})$ es continua.

iii) La restricción $F|C(\underline{X})$ es continua.

Vimos que la continuidad de F implica la de G y esta es, a su vez, equivalente a la de $G|F_1(\underline{X})$ (Corolario II.E.5). Que relación habrá entre la continuidad de G y la de $F|F_1(\underline{X})$. Es fácil ver que la escoba de batalla tiene la propiedad de Kelley, de modo que por el corolario (II.H.2), $F|F_1(\underline{X})$ es continua en ésta. Mientras que G no lo es. Por lo tanto la continuidad de $F|F_1(\underline{X})$ no implica la de G.

Por fin llegamos a la función H.

(II.H.4) <u>PROPOSICION</u>. Sea $A \in 2^{\underline{X}}$. Si para toda $p \in A$, $\underline{X}$ tiene la propiedad de Kelley en p, entonces H es continua en A.

DEMOSTRACION.

Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $2^{\underline{X}}$ tal que $A_n \to A$. Por el lema (II.C.3) es suficiente demostrar que

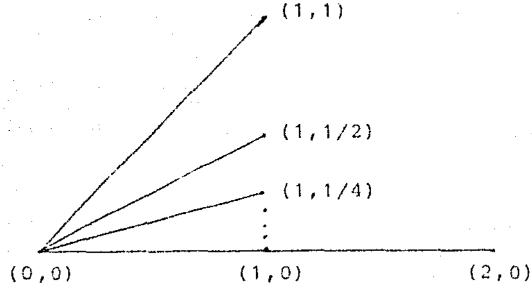
$$H(A) \subset \text{Lim inf } H(A_n).$$

Sea $\varepsilon > 0$ y $K \in H(A)$. Tomemos la δ de la definición de propiedad de Kelley. Como $A_n \to A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \delta$ para $n \geq N$.

Sea $x_0 \in A \cap K$. Entonces, dada $n \geq N$, se cumple que $A \subset N(\delta, A_n)$. De modo que, como $x_0 \in A$, existe $y_n \in A_n$ con $d(x_0, y_n) < \delta$. Y por la elección de δ existe un continuo L_n con $y_n \in L_n$ y $H(K, L_n) < \varepsilon$. Por tanto $B_\varepsilon^H(K) \cap H(A_n) \neq \phi$ para $n \geq N$. Concluyendo entonces que $K \in$ Lim inf $H(A_n)$.

El inverso no es cierto. Que H sea continua en $A \in 2^{\underline{X}}$ no implica que para toda $p \in A$, $\underline{X}$ tenga la propiedad de Kelley en p.

(II.H.5) Ejemplo. Consideremos una vez más la escobita de batalla E con el segmento limite alargado como se muestra en la figura.



Es fácil ver que E no tiene la propiedad de Kelley en (1,0). Sin embargo, veremos que H es continua en el segmento A que une los puntos (1,0) y (2,0).

Sea $(A_n)_n$ una sucesión en 2^E tal que $A_n \to A$. Probaremos que

$$H(A) \subset \operatorname{Lim\,inf} H(A_n).$$

Sea $K \varepsilon H(A)$. Analizaremos dos casos:

a) Si $K \cap A = \{(1,0)\}$. Entonces hacemos lo siguiente:

Como $A^0 \neq \phi$ y $A_n \to A$, existe N_1 a partir de la cual $A_n \cap A \neq \phi$. Para $n \geqslant N_1$, sea:

$$x_n = \min\{x \varepsilon [1,2] : (x,0) \varepsilon A \cap A_n\}$$

Afirmamos que $a_n = (x_n, 0) \to (1,0)$.

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Como el conjunto $(1,1+\varepsilon) \times \{0\}$ es un abierto de E contenido en A y $A_n \to A$, tenemos que existe $N_2 \geqslant N_1$ tal que $A_n \cap (1,1+\varepsilon) \times \{0\} \neq \phi$ para toda $n \geqslant N_2$. Si $(x,0) \varepsilon A_n \cap (1,1+\varepsilon) \times \{0\}$, entonces, por la definición de x_n tenemos que:

$$1 \leqslant x_n \leqslant x < 1+\varepsilon \ .$$

De manera que $d(a_n, (1,0)) < \varepsilon$. Esto prueba que $a_n \to (1,0)$.

Para $n \geqslant N_1$, hacemos $K_n = K \cup ([1,x_n] \times \{0\})$. Entonces $K_n \cap A_n \neq \phi$ y $K_n \to K \cup \{(1,0)\} = K$. De modo que $K_n \varepsilon H(A_n)$ y $K_n \to K$. De aquí que $K \varepsilon \operatorname{Lim\,inf} H(A_n)$.

b) Si K y A comparten un segmento no degenerado. Entonces existe un abierto no vacio U de E tal que $U \subset K \cap A$. Y ya que $A_n \to A$, entonces $U \cap A_n \neq \phi$ a partir de una $N \in \mathbb{N}$. De modo que $K \cap A_n \neq \phi$ a partir de N. Por tanto $K \in \operatorname{Lim\,inf} H(A_n)$. Y concluimos que H es continua en A.

(II.H.6) PROPOSICION. Si la restricción $H|F_1(\underline{X})$ es continua en $\{p\}$, entonces $\underline{X}$ tiene la propiedad de Kelley en p.

DEMOSTRACION.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de $H|F_1(\underline{X})$ en $\{p\}$ existe $\delta > 0$ tal que si $H(\{p\},\{y\}) < \delta$ entonces:

$$H^2(H(\{p\}),\ H(\{y\})) < \varepsilon\ .$$

Es decir, que si $d(p,y) < \delta$ y $K \in H(\{p\})$, entonces existe $L \in H(\{y\})$ tal que $H(K,L) < \varepsilon$. Por tanto $\underline{X}$ tiene la propiedad de Kelley en p.

(II.H.7) Corolario. Sea $p \in \underline{X}$. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) H es continua en $\{p\}$

ii) $H|F_1(\underline{X})$ es continua en $\{p\}$

iii) $\underline{X}$ tiene la propiedad de Kelley en p.

DEMOSTRACION.

La implicación i) → ii) es inmediata y de la proposición (II.H.6) se tiene ii) → iii). Por último la implicación iii) → i) es válida por la proposición (II.H.4).

(II.H.8) Corolario. Para $\underline{X}$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) H es continua

ii) $H|F_1(\underline{X})$ es continua

iii) $\underline{X}$ tiene la propiedad de Kelley.

Este último corolario y la proposición (I.D.15) nos permiten dar una relación entre la conexidad local de $\underline{X}$ y la continuidad de H.

(II.H.9) Corolario. Si $\underline{X}$ es localmente conexo, entonces H

H es continua en $2^{\underline{X}}$.

(II.H.10) Corolario. Si $\underline{X}$ es la escoba, entonces H es continua en $2^{\underline{X}}$.

I. LA FUNCION I.

(II.I.0) Definimos $I: 2^{\underline{X}} \to C^2(\underline{X})$ por

$$I(A) = \{K \in C(X): \text{para toda componente } C \text{ de } A,\ K \cap C \neq \phi\}$$

Como mencionamos en la introducción la Función I nunca es continua.

Antes de la demostración será conveniente probar el siguiente lema.

(II.I.1) Lema. Sea $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(\underline{X})$, entonces $\overline{F} = 2^{\underline{X}}$.

DEMOSTRACION.

$\overline{F} \subset 2^{\underline{X}}$ es inmediata.

Sea $A \in 2^{\underline{X}}$ y $\varepsilon > 0$. Por la compacidad de A, podemos encontrar $a_1,\ldots,a_n \in A$ tales que:

$$A \subset B_\varepsilon(a_1) \cup \ldots \cup B_\varepsilon(a_n).$$

De manera que $H(A,\{a_1,\ldots,a_n\}) < \varepsilon$ y $\{a_1,\ldots,a_n\} \in F_n(\underline{X})$. Como esto ocurre para toda ε, concluimos que $A \in \overline{F}$.

(II.I.2) <u>TEOREMA</u>. I nunca es continua en $2^{\underline{X}}$.

DEMOSTRACION.

Supongamos que si lo es.

Sea p un punto fijo de $\underline{X}$ y sea $(G_n)_n$ una sucesión de conjuntos finitos tales que $G_n \to \underline{X}$ (Lema II.I.1). Entonces se cumple que $I(G_n) \to I(\underline{X})$. Y como $\{p\} \in I(\underline{X})$, existe una sucesión $(A_n)_n$ con $A_n \in I(G_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \to \{p\}$.

Como cada G_n es finito y $A_n \in I(G_n)$, tenemos que $G_n \subset A_n$. De manera que, aplicando la proposición (I.B.7), obtenemos $\underline{X} = \text{Lim}\, G_n \subset \text{Lim}\, A_n = \{p\}$. Lo que contradice la definición de $\underline{X}$. De manera que I no puede ser continua.

BIBLIOGRAFIA

STEPHEN WILLARD. *General Topology. Addison-Wesley Publishing Company. Inc. 1970.*

S.B.NADLER Jr. *Hiperspaces of Sets. New York. Marcel Dekker. Inc. 1978.*

WLODZIMIERZ J.CHARATONIK. *Some Functions on Hiperspaces of Continua Topology and It's Applications 22 (1986) 211-221 North-Holland.*

GOODYKOOTZ,J.T.Jr. *Some Functions on hyperspaces of hereditarily unicoherent continua, Fund Math.95 (1977) 1-10.*

KURATOWSKI C. *Théorie des continus irréductibles entre deux points I. Fund.Math.3, 200-231.*