2Ej
89

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

APLICACION DE LA PROGRAMACION LINEAL A LA EVALUACION DE PROYECTOS DE INVERSION

SEMINARIO DE INVESTIGACION CONTABLE

QUE EN OPCION AL GRADO DE

LICENCIADO EN CONTADURIA

P R E S E N T A :

MA. CRISTINA NAVARRETE ESCOBEDO

Profesor del Seminario:
C. P. Elsa Alvárez Maldonado

México, D. F. 1987

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

La evaluación de proyectos de inversión, sea en el sector público o en el sector privado; de una determinada economía, cuenta con métodos básicos muy parecidos. Sin embargo, sería importante hacer notar los diferentes puntos de vista de estos dos sectores; el sector público enfrenta problemas muy peculiares; esto es principalmente, por el hecho de que los gobiernos puedan desear que los costos y beneficios sociales sean tomados en cuenta, para decidir sobre las inversiones; implicando estó, que las posibles ganancias o utilidades, pasen a un segundo término a considerar.

En tanto en el sector privado el orden de los factores se invierte, la posible obtención o no obtención de ganancias, es considerado en primer término en la decisión sobre inversiones; dejando tan sólo como una consecuencia que pueda o no ocurrir, los costos y beneficios sociales.

Esta diferenciación se ha hecho basicamente para entender el enfoque de este trabajo de investigación y por qué los conceptos explicados no serían aplicables a los dos sectores indistintamente.

Como se podrá dar cuenta el lector, la dirección de este trabajo, es principalmente dirigida al sector privado.

Este trabajo se divide en tres partes: en la primera parte encontraremos explicados los métodos tradicionales y los métodos cuantitativos para la evaluación de proyectos de inversión, así como la importancia de su aplicación a través de diversos ejemplos. En la parte segunda, se verán aspectos fundamentales de la programación lineal y los métodos que pueden ser de ayuda en la evaluación de proyectos de inversión. En la tercera parte se presentan problemas, en donde se aplican tanto conceptos como métodos explicados en las *dos partes anteriores, y de esta manera se note la importancia de la APLICACION DE LA PROGRAMACION LINEAL EN LA EVALUACION DE PROYECTOS DE INVERSION.*

No podría pasarse por alto, dos métodos más de programación lineal, que aunque son muy específicos, pueden ser de suma utilidad, y estos los encontraremos en el apendíce.

Finalmente quedaría por aclarar que esté, no es un trabajo de investigación que trate todos los matices de los temas tratados, tan sólo viene a ser un trabajo introductorio, cuyo principal deseo es que su lectura sirva para generar interés en estos temas y quitarles el sello de "dificiles e inalcanzables", para que finalmente las decisiones que sobre inversiones se haga, se cimienten en evaluaciones objetivas y lo más alejadas posibles de la incertidumbre, y no en meras cuestiones subjetivas.

C A P I T U L O   P R I M E R O

En nuestros días, el evaluar proyectos de inversión va adquiriendo mayor relevancia para el crecimiento y hasta la conservación misma de una empresa. A través de este primer capítulo, se presentarán distintos métodos de evaluación que ayuden a tomar una decisión sobre el mejor proyecto a elegir, o bien la forma de invertir.

La mayor parte de la literatura desarrollada acerca de las técnicas de evaluación, fué elaborada a partir de la Segunda Guerra Mundial; de estas técnicas la mayoría fuerón realizadas desde el punto de vista cuantitativo, y además ampliamente relacionadas con la escasez de capital, el riesgo y la incertidumbre a la que día a día se enfrenta el inversionista en general. De esta manera se dió un paso muy importante para la toma de decisiones, y veamos por qué ha sido así.

El tomar decisiones es algo que ya esta implicito en nuestra vida; que realizamos día con día, y que hasta en muchas ocasiones lo hacemos en forma mecánica, casi inconciente; así, muchas de nuestras decisiones se fundamentan en subjetividades; y es precisamente en hechos subjetivos en la que la mayor parte de las decisiones sobre Proyectos de Inversión, se basabán; pero al desarrollarse métodos cuantitativos, para evaluar dichos proyectos, se dierón más elementos de juicio a las personas encargadas de decidir sobre el mejor Proyecto de Inversión a elegir, ya que a través de estas técnicas se consideran diversos factores que ayudan a tomar en cuenta problemas tales como: no contar con el capital suficiente; el riesgo en que se ve envuelto el proyecto, la falta de seguridad (o certeza) de que ocurran las situaciones que se preven, etc.

No es factible que el aspecto subjetivo se haga a un lado totalmente, aún tendra algún peso sobre la decisión *a tomar, pero estó será el mínimo a considerar, en términos generales, ya que en algunas ocasiones aún se tomarán decisiones en base a aspectos subjetivos.*

Lograr el éxito de un Proyecto de Inversión, no estará basado unicamente en que se haya hecho la adecuada elección, en base a la evaluación de las distintas alternativas que se presentaron, también es importante que estas alternativas hayan sido bien elaboradas; para ello, sería necesario tener presente lo que resultaría imposible pretender; que todas las variables o factores que intervienen en el proyecto sean medibles; aunque en la actualidad, esto se ha logrado en lo posible; sin caer en extremos que podrían resultar peligrosos, ya que hay que tener cuidado en cuantificar sólo aquellos elementos que realmente sea posible hacerlo, y no a aquellos elementos que vayan a resultar a la larga más oneroso evaluarlos o cuantificarlos que sí simplemente se hubiera tenido en cuenta su presencia. También debe cuidarse de no caer en el error de realizar tantas alternativas, que llevarían un tiempo largo para su evaluación y que para cuando se tome la decisión, ya este a destiempo.

Ya una vez listas todas las alternativas posibles, se procedera a analizarlas mediante procedimientos que ayuden a seleccionar la mejor de ellas o la más conveniente, y para efectuar este análisis; los métodos de evaluación.

Existen dos tipos de métodos de evaluación, los llamados tradicionales, contables o de interés simple; una de las mayores desventajas que se ha encontrado en la aplicación de estos métodos, es que no consideran el valor del dinero a través del tiempo, con esto se quiere decir, que en un proyecto de inversión evaluado por estos métodos, tiene el mismo valor $ 1.00 en estos momentos, que dentro de un año; y por otro lado tenemos los métodos que sí consideran el valor del dinero a través del tiempo.

Antes de explicar la mecánica de estos métodos, se habrá de mencionar dos aspectos que influyen notablemente en los flujos de efectivo que generen los proyectos.

El primero de ellos, son los impuestos; los proyectos van a generar flujos de efectivo que afectarán las utilidades y atendiendo a lo que nos marcan las leyes, estás utilidades se deberán afectar por concepto de impuestos, y por lo consiguiente los flujos de efectivo se verían reducidos.

Las depreciaciones o amortizaciones (según el proyecto de que se trate), son otros elementos que también se debe de tomar en cuenta, ya que esta vinculado con el primero; si se consideran métodos de depreciación acelerada, se estarían reduciendo las utilidades y por lo tanto el pago de impuestos en los primeros años de vida del proyecto, serían menores. logrando con estó una fuente de financiamiento y dejando para el futuro el pago de dichos impuestos.

Esto se podrá apreciar mejor a través de la siguiente tabla, recomendada por Raúl Coss Bu en su libro "Análisis y Evaluación de Proyectos de Inversión", para la obtención de los flujos de fondos después de impuestos.

AÑO	FLUJO DE EFECTIVO ANTES DE IMPUESTOS	DEPRECIACION	INGRESO GRAVABLE	IMPUESTOS O AHORROS	FLUJOS DE EFECTIVO DESPUES DE IMPUESTOS.
(1)	(2)	(3)	4=(2)+(3)	5 =(4)t	6=(2)-(5)

En la segunda columna tendremos la cantidad correspondiente a los ingresos brutos que nos dan los proyectos; en la tercer columna, las cantidades a las que año tras año se va a depreciar los activos, en el tiempo que dura el proyecto; aunque la depreciación no significa una salida efectiva de dinero, para la determinación de impuestos se considera como un gasto; en la cuarta columna obtendremos la base gravable, restandole a los ingresos brutos la depreciación correspondiente a ese año; en la columna quinta, el importe de los impuestos; en caso de que la base gravable sea positiva; (de ser negativa se obtendría un ahorro), se multiplica la base gravable por la tasa impositiva (t); y por último en la columna 6 se tienen los flujos de efectivo después de impuestos, restandole a los ingresos brutos el importe de los impuestos o sumandole los ahorros según el caso, esto es, porque lo que interesa son los flujos de efectivo después de impuestos y no la utilidad neta.

Se establecen las siguientes alternativas, a partir de las cuales se explicarán y aplicarán los metódos tradicionales de evaluación, así como sus ventajas y sus desventajas.

(Miles de pesos)

Proyecto A

AÑO	Beneficio Anual
1	$ 10,000
2	15,000
3	20,000
4	25,000
5	30,000

Proyecto B

AÑO	Beneficio Anual
1	$ 20,000
2	20,000
3	20,000
4	20,000
5	20,000

Proyecto C

AÑO	Beneficio Anual
1	$ 35,000
2	30,000
3	20,000
4	10,000
5	5,000

El costo de la inversión para los tres proyectos es de $ 80,000

METODOS TRADICIONALES

1) TASA PROMEDIO DE RENTABILIDAD.

Para obtener la tasa promedio de rentabilidad es necesario dividir la utilidad promedio anual (Beneficio Neto Total menos costo de la inversión, entre el no. de años que dura el proyecto), entre la inversión promedio anual (a la inversión inicial se le suma la inversión final, en caso de que haya, y se divide entre dos).

$$\text{Tasa Promedio de Rentabilidad} = \frac{\text{Unidad Promedio Anual}}{\text{Inversión Promedio Anual}}$$

Aplicandolo a los proyectos tenemos:

Proyecto A

$$TPR = \frac{4{,}000}{40{,}000} = 10\%$$

Proyecto B

$$TPR = \frac{4{,}000}{40{,}000} - 10\%$$

Proyecto C

$$TPR = \frac{4{,}000}{40{,}000} = 10\%$$

En este método algunos autores consideran la inversión original y no la inversión promedio.

La rentabilidad promedio para los tres proyectos es del 10%, por lo tanto para este método, cualquiera de los tres proyectos que se escogiera sería bueno, (siempre y cuando se ajuste a la rentabilidad deseada), pero estó no resulta tan cierto y lo veremos con más claridad en las siguientes páginas.

2) INTERES SIMPLE SOBRE RENDIMIENTO.

La forma de obtener el interés simple sobre el rendimiento es, dividiendo la diferencia de el beneficio anual promedio y la recuperación del capital anual (total de la inversión entre el número de años que dure el proyecto), entre la inversión promedio anual.

$$ISSR = \frac{\text{Beneficio Anual Promedio - Recuperación del Capital}}{\text{Inversión Promedio Anual}}$$

Y de los tres proyecto tendríamos

Proyecto A

$$ISSR = \frac{20{,}000 - 16{,}000}{40{,}0000} = 10\%$$

Proyecto B

$$ISSR = \frac{20{,}000 - 16{,}000}{40{,}000} = 10\%$$

Proyecto C

$$ISSR = \frac{20{,}000 - 16{,}000}{40{,}000} = 10\%$$

Al igual que en el método anterior algunos autores sustituyen la inversión promedio anual por la inversión inicial, lo que podría considerarse como un error, porque el monto de la inversión va disminuyendo año con año. Para este método también cualquiera de los tres proyectos resultaría bueno, pero al igual que el anterior, no considera el valor del dinero a través del tiempo.

Otra de las desventajas que tienen estos dos métodos que se han planteado hasta aquí, es que las cantidades (tanto egresos como posibles ingresos), se consideran en promedio y no toman en cuenta que pueden variar considerablemente de un año a otro.

3) PERIODO DE RECUPERACION DE LA INVERSION.

Este método suele ser usado en muchas empresas ya que su cálculo es fácil de entender y aplicar; puede ser de mucha utilidad para aquellas empresas que presentan problemas de liquidez, y que aunque sacrifiquen el rendimiento, prefieren contar con efectivo a la mayor brevedad posible.

Proyecto A

AÑO	BENEFICIO ANUAL	ACUMULADO
1	$ 10,000	$ 10,000
2	15,000	25,000
3	20,000	45,000
4	25,000	70,000
5	30,000	100,000

Si el costo de la inversión es de $ 80,000 el período de recuperación para este proyecto es de 4 años y 4 meses.

PROYECTO B

AÑO	*BENEFICIO ANUAL*	*ACUMULADO*
1	*$ 20,000*	*$ 20,000*
2	*20,000*	*40,000*
3	*20,000*	*60,000*
4	*20,000*	*80,000*

Para este proyecto el período de recuperación es de 4 años exactamente.

PROYECTO C

AÑO	*BENEFICIO ANUAL*	*ACUMULADO*
1	*$ 35,000*	*$ 35,000*
2	*30,000*	*65,000*
3	*20,000*	*85,000*

El período de recuperación de este proyecto es de dos años 9 meses.

En este método ya se ve una diferencia entre los tres proyectos, por lo que puede ser de mucha utilidad, pero aún así, presenta serias desventajas, siendo la principal no considerar el valor del dinero a través del tiempo; no presentar ningún índice de rentabilidad; no tomar en cuenta los beneficios que se obtienen después del período de recuperación; y por último, podría ocasionar que por escoger un proyecto en donde se recupere rapidamente la inversión, se sacrifique otros proyectos, que pueden ser mejores que la elegida, en otros aspectos.

Hasta aquí hemos visto los métodos tradicionales, veamos ahora los métodos que sí consideran el valor del dinero a través del tiempo.

Pero antes explicaremos tres conceptos fundamentales para mejor comprender estos métodos: tasa de rendimiento, tasa de descuento, así como su estrecha vinculación con el riesgo.

TASA DE RENDIMIENTO REQUERIDA, TASA DE DESCUENTO Y RIESGO.

Cuando una persona o empresa decide invertir en un proyecto, es un hecho que esta arriesgando su dinero y por lo tanto, esperando obtener un beneficio, además de recuperar su inversión.

Dentro de todos los posibles proyectos de inversión que se pueden presentar, habrá algunos que representen mayor riesgo que otros, pero, ¿qué se quiere dar a entender con estó?.

Como ya se ha hecho mención en páginas anteriores, el inversionista tiene que enfrentarse a situaciones de incertidumbre, teniendo la expectación de no sólo no ganar lo proyectado sino hasta llegar al punto de obtener pérdidas.

Por lo tanto, para los inversionistas es muy importante que a mayor riesgo que se corra, se obtengan mayores beneficios, ya que no tendría ningún caso ganar lo mismo que si se hubiera invertido en un proyecto de mínimo riesgo.

Por ejemplo, si una persona decidiera invertir su dinero en un banco o en valores de renta fija, obtendría beneficios con un mínimo de riesgo; pero si algún otro inversionista lo pusiera en valores de renta variable o bien en la apertura o ampliación de una empresa, que implica mayor riesgo, querra obtener un mayor beneficio, ya que en un momento dado tiene el riesgo de perder su inversión, en tanto que los ante-

riores inversionistas, tienen garantizado la recuperación de la inversión por lo menos.

Y aquí la importancia de la tasa de rendimiento requerida.

La Tasa de rendimiento requerida (TRR) es aquella que la empresa o inversionista define, quiere obtener de una inversión. En algunas ocasiones esta tasa puede ser igual a la tasa de descuento, entendiendo por esta última, como un criterio mínimo de rentabilidad a exigir en un proyecto. la tasa de descuento que puede utilizar el inversionista es el costo de capital ponderado, que tiene el propósito de reflejar en que porcentaje, las deudas son fuente de financiamiento (después de impuestos), y en que porcentaje lo es el capital.

Estó para algunos autores constituye un error, ya que la tasa de rendimiento requerida debe ajustarse al riesgo que implica la inversión, ya que habrá proyectos de inversión que tienen distinto nivel de riesgo, y se requiere un rendimiento mayor al establecido por la tasa de descuento (costo de capital ponderado).

De lo anterior podemos concluir que los proyectos de inversión deberán ser clasificados de acuerdo a su nivel de riesgo; que a la determinación de las tasas de descuento, deberá sumarsele una prima de riesgo, lo que nos dará como resultado una tasa de rendimiento requerida, y por último que los proyectos de inversión que tienen un alto riesgo requieren tasas de rendimiento altas, que sean lucrativas en relación con aquellas que tienen un mínimo riesgo.

El tema del riesgo, ha sido explicado sólo por un modelo alternativo; con estó queremos dar a entender que el riesgo puede ser considerado desde distintos enfoques, desde ser ignorado; darle un tratamiento sencillo, como lo hicimos anteriormente, hasta llegar a un enfoque altamente matemático; a continuación se expondrá el riesgo en un curso medio, dentro de el análisis financiero, asociado con la variabilidad de las utilidades, como un modelo alternativo más.

Ya hemos advertido que existen proyectos de mínimo riesgo y proyectos de alto riesgo, basado estó, en la posibilidad de obtener utilidades y en qué cantidad: Así vemos que el riesgo se asocia a la variabilidad de las utilidades, "mientras más variables sean las utilidades esperadas mas arriesgado será el proyecto".

Dentro de todos los elementos que conforman un proyecto tenemos las utilidades o ahorros estimados, nos preguntaríamos que tan confiables son las cantidades manejadas, o que tan ciertas pueden resultar? y para ayudarnos a resolver este cuestionamiento utilizaremos la "Distribución de probabilidades".

Debemos de considerar un factor más, que puede afectar la estimación de las utilidades: el estado en que se encuentre la economía nacional cuando se realicen dichas utilidades, podemos contemplar en términos generales tres estados de la economía; cuando la economía se encuentra en auge, cuando es estable y cuando sufre una recesión; en primera instancia podríamos asignar una utilidad estimada para cada uno de los tres estados. Por ejemplo:

Estado de la Economía	Flujo de efectivo esperado
Recesión	$ 800,000
Estable	1,200,000
Auge	2,000,000

Bastarían estos datos para tener confianza?. No, será necesario que se establezca que tan probable es, que se presente cualquiera de estos tres estados de la economía, y estó lo haremos ayudandonos de indicadores económicos.

Estado de la Economía	Probabilidad de Ocurrencia	Flujo de Efvo. Esperado	Promedio Ponderado
Recesión	.6	800,000	480,000
Estable	.3	1,200,000	360,000
Auge	.1	2,000,000	200,000
	VALOR ESPERADO		$1,040,000

En esta tabla se acaba de presentar la forma como se determina el valor esperado, de los flujos de efectivo, que vienen a ser un promedio ponderado de los resultados en distintos estado de la economía.

En resumen, para obtener el valor esperado, primeramente se debe establecer los rendimientos esperados por cada estado de la economía, el siguiente paso será establecer la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los estados, se calculan los promedios ponderados, se suman los resultados y se obtiene el valor esperado.

Ahora que ya conocemos el método para obtener el valor esperado, usaremos el concepto de distribución de proba-

bilidades para comparar el riesgo de proyectos de inversión alternativos.

Se tiene el proyecto A y B con los siguientes datos:

Estado de la Economía	Probabilidad de Ocurencia	Flujo de Efectivo Esperado	Promedios Ponderados
Proyecto A:			
Recesión	.3	$ 300,000	$ 90,000
Estable	.4	500,000	200,000
Auge	.3	700,000	210,000
	Valor Esperado		$ 500,000
Proyecto B:			
Recesión	.3	100,000	$ 30,000
Estable	.4	500,000	200,000
Auge	.3	900,000	270,000
	Valor Esperado		$ 500,000

Supongamos una inversión de $1,000,00 para los dos proyectos.

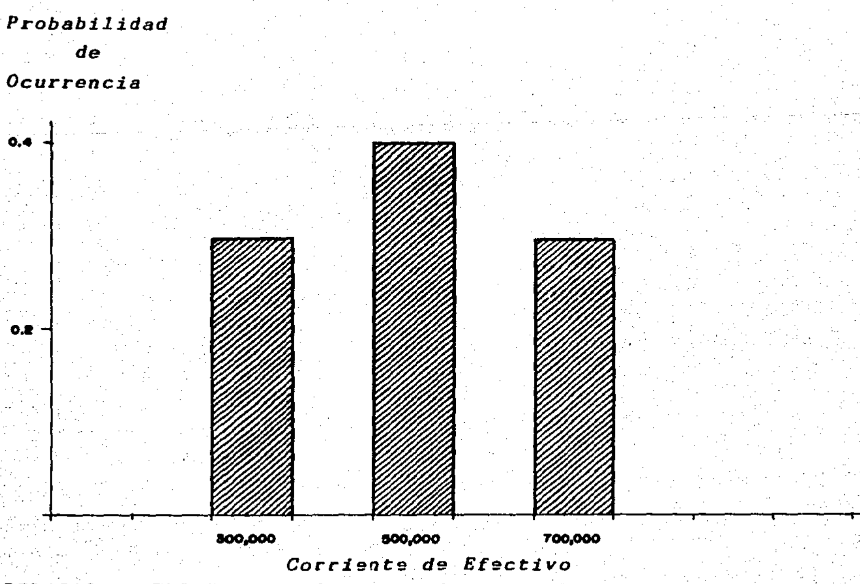
El proyecto A trata de la compra de una nueva maquinaria que nos daría ahorro en mano de obra, y substituiría a la máquina antigua; en tanto el proyecto B trata de lanzar al mercado un nuevo producto; para estos dos proyectos se han calculado los flujos de efectivo esperados para los tres estados de la economía que pueden presentarse, y se ha obtenido su valor esperado, que es de $500,000 para los dos proyectos.

Si calculáramos el VPN a una tasa de descuento del 20% tendríamos los dos proyectos:

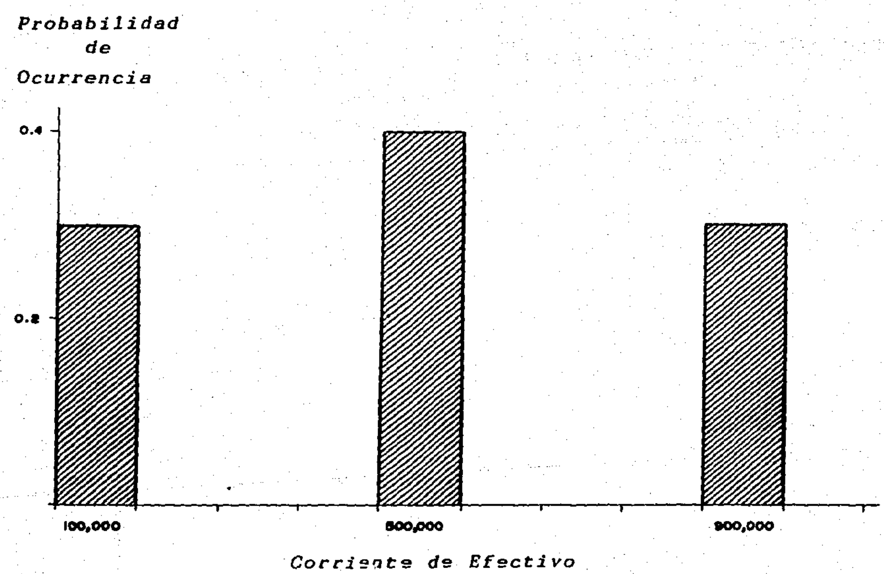
$$
\begin{aligned}
VPN &= 500{,}000\ (2.106) \ - \ 1{,}000{,}000 \\
&= 1{,}053{,}000 \ - \ 1{,}000{,}000 \\
&= \underline{\$\ 53{,}000}
\end{aligned}
$$

Sería indistinto escoger uno u otro, pero son igualmente arriesgados?. No, veremos que la conveniencia de escoger cualquiera de los dos, dependerá de las utilidades y del riesgo

Si representáramos los resultados de la tabla -- anterior en una gráfica de barras podríamos percatarnos de la variabilidad de los resultados reales.



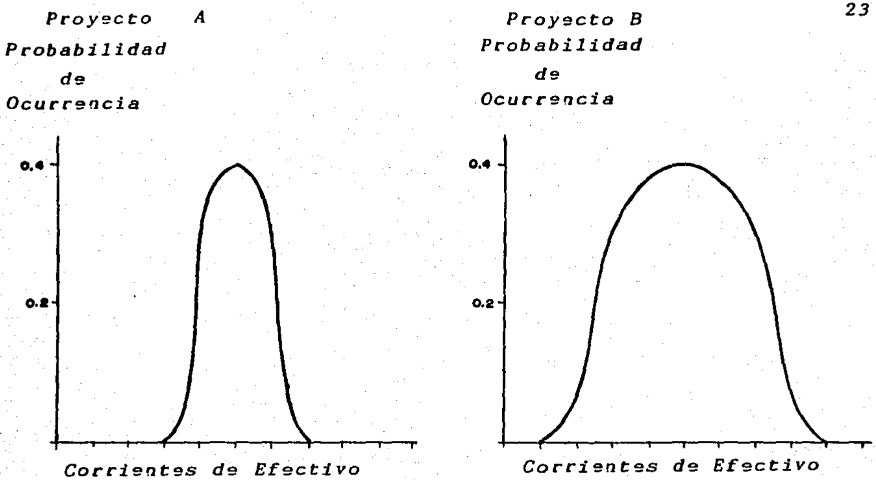
RELACION ENTRE EL ESTADO DE LA ECONOMIA Y EL RENDIMIENTO DEL PROYECTO **A.**



RELACION ENTRE EL ESTADO DE LA ECONOMIA Y EL RENDIMIENTO DEL PROYECTO B.

La altura de cada barra indica la probabilidad de que ocurra un resultado determinado. La variación de las utilidades para el proyecto A es de \$ 300,000 a \$ 700,000 y en el proyecto B es de \$ 100,000 a \$ 900,000 con un valor esperado de \$ 500,000 para los dos proyectos.

Desde luego debemos tener presente que los estados de la economía, no unicamente se reduce a las tres que se han indicado aquí, hay muchas más, por lo que se tendrían que manejar más datos para "probabilidad" y "Resultados si se produce este estado".



Distribución de probabilidades, con la relación entre el estado de la economía y el rendimiento de los proyectos.

En las anteriores figuras podemos observar las gráficas de las probables distribuciones de utilidades en los proyectos A y B. Puede decirse por regla general que "cuanto más apretada sea la distribución de probabilidades de las utilidades futuras esperadas, menor será el riesgo de un proyecto dado", ya que habra mayor probabilidad de que el resultado real se acerque al valor esperado, en el proyecto A es más fáctible que los flujos de efectivo se acerquen al valor esperado que en el proyecto B.

Una medida de riesgo que nos da un cierto valor definido y que nos ayuda a medir el estrechamiento de la distribución de probabilidades de utilidades de los proyectos, es la desviación estándar, cuyo símbolo es. σ

Si la desviación estándar es menor, la distribución de probabilidades será más estrecha y por lo tanto menos riesgosa.

La forma de obtener la desviación estándar es la siguiente:

1) Calcular el valor esperado

$$\text{Valor esperado} = (RP)$$
$$\bar{R} = (RP)$$

de donde:

R = *Flujo de efectivo esperado*
P = *Probabilidad de ocurrencia (Estado de la economía)*

2) Restar el valor esperado de cada flujo de efectivo esperado, obteniendose un conjunto de desviaciones del valor esperado.

$$r = R - \bar{R}$$

de donde:

r = *Desviaciones*
R = *Flujo de efectivo esperado*
$\bar{R}$ = *Valor esperado*

3) Elevar al cuadrado cada desviación, multiplicando el resultado por la probabilidad de ocurrencia, se suman todos los resultados y así se obtiene la variancia de la distribución de probabilidades

$$\text{Variancia} = \sigma^2 = (r^2 p)$$

4) *Se obtiene la raíz cuadrada de la variancia, y se halla la desviación estándar.*

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Obtengamos la desviación estándar de los proyectos A y B.

Proyecto A

a) Valor Esperado

$$\bar{R} = \$500{,}000$$

b) *(miles de pesos)*

R	$-$	$\bar{R}$	$=$	r	r^2	$r^2\,P$
300	$-$	500	$=$	-200	40,000	40,000 (.3) = 12,000
500	$-$	500	$=$	(0)	(0)	(0) (.4) = 0
700	$-$	500	$=$	200	40,000	40,000 (.3) = 12,000
					σ^2	= 24,000

$$\sigma = \sqrt{24{,}000}$$

$$\sigma = \$\ 154.92$$

Proyecto B

a) Valor esperado

$$\bar{R} = \$ \ 500,000$$

b) *(miles de pesos)*

R	-	$\bar{R}$	=	r	r^2	r^2 P
100	-	500	=	-400	160,000	160,000 (.3) = 48,000
500	-	500	=	(0)	(0)	(0) (.4) = 0
900	-	500	=	400	160,000	160,000 (.3) = 48,000

$$\sigma^2 = 96,000$$

$$\sigma = \sqrt{96,000}$$
$$\sigma = \$ \ 309.84$$

La desviación estándar del proyecto A es menor, lo que quiere decir que la distribución de probabilidad es más estrecha y por lo tanto, el proyecto es menos riesgoso.

Con esta medida de riesgo, se puede tener el problema de encontrar proyectos que tengan igual desviación estándar. Por ejemplo tendríamos dos proyectos, 1 y 2, con una desviación de \$ 400,00, para ambos y un valor esperado de \$ 800,000 y \$ 1,500,000 respectivamente. El procedimiento para eliminar este problema, es dividir la desviación estándar entre el valor esperado, y se obtiene el coeficiente de variación.

$$V = \frac{\sigma}{R}$$

Proyecto 1

$$V = \frac{400,000}{800,000}$$

$$V = .50$$

Proyecto 2 $V = \frac{400,000}{1,500,000}$

$V = .27$

El proyecto que tiene mayor coeficiente de variación será el de mayor riesgo.

Debemos tener en cuenta que con el paso del tiempo, el riesgo aumenta, ya que la desviación estándar es mayor conforme pasa el tiempo y el valor esperado se conserva igual, por lo tanto el coeficiente de variación aumentará también.

En los ejercicios que se presentarán en las páginas siguientes, se considerará la tasa de rendimiento requerida (es decir, ya se consideran riesgos).

Para entender la mecánica de los métodos que a continuación se verán, será necesario hacer un recordatorio de lo que es interés simple e interés compuesto.

Interés Simple

El interés es la cantidad pagada por usar dinero (mediante préstamo) o bien es la cantidad que se produce por la inversión de cierta cantidad de dinero, conocida como capital.

Cuando el capital gana intereses por el período que dura la operación, al interés vencido al final de dicho período se le conoce como interés simple.

Ejemplo:

Tenemos $ 100,000 que van a generar al término de un año el 35% de interés simple, ¿Qué cantidad se tendría al final del año?

$ 100,000 (.35) = 35,000 Interés simple

Cantidad obtenida al final de la transacción:

$ 100,000 + 35,000 = $ 135,000

Interés Compuesto

En una transacción, a intervalos que se establecen de antemano, el interés que se produce es agregado al capital, en este caso se dice que el interés es capitalizado, y así el nuevo cálculo que se haga de intereses no será sobre el capital inicial sino sobre el capital más los intereses, que se generaron en el primer intervalo, y así se hará durante todo el tiempo que dure la transacción, se generarán intereses sobre intereses. A la diferencia entre la cantidad que se obtiene al final de la transacción (Monto compuesto), y el capital, se le conoce como interés compuesto.

Ejemplo:

Se invierte en el banco $100,000 por un período de tres meses, conviniendose que los intereses serán capitalizados mensualmente con una tasa de interés del 35% anual. ¿que cantidad se obtendra al final de los tres meses?

Capital original		$ 100,000
Interés del primer mes	$ 100,000 (.35) =	$ 35,000
Capital al final del - primer mes	100,000+35,000=	135,000
Interés del segundo mes	135,000 (.35) =	47,250
Capital al final del segundo mes	135,000+47,250=	182,250
Interés del tercer mes	182,250 (.35) =	63,787
Capital al final del - tercer mes	$ 182,250+63,787 =	$ 246,037

Monto Compuesto	$ 246,037
Capital Original	- 100,000
Interés Compuesto	$ 146,037

Pero imaginemos que esta operación se realizará por 24 o más mensualidades sería muy extenso y nos llevaría tiempo, así que podríamos hacerlo a través de la siguiente fórmula, o bien por medio de una computadora.

$$S = C(1 + i)^n$$

de donde:

S = *Cantidad que se obtiene al final de la transacción*
C = *Capital original*
i = *Tasa de interés*
n = *Número de períodos en que se efectuará la transacción*

Y aplicandola en el ejemplo anterior tenemos:

$$S = 100{,}000\ (1 + .35)^3$$
$$= 100{,}000\ (1.35)^3$$
$$= 100{,}000\ (2.460375)$$
$$= \underline{\$246{,}037}$$

Facilitaremos aún más la operación, haciendo uso de tablas financieras, que ya nos indican el valor $(1 + i)^n$; como las tablas financieras de Benjamin de la Cueva.

Ahora, es necesario entender la operación contraria, es decir, a partir de una cantidad que se obtendrá en un futuro (a una tasa de interés dada y por un período de tiempo), encontrar la cantidad que invertida en este momento nos daría la anteriormente explicada, (valor presente).

Partiendo de la fórmula anterior, tendríamos que la cantidad buscada ahora, sería C por lo tanto la nueva fórmula nos quedaría de la siguiente manera:

$$C = \frac{S}{(1 + i)^n} \qquad\qquad C = S \frac{1}{(1 + i)^n}$$

En la segunda fórmula podemos encontrar el factor $\frac{1}{(1 + i)^n}$ en la tablas financieras y multiplicarlo por S, en tanto en la primera, si tenemos el factor $(1 + i)^n$, dividimos S, entre éste.

Ejemplo:

Qué cantidad se necesitaría invertir en este momento, para obtener en un plazo de 5 años, a una tasa de interés del 25%, anual, \$200,000.

$$\begin{aligned} C &= 200{,}000 \frac{1}{(1 + i)^n} \\ &= 200{,}000 \frac{1}{(1 + .25)^5} \\ &= 200{,}000 \quad (0.32768) \\ &= \underline{\$\ 65{,}536} \end{aligned}$$

Anualidades

Se entiende por anualidades, como una serie de cantidades iguales que se obtienen en intervalos de tiempos iguales.

Ejemplo:

Qué cantidad se obtendría al final de tres años, si se depositan anualmente 100,000, con una tasa de interés del 10% anual haciendo el primer depósito en este mismo año.

Cantidad 100,000					
Años	0	1	2	3	
	_____	_____	_____	_____	100,000(1.331)
		_____	_____	_____	100,000(1.21)
			_____	_____	100,000(1.10)
				_____	100,000

De donde tenemos:

$ 133,100
121,000
110,000
100,000 *
$ 464.100

Si sumaramos los factores que se fué aplicando a cada anualidad, nos daría 3.641, si buscamos en las tablas de anualidades, encontramos el factor, y se facilita la operación.

100,000 (3.641)= $ 364,100
100,000* Ultima anualidad
$ 464,100

La última cantidad depositada no genera interes.

Valor presente de una Anualidad.

100,000		*$ 100,000**	0 1 2 3
100,000	*(.909091)*	*90,909*	
100,000	*(.82446)*	*82,644*	
100,000	*(.751315)*	*75,132*	
	2.486852	*$348,685*	

En este caso sucede lo mismo que en el anterior, cuando se trata de anualidades, podemos buscar en las tablas y ahorramos pasos.

$$
\begin{array}{rl}
100{,}000\ (2.486852) = \$\ 248{,}685 & \\
100{,}000^{*} & \text{Primera anualidad.} \\
\$\ \ 348{,}685 &
\end{array}
$$

**La primera anualidad, se queda igual.*

METODOS MATEMATICOS.

4) VALOR PRESENTE NETO

El método del valor presente consiste en determinar el valor presente de los ingresos; restarle el desembolso inicial de la inversión; y del resultado que obtengamos podremos tomar una decisión, si el resultado es positivo se acepta, si es negativo se rechaza.

Pueden presentarse dos circunstancias, en cuanto a los ingresos, que sean iguales (anualidad), o bien que sean diferentes cada año.

Recordemos la fórmula para encontrar el valor presente de cualquier cantidad:

$$VP = \frac{S}{(1 + i)^n}$$

Partiendo de esta fórmula y de lo que entendemos por el método de valor presente neto, tenemos la siguiente fórmula:

$$VPN = \frac{S}{(1 + i)^n} - II \quad ó \quad VPN = S \frac{I}{(1 + i)^n} - II$$

Cuando se trata de ingresos iguales, de donde II= Inversión Inicial

$$VPN = \frac{S}{(1 + i)^n} + \frac{S}{(1 + i)^n} + \ldots\ldots - II$$

Cuando se trata de ingresos desiguales.

Ejemplo:

Tenemos que la Cía., "Z", requiere de invertir en dos máquinas, tipo "A" y tipo "B"; el desembolso inicial por cada máquina es de \$200,000 y \$375,000 respectivamente, y que van a generar los siguientes ingresos durante tres años. La tasa de rendimientos requerida (TRR) es de 10%.

Máquina A		Máquina B	
Año 1	\$ 100,000	Año 1	\$ 150,000
Año 2	150,000	Año 2	150,000
Año 3	150,000	Año 3	150,000

Máquina A

	0	1	2	3
100,000(1.10)=$ 90,909				
150,000(1.21)= 123,967				
150,000(1.331)= 112,697				
$327,573				

Valor Presente de los Ingresos	$ 327,573
Inversión Inicial	200,000
Valor Presente Neto	$ 127,573

Máquina B

	0	1	2	3
150,000(2.4868)$373,020				

Valor Presente de los Ingresos	$ 373,020
Inversión Inicial	375,000
Valor Presente Neto	$ - 1,980

El proyecto A nos da una diferencia positiva, y en el proyecto B la diferencia es negativa, por lo tanto la máquina que conviene elegir es la de tipo "A".

De el ejemplo anterior prodríamos concluir, que cuando el resultado es positivo, significa que el proyecto dará un mayor rendimiento al mínimo requerido (TRR), y por el contrario, cuando el resultado es negativo el rendimiento del proyecto no llegará al mínimo que ha establecido la empresa.

La selección de proyectos no unicamente puede ser en base a los ingresos, también existen proyectos que indican solamente costos, por lo tanto la decisión será de minimizar costos y obtener el mayor ahorro.

Puede darse el caso que la selección sea de proyectos mutuamente excluyentes, es decir, que se escoja uno u otro, pero no los dos, en tal caso será seleccionado aquél que nos presente un valor presente neto mayor; supongamos lo siguiente:

Una empresa tiene interés en adquirir una microcomputadora y se le presentan las siguientes alternativas.

	Alternativa A	Alternativa B	Alternativa C
Costo de la Inversión	$ 100,000	$ 150,000	$ 230,000
Ahorros netos por año	40,000	65,000	90,000

A una TRR del 20% por un período de 6 años.

Alternativa A

VPN = 40,000 (3,3255) - 100,000
= 133,020 - 100,000
= <u>$ 33,020</u>

Alternativa B

VPN = 65,000 (3.3255) - 150,000
= 216, 157 - 150,000
= <u>$66,157</u>

Alternativa C

$$VPN = 90{,}000\ (3.3255) - 230{,}000$$
$$= 299{,}295 - 230{,}0000$$
$$= \underline{\$\ 69{,}295}$$

La alternativa seleccionada sería C

Una base de selección de proyectos mutuamente excluyentes sería la diferencia existente entre ellas, tanto en inversión como en ahorros obtenidos (o ingresos). Esto es, se van comparando de dos en dos las alternativas, se obtiene el valor presente neto del incremento de la inversión, y si el VPN es mayor a cero, el incremento será aceptable, y la alternativa que requirió mayor inversión se convertirá en la más atractiva.

De los proyectos A y B

$$VPN = \frac{25{,}000}{(1 + .2)^6} - 50{,}000$$
$$= 83{,}137 - 50{,}000$$
$$= \underline{\$33{,}137}$$

En estos momentos la mejor alternativa sería la B, ya que con un incremento en la inversión de 50,000 obtendríamos ahorros en \$25,000 por año, lo que nos da un valor presente neto superior a cero, y se justifica el incremento.

Ahora tenemos las alternativas B y C

$$VPN = \frac{25{,}000}{(1 + .2)^6} - 80{,}000$$
$$= 83{,}137 - 80{,}000$$
$$= \underline{\$\ 3{,}137}$$

Aquí podemos observar que el VPN del incremento es mayor a cero, pero comparado con el incremento anterior, es menor, por lo tanto, la alternativa B, sigue siendo la más indicada.

Una vez que se ha analizado la aplicación de este método en distintas situaciones, mencionaremos las principales ventajas y desventajas del mismo.

La primer ventaja que se encuentra al utilizar este método, es que considera el valor del dinero a través del tiempo; nos indica si la tasa de rendimiento de la inversión supera la mínima establecida; nos ofrece una comparación de ingresos y egresos sobre una misma base de tiempo.

Y las dos principales desventajas son, que supone una misma tasa de reinversión y que las estimaciones que se hacen a futuro, las considera como seguras, algo que no sucede en la práctica, pero veremos más adelante un método que ayudará a sortear este problema.

5) TASA INTERNA DE RENDIMIENTO.

El método de la Tasa Interna de Rendimiento (TIR), consiste en encontrar la tasa de descuento que provocaría que el VPN del o los proyectos, sea igual a cero. Dicho en otras palabras se iguala el VPN de los ingresos con el valor de los egresos, siempre y cuando no existan desembolsos posteriores.

Podrían darse dos casos en la resolución de este método; cuando los beneficios obtenidos cada año no son iguales, y para encontrar la TIR se hará por medio de un proceso de prueba y error.

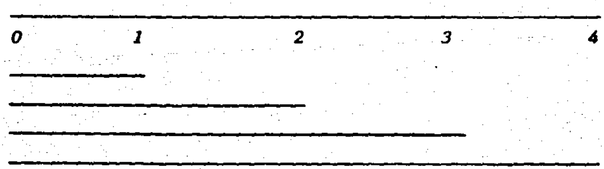
Ejemplo:

Un proyecto de inversión nos da los siguientes beneficios netos.

AÑO	*1*	*2*	*3*	*4*
Costo de la Inversión $300,000				
Beneficios Netos	*140,000*	*130,000*	*120,000*	*130,000*

Con un Tasa de Rendimiento Requerido del 35%.

El primer paso a seguir es encontrar el VPN de los ingresos a una tasa determinada, ¿pero cuál sería el porcentaje adecuado para comenzar?, primeramente debemos probar con la TRR.



Tasa de Descuento 35%

AÑO	BENEFICIOS ANUALES	FACTOR	VALOR PRESENTE DE LOS INGRESOS
1	$ 140,000	(0.74074)	$ 103,704
2	130,000	(0.54870)	71,331
3	120,000	(0.40644)	48,773
4	130,000	(0.30107)	39,139
	520,000		262,947

En esta primer tentativa, la tasa de descuento usada, nos dio un VP de los ingresos menor a los egresos, por lo que debe reducirse la tasa de descuento.

Tasa de descuento 30%

AÑO	BENEFICIOS ANUALES	FACTOR	VALOR PRESENTE DE LOS INGRESOS
1	$ 140,000	(0.76923)	$ 107,692
2	130,000	(0.59172)	76,924
3	120,000	(0.45517)	54,620
4	130,000	(0.35013)	45,517
			284,753

Para que el Valor Presente de los ingresos se eleve hasta aproximarse a $ 300,000, se bajara la tasa de descuento a 25%.

Tasa de Descuento 25%

AÑO	BENEFICIOS ANUALES	FACTOR	VALOR PRESENTE DE LOS INGRESOS
1	$ 140,000	(0.80000)	$ 112,000
2	130,000	(0.64000)	83,200
3	120,000	(0.51200)	61,440
4	130,000	(0.40960)	53,248
			309,888

El resultado que nos da, se busca en las tablas de Valor Presente de Anualidades, según el número de períodos, y se encuentra la tasa entre las cuales debe estar la TIR; el 2.00, en el renglón del cuarto período; está entre 2.0290 y 1.9969 que corresponde a las tasas del 34% y 35% respectivamente y para encontrar con exactitud la tasa interna de rendimiento, haremos por último una interpolación.

$$1\% \left\{ \begin{array}{c} 34\% \\ X \\ 35\% \end{array} \right. \qquad .290 \left\{ \begin{array}{c} 2.0290 \\ 2.0000 \\ 1.9969 \end{array} \right\} \qquad 0.321$$

TIR= 34% + .90%
TIR= 34.90%

En este caso la TIR fué mayor a la tasa de rendimiento requerida, por lo tanto el proyecto es aceptado.

En estos ejemplos que hemos visto, se ha encontrado una TIR, existió un desembolso inicial y una serie de flujos de efectivo, pero no todas las propuestas de inversión de presentan así, existen otras más, en donde hay desembolsos, en los siguientes periodos, ya que éstos no se restringen a los primeros períodos de vida del proyecto, en algunos años habrá más egresos que ingregos, y se presentarán en los flujos de fondos varios cambios de signo, y estó nos indicará que el proyecto tiene más de una TIR.

Se puede tener por norma general, que cuando en una propuesta de inversión se observa que los desembolsos son en los primeros años de vida y que se tienen ingresos por el resto de los años que dura el proyecto (o más); así como el hecho de que la suma de los ingresos sea superior a la suma *de los egresos, se tenga cierta seguridad de encontrar una TIR.*

Para determinar el número posible de TIR que puede tener un proyecto, se contarán los cambios de signos ocurrentes en la vida del proyecto, y estó indicará el número máximo de TIR que hay. Como ya se indicó el cambio de signo nos hará suponer que hubo más costos que ingresos.

También puede darse otro caso: el de aquel o aquellos proyectos que no presentan TIR, que son los que reportan unicamente costos sin considerar ingresos, pero aún así es factible encontrar un punto que nos permita decidir.

Cuando se encuentran dos alternativas en donde se conocen solamente los egresos, se sabe de antemano que el proyecto que presenta el menor costo, sería el elegido, pero, que tal si valuaramos el incremento de la inversión y así obtenemos la TIR del incremento de la inversión; pero para estó tendriamos que considerar cualquiera de las siguientes circunstancias: que los proyectos nos dan los mismos ingresos o que nos ahorran las mismas cantidades, estó con el fin de ver si se justifica el incremento de la inversión.

Ejemplo:

	Proyecto A	Proyecto B
Costo de la Inversión	$ 100,000	$ 150,000
Vida del proyecto	4 años	4 años
Costos netos/año	40,000	26,000

El incremento de $ 50,000 producirá una disminuación de los costos anuales de $14,000. Se tiene una TRR de 15%.

Aplicando el método:

$$\frac{50,000}{14,000} = 3.57142$$

Buscamos *el valor en tablas y como no es exacto, interpolamos, y la TIR del incremento de la inversión es de 17.19%, mayor a la TRR, se justifica el incremento de la inversión.*

La principal limitante de este método es que supone una tasa de rendimiento, a la Tasa Interna de rendimiento a que serán reinvertidos los ingresos, igual.

6) <u>VALOR TERMINAL.</u>

Este método consiste en obtener el valor futuro que tendrán los ingresos, si son reinvertidos a una tasa de interés determinada.

Esto implica un doble problema, ya que este método esta sujeto a estimaciones, pueden existir variaciones tanto en la determinación de los ingresos y en las tasas de interés, y por ello es muy importante que los ingresos y las tasas de interés sean lo más correctamente determinadas y controladas (al igual que las posibles variaciones).

Ejemplo:

AÑOS	Proyecto A	Proyecto B	Proyecto C
1	$ 90,000	$ 180,000	$ 150,000
2	110,000	180,000	145,000
3	130,000	180,000	130,000
4	150,000	180,000	125,000

Los proyectos A y B, tendrán una tasa de reinversión del 20% anual y en el proyecto C, en los dos primeros años se reinvertira al -- 30% anual y en el último año a una tasa del 25% anual.

Proyecto A

0 1 2 3 4

150,000	=150,000
130,000(1.20)	=156,000
110,000(1.44)	=158,400
90,000(1.728)	=155,520
Valor futuro de los ingresos	619,920
Valor constante de los ingresos	480,000
Utilidad por reinversión	139,920

Proyecto B

0	1	2	3	4		
					180,000	
					180,000	
					180,000	
					180,000	
					180,000 (4.368)=	786,240

Valor futuro de los ingresos	786,240
Valor Constante de los ingresos	720,000
Utilidad por reinversión	66,240

Proyecto C

0	1	2	3	4		
					125,000	125,000
			25%		130,000 (1.25)	=162,500
		30%			145,000 (1.69)	=245,050
	30%				150,000 (2.197)	=329,550

Valor futuro de los ingresos	$862,100
Valor constante de los ingresos	550,000
Utilidad por reinversión	312,100

En este método no es necesario conocer los egresos, la comparación que se hace es con respecto a los ingresos constantes del proyecto y a la diferencia de éstos con los ingresos a valor futuro; lo que nos va a dar una utilidad por reinversión.

Para algunos autores este método viene a ser complementario a los dos métodos anteriores, veamos.

Ejemplo:

	Proyecto A	*Proyecto B*
Costo de la Inversión	*$ 200,000*	*$ 200,000*
Ingresos		
Año 1	*100,000*	*30,000*
Año 2	*100,000*	*50,000*
Año 3	*100,000*	*250,000*

La TRR es de 10%

Valor Presente:	*Proyecto A*	*Proyecto B*
Valor Presente de los Ingresos	*248,680*	*256,422*
Costo de la Inversión	*200,000*	*200,000*
Valor Presente Neto	*$ 48,680*	*$ 56,422*

El método de VPN, nos indicaría que de estas propuestas la más indicada a elegir, sería B, ya que es mayor su VPN.

Tasa Interna de Rendimiento:

Proyecto A	*TIR = 23.37%*
Proyecto B	*TIR = 21.014%*

El método de TIR, nos indica al proyecto A, como el mejor proyecto a elegir. Pero aquí nos encontraríamos en una situación difícil, ya que, cuál es el proyecto a elegir, aplicaremos el método de valor terminal para que nos ayude a tomar una decisión.

Proyecto A		Proyecto B	
\$ 100,000 (2.31) =	231,000	30,000(1.21)	= 36,300
	100,000	50,000(1.10)	= 55,000
Valor terminal	331,000	250,000	= 250,000
			\$341,300

Mediante este método, el mejor proyecto es A, esto se debe a la tasa de reinversión, que se considera igual a la tasa de rendimiento, por lo que al aplicar la tasa del 10%, nos resulta que el mejor proyecto es A, pero en caso de que la tasa de reinversión fuera menor, los resultados se alterarían, y aquí es donde se ve la importancia que tiene el hecho de que la empresa deje bien establecida su tasa de reinversión.

Cuando la tasa de reinversión es más o menos parecida a la tasa de rendimiento, con aplicar los dos anteriores métodos no será suficiente, hay que aplicar el método de valor terminal, ya que para considerar correcta una tasa interna de rendimiento deberá ser igual a la tasa de reinversión esperada.

7) INDICE DE RENDIMIENTO.

Este es un método que viene a servir de complemento al método de VPN, ya que este último nos muestra cuando un proyecto es o no rentable, pero siempre resulta de mayor utilidsd si se conoce alguna medida del rendimiento con respecto a los fondos requeridos de la inversión.

Para estó nos haremos ayudar del método de Indice de Rendimiento (IR) que se obtiene de dividir el Valor presente de los ingresos entre los egresos.

Tenemos los dos ejemplos anteriores:

	Proyecto A	Proyecto B
Valor presente de ingresos	$ 248,680	$ 256,422
Egresos	200,000	200,000

$$IR = \frac{248,680}{200,000}$$

$= 1.2434$ *para el proyecto A*

$$IR = \frac{256,422}{200,000}$$

$= 1.2811$ *para el proyecto B*

Cuando el índice es superior a la unidad, el proyecto es aceptado, estó dependiendo, claro esta, de que la empresa no requiera un mayor índice de rendimiento, aquí la importancia de este método; en la evaluación de distintas alternativas por medio del método de VPN, podríamos tener varias alternativas que se aceptan, pero de estás cuál es la que da mayor rendimiento? ¿cuál la que mejor convendría a la empresa?, a estas preguntas el IR les da respuesta.

Otra circunstancia para la que es sumamente importante la utilización de este método, es cuando hay escasez de capital, es decir, se tiene la restricción de no poder realizar todos los proyectos posibles y llevar a cabo sólo aquellos que den los más altos índices de rendimiento (hasta donde el presupuesto del capital lo permita).

8) PERIODO DE RECUPERACION DE LA INVERSION A VALOR PRESENTE.

Recordaremos que cuando vimos los métodos tradicionales, uno de los métodos más usualmente usados era el de período de recuperación de la inversión, pero una de sus principales desventajas era el no considerar el valor del dinero a través del tiempo; pero que tal si esta desventaja fuera suprimida; obteniendo el valor presente de los ingresos. Retomaremos el ejemplo que se resolvió por medio de el método de Período de Recuperación de la inversión sin considerar el valor del dinero a través del tiempo.

PROYECTO A

AÑO	BENEFICIOS ANUALES	FACTOR	VALOR PRESENTE DE LOS INGRESOS	ACUMULADO
1	$ 10,000	.86957	$ 8,695	$ 8,695
2	15.000	.75614	11,342	20,037
3	20,000	.65752	13,150	33,187
4	25,000	.57175	14,293	47,480
5	30,000	.49718	14,915	62,395

En este proyecto no se recupera el costo de la inversión y cuando se aplicó el anterior método, se recuperaba en 4 años, y 4 meses.

PROYECTO B

AÑO	BENEFICIOS ANUALES	FACTOR	VALOR PRESENTE DE LOS INGRESOS	ACUMULADO
1	$ 20,000	.86957	$ 17,391	$ 17,391
2	20,000	.75614	15,122	32,513
3	20,000	.65752	13,150	45,663
4	20,000	.57175	11,435	57,098
5	20,000	.49718	9,944	67,042

En este proyecto tampoco se recupera el costo de la inversión, mediante el método tradicional supuestamente se recuperaría en 4 años.

Proyecto C

AÑO	BENEFICIOS ANUALES	FACTOR	VALOR PRESENTE DE LOS INGRESOS	ACUMULADO
1	$ 35,000	.86957	$ 30,435	$ 30,435
2	30,000	.75614	22,684	53,119
3	20,000	.65752	13,150	66,269
4	10,000	.51175	5,717	71,986
5	5,000	.49718	2,486	74,472

El proyecto C al igual que los otros dos, no recupera el costo de la inversión, y por el método anterior, se recuperaba en dos años nueve meses.

Así, podemos observar la diferencia de un método con el otro, y la importancia de considerar el valor del dinero a través del tiempo; y por esto mismo, se hace necesario considerar en la evaluación de proyectos de inversión, un fenómeno económico que tiene un fuerte impacto en los flujos obtenidos en los proyectos, y que es la inflación.

EFECTOS INFLACIONARIOS EN LA EVALUACION DE PROYECTOS DE INVERSION.

En términos conceptuales diriamos que la inflación, es un aumento generalizado de precios, que dicho de otra manera sería; que con una misma cantidad de dinero, y a medida que el tiempo transcurre, se pueden adquirir menos cantidad de artículos y/o servicios, o bien que para adquirir los mismos artículos y/o servicios se requiere más dinero; el dinero va perdiendo su poder adquisitivo.

Si tomamos en cuenta el ambiente crónico inflacionario que actualmente se vive en el país, veremos la gran dife-

rencia que resultaría de los flujos de efectivo futuros reales y los nominales, y cómo; si no se consideran los efectos inflacionarios, las decisiones tomadas no irían de acuerdo a lo que se podría esperar de un proyecto.

Existen dos clases de inflación a considerar, la general o inflación abierta y reprimida, en donde todos los precios y costos se incrementan en la misma proporción, y otra, que es la inflación diferencial, que será más dirigida, involucrando a un determinado sector, dentro del cual habrá varias tasas inflacionarias.

Aquí cabría hacer una observación, si recordamos la importancia del valor del dinero a través del tiempo y volvemos a leer lo qué es inflación, se podría pensar que es lo mismo; pero no debemos confundirnos, estas dos circunstancias producen el mismo efecto, ya que el dinero vale menos ahora que dentro de un determinado período de tiempo; pero el cambio de valor del dinero surge de que una cantidad de dinero que es invertida en este momento a la tasas de interés establecida, se recupera esa misma cantidad más sus intereses correspondientes; en tanto en la inflación se indica que con la cantidad de dinero con que compramos hoy ciertos artículos, el próximo mes, año, etc., podríamos adquirir menos artículos y/o servicios.

Veamos ahora, los efectos que tiene la inflación en el método de Valor Presente Neto, y como podemos restar su influencia para obtener un VPN real.

La fórmula para obtener el VPN, que vimos en páginas anteriores no tomaba en cuenta la inflación, o suponía una inflación de cero.

$$VPN = \frac{S}{(1 + i)^n} - II$$

pero suponiendo una tasa de inflación general (ti), los flujos de efectivo no tendrán el mismo poder adquisitivo, así que antes de determinar el valor presente, será necesario deflactar los flujos de efectivo, y nuestra primer fórmula nos quedaría de la siguiente manera:

$$VPN = \frac{\frac{S}{(1 + ti)^n}}{(1 + i)^n} - II$$

que nos ayudará a corregir la pérdida del poder adquisitivo de los flujos de efectivo. Si la inflación y el valor del dinero a través del tiempo producen los mismos efectos, el factor $(1 + i)^n$ se maneja igual que $(1 + ti)^n$; y sus valores pueden ser buscados en las tablas financieras.

Al ser estimados los flujos de efectivo, se debe tener cuidado de incrementarlos, por lo menos de acuerdo a la tasa de inflación que se pronostica.

En el método de la tasa interna de rendimiento, restar los efectos inflacionarios, es más sencillo:

$$i_e = i - i_i$$

de donde:

i_e = *Tasa interna de rendimiento real*
i = *Tasa de rendimiento nominal*
i_i = *Tasa de inflación.*

está fórmula, nos sirve cuando se trata de un período, pero en caso de que sean más de un período los que abarque el proyecto, la TIR real la podemos obtener, haciendo el cálculo sobre los flujos de efectivo deflactados.

Ejemplo:

Se desea adquirir una nueva maquinaria, cuyo costo es de - $300,000, y que va a generar ingresos por $ 100,000 anuales, por un período de 5 años, la tasa mínima requerida para este proyecto es de 10%, y la tasa de inflación es de 20% anual con una tasa impositiva del 45% por concepto de ISR y PTU.*

Primero veamos la determinación de los flujos de efectivo y aplicación de los métodos de evaluación sin considerar la inflación.

AÑO	FLUJO DE EFVO. ANTES DE IMPTOS.	DEPRECIACION	INGRESO GRAVABLE	IMPUESTOS O AHORROS	FLUJO DE EFVO. DESPUES DE IMPTO.	VALOR PRESENTE DE LOS INGRESOS
0	-300,000					
1	100,000	60,000	40,000	18,000	82,000	74,545
2	100,000	60,000	40,000	18,000	82,000	67,768
3	100,000	60,000	40,000	18,000	82,000	61,607
4	100,000	60,000	40,000	18,000	82,000	56,007
5	100,000	60,000	40,000	18,000	82,000	50,915
						310,842

* *La tasa de inflación no representa, la que actualmente vive el país, pero lo importante es demostrar la aplicación del método.*

Valor Presente de Ingresos	$ 310,842
Costo de la Inversión	300,000
Valor Presente Neto	$ 10,842
Tasa Interna de Rendimiento	19,86%

En la tabla presentada en esta página, veremos el mismo ejercicio, pero tomando en cuenta la inflación.

AÑO	FLUJO DE AFVO. ANTES DE IMPTOS.	DEPRECIACION	INGRESO GRAVABLE	IMPUESTOS O AHORROS	FLUJO DE EFVO. DESPUES DE IMPTO.	FLUJO DE EFVO. DEFLACTADOS.
0	-300,000					
1	120,000'	60,000"	60,000	27,000	93,000	77,500
2	132,000	60,000	72,000	32,400	99,600	69,167
3	142,500	60,000	82,500	37,125	105,375	60,981
4	159,720	60,000	99,720	44,874	114,846	55,385
5	175,692	60,000	115,692	52,061	123,631	49,684

VALOR PRESENTE
70,454
57,163
45,816
37,829
30,850
$242,112

TIR = 1.52%

VPN = 242,112 - 300,000
= - 57,888

' Ingresos inflacionados en un 20%

" La depreciación es en línea recta, según las nuevas disposiciones se tiene que ajustar, mediante un factor.

Cuando la inflación no ha sido tomada en cuenta, el proyecto es aceptado, pero la diferencia de tomar o no en cuenta la inflación, se puede ver claramente en el anterior ejemplo, cuando la inflación es considerada, el proyecto no es aceptado.

Hagamos un ejemplo, con un proyecto de activos no despreciables, como pueden ser los terrenos o acciones; se podría pensar que estas inversiones no sufren efecto alguno por la inflación, y se estaría equivocado, ya que si bien es cierto que el activo se incrementa al igual que el índice general de precios; cuando este activo es puesto en venta, se genera una ganancia extraordinaria, sobre la cual hay que pagar impuestos y estó disminuye significativamente el rendimiento.

Tenemos un terreno que se ha adquirido en $ 200,000, el que será vendido en 3 años a un costo de $ 500,000, si suponemos que la tasa impositiva que gravara las ganancias extraordinarias en un 30%. ¿Cuál será su TIR, sin tomar en cuenta los impuestos y cuál, tomandolos en cuenta?. Su TRR es de 10% y el índice de inflación esperada, en promedio es de 20% anual.

VPN = $ 375,567 - 200,000
$ 175,567

TIR = 35.72%

Si se considera la inflación, que es de 20%, anual el nuevo precio de venta es de:

$$500{,}000(1.20)^3 = \$864{,}000$$

Los impuestos que se generarían por concepto de ganancias extraordinarias sería de $109,200, en vez de $90,000; por lo tanto el flujo de efectivo después de impuestos sería de $754,800 y deflactando este flujo, nos daría $436,805 y tomando en cuenta este último flujo tenemos:

TIR = 29.75%

La TI de rendimiento descendio de 35.72% a 29.75%, estó a consecuencia de los impuestos que se pagarón por la ganancia extraordinaria.

Ejercicio 1
Se tienen las siguientes alternativas:

Alternativa 1

AÑO	BENEFICIOS ANUALES
1	$ 50,000
2	85,000
3	135,000
	$270,000

Alternativa 2

AÑO	BENEFICIOS ANUALES
1	$ 90,000
2	90,000
3	90,000
	$270,000

Alternativa 3

AÑO	BENEFICIOS ANUALES
1	$ 120,000
2	80,000
3	70,000
	$ 270,000

El costo de inversión para las tres alternativas es de $200,000. La TRR es de 10%.

Cuál de las tres alternativas sería la elegida una vez que se han aplicado los métodos de evaluación que se han explicado en este primer capítulo?

1) Tasa Promedio de Rentabilidad

Alternativa 1

$$TPR = \frac{23,333}{100,000} = 23.33\%$$

Alternativa 2

$$TPR = \frac{23,333}{100,000} = 23.33\%$$

Alternativa 3

$$TPR = \frac{23,333}{100,000} = 23.33\%$$

2) Interés Simple sobre Rendimiento

Alternativa 1

$$ISSR = \frac{90,000 - 66,667}{100,000} = \frac{23,333}{100,000} = 23.33\%$$

ALternativa 2

$$ISSR = \frac{90,000 - 66,667}{100,000} = 23,33\%$$

Alternativa 3

$$ISSR = \frac{90,000 - 66,667}{100,000} = 23.33\%$$

3) *Período de Recuperación de la Inversión*

Alternativa 1

AÑO	BENEFICIO ANUAL	ACUMULADO
1	$ 50,000	$ 50,000
2	85,000	135,000
3	135,000	270,000

La inversión se recupera en dos años, seis meses.

Alternativa 2

AÑO	BENEFICIO ANUAL	ACUMULADO
1	$ 90,000	$ 90,000
2	90,000	180,000
3	90,000	270,000

La inversión se recupera en dos años, tres meses.

Alternativa 3

AÑO	BENEFICIO ANUAL	ACUMULADO
1	$ 120,000	$ 120,000
2	80,000	200,000
3	70,000	-

La inversión se recupera en dos años.

4) *Valor Presente Neto*

Alternativa 1

AÑO	BENEFICIO ANUAL	VALOR PRESENTE
1	$ 50,000	$ 45,454
2	85,000	70,248
3	135,000	101,427
	Valor Presente de los Ingresos	$217,129
	Costo de la Inversión	200,000
	Valor Presente Neto	$ 17,129

Alternativa 2

AÑO	BENEFICIO ANUAL	VALOR PRESENTE
1	$ 90,000	
2	90,000	
3	90,000	
	Valor Presente de los Ingresos	$ 223,812
	Costo de la Inversión	200,000
	Valor Presente Neto	$ 23,812

Alternativa 3

AÑO	BENEFICIO ANUAL	VALOR PRESENTE
1	$ 120,000	$ 109,091
2	80,000	66,116
3	70,000	52,592
	Valor Presente de los Ingresos	$ 227.799
	Costo de la Inversión	200,000
	Valor Presente Neto	$ 27,799

5) *Tasa Interna de Rendimiento*

Alternativa 1 TIR = 14.10%

Alternativa 2 TIR = 16.65%

Alternativa 3 TIR = 18.61%

6) Valor Terminal

AÑO	BENEFICIOS ANUALES	VALOR TERMINAL
1	$ 50,000	$ 60,500
2	85,000	93,500
3	135,000	135,000
	Valor Terminal de Ingresos	$289,000
	Valor Constante de Ingresos	270,000
	Utilidad por reinversión	$ 19,000

Alternativa 2

AÑO	BENEFICIOS ANUALES	VALOR TERMINAL
1-3	$ 90,000	
	Valor Terminal de Ingresos	$297,900
	Valor Constante de Ingresos	270,000
	Utilidad por reinversión	$ 27,900

Alternativa 3

AÑO	BENEFICIOS ANUALES	VALOR TERMINAL
1	$ 120,000	$ 277,200
2	80,000	88,000
3	70,000	70,000
	Valor Terminal de Ingresos	$ 435,200
	Valor Constante de Ingresos	270,000
	Utilidad por reinversión	$ 165,200

7) Indice de Rendimiento

Alternativa 1 $IR = \frac{217,129}{200,000} = 1.08$

Alternativa 2 $IR = \frac{223,812}{200,000} = 1.12$

Alternativa 3 $IR = \frac{227,799}{200,000} = 1.14$

8) Período de Recuperación de la Inversión a Valor Presente

Alternativa 1

AÑO	BENEFICIO ANUAL	VALOR PRESENTE	ACUMULADO
1	$ 50,000	$ 45,454	$ 45,454
2	85,000	70,247	115 701
3	135,000	101,427	217,128

La inversión se recupera en dos años, diez meses a valor presente.

Alternativa 2

AÑO	BENEFICIO ANUAL	VALOR PRESENTE	ACUMULADO
1	$ 90,000	$ 81,818	$ 81,818
2	90,000	74,380	156,198
3	90,000	119,790	275,988

La inversión se recupera en dos años, cuatro meses.

ALternativa 3

AÑO	BENEFICIO ANUAL	VALOR PRESENTE	ACUMULADO
1	$ 120,000	$ 109,090	$ 109,090
2	80,000	66,115	175,205
3	70,000	52,592	227,797

La inversión se recupera en dos años, seis meses

	ALTERNATIVA 1	ALTERNATIVA 2	ALTERNATIVA 3
1) TPR	90%	90%	90%
2) ISSR	23.33%	23.33%	23.33%
3) PRI	2 años 6 m.	2 años 3 m.	2 años
4) VPN	$ 17,129	$ 23,812	$ 27,799
5) TIR	14.10%	16.65%	18.61%
6) VT	289,000	297,900	435,200

7)	IR	1.08	1.12	1.14
8)	PRIVP	2 años 10 m.	2 años 4 m.	2 años 6 m.

En este cuadro- resumen que se acaba de presentar, se muestran todos los resultados de los métodos de evaluación, tanto de los tradicionales, como de los consideran el valor del dinero a través del tiempo; los métodos tradicionales no nos aclaran mucho, ya que el único que muestra alguna diferencia es el PRI, que indica que el mejor método a escoger es el 3; en tanto en los otros dos métodos es indistinto que se escoja cualquiera de los tres.

En cuanto a los métodos que si toman en cuenta el valor del dinero, ya nos presentan una clara diferencia, advirtiendose que es el proyecto 3 quién tiene un VPN más alto; una TIR más elevada y que esta por arriba de la TRR; en el siguiente método se ve una diferencia más acentuada, ya que su valor terminal es elevado, así como su utilidad por reinversión; el IR también muestra el proyecto 3 como el firme candidato a ser elegido; pero en el PRIVP es el proyecto 2 quién muestra una recuperación de la inversión más rápida, y es aquí, donde se debe tener cuidado; si bien en el proyecto 2 se recupera dos meses antes la inversión, si se observan los flujos de efectivo, hasta el segundo año son más altas en el proyecto 3, si se recupera más rápido en el proyecto 2, es porque en el tercer año su flujo de efectivo es más alto, no debemos perder de vista que la liquidez es un factor muy importante, sobre todo en los primeros años del proyecto.

Ahora, supongamos que en los flujos de efectivo que se presentaron no habían sido considerados ni las depreciaciones, ni los impuestos a pagar, por lo tanto, es necesario determinar los flujos de efectivo después de impuestos. Tasa impositiva de 45%.

AÑO	FLUJO DE EFECTIVO ANTES DE IMPUESTOS	DEPRECIACION	INGRESO GRAVABLE	IMPUESTO O AHORRO	FLUJO DE EFECTIVO DESPUES DE IMPTOS.
1	$ 50,000	$ 66,666	-(16,666)	$ 7,500	$ 57,500
2	85,000	66,666	18,334	(8,250)	76,750
3	135,000	66,666	68,334	(30,750)	104,250

Alternativa 2

AÑO	FLUJO DE EFECTIVO ANTES DE IMPUESTOS	DESPRECIA-CION	INGRESO GRAVABLE	IMPUESTO O AHORRO	FLUJO DE EFECTIVO DESPUES DE IMPUESTOS.
1	$ 90,000	$ 66,666	$ 23,334	$(10,500)	$ 79,500
2	90,000	66,666	23,334	(10,500)	79,500
3	90,000	66,666	23,334	(10,500)	79,500

Alternativa 3

AÑO	FLUJO DE EFECTIVO ANTES DE IMPUESTOS	DEPRECIACION	INGRESO GRAVABLE	IMPUESTO O AHORRO	FLUJO DE EFECTIVO DESPUES DE IMPUESTO.
1	$ 120,000	$ 66,666	$ 53,334	$ (24,000)	$ 96,000
2	80,000	66,666	13,334	(6,000)	74,000
3	70,000	66,666	3,334	(1,500)	68,500

Si pide: con estos nuevos flujos de efectivo aplicarse los métodos de VPN y obtener la TIR.

Alternativa 1

VPN = 194,027 - 200,000
= -5,973

Alternativa 2

VPN = 197,704 - 200,000
= - 2,296

Alternativa 3

VPN = 199,894 - 200,000
= - 106

Tasa Interna de Rendimiento

Alternativa 1	*8.45%*
Alternativa 2	*9.35%*
Alternativa 3	*9.96%*

Parecera reiterativo, pero dada su importancia, se justifica, antes de considerar impuestos, los tres proyectos daban resultados positivos, una vez aplicados los impuestos, el VPN fué negativo y la TIR estuvo por abajo de la TRR, y los resultados que nos darían los demás; negativos todos; el valor terminal menor, el índice de rendimiento menor a uno y la inversión no se recupera a valor presente.

Ejercicio 2

Una empresa considera la posibilidad de subsistir su maquinaria vieja por una nueva. El costo de la máquina nueva es de $100,000 los beneficios sin considerar depreciación e impuestos se estiman en $ 40,000, durante 5 años. Se calcula una inflación promedio de 15%, una tasa impositiva del 50% la TRR es de 10%, se desea saber si conviene emprender el proyecto.

AÑO	FLUJO DE EFECTIVO ANTES DE IMPUESTOS	DEPRECIACION	INGRESO GRAVABLE	IMPUESTOS O AHORROS	FLUJO DE EFECTIVO DESPUES DE IMPUESTOS.
1	$ 46,000	$ 20,000	$ 26,000	$ 13,000	$ 33,000
2	52,900	20,000	32,900	16,450	36,450
3	60,835	20,000	40,835	20,417	40,418
4	69,960	20,000	49,960	24,980	44,986
5	80,454	20,000	60,454	30,227	50,113

FLUJO DE EFECTIVO DEFLACTADO	*VALOR PRESENTE*
$ 28,696	$ 26,087
27,561	22,778
26,575	19,966
25,721	17,568
24,915	15,470

VPN = 101,869 - 100,000
= $ 1,869

TIR = 10.75%
VT = 164,061 *$ 30,593 (utilidad por reinversión)*
IR = 1.02
PRIVP = 3 años 5 meses

Este proyecto podría ser aceptado, pero con muchas reservas y teniendo mucho cuidado, ya que es muy riesgoso; porque si la inflación esta por encima de los pronosticado, se obtendrían resultados negativos, obteniendose pérdidas reales y no ganancias.

CAPITULO SEGUNDO

Como ya se indicó en el primer capítulo, tomar decisiones y aún más, hacerlo bien, conlleva muchas ventajas; pero para lograr estó es necesario tener bases; por ello, durante este segundo capítulo se explicará qué es y en qué consiste la teoría de la Programación Lineal, así como sus métodos de solución, para ampliar las bases sobre las que descansa una adecuada decisión.

Debemos entender dónde se encuentra ubicada la Programación Lineal y para ello veamos cuándo surge y qué es la Investigación de Operaciones.

Los inicios de lo que ahora conocemos como Investigación de Operaciones, se remonta a los años 1759 con el economista Quesnay, quién utiliza modelos primitivos de programación matemática; economistas como Walras, en 1874 hace uso de técnicas similares. Los modelos lineales tienen como precursores a Jordan en 1873; Minkowsky en 1896 y Farkas en 1903, y así, hasta pasar por otros varios economistas llegamos hasta la segunda guerra mundial en donde empezó a tomar auge la Investigación de Operaciones.

Tenemos una primera definición, dada por Churchman, Ackoff y Arnoff; "La Investigación de Operaciones es la aplicación, por grupos interdesciplinarios, del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciónes o sistemas (hombre-máquina), a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de toda la organización".

Otra definición dada por Kaufmann es la siguiente, "La Investigación de Operaciones significa la aplicación de métodos científicos, con cuya ayuda se logra la comparación cuantitativa de alternativas, que permite a la dirección de la empresa una elección óptima entre las existencias. En *pocas palabras signica "preparación científica de las decisiones".*

Estas dos definiciones nos vienen a dar un enfoque claro de lo que es la Investigación de Operaciones, y si volvemos a leerlas nos damos cuenta de su gran similitud, la principal diferencia es, que en la primera se reconoce un sólo método científico (afirmación con la que estamos de acuerdo), en tanto en la segunda se habla de varios métodos científicos, y si debemos ser objetivos, en realidad sólo existe un método científico, por ello diremos que la Investigación de Operaciones es la aplicación de métodos que se hacen ayudar del método científico.

A partir de estas dos definiciones nos daríamos cuenta que la Investigación de Operaciones es una herramienta que nos ayuda a evaluar alternativas para escoger la más óptima, y de aquí su aplicación a la evaluación de proyectos de inversión . Como ya se dijo, la Investigación de Operaciones es una serie de métodos, de los cuales los más importantes son las siguientes:

- *a) La teoría de las colas*
- *b) Programación Lineal*
- *c) La Teoría de los juegos*
- *d) La Teoría simbólica*
- *e) La Teoría de la información*
- *f) La Teoría de la búsqueda*
- *g) El Método de Monte Carlo*

No es el objetivo de este trabajo de investigación hacer un análisis detallado de los métodos antes enunciados, a excepción de la Programación Lineal.

Una vez que se ha establecido el marco general en el que se ubica la Programación Lineal, centraremos nuestra atención en los métodos que conforman la Programación Lineal.

La Programación Lineal tuvo sus inicios en 1947 con Dantzing, aunque ya antes se habían hecho esfuerzos de resolver problemas económicos ayudados de las matemáticas y tomando como base, relaciones lineales.

La Programación Lineal es uno de los métodos de la Investigación de Operaciones, que hasta el momento ha sido el más perfeccionado teórica y prácticamente. La definición matemática de la Programación Lineal es: "Es el análisis de aquellos problemas en los que se ha de hallar el máximo o el mínimo de un función lineal de varias variables sujetas a ciertas restricciones que tienen la forma de desigualdades lineales".

Los supuestos básicos de la Programación Lineal son la linearidad y la certeza, entendiendo por esto último que todos los factores y relaciones del problema se suponen conocidos, ciertos y exactos, y no inciertos o probables.

La linearidad se explica de la siguiente manera: supongamos dos variables X e Y, de las que después de observar un determinado fenómeno, encontramos existe una relación, de tal manera que podemos decir en simples palabras que el valor de Y depende del valor de X; pero dicho por un matemático y utilizando una expresión simbólica tendríamos: Y = F(X), lo que puede leerse como "el valor de Y en función (depende de) del valor de X", por lo que de estó deduciriamos que X es una variable independiente y Y es una variable dependiente (puesto que su valor depende de X).

Pero, es estó lo que nos viene a representar la linearidad?. No, la relación Y = F(X) es un caso especial de linearidad, pero siempre y cuando cumpla con la siguiente condición: "Si para todos los valores posibles de X e Y, un cambio dado en el valor de X produce un cambio constante en el valor de Y".

Observemos a través de un ejemplo, cuál sería su interpretación a lo anteriormente expuesto.

TABLA 1

X	Cambio en X	Y	Cambio en Y
0		2	
1	+1	4	+2
2	+1	6	+2
3	+1	8	+2
4	+1	10	+2
5	+1	12	+2

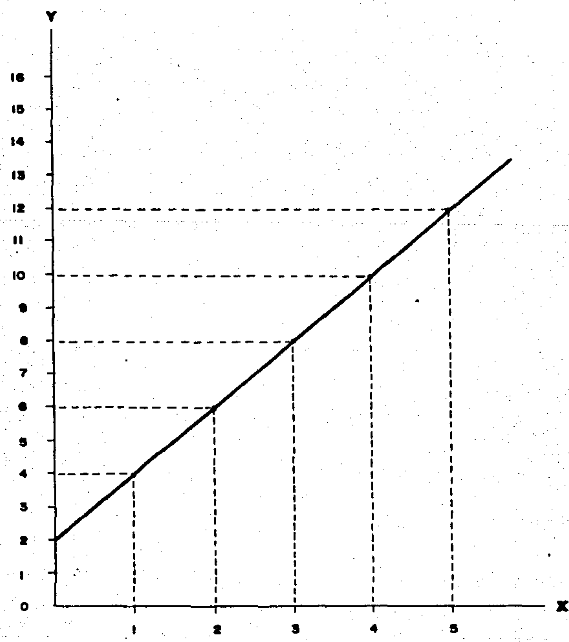
En esta tabla se muestra que Y = F(X) es lineal, ya que cumple con la condición de que a cada cambio de X produce un cambio -- constante de Y. Es una función lineal.

TABLA 2

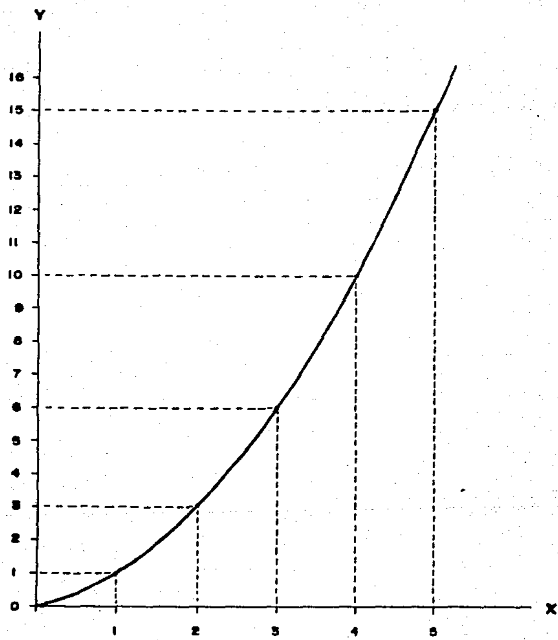
X	Cambio en X	Y	Cambio en Y
0		0	
1	+1	1	+1
2	+1	3	+2
3	+1	6	+3
4	+1	10	+4
5	+1	15	+5

En esta tabla vemos que la relación no es lineal ya que a cada cambio de X (+ 1) no corresponde un cambio constante en Y. Esta función no es lineal.

Representaremos estas dos tablas graficamente y nos daremos cuenta de la linearidad de la primer tabla y la no linearidad de la segunda



Y = F(X) Sí se cumple con la condición de linearidad



No se cumple con la condición de linearidad.

La expresión general de una función lineal de una variable independiente es Y= a + bX, de donde:

Y = Variable dependiente
a = Constante numérica, llamada ordenada al origen
b = Constanteménte numérica, llamada pendiente.

La ordenada al origen es el punto donde la línea cruza el eje Y, que el valor de X = 0; si tomamos el primer *ejemplo, sería a = 2. La pendiente (b) de una función lineal, nos representa el valor de cambio en Y, cuando el valor de cambio de X es uno; como en el ejemplo, cuando X cambia 1, Y cambia 2, por lo tanto b = 2, así la ecuación de la función del primer ejemplo quedaría así:*

$$Y = 2 + 2X$$

Cuando se cuenta con información limitada y se requiere de encontrar la ecuación de una línea, con conocer dos puntos de esa línea, podemos encontrar la pendiente de esa ecuación; supongamos que el punto A (X_1, Y_1), y el punto B (X_2, Y_2). Atraviesan una línea.

El cambio de Y del punto 1 al punto 2 sería $Y_2 - Y_1$ y el cambio de X, sería $X_2 - X_1$; dividiendo el cambio total de Y entre el cambio total de X, nos daría el cambio en Y por unidad de cambio en X, es decir la pendiente de la línea:

$$b = \frac{Y2 - Y1}{X_2 - Y_1}$$

Del ejemplo 1 tenemos dos puntos A(1,4) y B(4,10); aplicando la ecuación anterior:

$$b = \frac{10 - 4}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

Y nuestra ecuación, una vez conociendo nuestra pendiente sería:

$$Y = a + 2X$$

La pendiente nos indica también, la inclinación de *la línea, cuando es positiva su inclinación será a la derecha y si es negativa será a la izquierda.*

Para encontrar los valores de la ordenada al origen, con sustituir el valor de X, de cualquiera de los dos puntos conocidos: tenemos A(1,4), de donde:

$$Y = a + 2X$$
$$4 = a + 2(1)$$
$$a = 4 - 2 = 2$$

Y la expresión completa quedaría:

$$Y = 2 + 2X$$

Una vez que se ha explicado el supuesto de la linealidad, la ecuación de una línea recta y el procedimiento para encontrar a partir de dos puntos la ecuación de la línea, daremos una metodología para la solución de problemas usando la Programación Lineal, propuesta en el libro "Programación Lineal" escrito por Nadima Simon, Jorge Cerecedo, Armando Rojas y Judith Zubieta, editado por la Facultad de Contaduría y Administración.

Metodología para la solución de problemas, usando la Programación Lineal.

1) Observación.

En esta etapa se debe reconocer el problema, y de que su solución se pueda realizar por Progamación Lineal, es decir, que se tenga que elegir una alternativa, en donde se tenga que optimizar (maximizar o minimizar) un objetivo ya establecido, teniendo que considerar recursos ya limitados.

2) Construcción del Modelo.

En esta etapa se formula el modelo de Programación Lineal y se deben tomar en cuenta los siguientes pasos:

a) Comprensión del Problema. Antes que expresar matematicamente el problema, se debe explicar con palabras sencillas.

b) Determinación de alternativas. Se debe tener bien delimitadas las alternativas factibles, como por ejemplo escoger una u otra máquina, etc.

c) Relacionar las alternativas factibles con las variables del modelo. Asignar a cada variable las dimensiones o unidades del proyecto. Por ejemplo:

X_1= Máquina tipo A
X_2= Máquina tipo B

d) Determinación de restricciones. Establecer las restricciones existentes en el problema, cuando los recursos son limitados, tales como el presupuesto, la mano de obra, etc.

e) Determinación de la función objetivo. En este paso se debe establecer cuál es el objetivo que se pretende maximizar o minimizar; se pueden maximizar utilidades o minimizar costos.

f) Expresión matemática del problema. Ya que se han realizado todos los anteriores puntos, se deben determinar los coeficientes de la función objetivo y de las restricciones, lo que va a expresarse matemáticamente como sistemas de ecuaciones o desigualdades de primer grado.

3) *Solución al Modelo.*

Para la resolución de esta etapa, existen diferentes métodos de solución de la Programación Lineal, que explicaremos más adelante.

Los problemas que se presentan en la práctica contemplan muchas variables de decisión y muchas restricciones, por lo que en su gran mayoría son resueltos por medio de una computadora, ya que su solución resulte más fácil, sobre todo si se cuenta con programas ya elaborados (paquete) de programación lineal. Pero también es importante conocer su resolución en forma manual para una mejor comprensión e interpretación de los resultados.

Método Gráfico

La utilización de este método se encuentra limitado a cierto tipo de problemas elementales; que no consten de más de dos variables de decisión, sin embargo su estudio nos sirve de ayuda para el mejor entendimiento de los fundamentos de la programación lineal, y nos da las bases de solución para los demás métodos de la programación lineal.

El procedimiento lo veremos claramente a través de un ejemplo:

Una fábrica produce dos diferentes tipos de calculadoras de bolsillo, tipo 1 y tipo 2; su tiempo de fabricación para cada una es de 1 hr. y 1.5 hr. respectivamente, en la empresa se trabaja 20 hrs.; el costo de fabricación para cada una de las calculadoras es de $ 1,000 y $ 2,000 respectivamente, siendo su margen de utilidad del 40% para la tipo 1 y

40% para la tipo 2 sobre el costo; el departamento de ventas informa que la capacidad de venta diaria es de 12 calculadoras tipo 1 y 8 calculadoras tipo 2

Se desea saber cuántas calculadoras de tipo 1 y tipo 2 se deben fabricar al día para obtener el máximo de ganancias posibles.

Sigamos la metodología anteriormente descrita:

Observación.

Si se observa el problema detenidamente, los datos proporcionados son bajo condiciones de certeza.

Construcción del modelo.

a) Determinación de alternativas:

Fabricación de calculadoras de bolsillo tipo 1
Fabricación de calculadoras de bolsillo tipo 2

b) Identificación de las variables de decisión:

X_1= *Calculadoras de bolsillo tipo 1*
X_2= *Calculadoras de bolsillo tipo 2*

c) Determinación de las restricciones:

Restricción del tiempo, se trabjan 20 hrs. al día y se fabrican en 1 hr. y 1.5 hr. las calculadoras tipo 1 y tipo 2 respectivamente.

Restricción de ventas, no se pueden vender más de 12 calculadoras tipo 1 y 8 de la tipo 2.

Las variables de decisión deberán tener la condición de no negatividad, ya que no puede darse la circunstancia de que se fabriquen números negativos de calculadoras.

d) Determinación de la función objetiva:

Se quiere saber la combinación idónea de fabricar calculadoras tipo 1 y tipo 2, que nos dará el máximo beneficio.

e) Expresión matemática:

$$\text{Max } Z = 1400X_1 + 2800X_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sujeta a:

$$
\begin{array}{llr}
X_1 + 1.5\,X_2 \leq 20 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\
X_2 \leq 12 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2 \\
X_2 \leq 8 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 3 \\
X_1 \geq 0 & & \\
X_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

La primer ecuación se trata de una igualdad y nos representa la función objetiva, mostrandonos la relación de lo producido, con la contribución; en tanto las cinco siguientes ecuaciones son desigualdades.

La primer restrición es respecto a las horas, el número de calculadoras tipo 1 y tipo 2 que se fabriquen no deberá exceder de 20 hrs.

La segunda y tercera restricción, es respecto a las ventas, no se puede vender más de 12 y 8 calculadoras *del tipo 1 y 2 respectivamente.*

Y por último las variables de no negatividad, estas restricciones significan que la solución debe hallarse en el cuadrante positivo de la gráfica, ya que, o bien se produce una unidad o no se produce, ya que sería imposible producir unidades negativas.

Y estó viene a representar el modelo de programación lineal.

Una vez que ya se ha establecido el modelo, expresaremos graficamente las desigualdades de restricción. En el problema, la calculadora tipo 1 estará representada en el eje "X", y la calculadora tipo 2 estará representada en el eje "Y".

Convirtamos las restricciones en igualdades:

$$X_1 + 1.5X_2 = 20$$
$$X_1 = 12$$
$$X_2 = 8$$

Para cualquiera de las tres restricciones encontraremos dos puntos terminales en los ejes, uniendolos con una línea reta.

De la primer restricción:

$$X_1 + 1.5\, X_2 = 20$$

La forma de encontrar los dos puntos es la siguiente:

si suponemos que se producen cero calculadoras tipo 1 nos quedaría.

$$0 + 1.5X_2 = 20$$
$$1.5X_2 = 20$$
$$X_2 = 13.34$$

El primer punto quedaría (0,13.34), el siguiente punto se calcula igual, sólo que ahora se producirá cero calculadoras tipo 2.

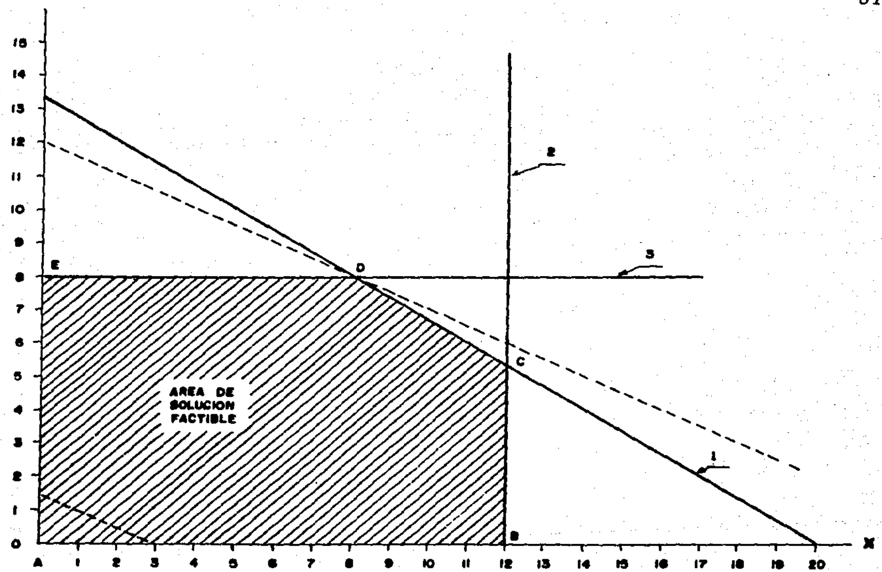
$$X_1 + (0)X_2 = 20$$
$$X_1 = 20$$

El segundo quedaría (20,0)

En el caso de las dos siguientes restricciones, como la ecuación contiene una variable, su localización en la gráfica se hace con mayor facilidad, pero en caso de que las retricciones tuvieran dos variables, la localización de los puntos se harían igual que en la primer restricción.

$$X_1 = 12$$
$$X_2 = 8$$

El área rayada en la gráfica, será el área de solución factible, la que contendra todas las combinaciones posibles, de los productos, que satisfagan las desigualdades originales, comprobemos estó, supongamos el punto F (10,8). 10 Calculadoras tipo 1 y 8 calculadoras tipo 2, quedaría dentro de la segunda y tercera restricción.



$$X_1 \leq 12 \qquad X_2 \leq 8$$
$$X_2 \leq 10 \qquad X_2 \leq 8$$

Pero estaría fuera de la primer restricción:

$$X_1 + 1.5X_2 \leq 20$$
$$10 + 1.5X(8) \leq 20$$
$$10 + 12 \leq 20$$
$$22 \geq 20$$

No satisface la desigualdad, por lo tanto la solución no es posible, si nos basamos en las restricciones.

De qué manera se encontraría la combinación de productos que nos daría la máxima combinación?.

Existen distintos cominos para llegar a esta solución.

La primera consiste en trazar la función objetiva:

$$Z = 1,400X_1 + 2,800X_2$$

estó lo haremos de la siguiente manera, supongamos una contribución mínima de $4.200 = 1,400X_1 + 2,800X_2$ (si dividimos estas cantidades entre 100, nos quedaría $42 = 14X_1 + 28X_2$, lo que nor facilitaría el manejo de la función objetivo).

Con vender un producto de cada uno de los dos tipos que se manejan, se otendría esta contribución.

Ahora que ya tenemos la ecuación de contribución, busquemos dos puntos para trazar esta línea en la gráfica:

Cuando $X_1 = 0$	Cuando $X_2 = 0$
$42 = 14(0) + 28X_2$	$42 = 14X_1 + 28(0)$
$42 = 28X_2$	$42 + 14X_1$
$X_2 = 42 \div 28$	$X_1 = 3$
Primer punto (0,1.5)	Segundo punto (3,0)

Se traza la línea de la función objetivo; se van trazando líneas paralelas y cuando se encuentre el punto más lejano del origen, que este dentro del área de solución factible,-

habremos encontrado la cambinación de productos, más provechosa. En este caso, sería en el punto D; que nos daría una combinación de 8 calculadoras tipo 1 y 8 calculadoras tipo 2, Sustituyendo en la función objetivo:

$$Z = 1,400X_1 + 2,800X_2$$
$$Z = 1,400(8) + 2,800(8)$$
$$Z = 11,200 + 22,400$$
$$Z = \underline{\$\ 33,600}$$

En los párrafos anteriores encontramos que el punto D nos da la solución óptima; tomamos de la gráfica los valores numéricos, pero en la práctica no resulta tan sencillo precisarlos, por lo que nos serviremos de las ecuaciones simultáneas para encontrar dichos valores numéricos.

Las ecuaciones 1 y 3 nos dan la intersección del punto D,

$$X_1 + 1.5X_2 = 20$$
$$X_2 = 8$$

Por sustitución:

$$X_1 + 1.5(8) = 20$$
$$X_1 + 12 = 20$$
$$X_1 = 20 - 12$$
$$X_1 = 8$$
$$X_2 = 8$$

En la función objetivo:

$$Z = 1,400\ (8) + 2,800\ (8)$$
$$Z = \underline{\$\ 33,600}$$

Otra forma de encontrar la solución final, es ir probando cada esquina, que en este caso sería A,B,C,D y E. Tomaremos de la gráfica los valores numéricos de cada uno de los anteriores puntos. recordemos que en caso de no poder precisarlos, se hará uso de las ecuaciones simultáneas.

Punto A (0,0)

$$Z = 1{,}400\ (0) + 2{,}800\ (0)$$
$$Z = 0$$

Punto B (12,0)

$$Z = 1{,}400\ (12) + 2{,}800\ (0)$$
$$Z = \$\ 16{,}800$$

Punto C

Lo encontraremos por ecuaciones simultáneas:

De 1 y 2

$$X_1 + 1.5X_2 = 20$$
$$X_1 = 12$$

Por sustitución:

$$12 + 1.5X_2 = 20$$
$$1.5X_2 = 20 - 12$$
$$X_2 = 8 \div 15$$
$$X_2 = 5.34$$

Como no pueden producirse .34 de una calculadora, se produciran 5, el punto C nos queda (12,5)

$$Z = 1{,}400\ (12) + 2{,}800\ (5)$$
$$Z = 16{,}800 + 14{,}000$$
$$Z = \$30{,}800$$

Punto D (8,8)

$$Z = 1{,}400\ (8) + 2{,}800\ (8)$$
$$Z = 11{,}200 + 22{,}400$$
$$Z = \$\ 33{,}600$$

Punto E (0,8)

$$Z = 1{,}400\ (0) + 2{,}800\ (8)$$
$$Z = \$\ 22{,}400$$

Esta otra forma de encontrar la solución final nos da como resultado el punto D (8,8) como el indicado para maximizar las ganancias. Pero es bueno observar que si utilizamos este método será necesario usar más ecuaciones simultáneas, ya que en este caso de los cinco puntos, uno es el que se encontro por ecuaciones simultáneas, el resto se pudo precisar en la gráfica, pero en la práctica no resulta tan sencillo.

Hagamos un caso de minimización y supongamos lo siguiente:

En un determinado rancho se tienen dos clases de alimentos para ganado, cada saco de estos alimentos contienen ingredientes nutritivos, que son: grasas, carbohidratos y proteínas. El ganado debe consumir diariamente, como mínimo, 15 us. de grasas, 24 us. de carbohidratos y 16 us. de proteínas. Los componentes de cada uno de los alimentos son los siguientes:

	Alimento A	Alimento B
Grasas	5	5
Carbohidratos	16	6
Proteínas	8	4

El costo de cada uno de los alimentos es de \$ 400 para el A y \$ 300 para el B.

Se quiere saber cuál sería la combinación de los alimentos que debe darse al ganado diariamente, tomando en cuenta que se tiene que cumplir con los requisitos mínimos de nutrientes y además se espera minimizar el costo de alimentación.

Construcción del Modelo.

a) Determinación de alternativas.

Qué cantidad de alimento A debe consumir el ganado
y/o
Qué cantidad de alimento B debe consumir el ganado.

b) Identificación de variables de decisión.

X_1 = *Alimento A*
X_2 = *Alimento B*

c) Determinación de las restricciones

Se debe respetar el requerimiento mínimo de nutrientes
Restricciones de no negatividad.

d) Determinación de la función objetivo

Lograr que el costo de alimentación al ganado se el mínimo, cumpliendose con las restricciones establecidas.

e) Expresión matemática del problema

$$\text{Min } Z = 400X_1 + 300X_2$$

Sujeta a:

$$5X_1 + 5X_2 \geqslant 15 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$
$$16X_1 + 6X_2 \geqslant 24 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2$$
$$8X_1 + 4X_2 \geqslant 16 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3$$

Solución al modelo.

El procedimiento seguido en el anterior ejemplo de maximización, será el que nos sirva para todos los ejemplos en donde se use el método gráfico, salvo en los casos especia-les que se verán más adelante.

Convirtamos las restricciones en igualdades

$$5X_1 + 5X_2 = 15 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$
$$16X_1 + 6X_2 = 24 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2$$
$$8X_1 + 4X_2 = 16 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3$$

De 1:

$$5X_1 + 5X_2 = 15$$

Cuando $X_1 = 0$

$5(0) + 5X_2 = 15$

$X_2 = 15 \div 5$

$X_2 = 3$

Primer punto (0,3)

Cuando $X_2 = 0$

$5X_1 + 5(0) = 15$

$X_1 = 15 \div 5$

$X_1 = 3$

Segundo punto (3,0)

De 2:

$$16X_1 + 6X_2 = 24$$

Cuando $X_1 = 0$

$16(0) + 6X_2 = 24$

$X_2 = 24 \div 6$

$X_2 = 4$

Primer punto (0,4)

Cuando $X_2 = 0$

$16X_1 + 6(0) = 24$

$X_1 = 24 \div 16$

$X_1 = 1.5$

Segundo punto (1.5,0)

De 3:

$$8X_1 + 4X_2 = 16$$

Cuando $X_1 = 0$

$8(0) + 4X_2 = 16$

$X_2 = 16 \div 4$

$X_2 = 4$

Primer punto (0,4)

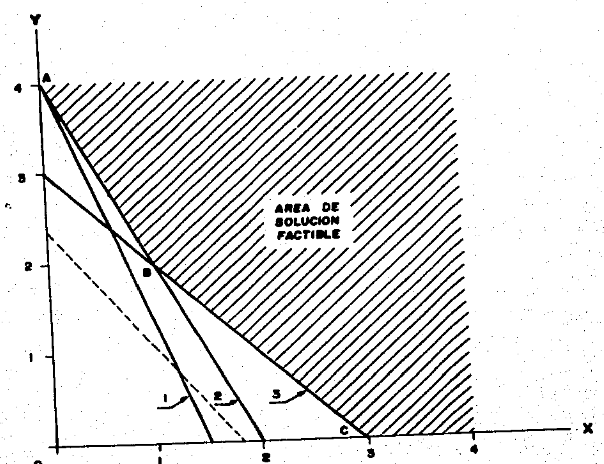
Cuando $X_2 = 0$

$8X_1 + 4(0) = 16$

$X_1 = 16 \div 8$

$X_1 = 2$

Segundo punto (2,0)



Recordemos que una de las formas de encontrar la solución, es graficando la función objetivo, ir trazando líneas paralelas, y en el caso de minimización, hasta tocar el punto más cercano al origen dentro del área de solución factible; o bien se pueden ir probando cada uno de los puntos que limiten el área, en sus esquinas. Grafiquemos la función objetivo:

$$Z = 400X_1 + 300X_2$$
$$700 = 400X_1 + 300X_2$$

Suponiendo un saco de cada alimento, nos da un costo de $ 700.

Cuando $X_1 = 0$	*Cuando* $X_2 = 0$
$700 = 400\,(0) + 300X_2$	$700 = 400X_1 + 300\,(0)$
$X_2 = 700 \div 300$	$X_1 = 700 \div 400$
$X_2 = 2.33$	$X_1 = 1.75$
Primer punto (0,2.33)	*Segundo punto (1.75,0)*

Llevemos la recta paralelamente hasta el punto más cercano, al origen, que este dentro del área de solución, y veremos que es el punto B (1,2), el que nos da la solución, verifiquemos por medio de ecuaciones simultáneas los valores numéricos.

De 1 y 3:

Por sustitución:

$$5X_1 + 5X_2 = 15 \; ..... \; 1$$
$$8X_1 + 4X_2 = 16 \; ..... \; 3$$

De 1:

$$5X_2 = 15 - 5X_1$$
$$X_2 = 3 - X_1$$

De 1 en 3:

$$8X_1 + 4\ (3 - X_1) = 16$$
$$8X_1 + 12 - 4X_1 = 16$$
$$4X_1 = 16 - 12$$
$$X_1 = 4 \div 4 = 1$$

En 1

$$X_2 = 3 - 1$$
$$X_2 = 2$$

Por lo tanto el punto B nos queda (1,2)
Se sustituye en la función objetivo

$$Z = 400\ (1) + 300\ (2)$$
$$Z = 400 + 600$$
$$Z = \$\ 1{,}000$$

Probemos las esquinas

Punto A (0,4)
$Z = 400\ (0) + 300\ (4)$
$= \$\ 1{,}200$

Punto C (3,0)
$Z = 400\ (3) + 300\ (0)$
$= \$\ 1{,}200$

La solución final la encontramos en el punto B, en donde se considera un saco del alimento A y dos sacos del alimento B, con un costo mínimo de $ 1,000. Por último comprobemos si se han cumplido los límites de las restricciones.

Punto B (1,2)

De 1

$$5X_1 + 5X_2 \geqslant 15$$
$$5(1) + 5(2) = 15$$
$$5 + 10 = 15$$
$$15 = 15$$

De 2

$$16(1) + 6(2) = 24$$
$$16 + 12 = 24$$
$$28 = 24$$

De 3

$$8(1) + 4(2) = 16$$
$$8 + 8 = 16$$
$$16 = 16$$

Casos Especiales del Método Gráfico.

Problemas con restricciones contradictorias

Cuando nos encontramos restricciones contradictorias, los problemas lineales no tienen solución posible.

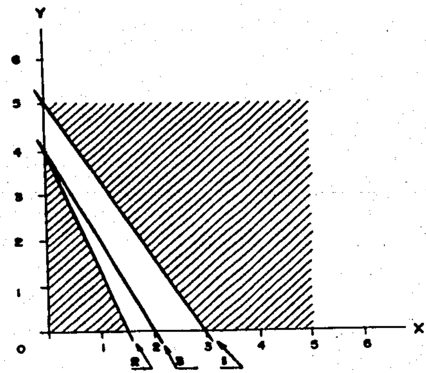
Supongamos que en el ejercicio anterior, se nos dice que las unidades de carbohidratos y proteínas no deben exceder de 24 y 16 respectivamente y que en el alimento B, se tienen 3 unidades de grasas.

$$\text{Min } Z = 400X_1 + 300X_2$$

Sujeto a:

$$5X_1 + 3X_2 \geq 15 \qquad P1\ (0,5) \quad P2\ (3,0)$$
$$16X_1 + 6X_2 \leq 24 \qquad P1\ (0,4) \quad P2\ (1,5,0)$$
$$8X_1 + 4X_2 \leq 16 \qquad P1\ (0,4) \quad P2\ (2,0)$$

Si graficamos tenemos:



Existen dos áreas sombreadas, lo que nos indica que no se puede encontrar valores de X_1 y X_2 al mismo tiempo en las dos áreas, por lo tanto no hay solución posible.

Problemas con soluciones optimas no acotadas.

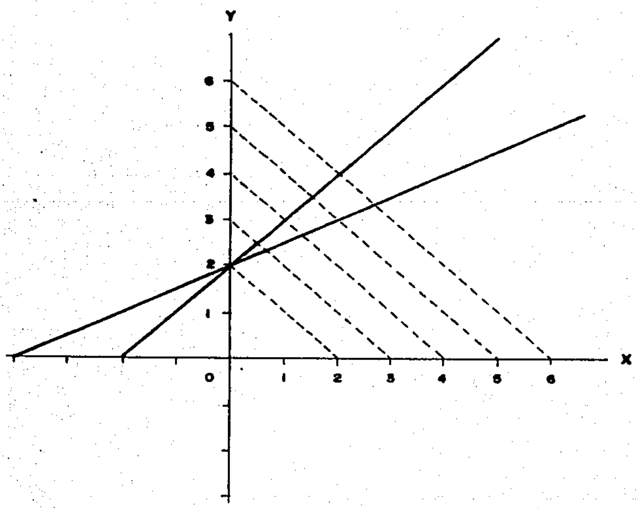
Supongase la siguiente expresión matemática:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 2X_2 \qquad P1\ (0,2) \quad P2\ (2,0)$$

Sujeto a:

$$- 4X_1 + 4X_2 \leq 8 \qquad P1 \ (0,2) \quad P2 \ (-2,0)$$
$$- 2X_1 + 4X_2 \leq 6 \qquad P1 \ (0,2) \quad P2 \ (-4,0)$$

Grafiquemos las restricciones y la función objetivo y tenemos:



En la gráfica no hay límite que nos marque el área de factibilidad. Es un área abierta, en donde la función objetivo conforme se mueve a la derecha, su valor se incrementa, pero en estas condiciones el valor óptimo es infinito.

Problemas que tienen múltiples valores óptimos.

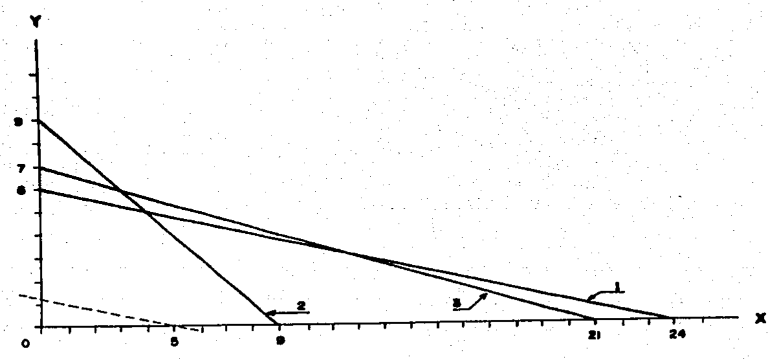
Se tiene:

$$Max\ Z = 2X_1 + 8X_2 \qquad P1\ (0,1.25) \quad P2\ (5,0)$$

Sujeto a:

$$2X_1 + 8X_2 \leq 48 \qquad P1\ (0,6) \qquad P2\ (24,0)$$
$$2X_1 + 2X_2 \leq 18 \qquad P1\ (0,9) \qquad P2\ (9,0)$$
$$2X_1 + 6X_2 \leq 42 \qquad P1\ (0,7) \qquad P2\ (21,0)$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

Si graficamos:



Si recorremos la función objetivo, veremos que se superpone a la línea que representa la restricción 1, por lo que los posibles valores estan en el segmento A-B: cualquier punto comprendido en este segmento es el posible valor óptimo, *existen múltiples valores óptimos.*

Hasta aquí lo concerniente al método gráfico, veamos ahora el método algebraíco, que nos ofrece mayores posibilidades de resolver problemas lineales de mayor complicación.

Método Algebraíco.

La mejor forma de explicar y entender este método, será a través de un ejemplo.

Se tienen dos productos, 1 y 2, los cuales son procesados en tres tipos de máquinas, en el siguiente cuadro veremos el tiempo que requiere cada producto, en cada una de las máquinas:

	MAQUINAS A	B	C
Producto 1	2 hrs.	4 hrs.	-----
Producto 2	2 "	2 "	2 hrs.
tiempor disponible Mensual	800 hrs.	1,200 hrs	600 hrs.

El costo de cada unidad es de $1,000 para el producto 1 y $ 1,200 para el producto 2, teniendose una contribución del 50% sobre el costo para uno de los productos.

Se quiere saber cuántos productos se tienen que producir de cada uno, para maximizar la contribución.

El problema esta dado bajo condiciones de certeza.

Construcción de Modelo:

a) Determinación de alternativas

Cuántos productos 1 hacer y/o
Cuántos productos 2 hacer.

b) Identificación de variables de decisión.

X_1 *= Producto 1*
X_2 *= Producto 2*

c) Determinación de las Restricciones

Restricción de tiempo, no se pueden exceder de 800 hrs. de uso en la máquina A, 1,200 hrs. de la B y 600 hrs. en la C. Restricciones de no negatividad, ya que no se pueden producir números negativos de alguno de los productos.

d) Determinación de la función objetivo

Producir el número de productos (1 y 2) necesarios para obtener el máximo de ganancia.

e) Expresión matemática del problema

$$\text{Max } Z = 1{,}500X_1 + 1{,}800X_2$$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
2X_1 + 2X_2 &\leq 800 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1\\
4X_1 + 2X_2 &\leq 1.200 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2\\
2X_2 &\leq 600 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3\\
X_1 &\geq 0\\
X_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Solución al Modelo

El problema será resuelto por el método algebraíco.

El primer paso a seguir será el de convertir las tres desigualdades (restricciones) en ecuaciones, estó lo haremos añadiendo a cada desigualdad una variable de holgura que absorba el tiempo que no se ocupa en la máquina de que se traté identifiquemos las variables de holgura.

X_3 = *tiempo no usado en la máquina A*
X_4 = *tiempo no usado en la máquina B*
X_5 = *tiempo no usado en la máquina C*

La variable X_3, viene a representar el total de las horas menos el número de horas usadas en la elaboración de los productos en la máquina A, cayendo en el mismo razonamiento para las variables X_4 y X_5.

Tenemos:

$$
\begin{aligned}
2X_1 + 2X_2 + X_3 &= 800 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1\\
4X_1 + 2X_2 + X_4 &= 1,200 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2\\
2X_2 + X_5 &= 600 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3
\end{aligned}
$$

Si depejamos las variables de holgura, nos quedaría:

$$X_3 = 800 \quad - 2X_1 - 2X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ 1$$
$$X_4 = 1{,}200 \quad - 4X_1 - 2X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ 2$$
$$X_5 = 600 \quad - 2X_2 - \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 3$$

Las variables de holgura carecen de valor alguno, y dentro de la función objetivo nos quedaría así:

$$Z = 1{,}500X_1 + 1{,}800X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 8X_5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 4$$

Estas ecuaciones nos muestran la relación entre las variables de holgura y las demás variables, y nos ayudarán a encontrar la primera solución; suponemos 0 unidades del producto 1 y 0 unidades del producto 2, lo que nos quedaría en las ecuaciones:

$X_1 = 0$

$X_2 = 0$

$X_3 = 800 - 2(0) - 2(0) = 800$ *hrs. no usadas en la máquina A*

$X_4 = 1{,}200 - 4(0) - 2(0) = 1{,}200$ *hrs no usadas en la máquina B*

$X_5 = 600 - 2(0) = 600$ *hrs. no usadas en la máquina C*

Como nos daremos cuenta en esta primera solución, nos encontramos en el origen (0,0) y dentro de nuestra función objetivo quedaría:

$$Z = 1{,}500\ (0) + 1{,}800(0) + 0(800) + 0(1{,}200) + 0(600)$$
$$Z = 0$$

Aunque esta solución es factible (no hacer ninguno de los dos productos); financieramente no tiene ningún atractivo.

El segundo paso a realizar será el de observar si puede haber mejoramiento alguno a las ganancias; estó se podrá hacer fabricando alguno de los dos productos a cambio de todo el tiempo de las tres máquinas. Iniciemos por elaborar sólo aquel producto que de el mayor rendimiento, que en este caso sería el producto 2.

Máquina A

$$\frac{\text{800 hrs. disponibles}}{\text{2 hrs. por c/producto 2}} = \text{400 productos No. 2}$$

Máquina B

$$\frac{\text{1,200 hrs. disponibles}}{\text{2 hrs. por c/producto 2}} = \text{600 productos No. 2}$$

Máquina C

$$\frac{\text{600 hrs. disponibles}}{\text{2 hrs. por c/producto 2}} = \text{300 productos No. 2}$$

En la máquina A se tienen 800 hrs. disponibles, se necesitan 2 hrs. para hacer cada unidad del producto 2, el número de productos que se pueden terminar en esta máquina, son 400 en tanto en la máquina B y C se terminarían 600 y 300 respectivamente.

El número de productos 2 que se pueden producir en las 3 máquinas para obtener productos terminados es de 300, $X_2 = 300$*, ya que las máquinas A y B tienen más capacidad, la máquina C unicamente tiene capacidad para 300; este valor lo sustituiremos en las ecuaciones 1, 2 y 3, y los valores resultantes serán el nuevo tiempo no usado en las máquinas.*

$$X_3 = 800 - 2X_1 - 2X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$
$$X_3 = 800 - 2(0) - 2(300)$$
$$X_3 = 800 - 600$$
$$X_3 = 200$$
$$X_4 = 1{,}200 - 4X_1 - 2X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$
$$X_4 = 1{,}200 - 4(0) - 2(300)$$
$$X_4 = 1{,}200 - 600$$
$$X_4 = 600$$
$$X_5 = 600 - 2(X_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3$$
$$X_5 = 600 - 2(300)$$
$$X_5 = 600 - 600$$
$$X_5 = 0$$

Nuestra segunda solución quedaría:

$X_1 = 0$
$X_2 = 300$
$X_3 = 200$ hrs no usadas en la máquina A
$X_4 = 600$ hrs no usadas en la máquina B
$X_5 = 0$ hrs no usadas en la máquina C
Sustituyendo en la función objetivo:

$$Z = 1.500(0) + 1{,}800(300) + 0(200) + 0(600) + 0(0)$$
$$Z = \$\ 540{,}000$$

Será esta la máxima contribución?. sigamos el procedimiento para encontrar la respuesta, pero antes haremos algunos ajustes, ya que tenemos que tomar en cuenta que en este momento ya se estan elaborando 300 productos 2 y el tiempo disponible en las 3 máquinas ha variado, al grado tal, que en la máquina C el número de horas disponibles es de cero; por lo que debemos reflejar este hecho y las ecuaciones deben ser cambiadas, empezaremos con la ecuación de la máquina C cuyo tiempor disponible es cero.

$$X_5 = 600 - 2X_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3$$
$$2X_2 = 600 - X_5$$
$$X_2 = 300 - 1/2X_5 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5$$

Si sustituimos el valor de X_2 en las ecuaciones 1 y 2 los nue-- vos valores para X_3 y X_4 serían:

$$X_3 = 800 - 2X_1 - 2X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$
$$X_3 = 800 - 2X_1 - 2(300 - 1/2\ X_5$$
$$X_3 = 800 - 2X_1 - 600 + X_5$$
$$X_3 = 200 - 2X_1 + X_5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6$$

$$X_4 = 1{,}200 - 4X_1 - 2X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2$$
$$X_4 = 1{,}200 - 4X_1 - 2(300 - 1/2X_5)$$
$$X_4 = 1{,}200 - 4X_1 - 600 + X_5$$
$$X_4 = 600 - 4X_1 + X_5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7$$

Debemos notar que las cantidades aparecidas a la derecha del signo igual son las econtradas en la segunda solución, lo que nos viene a significar que se ha restado el tiempo de producción de las 300 unidades del producto 2 que se estan produciendo en este momento, del tiempo disponible de las máquinas. Los valores X_2, X_3 y X_4 se sustituyen en la función objetivo.

$$Z = 1{,}500X_1 + 1{,}800(300 - 1/2X_5) + 0(200 - 2X_1 + X_5) + 0(600 - 4X_1 + X_5) + 0X_5$$
$$Z = 1{,}500X_1 + 540{,}000 - 900X_5$$
$$Z = 540{,}000 + 1{,}500X_1 - 900X_5$$

Esta última expresión que hemos encontrado a partir de la función objetivo nos muestra que pueden obtenerse más de 540,000 de ganancia y esto se observa en el signo más, que nos indica una utilidad adicional de $1,500 por cada unidad del producto 1 que se produzca. Los 900 en esta ecuación nos indica que si se toma una hora de la máquina C para otro producto, nos costará $ 900, y para probarlo, veamos en la segunda solución: en donde se fabricarán 300 us. del producto 2 que requieren 2 hrs. de la máquina, si se pierde una hora de la máquina, se pierde la mitad de un producto, y si la contribución del producto es de $ 1,800, pero se pierde la mitad, se pierden $ 900, veamos ahora cuántos productos 1 se habrán de elaborar.

La manera como va a obtenerse es la siguiente: recordemos que en la máquina A, tanto el producto 1 y 2 necesitan de 2 hrs., si dividimos las 200 hrs. sobrantes entre el número de horas que requiere el producto 1 para su elaboración tenemos:

$$\frac{\text{200 hrs. disponibles en la máquina A}}{\text{2 hrs por cada producto 1}} = \text{100 productos No. 1}$$

En la máquina B, para el producto 1 se necesitan 4 hrs., si se tienen 600 hrs. disponibles:

$$\frac{\text{600 hrs. disponibles en la máquina B}}{\text{4 hrs. por cada producto 1}} = \text{150 productos No. 1}$$

En cuanto a la máquina C, el producto 1 no utiliza tiempo por-lo que en esta máquina tan sólo se fabrican productos 2.

En este caso la máquina A es la que limita la fabricación de 100 us. del producto 1.

La forma simplificada de realizar las anteriores operaciones, es, tomando de las ecuaciones 5,6 y 7 (teniendo cuidado de verificar a que máquina corresponde), los dos términos que se encuentran a la derecha del signo igual, dividiendo la primera cantidad entre la segunda, (las horas disponibles entre el número de horas que requiera el producto).

Sustituimos los valores en la ecuaciones:

$X_1 = 100 \quad X_3 = 0 \quad X_4 = 0 \quad X_5 = 0$

$X_2 = 300 - 1/2X_5$ 5
$X_2 = 300 - 1/2(0)$
$X_2 = 300$ *unidades del producto 2*

$X_3 = 200 - 2X_1 + X_5$ 6
$X_3 = 200 - 2(100) + 0$
$X_3 = 0$

$X_4 = 600 - 4X_1 + X_5$ 7
$X_4 = 600 - 4(100) + 0$
$X_4 = 600 - 400$
$X_4 = 200$

La tercera solución quedaría
$X_1 = 100$ *unidades del producto 1*
$X_2 = 300$ *unidades del producto 2*
$X_3 = 0$ *hrs. no usadas en la máquina A*
$X_4 = 200$ *hrs. no usadas en la máquina B*
$X_5 = 0$ *hrs. no usadas en la máquina C*

En la función objetivo:

$$Z = 1{,}500(100) + 1{,}800(300) + 0(0) + 0(200) + 0(0)$$
$$= 150{,}000 + 540{,}000$$
$$= \$\ 690{,}000$$

Se supone la elaboración de 100 unidades del producto 1 y 300 unidades del producto 2, habiendo un tiempo sobrante de 200 hrs. en la máquina B, y de nuevo nos preguntaríamos si está es la máxima contribución, pero antes de contestar, recordemos que es necesario hacer algunos ajustes, ya que en estos momentos se estan haciendo 100 productos del tipo 1.

De las ecuaciones 6 y 7

$X_3 = 200 - 2X_1 + X_5$ 6
$2X_1 = 200 - X_3 + X_5$
$X_1 = 100 - 1/2X_3 + 1/2X_5$ .. 8

$X_4 = 600 - 4X_1 + X_5$ 7
$4X_1 = 600 - X_4 + X_5$
$X_1 = 150 - 1/4X_4 + 1/4X_5$ ..9

Se sustituye cualquiera de las dos ecuaciones en la ecuación 5, pero como el valor de X_1 no aparece en la ecuación, queda igual

$X_2 = 300 - 1/2X_5$ 5
$X_1 = 100 - 1/2X_3 + 1/2X_5$ 8

Se ha escogido la ecuación 8 por ser la que nos representa las 100 unidades del producto 1.

Ya que en base a la tercera solución se han desarrollado las ecuaciones necesarias se sustituye en la función objetivo los valores de X_1 y X_2 (ecuaciones 5 y 8).

$Z = 1{,}500(100 - 1/2X_3 + 1/2X_5) + 1{,}800\ (300-1/2X_5) + 0(0) +$
$0(0) + 0(0)$

$Z = 150{,}000 - 750X_3 + 750X_5 + 540{,}000 - 900X_5$

$Z = 690{,}00 - 750X_3 - 150X_5$

Esta última ecuación nos indica que no puede haber mayores ganancias, los signos negativos, es muestra de ello.

Se deben producir 100 unidades del producto 1 y 300 del producto 2.

Hemos encontrado la solución final, verifiquemos por último, si se han respetado las restricciones.

$$2X_1 + 2X_2 \leq 800 \quad \ldots\ldots \quad 1$$
$$2(100) + 2(300) = 800$$
$$200 + 600 = 800$$
$$800 = 800$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 1{,}200 \quad \ldots\ldots \quad 2$$
$$4(100) + 2(300) \leq 1{,}200$$
$$400 + 600 \leq 1{,}200$$
$$1{,}000 \leq 1{,}200$$

(en la máquina B quedaron 200 hrs. sin usar)

$$2X_2 \leq 600$$
$$2(300) = 600$$
$$600 = 600$$

Se cumple con las restricciones y por lo tanto, está es nuestra máxima contribución. Sería conveniente resolver este problema por el método gráfico para comprobar el resultado.

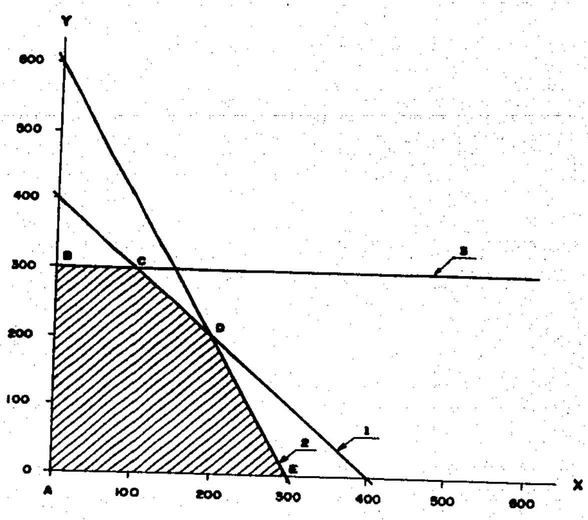
Expresión matemática:

$$Max\ Z = 1{,}500X_1 + 1{,}800X_2$$

Sújeto a:

$$2X_1 + 2X_2 \leq 800$$
$$4X_1 + 2X_2 \leq 1{,}200$$
$$2X_2 \leq 600$$

No es competencia de este método, volver a explicar el método gráfico por lo que se presentará unicamente la gráfica y la solución final.



La resolución de ecuaciones simultáneas nos da como punto óptimo C (100,300).

Hagamos ahora, otro ejercicio que nos ayude a entender mejor este método.

Una fábrica de camisas produce dos tipos diferentes, una de lana y otra de algodón, la confección de las camisas se hace a través de tres departamentos, en la siguiente tabla se muestra el tiempo que se requiere para su confección, y el tiempo disponible por mes.

	Departamentos		
	1	2	3
Camisas de Lana	1.0	2.0	3.0
Camisas de algodón	2.0	1.0	3.0
Tiempo disponble - por mes	1,400	1,400	1,500

La ganancia por camisa es de \$ 1,500 para la camisa de lana y \$ 1,000 para la de algodón. Se quiere saber cuantas camisas se tienen que hacer de cada una para maximizar las ganancias.

El problema esta dado bajo condiciones de certeza.

Construcción del Modelo.

a) Determinación de alternativas.

Cuántas camisas de lana hacer y/o
Cuántas camisas de algodón.

b) Identificación de variables de decisión.

X_1 = *Camisas de lana*
X_2 = *Camisas de algodón*

c) Determinación de las restricciones

Restricción de tiempo, no puede exceder de 1,400 para el departamento 1 y 2 (para cada uno) y 1,500 para el departamento 3.

Restricción de no negatividad.

d) Determinación de la función objetivo .

Producir el número de camisas necesarias, para obtener la máxima ganancia.

e) Expresión matemática.

$$\text{Max } Z = 1{,}500X_1 + 1{,}000X_2$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 1{,}400 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ 2X_1 + X_2 &\leq 1{,}400 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2 \\ 3X_1 + 3X_2 &\leq 1{,}500 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución al Modelo

Identifiquemos las variables de holgura y convirtamos las desigualdades en ecuaciones.

X_3 = *Tiempo no usado en el departamento* 1
X_4 = *Tiempo no usado en el departamento* 2
X_5 = *Tiempo no usado en el departamento* 3

$$1,400 = X_1 + 2X_2 + X_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$
$$1,400 = 2X_1 + X_2 + X_4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2$$
$$1,500 = 3X_1 + 3X_2 + X_5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3$$

Despejamos las variables de holgura:

$$X_3 = 1,400 - X_1 - 2X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$
$$X_4 = 1,400 - 2X_1 - X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2$$
$$X_5 = 1,500 - 3X_1 - 3X_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3$$

Nuestra primer solución quedaría:

$X_1 = 0$
$X_2 = 0$
$X_3 = 1,400 - (0) - 2(0) = 1,400$ *hrs. no usadas en el depto. 1*
$X_4 = 1,400 - 2(0) - (0) = 1,400$ *hrs. no usadas en el depto. 2*
$X_5 = 1,500 - 3(0) - 3(0) = 1,500$ *hrs. no usadas en el depto. 3*

Sustituyendo en la función objetivo y recordando que las variables de holgura no tienen valor.

$$Z - 1,500X_1 + 1,000X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 \ldots\ldots\ldots \quad 4$$
$$Z = 1,500(0) + 1,000(0) + 0(1,400) + 0(1,400) + 0(1,500)$$
$$Z = \$\ 0$$
Nos encontramos en el origen (0,0)

Elegimos el producto que reporte mayores ganancias para usar el tiempo no usado en los deptos.

Departamento 1

$$\frac{\text{1,400 hrs. disponibles}}{\text{1 hr. por us. de la camisa de lana}} = \text{1,400 camisas de lana}$$

Departamento 2

$$\frac{\text{1,400 hrs. disponibles}}{\text{2 hrs. por us. de la camisa de lana}} = \text{700 camisas de lana}$$

Departamento 3

$$\frac{\text{1,500 hrs. disponibles}}{\text{3 hrs. por us. de la camisa de lana}} = \text{500 camisas de lana}$$

Se obtienen los nuevos tiempos no usados de los deptos.

$X_3 = 1{,}400 - X_1 - 2X_2$ 1
$X_3 = 1{,}400 - 500 - 2(0)$
$= 900$
$X_4 = 1{,}400 - 2X_1 - X_2$ 2
$X_4 = 1{,}400 - 2(500) - 0$
$= 400$
$X_5 = 1.500 - 3X_1 - 3X_2$ 3
$X_5 = 1{,}500 - 3(500) - 3(0)$
$= 0$

La segunda solución quedaría:

$X_1 = 500$
$X_2 = 0$
$X_3 = 900$ hrs. no usadas en el depto. 1
$X_4 = 400$ hrs. no usadas en el depto 2
$X_5 = 0$ hrs no usadas en el depto. 3

En la función objetivo

$Z = 1{,}500(500) + 1{,}000(0) + 0(900) + 0(400) + 0(0)$
$Z = \$\ 750{,}000$

Hagamos los ajustes necesarios para saber si es la máxima contribución que se pueda obtener.

$$X_5 = 1{,}500 - 3X_1 - 3X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3$$
$$3X_1 = 1{,}500 - 3X_2 - X_5$$
$$X_1 = 500 - X_2 - 1/3X_5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5$$

Sustituyendo el valor de X_1 en las ecuaciones 1 y 2

$$X_3 = 1{,}400 - X_1 - 2X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$
$$X_3 = 1{,}400 - (500 - X_2 - 1/3X_5) - 2X_2$$
$$X_3 = 1{,}400 - 500 + X_2 + 1/3X_5 - 2X_2$$
$$X_3 = 900 - X_2 + 1/3X_5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6$$

$$X_4 = 1{,}400 - 2X_1 - X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2$$
$$X_4 = 1{,}400 - 2(500 - X_2 - 1/3X_5) - X_2$$
$$X_4 = 1{,}400 - 1{,}000 + 2X_2 + 2/3X_5) - X_2$$
$$X_4 = 400 + X_2 + 2/3X_5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7$$

Pongamos los valores de X_1, X_3 y X_4, encontrados en la segunda solución, en la función objetivo.

$$Z = 1{,}500(500 - X_2 - 1/3X_5) + 1{,}000X_2 + 0(900 - X_2 + 1/3X_5)$$
$$+ 0(400 + X_2 + 2/3X_5) + 0(0)$$
$$Z = 750{,}000 - 1{,}500X_2 - 500X_5 + 1{,}000X_2$$
$$Z = 750{,}000 - 500X_2 - 500X_5$$

Esta expresión nos indica que sí es la máxima contribución que se puede obtener, y que no es posible cualquier ganancia adicional; estó, lo demuestra el signo negativo de X_2; el producir una camisa de algodón, sacrificando una, o parte de una camisa de lana, nos acarrería pérdidas. Si dejamos de producir una camisa de lana, que nos produce una ganancia de 1,500 por producir una camisa de algodón que nos reporta 1,000, *estaremos perdiendo 500, en cuanto a la variable de holgura X_5 nos indica que por cada hora que no se produzca en el depto. 3 se perderán 500.*

La solución final es producir 500 camisas de lana y no es conveniente que se produzcan de algodón bajo estas condiciones.

Comprobemos si no se han excedido los límites de las restricciones.

$$X_1 + 2X_2 \leq 1{,}400 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1$$
$$500 + 2(0) \leq 1{,}400$$
$$500 + 0 \leq 1{,}400$$
$$500 \leq 1{,}400$$

$$2X_1 + X_2 \leq 1{,}400 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2$$
$$2(500) + 0 \leq 1{,}400$$
$$1{,}000 \leq 1{,}400$$

$$3X_1 + X_2 \leq 1{,}500 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3$$
$$3(500) + 0 \leq 1{,}500$$
$$1{,}500 = 1{,}500$$

Hagamos ahora un caso de minimización, retomemos el caso expuesto en el método gráfico.

Expresión Matemática:

$$Min\ Z = 400X_1 + 300X_2$$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
5X_1 + 5X_2 &\geq 15 \quad \ldots\ldots\ 1\\
16X_1 + 6X_2 &\geq 24 \quad \ldots\ldots\ 2\\
8X_1 + 4X_2 &\geq 16 \quad \ldots\ldots\ 3\\
X_1 &\geq 0\\
X_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Solución al problema

Variables de Holgura:

X_3 = Variable de holgura para la primer restricción
X_4 = Variable de holgura para la segunda restricción
X_5 = Variable de holgura para la tercer restricción

$$
\begin{aligned}
Min\ Z = 400X_1 + 300X_2 - (0)X_3 - (0)X_4 - (0)X_5 \quad \ldots\ldots\ 4\\
5X_1 + 5X_2 - X_3 = 15 \quad \ldots\ldots\ 1\\
16X_1 + 6X_2 - X_4 = 24 \quad \ldots\ldots\ 2\\
8X_1 + 4X_2 - X_5 = 16 \quad \ldots\ldots\ 3
\end{aligned}
$$

El signo negativo de las variables de holgura, representa la cantidad en que X_1 y X_2 (multiplicado por sus coeficientes) excederán de 15, 24 y 16 respectivamente en cada una de las restricciones, en la solución final; en caso de X_1 y X_2 fueran igual a las cantidades antes mencionadas, y aún más si X_1 y X_2 son igual a cero, las variables de holgura serán igual a cero.

Primer solución:

$X_1 = 0$
$X_2 = 0$
$-X_3 = 15 - 5(0) - 5(0)$ .... 1 $\quad -X_3 = 15$
$-X_4 = 24 - 16(0) - 6(0)$ .... 2 $\quad -X_4 = 24$
$-X_5 = 16 - 8(0) - 4(0)$ .... 3 $\quad -X_5 = 16$

$$-X_5 = 16 - 8X_1 - 4X_2 \text{ .... } 3$$
$$-X_5 = 16 - 8(0) - 4(3)$$
$$-X_5 = 16 - 12$$
$$-X_5 = 4$$

La segunda solución quedaría:

$X_1 = 0$
$X_2 = 3$
$-X_3 = 0$
$-X_4 = 6$
$-X_5 = 4$

En la función objetivo.

$$\text{Min } Z = 400(0) + 300(3) + 0(0) + 0(6) + 0(4)$$
$$= \$900$$

Para los carbohidratos y proteínas aún no se ha cubierto el mínimo, por lo tanto esta no es nuestra solución final.

Representemos en las ecuaciones los 3 sacos de alimento B.

$$
\begin{aligned}
-X_3 &= 15 - 5X_1 - 5X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ 1 \\
5X_2 &= 15 - 5X_1 + X_3 \\
X_2 &= 3 - X_1 + 1/5X_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ 5 \\
-X_4 &= 24 - 16X_1 - 6X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ 2 \\
-X_4 &= 24 - 16X_1 - 6(3 - X_1 + 1/5X_3) \\
-X_4 &= 24 - 16X_1 - 18 + 6X_1 - 6/5X_3 \\
-X_4 &= 6 - 10X_1 - 6/5X_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ 6 \\
-X_5 &= 16 - 8X_1 - 4X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ 3 \\
-X_5 &= 16 - 8X_1 - 4(3 - X_1 - 1/5X_3) \\
-X_5 &= 16 - 8X_1 - 12 + 4X_1 - 4/5X_3 \\
-X_5 &= 4 - 4X_1 - 4/5X_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ 7
\end{aligned}
$$

En la función objetivo:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z &= 400(0) + 300(0) - 0(15) - 0(24) - 0(16) \\
&= \$\ 0
\end{aligned}
$$

Tomaremos para encontrar la segunda solución la variable X_2, que representa el alimento B, que es el de menor costo (recordemos que es un caso de minimización).

Grasas

$$\frac{\text{15 us mínimas del ingrediente}}{\text{5 us. que contiene cada saco}} = \text{3 sacos del alimento B}$$

Carbohidratos.

$$\frac{\text{24 us. mínimas del ingrediente}}{\text{6 us que contiene cada saco}} = \text{4 sacos del alimento B}$$

Proteínas

$$\frac{\text{16 us. mínimas del ingrediente}}{\text{4 us. que contienen cada saco}} = \text{4 sacos del alimento B}$$

Para cubrir los requisitos mínimos de los 3 ingredientes se tendrán que dar más de 3 sacos de alimento B, ya que tanto en carbohidratos como en proteínas, se cubren con 4 sacos, pero el mínimo de grasas se cubre con 3 sacos, y como se busca disminuir costos $X_2 = 3$

$$-X_3 = 15 - 5X_1 - 5X_2 \quad \ldots\ldots\ 1$$
$$-X_3 = 15 - 5(0) - 5(3)$$
$$-X_3 = 15-15$$
$$-X_3 = 0$$

$$-X_4 = 24 - 16X_1 - 6X_2 \quad \ldots\ldots\ 2$$
$$-X_4 = 24 - 16(0) - 6(3)$$
$$-X_4 = 24 - 18$$
$$-X_4 = 6$$

Sustituimos en la función objetivo:

$$\text{Min } Z = 400X_1 + 300(3 - X_1 + 1/5X_3) - 0(6 - 10X_1 - 6/5X_3)$$
$$-0(4 - 4X_1 - 4/5X_3) - 0X_5$$

$$\text{Min } Z = 400X_1 + 900 - 300X_1 - 60X_3$$
$$= 900 + 100X_1 - 60X_3$$

Aquí verificamos que está no es la solución final; el costo se elevará ya que no se han cubierto los requerimientos mínimos y se tiene que ocupar mayor alimentación. Veamos el alimento A.

Grasas

$$\frac{\text{3 sacos que se dan del alimento B}}{\text{1 saco de alimento B sacrificado por uno de A}} = \text{3sacos de A}$$

Carbohidratos

$$\frac{\text{6 us. que faltan para cubir el mínimo}}{\text{10 us sobrantes después de cubrir el mínimo (A)}} = \text{.6 de un saco A}$$

Proteínas

$$\frac{\text{4 us. que faltan para cubrir el mínimo}}{\text{4 us. sobrantes después de cubrir el mínimo (A)}} = \text{1 saco de A}$$

Aunque el mínimo en esta ocasión es .6, consideraremos 1 saco y así se cubren las necesidades de los dos ingredientes.

Sustituimos los valores en las ecuaciones.

$X_1 = 1 \qquad X_3 = 0 \qquad X_4 = 0 \qquad X_5 = 0$

$X_2 = 3 - X_1 + 1/5X_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5$

$X_2 = 3 - 1 + 1/5(0)$

$X_2 = 2$

$-X_4 = 6 - 10X_1 - 6/5X_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6$

$-X_4 = 6 - 10(1) - 6/5(0)$

$-X_4 = -4$

$-X_5 = 4 - 4X_1 - 4/5X_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7$

$-X_5 = 4 - 4(1) - 4/5(0)$

$-X_5 = 0$

La tercera solución quedaría:

$X_1 = 1$
$X_2 = 2$
$-X_3 = 0$
$-X_4 = -4$
$-X_5 = 0$

En la función objetivo..

$$\begin{aligned} Min\ Z &= 400(1) + 300(2) \\ &= 400 + 600 \\ &= \$\ 1{,}000 \end{aligned}$$

Será éste el costo mínimo posible, veamos.

De las ecuaciones 6 y 7

$$-X_4 = 6 - 10X_1 - 6/5X_3 \quad \ldots\ldots 6$$
$$10X_1 = 6 - 6/5X_3 + X_4$$
$$X_1 = 6/10 + 6/50X_3 + X_4 \ \ldots\ 8$$

$$-X_5 = 4 - 4X_1 - 4/5X_3 \ \ldots\ldots\ 7$$
$$4X_1 = 4 - 4/5X_3 + X_5$$
$$X_1 = 1 - 1/5X_3 + 1/4X_5 \ \ldots\ 9$$

Se sustituye la ecuación 9 en 5

$$X_2 = 3 - (1 - 1/5X_3 + 1/4X_5) + 1/5X_3$$
$$X_2 = 3 - 1 + 1/5X_3 - 1/4X_5 + 1/5X_3$$
$$X_2 = 2 + 2/5X_3 - 1/4X_5 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 10$$

Sustituimos las ecuaciones 9 y 10 en la función objetivo

$$\begin{aligned} Min\ Z &= 400(1-1/5X_3 + 1/4X_5) + 300(2 + 2/5X_3 - 1/4X_5) + 0(0) \\ &\quad + 0(0) + 0(0) \\ &= 400 - 80X_3 + 100X_5 + 600 + 120X_3 - 75X_5 \\ &= 1{,}000 + 40X_3 + 25X_5 \end{aligned}$$

El costo mínimo que se puede lograr es de \$ 1,000; los signos positivos de las variables X_3 y X_5 nos muestran que no es posible un costo menor; ya que incrementar unidades de algunos ingredientes nos elevarían los costos; verifiquemos ahora, si se cumple con las restricciones.

$$\begin{aligned}
5(1) + 5(2) &\geqslant 15 \\
5 + 10 &= 15 \\
15 &= 15 \\
16X_1 + 6X_2 &\geqslant 24 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2 \\
16(1) + 6(2) &= 24 \\
16 + 12 &= 24 \\
28 &= 24 \\
8X_1 + 4X_2 &\geqslant 16 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3 \\
8(1) + 4(2) &= 16 \\
8 + 8 &= 16 \\
16 &= 16
\end{aligned}$$

Por lo tanto está es nuestra solución final; un saco de alimento A y dos sacos de alimento B. Cumple con los requisitos mínimos a un costo mínimo.

En el método algebraico se puede considerar más de dos variables, está es una de las ventajas que tiene sobre el método gráfico, y por lo que puede ser de mayor utilidad, pero veremos el método simplex, que nos ofrece mayores ventajas.

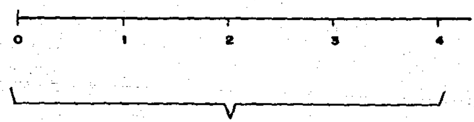
Antes de entrar de lleno a la explicación de este método daremos un breve repaso de vectores y matrices.

__Vectores.__

Un vector es una línea que tiene dirección y longitud suponiendose que todos los vectores parten de cero.

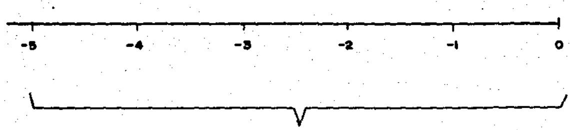
Ejemplo

Vector 1 = V_1 = (4)



$V_1 = (4)$

Vector 2 = V_2 = (-5)



$V_2 = (-5)$

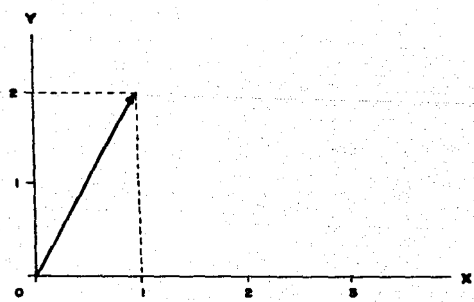
Estos vectores, tienen dirección; $V_1 = +$ y $V_2 = -$, y tienen longitud $V_1 = (4)$ y $V_2 = (-5)$.

Los vectores también pueden expresarse como vectores renglón $(a_1, a_2, a_3 \dots a_n)$ ó como vectores columnas $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Los vectores no sólo pueden tener un elemento y ser representados en una sola dimensión, también hay vectores con dos elementos que pueden ser representados en una gráfica, pero para ello se necesita un espacio bidimensional, ya que ahora son dos componentes.

Ejempo:

$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$



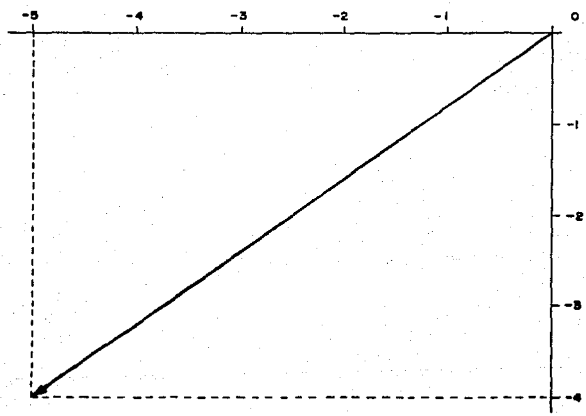
En el caso de tener un vector con tres componentes --

$$V_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

será necesario representarlo en una figura tridimensional, y si el número de componentes fuera mayor, la representación gráfica no sería posible.

Como ya vimos la dirección de los vectores no sólo es positiva, también puede ser negativa.

$V_5 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$



Los vectores pueden sumarse o restarse, siempre y cuando los vectores dados tengan la misma dimensión.

En nuestro caso, los vectores que manejaremos son de acuerdo al número de variables que se manejen.

Matrices.

Una matriz, es una disposición rectángular de números ordenados que se encuentran colocados en renglones y columnas. El objeto de una matriz es la de proporcionar información concisa y aceptable para manipulaciones matemáticas. Siendo considerada en su totalidad, una matriz no tiene valor numérico alguno. Un vector viene a representar un caso especial de matriz con un sólo renglón o una sola matriz.

Ejemplo:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ Matriz de 2 x 2

b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ Matriz de 3 x 2

El número de renglones y columnas, nos muestran el orden o la dimensión de la matriz. Por ejemplo la matriz a) es de 2x2 y la b) es de 3x2; el primer número de estas especificaciones representa el renglón y el segundo la columna. De aquí desprendemos que la dimensión de una matriz con m renglones y n columnas es de m x n. Los renglones se numeran de arriba a abajo y las columnas de izquierda a derecha.

Si tomamos la matriz B, la podemos descomponer en vectores de dos columnas, colocados juntos, o bien de tres renglones.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (3 \;\; 4) \\ (5 \;\; 1) \\ (4 \;\; 6) \end{matrix}$$

De lo que observamos que los vectores y matrices se interrelacionan.

Las matrices al igual que los vectores, pueden sumarse o restarse siempre y cuando tengan las mismas dimensiones. Tanto la suma como la resta, se realizan como sigue: el elemento de una matriz con el respectivo elemento de la otra matriz.

Ejemplo:

Suma

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & C \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

Resta

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -10 & -3 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Este breve repaso que hemos dado sobre vectores y matrices nos será de suma utilidad para mejor comprender el método simplex que a continuación explicamos.

Método Simplex

En páginas anteriores vimos el método algebraico, método que nos permite la solución de problemas más complicados, en las páginas siguientes veremos el método simplex que nos dará un procedimiento para la solución de problemas de mayor complejidad (solución que sería impracticable buscar por medio del método algebraico).

Este método fué desarrollado por Dantzing, es un procedimiento interativo, es decir, que se usa en forma sucesiva la misma rutina básica de cálculo, de lo que nos resultará una serie de soluciones, hasta encontrar la mejor. Este procedimiento utiliza algunos formatos que nos hará más fácil el trabajo, y además tendremos una visión clara de lo que se esta haciendo.

Antes de explicar el procedimiento de este método, explicaremos algunas ideas y conceptos que nos servirán de base, para su mejor entendimiento.

Cuando se tiene un problema cuyo objetivo es maximizar la función objetivo, con restricciones "$\leq$" y con condiciones de no negatividad "$\geq$"; se dice que este método de programación lineal esta en su forma canónica; que representado en su forma general nos queda:

$Max\ Z = CX$ *Función objetivo*

Sujeto a:

$AX \leq b$ *Restricciones*

$X \geq 0$ *Condiciones de no negatividad*

De donde:

C = *Vector de ingresos, ganancias, utilidades, etc.*

A = *Matriz de coeficientes tecnológicos de las restricciones ($m \times n$)*

b = *Vector de constantes de las restricciones (demanda recursos, etc).*

Y como notación matricial:

$$Max\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 \ \ldots\ldots\ C_nX_n$$

Sujeto a:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \quad \ldots\ldots\ldots + a_{1n}X_n \leqslant b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \quad \ldots\ldots\ldots + a_{2n}X_n \leqslant b_2 \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 \quad \ldots\ldots\ldots + a_{mn}X_n \leqslant b_m \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad X_n \geqslant 0
\end{array}
$$

Para resolver este tipo de problemas por el método simplex es necesario cambiar de la forma canónica a la forma estándar, esto es que cada una de las ecuaciones del problema, serán convertidas en igualdades, y para lograr esto introduciremos variables de holgura, cuyos valores deberá ser necesariamente positivos.

Tenemos:

$$aX \leqslant b$$

Se convierte en igualdad:

$$aX + h = b$$

De donde:

h = Variable de holgura y $h \geqslant 0$

Se deberá considerar una variable de holgura por cada restricción.

Nuestra nueva notación matricial, partiendo de la forma estándar quedaría:

$$Max\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 \quad \ldots\ldots \quad C_nX_n$$

Sujeto a:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \ldots\ldots + a_{1n}X_n + h_1 = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \ldots\ldots + a_{2n}X_n + h_2 = b_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 \ldots\ldots + a_{3n}X_n + h_3 = b_3$$

h = Vector de holguras
Tenemos dos clases de variables
n = Nümero de variables originales
m = Número de variables de holgura (igual al número de restricciones).
n + m = Número total de variables.

Veamos las reglas a seguir para la resolución de problemas mediante el método simplex, y que mejor que hacerlo a través de un ejemplo. Retomemos el caso de maximización, resuelto en páginas anteriores, por el método gráfico y por el método algebraico.

Expresión Matemática:

$$\text{Max } Z = 1{,}500X_1 + 1{,}800X_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 2X_1 + 2X_2 &\leq 800 \\ 4X_1 + 2X_2 &\leq 1{,}200 \\ 2X_2 &\leq 600 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Esta expresión nos representa la forma canónica del problema, convirtamosla en la forma entándar, basandonos *en las explicaciones dadas anteriormente.*

$$Z = 1{,}500X_1 + 1{,}800X_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 2X_1 + 2X_2 + X_3 &= 800 \\ 4X_1 + 2X_2 + X_4 &= 1{,}200 \\ 2X_2 + X_5 &= 600 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

El siguiente paso es igualar la función objetivo a cero, de tal manera que todas las variables nos queden del mismo lado.

$$Z - 1{,}500X_1 - 1{,}800X_2 = 0$$

La forma como se desarrolla este método, para que sea más fácil y más práctico, es a través de tablas, llamadas "tableaus", existiendo dos formatos diferentes, que son:

1) *Formato horizontal*
2) *Formato condesado*

El ejemplo lo realizaremos por medio de los dos formatos, desarrollemos el formato horizontal en primer lugar.

En notación matricial tenemos:

Z	X	h	
1	-C	0	0
0	A	1	b

Cada ecuación significa un renglón en la tabla. Tenemos la expresión:

$$
\begin{array}{llllll}
Z - 1{,}500X_1 & + 1{,}800X_2 & & & = & 0 \\
2X_1 + & 2X_2 + X_3 & & & = & 800 \\
4X_1 + & 2X_2 + & X_4 & & = & 1{,}200 \\
 & 2X_2 + & & X_5 & = & 600
\end{array}
$$

Renglón	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
Función objetivo	1	-1,500	-1,800	0	0	0	0
1	0	2	2	1	0	0	800
2	0	4	2	0	1	0	1,200
3	0	0	2	0	0	1	600

Matriz de Cuerpo (X_1, X_2) — *Matriz Identidad* (X_3, X_4, X_5)

En la parte de la matriz identidad, encontramos todas las variables de holgura (básicas), cuya columna es cero, a excepción de un elemento, que es donde aparece la unidad y su valor será el indicado en la columna de la derecha, siendo aquél que se encuentre en el renglón en donde aparezca dicha unidad; y en la matriz de cuerpo tenemos las variables originales (no básicas), cuyo valor será igual a cero..

En esta primer tabla se nos presenta la solución inicial, nos iremos ayudando del método gráfico y del algebraico para ubicar mejor este procedimiento.

Nuestra solución inicial quedaría:

$$X_1 = 0 \qquad X_3 = 800$$
$$X_2 = 0 \qquad X_4 = 1{,}200$$
$$X_5 = 600$$

Si observamos esta solución en el método gráfico, nos encontraríamos en el origen A(0,0); y si vemos el método algebraico, las variables de holgura nos muestran el tiempo no usado, con estos mismos valores; lo que demuestra que no se produce nada en estos momentos (por lo que no hay ganancias), y en las columnas de la matriz de cuerpo, estan ubicados los tiempos que se requieren por producto para su elaboración, en cada una de las máquinas.

Partiendo de esta primer tabla, buscaremos la segunda solución: a continuación las reglas necesarias para la transformación de dicha tabla.

1) *Se identifica dentro del renglón de la función objetivo, el elemento más negativo. En nuestro caso sería: -1,800; la columna en donde esta ubicado este elemento se denominará columna pivote y representá que X_2 pasara a formar parte de las variables básicas.*

2) *Se dividirán las cantidades de la última columna entre las cantidades positivas de la columna pivote, de sus respectivos renglones; se escogerá el cociente menor, y el renglón que proporcione este cociente, será nuestro renglón pivote.*

Renglón 1: $\frac{800}{2} = 400$

Renglón 2: $\frac{1,200}{2} = 600$

Renglón 3: $\frac{600}{2} = 300$

El menor cociente es 300, el renglón de la tercer restricción en nuestro renglón pivote. Si recordamos el método algebraico, lo que estamos haciendo aquí es dividir el tiempo disponible entre las horas que ocupa cada producto 2 en cada una de las máquinas.

3) El elemento que se encuentre en la intersección de la columna y renglón pivote, será el elemento pivote, 2 en este caso

Identifiquemos los puntos anteriores en la tabla.

Renglón	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
Función objetivo	1	-1,500	-1,800	0	0	0	0
1	0	2	2	1	0	0	800
2	0	4	2	0	1	0	1,200
3	0	0	2	0	0	1	600

Como la columna pivote será la nueva variable básica y el elemento pivote deberá convertirse en la unidad, los demás elementos tendrán un valor de cero.

3) *Para transformar el pivote en la unidad, se dividirá todo el renglón entre su valor:*

$\frac{0}{2} = 0$; $\frac{0}{2} = 0$; $\frac{2}{2} = 1$; $\frac{0}{2} = 0$; $\frac{0}{2} = 0$; $\frac{1}{2}$

$\frac{600}{2} = 300$

El nuevo renglón pivote queda:

0	0	1	0	0	1/2	300

4) *Para convertir a cero los demás elementos de la columna pivote; el nuevo renglón que obtuvimos, se multiplica por el elemento a convertir; se obtiene un nuevo renglón y se resta del renglón en donde se encontraba el elemento en la tabla anterior. Este procedimiento también puede hacerse de la siguiente manera: se multiplica el elemento por -1; después se multiplica por el renglón nuevo del punto anterior; al renglón que obtengamos le sumamos el renglón donde se encontraba el elemento.*

Elemento -1,800 Renglón Función objetivo

-1,800	(0	0	1	0	0	1/2	300)
=	0	0	-1,800	0	0	-900	-540,000

renglón del elemento	1	-1,500	-1,800	0	0	0	0
menos -	0	0	-1,800	0	0	-900	-540,000
nuevo renglón	1	-1,500	0	0	0	900	540,000

Elemento 2 renglón 1

2	(0	0	1	0	0	1/2	300)
=	0	0	2	0	0	1	600
	0	2	2	1	0	0	800
	− 0	0	2	0	0	1	600
nuevo renglón	0	2	0	1	0	-1	200

Elemento 2 renglón 2

2	(0	0	1	0	0	1/2	300)
=	0	0	2	0	0	1	600
	0	4	2	0	1	0	1,200
	− 0	0	2	0	0	1	600
nuevo renglón	0	4	0	0	1	-1	600

La segunda tabla quedaría:

renglón	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
Función Objetivo	1	-1,500	-1,800	0	0	900	540,000
1	0	2	0	1	0	-1	200
2	0	4	0	0	1	-1	600
3	0	0	1	0	0	1/2	300

Segunda solución:

$X_1 = 0 \qquad X_3 = 200$

$X_5 = 0 \qquad X_4 = 600$

$X_2 = 300$

Lo que nos dará una contribución de $ 540,000, produciendo 300 us. del producto 2. Si regresamos al método algebraico, la segunda solución es igual a la que obtuvimos a partir de esta segunda tabla y las variables de holgura nos muestran el tiempo no usado en las máquinas. Dentro de la representación estamos en el punto (0,300). Será está nuestra solución final?,

Dentro de esta segunda tabla tenemos aún un elemento negativo dentro del renglón de la función objetivo, por lo que, está no es nuestra solución final. Elaboremos una tercera tabla, mediante el mismo procedimiento anteriormente descrito.

1) *Elemento más negativo: -1,500; columna pivote; la que corresponde a* X_1.

2) *Determinación del renglón pivote:*

Renglón 1 $\frac{200}{2} = 100$

Renglón 2 $\frac{600}{4} = 150$

Renglón 3 $\frac{300}{0}$ = *no es posible esta operación*

Las horas que quedan disponibles, después de producir 300 us. del tipo 2 entre el número de horas que requiere el producto 1, es la operación que estamos realizando en este momento.

El renglón 1 será el renglón pivote, ya que es el de menor cociente.

3) Transformación del elemento y renglón pivote:

$$\frac{0}{2} = 0 \;;\; \frac{2}{2} = 1 \;;\; \frac{0}{2} = 0 \;;\; \frac{1}{2} \;;\; \frac{0}{2} = 0 \;;\; \frac{1}{2} \;;\; \frac{200}{2} = 100$$

El nuevo renglón queda:

0	1	0	1/2	0	-1/2	100

4) Conversión de los demás elementos de la columna:

Elemento -1,500

-1,500 (	0	1	0	1/2	0	-1/2	100)
=	0	-1,500	0	-750	0	750	-150,000
	1	-1,500	0	0	0	900	540,000
−	0	-1,500	0	-750	0	750	-150,00
	1	0	0	750	0	150	690,000

Elemento 4

4 (	0	1	0	1/2	0	-1/2	100)
	0	4	0	2	0	-2	400
	0	4	0	0	1	-1	600
−	0	4	0	2	0	-2	400
	0	0	0	-2	1	1	200

Elemento 0

= 0 (	0	1	0	1/2	0	-1/2	100)
	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	1/2	300
−	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	1/2	300

Tercer tabla:

Renglón	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
Función Objetivo	1	0	0	750	0	150	690,000
1	0	1	0	1/2	0	-1/2	100
2	0	0	0	-2	1	1	200
3	0	0	1	0	0	1/2	300

Tercera solución:

$$X_3 = 0 \qquad X_1 = 100$$
$$X_5 = 0 \qquad X_2 = 300$$
$$X_4 = 200$$

Dado que ya no encontramos números negativos en el renglón de la función objetivo, hemos llegado a la solución final, Producir 100 us. del tipo 1 y 300 us del tipo 2, lo que nos dará una ganancia de \$ 690,000. Las variables de holgura nos indican que la máquina A(X_3 = 0) y la máquina C(X_5 = 0) estan trabajando a toda su capacidad, en tanto en la máquina B(X_4 = 200) se tienen 200 hrs. no usadas. En el método gráfico nos encontraríamos en el punto (100,300), que nos dió el resultado final.

En la función objetivo:

$$Z = 1,500(100) + 1,800(300)$$
$$Z = 150,000 + 540,000$$
$$Z = \$\ 690,000$$

Formato Condensado.

Realizemos el ejemplo anterior, bajo este formato, para lograr su mejor comprensión.

Partimos de la forma estándar (para llegar a esta forma se dierón las explicaciones necesarias en páginas anteriores).

$$Max\ Z = 1{,}500X_1 + 1{,}800X_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 2X_1 + 2X_2 + X_3 &= 800 \\ 4X_1 + 2X_2 + X_4 &= 1{,}200 \\ 2X_2 + X_5 &= 600 \end{aligned}$$

Despejemos las variables de holgura e igualemos a cero la fun-- ción objetivo:

$$\begin{aligned} Z &= 1{,}500X_1 + 1{,}800X_2 \\ X_3 &= 800 - 2X_1 - 2X_2 \\ X_4 &= 1{,}200 - 4X_1 - 2X_2 \\ X_5 &= 600 - 2X_2 \end{aligned}$$

La notación matricial para este formato es la siguiente:

		$-X$
Z	0	$-C$
h	b	A

Al igual que en el formato anterior cada ecuación representa un renglón.

Veamos la primer tabla:

		$-X_1$	$-X_2$
Z	0	-1,500	-1,800
X_3	800	2	2
X_4	1,200	4	2
X_5	600	0	2

En este formato a diferencia del anterior no tenemos matriz indentidad, pero del lado izquierdo de la tabla están las variables de holgura, y su valor en la columna siguiente (variables básicas), las variables que se encuentran en la parte superior de la tabla tendrán un valor de cero(variables no básicas.)

Primera solución:

$X_1 = 0$ $\qquad$ $X_3 = 800$

$X_2 = 0$ $\qquad$ $X_4 = 1,200$

$X_5 = 600$

Nos encontramos en el origen A(0,0)

1) Se busca el elemento más negativo en el renglón de la función objetivo, que sería -1,800, X_2 se constituye en la columna - pivote.

2) Se encuentra el menor cociente:
Renglón 1 = 800 ÷ 2 = 400
Renglón 2 = 1,200 ÷ 2 = 600
Renglón 3 = 600 ÷ 2 = 300
El cociente menor es el del renglón 3, que será el renglón pi vote. La intersección entre renglón y columna privote será -- nuestro pivote: 2.

X_2 = *columna pivote;* X_5 = *renglón pivote; sus pocisiones se intercambian.*

Las reglas para transformar la primer tabla son las siguientes:

a) Se divide la unidad entre el pivote: 1/2; se convierte en su reciproco.

b) Los elementos de la columna pivote se transforman, multiplicando el elemento por -1 y dividiendolo entre el pivote.

elemento -1,800

$$\frac{-1{,}800\ (-1)}{2} = \frac{900}{2} = 450$$

Elemento 2

$$\frac{2\ (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Elemento 2

$$\frac{2\ (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

c) El renglón pivote se transforma; dividiendo el elemento entre el pirvote:

Elemento 600

$$\frac{600}{2} = 300$$

Elemento 0

$$\frac{0}{2} = 0$$

d) El resto de los elementos se transforman:

Al elemento a transformar se le resta; el resultado de restar al elemento en la intersección de su columna con el renglón pivote, el elemento en la intersección de su renglón con la columna pivote y dividirlo entre el pivote.

Elemento 0

$$0 - \left\{ \frac{(600)(-1,800)}{2} \right\}$$

$$0 - \left\{ - \frac{1,080000}{2} \right\}$$

$$0 + 540,000$$

$$540,000$$

Elemento -1,500

$$-1,500 - \left\{ \frac{(0)(-1,800)}{2} \right\}$$

$$-1,500 - \left\{ \frac{0}{2} \right\}$$

$$-1,500$$

Elemento 800

$$800 - \left\{ \frac{(600)(2)}{2} \right\}$$

$$800 - \left\{ \frac{1,200}{2} \right\}$$

$$200$$

Elemento 2

$$2 \quad - \left\{ \frac{0\ (2)}{2} \right\}$$

$$2 \quad - \left\{ \frac{0}{2} \right\}$$

$$2$$

Elemento 1,200

$$1,200 - \left\{ \frac{(600)\ (2)}{2} \right\}$$

$$1,200 - \left\{ \frac{1,200}{2} \right\}$$

$$1,200 - 600$$

$$600$$

Elemento 4

$$4 \quad - \left\{ \frac{(0)\ (2)}{2} \right\}$$

$$4 \quad - \left\{ \frac{0}{2} \right\}$$

$$4$$

La segunda tabla nos queda:

		$-X_1$	$-X_5$
Z	540,000	-1,500	450
X_3	200	2	1
X_4	600	4	1
X_2	300	0	1/2

De donde:

$$X_1 = 0 \qquad X_2 = 300$$
$$X_5 = 0 \qquad X_3 = 200$$
$$X_4 = 600$$

Los resultados obtenidos después de esta segunda tabla son iguales a los obtenidos en el formato anterior. Aún encontramos un elemento negativo en el renglón de la función objetivo; no es la solución final.

Elaboremos la tercer tabla;

1) Elemento más negativo: -1,500; columna pivote: X_1

2) Renglón pivote: renglón 1; elemento pivote: 2

a) nuevo elemento pivote: 1/2
b) nuevos elementos de la columna pivote:

Elemento - 1,500

$$\frac{-1{,}500\ (-1)}{2} = \frac{1{,}500}{2} = 750$$

Elemento 4

$$\frac{4,(-1)}{2} = \frac{-4}{2} = 2$$

Elemento 0

$$\frac{0\ (-1)}{2} = 0$$

c) nuevos elementos del renglón pivote:

$$\frac{200}{2} = 100 \qquad \frac{1}{2}$$

d) Transformación de los demás elementos:

Elemento 540,000

$$540{,}000 - \left\{\frac{(200)\ (-1{,}500)}{2}\right\}$$

$$540{,}000 - \left\{\frac{-\ 300{,}000}{2}\right\}$$

$$540{,}000 + 150{,}000$$

$$690{,}000$$

Elemento 450

$$450 - \left\{\frac{(1)\ (-1{,}500)}{2}\right\}$$

$$450 - \left\{\frac{(-1500)}{2}\right\}$$

$$450 + 750$$

$$1{,}200$$

Elemento 600

$$600 - \left\{\frac{(200)\ (4)}{2}\right\}$$

$$600 - \left\{\frac{800}{2}\right\}$$

$$600 - 400$$

$$200$$

Elemento 1

$$1 - \left\{\frac{(1)\ (4)}{2}\right\}$$

$$1 - 2$$

$$-1$$

Elemento 300

$$300 - \left\{\frac{(200)\ (0)}{2}\right\}$$

$$300$$

Elemento 1/2

$$1/2 - \left\{\frac{(1)\ (0)}{2}\right\}$$

$$1/2$$

Tercer tabla:

		$-X_3$	$-X_5$
Z	690,000	750	1,200
X_1	100	1/2	1/2
X_4	200	2	-1
X_2	300	0	1/2

Llegamos a nuestra solución final:

$$X_1 = 100 \qquad X_3 = 0$$
$$X_2 = 300 \qquad X_4 = 200$$
$$X_5 = 0$$

El utilizar este formato nos da la ventaja de ser más compacto que el horizontal, pero quedará a gusto de la persona, usar uno u otro.

Caso de minimización

Expresión matemática:

$$Min\ Z = 400X_1 + 300X_2$$

Sujeto a:

$$5X_1 + 5X_2 \geqslant 15 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1$$
$$16X_1 + 6X_2 \geqslant 24 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2$$
$$8X_1 + 4X_2 \geqslant 16 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3$$

Recordemos que para la resolución de problemas de programación lineal, por el método simplex, se parte de la forma canónica: maximización con restricciones "$\leqslant$"; el problema anterior no cumple con esta forma. Por lo que a continuación daremos las reglas necesarias para transformar cualquier problema de programación a la forma canónica.

1) *La maximimización de una función objetivo, es equivalente a la minimización de la expresión negativa de la función, así como la minimización de una función objetivo es equivalente a la miximización de la expresión negativa de la función.*

   Ejemplo:

   a) Max $Z = 3X_1 + 2X_2$ es equivalente a:
      Min $-Z = -3X_1 - 2X_2$
   b) Min $Z = -6X_1 + 15X_2$ es equivalente a:
      Max $-Z = 6X_1 - 15X_2$

2) *Cuando se encuentra una desigualdad en una dirección determinada, se multiplica por -1, los dos miembros de la desigualdad, para encontrar su equivalencia.*

   Ejemplo:

   a) $2X_1 + 3X_2 \leqslant 20$ es equivalente a:
      $-2X_1 - 3X_2 \geqslant -20$
   b) $10X_1 - 8X_2 \geqslant 10$ es equivalente a:
      $-10X_1 + 8X_2 \leqslant -10$

3) Cuando se encuentra una igualdad, se puede descomponer en dos desigualdades, en direcciones opuestas.

Ejemplo:

a) $3X_1 + 8X_2 = 30$ *es equivalente a:*

$$3X_1 + 8X_2 \leq 30$$
$$3X_1 + 8X_2 \geq 30$$

Apliquemos estas reglas a nuestro caso de minimización.
Se aplica la regla 1 para la función objetivo:

$$Min\ Z = 400X_1 + 300X_2 \text{ es equivalente a:}$$
$$Max\text{-}Z = -400X_1 - 300X_2$$

La regla 2 para las tres restricciones:

$$5X_1 + 5X_2 \geq 15 \text{ es equivalente a:}$$
$$-5X_1 - 5X_2 \leq -15$$
$$16X_1 + 6X_2 \geq 24 \text{ es equivalente a:}$$
$$-16X_1 - 6X_2 \leq -24$$
$$8X_1 + 4X_2 \geq 16 \text{ es equivalente a:}$$
$$-8X_1 - 4X_2 \leq -16$$

La expresión matemática nos queda:

$$Máx\ -Z = -400X_1 - 300X_2$$

Sujeto a:

$$-5X_1 - 5X_2 \leq -15$$
$$-16X_1 - 6X_2 \leq -24$$
$$-8X_1 - 4X_2 \leq -16$$

Forma estándar:

$$Max\ -Z = -400X_1 - 300X_2$$

Sujeto a:

$$- 5X_1 - 5X_2 + X_3 = -15$$
$$- 16X_1 - 6X_2 + X_4 = -24$$
$$- 8X_1 - 4X_2 + X_5 = -16$$

Usamos el formato condensado

		$-X_1$	$-X_2$
Z	0	400	300
X_3	-15	- 5	- 5
X_4	-24	-16	- 6
X_5	-16	- 8	- 4

Los valores quedarían:

$$X_1 = 0 \qquad X_3 = -15$$
$$X_2 = 0 \qquad X_4 = -24$$
$$X_5 = -16$$

Para resolver cualquier problema de programación lineal por medio del método simplex, una de las condiciones es que las variables de holgura tuvieran valores iguales o mayores acero, como no se cumple esta condición la solución no es factible, y tendremos que realizar modificaciones, para esto estudiaremos el método de penalización y el método dual simplex.

Método de Penalización.

En el caso de minimización, conforme a las reglas anteriormente expuestas, podemos cambiar la función objetivo a maximizar el negativo de dicha función, de esta manera damos el primer paso para llegar a la forma canónica. En cuanto a las restricciones podemos encontrarnos con dos tipos de restricciones, las que estan en forma de igualdad y las que tienen el signo "$\geqslant$". Cuando nos encontramos con restricciones en forma de igualdad como por ejemplo:

$$5X_1 + 5X_2 = 15$$

Cuando $X_1 = 0$ *y*
$X_2 = 0$ $\qquad 5(0) + 5(0) = 15$
$0 = 15$. *nos encontraríamos - con una contradicción, y para evitar estó, se debe introducir una "variable artificial" y para diferenciarlas de las variables de holgura, se le pondrá una barra en la parte superior y también deberá ponersele un subíndice, ya sea el siguiente al denominado a las variables originales o a las de holgura que se hubieran introducido. El valor de las variables artificiales deberá ser positivo.*

Cuando se ha introducido una variable artificial, se tiene que sustraer de la función objetivo y se le asignará a dicha variable un coeficiente que se denota con la letra "M".

Supongamos el caso de maximización realizado por el método simplex, pero con una restricción en forma de igualdad, ya que se decide que el tiempo sobrante del departamento 2 genera altos costos y tienen que ser utilizados. La expresión matemática nos quedaría:

$$Max\ Z = 1{,}500X_1 + 1{,}800X_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 2X_1 + 2X_2 &\leq 800 \\ 4X_1 + 2X_2 &= 1{,}200 \\ 2X_2 &\leq 600 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Se introduce la variable artificial y las de hólgura

$$Max\ Z = 1{,}500X_1 + 1{,}800X_2 - M\bar{X}_4$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 2X_1 + 2X_2 + X_3 &= 800 \\ 4X_1 + 2X_2 + \bar{X}_4 &= 1{,}200 \\ 2X_1 + \qquad X_5 &= 600 \end{aligned}$$

Se iguala a cero la función objetivo:

$$Z - 1{,}500X_1 - 1{,}800X_2 + M\bar{X}_4 = 0 \text{ y}$$

$M\bar{X}_4$ tiene ya signo positivo, construyamos la primer tabla:

Z	X_1	X_2	X_3	$\bar{X}_4$	X_5	
1	-1,500	-1,800	0	M	0	0
0	2	2	1	0	0	800
0	4	2	0	1	0	1,200
0	0	2	0	0	1	600

El siguiente paso es eliminar la M del renglón de la función objetivo; a la unidad que se encuentra en la columna de la variable artificial se multiplica por -M y se le suma la M del renglón de la función objetivo para cada uno de los elementos de este renglón, se procederá de igual forma:

Eliminación de M

$$1\ (-M) = -M + M$$
$$= 0$$

Elemento -1,500

$$4\ (-M) = -4M + (-1{,}500)$$
$$= -1{,}500\ -4M$$

Elemento -1,800

$$2\ (-M) = -2M + (-1{,}800)$$
$$= -2M\ -1{,}800$$
$$= -1{,}800\ -2M$$

Las columnas de X_3 y X_5 quedan en cero y el elemento de la columna de las constantes nos queda:

$$1{,}200\ (-M) = -1{,}200M + 0$$
$$= 1{,}200M$$

Segunda tabla:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
1	-1,500-4M	-1,800-2M	0	0	0	-1,200M
0	2	2	1	0	0	800
0	4	2	0	1	0	1,200
0	0	2	0	0	1	600

Ya que se ha eliminado el coeficiente de la variable artificial, se procede a resolver el problema por medio del método simplex, ya sea por el formato horizontal o por el condensado.

El otro tipo de restricción que podemos encontrar es con el signo "≥".

Tenemos:

$$5X_1 + 5X_2 \geq 15$$

Se aplica la regla y cambiamos

$$-5X_1 - 5X_2 \leq -15$$

pero de esta manera la variable de holgura nos quedaría negativa y no se puede aplicar el método simplex. Por lo que recurriremos a introducir una variable de holgura para obtener un igualdad:

$$5X_1 + 5X_2 - X_3 = 15$$

Cuando $X_1 = 0$ y $X_2 = 0$

$$5(0) + 5(0) - X_3 = 15$$
$$- X_3 = 15$$
$$X_3 = -15$$

La variable de holgura es negativa, se procederá igual que en el caso anterior; ya se tiene una igualdad, se introduce una variable artificial que se sustraerá de la función objetivo.

$$5X_1 + 5X_2 - X_3 + \bar{X}_4 = 15$$

En la función objetivo:

$$\text{Max } Z = X_1 + X_2 - \bar{X}_4$$

Enseguida se procedera a igualar la función objetivo a cero, se llena la primera tabla y se elimina el coeficiente "M" del renglón de la función objetivo y se aplica el método simplex.

En el caso de minimización que tenemos:

$$\text{Min } Z = 400X_1 + 300X_2$$

Sujeto a:

$$5X_1 + 5X_2 \geq 15$$
$$16X_1 + 6X_2 \geq 24$$
$$8X_1 + 4X_2 \geq 16$$

Tenemos tres restricciones con signo "$\geq$", las que tendríamos que convertir en igualdad y a las que introduciriamos las variables artificiales, además de las variables de holgura.

Serían una serie de cálculos que podremos evitar si utilizamos el método dual simplex que explicamos enseguida.

Método Dual Simplex.

Teoría de la Dualidad.

Primero entenderemos el concepto de dualidad, no nos será difícil dado que ya se han explicado algunos de sus principales preceptos.

La aplicación de la propiedad de dualidad nos será útil en tres distintas circunstancias. La primera de ellas, es cuando encontramos un problema de programación lineal, en donde se tiene más restricciones que variables, es decir más renglones que columnas; $m > n$; si consideramos que en la aplicación del método simplex se encuentra mayor dificultad a mayor número de restricciones (y no así de variables), veremos la conveniencia de tener el menor número posible de restricciones; $m < n$. Ejemplifiquemos lo anterior.

A cada problema de maximización le corresponde un problema único de minimización, o a la inversa; el primer problema se le conoce como problema principal o primal y al problema correspondiente, como problema dual; de hecho a los dos problema se les define como duales, estó es, porque los dos problemas se componen de los mismos datos, aunque ordenados de manera distinta.

Retomemos el caso resuelto por el método gráfico:

Expresión matemática:

$$\text{Max } Z = 1{,}400X_1 + 2{,}800X_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 + 1.5X_2 &\leq 20 \\ X_1 \qquad &\leq 12 \\ X_2 &\leq 8 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

El problema esta en la forma canónica y puede ser resuelto por el método simplex, pero aquí se trata de hacer uso de la teoría de la dualidad.

Para obtener un problema dual a partir de un problema primal se siguen las siguientes reglas:

1) Maximización de Función Objetivo, el dual será la minimización de la función objetivo, o a la inversa.

$$\text{Max } Z = 1{,}400X_1 + 2{,}800X_2 \quad \text{nos queda:}$$
$$\text{Min } Z' = 1{,}400X_1 + 2{,}800X_2$$

2) Se tiene un nuevo conjunto de variables (Y)

3) Los coeficientes de las restricciones que estan en los renglones, en el problema primal; pasarán a ser coeficientes de las restricciones en forma de columna, en el problema dual.

Problema primal:

$$\begin{aligned} X_1 + 1.5X_2 &\leq 20 \\ X_1 \qquad &\leq 12 \\ X_2 &\leq 8 \end{aligned}$$

Problema Dual

$$Y_1 + Y_2' + 0Y''_3$$
$$1.5Y_1 + 0Y_2' + Y_3$$

4) Si las restricciones son del tipo " $\leq$ ", se convertirán en restricciones del tipo "$\geq$", o a la inversa.

Problema primal:

$$\leq \ 20$$
$$\leq \ 12$$
$$\leq \ 8$$

Problema dual:

$$\geq \ 20$$
$$\geq \ 12$$
$$\geq \ 8$$

5) En el problema primal tenemos los coeficientes de la función objetivo que pasarán a ser las constantes en el problema dual, asimismo las constantes del problema primal pasan a ser coeficientes de la función objetivo en el problema dual.

Problema primal:

$$\text{Max } Z = 1{,}400X_1 + 2{,}800X_2$$

Sujeto a:

$$\geq \ 20$$
$$\geq \ 12$$
$$\geq \ 8$$

Problema dual:

$$Min\ Z' = 20Y_1 + 12Y'_2 + 8Y_3.$$

Sujeto a:

$$Y_1 + Y'_2 + 0Y'_3 \geq 1.400$$
$$1.5Y_1 + 0Y'_2 + Y'_3 \geq 2,800$$

6) Las condiciones de no negatividad, siguen existiendo en el problema dual.

$$Y_1 \geq 0$$
$$Y'_2 \geq 0$$
$$Y'_3 \geq 0$$

El problema dual nos queda:

$$Min\ Z' = 20\ Y_1 + 12\ Y'_2 + 8\ Y'_3$$

Sujeto a:

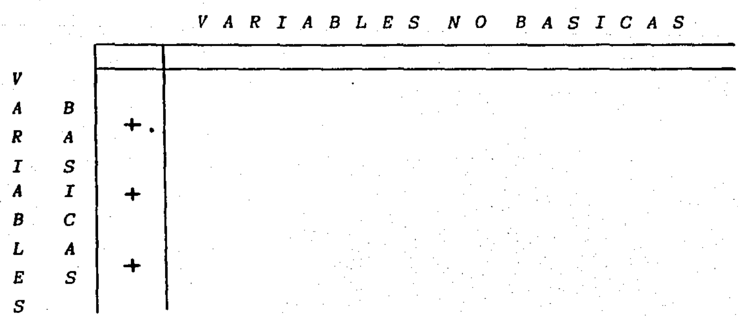
$$\begin{array}{rcl} y_1 + Y_2 & & \geq 1,400 \\ 1.5Y_1 + & Y'_3 & \geq 2,800 \\ Y_1 & & \geq 0 \\ & Y'_2 & \geq 0 \\ & Y'_3 & \geq 0 \end{array}$$

De donde: si en el problema primal tenemos m restricciones y n variables; en el problema dual, tenemos n restricciones y m variables, dicho en otras palabras, ahora manejamos tres variables y dos restricciones.

Dado que el problema dual nos presenta un problema de minimización, lo podemos resolver por el método de penalización, o bien lo resolveremos posteriormente por el método dual simplex.

Una segunda circunstancia que permite la aplicación de la propiedad de dualidad, es la resolución de problemas mediante un nuevo método que es el dual simplex, que nos permite mayores facilidades para la resolución de problemas de minimización.

Para resolver cualquier problema de programación lineal mediante el método simplex, es necesario que las variables básicas, (variables de holgura), tengan un valor mayor o igual a cero, es decir que exista factibilidad primal, lo que en la tabla veríamos:



Lo que nos indica que el valor de las constantes debe ser mayor o igual a cero.

En el método dual simplex no es necesario que exista factibilidad primal, con que exista factibilidad dual puede aplicarse el método; la factibilidad dual consiste en que, en el renglón de los coeficientes de la función objetivo; estós, deben ser mayores o iguales a cero.

V A R I A B L E S N O B A S I C A S

		+	+	+	+	+	+
V A R I A B L E S B A S I C A S							

Los pasos a seguir son los siguientes

1) Sí el problema no se encuentra en la forma canónica; mediante las reglas formuladas anteriormente se convierte cualquier problema a dicha forma. Sigamos las reglas con un ejemplo: tomemos el problema de minimización.

Forma canónica:

Min $Z = 400X_1 + 300X_2$	Max $-Z = -400X_1 - 300X_2$
Sujeto a:	Sujeto a:
$5X_1 + 5X_2 \geq 15$	$-5X_1 - 5X_2 \leq 15$
$16X_1 + 6X_2 \geq 24$	$-16X_1 - 6X_2 \leq 24$
$8X_1 + 4X_2 \geq 16$	$-8X_1 - 4X_2 \leq 16$

2) Se introducen las variables de holgura, obtenemos las igualdades y llenamos la primer tabla. Usaremos el formato condensado.

		$-X_1$	$-X_2$
Z	0	400	300
X_3	-15	-5	-5
X_4	-24	-16	-6
X_5	-16	-8	-4

No existe factibilidad primal, pero si hay factibilidad dual, puede aplicarse el método dual simplex.

3) Determinaremos el renglón pivote, que será el que tenga el elemento más negativo, (-24)

4) La columna pivote se obtiene dividiendo el coeficiente de la función objetivo entre el elemento respectivo del renglón y se escoge el cociente menor.

$$\frac{400}{16} = 25 \qquad\qquad \frac{300}{16} = 50$$

La intersección de la columna y el renglón, es el elemento pivote, (-16).

Observemos que en el método simplex primero se determina la columna pivote, en tanto en el dual simplex, primero fué el renglón pivote (propiedad de dualidad).

5) La transformación de la tabla se hace siguiendo las reglas del método simplex.

Segunda tabla:

		$-X_4$	$-X_2$
Z	-600	25	150
X_3	-7.5	-5/16	-3.125
X_1	1.5	-1/16	3/8
X_5	- 4	-1/2	-1

Solución:

$X_1 = 1.5$ $X_3 = -7.5$

$X_2 = 0$ $X_4 = 0$

$X_5 = -4$

En esta tabla no hay factibilidad primal, por lo tanto, aún no llegamos a la solución final. Llegaremos a la solución final cuando en la tabla exista tanto factibilidad primal como factibilidad dual.

Cuarta tabla:

		$-X_5$	$-X_3$
Z	-1,000	25	40
X_2	2	.25	-.4
X_1	1	25	.4
X_4	4	-2.5	.8

Esta tabla nos da la solución final, si hay factibilidad dual y factibilidad primal.

Solución:

$X_1 = 1$ $X_3 = 0$

$X_2 = 2$ $X_4 = 4$

$X_5 = 0$

La función objetivo en la forma canónica:

$$\text{Max } -Z = -400X_1 - 300X_2$$

Sustituimos los valores:

$$\begin{aligned} Max\ -Z &= -400(1) - 300(2) \\ -Z &= -400 - 600 \\ -Z &= -1{,}000 \end{aligned}$$

En el problema original:

$$\begin{aligned} Min\ Z &= 400(1) + 300(2) \\ Z &= \$\ 1{,}000 \end{aligned}$$

Recordemos el problema dual que se planteó en páginas anteriores; lo resolveremos por el método dual simplex.

Expresión Matemática:

$$Min\ Z' = 20Y_1 + 12Y_2 + 8Y_3$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} Y_1 + Y_2 \qquad &\geq 1{,}400 \\ 1.5Y_1 + \qquad Y_3 &\geq 2{,}800 \end{aligned}$$

La transformamos a la forma canónica, y se sigue el procedimiento, aquí presentamos la última tabla; que nos da la solución final.

		$-Y_4$	$-Y_2$	$-Y_5$
Z	33,600	8	4	8
Y_1	1,400	-1	1	0
Y_3	700	-1.5	-1.5	-1

Solución:

$Y_1 = 1{,}400$ $\qquad$ $Y_4 = 0$
$Y_2 = 0$ $\qquad$ $Y_5 = 0$
$Y_3 = 700$

Una tercera circunstancia en la que nos es útil la aplicación de la propiedad de la dualidad; es cuando existen cambios en el vector de los recursos y los posibles efectos que se tengan en la función objetivo. Y para estó nos serviremos de las variables duales.

Interpretación de las variables duales.

Las variables duales Y_1, Y_2 y Y_3 representan respectivamente las restricciones 1, 2 y 3.

$Y_1 = 1{,}400$ (restricción 1, horas disponibles).

Esta variable nos indica que por cada cambio que exista en las horas disponibles para la elaboración de calculadoras, la función objetivo se verá afectada por $1,400.

Si las horas disponibles aumentan 1 hora; que en lugar de 20, sean 21, la función ojetivo nos quedaría:

$$\text{Max } Z = \$\ 33{,}600 + \$1{,}400$$
$$Z = \$\ 35{,}000$$

Y estó lo explicaríamos así: si se aumentará una hora de producción podríamos elaborar una calculadora tipo 1, ya que está requiere una hora y su contribución es de $ 1,400; a su vez la capacidad de venta no se ha agotado, ya que tan sólo se elaboran 8 y la capacidad de venta es de 12; por otro lado la elaboración de calculadoras tipo 2, no es posible ya que está requiere 1.5 horas, y además su capacidad de venta esta agotada.

Si las horas disponibles se redujeran a 19 hrs, nuestra función objetivo se afectaría así:

$$\text{Max } Z = \$\ 33{,}600 - \$\ 1{,}400$$
$$Z = \$\ 32{,}200$$

Si se decidiera disminuir una hora de elaboración de la producción, se dejaría de producir una calculadora tipo 1, ya que es la que ofrece la menor ganancia, además que dejar de producir una calculadora tipo 2 nos absorbería 1.5 hrs.

$Y_2 = 0$ (restricción 2, capacidad de venta tipo 1).

En esta variable nos encontramos con que un cambio en la capacidad de venta de la calculadora tipo 1, no afectaría los rendimientos, estó es, porque no se cubrió toda la capacidad que es de 12 us., se elaboran tan sólo 8, nos quedan 4 us para llegar a la máxima capacidad, así que si se aumenta a 13 o disminuye a 11 la capacidad de venta, no nos afecta los rendimientos.

$Y_3 = 700$ (restricción 3, capacidad de venta tipo 2).

Esta variable es en relación a la capacidad de venta de la calculadora tipo 2, capacidad que se ha cubierto totalmente; se producen 8, se venden 8.

Si se aumenta a 9 us la capacidad, la contribución se aumentará en $ 700,.

$$\text{Max } Z = \$\ 33{,}600 + \$\ 700$$
$$Z = \$\ 34{,}300$$

Si la capacidad aumenta a 9 us., implicaría dejar de producir 2 us. de tipo 1, se fabricaría una unidad de tipo 2, lo que nos vendrá a compensar los $ 2,800, por dejar de hacer las 2 us. de tipo 1, pero nos sobraría .5 hrs., y estó representaría construir la mitad de una calculadora tipo 1 y se tendría una ganancia de $ 700 (aunque estó último, no es posible, no se puede vender la mitad de una calculadora). Del tipo 2 ya no se podría hacer la parte correspondiente, se cubrió toda la capacidad.

Y si se disminuyera a 7 us.

$$\text{Max } Z = \$\ 33{,}600 - \$\ 700$$
$$Z = \$\ 32{,}900$$

Si la capacidad disminuye a 7 us.; por cada unidad de tipo 2 que se deje de hacer se pierden $ 2,800 y tan sólo se pueden elaborar una unidad y media de tipo 2, lo que nos daría una ganancia de $ 2,100, así que tendríamos $ 700 menos de rendimiento.

A cada problema primal le corresponde un problema dual; para encontrar el valor de las variables duales, se supondría, sería necesario resolver el problema dual; lo que implicaría una doble resolución: la del primal y la del dual; pero estó no es necesario ya que el valor de las variables duales (Y), lo podemos obtener tanto en el método simplex como en el dual simplex en la tabla que nos presenta la solución final, y estos valores los encontraremos en el renglón de la función objetivo y corresponderá según a las variables de holgura que se presenten en la parte superior (cada variable de holgura representa una restricción); y las que se encuentren en la columna de las constantes, tendrán un valor igual a cero.

A su vez, en la resolución del problema dual, encontraremos el valor de las variables originales. (El problema primal y el dual, se elabora con los mismos datos, aunque ordenados en forma distinta). Verifiquemos estó, a continuación se presentan las tablas con la solución final del problema primal y del problema dual.

Problema Primal:

		$-X_3$	$-X_5$
Z	33,600	1,400	700
X_1	8	1	-1.5
X_4	4	-1	0
X_2	8	0	1

Solución:

$X_1 = 8$ $\quad X_3 = 0$

$X_2 = 8$ $\quad X_4 = 4$

$X_5 = 0$

Variables duales:

$Y_1 = 1,400 \quad (-X_3)$

$Y_2 = 0 \quad (X_4)$

$Y_3 = 700 \quad (-X_5)$

Problema Dual:

		$-Y_4$	$-Y_2$	$-Y_5$
Z	33,600	8	4	8
Y_1	1,400	-1	1	0
Y_3	700	-1.5	-1.5	-1

Solución:

$$Y_1 = 1{,}400 \qquad Y_4 = 0$$
$$Y_2 = 0 \qquad Y_5 = 0$$
$$Y_3 = 700$$

Variables originales:

$$X_1 = 8\ (-Y_4)$$
$$X_2 = 8\ (-Y_5)$$

Si observaramos la primer tabla de los dos problemas nos daríamos cuenta de lo que se ha dicho, se constituyen de los mismos datos, aunque colocados en forma inversa.

Ahora bien, ubiquemonos en estas dos últimas tablas y sus soluciones: lo que para el problema primal viene a representar las variables originales, para el problema dual serían las variables duales; y lo que serían las variables duales en el primal, serían las variables originales en el dual, estó de acuerdo a su colocación en la tabla, claro esta; porque en uno o en otro, las variables duales son las mismas, al igual que las originales, en cuanto a su valor. El dual del problema dual, es el problema primal.

Regresando al método dual simplex, veamos que sucede cuando nos encontramos con un problema en donde no hay factibilidad primal y tampoco factibilidad dual.

Tenemos el siguiente:

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 8X_2$$

Sujeto a:

$$5X_1 + 3X_2 \leq -30$$
$$10X_1 + 4X_2 \leq 46$$

En la tabla:

		$-X_1$	$-X_2$
Z	0	-4	-8
X_3	-30	5	3
X_4	46	10	4

Lo primero que haremos será identificar las variables que están en la función objetivo y que son negativas, en este caso, son: X_1 y X_2; se elabora una nueva restricción, que limite la suma de estas variables.

$$X_1 + X_2 \leq 46,$$

se introduce la variable de holgura:

$$X_1 + X_2 + X_5 = 46$$
$$X_5 = 46 + X_1 - X_2$$

Se coloca en la tabla, y este vendrá a ser el renglón pivote, y la columna será aquella que tenga el elemento más negativo

		$-X_1$	$-X_2$	Columna pivote
Z	0	-4	-8	$-X_2$
X_3	-30	5	3	
X_4	46	10	4	
X_5	46	1	1	renglon pivote

Se transforma la tabla y nos queda:

		$-X_1$	$-X_5$
Z	368	4	8
X_3	-168	8	3
X_4	138	14	-4
X_2	46	1	1

Se ha restablecido la factibilidad dual, y se puede proseguir, hasta encontrar la solución final.

USO DE LA COMPUTADORA

Hablaremos ahora de un valioso instrumento que nos ayudará a resolver, no sólo problemas de mayor complejidad, sino también con gran rapidez; nos referimos a la computadora.

Debemos tener en cuenta que los problemas aquí realizados contienen pocas variables y no significan mayor problema; ya que, si nos ubicamos en la realidad, tanto el número de variables como el número de restricciones es significativo, lo que vendría a complicar su solución, si se realiza manualmente; de aquí la enorme importancia de la computadora, dada la capacidad y rapidez que le caracterizan para la solución de grandes problemas.

A nivel de estudiantes y como un primer paso para la familiarización con las computadoras, así como con los programas paquetes, en la Facultad de Contaduría y Administración, se cuenta con el programa Z - LIN cuyo funcionamiento es sencillo.

El primer paso es tener tiempo en la terminal; ya sea que se cuente con una clave, o bien que se haga uso por hora, (se paga en la caja de la Facultad, y se puede pedir con derecho o no a archivo). Una vez que ya se esta frente a la terminal, y se tiene acceso al sistema, se teclea la palabra lin (letras minusculas), y el programa esta a nuestra disposición.

Lo primero que aparece en la pantalla es lo siguiente:

1. Escribir datos

2. Procesar datos
3. Mostrar resultados
4. Imprimir resultados
5. Copiar resultados a un archivo
6. Terminar

OPCION

Se va tecleando la opción, según se va desarrollando el problema.

Las hojas que nos presentan cada uno de los problemas, nos muestran en el primer renglón el nombre que se le asigna para su mejor identificación, después tenemos los datos, abajo de los cuales encontramos la matriz de coeficientes. Más abajo tenemos los resultados: el valor de las variables originales y la contribución óptima, también nos da el valor de las variables de holgura y por último tenemos la solución dual del problema.

A manera de ejemplo y ejercicio mostramos algunos de los problemas hechos manualmente, realizado en la computadora.

El primer problema es el de minimización: el segundo y tercero nos muestran los casos especiales que se vierón en el método gráfico (estos casos pueden presentarse en cualquiera de los demás métodos): los dos siguientes son los dos casos de maximización realizados por el método algebraico: el que sigue nos muestra los resultados del problema que se planteó en el método de penalización, cuando se encuentra una restricción en forma de igualdad: y los dos últimos, muestran los resultados del problema primal, así como los resultados de su problema dual.

Wed Oct 7 12:56:50 1987

user file name := LINSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower "X"

```
SOLUCION DEL MODELO WENDY

MINIMIZAR        3 RESTRICCIONES(RENGLONES) X   2 VARIABLES (COLUMNAS)

   COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
   400.0000   300.0000

SUJETO A

   RESTRICCIONES
   [illegible]
GE   15.0000

   [illegible]
GE   24.0000

      8.0000    4.0000
GE   16.0000

RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WENDY
MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS  1 A  4
         1            2                                4

   1     5.0000      5.0000      [illegible].0000      .0000     [illegible].0000
   2    16.0000      6.0000      [illegible]       -1.0000     [illegible]
   [illegible]
C(J) 400.0000   300.0000        .0000         .0000        .0000
      B(I)
   1    15.0000
   2    24.0000
   [illegible]

   .......RESULTADOS DEL PROGRAMA LINPRO.......
   .....TERMINACION NORMAL Y SOLUCION OPTIMA.....
              VARIABLE    *     C(J)     =    CONTRIBUCION
   X1            1.0000       400.0000          400.0000
   X2            2.0000       300.0000          [illegible]
   ..........FUNCION OBJETIVO        =        1000.0000

   VARIABLES DE HOLGURA SON:
   X( 3)         .0000
   X( 4)        4.0000
   [illegible]

   LA SOLUCION DUAL ES:
             VARIABLES    *     B(J)    =   CONTRIBUCION
   P( 1)      40.0000         15.0000           600.0000
   P( 2)        .0000         24.0000             .0000
   P( 3)      25.0000         16.0000           400.0000
   ..........FUNCION OBJETIVO        =        1000.0000
 EL PROGRAMA LINPRO TERMINO
```

Wed Oct 7 13:02:19 1987

user file name: LINSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower "X"

```
SOLUCION DEL MODELO WENDY
MAXIMIZAR       2 RESTRICCIONES(RENGLONES) X   2 VARIABLES (COLUMNAS)

     COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
      2.0000      2.0000

SUJETO A

     RESTRICCIONES
     -4.0000      4.0000
LE       8.0000
     -2.0000      4.0000
LE       4.0000
RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WENDY
MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS  1 A  4
            1            2            3            4         B(I)

 1      -4.0000       4.0000       1.0000        .0000      8.0000
 2      -2.0000       4.0000        .0000       1.0000      4.0000
C(J)    -2.0000      -2.0000        .0000        .0000

          RESULTADOS DEL PROGRAMA LINDRO
.....TERMINACION ANORMAL DEBIDO A.....
.....SOLUCION INFINITA
X1    ES INFINITO
LOS VALORES AL TERMINO DEL PROGRAMA SON NT
X2             .0000
X( 2)          .0000
X( 3)         8.0000
X( 4)         6.0000
EL PROGRAMA LINDRO TERMINO
```

CENTRO DE INFORMATICA FACU

```
X                                                           XXXXXX
X                                                                X
X                                                                X
X                                                               X
XXXXX      XXXX     X XXX      XXXX      XXXXX    X    X        X
X    X    X    X    XX   X         X         X     X  X        X
X    X    X    X    X          XXXXX     XXXX       XX         X
X    X    X    X    X         X    X         X      XX        X
X    X    X    X    X         X    X    X    X     X  X       X
X    X     XXXX     X          XXXXX     XXXX     X    X      X
```

Wed Oct 7 13:00:10 1987

user file name := LINSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower " X "

```
SOLUCION DEL MODELO WENDY
MINIMIZAR      3 RESTRICCIONES(RENGLONES) X  2 VARIABLES (COLUMNAS)

    COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
  400.0000   300.0000

SUJETO A

    RESTRICCIONES
     5.0000     3.0000
GE    15.0000

    16.0000     6.0000
LE    24.0000
     8.0000     4.0000
LE    16.0000
RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WENDY
MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 1 A 5
          1            2            3            4            5

 1      5.0000      3.0000     -1.0000       .0000       .0000
 2     16.0000      6.0000       .0000      1.0000       .0000
 3      8.0000      4.0000       .0000       .0000      1.0000
C(J)  400.0000    300.0000       .0000       .0000       .0000
       B(I)

 1     15.0000
 2     24.0000
 3     16.0000

        RESULTADOS DEL PROGRAMA LINPRO
.....TERMINACION ANORMAL DEBIDO A.....
.....PROBLEMA NO FACTIBLE
LOS VALORES AL TERMINO DEL PROGRAMA SON
X1             .0000
X2            4.0000
X( 3)    [illegible]
X( 4)          .0000
X( 5)          .0000
EL PROGRAMA LINPRO TERMINO
```

```
X                                                              X
X                                                             XX
X                                                              X
X                                                              X
XXXXX      XXXX     X XXX      XXXX      XXXXX    X    X       X
X    X    X    X    XX   X         X    X         X    X       X
X    X    X    X    X          XXXXX     XXXX     X    X       X
X    X    X    X    X         X    X         X     X   X       X
X    X    X    X    X         X    X    X    X      X X        X
X    X     XXXX     X          XXXXX     XXXX        X        XXX
                                                    X
                                                   X
                                                  X
```

Mon Sep 14 09:50:45 1987

user file name := LINSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower "Y"

```
SOLUCION DEL MODELO WENDY

MAXIMIZAR      3 RESTRICCIONES(RENGLONES) X  2 VARIABLES (COLUMNAS)

    COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
  1500.0000 1800.0000

 SUJETO A

    RESTRICCIONES
     2.0000     2.0000
 LE   800.0000
     4.0000     2.0000
 LE  1200.0000
      .0000     2.0000
 LE   600.0000
 RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WENDY
 MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS  1 A  5
          1           2           3           4           5

  1      2.0000      2.0000      1.0000       .0000       .0000
  2      4.0000      2.0000       .0000      1.0000       .0000
  3       .0000      2.0000       .0000       .0000      1.0000
 C(J)********* -1800.0000       .0000       .0000       .0000
        B(I)

  1   800.0000
  2  1200.0000
  3   600.0000

 .......RESULTADOS DEL PROGRAMA LINPRO.......
 .......TERMINACION NORMAL Y SOLUCION OPTIMA.......
           VARIABLE   *    C(J)     =    CONTRIBUCION
 X1        100.0000     1500.0000      150000.0000
 X2        300.0000     1800.0000      540000.0000
 ..........FUNCION OBJETIVO      =    690000.0000

 VARIABLES DE HOLGURA SON:
 X( 3)        .0000
 X( 4)     200.0000
 X( 5)        .0000

 LA SOLUCION DUAL ES:
           VARIABLES    *    B(J) = CONTRIBUCION
 P( 1)     750.0000         800.0000      600000.0000
 P( 2)        .0000        1200.0000            .0000
 P( 3)     150.0000         600.0000       90000.0000
 ..........FUNCION OBJETIVO      =    690000.0000
EL PROGRAMA LINPRO TERMINO
```

Wed Oct 7 13:07:05 1987

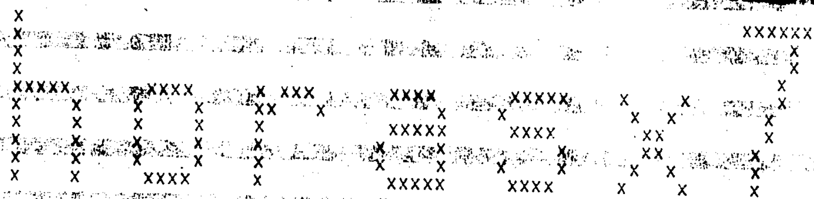
user filename := LINSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

"Tower [illegible] "

```
     SOLUCION DEL MODELO WENDY
   MAXIMIZAR      3 RESTRICCIONES(RENGLONES) X  2 VARIABLES (COLUMNAS)

      COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
    1500.0000 1000.0000

     SUJETO A

      RESTRICCIONES
        1.0000      2.0000
     LE  1400.0000
        2.0000      1.0000
     LE  1400.0000
        3.0000      3.0000
     LE  1500.0000
     RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WENDY
     MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS  1 A  5
                1           2           3           4           5

      1     1.0000      2.0000      1.0000       .0000       .0000
      2     2.0000      1.0000       .0000      1.0000       .0000
      3     3.0000      3.0000       .0000       .0000      1.0000
     C(J)********* -1000.0000        .0000       .0000       .0000
            B(I)

      1  1400.0000
      2  1400.0000
      3  1500.0000

     .......RESULTADOS DEL PROGRAMA LINPRO.......
     .......TERMINACION NORMAL Y SOLUCION OPTIMA.......
            VARIABLE    *    C(J)     =   CONTRIBUCION
     X1      500.0000     1500.0000      750000.0000
     X2         .0000     1000.0000            .0000
     ..........FUNCION OBJETIVO      =    750000.0000

     VARIABLES DE HOLGURA SON:
     X( 3)        900.0000
     X( 4)        400.0000
     X( 5)           .0000

     LA SOLUCION DUAL ES:
            VARIABLES      *    B(J) = CONTRIBUCION
     P( 1)         .0000      1400.0000          .0000
     P( 2)         .0000      1400.0000          .0000
     P( 3)      500.0000      1500.0000    750000.0000
     ..........FUNCION OBJETIVO      =    750000.0000
   EL PROGRAMA LINPRO TERMINO
```



Wed Oct 7 13:09:29 1987

user file name := LINSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower " X "

```
SOLUCION DEL MODELO WENDY
 MAXIMIZAR       3 RESTRICCIONES(RENGLONES) X  2 VARIABLES (COLUMNAS)

     COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
  1500.0000 1800.0000

    SUJETO A

      RESTRICCIONES
       2.0000    2.0000
    LE   800.0000
       4.0000    2.0000
    EQ  1200.0000
        .0000    2.0000
    LE   600.0000
    RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WENDY
    MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS  1 A  4
              1          2          3          4          B(I)

      1     2.0000     2.0000     1.0000      .0000     800.0000
      2     4.0000     2.0000      .0000      .0000    1200.0000
      3      .0000     2.0000      .0000     1.0000     600.0000
    C(J)********* -1800.0000      .0000      .0000

          RESULTADOS DEL PROGRAMA LINPRO........
    .......TERMINACION NORMAL Y SOLUCION OPTIMA.......
              VARIABLE    *    C(J)    =    CONTRIBUCION
    X1        200.0000      1500.0000       300000.0000
    X2        200.0000      1800.0000       360000.0000
    ..........FUNCION OBJETIVO       =     660000.0000

    VARIABLES DE HOLGURA SON:
    X( 3)          .0000
    X( 4)       200.0000

    LA SOLUCION DUAL ES:
              VARIABLES        B(J) = CONTRIBUCION
    P( 1)     1050.0000       800.0000     840000.0000
    P( 2)     -150.0000      1200.0000    -180000.0000
    P( 3)         .0000       600.0000          .0000
    ..........FUNCION OBJETIVO       =     660000.0000
  EL PROGRAMA LINPRO TERMINO
```

Wed Oct 7 12:56:45 1987

user file name: LINSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower "K"

```
     SOLUCION DEL MODELO WENDY
    MAXIMIZAR       3 RESTRICCIONES(RENGLONES) X  2 VARIABLES (COLUMNAS)

      COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
       1400.0000 2800.0000

     SUJETO A

      RESTRICCIONES
        1.0000   1.5000
     LE    20.0000
        1.0000    .0000
     LE    12.0000
         .0000   1.0000
     LE     8.0000
     RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WENDY
     MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS   1 A  5
              1           2           3           4           5

     1     1.0000      1.5000      1.0000       .0000       .0000
     2     1.0000       .0000       .0000      1.0000       .0000
     3      .0000      1.0000       .0000       .0000      1.0000
     C(J)********  -2800.0000       .0000       .0000       .0000
           B(I)

     1    20.0000
     2    12.0000
     3     8.0000

     .......RESULTADOS DEL PROGRAMA LINPRO.......
     ..........TERMINACION NORMAL Y SOLUCION OPTIMA.........
              VARIABLE    *    C(J)      =    CONTRIBUCION
     X1           8.0000      1400.0000        11200.0000
     X2           8.0000      2800.0000        22400.0000
     ..........FUNCION OBJETIVO         =     33600.0000

     VARIABLES DE HOLGURA SON:
     X( 3)         .0000
     X( 4)        4.0000
     X( 5)         .0000

     LA SOLUCION DUAL ES:
              VARIABLES     *     B(J) = CONTRIBUCION
     P( 1)     1400.0000          20.0000        28000.0000
     P( 2)         .0000          12.0000            .0000
     P( 3)      700.0000           8.0000         5600.0000
     ..........FUNCION OBJETIVO         =     33600.0000
    EL PROGRAMA LINPRO TERMINO
```

```
X                                                      XXXXXX
X                                                          X
X                                                          X
X                                                         X
XXXXX     XXXX     X XXX     XXXX      XXXXX   X    X      X
X    X   X    X    XX   X         X   X         X  X      X
X    X   X    X    X         XXXXX     XXXX      XX       X
X    X   X    X    X        X    X         X     XX       X
X    X   X    X    X        X    X    X    X    X  X      X
X    X    XXXX     X         XXXXX     XXXX    X    X     X
```

Wed Oct 7 13:12:18 1987

user file name := LINSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower " X "

```
     SOLUCION DEL MODELO DUAL
   MINIMIZAR        2 RESTRICCIONES(RENGLONES) X   3 VARIABLES (COLUMNAS)

        COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
        20.0000    12.0000     8.0000

     SUJETO A

        RESTRICCIONES
        1.0000     1.0000      .0000
     GE  1400.0000

        1.5000      .0000     1.0000
     GE  2800.0000

     RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO DUAL
     MATRIZ DE COEFICIENTES A(I.J) COLUMNAS  1 A  5
                1             2             3           4            5

      1      1.0000        1.0000         .0000     -1.0000        .0000
      2      1.5000         .0000        1.0000       .0000     -1.0000
     C(J)   20.0000       12.0000        8.0000       .0000        .0000
             B(I)

      1   1400.0000
      2   2800.0000

          ........RESULTADOS DEL PROGRAMA LINPRO........
     .......TERMINACION NORMAL Y SOLUCION OPTIMA.......
               VARIABLE     *     C(J)     =    CONTRIBUCION
     Y1       1400.0000          20.0000         28000.0000
     Y2           .0000          12.0000             .0000
     Y3        700.0000           8.0000          5600.0000
     ..........FUNCION OBJETIVO         =        33600.0000

     VARIABLES DE HOLGURA SON:
     X( 4)        .0000
     X( 5)        .0000

     LA SOLUCION DUAL ES:
               VARIABLES     *     B(J) = CONTRIBUCION
     P( 1)        8.0000        1400.0000       11200.0000
     P( 2)        8.0000        2800.0000       22400.0000
     ..........FUNCION OBJETIVO        =     33600.0000
   EL PROGRAMA LINPRO TERMINO                     CENTRO DE INFORMATICA FAC
```

CAPITULO TERCERO

Durante el primero y segundo capítulo hemos visto los métodos financieros y matemáticos que nos pueden servir para obtener con mayor precisión los resultados que serán la base sobre la cual descanse una buena decisión.

No es intención en este último capítulo, mostrar los métodos o formas de tomar una mejor decisión; pero sí, la de mostrar la importancia de contar con los datos y resultados necesarios; siendo lo más precisos posible, para tener un menor margen de error, una vez que ya se ha tomado una decisión.

A través de este capítulo se presentan algunos problemas económicos que se han resuelto empleando los métodos anteriormente expuestos. Es indudable que las situaciones posibles son muy variadas, y por lo mismo el tratamiento que se les de, dependerá de las circunstancias de cada proyecto. Aquí discutiremos tan sólo unos cuantos casos, ya que intentar incluir numerosas variantes, con todos sus aspectos y enfoques alternativos, según las circunstancias, nos llevaría un grueso volumen.

No debemos perder de vista que los ejemplos de tipo académico tienen la ventaja de presentarse de antemano bien delimitados, y más o menos idealizados; nos ilustran algunos aspectos fundamentales, suelen ser muy formativos, pero tienen el inconveniente de desfigurar la realidad, ya que en la práctica aparecen difusos, por lo que nos veremos precisados a seguir un método, hasta donde finalmente se enfoque el proyecto en forma clara, y definitiva. Posteriormente vendría la etapa del cálculo, seguida del análisis final del proyecto y de la decisión sobre el mismo.

Los ejemplos desarrollados nos vienen a complementar las ideas expuestas en este trabajo de investigación; y a ofrecernos una panoramica sobre la forma de abordar problemas de evaluación de inversiones.

Ejemplo No. 1

Una empresa se dedica al negocio de los perfumes, estós son preparados con las mismas sustancias (A, B y C); aunque combinados en diferentes proporciones.

Especificaciones de Mezclas

Perfume	Mezclas
M Rocha	60% de A
	20% de B
	20% de C
Pershia	60% de C
	15% de A
	25% de B
Famm	50% de C
	50% de B

En la siguiente tabla se nos muestra la disponibilidad y el costo de las sustancias.

Sustancias	Disponibilidad de botella por mes.	Costo por botella.
A	2,000	$ 7,000
B	2,500	5,000
C	1,200	4,000

Se desea saber, en primer término, cuál será el costo por botella de cada uno de los perfumes; (se supone el mismo contenido de las botellas de los ingredientes); el precio de venta será de 100% sobre el costo. Se informa que la capacidad de venta es de 4,500 botellas al mes Cuántos perfumes deberán hacerse para maximizar las ganancias, de cada uno de los que se pueden elaborar?.

Resolución:

Determinación de Alternativas:

Elaborar perfume M. Rocha, elaborar perfume Pershia Y/o elaborar perfume Famm.

Indentificación de Variables:

X_1 = *Perfume M. Rocha*
X_2 = *Perfume Pershia*
X_3 = *Perfume Famm*

Determinación de Restricciones:

Restricción de ingredientes disponibles por mes y restricción de capacidad de venta.

Determinación de la función objetivo:

Producir el número de perfumes necesarios, de cada uno, para maximizar la contribución.

Antes de determinar la expresión matemática será necesario calcular la contribución de cada uno de los perfumes. Calculemos en primer término el costo de cada perfume.

Suponiendo los mismos ml. en las botellas de los ingredientes y de los perfumes y de acuerdo a la mezcla que se tiene que hacer, tenemos:

Perfume	Mezcla	Cto. por ingrediente	Cto. de la Proporción.
	60% de A	$ 7,000	$ 4,200
M. Rocha	20% de B	5,000	1,000
	20% de C	4,000	800
	Costo por botella		$ 6,000
	15% de A	$ 7,000	$ 1,050
Pershia	25% de B	5,000	1,250
	60% de C	4,000	2,400
	Costo por botella		$ 4,700
	50% de B	$ 5,000	$ 2,500
Famm			
	50% de C	4,000	2,000
	Costo por botella		$ 4,500

El precio de venta por perfume es de:

M. Rocha	$ 12,000
Pershia	9,400
Famm	9,000

Por lo tanto la contribución por cada perfume, una vez que se restan los costos de producción es de:

M. Rocha	$ 6,000
Pershia	4,700
Famm	4,500

Expresión Matemática del Problema:

$$\text{Max } Z = 6{,}000\, X_1 + 4{,}700\, X_2 + 4{,}500\, X_3$$

Sujeto A:

$$\begin{aligned}
.60\, X_1 + .15\, X_2 & \leq 2{,}000 \\
.20\, X_1 + .25\, X_2 + .50\, X_3 & \leq 2{,}500 \\
.20\, X_1 + .60\, X_2 + .50\, X_3 & \leq 1{,}200 \\
X_1 + X_2 + X_3 & \leq 4{,}500
\end{aligned}$$

```
X                                                               X
X                                                              XX
X                                                               X
X                                                               X
XXXXX      XXXX     X XXX      XXXX       XXXXX    X    X       X
X    X    X    X    XX   X          X    X         X    X       X
X    X    X    X    X          XXXXX      XXXX     X    X       X
X    X    X    X    X         X     X         X     X   X       X
X    X    X    X    X         X     X         X      X X        X
X    X     XXXX     X          XXXXX      XXXX        X        XXX
                                                     X
                                                    X
                                                   X
```

Fri Dec 11 10:07:39 1987

user file name := LINSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower "Y"

```
SOLUCION DEL MODELO WENDY

MAXIMIZAR       4 RESTRICCIONES(RENGLONES) X   3 VARIABLES (COLUMNAS)

    COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
   600.0000  470.0000  450.0000

 SUJETO A

    RESTRICCIONES
     .6000       .1500       .0000
 LE  2000.0000
     .2000       .2500       .5000
 LE  2500.0000
     .2000       .6000       .5000
 LE  1200.0000
    1.0000      1.0000      1.0000
 LE  4500.0000
 RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WENDY
 MATRIZ DE COEFICIENTES A(I.J) COLUMNAS  1 A  5
          1           2           3          4           5

  1       .6000       .1500       .0000     1.0000       .0000
  2       .2000       .2500       .5000      .0000      1.0000
  3       .2000       .6000       .5000      .0000       .0000
  4      1.0000      1.0000      1.0000      .0000       .0000
 C(J)-600.0000   -470.0000   -450.0000      .0000       .0000
 MATRIZ DE COEFICIENTES A(I.J) COLUMNAS  6 A  7
          6           7         B(I)

  1       .0000       .0000  2000.0000
  2       .0000       .0000  2500.0000
  3      1.0000       .0000  1200.0000
  4       .0000      1.0000  4500.0000
 C(J)     .0000       .0000

 .......RESULTADOS DEL PROGRAMA LINPRO.......
 .......TERMINACION NORMAL Y SOLUCION OPTIMA.......
            VARIABLE    *     C(J)     =    CONTRIBUCION
 X1        3333.3330       600.0000      2000000.0000
 X2            .0000       470.0000            .0000
 X3        1066.6670       450.0000       480000.0000
 ..........FUNCION OBJETIVO        =   2480000.0000

 VARIABLES DE HOLGURA SON:
 X( 4)          .0000
 X( 5)      1300.0000
 X( 6)          .0000
 X( 7)       100.0001

 LA SOLUCION DUAL ES:
            VARIABLES    *    B(J) = CONTRIBUCION
 P( 1)      700.0000        2000.0000     1400000.0000
 P( 2)          .0000       2500.0000           .0000
 P( 3)      900.0000        1200.0000     1080000.0000
 P( 4)          .0000       4500.0000           .0000
 ..........FUNCION OBJETIVO        =   2480000.0000
EL PROGRAMA LINPRO TERMINO
```

La función objetivo la hemos dividido entre 10, para su mejor manejo; pero no olvidemos multiplicar por 10 la contribución resultante.

Los resultados arrojados por la computadora, son los más exactos posibles, pero no se puede elaborar .3330 de un perfume ó .6670 de otro, por lo que adaptaremos los datos a números enteros, y obtendremos el valor real de las variables de holgura y de las variables duales, meteremos tres nuevas restricciones al programa de la computadora.

En el segundo programa de la computadora obtenemos números enteros, y nos basaremos en esté para la interpretación de las variables.

Del ingrediente A sobra 20% de una botella; del ingrediente B, 1300 botellas y 40% de otra más; y del ingrediente C sobra 40% de una botella. y además no se alcanza a cubrir toda la demanda, faltan 101 botellas.

Las variables duales tienen valor de cero, dado que hay disponibilidad de recursos, y en cuanto a las tres últimas variables duales, se refieren a las tres restricciones que se incluyeron en el segundo programa para obtener números enteros.

Nuestra solución final queda así:

Para obtener la máxima contribución se deben producir 3,333 perfumes M. Rocha y 1066 de Famm, y se obtendrá una contribución de $24,795,000; a su vez no es conveniente elaborar perfume Pershia.

Por último diremos que sería conveniente obtener más ingredientes para cubrir el total de la demanda, además de pensarse qué se puede hacer con el sobrante del ingrediente B.

SOLUCION DEL MODELO WENDY

```
MAXIMIZAR     7 RESTRICCIONES (RENGLONES) X  3 VARIABLES (COLUMNAS)

    COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
  600.0000  470.0000  450.0000

  SUJETO A

    RESTRICCIONES
       .6000     .1500     .0000
  LE 2000.0000
       .2000     .2500     .5000
  LE 2500.0000
       .2000     .6000     .5000
  LE 1200.0000
      1.0000    1.0000    1.0000
  LE 4500.0000
      1.0000     .0000     .0000
  EQ 3333.0000
       .0000    1.0000     .0000
  EQ     .0000
       .0000     .0000    1.0000
  EQ 1066.0000
  RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WENDY
  MATRIZ DE COEFICIENTES A(I.J) COLUMNAS  1 A  5
              1          2          3          4          5

    1      .6000      .1500      .0000     1.0000      .0000
    2      .2000      .2500      .5000      .0000     1.0000
    3      .2000      .6000      .5000      .0000      .0000
    4     1.0000     1.0000     1.0000      .0000      .0000
    5     1.0000      .0000      .0000      .0000      .0000
    6      .0000     1.0000      .0000      .0000      .0000
    7      .0000      .0000     1.0000      .0000      .0000
  C(J) -600.0000  -470.0000  -450.0000      .0000      .0000
  MATRIZ DE COEFICIENTES A(I.J) COLUMNAS  6 A  7
              6          7        B(I)

    1      .0000      .0000   2000.0000
    2      .0000      .0000   2500.0000
    3     1.0000      .0000   1200.0000
    4      .0000     1.0000   4500.0000
    5      .0000      .0000   3333.0000
    6      .0000      .0000      .0000
    7      .0000      .0000   1066.0000
  C(J)     .0000      .0000
                                              CENTRO DE INFORMATICA

  .......RESULTADOS DEL PROGRAMA LINPRO.......
  .......TERMINACION NORMAL Y SOLUCION OPTIMA.......
              VARIABLE    *     C(J)     =    CONTRIBUCION
  X1          3333.0000       600.0000      1999800.0000
  X2              .0000       470.0000           .0000
  X3          1066.0000       450.0000       479700.0000
  ..........FUNCION OBJETIVO        =   2479500.0000

  VARIABLES DE HOLGURA SON:
  X( 4)          .2000
  X( 5)     1300.4000
  X( 6)     [illegible].4000
  X( 7)      101.0000

  LA SOLUCION DUAL ES:
              VARIABLES    *     D(J)  =  CONTRIBUCION
  P( 1)          .0000       2000.0000             .0000
  P( 2)          .0000       2500.0000             .0000
  P( 3)          .0000       1200.0000             .0000
  P( 4)          .0000       4500.0000             .0000
  P( 5)       600.0000       3333.0000       1999800.0000
  P( 6)       470.0000           .0000             .0000
  P( 7)       450.0000       1066.0000        479700.0000
  ...............FUNCION OBJETIVO      =   2479500.0000
  EL PROGRAMA LINPRO TERMINO
```

```
X                                                                      X        XX
X                                                                     XX       X  X
X                                                                      X      X    X
X                                                                      X      X    X
XXXXX     XXXX     X XXX    XXXX    XXXXX   X   X                      X      X    X
X    X   X    X    XX   X       X  X         X X                       X      X    X
X    X   X    X    X        XXXXX   XXXX      X                        X      X    X
X    X   X    X    X       X    X       X    X X                       X      X    X
X    X   X    X    X       X    X  X    X   X   X                      X       X  X
X    X    XXXX     X        XXXXX   XXXX   X     X                    XXX       XX
```

Wed Jan 6 13:06:0[illegible] 1988

user file name := LINSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower " X "

Ejemplo No. 2

Un horticultor sabe que el tomate necesita de 50 kg. de Nitrogeno, 150 kg. de fósforo y 50 kg. de potasio por manzana, para estar bien fertilizado. Si en el comercio se obtienen dos fórmulas: A y B de fertilizador; la A en proporción 10-40-10, o sea conteniendo 10% de nitrogeno, 40% de fósforo y 10% de Potasio, por bolsa de 100 kgs., y la B en proporción 10-20-10: si el costo de'la fórmula A es de $4.600 por bolsa y el de B es de $ 3,900 bolsa.

¿Cuántas bolsas de cada fórmula debe comprar para minimizar el costo de fertilización y llenar las necesidades de fertilizantes del tomate?.

Resolución:

Determinación de Alternativas:

Comprar fertilizante A y/o comprar fetilizante B

Identificación de Variables:

X_1 = *Fertilizante A*
X_2 = *Fertilizante B*

Determinación de restricciones:

Restricción de cubrir los mínimos requerimientos.

Determinación de la función Objetivo:

Minimizar el costo de fertilización, comprando los fertilizantes necesarios.

Expresión Matemática:

$$Min\ Z = 4{,}600\ X_1 + 3{,}900\ X_2$$

Sujeto A:

$$\begin{aligned} 10X_1 + 10X_2 &\geqslant 50 \\ 40X_1 + 20X_2 &\geqslant 150 \\ 10X_1 + 20X_2 &\geqslant 50 \end{aligned}$$

Para cubrir las necesidades mínimas de fertilizantes y a su vez, hacerlo al menor costo, se requieren dos bolsas y media de cada una de las fórmulas; el costo será de $21,250.

Con estas dos bolsas y media de cada fertilizante se cubren sin sobrante o faltante alguno, el nitrogeno y el fosforo; no así el potasio, del cual excede en 25 kgs., ya que se fertiliza con 75 kgs., y lo mínimo necesario son 50 kgs.

En cuanto a las variables duales nos indican que sí se aumentan a 51 kgs. los requerimientos mínimos de nitrogeno, el costo se elevará en $ 320, o bien si se disminuye a 49 kgs el costo disminuirá $ 320.

De igual manera si el fosforo se aumenta o disminuye en 1 Kg. el costo aumentará o disminuirá en $ 35.

```
X                                                              X
X                                                             XX
X                                                              X
X                                                              X
XXXXX      XXXX     X XXX      XXXX      XXXXX    X    X       X
X    X    X    X    XX   X         X    X         X    X       X
X    X    X    X    X          XXXXX     XXXX     X    X       X
X    X    X    X    X         X    X         X     X   X       X
X    X    X    X    X         X    X    X    X      X X        X
X    X     XXXX     X          XXXXX     XXXX        X        XXX
                                                    X
                                                   X
                                                  X
```

Mon Jan 11 09:23:01 1988

user file name := LINSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower "Y"

```
SOLUCION DEL MODELO WWENDY

MINIMIZAR       3 RESTRICCIONES(RENGLONES) X  2 VARIABLES (COLUMNAS)

   COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
  4600.0000 3900.0000

 SUJETO A

     RESTRICCIONES
     10.0000   10.0000
   GE    50.0000

     40.0000   20.0000
   GE   150.0000

     10.0000   20.0000
   GE    50.0000

   RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WWENDY
   MATRIZ DE COEFICIENTES A(I.J) COLUMNAS  1 A  5
           1            2           3            4            5
     1   10.0000     10.0000     -1.0000       .0000        .0000
     2   40.0000     20.0000       .0000     -1.0000        .0000
     3   10.0000     20.0000       .0000       .0000      -1.0000
     C(J)4600.0000  3900.0000      .0000       .0000        .0000
          B(I)
     1    50.0000
     2   150.0000
     3    50.0000

   ......RESULTADOS DEL PROGRAMA LINPRO......
   ......TERMINACION NORMAL Y SOLUCION OPTIMA.......
              VARIABLE    *    C(J)     =    CONTRIBUCION
     X1         2.5000     4600.0000          11500.0000
     X2         [illegible]  [illegible]00.0000   9750.0010
     ..........FUNCION OBJETIVO        =      21250.0000

   VARIABLES DE HOLGURA SON
     X( 3)          .0000
     X( 4)          .0000
     X( 5)        25.0000

   LA SOLUCION DUAL ES:
              VARIABLES   *   B(J)   =  CONTRIBUCION
     P( 1)      320.0000          50.0000        16000.0000
     P( 2)       35.0000         150.0000         5250.0000
     P( 3)         .0000          50.0000            .0000
   ..........FUNCION OBJETIVO        =      21250.0000

   EL PROGRAMA LINPRO TERMINO
```

CENTRO DE INFORMATICA

Ejemplo No. 3

En una industria se elabora acetona; de dos tipos diferentes, las que denominaremos con las letras A y B, estos productos tienen que pasar por cuatro centros de proceso: 1, 2, 3 y 4, para obtener productos terminados.

Se nos proporciona la información siguiente:

Producto	Centros de Proceso	Costo por hora
	1	$ 320
	2	255
A	4	500
	2	255
	3	246
		$1,576
	1	$ 320
B	3	246
	4	500
		$1,066

Es posible enviar el producto A, por dos horas al centro 3, y no, tenerlo dos veces a través del centro dos, estó aunque resulta más barato, quizas no hay tiempo disponible.

Producto	Costo por Galón(MP)	Precio de Vta.
A	$ 3,500	$ 9,526
B	4,500	10,536

Los centros 1 y 4 trabajan hasta 16 hrs, al día; los centros 2 y 3 trabajan hasta 12 hrs. al día. El presupuesto disponible para materia prima es de $ 50,000.

Se requiere saber cuál será la producción alcanzada siguiendo el curso normal, cuál siguiendo el curso opcional y en cuál se obtienen las máximas ganancias.

Resolución:

Determinación de aternativas:

Elaborar acetona tipo A y/o
Elaborar acetona tipo B

Identificación de Variables:

X_1 = *Acetona tipo A*
X_2 = *Acetona tipo B*

Determinación de Restricciones:

Restricción de tiempo disponible en cada uno de los centros.
Restricción de presupuesto para la materia prima.

Determinación de la función objetivo:

Maximizar las ganancias produciendo el número de galones necesarios de acetona tipo A y/o tipo B.

Obtengamos en primer termino el costo por galón que se tiene para la acetona tipo A, como para la B.

Acetona A: Curso normal.

El costo de los centros de procesos en el curso normal es de $ 1,576 más el costo de la materia prima que es de $ 3,500 nos da un total de $ 5,076.

Curso Opcional:

El costo de los centros de procesos es de $ 1567, más la materia prima, tenemos un total de $ 5,067.

Acetona B:

Costo de los centros de procesos $ 1,066, más el costo de la materia prima que es de $ 4,500, nos da un total de $ 5,566.

Una vez que hemos obtenido los costos, otengamos la contribución de cada una de las acetonas.

Producto	Precio de venta	Cto. de Prod.	Contribución
Acetona A:			
Curso normal	$ 9,526	$ 5,076	$ 4,450
Curso opcional	9,526	5,067	4,459
Acetona B	10,536	5,566	4,970

Expresión Matemática:

Se harán dos planteamientos, uno siguiendo el curso normal, y el siguiente considerando el curso opcional.

Curso Normal

$$Max\ Z = 4{,}450\ X_1 + 4{,}970\ X_2$$

Sujeto A:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\leq 16 \\ 2X_1 \qquad &\leq 12 \\ X_1 + X_2 &\leq 12 \\ X_1 + X_2 &\leq 16 \\ 3{,}500X_1 + 4{,}500X_2 &\leq 50{,}000 \end{aligned}$$

Curso Opcional:

$$Max\ Z = 4{,}459\ X_1 + 4{,}970\ X_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\leq 16 \\ X_1 \qquad &\leq 12 \\ 2X_1 + X_2 &\leq 12 \\ X_1 + X_2 &\leq 16 \\ 3{,}500X_1 + 4{,}500X_2 &\leq 50{,}000 \end{aligned}$$

Siguiendo el curso normal de producción, se deben elaborar 4 galones de acetona tipo A y 8 de tipo B; lo que nos daría una máxima ganancia de $ 57,560.

Además tenemos 4 hrs disponibles, aún, en los centros 1, 2 y 4. No así en el centro 3, que es la principal limitante junto con el presupuesto de materia prima, de que no se pueda producir más.

En caso de que se decidiera ampliar las horas de trabajo en los centros 1, 2 y 4 no habría problema, ya que se tiene tiempo disponible; pero si se decidiera aumentar o disminuir una hora en el centro 3, la contribución se verá afectada en $ 2,630.

En el presupuesto de materia prima, sí se aumentara en un peso, las ganancias aumentarían .52, o dicho de otra manera, por cada peso que se dejara de invertir en materia prima y se destinara en otra cosa, lo menos que se esperaría de ganancia por cada peso serían .52.

Pasemos ahora, a ver el segundo programa de este ejemplo, tenemos como resultado números decimales, por lo que introduciremos nuevas restricciones al programa para obtener números enteros; así obtenemos un tercer programa. Estos dos últimos se refieren al curso opcional de la acetona tipo A.

Si observamos estos dos últimos; la contribución es menor en el tercero, pero no pueden venderse .7273 de un galón o .5455 de otro; por lo que tomaremos este último para ver el comportamiento de las variables de holgura y de las duales.

Aunque en el curso opcional, la contribución de la acetona tipo A es más alta, la contribución final es menor a la del curso normal. Durante este curso opcional la producción sería de 10 galones de acetona tipo B y un galón de tipo A, con una contribución de $ 54,159.

Se sigue teniendo tiempo disponible en los centros 1, 2 y 4, aunque ahora es de 5, 11 y 5 hrs. respectivamente (mayor tiempo ocioso, y en cuanto al presupuesto, tenemos un sobrante de $1,500.

En este caso, si se decidiera aumentar o disminuir una hora del centro 3, afectaría en $ 2,229.50 a la contribución, ya fuera un costo o una ganancia.

Es preferible elaborar la acetona tipo A por medio del curso normal.

En este ejemplo podemos darnos mejor cuenta de lo importante que es analizar las alternativas que se presentan y no dejarnos llevar unicamente por las apariencias.

Jan 6 23:09:44 1988

user file name : LINSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower " X "

SOLUCION DEL MODELO WENDY

MAXIMIZAR 5 RESTRICCIONES(RENGLONES) X 2 VARIABLES (COLUMNAS)

COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
4450.0000 4970.0000

SUJETO A

RESTRICCIONES

```
   1.0000    1.0000
LE    16.0000
   2.0000     .0000
LE    12.0000
   1.0000    1.0000
LE    12.0000
   1.0000    1.0000
LE    16.0000
3500.0000 4500.0000
LE 50000.0000
```

RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WENDY

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 1 A 5

	1	2	3	4	5
1	1.0000	1.0000	1.0000	.0000	.0000
2	2.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000
3	1.0000	1.0000	.0000	.0000	1.0000
4	1.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
5	3500.0000	4500.0000	.0000	.0000	.0000
[illegible]	[illegible]	-4970.0000	.0000	.0000	.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I.J) COLUMNAS 6 A 7

	6	7	B(I)
1	.0000	.0000	16.0000
2	.0000	.0000	12.0000
3	.0000	.0000	12.0000
4	1.0000	.0000	16.0000
5	.0000	1.0000	50000.0000
[illegible]	.0000	.0000	

.......RESULTADOS DEL PROGRAMA LINPRO.......
.......TERMINACION NORMAL Y SOLUCION OPTIMA.......

	VARIABLE *	C(J) =	CONTRIBUCION
X1	4.0000	4450.0000	17800.0100
X2	8.0000	4970.0000	39759.9900

..........FUNCION OBJETIVO = 57560.0000

CENTRO DE INFORMATICA

X(3)	4.0000
X(4)	4.0000
X(5)	.0000
X(6)	4.0000
X(7)	.0000

LA SOLUCION DUAL ES:

	VARIABLES *	B(J) =	CONTRIBUCION
P(1)	.0000	16.0000	.0000
P(2)	.0000	12.0000	.0000
P(3)	2630.0000	12.0000	31560.0000
P(4)	.0000	16.0000	.0000
P(5)	.5200	50000.0000	26000.0100

..........FUNCION OBJETIVO = 57560.0100

EL PROGRAMA LINPRO TERMINO .

horasy1

Fri Dec 11 10:29:48 1987

user file name := LINSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower "Y"

```
 SOLUCION DEL MODELO WENDY

MAXIMIZAR       5 RESTRICCIONES(RENGLONES) X  2 VARIABLES (COLUMNAS)

    COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
  4459.0000 4970.0000

 SUJETO A

    RESTRICCIONES
     1.0000      .0000
 LE    12.0000
     2.0000     1.0000
 LE    12.0000
     1.0000     1.0000
 LE    16.0000
  3500.0000 4500.0000
 LE 50000.0000
     1.0000     1.0000
 LE    16.0000
 RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WENDY
 MATRIZ DE COEFICIENTES A(I.J) COLUMNAS  1 A  5
          1           2           3           4           5

  1     1.0000      .0000      1.0000       .0000       .0000
  2     2.0000     1.0000       .0000      1.0000       .0000
  3     1.0000     1.0000       .0000       .0000      1.0000
  4  3500.0000  4500.0000       .0000       .0000       .0000
  5     1.0000     1.0000       .0000       .0000       .0000
 C(J)********* -4970.0000       .0000       .0000       .0000
 MATRIZ DE COEFICIENTES A(I.J) COLUMNAS  6 A  7
          6           7          B(I)

  1      .0000      .0000     12.0000
  2      .0000      .0000     12.0000
  3      .0000      .0000     16.0000
  4     1.0000      .0000  50000.0000
  5      .0000     1.0000     16.0000
 C(J)    .0000      .0000

 .......RESULTADOS DEL PROGRAMA LINPRO.......
 .......TERMINACION NORMAL Y SOLUCION OPTIMA.......
           VARIABLE   *    C(J)     =    CONTRIBUCION
 X1            .7273      4459.0000        3242.9110
 X2          10.5455      4970.0000       52410.9100
 ..........FUNCION OBJETIVO       =      55653.8200

 VARIABLES DE HOLGURA SON:
 X( 3)        11.2727
 X( 4)          .0000
 X( 5)         4.7273
 X( 6)          .0000
 X( 7)         4.7273

 LA SOLUCION DUAL ES:
           VARIABLES    *    B(J) = CONTRIBUCION
 P( 1)          .0000         12.0000            .0000
 P( 2)       485.5453         12.0000        5826.5440
 P( 3)          .0000         16.0000            .0000
 P( 4)          .9965      50000.0000       49827.2800
 P( 5)          .0000         16.0000            .0000
 ..........FUNCION OBJETIVO       =      55653.8200
EL PROGRAMA LINPRO TERMINO
```

Wed Jan 6 23:14:00 1988

user file name := LINSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower " X "

SOLUCION DEL MODELO WENDY

MAXIMIZAR 6 RESTRICCIONES(RENGLONES) X 2 VARIABLES (COLUMNAS)

COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
4459.0000 4970.0000

SUJETO A

RESTRICCIONES
1.0000 1.0000
LE 16.0000
1.0000 .0000
LE 12.0000
2.0000 1.0000
LE 12.0000
1.0000 1.0000
LE [illegible]
3500.0000 4500.0000
LE 50000.0000
.0000 1.0000
EQ 10.0000

RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WENDY

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 1 A 5

	1	2	3	4	5
1	1.0000	[illegible]	[illegible]	.0000	.0000
2	1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000
3	2.0000	1.0000	.0000	.0000	1.0000
4	1.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
5	3500.0000	4500.0000	.0000	.0000	.0000
6	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 6 A 7

	6	7	B(I)
1	.0000	.0000	16.0000
2	.0000	.0000	12.0000
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	1.0000	.0000	16.0000
5	.0000	1.0000	50000.0000
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]
C(J)	.0000	.0000	

RESULTADOS DEL PROGRAMA LINPRO

..........TERMINACION NORMAL Y SOLUCION OPTIMA.......

VARIABLE	*	C(J)	=	CONTRIBUCION
[illegible]	1.0000	4459.0000		4459.0000
X2	10.0000	4970.0000		49700.0000

..........FUNCION OBJETIVO = 54159.0000

VARIABLES DE HOLGURA SON:

X(3)	5.0000
[illegible]	[illegible]
X(5)	.0000
X(6)	5.0000
[illegible]	[illegible]

LA SOLUCION DUAL ES:

VARIABLES	*	B(J)	= CONTRIBUCION
P(1)	.0000	16.0000	.0000
P(2)	.0000	12.0000	.0000
P(3)	2229.5000	12.0000	26754.0000
P(4)	.0000	16.0000	.0000
P(5)	.0000	50000.0000	.0000
P(6)	2740.5000	10.0000	27405.0000

..........FUNCION OBJETIVO = 54159.0000

EL PROGRAMA LINPRO TERMINO

Ejemplo No. 4

Una compañía de transporte cuenta con $ 850,000.000, para comprar nuevo equipo, se tienen considerados tres tipos de vehículos. El primero de ellos, tiene capacidad de transportación de 13 tons., y puede alcanzar la velocidad de 60 km. por hora. El costo de este camión es de $ 40,000,000; el segundo vehículo tiene una capacidad de 20 tns., y alcanza una velocidad de 55 km. por hora; su costo es de $ 65,000,000. El tercer vehículo es muy similar al segundo, con la modificación de contar con un lugar en donde descansa el chofer, y la capacidad se reduce a 17 tons., la velocidad alcanzada es de 55 km. por hora, y su costo se eleva a $ 70,000,000.

El primer vehículo puede ser trabajado 18 hrs. al día, y puede ser tripulado por un chofer; el segundo vehículo requiere una tripulación de dos hombres y puede ser operado 18 hrs. al día; el tercero puede trabajar 21 hrs. al día, y necesita una tripulación de dos hombres. (las horas estan divididas en tres turnos).

La compañía dispone de 160 choferes al día y no hay posibilidades de conseguir elementos adicionales.

El costo de mantenimiento por camión es de:

$ 2,000,000 para el primer camión
$ 3,000,000 para el segundo camión
$ 4,000,000 para el tercer camión

El presupuesto anual por concepto de mantenimiento es de $ 50,000,000.

Por cuestión de disponibilidad de equipo de mantenimiento; los camiones no pueden exceder para los primeros camiones de 6; para los segundos de 4 y para los terceros de 5.

¿Cuántos vehículos de cada tipo deberán comprarse, si la Cía. desea hacer máxima su capacidad de toneladas.?

Resolución:

Determinación de Alternativas:

Se compran camiones de 13 tons. de capacidad y/o
Se compran camiones de 20 tons. de capacidad y/o
Se compran camiones de 17 tons. de capacidad.

Identificación de Variables:

X_1 = *Camiones de 13 tons. de capacidad.*
X_2 = *Camiones de 20 tons. de capacidad.*
X_3 = *Camiones de 17 tons. de capacidad.*

Determinación de Restricciones:

Restricción de Presupuesto
Restricción de Choferes disponibles
Restricción de presupuesto de mantenimiento
Restricción de equipo de mantenimiento

Determinación de la función objetivo:

Maximizar la capacidad de transportación de toneladas.

Expresión matemática:

$$\text{Max } Z = 13\,X_1 + 20\,X_2 + 17\,X_3$$

Sujeto A:

$$
\begin{aligned}
40{,}000{,}000X_1 + 65{,}000{,}000X_2 + 70{,}000{,}000X_3 &\leq 850{,}000{,}000 \\
3X_1 + 6X_2 \quad X_3 &\leq 160 \\
2{,}000{,}000X_1 + 3{,}000{,}000X_2 + 4{,}000{,}000X_3 &\leq 50{,}000{,}000 \\
X_1 &\leq 6 \\
X_2 &\leq 4 \\
X_3 &\leq 5
\end{aligned}
$$

Wed Jan 6 23:35:36 1988

user file name := LINSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower " A "

SOLUCION DEL MODELO WINDY

MAXIMIZAR 6 RESTRICCIONES(RENGLONES) X 3 VARIABLES (COLUMNAS)

COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
13.0000 20.0000 17.0000

SUJETO A

RESTRICCIONES
40000.000065000.000070000.0000
LE 250000.0000
3.0000 6.0000 6.0000
LE 160.0000
2000.0000 3000.0000 4000.0000
LE 50000.0000
1.0000 .0000 .0000
LE 6.0000
.0000 1.0000 .0000
LE 4.0000
.0000 .0000 1.0000
LE 5.0000

RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WINDY

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I.J) COLUMNAS 1 A 5

	1	2	3	4	5
1	40000.0000	65000.0000	70000.0000	1.0000	.0000
2	3.0000	6.0000	6.0000	.0000	1.0000
3	2000.0000	3000.0000	4000.0000	.0000	.0000
4	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
6	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000
C(J)	-13.0000	-20.0000	-17.0000	.0000	.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I.J) COLUMNAS 6 A 9

	6	7	8	9	B(I)
1	.0000	.0000	.0000	.0000	850000.0000
2	.0000	.0000	.0000	.0000	160.0000
3	1.0000	.0000	.0000	.0000	50000.0000
4	.0000	1.0000	.0000	.0000	6.0000
5	.0000	.0000	1.0000	.0000	4.0000
6	.0000	.0000	.0000	1.0000	5.0000
C(J)	.0000	.0000	.0000	.0000	

......RESULTADOS DEL PROGRAMA LINPRO.......

.......TERMINACION NORMAL Y SOLUCION OPTIMA.........

VARIABLE	* C(J)	= CONTRIBUCION
X1 6.0000	13.0000	78.0000
X2 4.0000	20.0000	80.0000
X3 5.0000	17.0000	85.0000

.........FUNCION OBJETIVO = 243.0000

CENTRO DE INFORMATICA FAC

VARIABLES DE HOLGURA SON:

X(4)	.0000
X(5)	88.0000
X(6)	6000.0010
X(7)	.0000
X(8)	.0000
X(9)	3.4286

LA SOLUCION DUAL ES:

VARIABLES	* B(I)	= CONTRIBUCION
P(1) .0002	250000.0000	206.4286
P(2) .0000	160.0000	.0000
P(3) .0000	50000.0000	.0000
P(4) 3.2857	6.0000	19.7143
P(5) 4.2143	4.0000	16.8571
P(6) .0000	5.0000	.0000

.........FUNCION OBJETIVO = 243.0000

EL PROGRAMA LINPRO TERMINO

Según los resultados obtenidos, la empresa decide comprar 6 camiones de 13 toneladas de capacidad; 4 comiones de 20 toneladas de capacidad y 5 camiones de 17 toneladas de capacidad.

Pero ahora, se le presenta un nuevo problema, se tienen que entregar mercancías a cada una de las siguientes ciudades: Acapulco (A), Guadalajara (B), Veracruz (C) y Guanajuato (D). La empresa, a formado cuatro flotillas con los camiones recientemente adquiridos, de la siguiente forma:

1er flotilla		2. flotilla	
2 camiones de 13 tons.	26 tons.	1 camión de 13 tons.	
1 camión de 20 tons	20 tons.	1 camión de 20 tons.	
1 camión de 17 tons	17 tons.	2 camiones de	
Total	63 tons	17 tons	34 tons.
		Total	67 tons.

3er flotilla		4a. flotilla	
1 camiones de 13 tons	26 tons	2 camiones de 13 tons	13t.
2 camiones de 17 tons.	34 tons	2 camiones de 20 tons	40
Total	60 tons.	Total	53 t.

Según la cantidad de toneladas que transportan y el consumo de energéticos, los costos de cada una de las flotillas a cada una de las diferentes ciudades es la siguiente;

	C I U D A D E S			
Flotilla	A	B	C	D
1	150,000	140,000	145,000	138,000
2	155,000	143,000	144,000	140,000
3	153,000	144,000	145,000	139,000
4	155,000	142,000	143,000	140,000

Si pide que se haga un programa de asignación óptima.

Antes de ver la solución a este problema, se recomienda dar lectura a los problemas de asignación y a los de transporte que se encuentran en el apendíce.

Presentaremos el último cuadro, que nos da la solución óptima.

	C I U D A D E S			
Flotilla	A	B	C	D
1	0	0	4,000	1,000
2	2,000	0	0	0
3	1,000	2,000	2,000	0
4	3,000	0	0	1,000

Programa de asignación:

Flotilla 1, va a Acapulco con un costo de	$ 150,000
Flotilla 2, va a Veracruz con un costo de	144,000
Flotilla 3, va a Guanajuato con un costo de	139,000
Flotilla 4, va a Guadalajara con un costo de	142,000
Costo Total	$ 575,000

Supongamos ahora, lo siguiente: la entrega que se hizo en el puerto de Veracruz, fué de 67 toneladas, repartidas en 4 bodegas.

Bodega	tonelada
1	16
2	15
3	17
4	19
	67

estas toneladas tendrían que entregarse a cinco distintos poblados, que tienen estas necesidades.

Poblado	Toneladas requeridas
A	15
B	16
C	17
D	15
E	16

Los costos de transporte de cada una de las bodegas a cada uno de los poblados, se presentan en el siguiente cuadro:

	P O B L A D O S (costo por tonelada)				
Bodegas	A	B	C	D	E
1	20,000	30,000	40,000	15,000	20,000
2	30,000	20,000	30,000	20,000	10,000
3	40,000	30,000	20,000	30,000	15,000
4	15,000	40,000	10,000	20,000	30,000

Se quiere saber el programa óptimo de transporte:

Programa Optimo de Transporte:

De la bodega 1 al poblado 1	------ 1	tons de	$ 20,000	$ 20,000
De la bodega 1 al poblado 4	------15	tons de	15,000	225,000
De la bodega 2 al poblado 2	------ 4	tons de	20,000	80,000
De la bodega 2 al poblado 5	------11	tons de	10,000	110,000
De la bodega 3 al poblado 3	------12	tons de	20,000	240,000
De la bodega 3 al poblado 5	------ 5	tons de	15,000	75,000
De la bodega 4 al poblado 1	------14	tons de	15,000	210,000
De la bodega 4 al poblado 3	------ 5	tons de	10,000	50,000
		Costo total		$1010,000

Ejemplo No. 5.

El seÑor Martínez cuenta con $6,000,000, que espera invertir de la mejor manera, se le presenta la siguiente propuesta:

1) Establecimiento de una zapatería bajo las siguientes condiciones:

a) El giro sería compra-venta de zapatos y no fabricación de ellos.

b) La inversión inicial quedaría distribuida de la siguiente manera:

- Se compraría un terreno de aproximadamente 80 m^2 cuyo valor es de $ 1,500,000

- La construcción del local (tanto de obra negra, como los acabados), se efcectuarán con $1,500,000.

- El resto del dinero se utilizará para la compra de zapatos.

c) Dentro del terreno se construye una bodega de 20 m^2, en donde cabrían tres estantes, cuya capacidad es de 100 cajas de zapatos por cada estante. No se contempla la posibilidad de tener cajas, fuera de los estantes.

d) En el primer año se estarían trabajando con 15 modelos de zapatos, que podrían variar en el diseño, no así en los costos. Los primeros cinco corresponden a modelos para caballeros; los siguientes cinco, para dama y los últimos cinco para niños.

e) Se calculan los siguientes costos para el primero segundo y tercer cuatrimestres del año.

Primer cuatrimiestre:

Modelo	Costo	Modelo	Costo
1	$ 9,000	4	$ 18,000
2	12,000	5	15,000
3	16,000	6	7,000

Modelo	Costo	Modelo	Costo
7	$ 8,000	11	$ 6,000
8	10,000	12	9,000
9	13,000	13	9,000
10	15,000	14	8,000
		15	9,000

Segundo Cuatrimestre:

Modelo	Costo	Modelo	Costo
1	$ 10,000	8	$ 10,000
2	13,000	9	10,000
3	17,000	10	17,000
4	19,000	11	7,000
5	17,000	12	7,000
6	7,500	13	8,000
7	9,000	14	10,000
		15	11,000

Tercer Cuatrimestre:

Modelo	Costo	Modelo	Costo
1	$ 11,000	8	$ 11,000
2	14,000	9	11,000
3	19,000	10	17,000
4	20,000	11	8,000
5	17,000	12	6,000
6	8,000	13	9,000
7	11,000	14	11,000
		15	11,000

Los precios de venta para cada uno de los modelos es:

Modelo	1er Cuatrimestres Precio	2 Cuatrimestre Precio	3Cuatrimestre Precio
1	$ 20,000	$ 21,500	$ 23,000
2	25,000	27,000	28,000
3	30,000	32,000	35,000
4	33,000	36,000	38,000
5	30,000	33,000	34,000
6	14,000	21,500	23,000
7	17,000	17,000	20,000
8	19,000	21,000	24,000
9	22,000	24,000	25,000
10	30,000	33,000	34,000
11	12,000	15,000	15,000
12	14,000	17,000	18,000
13	16,000	19,000	21,000
14	17,000	20,000	23,000
15	18,000	21,000	21,000

e) Se decide tener por lo menos 15 pares de cada modelo para el primer cuatrimestre; para el segundo y el tercero se establecen los mínimos de la siguiente forma:

Modelo	2o. cuatrimestre	3o. cuatrimestre
1	15	15
2	15	15
3	15	15
4	10	10
5	10	10
6	20	10
7	20	10
8	20	10
9	20	10
10	20	10
11	10	20
12	15	20
13	15	20
14	15	20
15	15	20

Los mínimos se establecieron en atención a los meses que comprenden cada uno de los cuatrimestres y por los resultados del cuatrimestre anterior.

Se desea saber cuántos pares de zapatos se tienen que comprar de cada modelo, cumpliendo los requisitos mínimos y maximizando las ganancias en cada cuatrimestre.

Resolución:

Determinación de alternativas:

Se compran zapatos del modelo 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14 y/o 15.

Identificación de Variables:

X_1 = Modelo 1
X_2 = Modelo 2
X_3 = Modelo 3
X_4 = Modelo 4
X_5 = Modelo 5
X_6 = Modelo 6
X_7 = MOdelo 7
X_8 = Modelo 4
X_9 = Modelo 9
X_{10} = Modelo 10
X_{11} = Modelo 11
X_{12} = Modelo 12
X_{13} = Modelo 13
X_{14} = Modelo 14
X_{15} = Modelo 15

Determinación de Restricciones:

Restricción de Presupuesto
Restricción de espacios
Restricción de requerimiento mínimo.

Determinación de la función objetivo:

Maximinizar las ganancias, en la compra-venta de calzado

Expresión Matemática:

Calculemos la contribución de cada cuatrimestre por cada uno de los modelos de zapatos. Tendremos tres expresiones matemáticas, correspondiendo una a cada cuatrimestre.

Primer cuatrimestre:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = {} & 11{,}000X_1 + 13{,}000X_2 + 14{,}000X_3 + 15{,}000X_4 + 15{,}000X_5 \\ & +7{,}000X_6 + 8{,}000X_7 + 10{,}000X_8 + 13{,}000X_9 + 15{,}000X_{10} \\ & +6{,}000X_{11} + 9{,}000X_{12} + 9{,}000X_{13} + 8{,}000X_{14} + 9{,}000X_{15} \end{aligned}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} & 9{,}000X_1 + 12{,}000X_2 + 16{,}000X_3 + 18{,}000X_4 + 15{,}000X_5 \\ & +7{,}000X_6 + 9{,}000X_7 + 9{,}000X_8 + 9{,}000X_9 + 15{,}000X_{10} \\ & +6{,}000X_{11} + 5{,}000X_{12} + 7{,}000X_{13} + 9{,}000X_{14} + 9{,}000X_{15} \\ & \leq 3{,}500{,}000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} \\ & X_{11} + X_{12} + X_{13} \quad X_{14} + X_{15} \leq 300 \end{aligned}$$

$X_1 \geq 15$	$X_6 \geq 15$	$X_{11} \geq 15$
$X_2 \geq 15$	$X_7 \geq 15$	$X_{12} \geq 15$
$X_3 \geq 15$	$X_8 \geq 15$	$X_{13} \geq 15$
$X_4 \geq 15$	$X_9 \geq 15$	$X_{14} \geq 15$
$X_5 \geq 15$	$X_{10} \geq 15$	$X_{15} \geq 15$

Segundo cuatrimestre:

$$\text{Max } Z = 11{,}500X_1 + 14{,}000X_2 + 15{,}000X_3 + 17{,}000X_4 + 16{,}000X_5 + 14{,}000X_6 + 8{,}000X_7 + 11{,}000X_8 + 14{,}000X_9 + 16{,}000X_{10} + 8{,}000X_{11} + 10{,}000X_{12} + 11{,}000X_{13} + 10{,}000X_{14} + 10{,}000X_{15}$$

Sujeto A:

$$10{,}000X_1 + 13{,}000X_2 + 17{,}000X_3 + 19{,}000X_4 + 17{,}000X_5 + 7{,}500X_6 + 9{,}000X_7 + 10{,}000X_8 + 10{,}000X_9 + 17{,}000X_{10} + 7{,}000X_{11} + 7{,}000X_{12} + 8{,}000X_{13} + 10{,}000X_{14} + 11{,}000X_{15} \leq 3{,}000{,}000$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} \leq 300$$

$X_1 \geq 15$	$X_6 \geq 20$	$X_{11} \geq 10$
$X_2 \geq 15$	$X_7 \geq 20$	$X_{12} \geq 10$
$X_3 \geq 15$	$X_8 \geq 20$	$X_{13} \geq 15$
$X_4 \geq 10$	$X_9 \geq 20$	$X_{14} \geq 15$
$X_5 \geq 10$	$X_{10} \geq 20$	$X_{15} \geq 15$

Tercer Cuatrimestre:

$$\text{Max } Z = 12{,}000X_1 + 14{,}000X_2 + 16.000X_3 + 18{,}000X_4 + 17.000X_5 + 15.000X_6 + 9{,}000X_7 + 13.000X_8 + 14.000X_9 + 17.000X_{10} + 7.000X_{11} + 12.000X_{12} + 12{,}000X_{13} + 12{,}000X_{14} + 10{,}000X_{15}$$

Sujeto a:

$$11{,}000X_1 + 14{,}000X_2 + 19{,}000X_3 + 20{,}000X_4 + 17{,}000X_5 + 8{,}000X_6 + 11{,}000X_7 + 11{,}000X_8 + 11{,}000X_9 + 17{,}000X_{10} + 7{,}000X_{11} + 12{,}000X_{12} + 12{,}000X_{13} + 12{,}000X_{14} + 10{,}000X_{15} \leq 3{,}000{,}000$$

$$X_1 + X_2 \pm X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12}$$
$$X_{13} + X_{14} + X_{15} \leqslant 300$$

$$\begin{array}{lll}
X_1 \geqslant 15 & X_6 \geqslant 10 & X_{11} \geqslant 20 \\
X_2 \geqslant 15 & X_7 \geqslant 10 & X_{12} \geqslant 20 \\
X_3 \geqslant 15 & X_8 \geqslant 10 & X_{13} \geqslant 20 \\
X_4 \geqslant 10 & X_9 \geqslant 10 & X_{14} \geqslant 20 \\
X_5 \geqslant 10 & X_{10} \geqslant 10 & X_{15} \geqslant 20.
\end{array}$$

EL PROGRAMA LINPRO TERMINO

Fri Jan 15 19:09:02 1988

usa[illegible] [illegible] LINSA[illegible]

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower "V"

CENTRO DE INFORMATICA FACULTAD D

SOLUCION DEL MODELO WENDY

MAXIMIZAR 17 RESTRICCIONES(RENGLONES) X 15 VARIABLES (COLUMNAS)

COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
11000.000013000.000014000.000015000.000015000.0000 7000.0000
8000.000010000.000013000.000015000.0000 6000.0000 9000.0000
9000.00008000.00009000.0000

SUJETO A

RESTRICCIONES
9000.000012000.000016000.000018000.000015000.0000 7000.0000
9000.00009000.00009000.000015000.0000 6000.0000 5000.0000
7000.0000 9000.0000 9000.0000
LE************
1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000
1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000
1.0000 1.0000 1.0000
LE 100.0000
1.0000 .0000 .0000 .0000 .0000 .0000
.0000 .0000 .0000 .0000 .0000 .0000
1.0000 .0000 .0000
GE 15.0000

.0000 1.0000 .0000 .0000 .0000 .0000
.0000 .0000 .0000 .0000 .0000 .0000
.0000 .0000 .0000
GE 15.0000

.0000 .0000 1.0000 .0000 .0000 .0000
.0000 .0000 .0000 .0000 1.0000 .0000
.0000 .0000 .0000
GE 15.0000

.0000 .0000 .0000 1.0000 .0000 .0000
.0000 .0000 .0000 .0000 .0000 .0000
.0000 .0000 .0000
GE 15.0000

.0000 .0000 .0000 .0000 1.0000 1.0000
.0000 .0000 .0000 .0000 .0000 .0000
.0000 .0000 .0000

GE 15.0000

.0000 .0000 .0000 .0000 .0000 1.0000

```
          .0000     .0000     .0000
   GE    15.0000
          .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
         1.0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
          .0000     .0000     .0000
   GE    15.0000

          .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
          .0000    1.0000     .0000     .0000     .0000     .0000
          .0000     .0000     .0000
   GE    15.0000

          .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
          .0000     .0000    1.0000     .0000     .0000     .0000
          .0000     .0000     .0000
   GE    15.0000
          .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
          .0000     .0000     .0000    1.0000     .0000     .0000
          .0000     .0000     .0000
   GE    15.0000

          .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
          .0000     .0000     .0000     .0000    1.0000     .0000
          .0000     .0000     .0000
   GE    15.0000

          .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
          .0000     .0000     .0000     .0000     .0000    1.0000
          .0000     .0000     .0000
   GE    15.0000
          .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
          .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
         1.0000     .0000     .0000
   GE    15.0000

          .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
          .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
          .0000    1.0000     .0000
   GE    15.0000

          .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
          .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
          .0000     .0000    1.0000
   GE    15.0000
                                  CENTRO DE INFORMATICA FAC
   RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WENDY
   MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS  1 A  5
```

1	9000.0000	12000.0000	16000.0000	18000.0000	15000.0000
2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000
6	.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000	.0000	1.0000
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
C(J)	*********	-13000.0000	-14000.0000	-15000.0000	-15000.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 6 A 10

	6	7	8	9	10
1	7000.0000	9000.0000	9000.0000	9000.0000	15000.0000
2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
8	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000
11	.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000
12	.0000	.0000	.0000	.0000	1.0000
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
C(J)	*********	-8000.0000	-10000.0000	-13000.0000	-15000.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 11 A 15

	11	12	13	14	15
1	6000.0000	5000.0000	7000.0000	9000.0000	9000.0000
2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	[illegible]	[illegible]	.0000	[illegible]

8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
13	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
14	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000
16	.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000
17	.0000	.0000	.0000	.0000	1.0000
C(J)	*********	-9000.0000	-9000.0000	-8000.0000	-9000.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I.J) COLUMNAS 16 A 20

	16	17	18	19	20
1	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
C(J)	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I.J) COLUMNAS 21 A 25

	21	22	23	24	25
1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
6	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.0000
8	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
C(J)	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 26 A 30

	26	27	28	29	30
1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
11	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.0000
13	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000
14	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
C(J)	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 31 A 32

	31	32	B(I)
1	.0000	.0000	[illegible]
2	.0000	.0000	300.0000
3	.0000	.0000	15.0000
4	.0000	.0000	15.0000
5	.0000	.0000	15.0000
6	.0000	.0000	15.0000
7	.0000	.0000	15.0000
8	.0000	.0000	15.0000
9	.0000	.0000	15.0000
10	.0000	.0000	15.0000
11	.0000	.0000	15.0000
12	.0000	.0000	15.0000
13	.0000	.0000	15.0000
14	.0000	.0000	[illegible]
15	.0000	.0000	15.0000
16	-1.0000	.0000	15.0000
17	.0000	-1.0000	15.0000
C(J)	.0000	.0000	

RESULTADOS DEL PROGRAMA [illegible]

........TERMINACION NORMAL Y SOLUCION OPTIMA........

VARIABLE		* C(J)	= CONTRIBUCION
X1	15.0000	11000.0000	[illegible]
X2	15.0000	[illegible]	195000.0000
X3	15.0000	14000.0000	210000.0000
X4	[illegible]	[illegible]	[illegible]

X5	73.3333	15000.0000	1100000.0000
X6	15.0000	7000.0000	105000.0000
X7	[illegible].0000	8000.0000	120000.[illegible]
X8	15.0000	10000.0000	150000.0000
X9	15.0000	13000.0000	195000.0000
X10	[illegible].0000	15000.0000	2[illegible]000.[illegible]
X11	15.0000	6000.0000	90000.0000
X12	15.0000	9000.0000	135000.0000
X13	[illegible].0000	9000.0000	13[illegible]000.0000
X14	15.0000	8000.0000	120000.0000
X15	15.0000	9000.0000	135000.0000

[illegible]CION OBJETIVO = 3[illegible]5000.0000

VARIABLES DE HOLGURA SON:

X(16)	[illegible].0000
X(17)	.0000
X(18)	.0000
X(19)	[illegible].0000
X(20)	.0000
X(21)	16.6667
X(22)	[illegible].3333
X(23)	.0000
X(24)	.0000
X(25)	.0000
X(26)	.0000
X(27)	.0000
X(28)	.0000
X(29)	.0000
X(30)	.0000
X(31)	.0000
X(32)	.0000

LA SOLUCION DUAL ES:

	VARIABLES	* B(J)	= CONTRIBUCION
P(1)	.0000	2500000.0000	.2086
P(2)	15000.0000	300.0000	4500000.0000
P(3)	-4000.0000	15.0000	-59999.9900
P(4)	-1999.9990	15.0000	-29999.9900
P(5)	-999.9995	15.0000	-14999.9900
P(6)	.0000	15.0000	.0000
P(7)	.0000	15.0000	.0000
P(8)	-8000.0000	15.0000	-120000.0000
P(9)	-7000.0000	15.0000	-105000.0000
P(10)	-5000.0000	15.0000	-74999.9900
P(11)	-1999.9990	15.0000	-29999.9900
P(12)	.0000	15.0000	.0000
P(13)	-9000.0000	15.0000	[illegible]
P(14)	-5999.9990	15.0000	-89999.9900
P(15)	-6000.0000	15.0000	-90000.0000
P(16)	-7000.0000	15.0000	-1[illegible]000.0000

..........FUNCION OBJETIVO = 3564499.0000

EL PROGRAMA LINPRO TERMINO

Fri Jan 15 12:56:46 1988

user file name: = HALINSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower "Y"

```
SOLUCION DEL MODELO WENDY

MAXIMIZAR     17 RESTRICCIONES(RENGLONES) X 15 VARIABLES (COLUMNAS)

COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
  11500.000014000.000015000.000017000.000016000.000014000.0000
   8000.000011000.000014000.000016000.0000 8000.000010000.0000
  11000.000010000.0000[illegible]000.0000

SUJETO A

   RESTRICCIONES
  10000.000013000.000017000.000019000.000017000.0000 7500.0000
   9000.000010000.000010000.000017000.[illegible] 7000.0000 7000.0000
   8000.000010000.000011000.0000
LE***********
      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000
      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000
      1.0000      1.0000      1.0000
LE    300.0000
      1.0000       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000
       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000
       .0000       .0000       .0000
GE     15.0000

       .0000      1.0000       .0000       .0000       .0000       .0000
       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000
       .0000       .0000       .0000
GE     15.0000

       .0000       .0000      1.0000       .0000       .0000       .0000
       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000
       .0000       .0000       .0000
GE     15.0000

       .0000       .0000       .0000      1.0000       .0000       .0000
       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000
       .0000       .0000       .0000
GE     10.0000

       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000
       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000
       .0000       .0000       .0000
GE     [illegible]

       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000      1.0000
```

```
          .0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000
          .0000        .0000        .0000
   GE     20.0000
          .0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000
         1.0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000
          .0000        .0000        .0000
   GE     20.0000

          .0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000
          .0000       1.0000        .0000        .0000        .0000        .0000
          .0000        .0000        .0000
   GE     20.0000

          .0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000
          .0000        .0000       1.0000        .0000        .0000        .0000
          .0000        .0000        .0000
   GE     20.0000
          .0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000
          .0000        .0000        .0000       1.0000        .0000        .0000
          .0000        .0000        .0000
   GE     20.0000

          .0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000
          .0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000
          .0000        .0000        .0000
   GE     [illegible]

          .0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000
          .0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000
          .0000        .0000        .0000
   GE     15.0000
          .0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000
          .0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000
          .0000        .0000        .0000
   GE     15.0000

          .0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000
          .0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000
          .0000       1.0000        .0000
   GE     15.0000

          .0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000
          .0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000
          .0000        .0000       1.0000
   GE     15.0000
```


RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WENDY

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 1 A 5

1	10000.0000	13000.0000	17000.0000	19000.0000	17000.0000
2	1.0000	1.[illegible]	[illegible]	[illegible]	1.0000
3	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
5	[illegible]	.0000	.0000	.0000	[illegible]
6	.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000	.0000	1.0000
8	[illegible]	.0000	.0000	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
11	[illegible]	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
14	[illegible]	.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	[illegible]	.0000	.0000	.0000	.0000
C(J)********	-14000.0000	-15000.0000	-17000.0000	-16000.0000	

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 6 A 10

	6	7	8	9	10
1	7500.0000	9000.0000	10000.0000	10000.00[illegible]	17000.0000
2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
8	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.0000	.0000	.0000	.0000	1.0000
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
C(J)********	-8000.0000	-11000.0000	-14000.0000	-16000.0000	

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 11 A 15

	11	12	13	14	15
1	7000.0000	7000.0000	8000.0000	10000.0000	11000.0000
2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	[illegible]	[illegible]
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
13	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
14	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000
16	.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000
17	.0000	.0000	.0000	.0000	1.0000
C(J)	********	-12000.0000	-12000.0000	-12000.0000	-10000.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 16 A 20

	16	17	18	19	20
1	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
C(J)	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 21 A 25

	21	22	23	24	25
1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
6	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.0000
8	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
13	.0000	.0000	.0000	[illegible]	.0000
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
C(J)	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 26 A 30

	26	27	28	29	30
1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
11	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.0000
13	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000
14	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
C(J)	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 31 A 32

	31	32	B(I)
1	.0000	.0000	************
2	.0000	.0000	300.0000
3	.0000	.0000	15.0000
4	.0000	.0000	15.0000
5	.0000	.0000	15.0000
6	.0000	.0000	10.0000
7	.0000	.0000	10.0000
8	.0000	.0000	20.0000
9	.0000	.0000	20.0000
10	.0000	.0000	20.0000
11	.0000	.0000	20.0000
12	.0000	.0000	20.0000
13	.0000	.0000	10.0000
14	.0000	.0000	15.0000
15	.0000	.0000	15.0000
16	-1.0000	.0000	15.0000
17	.0000	-1.0000	15.0000
C(J)	.0000	.0000	

..........RESULTADOS DEL PROGRAMA LINPRO..........

.......TERMINACION NORMAL Y SOLUCION OPTIMA.......

VARIABLE	* C(J)	= CONTRIB.
X1 15.0000	11500.0000	172500.0000
X2 15.0000	14000.0000	210000.0000
X3 15.0000	15000.0000	225000.0000

X4	10.0000	17000.0000	170000.0000
X5	10.0000	16000.0000	160000.0000
X6	68.0000	14000.0000	952000.1000
X7	20.0000	8000.0000	160000.0000
X8	20.0000	11000.0000	220000.0000
X9	20.0000	14000.0000	280000.0000
X10	20.0000	16000.0000	320000.0000
X11	10.0000	8000.0000	80000.0000
X12	15.0000	10000.0000	150000.0000
X13	15.0000	11000.0000	165000.0000
X14	15.0000	10000.0000	150000.0000
X15	15.0000	10000.0000	150000.0000

...FUNCION OBJETIVO = [illegible]64500.0000

VARIABLES DE HOLGURA SON:

X(16)	.0000
X(17)	17.0000
X(18)	.0000
X(19)	.0000
X(20)	.0000
X(21)	.0000
X(22)	.0000
X(23)	48.0000
X(24)	.0000
X(25)	.0000
X(26)	.0000
X(27)	.0000
X(28)	.0000
X(29)	.0000
X(30)	.0000
X(31)	.0000
X(32)	.0000

LA SOLUCION DUAL ES:

	VARIABLES	* B(J)	= CONTRIBUCION
P(1)	1.8667	3000000.0000	5599999.0000
P(2)	.0000	300.0000	.0000
P(3)	-7166.6680	15.0000	-107500.0000
P(4)	-10266.6700	15.0000	-154000.0000
P(5)	-16733.3300	15.0000	-251000.0000
P(6)	-18466.6700	10.0000	-184666.7000
P(7)	-15733.3300	10.0000	-157333.3000
P(8)	.0000	20.0000	.0000
P(9)	-8800.0030	20.0000	-176000.0000
P(10)	-7666.6680	20.0000	-153333.4000
P(11)	-4666.6680	20.0000	-93333.3600
P(12)	-15733.3300	20.0000	-314666.7000
P(13)	-5066.6660	10.0000	[illegible]
P(14)	-3066.6660	15.0000	-45999.9900
P(15)	-3933.3330	15.0000	-59000.0000
P(16)	-8266.6680	15.0000	-130000.0000
P(17)	[illegible]	[illegible]	[illegible]

```
..........FUNCION OBJETIVO      =  3700000.0000
   EL PROGRAMA LINPRO TERMINO
```

Fri Jan 15 13:03:30 1988

user filename INSAL

FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

CENTRO DE INFORMATICA

Tower "Y"

```
     SOLUCION DEL MODELO WENDY

    MAXIMIZAR      17 RESTRICCIONES(RENGLONES) X 15 VARIABLES (COLUMNAS)

         COEFICIENTES FUNCION OBJETIVO
     12000.000014000.000016000.000018000.000017000.000015000.0000
      9000.000013000.000014000.000017000.0000 7000.000012000.0000
     12000.000012000.000010000.0000

     SUJETO A

         RESTRICCIONES
     11000.000014000.000019000.000020000.000017000.0000 3000.0000
     11000.000011000.000011000.000017000.0000 8000.0000 6000.0000
      9000.000011000.000011000.0000
     LE**********
         1.0000      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000
         1.0000      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000
         1.0000      1.0000      1.0000
     LE   300.0000
         1.0000       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000
          .0000       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000
          .0000       .0000       .0000
     GE    15.0000

          .0000      1.0000       .0000      1.0000       .0000       .0000
          .0000       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000
          .0000       .0000       .0000
     GE    15.0000

          .0000       .0000      1.0000       .0000       .0000       .0000
          .0000       .0000       .0000      1.0000       .0000      1.0000
          .0000       .0000       .0000
     GE    15.0000

          .0000       .0000       .0000      1.0000      1.0000       .0000
          .0000       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000
          .0000       .0000       .0000
     GE    10.0000

          .0000       .0000       .0000      1.0000      1.0000       .0000
          .0000       .0000       .0000       .0000       .0000       .0000
          .0000       .0000       .0000
     GE    10.0000
          .0000       .0000       .0000       .0000       .0000      1.0000
```

```
       .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
       .0000     .0000     .0000
 GE  10.0000
       .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
      1.0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
       .0000     .0000     .0000
 GE  10.0000

       .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
       .0000    1.0000     .0000     .0000     .0000     .0000
       .0000     .0000     .0000
 GE  10.0000

       .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
       .0000     .0000    1.0000     .0000     .0000     .0000
       .0000     .0000     .0000
 GE  10.0000

       .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
       .0000     .0000     .0000    1.0000     .0000     .0000
       .0000     .0000     .0000
 GE  10.0000

       .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
       .0000     .0000     .0000     .0000    1.0000     .0000
       .0000     .0000     .0000
 GE  20.0000

       .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
       .0000     .0000     .0000     .0000     .0000    1.0000
       .0000     .0000     .0000
 GE  20.0000

       .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
       .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
      1.0000     .0000     .0000
 GE  20.0000

       .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
       .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
       .0000    1.0000     .0000
 GE  20.0000

       .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
       .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
       .0000     .0000    1.0000
 GE  20.0000
```


RESULTADOS PARA LA SOLUCION DEL MODELO WENDY

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 1 A 5

	1	2	3	4	5
1	11000.0000	14000.0000	19000.0000	20000.0000	17000.0000
2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000
6	.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000	.0000	1.0000
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
C(J)	*********	-14000.0000	-16000.0000	-18000.0000	-17000.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 6 A 10

	6	7	8	9	10
1	8000.0000	11000.0000	11000.0000	11000.0000	17000.0000
2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
8	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000
11	.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000
12	.0000	.0000	.0000	.0000	1.0000
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
C(J)	*********	-9000.0000	-13000.0000	-14000.0000	-17000.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 11 A 15

	11	12	13	14	15
1	8000.0000	6000.0000	9000.0000	11000.0000	11000.0000
2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
13	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
14	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000
16	.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000
17	.0000	.0000	.0000	.0000	1.0000
C(J)	*********	-10000.0000	-11000.0000	-10000.0000	-10000.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 16 A 20

	16	17	18	19	20
1	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
C(J)	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 21 A 25

	21	22	23	[illegible]	25
1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0000	[illegible]	.0000	.0000	.0000
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	.0000	[illegible]	[illegible]	.0000
6	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.0000
8	[illegible]	.0000	[illegible]	[illegible]	.0000
9	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000
11	.0000	[illegible]	.0000	[illegible]	[illegible]
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
13	.0000	.0000	.0000		
14	[illegible]	[illegible]	.0000	[illegible]	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
C(J)	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 26 A 30

	26	27	28	29	30
1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
11	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.0000
13	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000
14	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
C(J)	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

MATRIZ DE COEFICIENTES A(I,J) COLUMNAS 31 A 32

	31	32	B(I)
1	.0000	.0000	*********
2	.0000	.0000	300.0000
3	.0000	.0000	15.0000
4	.0000	.0000	15.0000
5	.0000	.0000	15.0000
6	.0000	.0000	10.0000
7	.0000	.0000	10.0000
8	.0000	.0000	10.0000
9	.0000	.0000	10.0000
10	.0000	.0000	10.0000
11	.0000	.0000	10.0000
12	.0000	.0000	10.0000
13	.0000	.0000	20.0000
14	.0000	.0000	20.0000
15	.0000	.0000	20.0000
16	-1.0000	.0000	20.0000
17	.0000	-1.0000	20.0000
C(J)	.0000	.0000	

RESULTADOS DEL PROGRAMA LINPRO

.......TERMINACION NORMAL Y SOLUCION OPTIMA.......

VARIABLE		* C(J)	= CONTRIBUCION
X1	[illegible]0000	[illegible]000.0000	1[illegible]0000.0000
X2	15.0000	14000.0000	210000.0000
X3	15.0000	16000.0000	240000.0000
X4	[illegible]	[illegible]	[illegible]

X4	10.0000	15000.0000	150000.0000
X5	10.0000	17000.0000	170000.0000
X6	10.0000	15000.0000	150000.0000
X7	10.0000	9000.0000	90000.0000
X8	10.0000	13000.0000	130000.0000
X9	10.0000	14000.0000	140000.0000
X10	10.0000	17000.0000	170000.0000
X11	20.0000	7000.0000	140000.0000
X12	101.6667	12000.0000	1220000.0000
X13	20.0000	12000.0000	240000.0000
X14	20.0000	12000.0000	240000.0000
X15	20.0000	10000.0000	200000.0000

FUNCION OBJETIVO = 3700000.0000

VARIABLES DE HOLGURA SON:

X(16)	.0000
X(17)	3.3333
X(18)	.0000
X(19)	.0000
X(20)	.0000
X(21)	.0000
X(22)	.0000
X(23)	.0000
X(24)	.0000
X(25)	.0000
X(26)	.0000
X(27)	.0000
X(28)	.0000
X(29)	81.6667
X(30)	.0000
X(31)	.0000
X(32)	.0000

LA SOLUCION DUAL ES:

	VARIABLES	* B(J)	= CONTRIBUCION
P(1)	2.0000	3000000.0000	6000000.0000
P(2)	.0000	300.0000	.0000
P(3)	-10000.0000	15.0000	-150000.0000
P(4)	-14000.0000	15.0000	-210000.0000
P(5)	-22000.0000	15.0000	-330000.0000
P(6)	-22000.0000	10.0000	-220000.0000
P(7)	-17000.0000	10.0000	-170000.0000
P(8)	-1000.0000	10.0000	-10000.0000
P(9)	-13000.0000	10.0000	-130000.0000
P(10)	-9000.0000	10.0000	-90000.0000
P(11)	-8000.0000	10.0000	-80000.0000
P(12)	-17000.0000	10.0000	-170000.0000
P(13)	-9000.0000	20.0000	[illegible]
P(14)	.0000	20.0000	.0000
P(15)	-6000.0000	20.0000	-120000.0000
P(16)	-10000.000	[illegible]	[illegible]
P(17)	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Ahora ya sabemos que cantidad y de que modelos, hay que comprar en cada uno de los cuatrimestres.

Pero sería importante hacer una evaluación financiera, para saber con mayor precisión si es o no, conveniente invertir.

La inversión inicial es de $ 3,000,000; los restantes $ 3,000,000, son de costos directos, y se recuperan en el primer cuatrimestre, de la misma manera sucede en los siguientes cuatrimestres, se recupera el costo.

Los flujos de efectivo ascienden a:

1o. Cuatrimestre	$ 3,555,000
2o. Cuatrimestre	3,564,500
3o. Cuatrimestres	3,700,000

Se pronostica una inflación de 24%, una tasa impositiva de 35%, y se espera una Tasa de Rendimientos Requerida de 40%.

Como la tasa inflacionaria es anual, y los flujos de efectivo son cuatrimestrales, obtendremos las tasas correspondientes por período. La tasa de inflación para cada período es de 8%.

Período	Flujo de efectivo antes de impuesto	Impuestos	Flujos de efectivo después de impuesto	Flujos de Efectivo Deflactado
1	$ 3,555,000	$1,244,250	$2,310,750	$ 2,139,583
2	3,564,500	1,247,575	2,316,925	1,986,390
3	3,700,000	1,295,000	2,405,000	1,909,166
				$ 6,035,139

Valor Presente Neto:

$$\frac{2,139,583}{1.40} = 1,528,273$$

$$\frac{1,986,390}{1.96} = 1,013,464$$

$$\frac{1,909,166}{2.744} = \underline{695,760}$$

	$3,237,497	Valor presente de Ingresos
	<u>3,000,000</u>	Inversión Inicial
	<u>$ 237,497</u>	Valor Presente Neto

Tasa Interna De Rendimiento:

<u>46.31%</u>

Valor Terminal:

$ 2,139,583	(1.96)	=	$ 4,193,582
1,986,390	(1.40)	=	2,780,946
1,909,166		=	<u>1,909,166</u>
Valor Terminal de Ing.			$ 8,883,694
Valor constante de Ing.			<u>6,035,139</u>
Utilidad por reinversión			<u>$ 2,848,555</u>

Indice de Rendimiento:

$$\frac{3,237,497}{3,000,000} = \underline{1.08}$$

Período de Recuperación de la Inversión a Valor Presente:
La inversión se recupera en <u>seis</u> meses aproximadamente.

Dados los resultados obtenidos, el proyecto puede ser aceptado.

CONCLUSION

Para tener bases de decisión correctas sobre diversos proyectos de inversión, se cuenta con métodos y sistemas, que dentro de un ambiente de incertidumbre, forman una técnica depurada de decisión.

Está técnica cuenta con una herramienta principal, que es la medición de previsiones, para lo cual se debe considerar y entender el significado del valor del dinero a través del tiempo, y asi mismo llevar los valores a un punto deseado, para de esta manera comparar los diferentes proyectos en forma adecuada.

Es importante la evaluación financiera que se haga de los diversos proyectos, pero también es importante contar con métodos matemáticos, que nos ofrezcan resultados, que en conjunción con los obtenidos en una evaluación financiera, sirvan de base, para una mejor toma de decisiones.

De aquí la conveniencia, de aplicar, tanto métodos financieros, como matemáticos, en la Evaluación de Proyectos de Inversión.

A P E N D I C E

ASIGNACION.

Podemos encontrar determinados problemas, en donde se nos indica que se deben llevar a cabo un cierto número de actividades; en donde se asocia cada "origen" con cada "destino"; los podemos encontrar de dos tipos: balanceado: en donde a cada "origen" corresponde un y sólo un "destino"; y desbalanceado: en donde, no necesariamente el número de "origenes" es igual a los "destinos". Se busca hacer las asociaciones de tal manera que se logre el resultado óptimo.

Ejemplo:

Una empresa tiene dividida la ciudad en cuatro zonas: Norte= 1: Sur = 2; Este = 3; y Oeste = 4; para realizar sus ventas, cuenta con cuatro grupos de vendedores; que según sus habilidades se calcula que el monto mensual por concepto de ventas, por cada vendedor en cada zona es la siguiente:

	ZONAS			
Grupo de vendedores	1	2	3	4
A	50,000	60,000	80,000	75,000
B	80,000	90,000	65,000	60,000
C	90,000	75,000	60,000	80,000
D	85,000	90,000	85,000	90,000

Se desea saber qué zona hay que asignar a cada grupo, para lograr el máximo de ventas. En el cuadro anterior se tiene la primer matriz; en este ejemplo se tienen 24 combinaciones posibles, se pueden obtener el total de ventas en cada una, y ver en cuál se obtiene el máximo, pero estó, sería excesivamente laborioso.

Para resolver este ejemplo seguiremos el método para la resolución de problemas de asignación. Se tiene el mismo número de "origenes" y "destinos", por lo tanto es un problema balanceado.

Debemos diferenciar entre un problema de minimización o maximización; cuando se tiene un problema de maximización, todos los elementos de la matriz inicial se multiplican por -1; no así los casos de minimización que se queda tal y como se plantea.

	ZONAS			
Grupo de Vendedores	1	2	3	4
A	-50,000	-60,000	-80,000	-75,000
B	-80,000	-90,000	-65,000	-60,000
C	-90,000	-75.000	-60,000	-80,000
D	-85,000	-90,000	-85,000	-90,000

Paso A) Una vez que se ha multiplicado por -1, se debe restar en cada renglón el elemento más pequeño, de los demás.
La nueva matriz nos queda:

	ZONAS			
Grupo de Vendedores	1	2	3	4
A	30,000	20,000	0	25,000
B	10,000	0	25,000	30,000
C	0	15,000	30,000	10,000
D	5,000	0	5,000	0

Paso B) Restamos el elemento más pequeño, de los demás elementos, en cada columna. En este ejemplo nos queda igual la matriz.

Paso C) Una vez que se han efectuado las operaciones, procederemos a trazar líneas a través de todos los ceros, tratando de que éstas, sean las mínimas posibles. En caso, de que el número de líneas sea igual al número de renglones o columnas, habremos encontrado la matriz que nos muestra la solución óptima. Las líneas podrán ser horizontales o verticales, pero no diagonales.

En nuestro ejemplo nos queda así:

	ZONAS			
Grupo de Vendedores	1	2	3	4
A	30,000	20,000	0	25,000
B	10,000	0	25,000	30,000
C	0	15,000	30,000	10,000
D	5,000	0	5,000	0

Esta es la solución óptima.

Paso D) Cuando no se ha encontrado la solución óptima, (no. de líneas no es igual al no. de renglones o columnas); se busca el elemento más pequeño, que no este cruzado por una línea; se resta de los demás elementos que tampoco esten cruzados por líneas; y se le suma a los elementos que esten en la intersección de dos líneas; en la matriz que se obtenga se hace la prueba de optimalidad, y en caso de que no se encuentre la solución óptima se repite este paso. Esto se hace cuantas veces sea necesario.

En nuestro ejemplo la asignación óptima nos queda:

Grupo Vendedores	Zona	
A	3 (este)	$ 80,000
B	2 (sur)	90,000
C	1 (norte)	90,000
D	4 (oeste)	90,000
Ventas Máximas Totales		$350,000

Supongamos ahora, que la empresa tiene la posibilidad de contar con dos grupos de vendedores más y las ventas que pueden realizar, según sus habilidades, son las siguientes:

grupo	1	2	3	4
E	90,000	85,000	70,000	85,000
F	95,000	90,000	80,000	90,000

Con las modificaciones, la matriz nos queda como sigue:

	1	2	3	4
A	50,000	60,000	80,000	75,000
B	80,000	90,000	65,000	60,000
C	90,000	75,000	60,000	80,000
D	85,000	90,000	85,000	90,000
E	90,000	85,000	70,000	85,000
F	95,000	90,000	80,000	90,000

El número de renglones no es igual al número de columnas, se trata de un problema desbalanceado, el primer paso a seguir será balancear el problema (número de renglones igual al número de columnas); para estó se tendrán que agregar el *número de renglones o columnas necesarias, para igualarse en "origenes" y "destinos"; desde luego serán ficticios y tendrán un costo o ganancia de cero. En nuestro ejemplo se aumentarán dos columnas.*

Grupo	1	2	3	4	5	6
A	-50,000	-60,000	-80,000	-75,000	0	0
B	-80,000	-90,000	-65,000	-60,000	0	0
C	-90,000	-75,000	-60,000	-80,000	0	0
D	-85,000	-90,000	-85,000	-90,000	0	0
E	-90,000	-85,000	-70,000	-85,000	0	0
F	-95,000	-90,000	-80,000	-90,000	0	0

Una vez que ya tenemos balanceado el problema, se procede conforme a los pasos explicados anteriormente.

Paso A)

Grupo	1	2	3	4	5	6
A	30,000	20,000	0	5,000	80,000	80,000
B	10,000	0	25,000	30,000	90,000	90,000
C	0	15,000	30,000	10,000	90,000	90,000
D	5,000	0	5,000	0	90,000	90,000
E	0	5,000	20,000	5,000	90,000	90,000
F	0	5,000	15,000	5,000	95,000	95,000

Paso B) y paso C)

Grupo	1	2	3	4	5	6
A	~~30,000~~	~~20,000~~	~~0~~	~~5,000~~	~~0~~	~~0~~
B	10,000	0	25,000	30,000	10,000	10,000
C	0	15,000	30,000	10,000	10,000	10,000
D	~~5,000~~	~~0~~	~~5,000~~	~~0~~	~~10,000~~	~~10,000~~
E	0	5,000	20,000	5,000	10,000	10,000
F	0	5,000	15,000	5,000	15,000	15,000

Cuatro líneas 6 columnas y 6 renglones.

No es la solución óptima; se realiza el siguiente paso:

Paso D)

Grupo	1	2	3	4	5	6
A	~~35,000~~	~~25,000~~	~~0~~	~~5,000~~	~~0~~	~~0~~
B	~~10,000~~	~~0~~	~~20,000~~	~~25,000~~	~~5,000~~	~~5,000~~
C	0	15,000	25,000	5,000	5,000	5,000
D	10,000	5,000	5,000	0	10,000	10,000
E	0	5,000	15,000	0	5,000	5,000
F	0	5,000	10,000	0	10,000	10,000

No es la solución óptima;

Grupo	1	2	3	4	5	6
A	20,000	25,000	0	10,000	0	0
B	15,000	0	20,000	30,000	5,000	5,000
C	0	10,000	20,000	5,000	0	0
D	10,000	0	0	0	5,000	5,000
E	0	0	10,000	0	0	0
F	0	0	5,000	0	5,000	5,000

Este último cuadro nos presenta la solución óptima.

La asignación óptima es:

Grupo	*A*	*Zona 3*	*(Este)*	*$ 80,000*
Grupo	*B*	*Zona 2*	*(Sur)*	*90,000*
Grupo	*C*	*Zona 1*	*(Norte)*	*90,000*
Grupo	*D*	*Zona 4*	*(Oeste)*	*90,000*
				$ 350,000

Se tiene la misma solución que antes de agregar dos grupos de vendedores, pero observemos que si decidimos hacer cualquier otra combinación como:

Grupo	*F*	*Zona*	*1*	*(Norte)*	*$ 95,000*
Grupo	*D*	*Zona*	*2*	*(Sur)*	*90,000*
Grupo	*A*	*Zona*	*3*	*(Este)*	*80,000*
Grupo	*E*	*Zona*	*4*	*(Oeste)*	*85,000*
					$ 350,000

Las ventas máximas totales son de $ 350,000, en esta y en cualquier otra combinación que se quiera.

TRANSPORTE.

Este tipo de problema, puede ser considerado como una generalización del problema de asignación, en donde también se tienen "origenes" y "destinos", y que no necesariamente tienen que ser el mismo número de cada uno; pero además nos dan dos datos más, que son: la capacidad y la demanda; es decir tenemos los "origenes" que tienen determinado número de artículos, y tenemos "destinos" que requieren dichos artículos, (aunque no necesariamente tienen que ser en el mismo número); pero para el proceso de solución de este tipo de problemas si es necesario que la capacidad sea igual a la demanda, como veremos más adelante.

Ejemplo

Una compañía cuenta con 10 tiendas en el D.F., de las cuales 4 requieren determinados juegos de copa, que son de importación; la Cía., cuenta con 3 almacenes, en los cuales, se cuenta con los siguientes juegos de copas:

Almacén	*Juegos de Copas*
1	15
2	10
3	12

Las tiendas requieren los juegos de copas de la siguiente forma:

Tienda	*Requerimientos de Juegos de Copa*
1	8
2	9
3	6
4	8

Los costos de traslado de cada almacén a cada una de las tiendas, por cada juego de copas se nos presenta en el siguiente cuadro:

	TIENDAS			
Almacén	*1*	*2*	*3*	*4*
1	*1,500*	*1,600*	*1,650*	*2,000*
2	*1,400*	*1,300*	*1,500*	*1,850*
3	*1,500*	*1,400*	*1,600*	*1,900*

Encontrar la solución óptima:

Método de Aproximación de Vogel.

1o.) El primer paso será llenar la matriz inicial:

	TIENDAS				
Almacén	*1*	*2*	*3*	*4*	*Capacidad*
1	*1,500*	*1,600*	*1,650*	*2,000*	*15*
2	*1,400*	*1,300*	*1,500*	*1,850*	*10*
3	*1,500*	*1,400*	*1,600*	*1,900*	*12*
Demanda	*8*	*9*	*6*	*8*	*37*

2o.) Las capacidades no son iguales a la demanda; cuando tenemos esta circunstancia se agrega un renglón o columna ficticio, para que se igualen. En nuestro caso se agregara una columna.

			TIENDAS			
Almacén	*1*	*2*	*3*	*4*	*F*	*Capacidad*
1	1,500	1,600	1,650	2,000	0	15
2	1,400	1,300	1,500	1,850	0	10
3	1,500	1,400	1,600	1,900	0	12
Demanda	8	9	6	8	6	37

3o.) Se identifican los dos elementos más pequeños de cada renglón y cada columna, y se registra la diferencia entre estos dos elementos, debajo de cada columna y a la derecha de cada renglón.

			TIENDAS				
Almacén	*1*	*2*	*3*	*4*	*F*	*Capac.*	
1	1,500	1,600	1,650	2,000	0	15	1,500
2	1,400	1,300	1,500	1,850	0	10	1,300
3	1,500	1,400	1,600	1,900	0	12	1,400
Demanda	8	9	6	8	6	37	
	100	100	100	50			

Se escoge el renglón o columna en donde se haya obtenido el valor más alto, de la operación realizada, en el punto anterior; en caso de tener valores iguales, se elige arbitrariamente. Una vez que tenemos el renglón o columna; al costo menor se le asignará la máxima cantidad permitida, o por la demanda, o por la capacidad. En nuestro caso, 1,500 es el valor más grande, así que se escoge el renglón 1.

			T I E N D A				
Almacén	*1*	*2*	*3*	*4*	*F*	*Capc.*	
1	*1,500*	*1,600*	*1,650*	*2,000*	0^{6}	~~15~~ 9	*1,500*
2	*1,400*	*1,300*	*1,500*	*1,850*	0^{0}	*10*	*1,300*
3	*1,500*	*1,400*	*1,600*	*1,900*	0^{0}	*12*	*1,400*
Demanda	*8*	*9*	*6*	*8*	~~6~~ 0	*37*	
	100	*100*	*100*	*50*			

Al resto de las casillas en donde se hubiera agotado la demanda o la capacidad se le asigna cero, y de esta manera, esta columna o renglón queda eliminada (o) para los pasos posteriores.

4o.) Se vuelve a realizar el paso No. tres (sin tomar en cuenta la columna ficiticia, ya que se agoto la demanda).

			T I E N D A S			
Almacén	*1*	*2*	*3*	*4*	*Capac.*	
1	*1,500*	$1,600^{0}$	*1,650*	*2,000*	*9*	*100*
2	*1,400*	$1,300^{9}$	*1,500*	*1,850*	~~10~~ 1	*100*
3	*1,500*	$1,400^{0}$	*1,600*	*1,900*	*12*	*100*
Demanda	*8*	~~9~~ 0	*6*	*8*		
	100	*100*	*100*	*50*		

Los valores se repiten, se escogerá la columna 2; al costo menor se le asigna la máxima cantidad permitida (demanda=9). se elimina la columna, ya que se agotó la demanda; y se disminuye la capacidad de 10 a 1.

Se repite el paso 3.

		TIENDAS			
Almacén	1	2	3	*Capac.*	
1	$1{,}500^{8}$	1,650	2,000	~~8~~ 1	150
2	$1{,}400^{0}$	1,500	1,850	1	100
3	$1{,}500^{0}$	1,600	1,900	12	100
Demanda	~~8~~ 0	6	8		
	100	100	50		

Se escoge el renglón 1, se asigna y queda eliminada la columna 1.

	TIENDAS			
Almacén	3	4	*Capac.*	
1	1,650	2,00	1	350
2	$1{,}500^{1}$	$1{,}850^{0}$	~~1~~ 0	350
3	1,600	1,900	12	300
Demanda	~~6~~ 5	8		
	100	50		

Se repite el paso 3.

	TIENDAS				
Almacén	*1*	*2*	*3*	*Capac.*	
1	*1,500*^{8}	*1,650*	*2,000*	~~9~~ *1*	*150*
2	*1,400*^{0}	*1,500*	*1,850*	*1*	*100*
3	*1,500*^{0}	*1,600*	*1,900*	*12*	*100*
Demanda	~~8~~ 0	*6*	*8*		
	100	*100*	*50*		

Se escoge el renglón 1, se asigna y queda eliminada la columna 1.

	TIENDAS			
Almacén	*3*	*4*	*Capac.*	
1	*1,650*	*2,00*	*1*	*350*
2	*1,500*^{1}	*1,850*^{0}	~~1~~ *0*	*350*
3	*1,600*	*1,900*	*12*	*300*
Demanda	~~6~~ 5	*8*		
	100	*50*		

Se escoge el renglón 2, se asigna y queda eliminado este renglón

		T I E N D A S		
Almacén	3	4	Capac.	
1	1,650	2,000	~~1~~ 0	350
3	1,600	1,900	~~12~~ 0	300
Demanda	~~5~~ ~~4~~ 0	~~8~~ 0		
	50	100		

Este método no requiere que se escriba repetidamente la matriz inicial; los pasos seguidos, se pueden hacer sobre la matriz original.

La matriz final nos queda:

			T I E N D A S			
Almacén	1	2	3	4	F	Capac.
1	1,500	1,600	1,650	2,000	0	~~15~~ 0
2	1,400	1,300	1,500	1,850	0	~~10~~ 0
3	1,500	1,400	1,600	1,900	0	~~12~~ 0
Demanda	~~8~~ 0	~~9~~ 0	~~6~~ 0	~~8~~ 0	~~6~~ 0	37

Esta última tabla nos muestra una solución factible; escribamos, en una siguiente tabla, como quedarían asignados los artículos a cada una de las tiendas de cada uno de los almacenes.

	T I E N D A S				
Almacén	*1*	*2*	*3*	*4*	*F*
1	8	0	1	0	6
2	0	9	1	0	0
3	0	0	4	8	0

El costo total sería de $ 48,450; pero debemos verificar, que está sea nuestra solución óptima.

El primer paso a seguir, será comprobar que las casillas ocupadas, se encuentren en posición independiente.

Para entender en forma simple el concepto de independencia, diremos, que cuando de una casilla ocupada, parte una línea (ya sea horizontal o vertical), hacia otra casilla ocupada; y que sucesivamente, pueden trazarse líneas, (de casilla ocupada a casilla ocupada), hasta regresar a la misma casilla (no regresando por la misma ruta que se trazo); no se encuentran en posición independiente; dichas casillas ocupadas.

En nuestro caso, vemos que las casillas ocupadas sí se encuentran en posición independiente, y más adelante veremos que se hace para obtener posiciones independientes, en caso de que no se tengan.

El siguiente paso será el de verificar que el problema cumpla con la siguiente condición:

$$m + n - 1 = \text{No. de casillas ocupadas}$$

de donde:
m = No. de renglones
n = No. de columnas
En nuestro ejemplo:

$$5 + 3 - 1 = 7$$

No. de casillas ocupadas = 7

El problema cumple con esta condición, por lo que se puede continuar y aplicar la prueba de optimalidad.

Escribamos la matriz anotando unicamente los costos en las casillas ocupadas.

	TIENDAS				
Almacén	1	2	3	4	F
1	1,500		1,650		0
2		1,300	1,500		
3			1,600	1,900	

Asignamos un valor, U_i, a cada renglón en particular, de cualquier tamaño; y un valor V_j a cada columna, de tal manera que: $C_{ij} = U_i + V_j$, estó para las casillas ocupadas.

El costo de cada casilla ocupada debe ser igual a la suma de $U_i + V_j$.

Así, que como primer paso asignaremos estos valores a la matriz.

TIENDAS						
Almacén	*1(A)*	*2(B)*	*3(C)*	*4(D)*	*F*	U_i
1	1,500		1,650		0	1,400
2	1,300	1,300	1,500			1,250
3			1,600	1,900		1,350
V_j	100	50	250	550	-1,400	

Para las casillas no ocupadas se realiza la siguiente operación y el resultado deberá ser mayor o igual a cero.

En la tabla anterior se pusieron letras entre paréntesis, para diferenciar las tiendas de los almacenes.

Casilla	*A2*	1,400 - 1,250 - 100	= 50
"	*A3*	1,500 - 1,350 - 100	= 50
"	*B1*	1,600 - 1,400 - 50	= 150
"	*B3*	1,400 - 1,350 - 50	= 0
"	*D1*	2,000 - 1,400 - 550	= 50
"	*D2*	1,850 - 1,250 - 550	= 50
"	*F2*	0 - 1,250 - (-1,400)	= 150
"	*F3*	0 - 1,350 - (-1,400)	= 50

Como todos los valores son ≥ 0, nuestra solución es la óptima.

Programa de Transporte:

Almacén	1	8 juegos de copas a la tienda 1 a $1,500	=	$12,000
Almacén	1	1 juego de copas a la tienda 3 a 1,650	=	1,650
"	2	9 juegos de copas a la tienda 2 a 1,300	=	11,700
"	2	1 juego de copas a la tienda 3 a 1,500	=	1,500
"	3	4 juegos de copas a la tienda 3 a 1,600	=	1,400
"	3	8 juegos de copas a la tienda 4 a 1,900	=	15,200
				$48,450

Cuando encontramos un problema que no cumple con la condición $m + n - 1$ = Casillas ocupadas.

Primero se escoge el número de casillas que se requieren esten ocupadas para cumplir con esta condición; se les asigna un valor infinitesimal, pero positivo, de tamaño ε; y se cumple con que esten en posición independiente. Por ejemplo:

	A	B	C	D
1	4			3
2		5	7	
3				9

$m = 3$ $\qquad 3 + 4 - 1 = 6$

$n = 4$ Casillas ocupadas $= 5$

$6 \neq 5$

Por lo que se le asignara el valor ε a una casilla desocupada colocada en posición independiente.

Ahora sí, tenemos:

$3 + 4 - 1 = 6$

Casillas ocupadas $= 6$

$6 = 6$

Y puede aplicarse la prueba de optimalidad.

Ahora bien, cuando en un problema, las casillas ocupadas, no se encuentran en posición independiente. habrá un rizo, entendiendo por rizo, como una sucesión cerrada de líneas horizontales y verticales, entre algunas casillas ocupadas, en una matriz.

Estos rizos pueden ser eliminados asignando de nuevo, entre las casillas del rizo. Supongamos el siguiente ejemplo:

	A	B	C	D
1	4	2	5	
2		3	7	
3				3

Identifiquemos el rizo, escojemos el elemento mas pequeño, y lo sumamos y restamos alternativamente en cada casilla del rizo.

	A	B	C	D
1	4	$2(^{-2})$	$5(^{+2})$	
2		$3(^{+2})$	$7(^{-2})$	
3				3

Y nos queda:

	A	B	C	D
1	4	0	7	
2		5	5	
3				3

Y las asignaciones en las casillas ocupadas quedan en posición independiente y se cumple con la condición de independencia.

Una vez que en un problema se hubieran cumplido las dos condiciones y que se hubiera aplicado la pueba de optimalidad; en caso de que alguno de los resultados de las casillas no ocupadas hubiera sido negativo, estó, nos indicaría que no es la solución óptima. La casilla donde se hubiera obtenido dicho valor negativo; junto con otras casillas ocupadas formarían un rizo, y se le daría el mismo tratamiento explicado anteriormente, para volver a aplicar la prueba de optimalidad y seguir el proceso.

B I B L I O G R A F I A

APUNTES DE FINANZAS III.

Solís Rosales, Ricardo y Oropeza Pérez, Enrique
UNAM (F.C.A.)

TECNICAS MODERNAS DE ADMINISTRACION FINANCIERA

J. R. Franks y J.E. Broyles
Editorial Limusa (1983)

ANALISIS Y EVALUACION DE PROYECTOS DE INVERSION

Coss Bu, Raul
Editorial Limusa (1986)

ADMINISTRACION FINANCIERA DE EMPRESAS

J. Fred Weston y Eugen F. Brigham
Editorial Interamericana

TOMA DE DECISIONES POR MEDIO DE INVESTIGACION DE OPERACIONES
Thierauf J. Robert y Grosse A. Richard
Editorial Limusa (1983)

PROGRAMACION LINEAL (teoría y Práctica)

Cerecedo Jorge, Simon Nadima, Rojas Armando y Zubieta Judith
Facultad de Contaduría y Administración (1984)

INVESTIGACION DE OPERACIONES

Sasieni Maurice, Yaspar Arthur y Friedman Lawrence
Editorial Limusa (1980)