

MODELACION Y EXPERIMENTACION DE BARRAS SUJETAS A COR
TANTE PURO

JUAN IGNACIO VELAZQUEZ DIMAS

TESIS

Presentada a la División de Estudios de
Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERIA
de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener
el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA
(MECANICA)

CIUDAD UNIVERSITARIA
Febrero 1989

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

En el presente trabajo se presenta una modelación mecánica y experimental del problema de cortante puro de barras prismáticas.

La parte de la modelación mecánica comprende la determinación de la función de deformación que transforma los puntos de la configuración no deformada en puntos de la configuración deformada, así como los campos vectoriales y tensoriales de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos, respectivamente.

Se presenta un caso general de cortante no lineal para el cual se determinan campos vectoriales y tensoriales materiales. Tal caso es particularizado por exigencias de equilibrio del balance del momento angular en los casos de: cortante lineal con extensión simple y cortante puro para los cuales se determinaron campos materiales (configuración no deformada) y campos espaciales (configuración deformada).

La parte experimental se diseñó en base a la modelación mecánica antes descrita utilizando el método fotoelástico como técnica para "reproducir" el cortante puro. Se utilizó un poliuretano Psm-4 como material fotoelástico del que se caracterizaron las propiedades ópticas y mecánicas correspondientes.

Finalmente se presenta la comparación entre los resultados analíticos y los obtenidos mediante la experimentación.

NOMENCLATURA

<u>B</u>	campo tensorial de deformación izquierdo de Cauchy-Green
B	cuerpo
<u>b</u> ₀	campo vectorial de fuerzas de cuerpo materiales
<u>B</u>	campo vectorial de fuerzas de cuerpo especiales
<u>C</u>	campo tensorial de deformación derecho de Cauchy-Green
<u>C</u>	campo tensorial de elasticidad
<u>E</u>	campo tensorial de deformaciones infinitesimales
<u>e</u>	vector unitario
<u>F</u>	campo tensorial de gradientes de deformación
<u>F</u>	elemento mecánico (Fuerza axial o fuerza cortante)
f	función de deformación
f(B)	configuración deformada
<u>f</u>	campo vectorial de aceleraciones
<u>I</u>	tensor identidad
I	intensidad luminosa
K	constante
<u>M</u>	elemento mecánico momento (momento flexionante o momento torsionante)
<u>m</u>	momento por unidad de área
<u>N</u>	orden de franja isocromática
<u>n</u>	vector normal unitario a las fronteras
<u>P</u>	vector de posición
P	carga
<u>R</u>	espacio tridimensional
R	matriz de rotación
<u>S</u>	tensor de esfuerzos de Prola-Kirchhoff (en la configuración inicial)
<u>S</u>	esfuerzos residuales
<u>s</u>	tracción de superficie

S_T	sección transversal
I	tensor de esfuerzos de Cauchy (en la configuración deformada)
I_n	representación material del tensor de Cauchy
\underline{u}	campo vectorial de desplazamiento
$x_1 = x$	coordenada en x
$x_2 = y$	coordenada en y
$x_3 = z$	coordenada en z
β	módulo de Young
$\underline{\theta}$	vector nulo
ξ	espacio euclidiano de puntos
$\epsilon_{\alpha\kappa\lambda}$	símbolo de permutación
σ_f	constante de calibración fotoelástica
ν	relación de Poisson
\otimes	producto tensorial
\times	producto vectorial

I N D I C E

CAPITULO	PAGINA
RESUMEN - - - - -	i
AGRADECIMIENTO - - - - -	ii
NOMENCLATURA - - - - -	iii
I INTRODUCCION - - - - -	1
II MODELACION MECANICA - - - - -	6
2.1 INTRODUCCION - - - - -	6
2.2 DEFINICION GEOMETRICA DE BARRA E HIPOTESIS CINEMATICAS - - -	8
2.3 CAMPOS VECTORIALES Y TENSORIALES: DESPLAZAMIENTOS, DE- FORMACIONES Y ESFUERZOS - - - - -	10
2.3.1 TRACCIONES DE SUPERFICIE Y CONDICIONES DE FRONTERA ---	18
2.4 ELEMENTOS MECANICOS - - - - -	21
2.5 TENSOR DE CAUCHY - - - - -	24
2.6 CORTANTE PURO - - - - -	25
2.7 TRACCIONES DE SUPERFICIE Y CONDICIONES DE FRONTERA - - - -	30
2.8 ELEMENTOS MECANICOS - - - - -	31
2.9 CORTANTE LINEAL CON EXTENSION EN e_1 , e_2 Y e_3 - - - -	33
2.10 TRACCIONES DE SUPERFICIE Y CONDICIONES DE FRONTERA - - - -	36
2.11 ELEMENTOS MECANICOS - - - - -	45
2.12 CAMPOS ESPACIALES - - - - -	48
2.13 TRACCIONES DE SUPERFICIE Y CONDICIONES DE FRONTERA: Caso cortante puro - - - - -	50
2.14 ELEMENTOS MECANICOS - - - - -	52
2.15 TRACCIONES DE SUPERFICIE Y CONDICIONES DE FRONTERA: Caso cortante lineal - - - - -	57
2.16 ELEMENTOS MECANICOS - - - - -	59
III ANALISIS EXPERIMENTAL DE UN PROBLEMA DE CORTANTE PURO - - -	62
3.1 INTRODUCCION - - - - -	62
3.2 TECNICA EXPERIMENTAL EMPLEADA Y SU JUSTIFICACION - - - -	63

3.3	DETERMINACION DE LAS PROPIEDADES MECANICAS Y OPTICAS DEL MATERIAL EMPLEADO EN EL EXPERIMENTO - - - - -	64
3.4	MODELO EXPERIMENTADO Y MARCO DE CARGA - - - - -	66
3.5	OBTENCION DE DATOS Y SU INTERPRETACION - - - - -	68
IV	CONCLUSIONES - - - - -	70
	REFERENCIAS - - - - -	73
	FIGURAS - - - - -	75
	APENDICE A: DISCUSION DE LA FUNCION DE DEFORMACION DEL CORTANTE NO LINEAL - - - - -	96
	APENDICE B: DISCUSION DE LA FUNCION DE DEFORMACION DEL CORTANTE LINEAL CON EXTENSION - - - - -	101
	APENDICE C: EL METODO FOTOELASTICO - - - - -	104

CAPITULO I

INTRODUCCION

En la Mecánica de Materiales existen problemas que se presentan en forma directa y sus efectos se pueden apreciar físicamente, tales como: flexión, carga axial, pandeo, etc., y otros cuyos efectos no son posible ver directamente como es el caso del cortante puro, cuya discusión mecánica y experimental comprende el presente trabajo de Tesis.

El cortante puro es difícil de darse en forma directa, existiendo algunos estados de esfuerzos donde es posible encontrarlo, tales como un estado biaxial de esfuerzos son $S_2 = -S_1$ ($\sigma_y = -\sigma_x$) analizado en planos a 45° , o en una sección transversal de una barra sujeta a torsión pura.

Al discutir mecánica y experimentalmente el problema de cortante puro, se pretende lograr los siguientes objetivos:

- a) La modelación matemática del problem de cortante puro a partir de suponer un cortante generalizado.
- b) Justificar el cortante puro tratado en la Mecánica de Materiales Clásica, utilizando la Mecánica del Medio Continuo.
- c) Analizar y reproducir experimentalmente el problema mencionado atendiendo las restricciones tanto cinemáticas como de cargas impuestas por la modelación mecánica. Para demostrar que a partir de esta se pueden diseñar experimentos, y al mismo tiempo justificar la relación entre la modelación y la experimentación física;
- d) Justificar posibles investigaciones en la Mecánica de Materiales utilizando la metodología empleada en el presente trabajo.

Para desarrollar el presente trabajo de tésis, y lograr los objetivos

antes mencionados, se dividió éste en tres capítulos y tres apéndices.

El primer capítulo es el que contempla todo lo relacionado con la modelación mecánica del problema de cortante con todas sus variantes. Para lograr lo anterior, se parte de un problema generalizado de cortante, cuyas condiciones cinemáticas se dan en las ecuaciones (2-6), las que permiten de terminar la función de deformación (no lineal algebraicamente) para este caso, y que se expresa en (2-7) y se discute en el apéndice A.

También se determinaron los campos tensoriales y vectoriales (Gradiente de deformación, desplazamientos, deformaciones de Green-Cauchy izquierdo y derecho, deformaciones infinitesimales, esfuerzos y elementos mecánicos (fuerzas y momentos)). Siguiendo una notación tipo Gurtin [13].

Al discutir el cortante generalizado, se encuentra que las condiciones de balance angular $(2-26)_2$ expresadas literalmente en (2-33), se satisfacen siempre y cuando se den las condiciones cinemáticas (2-34) y (2-35).

Debido a lo difícil de dar las condiciones anteriores, el problema se deja a nivel de campos materiales. Para darse una idea de lo anterior obsérvense las figuras 3 y 4, donde se ilustran las tracciones de superficie, fuerzas de cuerpo y condiciones de frontera.

Buscando condiciones cinemáticas que satisfagan el balance angular del problema anterior, es como se determinan las condiciones (2-35), (2-37) y (2-38) de las que se derivan como casos particulares, dos estados de cortante: uno que se le llama cortante puro o cortante simple, dado por (2-37) y (2-38), y otro llamado cortante lineal con extensión, producto de satisfacer (2-35).

Del cortante puro se puede decir que resulta de utilizar el balance angular (2-37) en (2-34) y ésta en (2-7), resultando la función de deformación (2-60) que gobierna este problema, la cual sirve para determinar todos los campos vectoriales y tensoriales mencionados en el cortante generalizado. En este caso, la modelación mecánica comprende tanto campos materiales como espaciales.

Lo más relevante que se puede decir del cortante simple, es que es isocórico, es decir, preserva volúmenes. Aunque existen condiciones como la (2-76), en la que se exige un campo de fuerzas nulas (difícil de dar). Por lo que el cortante simple, tal y como lo trata la Mecánica de Materiales, sin justificarlo, es difícil de reproducir sobre todo en cuerpos sujetos a fuerzas gravitacionales.

Para el caso de cortante como extensión en tres direcciones e_1 , e_2 y e_3 , deducido a partir de introducir las condiciones cinemáticas (2-86)-(2-91) en (2-34), tiene como tensor de esfuerzos de Piola a (2-95), cuyas componentes son: $S_{13} = S_{31}$ y S_{22} .

Lo interesante de este caso es que todos los campos (esfuerzos, deformaciones, desplazamientos, tracciones de superficie, fuerzas de cuerpo, etc.), se determinaron a partir del estado de esfuerzos (2-95), hasta llegar a la función de deformación lineal (2-121), la que se discute en el apéndice B.

Como se ve, aquí queda demostrado que es posible resolver un problema de la mecánica suponiendo, ya sea la función de deformación (los dos primeros casos) o partiendo de un estado de esfuerzos como lo demuestra el último caso.

Algunas de las características principales del cortante lineal, como lo son: tracciones de superficie, fuerzas de cuerpo y condiciones de frontera, se ilustran en las figuras 8 y 9.

El segundo capítulo comprende la etapa experimental, donde se utiliza la fotoelasticidad como herramienta experimental para "reproducir" el cortante puro, atendiendo a las condiciones impuestas en la modelación mecánica.

Para hacerlo, se hizo primeramente un modelo de material fotoelástico, que sirvió para obtener las gráficas de datos de las figuras 18, 19 y 20, en las que se observa que el material fotoelástico (Psm-4) tiene un comportamiento lineal tanto óptico como mecánico.

Lo uniforme de las gráficas mencionadas se debe al marco de carga que se diseñó tomando en cuenta la modelación mecánica, que permitió "reproducir" experimentalmente el problema de cortante puro.

También se maquinó una barra, de la que se determinaron las propiedades ópticas y mecánicas (3-5) y (3-2), esto es, constante de calibración fotoelástica, módulo de elasticidad y relación de Poisson, mismas que se emplearon en la determinación de resultados teóricos y experimentales.

Los patrones de franjas de isoclinas e isocromáticas que aparecen en las figuras 16 y 17 son más que elocuentes para dar una idea de cómo se reprodujo el cortante; la uniformidad de los patrones habla por sí sola.

En cuanto a los detalles de la fotoelasticidad, éstos se dan en el apéndice C, donde, se dan sin mucho detalle los fundamentos y alcances de ésta, para el caso bidimensional.

Finalmente, cabe hacer notar que los objetivos planteados inicial

mente en la presente tesis, se lograron. :

Y ésto queda reflejado claramente en el capítulo de las conclusiones.

CAPITULO II

MODELACION MECANICA

2.1 Introducción.

El objetivo del presente capítulo es desarrollar la metodología apropiada para estudiar el problema de cortante puro, utilizando la modelación mecánica. Y, al mismo tiempo darle una justificación al problema de cortante puro tal y como lo trata la Resistencia de Materiales desde un punto de vista de la mecánica del medio continuo.

Es en este sentido, como al suponer que una barra experimenta una rotación con extensión, se determina primeramente la función de deformación que gobierna el problema general, que se ha llamado Cortante no Lineal con Extensión, y que se discute en primer término, para el que se determinan todos los campos tensoriales (gradiente de deformación de desplazamiento, tensores de Green-Cauchy, izquierdo y derecho, infinitesimales y de esfuerzos), y mediante las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos, el estado de fuerzas que producen dicho fenómeno. Así como los elementos mecánicos (fuerzas y momentos) en la sección transversal de la barra producido por el estado de cargas asociado al problema. Y es discutiendo la condición de equilibrio de momentos, cómo se obtienen los siguientes estados de cortante a partir del caso general:

1. Cortante Simple sin Extensión;
2. Cortante lineal con Extensión en e_1 , e_2 , y e_3 .

Para cada uno de los casos anteriores se discuten por separado sus campos materiales y espaciales.

Resulta importante señalar algunas características de cada caso, por lo que respecta al primero, que es derivado a partir de usar las condicio

nes de balance angular (2-37) en (2-34) y posteriormente en la función de deformación (2-7), para de ahí obtener (2-60), que representa la función de deformación que gobierna un estado de cortante puro tal y como lo trata la resistencia de materiales clásica, dándole a través de la determinación de los campos tensoriales mencionados arriba, tanto en forma material como espacial, una verdadera justificación al mencionado problema.

En cuanto al segundo problema (Cortante Simple con Extensión), se decía que este fue resuelto en forma inversa al anterior, ya que se partió de conocer un estado de esfuerzos (2-95), producto de utilizar las condiciones cinemáticas (2-86)-(2-91) en (2-34). Y de ahí determinar todos los campos tensoriales ya mencionados, hasta llegar a obtener la función de deformación apropiada dada por (2-121). Para éste caso, igual que el anterior, también se discutieron sus campos materiales y espaciales (esfuerzos, deformaciones, desplazamiento, tracciones de superficie, fuerzas de cuerpo, etc.). Dando a través de los desarrollos correspondientes de cada problema, una visión clara, de lo que se le llama estado de cortante puro.

Como aclaración importante es bueno mencionar que en este capítulo la nomenclatura empleada es tipo Gurtin.

2.2 DEFINICION GEOMETRICA DE BARRA E HIPOTESIS CINEMATICAS.

En esta parte se define con respecto a un sistema ortogonal de referencia, una barra prismática, denotada por B, como el siguiente subconjunto de R^3 .

$$B = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : 0 \leq x_2 \leq b, 0 \leq x_3 \leq h, x_1 \in \bar{\Omega} \right\} \subset R^3 \quad (2-1)$$

donde

$\Omega_1 = [0, L]$, $b: \Omega \rightarrow R^+$, $h: \Omega \rightarrow R^+$ y $L: \Omega \rightarrow R^+$, son respectivamente los espesores del cuerpo B, en las direcciones, e_1 , e_2 y e_3 .

Esta definición se muestra en la (fig. 1), donde, se observa que la frontera ∂B , del cuerpo está dada por:

$$\partial B = \sum_{i=1}^6 \partial B_i = \bigcup_{i=1}^6 \partial B_i, \quad (2-2)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \partial B_1 &= \{ (L, x_2, x_3) : 0 < x_2 < b, 0 < x_3 < h \}, \\ \partial B_2 &= \{ (0, x_2, x_3) : 0 < x_2 < b, 0 < x_3 < h \}, \\ \partial B_3 &= \{ (x_1, b, x_3) : 0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_3 \leq h \}, \\ \partial B_4 &= \{ (x_1, 0, x_3) : 0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_3 \leq h \}, \\ \partial B_5 &= \{ (x_1, x_2, h) : 0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq b \}, \\ \partial B_6 &= \{ (x_1, x_2, 0) : 0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq b \}. \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

La sección transversal, S_T , de la barra la definiremos por:

$$S_T = \{(x_2, x_3) : 0 \leq x_2 \leq b, 0 \leq x_3 \leq h\} \subset \mathbb{R}^2 \quad (2-4)$$

de donde se observa que es un subconjunto acotado de \mathbb{R}^3

El primer objetivo es determinar la función de deformación $f: B \rightarrow f(B)$ del cuerpo B anteriormente descrito, que se supone sujeto a un estado de cortante simple en el plano $x_1 x_3$, con extensión en las demás direcciones. Para esto se supone que dicho cuerpo esta sujeto a la siguiente función de deformación:

$$f(X, Y, Z) = (a_0 + a_1 X + a_2 Z + a_3 XZ, c_0 + c_1 Y, d_0 + d_1 Z), \quad \forall (X, Y, Z) \in B. \quad (2-5)$$

Cuyos coeficientes, se evalúan a partir de condiciones cinemáticas determinadas de la configuración deformada que se muestra en la (fig. 2)

De la (fig. 2) se observa

$$\left. \begin{aligned} f_0(0,0,0) &= (0,0,0), \\ f_1(0,0,h) &= (x_1, y_1, z_1) = (z_1 \tan \theta, 0, z_1) = (\alpha z_1, 0, z_1), \\ f_2(0,0,h) &= (x_2, 0, z_1), \\ f_3(L,0,0) &= (L, 0, 0), \\ f_4(0,b,0) &= (0, y_4, 0), \\ f_5(0,b,h) &= (\alpha z_1, y_4, z_1), \\ f_6(L,b,h) &= (x_2, y_4, z_1), \\ f_7(L,b,0) &= (L, y_4, 0). \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

donde, $\tan \theta = \alpha$. Al determinar con estas restricciones los coeficientes de tal función (para detalles ver apéndice A) se concluye que:

$$f(X, Y, Z) = \left[X + \frac{\alpha z_1}{h} Z + \frac{(x_2 - L - \alpha z_1)}{Lh} XZ, \frac{y_4}{b} Y, \frac{z_1}{h} Z \right] \quad \forall (X, Y, Z) \in B \quad (2-7)$$

Obsérvese, que la matriz del campo tensorial $F: B \rightarrow L(R^3, R^3)$, llamado gradiente de deformación, está dado por

$$[F(X, Y, Z)] = [\nabla f(X, Y, Z)] = \left[\frac{\partial f_i(X, Y, Z)}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} 1+kZ & 0 & \frac{\alpha z_1}{h} + kX \\ 0 & y_4/b & 0 \\ 0 & 0 & z_1/h \end{bmatrix} \text{ en } (X, Y, Z) \in B \quad (2-8)$$

donde:

$$k \equiv \frac{x_2 - L - \alpha z_1}{Lh} \quad 2-9$$

Observación 2-1: Como $F(X, Y, Z)$ depende de las coordenadas, $f: B \rightarrow f(B)$ representa una deformación no homogénea.

Comentario: Si se analiza todo lo que hasta ahora se ha determinado se llega a la conclusión de que el fenómeno objeto de estudio es CORTANTE SIMPLE CON EXTENSION, para poder reproducirlo experimentalmente habrá que dar una serie de condiciones, en cargas de cuerpo y superficie, que hasta este momento no se sabe si se podrán aplicar o no. Por lo que se continúa con el objeto de aclarar el presente comentario.

2-3. CAMPOS VECTORIALES Y TENSORIALES: DESPLAZAMIENTOS, DEFORMACIONES Y ESFUERZOS.

A continuación, se intenta de determinar los campos tensoriales de deformación, desplazamientos, deformaciones de Green-Cauchy derecho e izquierdo, infinitesimal y de esfuerzos.

Tensor de deformación.

$$F(X, Y, Z) = F_{ij}(X, Y, Z) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad \forall (X, Y, Z) \in B \quad (2-10)$$

De acuerdo a lo encontrado en (2-8), se tiene que (2-10) está dado para este caso como:

$$\underline{F}(X,Y,Z) = \left[(1+kZ)\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \left(\frac{\alpha z_1}{h} + kX\right)\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \frac{y_4}{b}\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{z_1}{h}\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \right] \quad \forall (X,Y,Z) \in B \quad (2-11)$$

Continuando, ahora se procede a determinar el campo vectorial de desplazamiento $\underline{u}: B \rightarrow V \cong \mathbb{R}^3 \cong \xi$, definido por:

$$\underline{u}(X,Y,Z) = f(X,Y,Z) - (X,Y,Z) \quad \text{en } (X,Y,Z) \in B \quad (2-12)$$

de donde, se obtiene al sustituir (2-7) en (2-12) que

$$\underline{u}(X,Y,Z) = \left[\frac{\alpha z_1}{h}Z + kXZ, \frac{y_4-b}{b}Y, \frac{z_1-h}{h}Z \right] \quad \text{en } (X,Y,Z) \in B \quad (2-13)$$

con lo que puede construirse el campo Tensorial $\nabla \underline{u}: B \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ llamado gradiente de desplazamientos, cuya representación matricial es:

$$[\nabla \underline{u}(X,Y,Z)] \equiv \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j}(X,Y,Z) \right] = \begin{bmatrix} kZ & 0 & \frac{\alpha z_1}{h} + kX \\ 0 & \frac{y_4-b}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_1-h}{h} \end{bmatrix}, \quad \text{en } (X,Y,Z) \in B \quad (2-14)$$

cuya representación tensorial es:

$$\nabla \underline{u}(X,Y,Z) = kZ \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \left(\frac{\alpha z_1}{h} + kX\right) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \frac{y_4-b}{b} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{z_1-h}{h} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3, \quad \forall (X,Y,Z) \in B \quad (2-15)$$

se determinan a continuación los tensores de deformación de Green-Cauchy derecho e izquierdo esto es:

$$C = F'F \quad \text{y} \quad B = FF'$$

Cuyas representaciones matriciales son:

$$[C(X, Y, Z)] = \begin{bmatrix} (1+kZ)^2 & 0 & [1+kZ] \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] \\ 0 & y_4^2/b^2 & 0 \\ [1+kZ] \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] & 0 & \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right]^2 + \frac{z_1^2}{h^2} \end{bmatrix} \text{ en } (X, Y, Z) \in B \quad (2-16)$$

$$[B(X, Y, Z)] = \begin{bmatrix} (1+kZ)^2 \left(\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right)^2 & 0 & \frac{\alpha z_1^2}{h^2} + \frac{z_1}{h} kX \\ 0 & y_4^2/b^2 & 0 \\ \frac{\alpha z_1^2}{h^2} + \frac{z_1}{h} kX & 0 & z_1^2/h^2 \end{bmatrix} \text{ en } (X, Y, Z) \in B \quad (2-17)$$

Ahora se construye el campo tensorial de deformaciones infinitesimales $\underline{E} : B \rightarrow s(R^3, R^3)$ definido por

$$\underline{E}(X, Y, Z) = \frac{1}{2} [\underline{\nabla} \underline{u}(X, Y, Z) + \underline{\nabla} \underline{u}^T(X, Y, Z)] \text{ en } (X, Y, Z) \in B \quad (2-18)$$

cuya representación matricial es

$$[\underline{E}(X, Y, Z)] = \begin{bmatrix} kZ & 0 & \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] \\ 0 & \frac{y_4 - b}{b} & 0 \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] & 0 & \frac{z_1 - h}{h} \end{bmatrix} \text{ en } (X, Y, Z) \in B \quad (2-19)$$

Estimación del error que se comete al linealizar el problema objeto de este estudio. se sabe que:

$$\epsilon = \|\underline{\nabla} \underline{u}_\epsilon\| = \text{tr} (\underline{\nabla} \underline{u}_\epsilon^T \underline{\nabla} \underline{u}_\epsilon)^{\frac{1}{2}} \quad (2-20)$$

Pero

$$\text{Tr}(\underline{\nabla} \underline{u}^T \underline{\nabla} \underline{u}) = \underline{\nabla} \underline{u}_{ik}^T \underline{\nabla} \underline{u}_{ki} = \underline{\nabla} \underline{u}_{ki} \underline{\nabla} \underline{u}_{ki} \quad (2-21)$$

por lo que (2-20) desarrollando operaciones es

$$\epsilon = \left[(kZ)^2 + \left(\frac{y_4 - b}{b} \right)^2 + \left(\frac{z_1 - h}{h} \right)^2 + \left(\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-22)$$

Con todo lo calculado hasta ahora, se puede

determinar el estado de esfuerzos al que está sujeto el cuerpo B, bajo las condiciones cinemáticas impuestas.

Si se parte de que el cuerpo B es elástico lineal y su ecuación constitutiva es:

$$\underline{S}(X,Y,Z) [\underline{E}] = \hat{S}(X,Y,Z) [\underline{I}] + \underline{C}(X,Y,Z) [\underline{E}] + O(\epsilon) \quad (2-23)$$

Considerando que los esfuerzos residuales $\hat{S}(X,Y,Z) [\underline{I}]$ son nulos, y estimando un error de orden $O(\epsilon)$, y asumiendo por otra parte que B es homogénea, isotrópica y elástica lineal, ---- los esfuerzos están dados por:

$$\underline{S}(X,Y,Z) = \underline{C}[\underline{E}] = \frac{\beta}{1+\nu} \left[\underline{E}(X,Y,Z) + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr } \underline{E}(X,Y,Z) (\underline{1}) \right] \quad (2-24)$$

donde β es el módulo de Young, ν es el coeficiente de Poisson $0 < \nu < \frac{1}{2}$ y

$\underline{E}(X,Y,Z)$ es el Tensor de deformación infinitesimal, $(X,Y,Z) \in B$.

Por tanto, después de sustituir datos en (2-24), se determinan cada una de las componentes del Tensor $\underline{S}(X,Y,Z)$, también llamado tensor de Piola-Kirchhoff, cuya representación matricial es:

$$[\underline{S}(X,Y,Z)] = \frac{\beta}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} kZ + \frac{\nu}{1-2\nu} \left[\frac{y_4 - b}{b} + \frac{z_1 - h}{h} \right] & 0 & \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] \\ 0 & \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{y_4 - b}{b} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left[kZ + \frac{z_1 - h}{h} \right] & 0 \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] & 0 & \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{z_1 - h}{h} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left[kZ + \frac{y_4 - b}{b} \right] \end{bmatrix}$$

$$\text{en } (X,Y,Z) \in B \quad (2-25)$$

El objetivo siguiente comprende la discusión de las cargas que producen el fenómeno objeto del presente trabajo para lo cual se debe mostrar primeramente que Piola-Kirchhoff, satisface las condiciones de consistencia, para fuerzas y momentos expresados por:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \underline{S}(X,Y,Z) + \underline{b}_0(X,Y,Z) &= \rho \ddot{f}(X,Y,Z) = \underline{\theta} \text{ caso estático} \\ \underline{S}(X,Y,Z) \underline{F}^T(X,Y,Z) &= \underline{F}(X,Y,Z) \underline{S}^T(X,Y,Z) \end{aligned} \right\} \text{ en } (X,Y,Z) \in B \quad (2-26)$$

De la primera condición de (2-26) se determina el campo vectorial $\underline{b} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$, llamado fuerzas de cuerpo:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{S}(X,Y,Z) + \underline{b}_0(X,Y,Z) &= \underline{\theta} \quad \text{o} \\ \underline{b}_0(X,Y,Z) &= -\operatorname{div} \underline{S}(X,Y,Z) \end{aligned} \quad (2-27)$$

que en componentes cartesianas se reduce a:

$$b_{0i} = -\operatorname{div} S_{ij}(X,Y,Z), \quad \text{en } (X,Y,Z) \in B \subset \mathbb{R}^3 \quad (2-28)$$

Por lo que al sustituir datos en (2-20) y realizando las operaciones correspondientes se tiene que cada uno de los componentes de fuerzas de cuerpo son:

$$\left. \begin{aligned} b_{01} = b_{02} &= \theta, \\ b_{03}(X,Y,Z) &= \frac{-\beta k}{2(1-2\nu)(1+\nu)} = b_{03}. \end{aligned} \right\} \quad (2-29)$$

Reescribiendo la expresión para b_{03} en (2-29),

$$b_{03} = \frac{-\beta}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{x_2^2 - L - \alpha z_1}{Lh} \quad (2-30)$$

Observación 2-2: (2-30) implica que el movimiento del cuerpo está restringido de la siguiente manera:

Para un problema físico dado, β, ν, α son datos. Por

tanto, la incógnita es k , que por depender de ciertas variables es más difícil conocerla, resultando este procedimiento más factible para resolver un problema dado, que partir a la inversa dar un valor de k , y después buscar un material que dado su peso y propiedades mecánicas satisfaga el valor de k dado.

Despejando α de (2-30);

$$\alpha = \left[\frac{2(1+\nu)(1-2\nu) \cdot b \cdot \sigma_3}{\beta} Lh + x_2 - L \right] \frac{1}{z_1} \quad (2-31)$$

Esta última expresión indica qué parámetros hay que controlar para decir que valores debe tener el ángulo de rotación α , y en base a esto decir si el problema es lineal o no lineal en cuanto a deformaciones o sea que los gradientes de los desplazamientos sean pequeños o grandes. ■

Ahora, procediendo a examinar la segunda condición de consistencia, o sea equilibrio de momentos.

Para $S(X,Y,Z) F^T(X,Y,Z)$, se tiene

$$SF^T = \frac{\beta}{1+\nu} \begin{bmatrix} (1+kZ) \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} kZ + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{y_4-b}{b} + \frac{z_1-h}{h} \right) \right] + \frac{z_1}{2h} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] \\ \frac{1}{z} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right]^2 \\ 0 \quad \frac{y_4}{b} \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{y_4-b}{b} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(kZ + \frac{z_1-h}{h} \right) \right] \quad 0 \\ \frac{1}{z} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] [1+kZ] + \\ \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{z_1-h}{h} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(kZ + \frac{y_4-b}{b} \right) \right] \quad 0 \quad \frac{z_1}{h} \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{z_1-h}{h} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(kZ + \frac{y_4-b}{b} \right) \right] \end{bmatrix}$$

en $(X,Y,Z) \in B \quad (2-32)$

Para $F(X,Y,Z) \approx S^T(X,Y,Z)$:

$$\frac{FS^T - \beta}{1+\beta} \begin{bmatrix} [1+kZ] \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} kZ + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{y_4-b}{b} + \frac{z_1-h}{h} \right) \right] + 0 \quad \frac{1}{2} [1+kZ] \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] + \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right]^2 \quad \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{z_1-h}{h} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(kZ + \frac{y_4-b}{b} \right) \right] \\ 0 \quad \frac{y_4}{b} \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{y_4-b}{b} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(kZ + \frac{z_1-h}{h} \right) \right] \quad 0 \\ \frac{z_1}{2h} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] \quad 0 \quad \frac{z_1}{h} \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{z_1-h}{h} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(kZ + \frac{y_4-b}{b} \right) \right] \end{bmatrix}$$

en $(X,Y,Z) \in B$ (2-33)

Observación 2-3: Analizando (2-32) y (2-33), de acuerdo con la ecuación de equilibrio de momentos deberfanser iguales, de entrada se aprecia que no lo son, pero existen condiciones suficientes que permiten que si sean iguales, las que a continuación se discuten

De (2-32) y (2-33) se observa, que para que estas sean iguales se deberá cumplir que:

$$\frac{z_1}{2h} = \frac{1}{2} [1+kZ] + \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{z_1-h}{h} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(kZ + \frac{y_4-b}{b} \right) \right] \quad (2-34)$$

La condición, que hace posible que (2-34) sea válida es:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{h} &= 1 + kZ \quad y, \\ (1-\nu) \frac{z_1-h}{h} + \nu \left(kZ + \frac{y_4-b}{b} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2-35)$$

Para que la segunda expresión de (2-35) sea satisfecha, se deberá cumplir que:

$$\frac{z_1 - h}{h} = 0 \rightarrow z_1 = h, \text{ y}$$

$$kz + \frac{y_4 - b}{b} = 0. \quad (2-36)$$

Con $z_1 = h$ en la primera expresión de (2-35) se determina que $k=0$, y a su vez con esta condición en la segunda expresión de (2-36), se deduce que $y_4 = b$. Por tanto, tenemos que una condición muy importante, que haga posible que (2-34) sea satisfecha, y por ende la condición de equilibrio de momentos es:

$$z_1 = h,$$

$$y_4 = b. \quad (2-37)$$

$$k = 0.$$

Es de esperarse que (2-37) no es la única condición, deberán existir otras condiciones cinemáticas que satisfagan (2-33) y por tanto (2-34). ■

Por otro lado, analizando la condición $k=0$, para la ecuación de equilibrio de fuerzas (2-30), se determina que:

$$\frac{-\beta k}{2(1-\nu)(1+\nu)} = b\alpha_3 + k = \frac{2(1-2\nu)(1+\nu)}{\beta} = 0 \leftrightarrow b\alpha_3 = 0, \quad (2-38)$$

además, para que $k=0$ se tendrá que satisfacer que:

$$x_2 - L - \alpha z_1 = 0 \text{ o } x_2 - L = \alpha z_1 \rightarrow \alpha z_1 = \tan \theta z_1 = x_2 - L,$$

de donde

$$\tan \theta = \frac{x_2 - L}{z_1} \quad (2-39)$$

La ecuación (2-39) lo que confirma, es lo que se establece en la configuración deformada, o sea se demuestra algo que físicamente se da en

en el fenómeno que se supone, a través de (2-7).

Observando (2-37), (2-38) y (2-39) puede apreciarse, más adelante, que estas expresiones lo que garantizan es un estado de cortante simple sin extensión.

Observación 2-4: Analizando todo lo encontrado en las expresiones de (2-32)-(2-39), se puede decir, que estos conducen a tener tres problemas de cortante a tratar, que son:

a) Un cortante no lineal con extensiones en e_1 , e_2 y e_3 , que resulta de la existencia de ciertas condiciones cinemáticas diferentes de (2-37), tal que (2-35) sea satisfecha, es el caso tratado hasta aquí.

b) Un cortante simple lineal sin extensión producto de (2-37) y (2-38) en (2-34) donde las deformaciones sean infinitesimales, y el último

c) Un cortante lineal con extensión, que sería un caso intermedio, producido por (2-35), y que más adelante se discute ampliamente.

Es en base a lo anterior, que se propone a estudiar separadamente los casos antes mencionados.

2-3.1 Tracciones de Superficie y Condiciones de Frontera caso a)

para este caso, servirán todos los campos materiales encontrados hasta (2-35) faltando por determinar, tracciones de superficie, condiciones de frontera, elementos mecánicos y la representación material del tensor de Cauchy.

A continuación, se determina el campo vectorial $\underline{S} : B \rightarrow R^3$ llamado tracciones de superficie. Del Teorema de Cauchy tenemos

$$\underline{S} = \underline{S} \cdot \underline{n} \text{ en } \partial B, \quad (2-40)$$

donde

$\underline{n} : \partial B \rightarrow \mathbb{R}^3$ es el campo vectorial de vectores unitarios, normales a ∂B .

\underline{S} : Tensor de Piola Kirchhoff

De acuerdo con el sistema de coordenadas y las fronteras enumeradas ver (fig. 1), las tracciones son: . .

Para ∂B_1 con $\underline{n} = (1, 0, 0)$:

$$S_1(L, Y, Z) = \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \nu \left[\frac{y_4 - b}{b} + \frac{z_1 - h}{h} \right] + (1-\nu) kZ \right\},$$

$$S_2(L, Y, Z) = 0,$$

$$S_3(L, Y, Z) = \frac{\beta}{2(1+\nu)} \{ \alpha z_1 + kX \}.$$

Para ∂B_2 con $\underline{n} = (-1, 0, 0)$:

$$S_1(0, Y, Z) = \frac{-\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \nu \left[\frac{y_4 - b}{b} + \frac{z_1 - h}{h} \right] + (1-\nu) kZ \right\},$$

$$S_2(0, Y, Z) = 0,$$

$$S_3(0, Y, Z) = \frac{-\beta}{2(1+\nu)} \{ \alpha a_1 + kX \}.$$

Para ∂B_3 con $\underline{n} = (0, 1, 0)$, se tiene

$$S_1(x, b, z) = 0,$$

$$S_2(x, b, z) = \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu) \frac{y_4 - b}{b} + \nu \frac{(z_1 - h)}{h} + \nu kZ \right\},$$

$$S_3(x, b, z) = 0.$$

Para ∂B_4 con $\underline{n} = (0,1,0)$, se tiene

$$S_1(X,0,Z) = 0,$$

$$S_2(X,0,Z) = \frac{-\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu) \frac{y_4-b}{b} + \frac{\nu(z_1-h)}{h} + \nu kZ \right\},$$

$$S_3(X,0,Z) = 0.$$

en ∂B (2-41)

Para la frontera ∂B_5 con $\underline{n} = (0,0,1)$, se determina

$$S_1(X,Y,h) = \frac{\beta}{2(1+\nu)} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right],$$

$$S_2(X,Y,h) = 0$$

$$S_3(X,Y,h) = \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{z_1-h}{h} + \frac{\nu(y_4-b)}{b} - \nu kZ \right].$$

Por último para ∂B_6 con $\underline{n} = (0,0,-1)$, se encuentra

$$S_1(X,Y,0) = \frac{-\beta}{2(1+\nu)} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right],$$

$$S_2(X,Y,0) = 0,$$

$$S_3(X,Y,0) = \frac{-\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{z_1-h}{h} + \frac{\nu(y_4-h)}{h} - \nu kZ \right].$$

Observación 2-5: de (2-41) puede decirse, que la barra bajo estudio está sujeta a tracciones de superficie en todas las caras, en algunas con tracciones normales y cortantes, entendiéndose mejor al ver la (fig. 3), donde están representadas esquemáticamente, tracciones de superficie y fuerzas de cuerpo. ■

El objetivo siguiente es determinar las condiciones de frontera

a que esta sujeto B. En la intersección de ∂B_4 y ∂B_6 , evaluando (2-13) con $u(X,0,0)$ resulta

$$u(X,0,0) = (0,0,0) \quad (2-42)$$

por lo que el cuerpo B, deberá verse como en la (fig. 4).

2-4 ELEMENTOS MECANICOS

En esta parte, se pretenden determinar los elementos mecánicos (fuerzas y momentos), que actúan sobre la sección transversal S_T de B, producidos por el vector esfuerzo $\underline{S} = (S_1, S_2, S_3)$ que actúa sobre esta, como se ilustra en la (fig. 5), y que al integrar los campos vectoriales de momentos y tracciones sobre S_T , se obtienen dichos elementos mecánicos mediante:

$$\left. \begin{aligned} \underline{F}(X,Y,Z) &= \int_{S_T} \underline{S}(X,Y,Z) dA = (F_1(X,Y,Z), F_2(X,Y,Z), F_3(X,Y,Z)) \\ \underline{M}(X,Y,Z) &= \int_{S_T} \underline{m}(X,Y,Z) dA = \int_{S_T} (P(Y,Z) \times \underline{S}(X,Y,Z) dA = (M_1(X,Y,Z), \\ & \quad M_2(X,Y,Z), M_3(X,Y,Z)) \end{aligned} \right\} \text{ en } (Y,Z) \in S_T \quad (2-43)$$

Para el problema bajo análisis, cortante no lineal con extensión, se tiene en la sección transversal la normal unitaria es:

$$\underline{n} = (1,0,0), \quad (2-44)$$

además el vector esfuerzo, está dado por:

$$\underline{S}(X,Y,Z) = (S_1(X,Y,Z), 0, S_3(X,Y,Z) = \left[\frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \nu \left(\frac{y_4 - b}{b} + \frac{z_1 - h_1}{h} \right) + (1-\nu) kZ \right\}, 0, \frac{\beta}{2(1+\nu)} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] \right] \text{ en } (Y,Z) \in S_T \quad (2-45)$$

De acuerdo con (2-45) solo actúan en S_T dos fuerzas, una normal en la

dirección X y una fuerza cortante en la dirección Z, las que se determinarán al sustituir (2-45) en (2-43), realizando la integración como sigue

$$F_1(x,b,h) = \int_0^h \int_0^b \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\nu \left(\frac{y_4-b}{b} + \frac{z_1-h}{h} \right) + (1+\nu) kZ \right] dY dZ$$

$$= \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \nu [h(y_4-b) + b(z_1-h)] + (1-\nu) \frac{x_2-L-\alpha z_1}{L} \frac{bh}{2} \right\} \quad (2-46)$$

$$F_2(x,b,h) = 0 \quad (2-47)$$

$$F_3(x,b,h) = \int_0^h \int_0^b \frac{\beta}{2(1+\nu)} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] dY dZ = \frac{\beta}{2(1+\nu)} \left[\alpha z_1 b + \frac{(x_2-L-\alpha z_1)}{L} bX \right] \quad (2-49)$$

Como se puede observar, en las expresiones para F_1 y F_3 , se simplificaron al sustituir la definición de k tal como se hizo en (2-9).

En cuanto al vector momentos $\underline{M}(X,Y,Z)$, dado por (2-43) en la expresión para momentos, el vector de posición $\underline{P}(Y,Z)$ está dado por

$$\underline{P}(Y,Z) = Y\underline{e}_2 + Z\underline{e}_3 \text{ en } (Y,Z) \in S_T, \quad (2-50)$$

y también, el vector esfuerzos está dado por:

$$\underline{S}(X,Y,Z) = S_k(X,Y,Z) \underline{e}_k \text{ en } (X,Y,Z) \in B, \quad (2-51)$$

Por otro lado, se tiene que los componentes de momento por unidad de área están dados como sigue:

$$\underline{m}(X,Y,Z) = \underline{P}(Y,Z) \times \underline{S}(X,Y,Z) = \left. \begin{aligned} & X_\alpha \underline{e}_\alpha \times S_k(S,Y,Z) \underline{e}_k \\ & \equiv X_\alpha S_k(X,Y,Z) \underline{e}_\alpha \times \underline{e}_k \\ & \equiv X_\alpha S_k(X,Y,Z) \epsilon_{\alpha k \ell} \underline{e}_\ell \\ & \text{con } \alpha=2,3, k, \ell=1,2,3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & X \in \bar{\Omega}_1 \\ & (Y,Z) \in S_T \end{aligned} \quad (2-52)$$

Por lo que cada uno de los componentes de $\underline{m}(X,Y,Z)$ de acuerdo con (2-52), y haciendo el cambio de coordenadas $(X,Y,Z) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, con el

objeto de simplificar el manejo matemático, son como sigue:

$$\left. \begin{aligned} m_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= \bar{x}_2 S_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) - \bar{x}_3 S_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \\ m_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= \bar{x}_3 S_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \\ m_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= -\bar{x}_2 S_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \bar{x}_1 \in \bar{\Omega} \\ (x_2, x_3) \in S_T(2-53) \end{array}$$

NOTA: Se les colocó la barra arriba a x_1, x_2 y x_3 en el cambio de coordenadas, con el fin de no confundirlas con las coordenadas de los puntos, definidas al principio del trabajo.

Por lo que al sustituir (2-45) en (2-53) y éstas a su vez en (2-43) se obtienen cada una de las componentes de momento sobre S_T , como sigue:

$$\begin{aligned} M_1(\bar{x}_1, b, h) &= \int_0^h \int_0^b \bar{x}_2 S_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) d\bar{x}_2 dx_3 = \int_0^h \int_0^b \frac{\beta}{2(1+\nu)} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + k\bar{x}_1 \right] \bar{x}_2 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 \\ &= \frac{\beta}{2(1+\nu)} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + \frac{x_2 - L - \alpha z_1}{Lh} \bar{x}_1 \right] \frac{b^2 h}{2} \end{aligned} \quad (2-54)$$

$$\begin{aligned} M_2(\bar{x}_1, b, h) &= \int_0^h \int_0^b \bar{x}_3 S_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 \\ &= \int_0^h \int_0^b \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \nu \left[\frac{y_4 - b}{b} + \frac{z_1 - h}{h} \right] + (1-\nu) k \bar{x}_3 \right\} \bar{x}_3 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3, \\ &\text{después de realizar operaciones} \\ &= \frac{\beta}{(1-\nu)(1-2\nu)} \left\{ \nu \left[\frac{y_4 - b}{b} + \frac{z_1 - h}{h} \right] \frac{bh^2}{2} + (1-\nu) \frac{x_2 - L - \alpha z_1}{L} \frac{b^2 h^2}{3} \right\}. \end{aligned} \quad (2-55)$$

De manera similar, se determina $M_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$

$$M_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \frac{-\beta}{(1-\nu)(1-2\nu)} \left\{ \nu \left[\frac{y_4 - b}{b} + \frac{z_1 - h}{h} \right] \frac{b^2 h}{2} + (1-\nu) \frac{x_2 - L - \alpha z_1}{L} \frac{b^2 h}{4} \right\} \quad (2-56)$$

Observación 2-6: Analizando (2-54)-(2-56) se observa que S_T está sujeta a dos momentos flexionantes M_2 y M_3 y un momento torsionante M_1 , debiéndose

este último a la ubicación del sistema de referencia, principalmente. ■

2-5 TENSOR DE CAUCHY

Siguiendo con el análisis, a continuación se determina la representación material del tensor de Cauchy, misma que se relaciona con los tensores de Piola y gradiente de deformación mediante la siguiente expresión:

$$\left. \begin{aligned} \underline{S}(X,Y,Z) &= \det \underline{F}(X,Y,Z) \underline{T}_m(X,Y,Z) \underline{F}^{-T}(X,Y,Z), \\ \underline{T}_m(X,Y,Z) &= (\det \underline{F}(X,Y,Z))^{-1} \underline{S}(X,Y,Z) \underline{F}^T(X,Y,Z), \end{aligned} \right\} \text{ en } (X,Y,Z) \in B \quad (2-57)$$

donde:

$\underline{T}_m(X,Y,Z)$ es la representación material de Cauchy, además, además

$$\underline{T}_m(X,Y,Z) = \underline{T}_m^T(X,Y,Z), \quad (2-58)$$

es decir, simétrico.

Por lo que, sustituyendo datos en (2-57), y desarrollando y simplificando se determina que:

$$\underline{T}_m(x,y,z) = \frac{\beta b h}{(1+\nu) y_4 z_1 (1+kZ)} \begin{bmatrix} (1+kZ) \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} kZ + \frac{\nu}{1-2\nu} \left[\frac{y_4-b}{b} + \frac{z_1-h}{h} \right] \right\} + 0 & \frac{z_1}{2h} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right]^2 & 0 \\ 0 & \frac{y_4}{b} \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{y_4-b}{b} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left[kZ + \frac{z_1-h}{h} \right] \right\} & 0 \\ \frac{1}{2}(1+kZ) \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] + 0 & \frac{z_1(1-\nu)}{h(1-2\nu)} \frac{z_1-h}{h} + 0 \\ \left\{ \frac{\alpha z_1}{h} + kX \right\} \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{z_1-h}{h} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left[kZ + \frac{z_4-b}{b} \right] \right\} & \frac{\nu}{1-2\nu} \left[kZ + \frac{z_4-b}{b} \right] \end{bmatrix} \quad \text{e } (X,Y,Z) \in B \quad (2-59)$$

Observación 2-7: Analizando los elementos que conforman $T_m(X,Y,Z)$, se observa que este no es simétrico, y lo será si se establecen las mismas condiciones que satisfacen (2-39), ya que Cauchy se relaciona en forma directa con el equilibrio de momentos, obsérvese (2-57) y (2-32). Por tanto, de una u otra manera se hubiesen abordado los tres temas a desarrollar que se mencionaron en su oportunidad anteriormente. ■

2-6 CORTANTE PURO

Este fenómeno, se obtiene al introducir las condiciones (2-37) y (2-38) en (2-32), (2-33) y (2-34), ocasionando una serie de simplificaciones en todos los desarrollos, hechos hasta (2-34).

El cortante simple tal y como lo implican (2-37) y (2-38), es la forma como lo trata la mecánica clásica, es imposible de reproducirlo dado que (37) no puede satisfacerse por ningún material, que posea masa y sujeto a fuerzas gravitacionales, aún cuando la mecánica clásica diga que los efectos debido a peso propio son despreciables, y pareciera esto congruente con (2-38).

Es con estas ideas en mente, cómo se desarrollará el cortante simple, tratando de ligar el planteamiento de la modelación mecánica con la mecánica de materiales clásica.

Por principio de cuentas, se tiene la función de deformación que resulta de aplicar (2-37) en (2-7), que es:

$$f(X,Y,Z) = (X+\alpha Z, Y, Z) \quad \forall (X,Y,Z) \in B \quad (2-60)$$

donde (2-60) es la función de deformación, que representa un cortante simple, tal y como se encuentra en los diferentes textos de Mecánica del Continuo. Es de esperarse que los cambios sufridos por $f: B \rightarrow f(B) \subset \mathbb{R}^3$, alteren todos

Los campos y tensores determinados anteriormente, como se describe a continuación:

Obsérvese que para el campo tensorial $F: B \rightarrow L(R^3, R^3)$ llamado gradiente de deformación, su representación matricial está dada por:

$$[F(X, Y, Z)] = [\nabla f(X, Y, Z)] \equiv \left[\frac{\partial f_i(X, Y, Z)}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \bar{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{F} \text{ en } (X, Y, Z) \in B \quad (2-61)$$

Observación 2-8: debido a que $\underline{F}(X, Y, Z)$ no depende de las coordenadas, (2-60) representa una deformación homogénea. Además es fácil -- determinar que

$$\det \underline{F} = 1 > 0 \quad (2-62)$$

Siendo (2-62) de particular importancia, ya que el hecho de que $\det \underline{F} = 1$ significa que el movimiento dado por (2-60) es un movimiento isocórico, es decir preserva volúmenes, siendo esto una de las particularidades de la teoría clásica del cortante simple, en la que se establece que solo hay distorsiones angulares sin extensión, implicando a su vez esto que no haya cambios de volumen. ■

Por otro lado, se tiene que la función inversa de deformación: i.e. $f^{-1}: f(B) \rightarrow B$ es:

$$f^{-1}(X^*, Y^*, Z^*) = (X^* - \alpha Z^*, Y^*, Z^*) \quad \forall (X^*, Y^*, Z^*) \in f(B), \quad (2-63)$$

cuya representación matricial del gradiente es:

$$[\nabla f^{-1}] = [\nabla f^{-1}(X^*, Y^*, Z^*)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\bar{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ en } f(B) \quad (2-64)$$

Por tanto, de (2-61), (2-62), (2-63) y (2-64) puede decirse que estos, implican que (2-60) es efectivamente una función de deformación.

A continuación, se pretende enunciar las expresiones resultantes para los campos tensoriales de deformación, desplazamientos, deformaciones de Green-Cauchy derecho e izquierdo, infinitesimales y de esfuerzos.

Tensor gradiente de deformación, dado por

$$\underline{F}(X,Y,Z) = F_{1j}(X,Y,Z) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_j \quad \forall (X,Y,Z) \in B. \quad (2-65)$$

De acuerdo a (2-61), implica que (2-64) esta dado para este caso como:

$$\underline{F}(X,Y,Z) = \underline{F} = [\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \alpha \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3],$$

en $(X,Y,Z) \in B$ (2-66)

Ahora, se determina el campo vectorial $\underline{u}: B \rightarrow \mathbb{R}^3$, llamado desplazamientos dado por

$$\underline{u}(X,Y,Z) = (\alpha Z, 0, 0) \quad \forall (X,Y,Z) \in B. \quad (2-67)$$

Cuya representación matricial del campo tensorial $\nabla \underline{u}: B \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, llamado gradiente de desplazamiento, es la siguiente:

$$[\nabla \underline{u}(X,Y,Z)] = [\nabla \underline{u}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \forall (X,Y,Z) \in B. \quad (2-68)$$

Siendo su representación tensorial, la siguiente expresión

$$\nabla \underline{u}(X,Y,Z) = \nabla \underline{u} = \alpha \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 \quad \forall (X,Y,Z) \in B. \quad (2-69)$$

El siguiente objetivo, es determinar los tensores de deforma

ción de Green-Cauchy, derecho e izquierdo esto es \underline{C} y \underline{B} cuyas representaciones matriciales son:

$$[\underline{C}(X,Y,Z)] = [\underline{C}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1+\alpha^2 \end{bmatrix} \text{ en } (X,Y,Z) \in B, \quad (2-70)$$

y

$$[\underline{B}(X,Y,Z)] = [\underline{B}] = \begin{bmatrix} 1+\alpha^2 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ en } (X,Y,Z) \in B. \quad (2-71)$$

Enseguida, se determina el campo tensorial $\underline{E}:B \rightarrow s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, llamado deformaciones infinitesimales, definido por

$$\underline{E}(X,Y,Z) = \frac{1}{2} [\underline{\nabla} \underline{u}(X,Y,Z) + \underline{\nabla}^T \underline{u}(X,Y,Z)] \text{ en } (X,Y,Z) \in B. \quad (2-72)$$

Cuya representación matricial es:

$$[\underline{E}(X,Y,Z)] = [\underline{E}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } (X,Y,Z) \in B \quad (2-73)$$

Estimación del error ϵ , que se admite al linealizar el problema de cortante puro.

$$\epsilon = \|\underline{\nabla} \underline{u}_\epsilon\| = \text{tr} (\underline{\nabla} \underline{u}^T \underline{\nabla} \underline{u})^{1/2} = \alpha \quad (2-74)$$

Observación 2-9: Tomando en cuenta las componentes de $[\underline{E}]$, se llega a la conclusión, de que la única deformación que está presente en la barra es la debida al cortante en el plano XZ, por lo que, el siguiente objetivo será de terminar el estado de esfuerzos que produce dicho estado de deformación. Es

de esta forma que tomando en cuenta (2-24) y (2-73) que se determina el tensor de Piola-Kirchhoff como:

$$[\underline{S}(X,Y,Z)] = [\underline{S}] = \frac{\beta}{1+\nu} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en B.} \quad (2-75)$$

Por otro lado, así como en el caso anterior, aquí también debe verificarse, que \underline{S} satisfaga las condiciones de equilibrio de fuerzas y momentos, expresados a través de (2-26) de la primer condición en (2-26) (equilibrio de fuerzas), se determina el campo vectorial $\underline{b}:B \rightarrow R^3$ llamado fuerzas de cuerpo, que de acuerdo con (2-75) se infiere que las tres componentes son: Ver Fig. 6

$$b_{0_i} = 0, i=1,2,3 \text{ en B} \quad (2-76)$$

Observación 2-10: Tomando en cuenta (2-76), se tiene es un caso físicamente imposible de reproducir, ya que no existe un material en la tierra con tales características (fuerzas de cuerpo nulas). Por lo que, el cortante puro es un problema estrictamente imposible de reproducir. ■

El siguiente paso, es verificar equilibrio de momentos, para esto se utiliza la segunda expresión de (2-26) así como (2-61), (2-75), de donde se determina después de sustituir datos y realizar operaciones que:

$$[\underline{SF}^T] = \frac{\beta}{1+\nu} \begin{bmatrix} \alpha^2/2 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en B, y} \quad (2-77)$$

$$[\underline{FS}^T] = \frac{\beta}{1+\nu} \begin{bmatrix} \alpha^2/2 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en B.} \quad (2-78)$$

Como se podrá observar, a través de (2-76), (2-77) y (2-78) y tomando en cuenta (2-26) que Piola-Kirchhoff (2-75) satisface equilibrio de fuerzas y momentos, por lo que el siguiente paso, será determinar el campo vectorial $\underline{S}:B \rightarrow R^3$ llamado Tracciones de Superficie.

2-7 TRACCIONES DE SUPERFICIE Y CONDICIONES DE FRONTERA

Para determinarlas, se tomara en cuenta la ecuación (2-40) con todas sus características explicadas anteriormente. Es en este sentido, que se determina que las correspondientes tracciones de superficie son para cada frontera como sigue:

Para la frontera ∂B_1 con $\underline{n} = (1,0,0)$:

$$S_1(L,Y,Z) = S_2(L,Y,Z) = 0,$$

$$S_3(L,Y,Z) = S_3 = \frac{\beta\alpha}{2(1+\nu)}.$$

Para ∂B_2 con $\underline{n} = (-1,0,0)$

$$S_1(0,Y,Z) = S_2(0,Y,Z) = 0,$$

$$S_3(0,Y,Z) = S_3 = -\frac{\beta\alpha}{2(1+\nu)}.$$

Para la frontera ∂B_3 con $\underline{n} = (0,1,0)$, las componentes de tracción son:

$$S_1(X,b,Z) = S_2(X,b,Z) = S_3(X,b,Z) = 0.$$

De igual manera, para ∂B_4 con $\underline{n} = (0,-1,0)$

$$S_1(X,0,Z) = S_2(X,0,Z) = S_3(X,0,Z) = 0.$$

Por otra parte, se tiene que para ∂B_5 con $\underline{n} = (0,0,1)$, lo siguiente:

en ∂B
(2-79)

$$S_1(X, Y, h) = S_1 = \frac{\beta\alpha}{2(1+\nu)},$$

$$S_2(X, Y, h) = S_3(X, Y, h) = 0.$$

De la misma manera, para ∂B_6 con $\underline{n} = (0, 0, -1)$ encontramos

$$S_1(X, Y, 0) = S_1 = -\frac{\beta\alpha}{2(1+\nu)},$$

$$S_2(X, Y, 0) = S_3(X, Y, 0) = 0.$$

La representación gráfica de fuerzas de cuerpo y tracciones de superficie, se ilustra en la (fig - 6)

2-8 ELEMENTOS MECANICOS

Continuando con el estudio, el siguiente paso a realizar, sera la determinación de elementos mecánicos (fuerzas y momentos), de acuerdo como lo establece la mecánica de materiales, en la sección transversal de la barra, S_T , inducidos por el cortante puro.

Antes de evaluar los elementos mecánicos, se discuten las condiciones de frontera tipo Dirichlet, en la intersección de las fronteras ∂B_4 y ∂B_6 . Del campo de desplazamientos:

$$\underline{u}(X, Y, Z) = (\alpha Z, 0, 0), \quad \forall (X, Y, Z) \in B \quad (2-80)$$

Por tanto con

$$\underline{u}(0, 0, 0) = (0, 0, 0), \quad (2-81)$$

con lo que el cuerpo debe verse como en la (Fig - 7).

Respecto a los elementos mecánicos, se obtienen mediante las ecuaciones (2-43). Se sabe por otro lado que el vector esfuerzo que actua en S_T para este caso con $\underline{n} = (1, 0, 0)$ está dado por

$$\underline{S}(X, Y, Z) = (0, 0, \beta\alpha/1(1+\nu)) \quad (2-82)$$

Por lo que de acuerdo con (2-82) y (2-43), se determina que cada una de las componentes de los elementos mecánicos son:

FUERZAS

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, b, h) &= F_2(x, b, h) = 0 \\ F_3(x, b, h) &= F_3 = \int_0^h \int_0^b \frac{\beta\alpha}{2(1+\nu)} dydz = \frac{\beta\alpha b h}{2(1+\nu)} \end{aligned} \right\} \text{ en } S_T \quad (2-83)$$

MOMENTOS

Para este caso, se tiene de acuerdo con (2-53) y (2-82) que los momentos por unidad de area son:

$$\left. \begin{aligned} m_1(X, Y, Z) &= Y S_3(X, Y, Z) \\ m_2(X, Y, Z) &= m_3(X, Y, Z) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } S_T \quad (2-84)$$

Por lo que las componentes de momentos, de acuerdo con (2-84) y (2-43) resultan ser:

$$\left. \begin{aligned} M_1(x, b, h) &= M_1 = \int_0^h \int_0^b \frac{\beta\alpha}{2(1+\nu)} Y dydz = \frac{\beta\alpha b^2 h}{4(1+\nu)} \\ M_2(x, b, h) &= M_3(x, b, h) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } S_T \quad (2-85)$$

Observación 2-11: Analizando (2-83), (2-85) se concluye que la barra en corte puro está sujeta a los elementos mecánicos de una fuerza cortante en la dirección \underline{e}_3 , y un momento torsionante en la dirección \underline{e}_1 , este último debido principalmente al sistema de coordenadas empleado, el cual está fuera del centroide de la S_T .

2-9 CORTANTE LINEAL CON EXTENSION EN e_1 , e_2 y e_3 .

Este cortante, es producido por las condiciones suficientes que hacen posible que el balance de momentos (2-32), y (2-33) sea satisfecho, las que a continuación se enlistan

$$\frac{z_1}{h} = 1 + kZ. \quad (2-86)$$

de (2-86), también se tiene que:

$$kZ = \frac{z_1 - h}{h}, \quad (2-87)$$

Y por otro lado se tiene (2-35)₂, que a continuación se reescribe:

$$(1-\nu) \frac{z_1 - h}{h} + \nu \left(kZ + \frac{y_4 - b}{b} \right) = 0. \quad (2-88)$$

Despejando $\frac{y_4 - b}{b}$, se tiene que

$$\frac{y_4 - b}{b} = - \left(\frac{1-\nu}{\nu} \right) \frac{z_1 - h}{h} - kZ, \quad (2-89)$$

a su vez de (2-89):

$$\frac{y_4}{b} = 1 - \frac{1-\nu}{\nu} \frac{z_1 - h}{h} - kZ. \quad (2-90)$$

Por otro lado, de (2-88):

$$\frac{z_1 - h}{h} = \frac{\nu}{1-\nu} \left(kZ + \frac{y_4 - b}{b} \right). \quad (2-91)$$

Dependiendo de las condiciones que se elijan, se tendrán los siguientes estados de esfuerzos (Piola-Kirchhoff). De esta manera se obtiene utilizando (2-86) y (2-91) el estado de esfuerzos esta dado a través del siguiente tensor de esfuerzos

$$\underline{S}(X,Y,Z) = \frac{\beta}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu} \left[kZ + \nu \left(\frac{y_4 - b}{b} \right) \right] & 0 & \frac{1}{2} [\alpha + k(X+Z)] \\ 0 & \frac{1}{1-\nu} \left[\frac{y_4 - b}{b} + \nu kZ \right] & 0 \\ \frac{1}{2} [\alpha + k(X+Z)] & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } (X,Y,Z) \in B \quad (2-92)$$

Observación 2-12: al utilizar las condiciones anteriormente señaladas, se lo gra eliminar S_{33} y por ende la tracción de superficie en la dirección \underline{e}_3 , aún cuando $\underline{S}(X,Y,Z)$ sigue dependiendo de X, Z .

Ahora, con las condiciones (2-86) y (2-90), encontramos que el estado de esfuerzos es:

$$\underline{S}(X,Y,Z) = \frac{\beta}{1+\nu} \begin{bmatrix} \left[kZ - \frac{z_1 - h}{h} \right] & 0 & \frac{1}{2} [\alpha + k(X+Z)] \\ 0 & - \left[kZ + \frac{z_1 - h}{\nu h} \right] & 0 \\ \frac{1}{2} [\alpha + k(X+Z)] & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } (X,Y,Z) \in B, \quad (2-93)$$

Observación 2-13: Como se podrá observar, al igual que el caso anterior, se obtuvo una simplificación similar. ■

A continuación, se incluirán otras condiciones, con el fin de hacer la mejor simplificación. Como una primera alternativa, se sustituirá (2-87) en (2-93) manteniendo la componente S_{13} como en (2-25), es decir, sin hacerle ningún cambio, de esta forma:

$$\underline{S}(X,Y,Z) = \frac{\beta}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\nu} \left[\frac{z_1 - h}{h} + \nu \frac{y_4 - b}{b} \right] & 0 & \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] \\ 0 & \frac{1}{1-\nu} \left[\frac{y_4 - b}{b} + \nu \left(\frac{z_1 - h}{h} \right) \right] & 0 \end{bmatrix} \text{ en } (X,Y,Z) \in B \quad (2-94)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando (2-87) en (2-93), se tiene que

$$S(X, Y, Z) = \frac{\beta}{1+\nu} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{Z} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] \\ 0 & -\frac{\nu+1}{\nu} \frac{z_1-h}{h} & 0 \\ \frac{1}{Z} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } (X, Y, Z) \in B, \quad (2-95)$$

Observación 2-13: de la expresión (2-95), se concluye que existen algunas simplificaciones importantes, como lo son:

1. $S(X, Y, Z)$ solo depende de una sola coordenada, la (X) y no de (Z) como en (2-92) y (2-93).
2. Se logró eliminar la tracción en la dirección \underline{e}_1 , además de la tracción en \underline{e}_3 , ya eliminada en (2-92) y (2-93).
3. También, se eliminó la contribución de la deformación unitaria en la dirección \underline{e}_2 , esto es $\frac{y_4-b}{b}$, y solo depende de los parámetros x_2, z_1 , además de la coordenada X .

Como se podrá observar, (2-95) representa un estado de cortante con tracción de superficie en la dirección \underline{e}_2 . Procediendo con el estudio, se determina a continuación el estado de cargas que produce el estado de esfuerzos (2-95). ■

El campo vectorial $\underline{b}: B \rightarrow R^3$, llamado fuerzas de cuerpo, está dado para este caso, utilizando la ecuación de equilibrio de fuerzas (2-26) de la siguiente manera:

$$\underline{b}_0(X, Y, Z) = - \operatorname{div} \underline{S}(X, Y, Z), \quad (2-96)$$

que en componentes es:

$$b_{0j}(X, Y, Z) = - \operatorname{div} S_{ij}(X, Y, Z), \quad \text{en } (X, Y, Z) \in B \quad (2-97)$$

Por lo tanto, con (2-95) en (2-97) cada una de las componentes de fuerzas de cuerpo s3n:

$$\left. \begin{aligned} b_{01}(X, Y, Z) &= 0 \\ b_{02}(X, Y, Z) &= 0 \\ b_{03} &= \frac{\beta}{2(1+\nu)} k = \frac{\beta}{2(1+\nu)} \frac{x_2 - L - \alpha z_1}{Lh} \end{aligned} \right\} \quad (2-98)$$

2-10 TRACCIONES DE SUPERFICIE Y CONDICIONES DE FRONTERA

En esta parte, se determinar3 el campo vectorial $\underline{S}: B \rightarrow R^3$ llamado tracciones de superficie, que se obtendr3n utilizando (2-40) y (2-95), en las fronteras correspondientes, con sus respectivas normales unitarias, por tanto:

Para la frontera ∂B_1 , con $\underline{n} = (1, 0, 0)$, se tiene

$$S_1(L, Y, Z) = S_2(L, Y, Z) = 0,$$

$$S_3(L, Y, Z) = \frac{\beta}{(1+\nu)^2} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kL \right].$$

Para ∂B_2 con $\underline{n} = (-1, 0, 0)$, se tiene

$$S_1(0, Y, Z) = S_2(0, Y, Z) = 0,$$

$$S_3(0, Y, Z) = \frac{-\beta}{(1+\nu)^2} \left[\frac{\alpha z_1}{h} \right].$$

A continuaci3n se tiene para la frontera ∂B_3 con $\underline{n} = (0, 1, 0)$, las componentes de tracciones de superficie:

$$S_1(x, b, z) = 0$$

$$S_2(x,b,z) = \frac{-\beta}{1+\nu} \frac{z_1^{-h}}{h} \frac{1+\nu}{\nu} = -\beta \frac{z_1^{-h}}{\nu h},$$

$$S_3(x,b,z) = 0.$$

Y para ∂B_4 con $\underline{n} = (0, -1, 0)$,

$$S_1(X, 0, Z) = 0,$$

$$S_2(X, 0, Z) = \frac{\beta}{\nu} \frac{z_1^{-h}}{h} = S_2,$$

$$S_3(X, 0, Z) = 0.$$

Por otra parte, se tiene para ∂B_5 con $\underline{n} = (0, 0, 1)$, que las tracciones son:

$$S_1(X, Y, h) = \frac{\beta}{2(1+\nu)} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right],$$

$$S_2(X, Y, h) = S_3(X, Y, h) = 0.$$

Y para la frontera ∂B_6 con $\underline{n} = (0, 0, -1)$, tenemos,

$$S_1(X, Y, 0) = \frac{-\beta}{2(1+\nu)} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right]$$

$$S_2(X, Y, 0) = S_3(X, Y, 0) = 0$$

en
(X, Y, Z) ∈ ∂B

(2-99)

Observación 2-14: Antes de representar gráficamente (2-99), debe determinarse el estado de deformaciones infinitesimales y el campo de desplazamientos asociados a (2-95), así como las condiciones de frontera que esto implica, para garantizar si las tracciones encontradas son las correctas. ■

Por lo que el siguiente objetivo, es determinar el tensor de deformaciones infinitesimales \underline{E} , que de acuerdo con [13], se tiene que la relación de formación esfuerzos es:

$$\underline{E}(X, Y, Z) = \frac{1}{\beta} [(1+\nu) \underline{S} - \nu(\text{tr } \underline{S}) \underline{1}] \text{ en } (X, Y, Z) \in B \quad (2-100)$$

De donde, al sustituir (2-95) y $\text{Tr } \underline{S}$ en (2-100), se tiene que la representación matricial de \underline{E} , esta dada por

$$[E(X,Y,Z)] = \begin{bmatrix} \frac{z_1-h}{h} & 0 & \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] \\ 0 & \frac{z_1-h}{v h} & 0 \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + kX \right] & 0 & \frac{z_1-h}{h} \end{bmatrix} \text{ en } (X,Y,Z) \in B \quad (2-101)$$

A continuación, se intenta determinar el campo vectorial $\underline{u}: B \rightarrow R^3$ llamado campo de desplazamientos. Pero antes debe verificarse si (2-101) satisface las ecuaciones de compatibilidad, con el fin de garantizar un único campo de desplazamientos asociado a (2-101).

Así, se tiene que de acuerdo con [17], las seis ecuaciones de compatibilidad, dadas a partir de

$$\text{rot rot } \underline{E} = \underline{0} \text{ en } (X,Y,Z) \quad (2-102)$$

son

$$\left. \begin{aligned} E_{22,33}(X,Y,Z) + E_{33,22}(X,Y,Z) &= 0, \\ E_{33,21}(X,Y,Z) &= 0, \\ E_{11,33}(X,Y,Z) &= 0, \\ E_{11,32}(X,Y,Z) &= 0, \\ E_{11,22}(X,Y,Z) &= 0, \\ E_{22,31}(X,Y,Z) &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ en } (X,Y,Z) \in B \quad (2-103)$$

Tomando en cuenta (2-101) se concluye que se satisfacen las seis ecuaciones de (2-103), implicando que existe un único campo de desplazamientos asociado a (2-95).

Por lo tanto, tomando en cuenta lo anterior, puede decirse que existen condiciones por determinar $\underline{u}: B \rightarrow R^3$.

Antes de proceder a determinar, cada una de las componentes del vector

de desplazamientos, se hace el siguiente cambio de sistema de coordenadas $(X, Y, Z) = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$, con el propósito de hacer más operativo el manejo matemático.

Cada una de las componentes de \underline{u} , esto es $u_1(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$, $u_2(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$ y $u_3(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$, se obtienen al integrar las relaciones de deformación desplazamiento, dadas por

$$E = \frac{1}{2} [\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T] \text{ en } (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) \in B. \quad (2-104)$$

de (2-104), se tiene que las seis ecuaciones implícitas en la expresión mencionada son:

$$\left. \begin{aligned} E_{11}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) &= u_{1,1}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3), \\ E_{22}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) &= u_{2,2}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3), \\ E_{33}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) &= u_{3,3}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3), \\ E_{13}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) &= \frac{1}{2}[u_{1,3}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) + u_{3,1}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)], \\ E_{12}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) &= \frac{1}{2}[u_{1,2}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) + u_{2,1}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)], \\ E_{23}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) &= \frac{1}{2}[u_{2,3}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) + u_{3,2}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)]. \end{aligned} \right\} \text{ en } (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) \in B \quad (2-105)$$

De donde al integrar las tres primeras ecuaciones de (2-105) se obtienen las tres componentes de $u(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$ de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} u_1(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) &= \frac{z_1-h}{h} \bar{X}_1 + f_1(\bar{X}_2, \bar{X}_3), \\ u_2(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) &= -\frac{z_1-h}{v h} \bar{X}_2 + f_2(\bar{X}_1, \bar{X}_3), \\ u_3(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) &= \frac{z_1-h}{h} \bar{X}_3 + f_3(\bar{X}_1, \bar{X}_2). \end{aligned} \right\} \text{ en } (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) \in B \quad (2-106)$$

Al evaluar (2-106) con la condición $\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \bar{X}_3 = 0$, se obtiene que:

$$\left. \begin{aligned} f_2(\bar{x}_2, \bar{x}_3) &= u_1(0, \bar{x}_2, \bar{x}_3), \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_3) &= u_2(\bar{x}_1, 0, \bar{x}_3), \\ f_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= u_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0). \end{aligned} \right\} \text{ en } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \quad (2-107)$$

Por otro lado, se tiene que al utilizar la cuarta ecuación de (2-105) y la componente E_{13} de (2-101), la siguiente relación

$$u_{1,3}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) + u_{3,1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \frac{\alpha z_1}{h} + k\bar{x}_1 \quad (2-108)$$

Además, al derivar la primera y tercera ecuación de (2-106) respecto a \bar{x}_3 y \bar{x}_1 respectivamente, da lugar a las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} u_{1,3}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= f_{1,3}(\bar{x}_2, \bar{x}_3), \\ u_{3,1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= f_{3,1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2). \end{aligned} \right\} \quad (2-109)$$

Que al sustituir (2-109) en (2-108), produce la siguiente expresión

$$f_{1,3}(\bar{x}_2, \bar{x}_3) + f_{3,1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{\alpha z_1}{h} + k\bar{x}_1 \quad (2-110)$$

Por otro lado, se tiene al utilizar la condición de frontera $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 0$ en cada una de las componentes de (2-13), lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} u_1(0, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= \frac{\alpha z_1}{h} \bar{x}_3 = f_1(\bar{x}_2, \bar{x}_3), \\ u_2(\bar{x}_1, 0, \bar{x}_3) &= 0 = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_3), \\ u_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0) &= 0 = f_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2). \end{aligned} \right\} \text{ en } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in B \quad (2-111)$$

De la primera expresión de (2-111):

$$f_{1,3}(\bar{x}_2, \bar{x}_3) = \frac{\alpha z_1}{h} \quad (2-112)$$

También utilizando la tercera ecuación de (2-111) y (2-110), es fácilmente ver que

$$f_{1,3} = \frac{\alpha z_1}{h} + k \bar{x}_1 \quad (2-113)$$

Observando (2-112) y (2-113), se concluye que la única condición que satisface la igualdad de ambas es que :

$$k \bar{x}_1 = 0 \quad (2-114)$$

Para que (2-114) sea satisfecha, se requerirá que $k=0$, implicando esto de acuerdo con la definición de k en (2-9) que

$$\begin{aligned} x_2 - L - \alpha z_1 &= 0 \quad \delta \\ \alpha &= \frac{x_2 - L}{z_1} \equiv \text{Tan } \theta \end{aligned} \quad (2-115)$$

Evidentemente que (2-114) y (2-115), implican un campo de deformaciones pequeñas, para que $k=0$, ocasionando algunos cambios significativos en las expresiones determinadas anteriormente como lo son, esfuerzos de deformaciones infinitesimales, fuerzas de cuerpo y tracciones de superficie, satisfechas por el único campo de desplazamientos dado por (2-106), que después de hacer algunas simplificaciones, implicadas por (2-114) y (2-115) queda como sigue:

$$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \left[\frac{\alpha z_1}{h} \bar{x}_3 + \frac{z_1 - h}{h} \bar{x}_1 - \frac{z_1 - h}{v h} \bar{x}_2, \frac{z_1 - h}{h} \bar{x}_3 \right] \text{ en } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in B \quad (2-116)$$

A continuación, se desarrolla la nueva forma de todos los campos determinados en este caso.

Esfuerzos, en este caso (2-95) queda como

$$S(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \frac{\beta}{1+v} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha z_1}{2h} \\ 0 & \frac{v+1}{v} \frac{z_1 - h}{h} & 0 \\ \frac{\alpha z_1}{2h} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in B \quad (2-117)$$

Fuerzas de cuerpo, las tres componentes dadas por (2-98) quedan como

$$\left. \begin{aligned} b_{01}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= 0, \\ b_{02}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= 0, \\ b_{03}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ en } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in B \quad (2-118)$$

Como se podra ver en (2-118), las tres componentes de fuerzas de cuerpo son nulas, notándose una diferencia importante con respecto a (2-88) en la que existía componente en la dirección \underline{e}_3 , es evidente que el nuevo problema producto de (2-114) es físicamente imposible de reproducir ya que se trata de un cuerpo que no pesa. Siendo esto imposible.

Por otro lado, las tracciones de superficie dadas por (2-99) se transforman a:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Para } \partial B_1 \text{ con } \underline{n} = (1, 0, 0) \\ &S_1(L, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = S_2(L, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0, \\ &S_3(L, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = S_3 = \frac{\beta}{2(1+\nu)} \frac{\alpha z_1}{h}. \\ &\text{Para } \partial B_2 \text{ con } \underline{n} = (-1, 0, 0) \\ &S_1(0, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = S_2(0, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0, \\ &S_3(0, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = S_3 = \frac{-\beta}{2(1+\nu)} \frac{\alpha z_1}{h}. \\ &\text{Para } \partial B_3 \text{ con } \underline{n} = (0, 1, 0) \\ &S_1(\bar{x}_1, b, \bar{x}_3) = 0, \\ &S_2(\bar{x}_1, b, \bar{x}_3) = -\beta \frac{z_1 - h}{\nu h}, \\ &S_3(\bar{x}_1, b, \bar{x}_3) = 0 \\ &\text{Para } \partial B_4 \text{ con } \underline{n} = (0, -1, 0) \end{aligned} \right\} \text{ en } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in B \quad (2-119)$$

$$S_1(\bar{x}_1, 0, \bar{x}_3) = 0,$$

$$S_2(\bar{x}_1, 0, \bar{x}_3) = \frac{\beta}{\nu} \frac{z_1 - h}{h},$$

$$S_3(\bar{x}_1, 0, \bar{x}_3) = 0.$$

Para ∂B_5 con $\underline{n} = (0, 0, 1)$

$$S_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, h) = \frac{\beta}{2(1+\nu)} \frac{\alpha z_1}{h},$$

$$S_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, h) = S_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, h) = 0.$$

Y por último para $\underline{n} = (0, 0, -1)$

$$S_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0) = S_1 = \frac{-\beta}{2(1+\nu)} \frac{\alpha z_1}{h}$$

$$S_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0) = S_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0) = 0$$

De (2-118), (2-119) y (2-116) se pueden establecer las cargas que producen este fenómeno así como las condiciones de frontera como se puede ver en las (figs 8 y 9).

A continuación, se determina la función de deformación asociada al presente problema, para lo que se utiliza la definición de vector de desplazamiento, en la que se utilizará (2-116), es en este sentido se tiene lo siguiente:

$$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \text{ en } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in B \quad (2-120)$$

De donde, al despejar $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ de (2-120), se tiene que la función de deformación $f: B \rightarrow f(B)$ es:

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \left\{ \frac{\alpha z_1}{h} \bar{x}_3 + \frac{z_1}{h} \bar{x}_1, \left(1 - \frac{z_1 - h}{\nu h} \right) \bar{x}_2, \frac{z_1}{h} \bar{x}_3 \right\} \text{ en } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in B \quad (2-121)$$

Por lo tanto, a continuación se procede a determinar los gradientes de deformación y de desplazamiento, así como los tensores de de

formación derecho y izquierdo de Green-Cauchy.

Gradiente de deformación, cuya matriz es:

$$[\underline{F}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)] = \begin{bmatrix} \frac{z_1}{h} & 0 & \frac{\alpha z_1}{h} \\ 0 & 1 - \frac{z_1-h}{v h} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_1}{h} \end{bmatrix} = [\underline{F}] \text{ en } (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) \in B \quad (2-122)$$

Al observar (2-122), Puede apreciarse que (2-121) representa un campo de deformación homogénea, esto es no depende de las coordenadas.

Enseguida se determina la representación matricial del tensor gradiente de desplazamiento $\nabla u: B \rightarrow L(R^3, R^3)$ mediante

$$[\underline{\nabla u}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)] = \begin{bmatrix} \frac{z_1-h}{h} & 0 & \frac{\alpha z_1}{h} \\ 0 & -\frac{z_1-h}{v h} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_1-h}{h} \end{bmatrix} \text{ en } (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) \in B \quad (2-123)$$

Para el tensor de deformaciones infinitesimales (2-101); se hace $kx=0$,

Para el caso de los tensores de Green-Cauchy, están dados por:

$$\underline{C}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) = \underline{F}^T(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) \underline{F}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) \text{ y} \quad (2-124)$$

$$\underline{B}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) = \underline{F}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) \underline{F}^T(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$$

Que al sustituir (2-122) y su transpuesto en (2-124) se obtiene

$$[\underline{C}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)] = [\underline{C}] = \begin{bmatrix} (z_1/h)^2 & 0 & \alpha z_1^2/h^2 \\ 0 & \left(1 - \frac{z_1-h}{v h}\right)^2 & 0 \\ \alpha z_1^2/h^2 & 0 & \left(\frac{\alpha z_1}{h}\right)^2 + (z_1/h)^2 \end{bmatrix} \text{ en } (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) \in B \quad (2-125)$$

y también

$$[B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)] = [C] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\alpha z_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{h}\right)^2 & 0 & \alpha \frac{z_1^2}{h^2} \\ 0 & \left(1 - \frac{z_1-h}{v h}\right)^2 & 0 \\ \alpha \frac{z_1^2}{h^2} & 0 & \frac{z_1^2}{h^2} \end{bmatrix} \text{ en } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in B \quad (2-126)$$

y finalmente se estima el error cometido al linealizar el problema, para lo que utilizando (2-20) y (2-21) se concluye que:

$$\epsilon = \left[-\frac{1}{v} \left(\frac{z_1-h}{h}\right) + \alpha^2 \frac{z_1^2}{h^2} \right]^{1/2} \quad (2-127)$$

Por otro lado, se tiene que la representación material del tensor de Cauchy $\underline{T}_m(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, se obtiene utilizando (2-56) y (2-57) y sustituyendo los datos correspondientes, como sigue

$$\underline{T}_m(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \underline{T}_m = \frac{Bvh}{(vh-z_1+h)(1+v)} \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2}{2} & 0 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & -\frac{h(v+1)}{v} \frac{z_1-h}{z_1} \left(1 - \frac{z_1-h}{h}\right) & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in B \quad (2-128)$$

Observación 2-15: De acuerdo con los componentes de (2-128) es fácil darse cuenta que $\underline{T}_m(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ es simétrico, condición de suma importancia para este tensor, ya que esta directamente relacionado con la condición de balance angular, ya que una implica la otra. ■

2-11 ELEMENTOS MECANICOS

Se desarrollan a continuación, de acuerdo con la terminología de la mecánica de materiales, los cálculos de los elementos mecánicos (fuerzas y momentos) que actúan en la sección transversal S_T de la barra en estudio, en

la que actúa un vector esfuerzo $\underline{S} = (S_1, S_2, S_3)$, que para el presente caso : de acuerdo con la ecuación (2-119) es:

$$\underline{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \underline{S} = (0, 0, \frac{\beta}{2(1+\nu)} \frac{\alpha z_1}{h}) \text{ en } (\bar{x}_2, \bar{x}_3) \in S_T \quad (2-129)$$

para una S_T con $\underline{n} = (1, 0, 0)$.

De acuerdo con (2-129), solo actúa en S_T una fuerza cortante en la dirección \underline{e}_3 y un momento torsionante en la dirección \underline{e}_1 , los que se determinan utilizando (2-143) y (2-129), de esta manera:

FUERZAS

$$\left. \begin{aligned} F_1(\bar{x}_1, b, h) &= F_2(\bar{x}_1, b, h) = 0. \\ F_3(\bar{x}_1, b, h) &= \int_0^h \int_0^b \frac{\beta}{2(1+\nu)} \frac{\alpha z_1}{h} d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = \frac{\alpha \beta z_1 b}{2(1+\nu)} \end{aligned} \right\} \text{ en } S_T \quad (2-130)$$

MOMENTOS

De acuerdo con (1-1-13) y (1-3-44) se establece que

$$\left. \begin{aligned} m_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= \bar{x}_2 S_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \\ m_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= m_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-131)$$

Por lo que las componentes de momentos son

$$\left. \begin{aligned} M_1(\bar{x}_1, b, h) &= \int_0^h \int_0^b \bar{x}_2 S_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 \\ &= \int_0^h \int_0^b \frac{\beta}{2(1+\nu)} \frac{\alpha z_1}{h} \bar{x}_2 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = \frac{\beta \alpha z_1 b^2}{4(1+\nu)} \end{aligned} \right\} \text{ en } S_T \quad (2-132)$$

$$M_2(\bar{x}, b, h) = M_3(\bar{x}_1, b, h) = 0.$$

Observación 2-17: Es de particular importancia, hacer algunos comentarios acerca de la modelación mecánica del presente problema (CORTANTE LINEAL CON EXTEN

SION). Ya que está hecha muy diferente a los otros dos casos tratados, por el hecho de que aquí la modelación, empezó a la inversa, es decir, primero se de el estado de esfuerzos y a partir de ahí se derivan todos los campos, hasta llegar a la función de deformación del problema. Siendo esta modelación un buen ejemplo de como se puede resolver un problema en forma inversa, cuando no se puede hacer normalmente a partir de la cinemática del problema. ■

2-12 CAMPOS ESPACIALES

En esta parte, se intenta desarrollar las representaciones espaciales de todos los campos materiales construidos para los casos [2-6] y [2-9], o sea para el cortante simple sin extensión y para el cortante lineal con extensión en \underline{e}_1 , \underline{e}_2 y \underline{e}_3 .

Empezando por construir los campos espaciales para el caso de cortante puro. Y como primer término trataremos de determinar el tensor de Cauchy \underline{T} .

De acuerdo con el teorema de Cauchy [13], en un movimiento que satisface los principios de balance lineal y angular, existirá un campo espacial tensorial $\underline{T}:f(B) \rightarrow L(V,V)$, llamado tensor de esfuerzos de Cauchy, tal que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } \underline{S}(\underline{n}) = \underline{T}(\underline{n}) \\ \text{ii) } \underline{T} \in s(V,V) \\ \text{iii) } \text{div } \underline{T} + \underline{b} = \rho \dot{\underline{V}} \text{ en } f(B) \end{array} \right\} \quad (2-133)$$

Por otro lado, sabemos que la representación material de $\underline{T}(X,Y,Z)$ está dada de acuerdo con (2-57), con lo que al sustituir datos en dicha ecuación, se determina que:

$$\underline{T}_m(X,Y,Z) = \underline{T}_m = \frac{\beta}{1+\nu} \begin{bmatrix} \alpha^2/2 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } (X,Y,Z) \in B \quad (2-134)$$

Como se observa en (2-134) la representación material de Cauchy no depende de las coordenadas, esto es debido principalmente a que se trata de un campo de deformación homogénea, por tanto es de esperarse que la representación espacial de \underline{T}_m sea la misma, esto es:

$$\underline{T}(X,Y,Z) = \underline{T} = \frac{\beta}{1+\nu} \begin{bmatrix} \alpha^2/2 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \forall (X,Y,Z) \in f(B) \quad (2-135)$$

De acuerdo con (2-135), se ve que esta es simétrica satisfaciendo la tercer condición de (2-123), siendo una condición ligada directamente con el principio del balance angular, o sea que se satisface ya que un caso implica la otra. Faltando checar el equilibrio de fuerzas, lo que se pretende a continuación hacer. De esta condición, se determinarán las componentes del campo vectorial $\underline{b}: f(B) \rightarrow \mathbb{R}^3$, llamado fuerzas de cuerpo en la configuración de formada. Además se tiene que por tratarse de una situación estática $P\dot{V}=0$, por lo tanto tomando en cuenta que (2-135) no depende de las coordenadas, se tiene lo siguiente:

$$\text{div } \underline{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad b_j = 0, j=1,2,3 \quad \text{en } (X,Y,Z) \in f(B) \quad (2-136)$$

De esta manera al igual que en la representación material, las componentes de fuerzas de cuerpo son nulas, haciendo esto (2-136) que el cortante simple en la configuración deformada no se pueda reproducir físicamente, por las razones similares expuestas con anterioridad para el caso material. De (2-135) y (2-136) se determina que Cauchy satisface los principios de balance lineal y angular dados por:

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \underline{T} + \underline{b} &= 0 \\ \underline{T} &= \underline{T}^T \end{aligned} \right\} \text{ en } f(B). \quad (2-137)$$

Observación 2-17: No se procede a determinar todos los campos tensoriales determinados materialmente, a sus respectivos espaciales, porque si se analiza todo lo que se hizo, se llega a la conclusión de que estos coinciden, dado que no dependen de las coordenadas. Y en los si aparecen éstas,

como lo es el campo vectorial de desplazamientos (2-67), no se altera ya que la función inversa de deformación (2-63), para el caso de la coordenada "Z" es la que aparece en los desplazamientos, permanece igual, haciendo esto que también los desplazamientos coincidan en ambas configuraciones.

El único campo que no es igual, es el de tracciones de superficie en S_T debido a la inclinación de ésta y por ende los elementos mecánicos, siendo esto lo que a continuación se determina. ■

2-13 TRACCIONES DE SUPERFICIE Y CONDICIONES DE FRONTERA.

Es el campo vectorial $\underline{S}:f(B) \rightarrow B$ con normales unitarias $\underline{n}:\partial f(B) \rightarrow R^2$, las que determinaremos mediante la expresión

$$\underline{S}(X,Y,Z) = \underline{T}(X,Y,Z) \underline{n}(X,Y,Z) \text{ en } (X,Y,Z) \in f(B) \quad (2-138)$$

Para este caso ya se conocen $\underline{T}(X,Y,Z)$, por lo que el siguiente paso es determinar la normal unitaria, respecto al nuevo sistema de coordenadas, en que la sección transversal de referencia ahora, en la configuración deformada, véase la fig (10).

Observación 2-18: Si se analiza la configuración deformada, puede detectarse de que esta rota respecto al sistema original, por lo tanto, utilizando la matriz de rotación del sistema (2-139), se encuentran las componentes de la normal unitaria a la sección transversal de la siguiente manera, para ver de talles ver fig (11).

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2-139)$$

Para determinar \underline{n}' , se utiliza la siguiente expresión:

$$\{n\} = [R] \{n'\} \quad (2-140)$$

Después de sustituir datos en (2-140) y resolver el problema, se determina que las componentes de la normal \underline{n} son:

$$\underline{n} = (\cos\theta, 0, -\text{sen}\theta). \quad (2-141)$$

Entonces las tracciones que resultan utilizando Cauchy, son iguales a las que se obtienen utilizando Piola para las fronteras, en las direcciones \underline{e}_2 y \underline{e}_3 , menos para \underline{e}_1 , que son las que a continuación se determinan.

Tracciones de superficie en la frontera con $\underline{n}' = (\cos\theta, 0, -\text{sen}\theta)$, están dadas por .:

$$S_i = T_{ij} n_j^i \text{ en } \partial f(B), \quad (2-142)$$

Sustituyendo datos en la expresión anterior;

$$\left. \begin{aligned} S_1^i(L, Y, Z) &= S_1^i = \frac{\beta\alpha}{2(1+\nu)} [\alpha \cos\theta - \text{sen}\theta], \\ S_2^i(L, Y, Z) &= 0, \\ S_3^i(L, Y, Z) &= S_3^i = \frac{\beta\alpha}{2(1+\nu)} \cos\theta. \end{aligned} \right\} \text{ en } \partial B_1 \quad (2-143)$$

y para la frontera ∂B_2 con $\underline{n}' = (-\cos\theta, 0, \text{sen}\theta)$, se tiene

$$\left. \begin{aligned} S_1^i(0, Y, Z) &= \frac{\beta\alpha}{2(1+\nu)} [-\alpha \cos\theta + \text{sen}\theta] = S_1^i, \\ S_2^i(0, Y, Z) &= 0, \\ S_3^i(0, Y, Z) &= \frac{\beta\alpha}{2(1+\nu)} \cos\theta = S_2^i. \end{aligned} \right\} \text{ en } \partial B_2 \quad (2-144)$$

La representación gráfica de las tracciones de superficie en la configuración deformada, se ilustra en la fig (12).

Observación 2-19: Debido a la aparición de tracciones normales en S_T , además de las tracciones tangenciales lo que se está convalidando, es lo que esta

blece [13]. Para el caso de deformaciones finitas, donde dice que "no es posible reproducir un estado de cortante puro por la aplicación de esfuerzos cortantes solamente", siendo esto lo que puede dar la pauta para determinar cuando hay que considerar que se está en un campo de deformación finita o infinitesimal. ■

En cuanto a las condiciones de frontera, ----- debido a que el campo de desplazamientos (2-67) es el mismo para la representación material y espacial, las condiciones de frontera, por tanto serán iguales, implicando esto que el cuerpo también estará fijo en el plano XY para este caso también, por lo que el cuerpo deberá verse en este caso igual que en la (fig. 7).

2-14 ELEMENTOS MECANICOS

En esta ocasión, los elementos mecánicos (fuerzas y momentos), serán determinados de manera diferente a las configuraciones materiales, por medio de las ecuaciones (2-43). Aquí, como de lo que se trata es de determinar elementos mecánicos en configuraciones deformadas, estos deberán ser determinados según [13], por las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \underline{F}(X,Y,Z) &= \int_{\partial f(p)} T(x)m(x)dA_x = \int_{\partial p} T(f(p)) G(p)n(p)dA_p \\ \underline{M}(X,Y,Z) &= \int_{\partial f(p)} (x-0) \times T(x)m(x)dA_x = \int_{\partial p} (f(p)-0) \times T(f(p))G(p)n(p)dA_p \end{aligned} \right\} \text{ en } (X,Y,Z) \in S_T \quad (2-145)$$

donde:

- T(x) es la representación espacial del tensor de Cauchy
- T(f(0)) es la representación material del tensor de Cauchy
- (x-0) vector de posición del vector esfuerzo en la sección deformada
- (f(p)-0) vector de posición del vector esfuerzo en la sección no deformada
- m(x) normal unitaria a S_T en la configuración deformada

$n(p)$ normal unitaria a S_T en la configuración no deformada

y

$$G(p) = (\det F) F^{-T}$$

Cabe mencionar que las expresiones (2-145), son muy similares a las expresiones (2-43) de fuerzas y momentos utilizadas en campos materiales, la diferencia estriba en que (2-145) permite determinar elementos mecánicos espaciales a partir de hacer integrales en la configuración inicial (véase los miembros derechos de 2-145), ya que resulta difícil resolver las integrales del lado izquierdo, ya que en general no se conoce a detalle la configuración deformada, haciendo esto difícil conocer los límites de integración de las mismas integrales. Es de esta manera como, se determinan los elementos mecánicos en S_T deformada, en la dirección de los ejes coordenados X , Y y Z .

A continuación, se determinan las fuerzas que actúan en S_T , para la cual se utiliza la primera expresión de (2-145), de la que ya se conocen algunas de sus partes, que son

$$T(f(p)) = \frac{\beta}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} \alpha^2/2 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } (X, Y, Z) \in B, \quad (2-146)$$

$$n(p) = (1, 0, 0), \quad (2-147)$$

y

$$G(p) = F^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2-148)$$

Ya que $\det F = 1$.

Sustituyendo datos se obtiene el integrando de (2-145), que representa tracciones de superficie y lo denotaremos por S^* , como sigue

$$S^* = T(f(p)) G(p)n(p) = (0, 0, \frac{\beta\alpha}{2(1+\nu)}), \quad (2-149)$$

donde al integrar en S_T , se obtienen las componentes de fuerzas de la siguiente manera

$$(F_1^*, F_2^*, F_3^*) = \int_0^h \int_0^b (0, 0, \frac{\beta\alpha}{2(1+\nu)}) dydz = (0, 0, \frac{\beta\alpha bh}{2(1+\nu)}) \quad (2-150)$$

En cuanto al vector momentos se hace lo siguiente, de acuerdo con (2-149) y (2-145), el integrando de esta en similitud con (2-52) no es otra cosa que los momentos por unidad de área manejados ya en campos materiales que para este caso es, haciendo el cambio de coordenadas $(X, Y, Z) \equiv (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$ con las consideraciones hechas con anterioridad de la siguiente manera:

$$\underline{m}^*(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) \equiv \epsilon_{\alpha k \ell} X_\alpha S_k^*(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) \quad \text{con } \alpha=2,3, k,\ell=1,2,3 \quad (2-151)$$

De esta manera se tiene que (2-151), de acuerdo con (2-149) y el vector de posición (2-50) que para este caso es similar, se descompone en los siguientes términos:

$$\left. \begin{aligned} m_1^*(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) &= X_2 S_3^* \\ m_2^*(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) &= m_2 = 0 \\ m_3^*(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) &= m_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-152)$$

por lo que al sustituir datos en (2-145), cada cada uno de los componentes del vector momentos son como sigue:

$$\left. \begin{aligned} M_1(x_1, b, h) &= \int_0^h \int_0^b \frac{\beta\alpha}{2(1+\nu)} \bar{x}_2 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = \frac{\beta\alpha b^2 h}{4(1+\nu)} \\ M_2(x_1, b, h) &= 0 \\ M_3(x_1, b, h) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-153)$$

Observación 2-20: al analizar (2-150) y (2-151) se aprecia que solo una componente de fuerza en la dirección \underline{e}_3 y una de momento torsionante en la dirección \underline{e}_1 , debiéndose esta última, como ya se indicó, prin

principalmente a la ubicación del sistema de coordenadas. No hay que perder de vista que estos componentes de elementos mecánicos están orientados de acuerdo con los ejes coordenados iniciales, entonces si tomamos en cuenta que la sección transversal está inclinada las componentes de elementos mecánicos que sobre esta actúan son los que resultan de proyectar sobre esta $(2-150)_3$ y $(2-153)_1$ de acuerdo con las componentes de la normal unitaria expresadas en (2-141). ■

Con esto último, damos por terminada la modelación mecánica del CORTANTE SIMPLE, restando hacer comentarios y conclusiones finales, los que se hace al final del trabajo.

El siguiente objetivo, es determinar los campos espaciales del caso de CORTANTE LINEAL CON EXTENSION.

Empezando por escribir la función inversa de deformación, i.e. $f^{-1}:f(B) \rightarrow B$, estando representada en el apéndice B por la ecuación (13) y que a continuación se reescribe:

$$f^{-1}(X^*, Y^*, Z^*) = \left[\frac{h}{z_1} (X^* - \alpha Z^*), \frac{Y^*}{\left(1 - \frac{z_1 - h}{v h}\right)}, \frac{h}{z_1} Z^* \right] \text{ en } (X^*, Y^*, Z^*) \in f(B) \quad (2-154)$$

De acuerdo con (2-154) y todos los campos materiales determinados para este caso, se tiene que los únicos campos que serán diferentes en ambas configuraciones (material y espacial) son: el de desplazamientos, dado por (2-116), por depender de las coordenadas. Permaneciendo los demás de la misma manera, por tratarse principalmente de un campo de deformaciones homogénea. Por lo tanto, a continuación se determina la representación espacial del campo vectorial $\underline{u}:B \rightarrow R^3$, llamado desplazamientos, de la siguiente manera:

De acuerdo con (2-116), se tiene que

$$\underline{u}(X, Y, Z) = \left(\frac{\alpha z_1}{h} Z + \frac{z_1 - h}{h} X, \frac{(z_1 - h)}{v h} Y, \frac{z_1 - h}{h} Z \right) \quad (2-155)$$

Y, por otro lado, se tiene la representación espacial de (2-155), dada por:

$$\underline{u}_E(X^*, Y^*, Z^*) = \underline{u}(X, Y, Z) \Big|_{(X, Y, Z) = f^{-1}(X^*, Y^*, Z^*)} \quad (2-156)$$

Donde después de sustituir datos en (2-156), se obtiene

$$\underline{u}_E(X^*, Y^*, Z^*) = \left(\alpha Z^* + \frac{z_1 - h}{z_1} (X^* - \alpha Z^*), \frac{Y^*}{\left(1 - \frac{\nu h}{z_1 - h}\right)}, \frac{z_1 - h}{z_1} Z^* \right) \text{ en } (X^*, Y^*, Z^*) \in f(B) \quad (2-157)$$

A continuación, se pretende determinar la representación espacial del campo tensorial $\underline{T}: f(B) \rightarrow L(R^3, R^3)$ llamado tensor de Cauchy, para el que ya se conoce su representación material, dada por (2-128), y que al observar esta, nos damos cuenta que no depende de las coordenadas, por lo que su representación espacial coincide con esta la siguiente:

$$\underline{T}(X, Y, Z) = \underline{T}_m = \underline{T} = \frac{\beta \nu h}{(\nu h - z_1 + h)(1 + \nu)} \begin{bmatrix} \alpha^2/2 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & \frac{-h(\nu+1)}{\nu} \frac{z_1 - h}{z_1^2} \left(1 - \frac{z_1 - h}{\nu h}\right) & 0 \\ \alpha/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } f(B) \quad (2-158)$$

Observando el campo espacial (2-158), se observa que este satisface los principios de balance lineal y angular dados por (2-137) y del que se establece que las componentes de fuerzas de cuerpo espaciales son nulas, ya que $\text{div } \underline{T} = 0$, al igual que el caso anterior esto es

$$b_i = 0 \quad i=1, 2, \quad (2-159)$$

El campo tensorial de esfuerzos de Cauchy, será utilizado para determinar el campo vectorial $\underline{S}: f(B) \rightarrow B$, llamado tracciones de superficie, siendo estas, el objetivo siguiente.

2-15 Tracciones de Superficie y Condiciones de Frontera: Caso Cortante L_1 real. Para determinar las tracciones, utilizaremos la expresión (2-138), y debido a que la configuración deformada para el presente caso y el de cortante puro son muy parecidas, en cuanto a que tiene las normales unitarias expresadas por relaciones similares a (2-139), (2-140) y (2-141), siendo esto importante, ya que no se determinan para este caso.

Por lo tanto utilizando (2-141), (2-142) y (2-158), se determina cada una de las componentes de las tracciones de superficie, de la siguiente manera, en las respectivas fronteras de $f(B)$.

Para la frontera ∂B_1 con $\underline{n}=(\cos\theta, 0, -\text{sen}\theta)$, se tiene que:

$$S_1^i(L, Y, Z) = S_1^i = \frac{\beta v h \alpha}{(vh - z_1 + h)(1+v)^2} (\alpha \cos\theta - \text{sen}\theta),$$

$$S_2^i(L, Y, Z) = 0,$$

$$S_3^i(L, Y, Z) = \frac{\beta v h \alpha \cos\theta}{(vh - z_1 + h)(1+v)^2}.$$

Para la frontera ∂B_2 con $\underline{n}=(-\cos\theta, 0, \text{sen}\theta)$:

$$S_1^i(0, Y, Z) = S_1^i = \frac{\beta v h \alpha}{(vh - z_1 + h)(1+v)^2} (\text{sen}\theta - \alpha \cos\theta),$$

$$S_2^i(0, Y, Z) = 0,$$

$$S_3^i(0, Y, Z) = \frac{-\beta v h \alpha \cos\theta}{(vh - z_1 + h)(1+v)^2}.$$

Por otra parte, se tiene para ∂B_3 con $\underline{n}=(0, 1, 0)$, lo siguiente:

$$S_1^i(x, b, y) = S_1^i = 0$$

$$S_2^i(x, b, y) = S_2^i = \frac{-\beta h^2 (z_1 - h)}{(vh - z_1 + h) z_1^2} \left(1 - \frac{(z_1 - h)}{vh} \right),$$

$$S_3^i(x, b, y) = 0.$$

De la misma manera, para ∂B_4 con $\underline{n}=(0, -1, 0)$:

$$S_1^i = 0$$

en $\partial f(B)$

(2-160)

$$S_2^1 = \frac{\beta h^2 (z_1 - h)}{(\nu h - z_1 + h) Z_1^2} \left(1 - \frac{(z_1 - h)}{\nu h} \right),$$

$$S_3^1 = 0.$$

Y, para la frontera ∂B_5 con $\underline{n} = (0, 0, 1)$, las tracciones son:

$$S_1^1(X, Y, h) = S_1^1 = \frac{\beta \nu h \alpha}{2(\nu h - z_1 + h)(1 + \nu)},$$

$$S_2^1(X, Y, h) = S_3^1(X, Y, h) = 0.$$

finalmente, se tiene que para ∂B_6 con $\underline{n} = (0, 0, -1)$, lo siguiente:

$$S_1^1(X, Y, 0) = S_1^1 = \frac{-\beta \nu h \alpha}{2(\nu h - z_1 + h)(1 + \nu)},$$

$$S_2^1(X, Y, 0) = S_3^1(X, Y, 0) = 0.$$

Como, se podrá observar a diferencia del caso anterior aquí si se determinan las tracciones de superficie espaciales para toda $\partial f(B)$, ya que existen algunos cambios significativos, respecto a las determinadas para este problema en forma material, y que están dadas por (2-119), implicando estos cambios importantes en los elementos mecánicos, como es de esperarse.

Una ilustración gráfica de las tracciones de superficie podrá observarse en la fig. 13.

A continuación, se determinarán las condiciones de frontera en desplazamientos a que está sujeto el cuerpo B, en la configuración deformada. De (2-157) tenemos que al evaluar esta con condiciones nulas, el siguiente resultado:

$$\underline{u}(0, 0, 0) = (0, 0, 0), \quad (2-161)$$

Otro resultado, se obtiene con la condición $(X, 0, 0)$, que a continuación se escribe

$$u(x,0,0) = \left(\frac{z_1-h}{z_1}, 0, 0 \right) \quad (2-162)$$

De (2-161) y (2-164), se observa que el único punto fijo de la barra es el origen del sistema de coordenadas, y también que el plano XY no se mueve en la dirección Z. La representación gráfica de las condiciones de frontera puede verse en la fig. 14

2-16 ELEMENTOS MECANICOS

El siguiente paso, es determinar los elementos mecánicos (fuerzas y momentos), para una sección transversal S_T , en $f(B)$, tal y como lo establece la resistencia de materiales. En esta ocasión, igual que el caso anterior (CORTANTE SIMPLE) se utilizan las expresiones (2-145), para determinar dichos elementos mecánicos, considerando la característica de estas expresiones, mencionadas anteriormente.

Enseguidase pretende determinar el vector esfuerzo, que actua en S_T , y que esta dado a través del integrando de (2-147)₁, de esta manera se obtiene cada una de las partes de este, estan dadas por: Tensor de Cauchy dado por (2-158), y las normal unitaria igual que (2-147) y $G(p)$ sustituyendo datos en su expresiónse encuentra que está dado de la siguiente manera:

$$\underline{G}(X,Y,Z) = \frac{z_1}{h} \left(1 - \frac{z_1-h}{vh} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z_1}{h \left(1 - \frac{z_1-h}{vh} \right)} & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-163)$$

Sustituyendo (2-158), (2-147) y (2-163) en el integrando, se obtiene el vector esfuerzo en S_T , el que esta dado por:

$$S^*(X, Y, Z) = \left[0, 0, \frac{\beta z_1 \alpha}{2h(1+\nu)} \right] = (S_1^*, S_2^*, S_3^*) \text{ en } S_T \quad (2-164)$$

De donde, al integrar sobre S_T , se obtiene que las componentes del vector fuerzas está dado por:

$$(F_1^*, F_2^*, F_3^*) = \int \left(0, 0, \frac{\beta z_1 \alpha}{2h(1+\nu)} \right) dydz = \left(0, 0, \frac{\beta z_1 \alpha b}{2(1+\nu)} \right) \quad (2-165)$$

Por lo que respecta al vector momentos, en vista de que (2-164) y (2-149) tiene componentes en la misma dirección, las componentes de momento por unidad de area dadas por (2-151) para este caso también son similares escribiéndola a continuación:

$$\left. \begin{aligned} m_1^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= x_2 S_3^* \\ m_2^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= 0 \\ m_3^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-166)$$

Por lo que al sustituir (2-164) y (2-166) en (2-145)₂, se obtiene cada uno de los componentes del vector momentos como sigue:

$$\left. \begin{aligned} M_1(x, b, h) &= \int_0^h \int_0^b \frac{\beta z_1 \alpha b}{2(1+\nu)} \bar{x}_2 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = \frac{\beta z_1 \alpha b^3 h}{4(1+\nu)} \\ M_2(x, b, h) &= 0 \\ M_3(x, b, h) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-167)$$

Observación 2-21: De acuerdo con (2-165) y (2-167) se aprecia que los únicos elementos mecánicos que actúan en S_T en la dirección e_1 , e_2 y e_3 son, solo una fuerza cortante en la dirección e_3 y un momento torsionante en la dirección e_1 , debiéndose esto, como se menciona anteriormente a la ubicación del sistema de coordenadas. Por otro lado se tiene que para conocer los elementos mecánicos sobre S_T inclinado hay que proyectar los elementos mecánicos obtenidos en S_T .

Con esto se termina la modelación mecánica correspondiente
al Cortante Simple con Extensión.

ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE UN PROBLEMA DE CORTANTE PURO

3.1 INTRODUCCION

En este capítulo, se dan a conocer las actividades desarrolladas en la etapa experimental del problema de cortante puro, cuya modelación mecánica se hizo en el capítulo anterior. Tomando en cuenta la modelación del problema mencionado, y considerando que la experimentación debía hacerse lo más apegada a esta, se optó por usar a la Fotoelasticidad como herramienta experimental, por considerarla la más adecuada entre las técnicas experimentales de campo completo conocidas

Para hacer el estudio, se escogió un material fotoelástico, tipo Psm-4 fabricado por Photolastic Inc., por considerarlo el más adecuado para el presente trabajo, por sus características de rigidez y sensibilidad fotoelástica, con el cual, se maquinó el modelo que se sujetó a cortante puro, así como, una barra prismática de la que se determinaron las propiedades ópticas y mecánicas del material, es decir, la constante de calibración fotoelástica σ_f , el módulo de elasticidad β y la relación de Poisson ν .

Por otra parte, para complementar lo anterior se construyó el marco de carga que permitió producir el estado de cortante-deseado, al aplicar las tracciones de superficie y condiciones de frontera tal y como se establecieron en la modelación mecánica del problema.

Una vez hecho lo anterior, se pasó a la obtención de datos fotoelásticos (isocromáticas e isoclinas), para diferentes niveles de carga. Observándose en estos, patrones homogéneos en el modelo, siendo lo anterior la mejor evidencia de que la carga apli-

cada corresponde a una tracción de cortante puro.

Por otro lado, es bueno mencionar que gracias al éxito obtenido en la presente etapa, fué posible establecer una metodología tanto mecánica como experimental de un problema de la mecánica de materiales que originalmente parecía muy difícil de hacer. Y con esto se consigue un objetivo muy importante; unir la modelación mecánica a la experimentación física, ya que ha quedado demostrado en el presente trabajo que ambas deben interrelacionarse.

3.2 TECNICA EXPERIMENTAL EMPLEADA Y SU JUSTIFICACION.

Dadas las condiciones de frontera (2-81) y tracciones de superficie (2-79) que en la modelación mecánica se determinaron, para el cortante simple, y tomando en cuenta que la experimentación física se tenía que hacer con una técnica que permitiera reproducirlo y comprobarlo lo más real, fué que se usó a la fotoelasticidad como herramienta experimental, por considerarla la técnica ideal de campo completo dentro de las que se conocen, dados sus alcances, y que finalmente permitió conseguir el objetivo deseado; reproducir el cortante simple.

Tomando en cuenta, que el problema a resolver es el de cortante puro y, dentro de la información que se puede obtener a partir de un estudio fotoelástico son campos de esfuerzos cortantes máximos e inclinación de esfuerzos principales, la fotoelasticidad es la herramienta adecuada para resolverlo, como se anticipó líneas arriba, de ahí el hecho de que se haya empleado. Es obvio que una manera de checar el problema de cortante puro es a través de esta técnica (para ver detalles de la fotoelasticidad consultar el apéndice C), ya que permite ver el fenómeno en forma directa, pudiéndose entender el problema a través de ella de las siguientes maneras:

a) Al observar un patrón de franjas isocromáticas de cortante puro, todo el modelo aparece cubierto por una sola franja, es decir, se corrobora el fenómeno por un lado, y por otro, que el sistema de carga empleado es el adecuado, siendo esto un paso muy importante en nuestro experimento, y su vinculación con la modelación mecánica, como parte modeladora del mismo.

b) Para la isoclina correspondiente a 45° , se observa que todo el modelo se pone totalmente obscuro, lo que implica que todos los puntos del modelo están sujetos a un estado uniforme de esfuerzos principales, inclinados 45° . De acuerdo con la elasticidad bidimensional, la situación anterior, corresponde a un estado de cortante puro, siendo ésta otra manera de checar el estado de esfuerzos en cuestión.

Como se puede ver, son varias las maneras de comprobar un estado de cortante puro, utilizando la fotoelasticidad, en este caso obviamente que se aplicó en forma bidimensional.

Las principales razones para que se usara como técnica experimental a la fotoelasticidad, fueron las anteriores. Así se pudo comparar de mejor manera el cortante dado por la modelación mecánica y la experimentación física.

3.3 DETERMINACION DE LAS PROPIEDADES MECANICAS Y OPTICAS DEL MATERIAL EMPLEADO EN EL EXPERIMENTO

Para hacer esta parte, se maquinó una barra prismática de material fotoelastico con las dimensiones que a continuación se dan,

$$L_1 = 20 \text{ cm.}$$

$$b = 2.55 \text{ cm.}$$

$$t = 0.9 \text{ cm.}$$

(3-1)

mismas que permitieron producir un estado uniaxial de esfuerzos de tensión. Después de hacer varios intentos de aplicación de carga axial, auxiliándonos del polariscopio para su comprobación mediante la obtención de un patrón homogéneo de isocromática en toda la barra y haciendo mediciones de deformación longitudinal y transversal con un vernier de precisión en un tramo de calibración de la barra, se encontró que las propiedades mecánicas, módulo de elasticidad y relación de Poisson del poliuretano usado son las siguientes.

$$\beta = 36.875 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\nu = 0.44 \tag{3-2}$$

Tomando en cuenta los valores dados por (3-2), y comparándolos con las propiedades de los poliuretanos que la literatura consultada para este caso maneja, es fácil darse cuenta que estos son muy parecidos, por lo que se considera que son aceptables. Lo anterior, se debe en gran medida a que las mediciones de deformación se hicieron rigurosamente.

Por otro lado, se tiene que en cuanto a la calibración fotoelástica del Psm-4, esta se llevó a cabo utilizando la barra que se usó para determinar las propiedades mecánicas, misma que también se sometió a un estado de esfuerzos de tensión, observando en las pruebas un comportamiento completamente lineal entre cargas y órdenes de franjas isocromáticas. Donde, al utilizar la ecuación esfuerzo-óptica (3-3),

$$\frac{S_1 - S_2}{2} = \tau_{\text{max}} = N \cdot \sigma_f \tag{3-3}$$

y tomando en cuenta el presente caso, un estado uniaxial de esfuerzos en la dirección (1) (dirección de la aplicación de la carga),

se tiene que $S_2 = 0$, de esta manera se concluye que la constante de franja está dada en forma directa simplificando (3-3) por.

$$\sigma_f = \frac{S_1}{2N} \quad (3-4)$$

Se sabe que (3-4) es la expresión más simple de la fotoelasticidad bidimensional, que relaciona la constante de calibración con los esfuerzos aplicados, misma que se usa ampliamente para calibrar materiales fotoelásticos.

De esta manera, se tiene que al efectuar las diferentes pruebas de carga, con sus respectivas tomas de órdenes de franja, se encontró que la constante de calibración para el material usado en el modelo de cortante, tiene el siguiente valor.

$$\sigma_f = 0.108 \text{ Kg/cm}^2 \text{ 6 franja} \quad (3-5)$$

Es así, como con (3-5) se da por terminada la etapa de determinación de propiedades mecánicas y fotoelásticas del Psm-4

3.4 MODELO EXPERIMENTADO Y MARCO DE CARGA.

En esta parte de la etapa experimental de la investigación, el objetivo principal fué hacer el modelo de material fotoelástico con su respectivo marco de carga, mismos que a continuación se detallarán.

Del material cuyas propiedades se determinaron anteriormente, se maquinó en el Laboratorio un modelo prismático, tal y como lo especifican las características geométricas de la modelación mecánica en las ecs. (2-3) y que se ilustra en la fig. (15) con las siguientes dimensiones:

$$L = 5 \text{ cm.}$$

$$b = 0.9 \text{ cm.}$$

$$h = 5 \text{ cm.}$$

(3-6)

Es importante mencionar, que debido a que se contaba con poca existencia de material fotoelastico, por ser este muy caro y de importación, solo se maquinó un modelo con las características geométricas (3-6), mismo que se usó en el experimento.

Por otra parte, se tiene que para aplicar las tracciones de cortante que se dan en la modelación ecs. (2-79) al modelo maquinado, se le colocaron tres plaquitas de acrílico perforadas en su parte media, pegadas a sus respectivas fronteras con plastiacer devcon, logrando una perfecta unión en toda la superficie de pegado.

Por otro lado, es bueno comentar que se hicieron varias pruebas de pegado, siendo el plastiacer devcon el pegamento que menos esfuerzos residuales indujo al material fotoelástico, siendo éste el motivo que obligó a usarlo como pegamento. También con el objeto de satisfacer las condiciones de frontera (2-81), y que se ilustran en la (fig-7), se pegó el modelo en su frontera inferior a una base fija, logrando reproducir las condiciones antes mencionadas de manera excelente.

Una vez que todo lo anterior estuvo hecho, se procedió a diseñar los mecanismos de aplicación de las cargas requeridas, -- que se hicieron por medio de poleas y con cables utilizando balines de plomo para las pesas que se usaron y que permitieron --- aplicar las cargas, como podrá observarse en la (fig.15), obteniendo excelentes campos de isoclinas e isocromáticas con el marco de carga usado.

Cabe aclarar, que la ley de tracciones de superficie dada -- por las placas de acrílico, tal vez no parezca la más adecuada, pero se decidió a usarlos como mecanismos de aplicación de cargas después de un concienzudo análisis de la situación experimental que se

se pretendía resolver.

Una vez observados los patrones de franjas (isocromáticas e isoclinas), que se producían al aplicar las cargas, se llegó a la conclusión de que el marco de carga que se empleó fué el adecuado.

3.5 OBTENCION DE DATOS Y SU INTERPRETACION.

Esta parte, se centrará principalmente, en los pormenores de la información obtenida en el desarrollo experimental del presente trabajo. Como se sabe, de un estudio fotoelástico como este caso, la información que se obtiene es; patrones de franjas de isocromáticas y de isoclinas que después son se interpretan de acuerdo con los objetivos a seguir.

Se dirá primeramente, que al modelo experimental sujeto a un estado de cortante puro, se le aplicaron varios niveles de carga determinándose para cada uno el correspondiente orden de franja N , y verificando al mismo tiempo que la isoclina producida por cada carga fuera la de 45° . observándose excelentes patrones de ambas franjas, como se observará en las figuras 16 y 17, donde se aprecia con claridad un patrón de isocromáticas y otro de una isoclina de 45° . Se ve en ambos casos que todo el modelo fué cubierto por una sola franja, dando una idea de cómo se distribuyeron los esfuerzos cortantes en el modelo. La uniformidad de éstos se debe principalmente al marco de carga diseñado en base a los requerimientos de la modelación mecánica.

Es así, como con los datos obtenidos, cargas y órdenes de franjas, se construyó la gráfica N - P de la figura 18, donde se observa un comportamiento lineal entre cargas y órdenes de franja; y fué con los datos de ésta gráfica y utilizando la ec. (3-3) que -

es la misma que la ec. (1) del apéndice C, como se construyó la gráfica de la figura 19, en la que al igual que la anterior se observa un comportamiento completamente lineal de la distribución de esfuerzos cortantes en el modelo en relación a las cargas aplicadas.

Por otro lado, se tiene que con otro conjunto de datos sumamente importantes (ángulos de giro θ y tracciones de superficie P) se construyó la gráfica de la figura 20, en la que se observa un comportamiento lineal entre P y θ del modelo ensayado. Cabe aclarar, que los ángulos de giro se determinaron haciendo escrupulosas mediciones en las configuraciones deformadas del modelo que aparecen en las fotografías de las isocromáticas e isoclinas.

Es conveniente resaltar la importancia que tiene para el presente trabajo la última curva mencionada, ya que θ es el dato que permite relacionar los resultados experimentales con los de la modelación mecánica, como se demostrará más adelante en el capítulo de las conclusiones.

Es importante, hacer un comentario acerca de los niveles de carga a los que estuvo sujeto el modelo, ya que si se observan las distintas gráficas donde éstas aparecen, es fácil darse cuenta de que la máxima resultante de tracción aplicada fué de 2.100 Kgs. Debiéndose ésta, a que el modelo en éste nivel de carga empezó a fallar, mediante la aparición de una grieta en la esquina inferior izquierda, con sus correspondientes efectos de concentraciones de esfuerzos que impidieron seguir tomando más datos. Aunque se piensa que los datos tomados son suficientes para dar por analizado el problema de cortante simple, al menos en su etapa lineal (ya que el campo de las deformaciones se considera pequeño).

CONCLUSIONES

De acuerdo con el trabajo realizado en la modelación mecánica y en la parte experimental (capítulos 2 y 3) de ésta tesis, y tomando en cuenta los resultados obtenidos, se puede decir, que los objetivos planteados inicialmente, fueron satisfechos. A continuación, se expone un breve comentario acerca de las conclusiones que de éste trabajo se pueden hacer.

A la primera conclusión que se llega, es de que se logra establecer una relación entre la modelación mecánica y la experimentación física, a través de un problema de la Mecánica de Materiales, dando la pauta para pensar en justificar sistemáticamente la Resistencia de Materiales desde un punto de vista de la Mecánica del Medio Continuo, en sus diferentes tópicos, como; Torsión, Flexión. Pandeo, etc.

Por otra parte, se tiene que a través de la modelación mecánica, fué posible demostrar la existencia del problema de cortante puro. Para ello, se partió de suponer un cortante generalizado, quedando claramente demostrado, que para poder darlo, se deben de satisfacer las condiciones de :

- a) Una función de deformación homogénea dada por (2-60).
- b) Un campo de desplazamiento lineal en X_3 .
- c) Un tensor de deformaciones infinitesimales (2-73), donde solo aparece la deformación de cortante $E_{13} = E_{31}$.
- d) Un tensor de esfuerzos de Piola con $S_{13} = S_{31}$,
 $S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{23} = S_{32} = S_{21} = S_{12} = 0$.
- e) Un campo de fuerzas de cuerpo nulas dado por (2-76).

También se tiene que de acuerdo con el determinante -----

de la representación matricial del tensor de deformaciones, esto es (2-60), y que esta dado por (2-62), el movimiento modelado - (cortante puro) es isocórico, es decir, preserva volúmenes. Lo anterior, es de relevante importancia, ya que es una de las principales características, del problema en cuestión, y que no se demuestra en la literatura de Mecánica de Materiales, aún cuando en algunos textos de las referencias es tratado en cierta forma menos rigurosa que aquí [1], [13], [23], tocando únicamente algunas cuestiones similares, en las que se coinciden.

Un detalle muy importante que se debe señalar, es que el cortante simple, se puede presentar cuando el campo de deformaciones-asociado es del tipo infinitesimal, como se demuestra en la modelación mecánica y en la experimentación física.

Por otra parte, se tiene que si los ángulos de giro son muy grandes la representación material y espacial del estado de esfuerzos (2-27) y (2-134) ofrecen resultados muy dispares, como podrá - observarse en la fig-23, máxime cuando se trata de un cortante no-lineal.(deformaciones finitas con alabeo de las caras del modelo).

En cuanto a la parte experimental, se puede decir que para - un cierto ángulo de distorsión superior al máximo experimentado, - los campos de esfuerzos observados se empezaban a distorsionar, es decir, ya no eran homogéneos, debiéndose principalmente a la presencia de esfuerzos normales en las caras laterales del modelo.

La confiabilidad de los datos obtenidos (Esfuerzos y Desplazamientos) en la modelación mecánica y en la parte experimental, - es buena, para ello observense las gráficas de las figuras 21 y 22, donde, son comparados estos, apreciándose una coincidencia casi-exacta en ambos, aún cuando los datos experimentales fueron obteni

dos a partir de una configuración deformada o espacial, y comparados con datos materiales determinados en la modelación, debiéndose la coincidencia al hecho de que el problema se comportó linealmente en un campo de deformaciones infinitesimales.

De lo anteriormente mencionado, es importante decir que la experimentación física se hizo a partir de la modelación mecánica, ya que se marca la pauta para diseñar otros experimentos.

Por último, se dirá también que la curva de la fig.22, donde se expresa el estado de desplazamientos teórico y experimental en $Z = h/2$ es la misma para ambos estados, ya que los dos usan para determinar U_1 al mismo dato que es $\alpha = \tan \theta$, de ahí la coincidencia.

Algunos posibles trabajos que se pueden realizar, y que tienen estrecha relación con el presente, podrían ser los siguientes:

- a) Una continuación en la discusión matemática y experimental del cortante simple en su etapa no lineal.
- b) Una discusión a fondo de la Mecánica de Materiales utilizando la Mecánica del Medio Continuo.
- c) Justificar a los Métodos de Análisis Experimental de Esfuerzos, utilizando la modelación mecánica, como un buen trabajo de apoyo para posibles estudios de problemas avanzados de la mecánica.

REFERENCIAS.

- 1 Atkin, R.J. and Fox, N. An Introduction to The Theory of Elasticity, Longman, 1980.
- 2 Beer, F.P. and Johnston. E.R. Mechanics of Materials, Mc.Graw-Hill, 1981.
- 3 Boresi, A.P. Sidebotton, O.M. Seely, B.F. and Smith, J.O. Advanced Mechanics of Materials, John Wiley and Sons, 1978.
- 4 Crandall, S.H., Dahl, N.C. and Lardner, T.J. An Introduction to The Mechanics of Solids, McGraw-Hill, 1978.
- 5 Dally, J.W. and Riley, W.F. Experimental Stress Analysis, McGraw-Hill-Kogakusha, 1978.
- 6 Den Hartog, J.P. Advanced Stregth of Materials, McGraw-Hill , 1952.
- 7 Durelli, A.J. and Riley S.F. Introduction to Photomechanics, Prentice-Hall, 1965.
- 8 Durelli, A.J. Philips, E.A. and Tsao, C.H. Introduction to The Theoretical and Experimental Analysis Of Stress and Strain, McGraw-Hill, 1958.
- 9 Durelli, S.J. Aplicaciones del Análisis de Esfuerzos, C.E.C. S.A., 1968.
- 10 Eringen, A.C. Mechanics of Continua, Wiley, 1980.
- 11 Feodosiev, V.I. Resistencia de Materiales, Ediciones Sapiens, 1976.

- 12 Gere, J.M. and Timoshenko, S.P. Mechanics of Materials, -
Brooks/Cole Engineering, 1984.
- 13 Gurtin, E.M. An Introduction To Continuum Mechanics, Acade-
mics Press, 1981.
- 14 Hearn, E.J. Resistencia de Materiales, Interamericana, 1984.
- 15 Kinasoshvili, R. Strength of Materials, Mir Publishers-Moscow,
1978.
- 16 Kobayashi, A.S. y Tuppeny, W.H. Análisis Experimental de ten-
siones, Urmo, 1970.
- 17 Mase, Mecánica del Medio Continuo, McGraw-Hill, 1977.
- 18 Popov, E.P. Introduction a la Mecánica de Sólidos, Limusa,
1978.
- 19 Rodríguez, F. y Azcunaga, A. Resistencia de Materiales, Vol.
1, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Ma-
drid, Sección de Publicaciones, 1978.
- 20 Shanley, F.R. Mecánica de Materiales, McGraw-Hill, 1971.
- 21 Stiopin, P.A. Resistencia de Materiales, Editorial Mir Moscú,
1979.
- 22 Spencer, A.J.M. Continuum Mechanics, Logman, 1980.
- 23 Timoshenko, s.p. y Goodier, J.N. Teoría de la Elasticidad, -
Urmo, 1975.
- 24 Timoshenko, S.P. y Young, D.H. Elementos de Resistencia de --
Materiales, Montaner y Simon, S.A. , Barcelona, 1979.

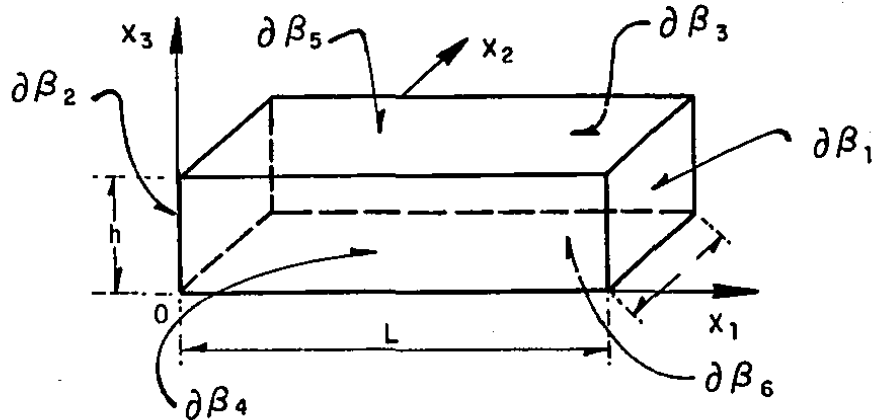


Fig 1 Representación geométrica del cuerpo en estudio y sus fronteras

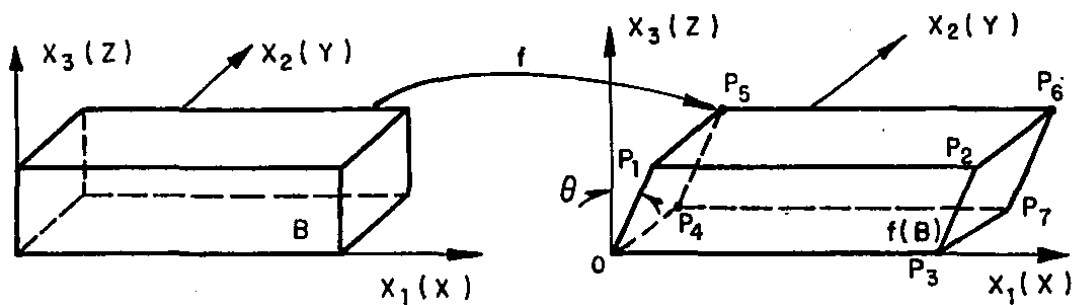
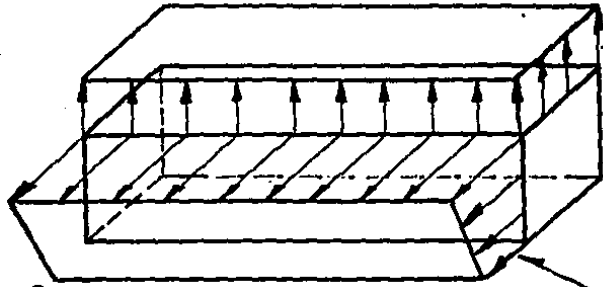


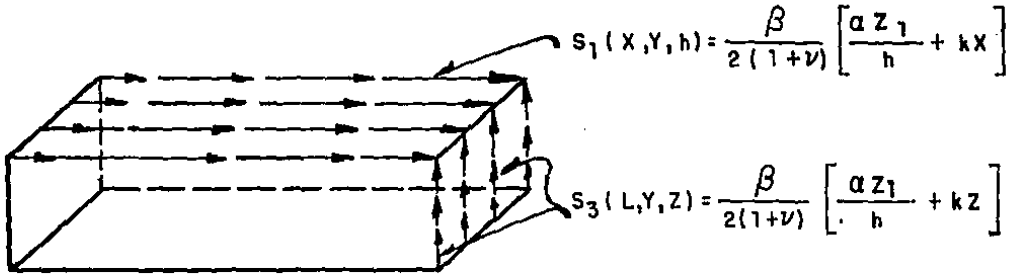
Fig 2 Configuración inicial y final de la barra

$$s_3(x, y, h) = \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{(z_1-h)}{h} + \nu \frac{(y_4-b)}{b} - \nu k z \right]$$



$$-s_2(x, 0, z) = \frac{-\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{(y_4-b)}{b} + \nu \frac{(z_1-h)}{h} + \nu k z \right]$$

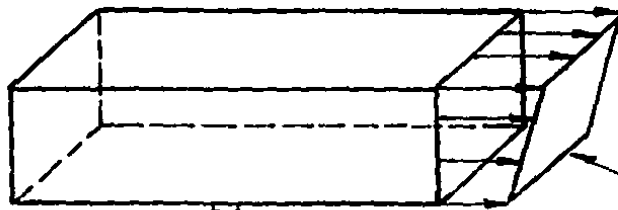
(a)



$$s_1(x, y, h) = \frac{\beta}{2(1+\nu)} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + k x \right]$$

$$s_3(L, y, z) = \frac{\beta}{2(1+\nu)} \left[\frac{\alpha z_1}{h} + k z \right]$$

(b)



$$b_{01} = b_{02} = 0, b_{03} = \frac{-\beta}{2(1+\nu)(1-2\nu)} k$$

$$s_1(L, y, z) = \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\nu \left(\frac{y_4-b}{b} + \frac{z_1-h}{h} \right) + (1-\nu) k z \right]$$

(c)

Fig 3 Tracciones de superficie y fuerzas de cuerpo del cortante no lineal

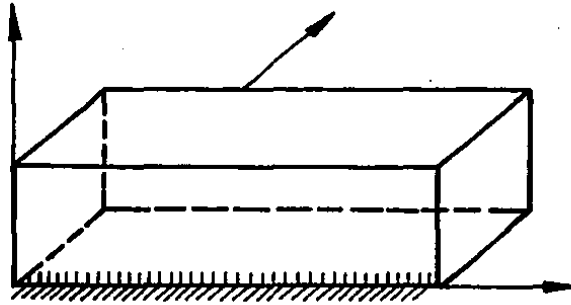


Fig 4 Condiciones de frontera del cortante no lineal

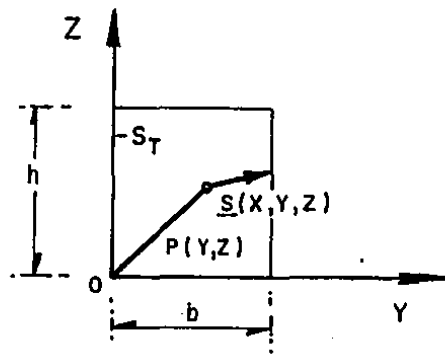


Fig 5 El vector esfuerzo actuando en S_T

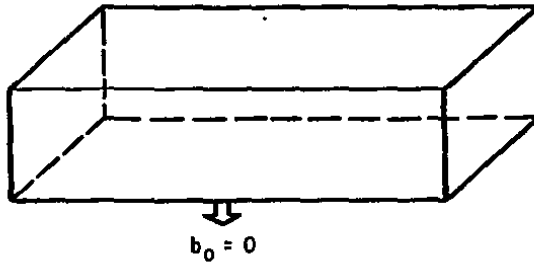
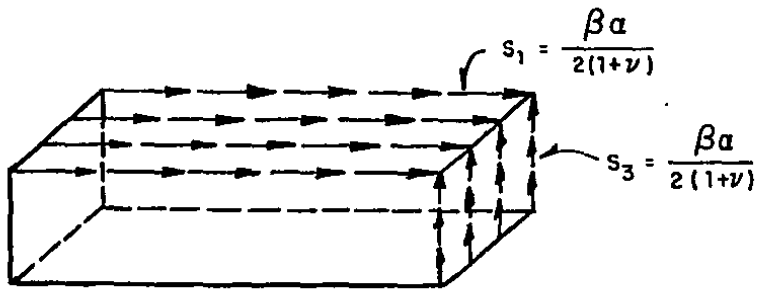


Fig 6 Tracciones de superficie y fuerzas de cuerpo para el cortante simple

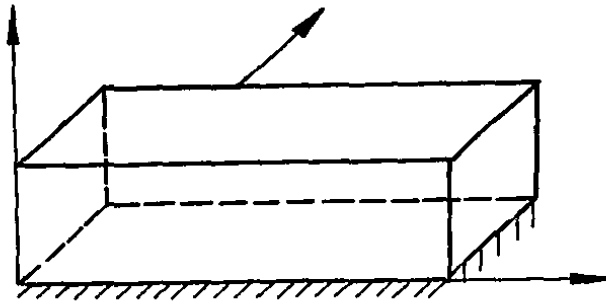
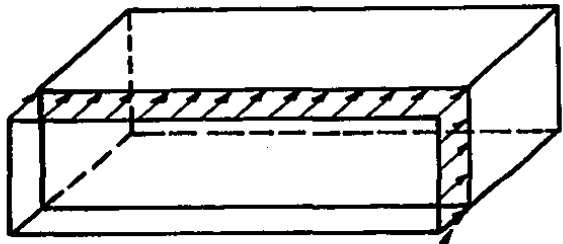


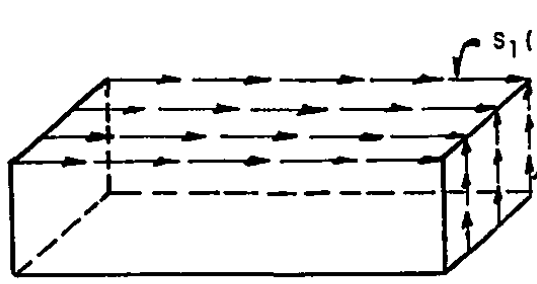
Fig 7 Condiciones de frontera para el cortante simple

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA



$$s_2(x, 0, z) = -\frac{\beta(z_1 - h)}{\nu h}$$

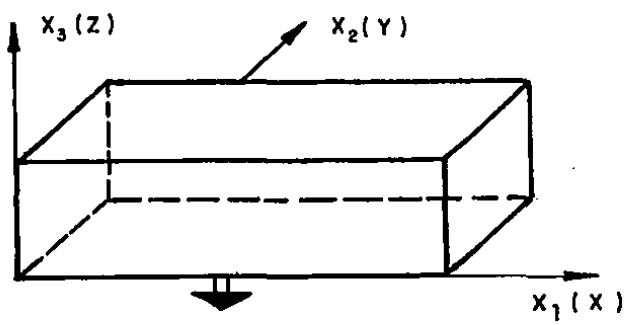
(a)



$$s_1(x, y, h) = \frac{\beta}{2(1+\nu)} \frac{\alpha z_1}{h}$$

$$s_3(L, y, z) = \frac{\beta}{2(1+\nu)} \frac{\alpha z_1}{h}$$

(b)



$$b_{0i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

(c)

Fig. 8 Tracciones de superficie y fuerzas de cuerpo para el cortante lineal con extensión

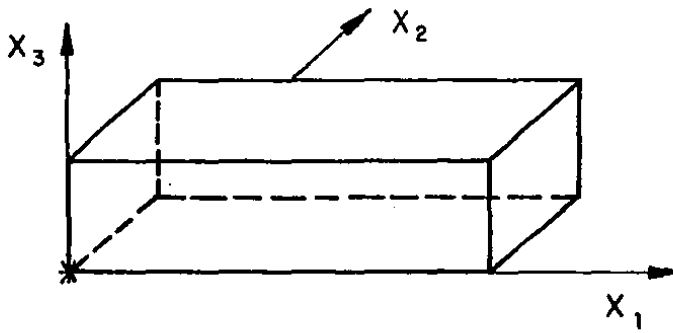


Fig 9 Condiciones de frontera para el cortante lineal con extensión

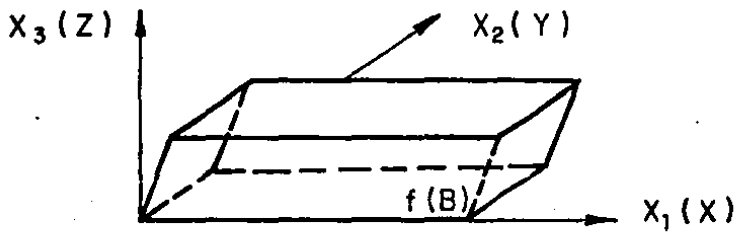


Fig 10 Configuración deformada de la barra

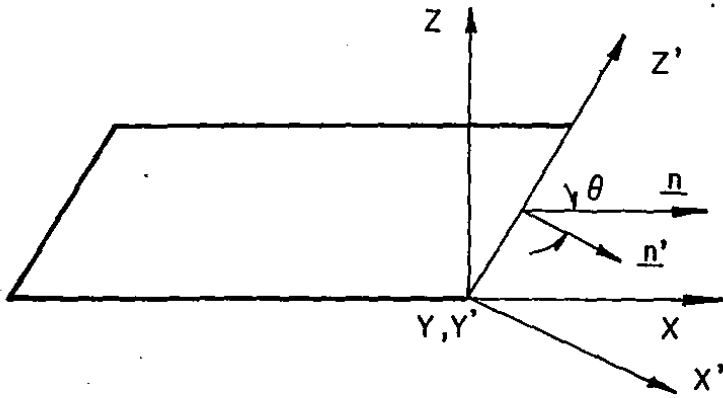


Fig 11 Detalle de rotación del sistema de coordenadas y normales unitarias

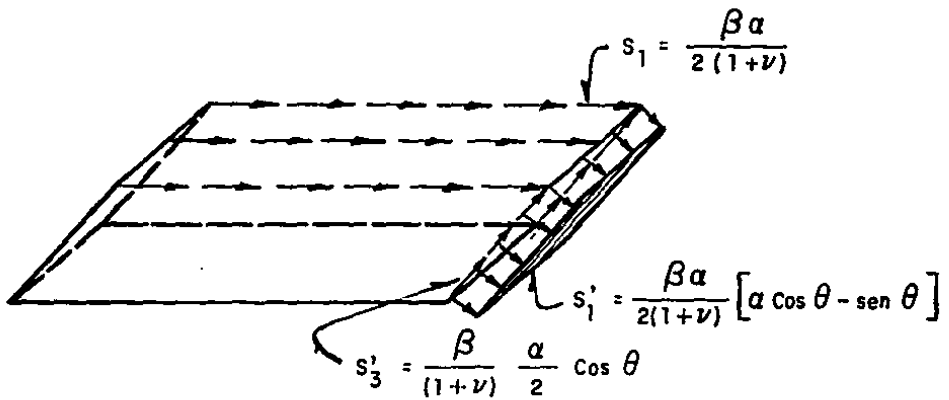


Fig 12 Tensiones de superficie espaciales para el cortante simple

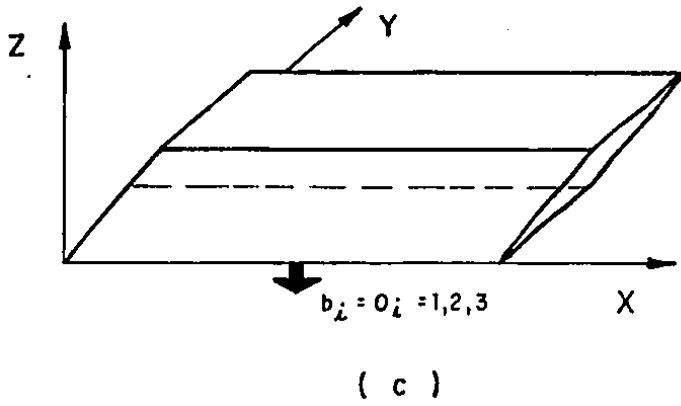
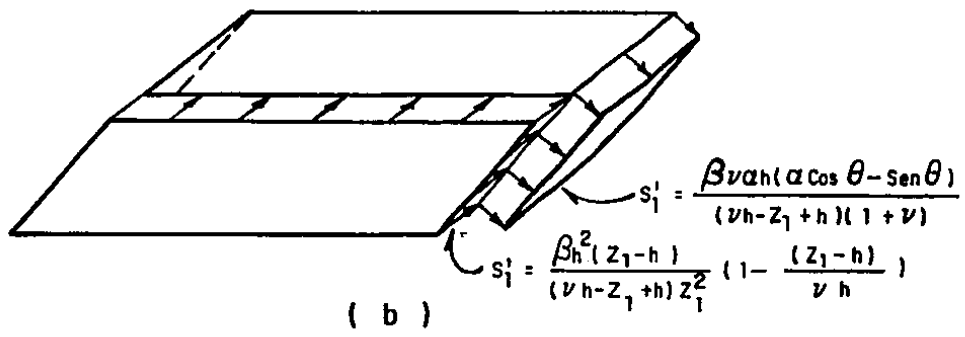
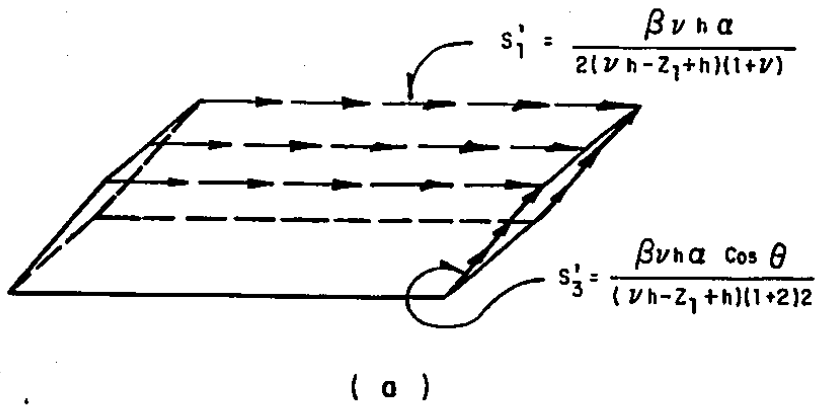


Fig 13 Tracciones de superficie y fuerzas de cuerpo espaciales para el cortante lineal con extensión

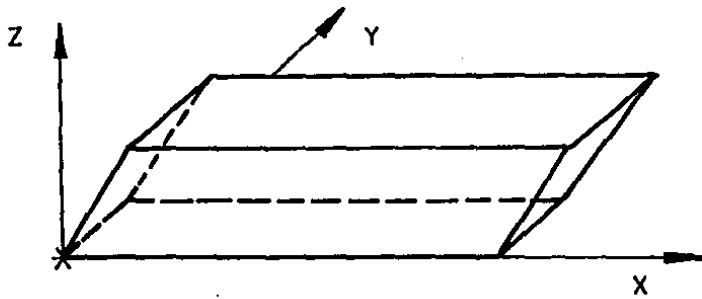


Fig 14 Condiciones de frontera espaciales para el cortante con extensión

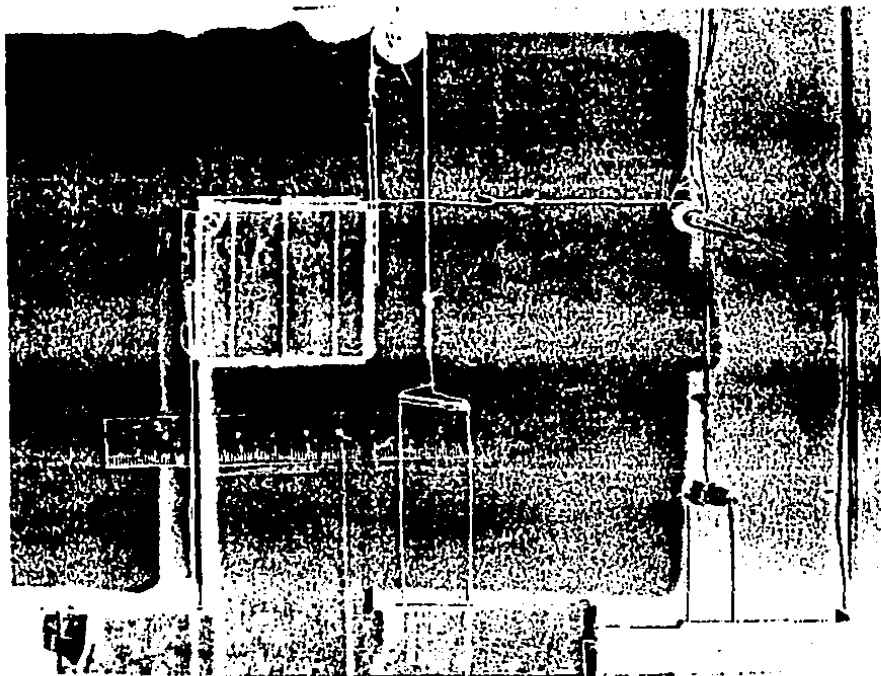


Fig.15 Marco de carga empleado en el experimento, donde, se puede observar el modelo cargado, apreciandose la rotación de las líneas verticales marcadas (fotocopia tomada de un negativo)



Fig.16 Fotografía mostrando un patrón de franjas isocromáticas con $N=2.57$ y resultante de tracción $P=1.272$ Kgs., obsérvese que todo el modelo está cubierto por una sola franja (fotocopia tomada de un negativo)

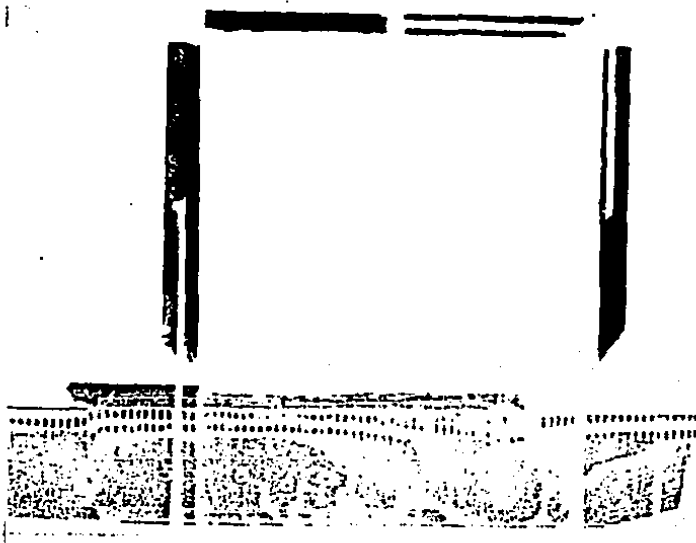


Fig.17 Fotografía de la isocline de 45° del modelo sujeto a una resultante de tracción $P=0.530$ Kgs., apreciándose con claridad la uniformidad de esta (fotocopia tomada de un negativo)

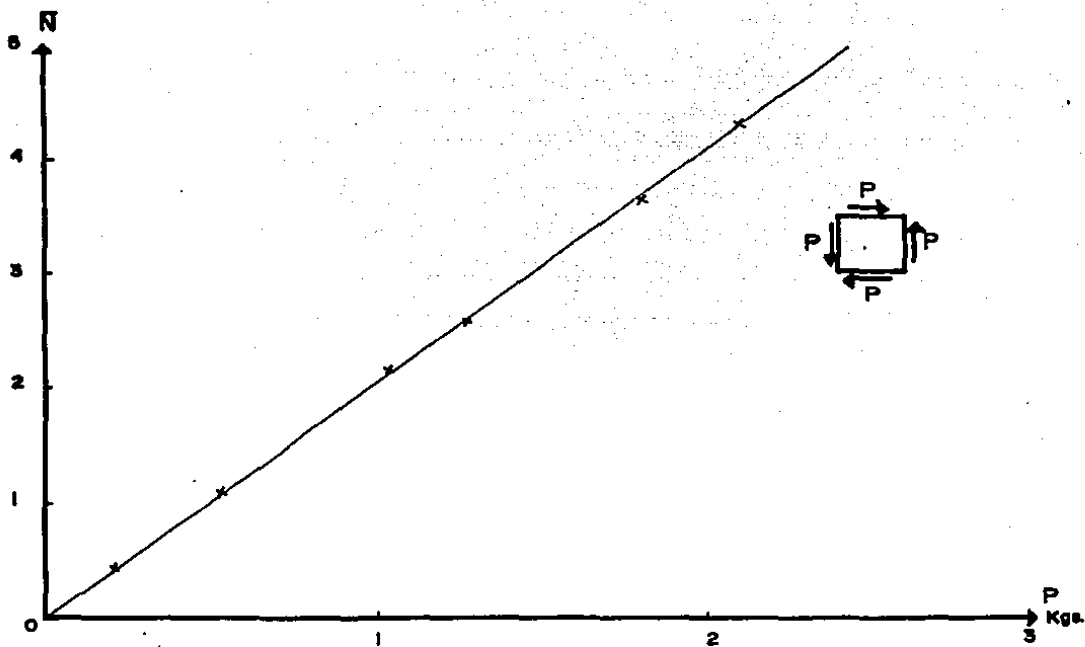


Fig 18 Curva orden de franja-carga del modelo sujeto a cortante puro

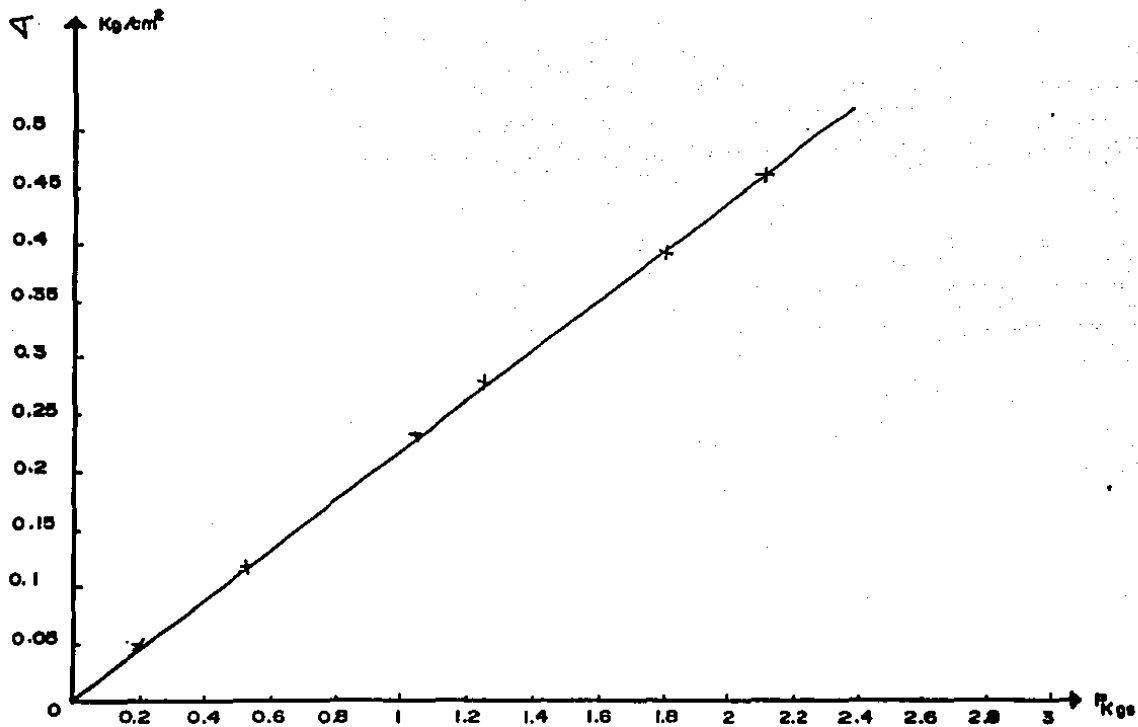


Fig.19 Curva donde se observa el comportamiento de los esfuerzos experimentales con respecto a las cargas en cualquier punto del modelo

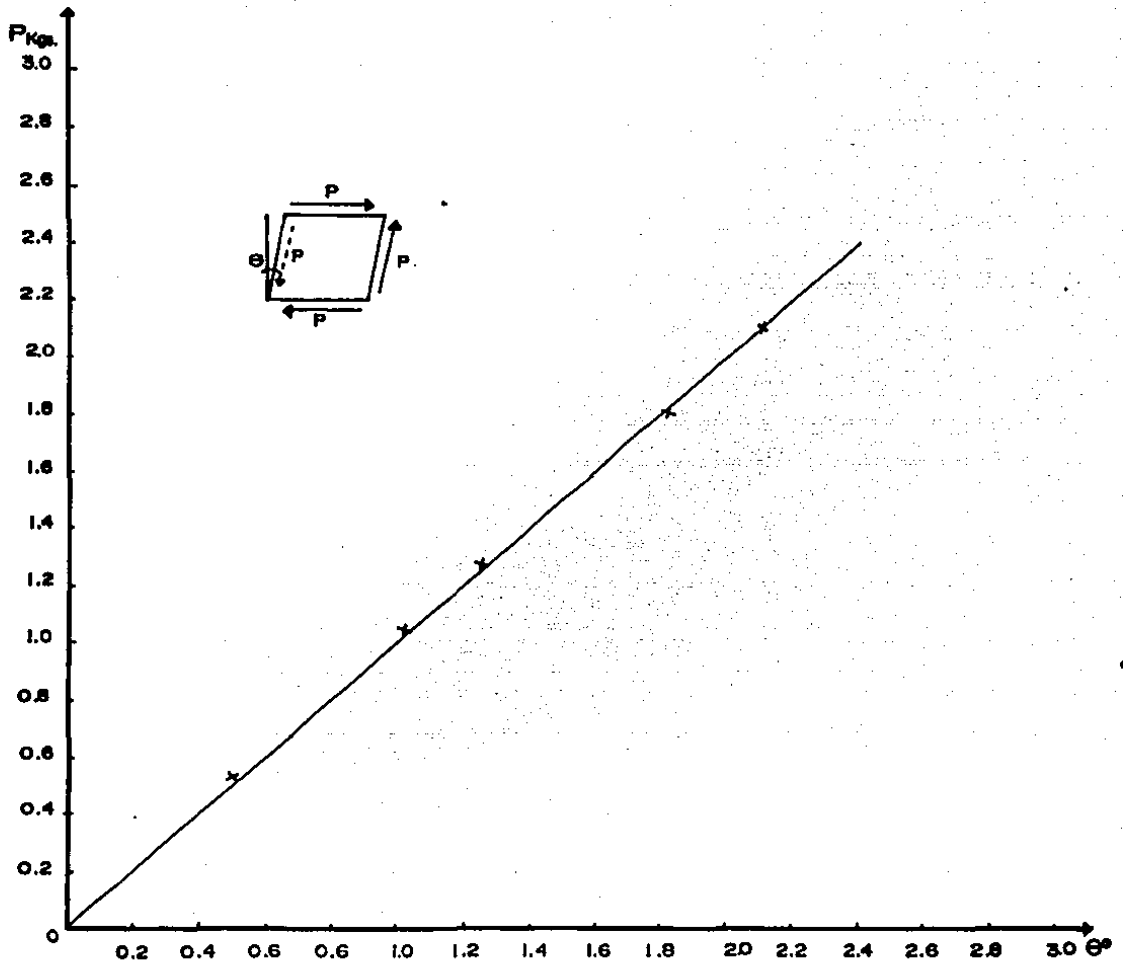


Fig. 20 Gráfica carga-ángulo de giro para el modelo sujeto a cortante puro

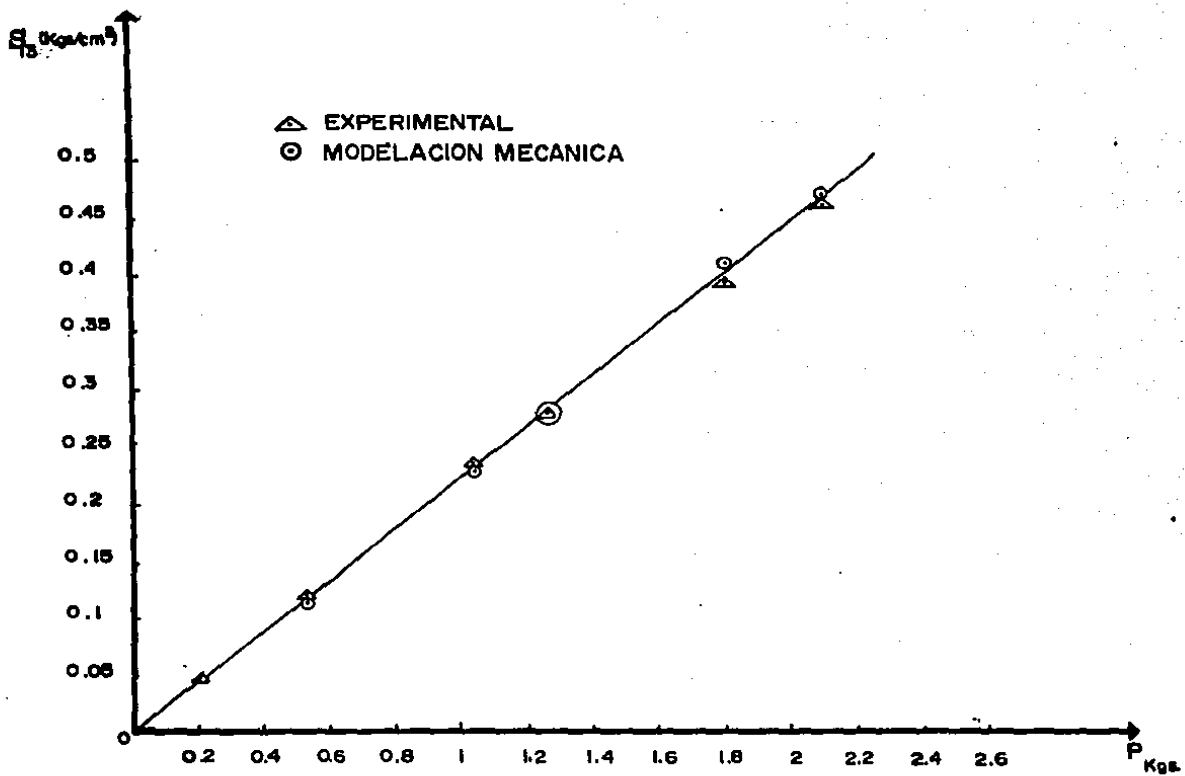


Fig. 21 Gráfica esfuerzo cortante-carga para cualquier punto del modelo

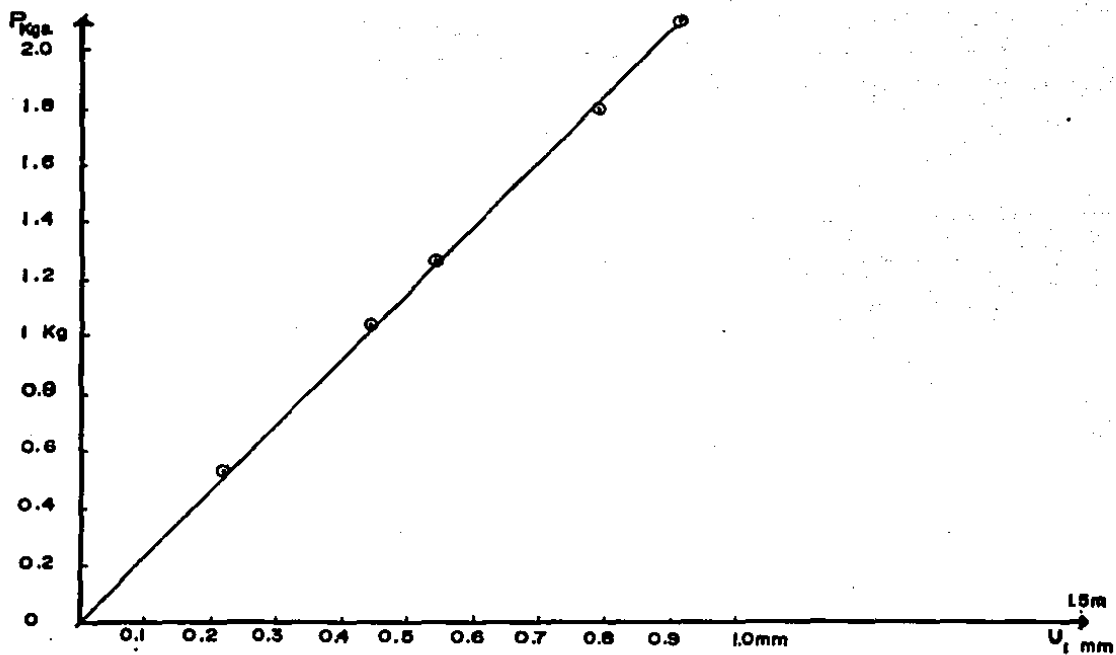


Fig. 22 Curva carga-desplazamiento teórica y experimental para un punto situado en $z=h/2$

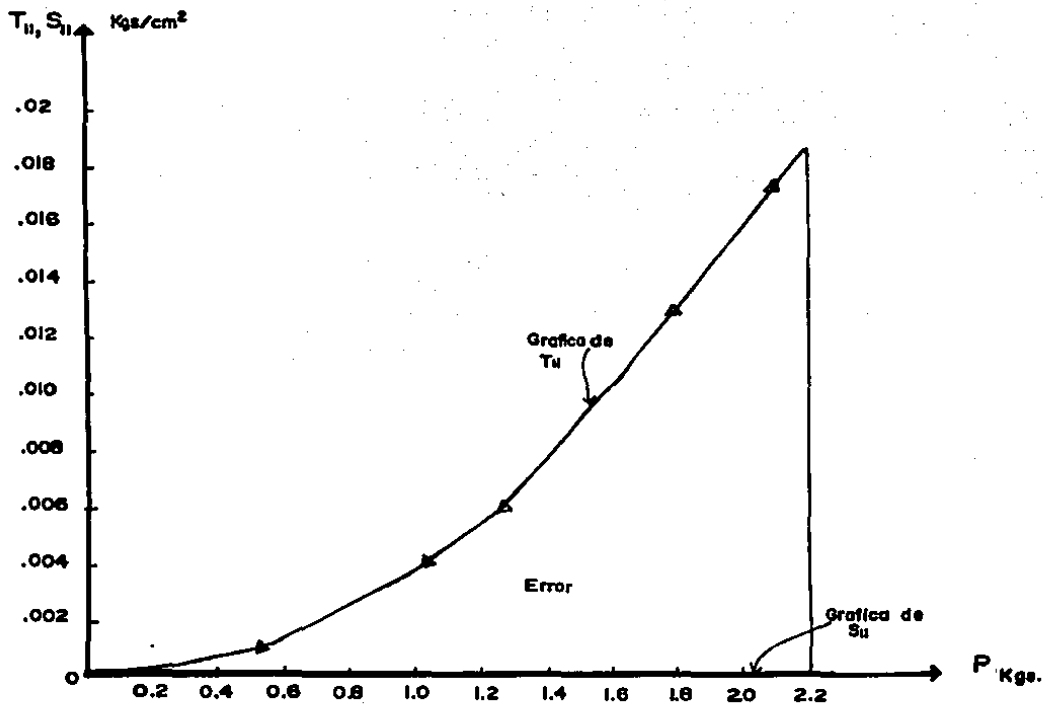
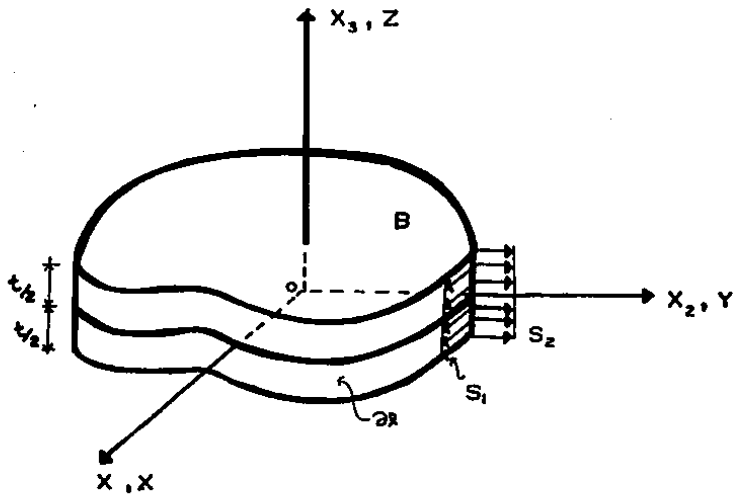
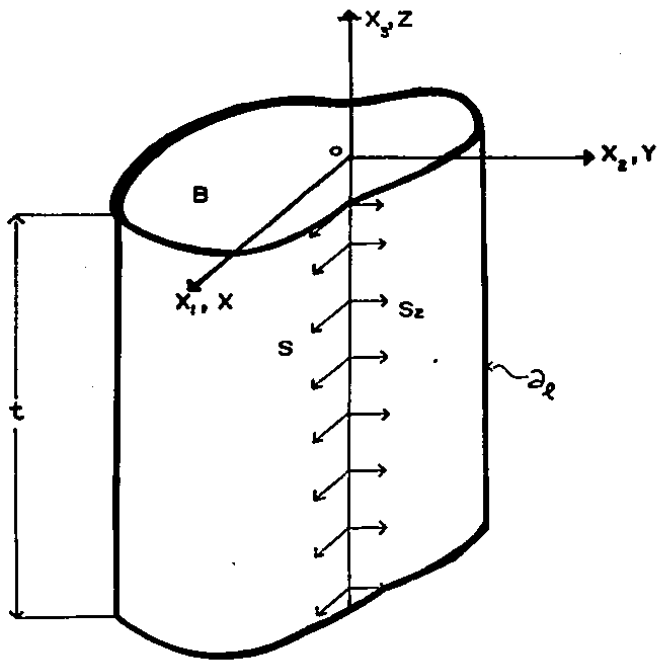


Fig. 23 Gráfica ilustrativa del error cometido al comparar los tensores de esfuerzos Folo y Cauchy, dado por T_{ii}



Esfuerzos planos



Deformaciones planas

Fig. 24 Representación esquemática del sistema plano de esfuerzos y deformaciones.



CAMPO OSCURO



CAMPO CLARO

Fig. 26 Patrones de franjas isocromáticas para una barra simplemente apoyada con carga aplicada en el centro del claro, donde, se aprecia con claridad la forma de enumerar las franjas para ambos campos

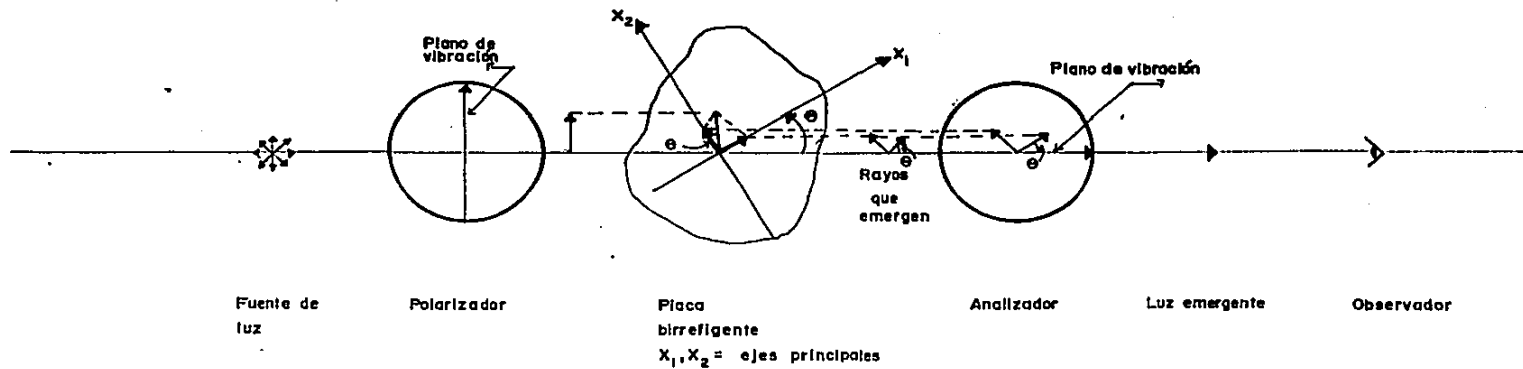


Fig. 26 Representación esquemática de un polariscopio plano (campo oscuro) polarizador y analizador cruzados.

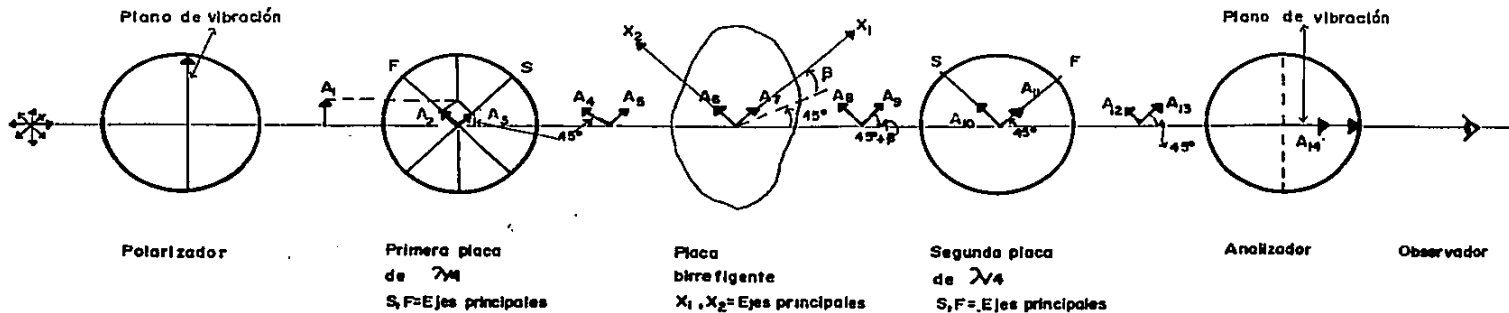


Fig. 27 Arreglo de los elementos de un polariscopio circular con polarizador y analizador cruzados y placas de cuarto de onda cruzadas (campo oscuro).

APENDICE A

DISCUSION DE LA FUNCION DE DEFORMACION DEL CORTANTE LINEAL CON EXTENSION

En esta parte, se pretende determinar por un lado los coeficientes de la función de deformación (2-7) para el caso de cortante no lineal con extensión, y por otro lado checar si (2-7) es efectivamente una función de deformación.

En primer término, se determinan los coeficientes de (2-7), para lo cual haremos uso de las condiciones cinemáticas expresadas en (2-6).

De la condición (2-6)₁,

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0, \\ c_0 &= 0, \\ d_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

con (6-2), se determina que

$$a_0 h = \alpha z_1 \Rightarrow a_2 = \frac{\alpha}{h} z_1, \quad (2)$$

$$d_1 h = z_1 \Rightarrow d_1 = z_1/h \quad (3)$$

De la condición cinemática establecida en (2-6)₃, se tiene la siguiente relación

$$a_1 L + a_2 h + a_3 Lh = x_2, \quad (4)$$

despejando a_3 de (4),

$$a_3 = \frac{x_2 - a_1 L - a_2 h}{Lh} \quad (5)$$

Tomando en cuenta (2-6)₄, se determina que

$$a_1 = 1 \quad (6)$$

y con (2) y (6) en (5), el valor de la constante a_3 es determinado, que resulta ser

$$a_3 = \frac{x_2 - L - \alpha z_1}{Lh} \quad (7)$$

Con la condición asumida en (2-6)₅, el valor de la constante C_1 es determinado, siendo esto

$$C_1 = y_1/b \quad (8)$$

Una vez que se determinan todos los coeficientes, se sustituyen estos (1), (2), (3), (6), (7) y (8) en la función de deformación resultando ser

$$f(X, Y, Z) = \left[X + \frac{\alpha z_1}{h} Z + \frac{x_2 - L - \alpha z_1}{Lh} XZ, \frac{y_4}{b} Y, \frac{z_1}{h} Z \right] v(X, Y, Z) \in B \quad (9)$$

El siguiente objetivo, es determinar si (9) es efectivamente una función de deformación, por lo que a continuación se prueban las propiedades que ésta debe satisfacer.

i) Obsérvese que la matriz del campo tensorial $F: B \rightarrow L(R^3, R^3)$, llamado gradiente de deformación, está dada por:

$$[F(X, Y, Z)] = [\nabla f(X, Y, Z)] \equiv \left[\frac{\partial f_i(X, Y, Z)}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} 1+kZ & 0 & \alpha z_1/h+kX \\ 0 & y_4/b & 0 \\ 0 & 0 & z_1/h \end{bmatrix} \text{ en } (X, Y, Z) \in B \quad (10)$$

donde

$$k \equiv \frac{x_2 - L - \alpha z_1}{Lh}$$

Observandose de (10) que la derivada de (9) existe y es continua.

A continuación se prueba que $f: B \rightarrow f(B)$ sea uno a uno, para que esto suceda, se tendrá que cumplir:

$$f(X, Y, Z) = f(X^*, Y^*, Z^*) \quad (11)$$

sustituyendo datos en (11), se plantea lo siguiente

$$X + \frac{\alpha z_1}{h} Z + kXZ = X^* + \frac{\alpha z_1}{h} Z^* + kX^* Z^*, \quad (12)$$

$$\frac{y_4}{b} Y = \frac{y_1}{b} Y^* \quad (13)$$

$$\frac{z_1}{h} Z = \frac{z_1}{h} Z^* \quad (14)$$

De (13) y (14),

$$Y = Y^* \quad (15)$$

$$Z = Z^* \quad (16)$$

Sustituyendo (16) en (12), se obtiene

$$X(1 + kZ^*) + \frac{\alpha z_1}{h} Z^* = X^* (1 + kZ^*) + \frac{\alpha z_1}{h} Z^* \quad (17)$$

Para que la igualdad (17) sea cierta, se requiere que

$$X = X^* \quad (18)$$

De (15) y (16) se concluye que $f: B \rightarrow f(B)$ es uno a uno

ii) Determinación de la inversa $f^{-1}: f(B) \rightarrow B$, de la función de deformación. Se sabe que $\forall (X, Y, Z) \in B$ existe un $(X^*, Y^*, Z^*) \in f(B)$ tal que, $f(X, Y, Z) = (X^*, Y^*, Z^*)$, esto es una transformación $f^*: f(B) \rightarrow B$ llamada inversa de $f: B \rightarrow f(B)$ [véase Bentley and Cooke]. Por lo tanto, para obtener la inversa de la función de deformación, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$X + \frac{\alpha z_1}{h} Z + kXZ = X^*, \quad (19)$$

$$\frac{y_4}{b} Y = Y^*, \quad (20)$$

$$\frac{z_1}{h} Z = Z^* \quad (21)$$

Resolviendo el sistema anterior, conduce a lo siguiente

$$X = \frac{X^* - \frac{\alpha Z^*}{h}}{[1 + k \frac{h}{z_1} Z^*]}, \quad (22)$$

$$Y = \frac{b}{y_4} Y^*, \quad (23)$$

$$Z = \frac{h}{z_1} Z^*. \quad (24)$$

Con estas últimas tres expresiones, se determina que la función inversa es:

$$f^{-1}(X^*, Y^*, Z^*) = \left[\frac{X^* - \frac{\alpha Z^*}{h}}{[1 + k \frac{h}{z_1} Z^*]}, \frac{b}{y_4} Y^*, \frac{h}{z_1} Z^* \right] \forall (X^*, Y^*, Z^*) \in f(B) \quad (25)$$

Checando si $f^{-1}: f(B) \rightarrow B$ es derivable y continua, se determina

la matriz asociada a su gradiente, como sigue

$$[\nabla f^{-1}(X^*, Y^*, Z^*)] = \left[\frac{\partial f^{-1}(X^*, Y^*, Z^*)}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + \frac{khZ^*}{z_1}} & -\frac{X^* kh}{z_1} - \frac{\alpha}{1 + khZ^*/z_1} + \frac{\alpha khZ^*/z_1}{\left(1 + \frac{khZ^*}{z_1}\right)^2} & 0 \\ 0 & b/y_4 & 0 \\ 0 & 0 & h/z_1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

como, se puede observar en (26) $f^{-1}: f(B) \rightarrow B$ es continua si Z^* no toma el valor de $Z^* = -Z_1/kh$.

Se sabe que:

$$\det[F(X, Y, Z)] = \frac{y_4 z_1}{b h} [1 + kZ] = \frac{y_4 z_1}{b h} \left[1 + \frac{x_2 - 1 - \alpha z_1}{Lh} Z \right] \forall (X, Y, Z) \in B \quad (27)$$

Observación A-1.

Para que $\det[\nabla f(X, Y, Z)]$ sea > 0 , se requiere necesariamente que $k \geq 0$ ya que, de acuerdo con la orientación del sistema de coordenadas $Z \geq 0$, y, para que k sea mayor que cero se requiere que:

$$x_2 - L - \alpha z_1 \geq 0 \text{ o}$$

$$x_2 - \alpha z_1 \geq L$$

(28)

Comentario final: Como, se puede observar a través de los desarrollos seguidos en este apéndice, la función de deformación para este problema, para poder serlo tiene que satisfacer ciertas condicionantes tanto en su inversa como en su gradiente y continuidad, condiciones que necesariamente inducirán problemas en la formulación del problema. Como sucedió con los principios de balance ecs. (2-32), (2-33) y (2-34) de la primera parte.

APENDICE B

DISCUSION DE LA FUNCION DE DEFORMACION DEL CORTANTE LINEAL CON EXTENSION

En esta parte, se demuestra que (2-122) satisface los correspondientes axiomas que la hacen una función de deformación.

i) Obsérvese que la matriz del campo tensorial $F: B \rightarrow L(R^3, R^3)$ llamado gradiente de deformación, está dada por:

$$[F(X, Y, Z)] = [F] = \begin{bmatrix} z_1/h & 0 & \frac{\alpha z_1}{h} \\ 0 & 1 - \frac{z_1-h}{v h} & 0 \\ 0 & 0 & z_1/h \end{bmatrix} \text{ en } (X, Y, Z) \in B \quad (1)$$

de donde, se puede ver que su derivada existe y es continua además se tiene que $f: B \rightarrow f(B)$ es uno a uno, en efecto

$$f(X, Y, Z) = f(X^*, Y^*, Z^*) \quad (2)$$

por lo que sustituyendo datos en (2), se plantea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\alpha z_1}{h} Z + \frac{z_1}{h} X = \frac{\alpha z_1}{h} Z^* + \frac{z_1}{h} X^*, \quad (3)$$

$$\left(1 - \frac{z_1-h}{v h}\right) Y = \left(1 - \frac{z_1-h}{h}\right) Y^*, \quad (4)$$

$$\frac{z_1}{h} Z = \frac{z_1}{h} Z^* \quad (5)$$

De (4) y (5), se determina que

$$Y^* = Y \quad (6)$$

$$Z^* = Z, \quad (7)$$

Con (7) en (3), se plantea lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\alpha z_1}{h} Z^* + \frac{z_1}{h} X &= \frac{\alpha z_1}{h} Z^* + \frac{z_1}{h} X^* \\ \frac{z_1}{h} X &= \frac{z_1}{h} X^* \Rightarrow X = X^* \end{aligned} \quad (8)$$

De (6), (7) y (8), se concluye que, efectivamente (2-122) es una función uno a uno.

ii) Ahora se obtiene la inversa $f^{-1}: f(B) \rightarrow B$ de la función de deformación.

Puesto que $\forall (X, Y, Z) \in B$ existe un $(X^*, Y^*, Z^*) \in f(B)$, tal que $f(X, Y, Z) = (X^*, Y^*, Z^*)$, esto es una transformación $f^*: f(B) \rightarrow B$ llamada inversa de $f: B \rightarrow f(B)$.

Por lo que para obtenerla, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\alpha z_1}{h} Z + \frac{z_1}{h} X = X^*, \quad (9)$$

$$\left(1 - \frac{z_1 - h}{v h}\right) Y = Y^*, \quad (10)$$

$$\frac{z_1}{h} Z = Z^*. \quad (11)$$

De donde, al resolver el sistema de ecuaciones formado por (9), (10), y (11), se obtiene,

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{h}{z_1} Z^*, \\ Y &= \frac{Y^*}{\left(1 - \frac{z_1 - h}{v h}\right)}, \\ X &= \frac{h}{z_1} (X^* - \alpha Z^*). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Por tanto, la función inversa de deformación es, tomando en cuenta (12)

$$f^{-1}(X^*, Y^*, Z^*) = \left[\frac{h}{z_1} (X^* - \alpha Z^*), \frac{Y^*}{\left(1 - \frac{z_1 - h}{v h}\right)}, \frac{h}{z_1} Z^* \right] \text{ en } (X^*, Y^*, Z^*) \in f(B) \quad (13)$$

Al determinar el gradiente de (13), se aprecia que su derivada existe, siendo la representación matricial de este lo siguiente

$$[\nabla f^{-1}(X^*, Y^*, Z^*)] = \begin{bmatrix} h/z_1 & 0 & -\frac{\alpha h}{z_1} \\ 0 & Y^* / \left(1 - \frac{z_1 - h}{v h}\right) & 0 \\ 0 & 0 & h/z_1 \end{bmatrix} \text{ en } (X^*, Y^*, Z^*) \in f(B) \quad (14)$$

iii) Probar si el determinante de (1), o sea $\det F$ es mayor que cero $\forall (X, Y, Z) \in B$. De (1) se tiene:

$$\det F = \frac{z_1^2}{h^2} \left(1 - \frac{z_1 - h}{v h}\right) = \frac{z_1^2}{v h^3} (h(1+v) - z_1) \quad (15)$$

Analizando (15) se observa que $\det F$ siempre será mayor que cero, ya que:

$$\frac{z_1}{v h} > 0, \text{ y} \quad (16)$$

$$h(1+v) - z_1 > 0 \quad (17)$$

La expresión (16) implica que es mayor que cero, debido principalmente a la ubicación del sistema de coordenadas. Y por lo que respecto a (17), diremos que ésta, también será mayor que cero, ya que si se toma en cuenta el comportamiento de la barra, si esta sujeta a un campo de deformación pequeña es seguro que se cumpla la condición mencionada, y si fuese finito, se requerirá de un campo de deformaciones muy grande para poder lograr que sea menor que cero, siendo esto prácticamente imposible. Tomando en cuenta todo lo anterior, puede asegurarse que (2-121) es efectivamente una función de deformación.

EL METODO FOTOELASTICO

1. Introducción.

El método fotoelástico, como herramienta de análisis de esfuerzos, es una técnica experimental de campo completo, ya que permite la determinación de campos de esfuerzos, siendo antigua (ya que data del siglo XVIII) y una de las técnicas experimentales más precisas, de ahí el hecho de que se haya usado en el presente trabajo, se pretende dar un bosquejo general de ella, - sin entrar en mucho detalle, ya que a quién se sienta interesado se les darán buenas referencias para que las consulte.

Por otro lado, se tiene que la fotoelasticidad, o el Método Fotoelástico, como se ha llamado en el presente apéndice, resulta particularmente útil en el diseño de partes estructurales, así como en el análisis y comprensión del comportamiento mecánico de éstas.

También, es importante decir, que es una valiosa herramienta en los estudios de distribuciones y concentraciones de esfuerzos, redimensionamiento en la geometría de elementos, optimización (es decir, quitando material de aquellas zonas donde no se está esforzando la pieza en estudio). y predicción de posibles fallas, principalmente en piezas de geometría irregular, - donde una modelación matemática resulta difícil.

Es pertinente, recalcar las ventajas que la fotoelasticidad tiene sobre otros métodos experimentales, como se dijo líneas arriba en la localización de concentraciones de esfuerzos

que por lo general, es donde se originan las fallas.

En éste caso, el método fotoelástico se usó para comparar y comprobar resultados teóricos en el problema de cortante puro.

2. NOCIONES DEL METODO

La fotoelasticidad, se vale de la propiedad llamada birrefringencia temporal, que algunos materiales transparentes (sobre todo plásticos) adquieren, cuando están sujetos a un estado de esfuerzos.

La birrefringencia o doble refracción, es un fenómeno en el que un rayo de luz polarizada incidente sobre un plano de un modelo transparente, es dividido en dos rayos cuando dicho modelo está cargado, de ahí lo de temporal, siendo la dirección de éstos rayos la que corresponde a la inclinación de los esfuerzos principales, además de que las velocidades de los rayos, son proporcionales a las magnitudes de los esfuerzos respectivos en cada dirección.

Por otro lado, se tiene que los rayos que emergen del modelo se encuentran desfasados y cuando se combinan, forman patrones de interferencia o franjas. Dicho desfaseamiento o retraso relativo, específicamente es la diferencia en longitudes de ondas que experimentan los dos rayos al atravesar el modelo.

Para poder obtener la información que la fotoelasticidad proporciona (patrones de franjas isocromáticas e isoclinas), es necesario, además de contar con un modelo de material con las propiedades ópticas adecuadas, el elemento principal de trabajo,

que es el polariscopio, con el que se observan los patrones antes-mencionados.

Aunque la fotoelasticidad es una técnica para resolver tanto problemas bidimensionales como tridimensionales; en el presente apéndice se enfocó al uso de ésta para el caso bidimensional, ya que es donde se usa con más frecuencia, y no se entrará en una discusión de la fotoelasticidad tridimensional, debido a que se requiere explicar para su entendimiento, procedimientos y técnicas que se salen del alcance de éste apéndice y que no se justifican en el presente trabajo.

3. FOTOELASTICIDAD BIDIMENSIONAL

Como se dijo anteriormente, el énfasis será hacia el caso bidimensional, por su sencillez de comprensión e inmediata aplicabilidad práctica, ya que no requiere de muchos conocimientos para obtener resultados concretos.

A continuación, se explicará sin mucho detalle, el problema de esfuerzos planos, quién esté interesado en profundizar al respecto, podrá recurrir a las referencias que se dan en la bibliografía [8], [16], [23].

Se dice que un problema de la mecánica de materiales es idealizable mediante un sistema plano de esfuerzos, cuando satisface ciertas condiciones tanto geométricas como de cargas. Estrictamente hablando, todos los problemas de la mecánica son tridimensionales. por tanto, es importante tener en cuenta que cuando se ha-

ble de un sistema plano, ya sea de esfuerzos o de deformaciones, está presente una solución aproximada, y en la medida en que las condiciones anteriores sean satisfechas, dicha aproximación será "más" exacta.

Las condiciones mencionadas para esfuerzos planos, se pueden entender de la siguiente manera: en cuanto a las condiciones geométricas, se dirá, que éstas exigen que el cuerpo sea delgado, es decir, de un espesor cuya magnitud sea pequeña comparada con las otras dimensiones del cuerpo, y respecto a las cargas, éstas deberán actuar paralelas al plano del cuerpo como se observa en la figura 24.

En un sistema plano de esfuerzos, suponiendo que el plano es el XY, las componentes de esfuerzos son S_x , S_y y S_{xy} , siendo nulas las demás componentes del tensor de esfuerzos. Y si éste plano es principal, sólo existen dos componentes de esfuerzos; S_1 y S_2 ($S_3 = 0$) donde, uno es máximo y otro mínimo.

En éste caso se tomará como S_1 el mayor de los dos algebraicamente hablando, con el propósito de que ($S_1 - S_2$) siempre sea positivo. Los planos en el que actúan S_1 y S_2 tienen una orientación con respecto al sistema XY, que se denotan por θ y $\theta \pm 45^\circ$.

La nomenclatura usada en esfuerzos principales y la inclinación, servirá para las ecuaciones de la fotoelasticidad que se usarán posteriormente.

4 ISOCROMATICAS

Dentro de la información que se puede obtener de un estudio fotoelástico, están los patrones de franjas de isocromáticas e isoclinas, y los que se relacionan con los esfuerzos, son las isocromáticas, que en pocas palabras pueden definirse como; el lugar geométrico de puntos donde el esfuerzo cortante es máximo ó la diferencia de esfuerzos principales es la misma.

Los patrones de franjas isocromáticas, se obtienen en un modelo de esfuerzos planos, cuando éste es expuesto a un campo de luz polarizada circular. Dicho campo de luz, es obtenido mediante un dispositivo llamado polariscopio, y si además la luz es monocromática, dichos patrones son una secuencia de bandas oscuras y luminosas cuya distribución es proporcional a las cargas externas aplicadas al modelo.

El modelo matemático que relaciona los esfuerzos con las isocromáticas, está dado mediante la siguiente ley esfuerzo óptico - bidimensional.

$$\frac{S_1 - S_2}{2} = \frac{\sqrt{f} N}{t} \quad (1)$$

donde:

S_1, S_2 son los esfuerzos principales

\sqrt{f} Coeficiente de esfuerzo óptico, cuyas características dependen del material que está hecho el modelo el modelo y de la luz empleada en el experimento.

t espesor del modelo

N orden de franja isocromática, ó retraso relativo.

De la ec. (1) , se ve claramente que el orden de franja N o retardación relativa, es directamente proporcional a la diferencia de esfuerzos principales..

Los patrones de franjas isocromáticas obtenidos de un análisis fotoelástico, son de dos tipos; uno, en el que las bandas oscuras se cuentan por órdenes enteros, $N = 0, 1, 2, \dots, n$, que corresponden a un campo oscuro, y la otra, cuando la intensidad de la luz es máxima (campo claro), donde los órdenes de franjas son contados por medias unidades, es decir, $N = \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \dots, \frac{n}{2}$.

Para propósitos de análisis, por lo general, es suficiente con un patrón de franjas, pero cuando se requiere más precisión, - es recomendable tener los dos patrones de franjas mediante fotografías para obtener mejores resultados.

Algunos analistas de esfuerzos, a través de la literatura, recomiendan trabajar con fotografías de campo claro, ya que en éstas se aprecia el modelo, pero los resultados serían los mismos si se usa uno u otro campo, cuando el material fotoelástico es sensible.

Con lo anterior, se puede tener idea de lo que se entiende por orden de franja isocromática N para un punto, que en pocas palabras se resume como el número de franjas que pasa a través de un punto durante la aplicación de cargas al modelo en estudio [16].

Una de las principales dificultades con los patrones de isocromáticas, es saber numerarlos, sobre todo en piezas de geometría irregular, donde es difícil situar un orden cero. De ahí la

conveniencia de trabajar primero con campos oscuros en el polariscopio, ya que es en éstos, donde se detectan aquellos puntos con $N = 0$. Se recomienda para su localización, ubicar las esquinas libres del modelo, ya que mediante la teoría de la elasticidad para un caso de esfuerzos planos, es fácil analizar una esquina libre, ya sea interna ó externa y fijarla como un punto con esfuerzos nulos, y por tanto, la franja encontrada es de orden cero. También hay puntos internos con orden nulo y se identifican jugando con las cargas en el modelo y observando en el polariscopio. Como se ve, es fácil obtener resultados de la fotoelasticidad bidimensional sin mayor dificultad.

También existen técnicas cuando el método se complica y se vuelve tedioso como es el caso de estudiar puntos internos en los que se tienen que determinar fracciones de franjas y separación de esfuerzos, las cuales son explicadas ampliamente en la bibliografía que aparece al final del trabajo.

Una vista de patrones de franjas isocromáticas tanto para campo claro como oscuro, se observan en la figura (25).

5 ISOCLINAS

Otro patrón de franjas que se puede obtener de un estudio fotoelástico, son las isoclinas o lugares geométricos de puntos donde la inclinación de los esfuerzos principales o deformaciones principales es la misma. es importante notar que con ésta familia de curvas junto con las de las isocromáticas, además de las técnicas de separación de esfuerzos, son las herramientas necesarias para hacer un análisis de esfuerzos utilizando la fotoelasticidad. Al mismo tiempo se aprovecha el presente comentario para decir que

rara vez se resuelven problemas utilizando el método fotoelástico únicamente, debido al consumo de tiempo y lo caro que resulta, - por lo que se recomienda utilizarlo junto con otras técnicas experimentales.

Regresando al tema de las isoclinas, se dirá que éstas se obtienen con luz polarizada plana, es decir, se hace uso de un polariscopio plano. Si se parte de que la intensidad luminosa en un polariscopio plano está dada por la ecuación

$$I = 2 a^2 \sin^2 2 \theta \operatorname{Sen}^2 \frac{\alpha}{2} \quad (2)$$

De ésta ecuación se observa que la extinción se debe a dos cosas; la primera que es:

$$I = 0, \text{ cuando } 2\theta = n\pi \text{ donde } n \text{ es un entero} \quad (3)$$

Siendo (3) la contribución de la isoclina, y por otro lado

la extinción ocurre cuando:

$$\frac{\alpha}{2} = n\pi, \text{ ó } R = \frac{\alpha}{2\pi} = n \quad (4)$$

Donde n es un entero, ó donde la retardación relativa R es un número entero de longitudes de onda, siendo ésta parte la contribución debida a la isocromática.

De las ecuaciones (3) y (4) se concluye que : un modelo analizado con luz plana muestra patrones de franja tanto de isoclinas como de isocromáticas, siendo ésto, un problema al momento de hacer las observaciones, ya que se presta a confusión al no poder distinguir uno del otro, aunque ya existen procedimientos para hacer tal distinción. En la literatura son muy claros al respecto, y se sugiere que para evitar problemas, además del material fotoelástico sensible, se maquine uno de un material fotoelástico poco sen

sible a las isocromáticas como puede ser el acrílico, donde las isoclinas se aprecian claramente.

Una vez salvado lo anterior, se determinarán las isoclinas que se deseen para el problema en cuestión, mediante una rotación simultánea del polarizador y el analizador cruzados, recomendando la variación de las isoclinas de 5° ó de 10° , ya que con incrementos de éste tipo, son suficientes para saber la inclinación de S_1 y S_2 en todo el modelo.

6 POLARISCOPIO

El dispositivo mediante el cual la fotoelasticidad es fácilmente entendible, es el polariscopio, que es un instrumento que usa la luz polarizada para su funcionamiento. De acuerdo con la luz polarizada que se trabaje, éste instrumento adquiere los nombres de : polariscopio elíptico, polariscopio circular y polariscopio plano. Siendo los de más amplio uso en aplicaciones fotoelásticas los dos últimos.

Existen diferentes diseños de polariscopios, pero el que se recomienda por su fácil manera de construir, usar y de bajo costo, es el de luz difusa, el cual da resultados altamente satisfactorios, existiendo pocos problemas de la realidad que no se puedan analizar con éste tipo de instrumento fotoelásticamente hablando.

Por otro lado, tenemos que en cuanto al polariscopio plano , su conformación está dada por : una fuente de luz, dos placas polaroid y un modelo, cuya representación esquemática está dada en la figura (26). Como se dijo, éste tipo de instrumento es útil en la determinación de campos isoclínicos.

Respecto al polariscopio circular, se puede decir que, es más complejo, ya que tiene más elementos que el anterior, siendo su principal utilidad la determinación de patrones de isocromáticas, y se muestra un esquema de éste en la figura (27).

Es importante notar, que se pueden hacer arreglos en los polariscopios con las lentes para obtener distintos campos de luz polarizada (obscuro y claro). También es claro comentar que además de las componentes que se mencionan en las figuras (26) y (27), es importante contar con lentes monocromatizadoras, con el fin de obtener patrones de franja de un solo color para trabajar mejor, ya que de lo contrario, se obtienen campos de bandas coloreadas que a veces dificultan el análisis de datos, Así como también, contar con una cámara fotográfica, ya que resulta más versátil trabajar sobre fotografías, que obtener los datos directamente en el polariscopio.

Con la explicación anterior, se considera que se puede tener una idea clara de lo que es el método fotoelástico, sus alcances y los principios en los que se basa como Método de Análisis Experimental de Esfuerzos. Existen más detalles que explicar del método, como es la separación de esfuerzos, así como técnicas de lecturas de fracciones de franjas isocromáticas que no se abordarán en esta ocasión , ya que haría muy extenso el presente apéndice sin ser éste el principal objetivo del mismo .Por lo que, a quién le interese el método, se le recomienda la bibliografía que al final se enlista.