

03061
Zej.
2

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**



**INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMATICAS
APLICADAS Y EN SISTEMAS
UNIDAD ACADÉMICA DE LOS CICLOS PROFESIONAL
Y POSGRADO DEL C. C. H.**

**TOPICOS EN INFERENCIA ESTADISTICA PARA LEYES
ESTABLES**

T E S I S

Que para obtener el grado de:
**MAESTRO EN ESTADISTICA E INVESTIGACION
DE OPERACIONES**

Presenta el:

LIC. JORGE GOMEZ ARIAS

México, D. F.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

1988



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO I DISTRIBUCIONES ESTABLES	4
CAPITULO II METODOS ESTADISTICOS PARA DISTRIBUCIONES ESTABLES	31
CAPITULO III INFERENCIA ESTADISTICA PARA EL PARAMETRO DE LOCALIZACION	57
BIBLIOGRAFIA	74

INTRODUCCION.

Un tema de constante estudio dentro de la teoría de probabilidad lo constituyen los teoremas límites para sumas de variables aleatorias independientes, entre los cuales el principal y pionero es el célebre Teorema Central del Límite. Las distribuciones estables son las únicas posibles distribuciones que son límites de sumas estandarizadas de variables aleatorias independientes con la misma distribución. Por lo tanto las distribuciones estables constituyen una generalización de la distribución normal. El estudio probabilístico de estas distribuciones fue iniciado por Levy (1924 y 1927) y continuado por Gnedenko y Kolmogorov (1954) entre otros.

Por otro lado las distribuciones estables se han utilizado para modelar fenómenos en áreas tan diversas como en Economía: Mandelbrot (1973); Frelitz and Smith (1972); y Paulson, Helcomb and Leitch (1975) modelan fenómenos relativos a ingresos y variación de precios en mercados especulativos a través de las distribuciones estables. Elliot, W. Montroll, and John T Bandler (1984) utilizan estas distribuciones para desarrollar la teoría de Relajación Dieléctrica; y John T. Bandler (1984) lo hace para la teoría de Relajación Mecánica. Asimismo en Zolotarev (1986) encontramos un modelo general para el "campo de acción" creado en un determinado punto y VCR^m por un subconjunto de partículas puntuales en VCR^m , desarrollado con las distribuciones estables, encontrándose también aplicaciones en particular al campo gravitacional de las estrellas; a la distribución de la temperatura en un reactor nuclear; a la distribución de esfuerzos en una malla cristalina; y a la distribución del campo magnético generado por una red de magnetos

elementales. También en esta referencia se encuentran desarrollados algunos modelos con aplicaciones en ingeniería y electrónica, finalmente con las distribuciones estables este autor calcula las probabilidades de algunas caminatas aleatorias y algunos procesos de ramificación.

El objetivo fundamental del presente trabajo consiste en presentar, dentro del marco de la inferencia estadística, similitudes y contrastes entre la distribución normal y las otras distribuciones estables. Para esto en el Capítulo I se presentan los principales resultados de la teoría de probabilidad de las distribuciones estables y sus dominios de atracción, así como sus propiedades. En particular se estudian las distribuciones estables simétricas para las cuales se introduce una parametrización de la función característica distinta a la que es común en la literatura. Asimismo se deduce una expresión para el parámetro de escala en función de los percentiles de la distribución. Este último resultado no fue encontrado en la literatura y es empleado posteriormente en el Capítulo III de este trabajo.

Uno de los contrastes entre la distribución normal y las distribuciones estables es reflejado en el hecho de que se hayan tenido que desarrollar métodos especiales de estimación para estas últimas. En el Capítulo II se presenta un estudio bibliográfico de los principales resultados en inferencia estadística para las distribuciones estables.

Un tema principal dentro del estudio estadístico de la distribución normal lo constituye el problema de construir intervalos de confianza para la media μ de una distribución con varianza σ^2 finita. En el Capítulo III, último de este trabajo, investigamos el problema de construir intervalos de confianza para el parámetro de localización de

una distribución estable simétrica, tanto para el caso en que el parámetro de escala es conocido como el caso en que es desconocido. Finalmente se reportan los estudios de simulación realizados para investigar:

- a) La robusticidad de la distribución t-student dentro de la familia de las distribuciones estables simétricas.
- b) La rapidez de convergencia de una estadística análoga a la t-student construida en base a la deducción del parámetro de escala que se hace en el Capítulo I.
- c) La precisión de los intervalos de confianza construidos con ambas estadísticas en el rango común de distribuciones estables en donde las dos alternativas puedan ser utilizadas.

CAPITULO I

DISTRIBUCIONES ESTABLES

1.1 INTRODUCCION.

El Teorema Central del Límite es uno de los teoremas principales en la teoría de probabilidad y en estadística. La esencia de este teorema consiste en establecer las condiciones bajo las cuales sumas estandarizadas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) convergen en distribución a la distribución normal estándar. Es posible extender los conceptos inherentes a este teorema, a todas aquellas distribuciones de probabilidad que son límites de sumas estandarizadas de v.a.i.i.d.

Los primeros estudios al respecto se iniciaron con P. Levy (1924 y 1927). Posteriormente encontramos una teoría probabilística elaborada alrededor de las llamadas *DISTRIBUCIONES ESTABLES* en Gnedenko y Kolmogorov (1954) y Feller (1966). De éstas, no solo la distribución normal es un ejemplo, sino algunas otras, como la distribución Cauchy a la cual, como veremos más adelante, converge una sucesión de sumas de v.a.i.i.d. cuya función de distribución es la t-student con dos grados de libertad.

En este capítulo se presenta un resumen de los principales resultados de la teoría general de las distribuciones estables, así como algunos

resultados particulares que se usarán en capítulos posteriores. Las demostraciones que no se incluyen aquí, aparecen en su mayoría en Gnedenko y Kolmogorov (1954).

1.2 DOMINIOS DE ATRACCION Y DISTRIBUCIONES ESTABLES.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución G . Si existen sucesiones de números reales $\{b_n\}$ y $\{a_n\}$ (conocidas como constantes de estandarización) con $b_n > 0$, tal que la sucesión

$$(1.1) \quad \left(\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n x_j - a_n \right)$$

converge en distribución a una variable aleatoria X con función de distribución F , entonces decimos que G es atraída a F .

DEFINICION 1.1

El conjunto de todas las funciones de distribución que son atraídas a una función de distribución F se llama *DOMINIO DE ATRACCION* de F .

El Teorema Central del Límite clásico nos muestra que la función de distribución normal tiene un dominio de atracción no vacío. Este mismo teorema, junto con un resultado que posteriormente se verá, nos muestran que podrían existir distribuciones con dominio de atracción vacío, por ejemplo las distribuciones Binomial, Poisson y Exponencial.

En esta sección se expone la teoría de aquellas distribuciones cuyo dominio de atracción es no vacío. Todas estas distribuciones, llamadas estables, representan una generalización de la distribución normal y tienen la valiosa propiedad de dar una generalización del Teorema

Central del Límite.

DEFINICION 1.2

Una función de distribución F se dice que es una *DISTRIBUCION ESTABLE* si tiene un dominio de atracción no vacío.

El siguiente teorema (cuya demostración aparece en Gnedenko y Kolmogorov (1954)), proporciona una caracterización de las distribuciones estables a través de su función característica $\phi(t)$.

TEOREMA 1.1 (CARACTERIZACION CANONICA)

Para que una función de distribución F sea estable es necesario y suficiente que el logaritmo de su función característica ϕ pueda ser expresado de la siguiente manera:

$$(1.2) \quad \ln \phi(t) = i\gamma t - c |t|^\alpha \left(1 + \beta \frac{t}{|t|} w(t, \alpha) \right)$$

donde α , β , γ y c son constantes tales que γ es un número real, $-1 \leq \beta \leq 1$, $0 < \alpha \leq 2$, $c > 0$ y

$$w(t, \alpha) = \begin{cases} t \Gamma(-\frac{\pi}{2} \alpha) & \text{para } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \ln |t| & \text{para } \alpha = 1 \end{cases}$$

Si F es una distribución estable, decimos que $(\alpha, \beta, \gamma, c)$ es su vector de parámetros. El parámetro α se conoce como el exponente característico o el índice de estabilidad de la distribución F . Si $\alpha \notin (0, 2]$ se demuestra que $\phi(t)$ no es una función característica (Feller, 1966). El parámetro β es el sesgo, si $\beta = 0$ la distribución es simétrica alrededor de γ ; es sesgada a la derecha para $0 < \beta \leq 1$ y sesgada a la izquierda para $-1 \leq \beta < 0$; además la variable aleatoria es positiva si y solo si $\beta = 1$, $\alpha < 1$ y $\gamma \geq 0$; es negativa si y solo si $\beta = -1$, $\alpha < 1$ y $\gamma \geq 0$. El

parámetro γ es un parámetro de localización y la constante c es un parámetro de escala.

Otra representación que es útil para caracterizar los dominios de atracción de las distribuciones estables está dada por el siguiente teorema.

TEOREMA 1.2

Para que una función de distribución F con función característica ϕ sea estable, es necesario y suficiente que F sea infinitamente divisible y que $\ln \phi$ pueda expresarse como:

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ln \phi(t) = i\gamma t - \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \quad \text{para } \alpha = 2 \text{ y en cuyo caso } c = -\frac{\sigma^2}{2} \\ \ln \phi(t) = i\gamma t + c_1 \int_{-\infty}^0 (\exp(itx) - 1 - \frac{itx}{1+x^2}) \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} + \\ \quad + c_2 \int_0^{\infty} (\exp(itx) - 1 - \frac{itx}{1+x^2}) \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} \\ \text{para } 0 < \alpha < 2, \text{ con } c_1 \text{ y } c_2 \text{ constantes no negativas y } c_1 + c_2 > 0. \end{array} \right.$$

A continuación se recuerda la definición de una distribución infinitamente divisible.

DEFINICION 1.3

Una función de distribución F se dice que es *INFINITAMENTE DIVISIBLE* si para cualquier entero positivo n existe una función de distribución F_n tal que F es la n -convolución de F_n , es decir,

$$(1.4) \quad F = \underbrace{F_n * F_n * \dots * F_n}_{n \text{ veces}}$$

Equivalentemente, una función característica ϕ se dice que es infinitamente divisible si para cualquier entero positivo n existe una función característica ϕ_n tal que

$$(1.5) \quad \phi(t) = \{ \phi_n(t) \}^n \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

A continuación se presentan tres ejemplos de distribuciones estables, tienen la particularidad de ser las únicas leyes estables para las cuales se conoce su función de densidad en forma cerrada.

EJEMPLO 1.1

La distribución normal con media $\mu \in \mathbb{R}$ y varianza $\sigma^2 > 0$ es una distribución estable simétrica. En efecto, sustituyendo en la expresión (1.2) $\alpha=2$, $\beta=0$, $\gamma=\mu$ y $c=\sigma^2/2$ se obtiene la función característica

$$(1.6) \quad \phi(t) = \exp\{ i\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t^2 \}$$

que tiene asociada la función de densidad

$$(1.7) \quad f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

EJEMPLO 1.2

Sustituyendo en la expresión (1.2) $\alpha=1$ y $\beta=0$ obtenemos la siguiente función característica

$$(1.8) \quad \phi(t) = \exp\{ i\gamma t - c|t| \}$$

que corresponde a la distribución Cauchy con parámetro de localización γ y parámetro de escala c , cuya función de densidad es:

$$f(x; \gamma, c) = \frac{1}{c\pi [1 + (x - \gamma/c)^2]}$$

EJEMPLO 1.3

El caso $\alpha=1/2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ y $c=1$, corresponde a la distribución

estable positiva con función de densidad.

$$(1.10) \quad f(x) = (2\pi x^2)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2x}) I_{(0, \infty)}(x)$$

conocida como la distribución de Levy. En donde $I_{(0, \infty)}(x)$ es la función indicadora del conjunto de números reales positivos.

1.3 CARACTERIZACION DE LOS DOMINIOS DE ATRACCION

Uno de los problemas importantes en la teoría de leyes estables es la determinación de los dominios de atracción. En esta sección se presenta un resumen de los principales resultados que sirven para dar una solución completa al problema.

El siguiente teorema caracteriza a los dominios de atracción de distribuciones estables con índice α ($0 < \alpha < 2$), única y exclusivamente a través del comportamiento de las colas de las distribuciones.

TEOREMA 1.3 (CARACTERIZACION DE DOMINIOS DE ATRACCION)

Una función de distribución F pertenece al dominio de atracción de una distribución estable con índice α ($0 < \alpha < 2$) si y solo si

$$(1.11) \quad \frac{F(-x)}{1-F(x)} \longrightarrow \frac{c_1}{c_2} \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty$$

y

$$(1.12) \quad \text{para cualquier constante } k > 0$$

$$\frac{1-F(x)+F(-x)}{1-F(kx)+F(-kx)} \longrightarrow k^\alpha \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty$$

Las constantes c_1 y c_2 están sujetas a la condición $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$, y están relacionadas a la distribución estable por medio del teorema 1.2.

La convergencia establecida en 1.11 se puede interpretar de la siguiente manera: Para x lo suficientemente grande, el área $F(-x)$ en la cola izquierda de la distribución, se puede considerar proporcional al área $1-F(x)$ en la cola derecha, con factor de proporcionalidad c_1/c_2 , en otras palabras, se puede decir que las colas de las distribuciones en el dominio de atracción de una ley estable están balanceadas. La convergencia establecida en 1.12 nos indican que las colas de la distribución varían lentamente cuando x tiende al infinito, lo que significa que el peso en las colas derecha e izquierda a partir de kx y $-kx$ respectivamente, para cualquier $x > 0$ y $k > 0$ es del mismo orden que el peso de las colas $1-F(x)+F(-x)$. Por brevedad diremos que las distribuciones contenidas en el dominio de atracción de una ley estable con índice α ($0 < \alpha < 2$) tienen "colas pesadas" y que varían regularmente en infinito.

La elección de las constantes de estandarización se puede deducir de la demostración del teorema que hacen Gnedenko y Kolmogorov (1954). En esta demostración se establecen condiciones explícitas para b_n , de hecho, para la elección de las constantes b_n es necesario y suficiente que se satisfagan las condiciones

$$(1.12) \quad \begin{cases} nF(b_n x) \rightarrow \frac{c_1}{|x|^\alpha} & \text{para } x < 0 \\ n(1-F(b_n x)) \rightarrow \frac{c_2}{x^\alpha} & \text{para } x > 0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_{|x| < \epsilon} x^2 dF(b_n x) - \left[\int_{|x| < \epsilon} x dF(b_n x) \right]^2 \right) = 0 \end{cases}$$

y los a_n se pueden elegir como:

$$(1.14) \quad \begin{cases} \frac{n}{b_n} \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) & \text{si } 1 < \alpha < 2 \\ n f_n(\ln \phi(1/b_n)) & \text{si } \alpha = 1 \\ a_n = 0 & \text{si } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

El teorema 1.3 nos dice que las distribuciones estables no normales pueden modelar fenómenos en los cuales la probabilidad de observaciones grandes, es alta. Son además modelos alternativos a la distribución normal dentro de la estadística robusta, ya que tienen la ventaja sobre otros ya propuestos (ver Andrews et al (1970)), de poseer una estructura probabilística rica y bien desarrollada.

Un ejemplo de aplicación del teorema 1.3 es el siguiente.

EJEMPLO 1.4

La distribución t-Student con 2 grados de libertad pertenece al dominio de atracción de una distribución Cauchy.

En efecto, la función de distribución de la t-Student con 2 grados de libertad es

$$F_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \quad -\infty < x < \infty$$

por lo tanto

$$F_2(-x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

y

$$1 - F_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

luego $\frac{c_1}{c_2} = 1$, o sea $c_1 = c_2$

Además aplicando la regla de L'Hospital se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x) + F(-x)}{1 - F(-kx) + F(kx)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(-x)}{2f(-kx)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(\arctg \frac{x}{\sqrt{2}}) (1 + k^2 x^2/2)}{k \cos(\arctg \frac{kx}{\sqrt{2}}) (1 + x^2/2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x^2 + k^2/2}{k(1/x + 1/2)} = \frac{k^2/2}{k/2} = k \end{aligned}$$

El resultado se sigue aplicando el teorema 1.3.

Q. D.

Los resultados del teorema 1.3 no son ciertos para la distribución normal, como lo muestra el siguiente teorema, pues tiene colas despreciables o sea "no pesadas".

TEOREMA 1.4 (CONDICIÓN DE LINDBERBERG - FELLER)

Una función de distribución F pertenece al dominio de atracción de una distribución normal no degenerada, si y solo si,

$$(1.15) \quad \int_{|x| \geq t} dF(x) = O \left(t^{-2} \int_{|x| < t} x^2 dF(x) \right) \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

Equivalentemente

$$(1.16) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{|x| \geq t} dF(x)}{t^{-2} \int_{|x| < t} x^2 dF(x)} = 0$$

El siguiente resultado se refiere a la existencia de los momentos de las distribuciones en el dominio de atracción de una ley estable con índice α .

TEOREMA 1.5

Si una función de distribución G pertenece al dominio de atracción de una distribución estable con índice α , entonces para todo r tal que $0 \leq r < \alpha < 2$

$$(1.17) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r dG(x) < \infty$$

es decir, G tiene todos los momentos de orden estrictamente menores que α .

DEFINICION 1.4

Una función de distribución G se dice que pertenece al **DOMINIO DE ATRACCION NORMAL** de una distribución estable F con índice α , si está en el dominio de atracción de F y si las constantes de estandarización b_n son de la forma $an^{1/\alpha}$, con a una constante positiva.

En particular, toda distribución estable pertenece a su propio dominio de atracción normal. En efecto, este resultado se desprende de la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA 1.6

Toda distribución estable pertenece a su propio dominio de atracción.

Demostración. Sea F una función de distribución estable con índice α , que por sencillez y sin pérdida de generalidad supondremos que es simétrica ($\beta=0$), y sean X_1, X_2, \dots, X_n n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F y función característica ϕ_x . Sea Z_n una variable aleatoria de la forma

$$Z_n = b_n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i - a_n$$

La función característica de Z_n es:

$$\begin{aligned}\phi_{Z_n}(t) &= E[\exp(itZ_n)] = E[\exp(it(b_n^{-1} \sum X_i - a_n))] = \\ &= \exp(-ita_n) E[\exp(itb_n^{-1} \sum X_i)] = \exp(-ita_n) [\phi_X(tb_n^{-1})]^n = \\ &= \exp(-ita_n) [\exp(i\gamma tb_n^{-1} - c|tb_n^{-1}|^\alpha)]^n = \exp(it(\gamma b_n^{-1} - a_n) - cn|b_n^{-1}|^\alpha)\end{aligned}$$

Haciendo $b_n = n^{1/\alpha}$ y $\gamma b_n^{-1} - a_n = \gamma$ o sea $a_n = \gamma(n^{(\alpha-1)/\alpha} - 1)$ se tiene que

$$\phi_{Z_n}(t) = \exp(i\gamma t - c|t|^\alpha)$$

Luego la función de distribución de la variable aleatoria Z_n es F y trivialmente converge en distribución a F .

Q.D.

El teorema 1.6 en particular permite aplicar la interpretación que hicimos del teorema 1.3 al conjunto de distribuciones estables con índice α ($0 < \alpha < 2$). Recordando, podemos decir que las distribuciones estables con índice α ($0 < \alpha < 2$), tienen "colas pesadas" y que varían regularmente en infinito. Además en virtud del teorema 1.5 las distribuciones estables con índice α tienen momentos de orden menores que α .

Los siguientes dos teoremas caracterizan a los dominios de atracción normal de distribuciones estables.

TEOREMA 1.7 (TEOREMA CLÁSICO DEL LÍMITE CENTRAL)

Una función de distribución F pertenece al dominio de atracción normal de la distribución normal, si y solo si F tiene varianza σ^2 finita, y en tal caso $b_n = \sigma n^{1/2}$.

TEOREMA 1.8

Para que una función de distribución F pertenezca al dominio de atracción normal de una distribución estable con índice α ($0 < \alpha < 2$) es necesario y suficiente que

$$(1.18) \quad F(x) = \begin{cases} (c_1 c^{\alpha} + a_1(x)) |x|^{-\alpha} & \text{si } x < 0 \\ 1 - (c_2 c^{\alpha} + a_2(x)) |x|^{-\alpha} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donde c es una constante positiva, c_1 y c_2 están relacionados con F por medio del teorema 1.3 y $a_1(x)$, $a_2(x)$ satisfacen la condición:

$$(1.19) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} a_1(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} a_2(x) = 0$$

El siguiente teorema proporciona la construcción y generación de algunas distribuciones que pertenecen a distintos dominios de atracción.

TEOREMA 1.9 (Shapiro (1975))

Sea X una variable aleatoria con función de densidad f , tal que $f(0) \neq 0$ y f es continua en $x=0$. Entonces para cualquier $r > 0$ la variable $1/|X|^r$ pertenece al dominio de atracción de una distribución estable. Si $0 < r \leq 1/2$ entonces la variable $1/|X|^r$ pertenece al dominio de atracción de una distribución normal, si $r > 1/2$ entonces $1/|X|^r$ pertenece al dominio de atracción de una distribución estable con índice $\alpha = 1/r$. Además para $r > 1$, si X es una variable aleatoria contenida en el dominio de atracción de una distribución estable con índice α ($0 < \alpha < 2$), entonces $|X|^r$ pertenece al dominio de atracción de una distribución estable con índice α/r .

1.4 PROPIEDADES DE LAS DISTRIBUCIONES ESTABLES.

La siguiente propiedad se deduce inmediatamente de la forma de la función característica de una distribución estable expresada en la relación (1.1).

PROPIEDAD 1.1

Todas las distribuciones estables son absolutamente continuas y la función de densidad tiene derivadas continuamente diferenciables.

A pesar de que este resultado asegura la existencia de la función de densidad de una distribución estable, es imposible expresar estas funciones en forma cerrada, salvo en los casos mostrados en los ejemplos 1.1, 1.2 y 1.3. Para distribuciones estables simétricas ($\beta=0$) con parámetro de escala $c=1$, se han dado desarrollos en series (Feller 1966), los cuales se muestran a continuación.

LEMA 2.1

a) Para $x > 0$ y $0 < \alpha < 1$

$$(1.20) \quad f(x; \alpha, \gamma) = \frac{1}{\pi x} \sum \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{k!} (-x^{-\alpha})^k \sin \frac{k\pi}{2\alpha} (\gamma - \alpha)$$

b) Para $x > 0$ y $1 < \alpha < 2$

$$(1.21) \quad f(x; \alpha, \gamma) = \frac{1}{\pi x} \sum \frac{\Gamma(1+k/\alpha)}{k!} (-x)^k \sin \frac{k\pi}{2\alpha} (\gamma - \alpha)$$

c) Para $x < 0$ y $1 < \alpha < 2$

$$(1.22) \quad f(x; \alpha, \gamma) = f(-x; \alpha, \gamma)$$

En contraste con estas expresiones para la función de densidad,

recordemos que el teorema 1.1 a través de la expresión (1.1), proporciona una forma cerrada para la función característica de una distribución estable.

La siguiente propiedad es una condición análoga a la condición de Lindenberg-Feller para el caso $0 < \alpha < 2$, y refuerza la interpretación que hicimos del teorema 1.3.

PROPIEDAD 1.2

Para toda distribución estable con índice α ($0 < \alpha < 2$) se tiene que

$$(1.23) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha [1 - F(x) + F(-x)] = c_\alpha$$

en donde $c_\alpha > 0$.

Demostración. Del teorema 1.8 se sigue que el límite (1.23) existe para toda distribución que pertenezca al dominio de atracción normal de una distribución estable con índice α ($0 < \alpha < 2$), y como toda distribución estable pertenece a su propio dominio de atracción normal, la propiedad 1.2 queda demostrada.

Q.D.

De esta propiedad se deduce que el área de las colas de la distribución tiende a cero cuando $x \rightarrow \infty$, esto es debido a que x^α para $0 < \alpha < 2$ diverge a $+\infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ y para que el límite (1.23) sea finito, es necesario que $1 - F(x) + F(-x)$ converja a cero más rápidamente cuando $x \rightarrow \infty$; además está mostrando la rapidez de convergencia. En efecto, de los teoremas 1.3 y 1.6 concluimos que las distribuciones estables con índice α ($0 < \alpha < 2$) tienen colas pesadas, variando regularmente en infinito, y del teorema 1.4 en combinación con la propiedad 1.2 se deduce que no es de orden 2, sino más lenta, de

hecho es de orden α . De aquí se sigue que mientras más pequeña sea α , más pesadas serán las colas de la distribución.

Del teorema 1.5 se deduce que toda distribución estable con índice α ($0 < \alpha < 2$) posee todos los momentos de orden estrictamente menores que α , y de la propiedad 1.2 se concluye que los momentos mayores o iguales que α no existen, excepto para la distribución normal ($\alpha=2$) que tiene momentos de todos los órdenes. En particular para $1 < \alpha < 2$ las distribuciones estables tienen momentos de primer orden siendo μ la media de la distribución, y no tienen varianza finita. En el caso en que $0 < \alpha < 1$, tampoco poseen media, debido a que no existen momentos mayores o iguales que uno.

La siguiente propiedad fue probada por Ibragimov-Chernin (1959).

PROPIEDAD 1.3

Todas las distribuciones estables son unimodales.

Las propiedades vistas hasta aquí, junto con los resultados de la sección 1.2 nos proporcionan una idea global del comportamiento de las distribuciones estables. A partir de este momento nuestro estudio se concentrará sólo en la clase simétrica de estas distribuciones.

2.4 DISTRIBUCIONES ESTABLES SIMÉTRICAS.

En esta sección se estudian las distribuciones estables simétricas y veremos sus similitudes y contrastes con la distribución normal. Para ello seguiremos una reparametrización distinta a la encontrada usualmente en la literatura, dicha reparametrización coincide con la usada para la distribución normal.

El teorema 1.1 dice que una distribución estable es simétrica si y solo si su función característica es de la forma

$$(1.24) \quad \phi(t) = \exp(i\gamma t - c|t|^\alpha)$$

$$\text{con } -\infty < t < \infty, 0 < \alpha \leq 2, -\infty < \gamma < \infty \text{ y } c > 0$$

donde el parámetro de localización γ , que en este caso especial coincide con el centro de simetría, es la mediana, la moda y para $1 < \alpha \leq 2$ es la media de la distribución. En analogía con la notación para la distribución normal, se reemplazará la letra γ por la letra μ . El parámetro de escala c , que para $\alpha=2$ está relacionado con la varianza de la distribución normal por medio de la igualdad $c=\sigma^2/2$, se reparametrizará sustituyendo c por σ^α/α . Al final de esta sección daremos un significado e interpretación de σ^α .

Con estos cambios en la notación, tenemos que una distribución F es estable simétrica si y solo si su función característica es de la forma:

$$(1.25) \quad \phi(t) = \exp(i\mu t - \frac{\sigma^\alpha}{\alpha} |t|^\alpha)$$

$$-\infty < t < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0 \text{ y } 0 < \alpha \leq 2.$$

En general se dice que una distribución de probabilidad está estandarizada si los parámetros de localización y escala son cero y uno respectivamente. La distribución estable simétrica estándar para $\alpha=2$, utilizando nuestra reparametrización σ^α/α , corresponde a la distribución normal estándar ($\mu=0$, $\sigma^2=1$). En cambio si estandarizamos utilizando el parámetro de escala c ($c=1$), al índice $\alpha=2$ le corresponde la distribución normal con media $\mu=0$ y varianza $\sigma^2=2$.

La distribución normal estándar está relacionada con la distribución Cauchy estándar a través del siguiente resultado.

TEOREMA 1.10

Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como la normal estándar. Entonces la variable aleatoria $Y=X_1/X_2$ está distribuida como la Cauchy estándar.

El siguiente teorema (Shashanka 1981) es una generalización del anterior, para distribuciones estables.

TEOREMA 1.11

Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes con función de distribución normal estándar y $n \geq 2$. Entonces para V_n definida por

$$V_n = \begin{cases} X_2 & \text{si } n=2 \\ \exp_2 \{ 2^{n-2} - 1 \} X_2 X_3^2 (X_4^2)^2 \dots (X_n^2)^{2^{n-3}} & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

(donde $\exp_2(x) = 2^x$) la variable aleatoria $U=X_1/V_n$ tiene una distribución estable simétrica con índice $\alpha^{2^{-n}}$.

La familia de las distribuciones estables tiene, al igual que la distribución normal, la propiedad de ser invariante bajo transformaciones lineales, resultado que se expresa en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.12

Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes tal que para $i=1, 2, \dots, n$; X_i tiene una distribución estable simétrica (*) F_1 con vector de parámetros $(\alpha_i, \mu_i, \sigma_i^\alpha / \alpha)$, y sean a_1, a_2, \dots, a_n n números reales. Entonces la variable aleatoria $S_n = \sum a_i X_i$ tiene una distribución estable con vector de parámetros $(\alpha, \sum a_i \mu_i, \sum a_i^\alpha \sigma_i^\alpha / \alpha)$.

TEOREMA 1.10

Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como la normal estándar. Entonces la variable aleatoria $Y=X_1/X_2$ está distribuida como la Cauchy estándar.

El siguiente teorema (Shashanka 1981) es una generalización del anterior, para distribuciones estables.

TEOREMA 1.11

Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes con función de distribución normal estándar y $n \geq 2$. Entonces para V_n definida por

$$V_n = \begin{cases} X_2 & \text{si } n=2 \\ \exp_2 \{ 2^{n-2} - 1 \} X_2 X_3^2 (X_4^2)^2 \dots (X_n^2)^{2^{n-3}} & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

(donde $\exp_2(x) = 2^x$) la variable aleatoria $U=X_1/V_n$ tiene una distribución estable simétrica con índice α^{2-n} .

La familia de las distribuciones estables tiene, al igual que la distribución normal, la propiedad de ser invariante bajo transformaciones lineales, resultado que se expresa en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.12

Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes tal que para $i=1, 2, \dots, n$; X_i tiene una distribución estable simétrica ^(*) F_1 con vector de parámetros $(\alpha, \mu_i, \sigma^{\alpha}/a)$, y sean a_1, a_2, \dots, a_n n números reales. Entonces la variable aleatoria $S_n = \sum a_i X_i$ tiene una distribución estable con vector de parámetros $(\alpha, \sum a_i \mu_i, \sum a_i^{\alpha} \sigma^{\alpha}/a)$.

*Aunque el teorema es más general, pues no es necesario pedir simetría, para nuestros fines basta expresarlo de esta manera.

Demostración. Desarrollemos la función característica de S_n y a través del teorema 1.1 deduciremos el resultado.

$$\begin{aligned}\phi_{S_n}(t) &= E[\exp(itS_n)] = E\left[\prod_1^n \exp(it a_i X_i)\right] = \prod_1^n \phi_{X_i}(t a_i) = \\ &= \prod_1^n \exp(i \mu_i t a_i - \frac{\sigma_i^\alpha}{\alpha} |t a_i|^\alpha) = \exp(it \sum_1^n a_i \mu_i - (\sum_1^n |a_i|^\alpha \sigma_i^\alpha) |t|^\alpha / \alpha)\end{aligned}$$

Entonces por el teorema 1.1, S_n es estable simétrica con vector de parámetros $(\alpha, \sum_1^n a_i \mu_i, \sum_1^n |a_i|^\alpha \sigma_i^\alpha / \alpha)$.

Q.D.

Se desprende del teorema anterior que si una variable aleatoria X tiene distribución estable F con vector de parámetros $(\alpha, \mu, \sigma^\alpha / \alpha)$, entonces la transformación $Y = a + bX$ tiene distribución estable con vector de parámetros $(\alpha, a + b\mu, b^\alpha \sigma^\alpha / \alpha)$.

En particular la transformación

$$(1.26) \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

tiene una distribución estable simétrica estándar.

En virtud de este resultado, en la práctica, al igual que para la distribución normal, basta estudiar las distribuciones estables simétricas estándar, que denotaremos por medio de $ESE(\alpha)$. Así pues si X es una variable aleatoria con estas características, se escribirá:

$$(1.27) \quad X \sim ESE(\alpha)$$

En caso de que X no este estandarizada se escribirá:

$$(1.28) \quad X \sim ES(\alpha, \mu, \sigma).$$

Ya se ha observado que las únicas distribuciones $ES(\alpha, \mu, \sigma)$ para las cuales su función de densidad se conoce en forma cerrada son la normal y la Cauchy. Esta última es la única para la cual se conoce su función de distribución en forma cerrada. Fama y Roll (1968) construyeron tablas para la función de distribución de $ESE(\alpha)$ para valores de α en el intervalo $1 \leq \alpha \leq 2$, truncando las series dadas en la expresión (1.21) y utilizando los resultados de Bergstrom (1952) para $1 < \alpha \leq 2$, es decir,

$$(1.29) \quad f_x(x; \alpha) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\alpha^{k+1}} \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{2}\right) + R(x)$$

donde el residuo

$$R(x) = O\{x^{-\alpha(n+1)-1}\}$$

o sea

$$|R(x)| < Mx^{-\alpha(n+1)-1} \quad \text{para alguna constante } M > 0$$

y

$$(1.30) \quad F_x(x; \alpha) = 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha k)}{\alpha^k} \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{2}\right) - \int_x^{\infty} R(u) du$$

donde el residuo

$$\int_x^{\infty} R(u) du = O\left[\frac{x^{-\alpha(n+1)}}{\alpha(n+1)}\right].$$

A continuación desarrollamos expresiones integrales equivalentes para $f_x(x; \alpha)$ y $F_x(x; \alpha)$ utilizando la reparametrización σ^α/α (Fama y Roll (1968), utilizaron σ^α para las expresiones de series truncadas).

Para la función de densidad de una distribución $ESE(\alpha)$ apliquemos la fórmula de inversión:

$$(1.32) \quad f_x(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(xt) \exp\left(-\frac{\sigma^\alpha}{\alpha} t^\alpha\right) dt$$

Debido al índice α en el exponente de t dentro de la función exponencial, no es fácil encontrar una forma cerrada para esta función. Una expresión de la función de distribución de gran utilidad se construye a continuación.

Utilizando la expresión para $f_y(x)$ dada por (1.32) y como $F(0)=0.5$ se tiene que para $x \geq 0$

$$\begin{aligned} F_x(x) &= \int_{-\infty}^x f_x(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \int_0^{\infty} \cos(yt) \exp\left(-\frac{\sigma^\alpha}{\alpha} t^\alpha\right) dt dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} \cos(yt) \exp\left(-\frac{\sigma^\alpha}{\alpha} t^\alpha\right) dt dy + \frac{1}{\pi} \int_0^x \int_0^{\infty} \cos(yt) \exp\left(-\frac{\sigma^\alpha}{\alpha} t^\alpha\right) dt dy = \\ &= F(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_0^x \cos(yt) dy \right] \exp\left(-\frac{\sigma^\alpha}{\alpha} t^\alpha\right) dt \end{aligned}$$

o sea

$$(1.33) \quad F_x(x; \alpha) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{t} \exp\left(-\frac{\sigma^\alpha}{\alpha} t^\alpha\right) dt$$

y para $x < 0$, se tiene

$$(1.34) \quad F_x(x; \alpha) = 1 - F_x(-x; \alpha)$$

Las funciones de densidad y de distribución de las ESE(α), pueden ser evaluadas de forma distinta a las empleadas por Fama y Roll al utilizar métodos numéricos para calcular las integrales en las expresiones (1.32) y (1.33). Con los resultados de dicha evaluación se construyeron tablas de ESE(α) para varios valores de α en el intervalo [1, 2] las cuales aparecen en Gómez Arias-Pérez Abreu (1986).

Para complementar resultados y geométricamente las interpretaciones

que hicimos del teorema 1.3 y de la propiedad 1.2, presentamos a continuación tablas resumidas de los percentiles de distribuciones $ESE(u)$ y de las funciones de densidad para valores de α entre 1 y 2. Además se bosquejan las gráficas de las funciones de densidad para algunos valores de u .

DENSIDADES DE PROBABILIDAD PARA LAS DISTRIBUCIONES ESE(α)

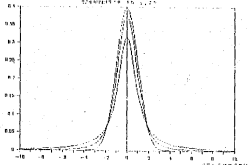
x	$\alpha=1.0$	$\alpha=1.1$	$\alpha=1.2$	$\alpha=1.4$	$\alpha=1.5$	$\alpha=1.7$	$\alpha=1.8$	$\alpha=1.9$	$\alpha=2.0$
0.00	.3182	.3349	.3485	.3689	.3765	.3880	.3923	.3959	.3989
0.02	.3182	.3345	.3480	.3684	.3761	.3878	.3922	.3958	.3989
0.20	.3061	.3234	.3377	.3591	.3671	.3794	.3840	.3878	.3910
0.40	.2744	.2928	.3082	.3317	.3407	.3545	.3599	.3644	.3683
0.60	.2341	.2519	.2674	.2919	.3017	.3172	.3233	.3286	.3332
0.80	.1911	.2095	.2233	.2465	.2561	.2721	.2787	.2846	.2897
1.00	.1592	.1711	.1820	.2014	.2098	.2246	.2310	.2367	.2420
1.20	.1305	.1389	.1466	.1606	.1671	.1790	.1844	.1895	.1942
1.40	.1075	.1129	.1177	.1263	.1309	.1384	.1423	.1461	.1497
1.60	.0894	.0924	.0948	.0987	.1006	.1044	.1065	.1087	.1109
1.80	.0751	.0763	.0769	.0772	.0772	.0774	.0777	.0783	.0790
2.00	.0637	.0636	.0630	.0608	.0595	.0568	.0557	.0547	.0590
2.20	.0545	.0536	.0522	.0483	.0461	.0416	.0394	.0373	.0355
2.40	.0471	.0456	.0437	.0388	.0361	.0305	.0277	.0250	.0224
2.60	.0410	.0392	.0369	.0316	.0287	.0227	.0196	.0166	.0136
2.80	.0360	.0339	.0315	.0260	.0231	.0171	.0140	.0110	.0079
3.00	.0318	.0296	.0271	.0217	.0189	.0131	.0102	.0073	.0044
3.20	.0283	.0260	.0235	.0183	.0156	.0103	.0076	.0050	.0024
3.40	.0253	.0231	.0206	.0155	.0130	.0082	.0058	.0035	.0012
3.60	.0228	.0205	.0181	.0134	.0110	.0066	.0046	.0026	.0006
3.80	.0206	.0184	.0161	.0116	.0094	.0055	.0037	.0019	.0003
4.00	.0187	.0165	.0143	.0101	.0081	.0046	.0030	.0015	.0001
6.00	.0086	.0071	.0058	.0035	.0026	.0012	.0007	.0003	.0000
8.00	.0049	.0039	.0030	.0017	.0012	.0005	.0003	.0001	.0000
10.00	.0032	.0024	.0018	.0010	.0007	.0003	.0002	.0001	.0000
15.00	.0014	.0010	.0007	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000
20.00	.0008	.0006	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
30.00	.0004	.0002	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

PERCENTILES DE DISTRIBUCIONES ESE (σ)

x	$\sigma=1.0$	$\sigma=1.1$	$\sigma=1.2$	$\sigma=1.4$	$\sigma=1.5$	$\sigma=1.7$	$\sigma=1.8$	$\sigma=1.9$	$\sigma=2.0$
0.2	.5628	.5662	.5690	.5731	.5747	.5770	.5779	.5786	.5793
0.4	.6211	.6281	.6338	.6425	.6457	.6507	.6525	.6541	.6554
0.6	.6720	.6827	.6915	.7050	.7101	.7180	.7210	.7236	.7257
0.8	.7148	.7288	.7405	.7589	.7659	.7770	.7813	.7850	.7881
1.0	.7500	.7667	.7810	.8036	.8125	.8267	.8323	.8372	.8413
1.2	.7789	.7976	.8138	.8397	.8501	.8670	.8738	.8797	.8849
1.4	.8026	.8227	.8401	.8683	.8798	.8986	.9064	.9132	.9192
1.6	.8222	.8432	.8612	.8907	.9027	.9228	.9311	.9386	.9452
1.8	.8386	.8600	.8783	.9082	.9204	.9409	.9495	.9572	.9641
2.0	.8524	.8729	.8923	.9219	.9340	.9542	.9627	.9703	.9773
2.2	.8642	.8856	.9038	.9328	.9445	.9639	.9721	.9795	.9861
2.4	.8743	.8955	.9133	.9414	.9527	.9711	.9788	.9856	.9918
2.6	.8831	.9040	.9214	.9485	.9591	.9764	.9824	.9897	.9953
2.8	.8908	.9112	.9282	.9542	.9643	.9803	.9868	.9924	.9974
3.0	.8976	.9176	.9340	.9590	.9685	.9833	.9892	.9942	.9987
3.2	.9036	.9231	.9391	.9629	.9719	.9856	.9910	.9955	.9993
3.4	.9089	.9280	.9435	.9663	.9747	.9875	.9923	.9963	.9997
3.6	.9138	.9324	.9474	.9692	.9771	.9890	.9933	.9969	.9998
3.8	.9181	.9363	.9508	.9717	.9792	.9902	.9941	.9973	.9999
4.0	.9220	.9399	.9538	.9738	.9809	.9912	.9948	.9977	.9999
6.0	.9474	.9615	.9721	.9858	.9903	.9960	.9978	.9991	.9999
8.0	.9604	.9720	.9804	.9907	.9938	.9976	.9987	.9995	.9999
10.0	.9683	.9782	.9851	.9933	.9956	.9984	.9992	.9997	.9999
15.0	.9788	.9861	.9909	.9963	.9977	.9992	.9996	.9999	.9999
20.0	.9841	.9899	.9936	.9975	.9989	.9995	.9998	.9999	.9999
30.0	.9894	.9935	.9961	.9981	.9992	.9997	.9999	.9999	.9999

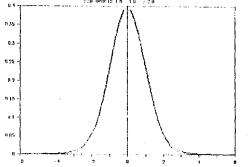
DISTRIBUCIÓI CAIBE INIBRCA ESTABLAR

CONSERVACIÓI 19 10 1978



DISTRIBUCIÓI CAIBE INIBRCA ESTABLAR

CONSERVACIÓI 19 10 1978



El parámetro de escala σ^2 es la varianza de la distribución únicamente en caso de la distribución normal ($\alpha=2$), debido a que no existen momentos mayores o iguales que α para $\alpha > 2$; en particular no existen segundos momentos. En su lugar, se encontró (lema 2.3) una relación para el parámetro de escala σ en términos de los percentiles de la distribución, esta relación coincide con el siguiente resultado para la distribución de Cauchy.

LEMA 2.2

El parámetro de escala σ en la distribución Cauchy es el rango intercuartil, es decir

$$(1.35) \quad \sigma = 1/2 (Q_3 - Q_1)$$

donde Q_1 y Q_3 son el primero y tercer cuartil respectivamente.

Demostración. Evaluando la función de distribución

$$F(x) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \arctg((x - \mu)/\sigma)$$

en el primero y tercer cuartil obtenemos:

$$F(Q_3) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \arctg((Q_3 - \mu)/\sigma) = 0.75$$

$$F(Q_1) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \arctg((Q_1 - \mu)/\sigma) = 0.25$$

o sea

$$\arctg((Q_3 - \mu)/\sigma) = \frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad \arctg((Q_1 - \mu)/\sigma) = -\frac{\pi}{4}$$

luego

$$\frac{Q_3 - \mu}{\sigma} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{Q_1 - \mu}{\sigma} = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

Igualando estos resultados se obtiene finalmente.

$$\sigma = \frac{1}{2} (Q_3 - Q_1) \quad \text{Q.D.}$$

En general, si evaluamos la función de distribución (1.33) en $x = \sigma/\alpha^{1/\alpha}$ obtenemos:

$$F_x(x) = F_x(\sigma/\alpha^{1/\alpha}) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\sigma t/\alpha^{1/\alpha})}{t} \exp(-(\frac{\sigma t}{\alpha^{1/\alpha}})^{\alpha}) dt$$

y aplicando el cambio de variable $u = (\sigma/\alpha^{1/\alpha})t$ se obtiene:

$$F_x(\sigma/\alpha^{1/\alpha}) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(u)}{u} \exp(-u^{\alpha}) du$$

Notase que el lado derecho de esta igualdad depende únicamente del índice α y no del parámetro de escala σ . Sea r_{α} el valor de esta función evaluada en $x = \sigma/\alpha^{1/\alpha}$, es decir, $F_x(\sigma/\alpha^{1/\alpha}) = r_{\alpha}$ y designemos con $Q_{r_{\alpha}}$ el r_{α} -percentil de la distribución, o sea $F_x(Q_{r_{\alpha}}) = r_{\alpha}$. Con esta notación se tiene que:

$$(1.36) \quad Q_{r_{\alpha}} = \sigma/\alpha^{1/\alpha}$$

Por ser $F_x(x)$ simétrica alrededor de $\mu=0$, se tiene que:

$$(1.37) \quad Q_{1-r_{\alpha}} = -Q_{r_{\alpha}}$$

Puesto que σ es un parámetro de escala el cual debe ser invariante bajo localización, promediando obtenemos:

$$(1.38) \quad \frac{Q_{r_{\alpha}} - Q_{1-r_{\alpha}}}{2} = \frac{\sigma}{\alpha^{1/\alpha}}$$

Este desarrollo sirve de base para demostrar el siguiente lema el cual es una generalización del lema 2.2.

LEMA 2.3

El parámetro de escala σ de una distribución estable con índice α satisface la siguiente igualdad:

$$(1.39) \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \alpha^{1/\alpha} (Q_{r_\alpha} - Q_{1-r_\alpha})$$

Los valores de r_α para distribuciones ESE(α) ($1 \leq \alpha \leq 2$), se obtuvieron evaluando $F(\sigma/\alpha^{1/\alpha})$ con el mismo método con que se elaboraron las tablas y los valores de $Q_{r_\alpha}^*$ se calcularon a partir de la relación (1.36) o con las tablas anteriormente mencionadas.

Los resultados se muestran en la siguiente tabla

α	r_α	$Q_{r_\alpha}^*$	$\alpha^{1/\alpha}$
2.00	0.7602	0.7071	1.4142
1.99	0.7602	0.7076	1.4131
1.98	0.7601	0.7082	1.4119
1.97	0.7600	0.7088	1.4108
1.96	0.7599	0.7093	1.4096
1.95	0.7599	0.7100	1.4084
1.90	0.7595	0.7133	1.4018
1.80	0.7587	0.7214	1.3861
1.70	0.7579	0.7318	1.3663
1.60	0.7571	0.7454	1.3414
1.50	0.7563	0.7631	1.3103
1.40	0.7555	0.7863	1.2716
1.30	0.7545	0.8172	1.2236
1.20	0.7534	0.8590	1.1640
1.10	0.7519	0.9170	1.0905
1.00	0.7500	1.0000	1.0000

CAPITULO II

METODOS ESTADISTICOS PARA DISTRIBUCIONES ESTABLES.

2.1 INTRODUCCION.

En el capítulo I hemos visto que no se conocen expresiones cerradas para las funciones de densidad de las distribuciones estables, salvo los casos de las distribuciones Normal, Cauchy y Levy. Asimismo del teorema 1.5 y de la propiedad 1.2 se tiene que las distribuciones estables con índice α , $0 < \alpha < 2$, sólo tienen momentos de orden estrictamente menores que α . Lo anterior dificulta la aplicación de los métodos clásicos de inferencia estadística en leyes estables; como por ejemplo los métodos de máxima verosimilitud, estimadores insesgados de varianza mínima, métodos basados en la función de distribución empírica, etc.

Estas dificultades han dado lugar a que se hallan desarrollado métodos estadísticos especiales para esta familia de distribuciones. En el presente capítulo presentamos algunos de estos métodos especiales, los cuales abarcan un período de 20 años a partir del trabajo pionero de Fama y Roll (1968). Durante este tiempo se ha hecho énfasis en el problema de estimación, para el cual se proponen diferentes estimadores y métodos de estimación, especialmente para el parámetro de escala y el exponente característico. Además incluimos los estudios referentes a la aplicación de los métodos clásicos de estimación, los cuales requieren de métodos numéricos especiales para su

implementación.

Al final del capítulo mencionamos algunos trabajos sobre pruebas de bondad de ajuste y recopilamos las principales ideas y referencias sobre regresión lineal y series de tiempo cuando las distribuciones de errores pertenecen a la familia de las distribuciones estables.

2.2 ESTIMADORES DE LOS PARAMETROS DE UNA DISTRIBUCION ESTABLE.

2.2.1 ESTIMADORES DEL PARAMETRO DE ESCALA σ .

Fama y Roll (1968) han propuesto un estimador simple del parámetro de escala de una distribución estable simétrica. Estos autores obtienen el estimador en forma empírica usando las tablas de la función de distribución para distribuciones estables simétricas estandarizadas, que presentan en este mismo artículo. En su trabajo utilizan la función característica para distribuciones estables simétricas parametrizada en la forma:

$$(2.1) \quad \log \phi_x(t) = i\mu t - |ct|^\alpha$$

El cambio del parámetro de escala en esta parametrización produce que la distribución normal estandarizada ($c=1$) no coincida con la distribución normal estándar, sino con la distribución normal con varianza $\sigma^2=2$. Comparando lo anterior con la parametrización que dimos en el capítulo I en la expresión (1.25), el caso $\alpha=2$ es la distribución normal estándar.

El estimador del parámetro de escala c que los autores proponen está dado por la expresión:

$$(2.2) \quad \hat{c} = \frac{1}{.827(12)} (\hat{u}(\alpha, .72) - \hat{u}(\alpha, .28))$$

donde $\hat{u}(\alpha, p)$ es el p -percentil muestral de la distribución estable con índice α .

Para obtener este estimador, los autores se basan en el hecho de que el intervalo $\mu \pm c$ de una distribución estable simétrica es aproximadamente el rango intercuartil, por lo que la estandarización de las ecuaciones

$$(2.3) \quad u = \frac{x - \mu}{c} \quad \text{y} \quad \log \phi_u(t) = -|t|^\alpha$$

es equivalente a hacer los rangos intercuantiles aproximadamente iguales para distribuciones estables con diferentes α 's. Lo anterior hace a este estimador robusto con respecto a α . Aunque los rangos semi-intercuantiles proporcionan una medida "rasca" pero eficaz del parámetro c , en muestras grandes otros rangos inter-percentiles son menos sesgados, en particular cuando $\alpha > 1.8$ se tiene que:

$$(2.4) \quad u(\alpha, .75) < .96c$$

De acuerdo a las tablas presentadas por Fama y Roll, el percentil .72 de una distribución estable simétrica estandarizada ($\mu=0, c=1$) está en el intervalo $.824 \leq u \leq .830$ (i.e. $.827 \pm .003$) para $1 < \alpha < 2$, por lo cual afirman los autores que al estimar c usando los percentiles muestrales .72 y .28, el sesgo asintótico es menor del 4% del valor real. En un artículo posterior, Fama y Roll (1971) presentan una aproximación para la varianza de \hat{c} dada por:

$$(2.5) \quad \sigma^2(\hat{c}) = \frac{2(0.28)(.72-.28)}{n(f(\alpha, .72))^2} \left(\frac{1}{1.654} \right)^2$$

donde $f(\alpha, p)$ es la función de densidad de una distribución estable simétrica con índice α evaluada en el percentil p , y n es el tamaño de la muestra.

En el caso de la distribución normal y según la parametrización (2.1), se satisface que $c = \sigma/\sqrt{2}$, donde σ es la desviación estándar de la población. Además si " s " es la desviación estándar muestral, su eficiencia como estimador de c es sustancialmente mayor que la de \hat{c} , de hecho

$$(2.6) \quad \frac{\text{Var}(s/\sqrt{2})}{\text{Var}(\hat{c})} = 0.314$$

Sin embargo como se mencionó anteriormente \hat{c} es más robusta que " s " cuando α es desconocida, debido a que la dispersión muestral de $s/\sqrt{2}$ aumenta rápidamente al disminuir α . Por ejemplo la desviación media absoluta (MAD) de las distribuciones Monte Carlo de $s/\sqrt{2}$ y \hat{c} para $n=599$ reportadas por Fama y Roll se presentan en la tabla 2.1.

α	2.0	1.9	1.7	1.5	1.3	1.1	1.0
MAD($s/\sqrt{2}$)	.0221	.0196	1.12	4.26	12.9	36.9	68.4
MAD(\hat{c})	.0413	.0416	.0434	.0436	.0455	.0488	.0515

Tabla 2.1

La variación media absoluta $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$ se ha propuesto como un estimador de la dispersión, cuando la muestra no proviene de una

distribución normal. Sin embargo investigaciones Monte Carlo indican que es menos eficiente que \hat{c} , excepto cuando α está cercano a 2. Otro estimador posible de escala es el MAD, definido por:

$$\text{med}(x_j - \text{med}(x_1, \dots, x_n))$$

Fama y Roll (1971) comparan medias muestrales y desviaciones estándar del MAD y de \hat{c} en 101 muestras Monte Carlo de tamaño $n=299$, resultados que se resumen en la tabla 2.2, de los cuales se concluye que el uso de \hat{c} es preferible al uso del MAD y que este último no es robusto en α .

Un estimador del parámetro de escala similar a (2.2), será presentado en el capítulo 3. Este estimador se obtiene mediante consideraciones teóricas y no empíricas como en Fama y Roll (1968). Igualmente se deducen resultados asintóticos para él.

α	2.0	1.9	1.7	1.5	1.3	1.1	1.0
\hat{c}	.966	.998	1.002	1.004	1.005	1.005	1.006
$\sigma(\hat{c})$.067	.068	.069	.071	.073	.081	.086
MAD	1.123	1.179	1.260	1.747	2.655	5.017	7.723
$\sigma(\text{MAD})$.043	.057	.140	.501	1.688	4.776	8.941

Tabla 2.2

2.2.2 ESTIMADORES DEL EXPONENTE CARACTERÍSTICO α .

Analizando el comportamiento de los percentiles en los colas de una distribución estable simétrica cuando el exponente característico α decrece, Fama y Roll (1971) proponen varios estimadores de α

obtenidos a partir de estadísticas de orden. A continuación describimos estos estimadores; sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución estable simétrica, y sean \hat{x}_p y \hat{x}_{1-p} los respectivos p y $1-p$ percentiles, para algún valor grande de p (por ejemplo $p=0.95$). Utilizando el estimador de escala \hat{e} presentado en (2.1) puede obtenerse en base a la simetría de la distribución un estimador \hat{z}_p del p -percentil de una distribución ESE(α) de la siguiente forma:

$$(2.7) \quad \hat{z}_p = \frac{\hat{x}_p - \hat{x}_{1-p}}{2\hat{e}} = (0.827) \frac{\hat{x}_p - \hat{x}_{1-p}}{\hat{x}_{.72} - \hat{x}_{.28}}$$

Un estimador de α , denotado por $\hat{\alpha}_p$, se obtiene entonces buscando en las tablas de las distribuciones ESE(α) el valor de α que corresponde al p -percentil más próximo a \hat{z}_p . Este estimador formalmente se puede expresar como una función

$$(2.8) \quad g(p, \hat{z}_p) = \hat{\alpha}_p$$

que asigna a cada valor de p y a cada p -percentil \hat{z}_p de una distribución ESE(α) un único estimador de α . Aparentemente no puede determinarse analíticamente un valor de p óptimo; sin embargo Fama y Roll sugieren tomar valores grandes de p , ya que las diferencias entre los p -percentiles para diferentes valores de α crecen con p .

Fama y Roll (1971) reportan distribuciones empíricas de $\hat{\alpha}_p$ para valores de p en el intervalo $0.925 \leq p \leq 0.99$ y para 9 tamaños de muestra. Las conclusiones que se obtienen de este estudio son que para $\alpha > 1.9$ el mejor estimador respecto a un sesgo mínimo y a la desviación estándar es $\hat{\alpha}_{.99}$. Además aseguran que cuando no se tiene un tamaño de muestra suficientemente grande, o se desconoce si el

verdadero valor de α es cercano a 2, entonces $\hat{\alpha}_{.99}$ es un estimador relativamente pobre. Con respecto al sesgo mínimo y a la dispersión, el estimador $\hat{\alpha}_{.99}$ es dominado por $\hat{\alpha}_{.97}$ y $\hat{\alpha}_{.95}$. Observan también que si α está cercano a 1, no hay ninguna ventaja sustancial al usar estimadores de α basados en percentiles menores que $p=.75$. Observan que por ejemplo $\hat{\alpha}_{.93}$ tiene una dispersión en todos los casos mayor a la dispersión de $\hat{\alpha}_{.95}$ y $\hat{\alpha}_{.97}$. Valores de $p \geq .93$ fueron excluidos pero se les reportan debido a que la distribución muestral de $\hat{\alpha}_p$ fue más dispersa que para los valores de $p \geq .93$.

Finalmente, Fama y Roll hacen una comparación con otros estimadores que se veían prometedoras, por ejemplo:

$$(2.9) \quad \hat{\alpha}_k = (\hat{\alpha}_{.93} + \hat{\alpha}_{.99})/2$$

resultando con un sesgo mayor y una desviación estándar ligeramente mayor al obtenido con $\hat{\alpha}_{.97}$. También compararon con otro estimador que obtuvieron utilizando el teorema 1.12 que establece que la suma de n -variables aleatorias estables independientes e idénticamente distribuidas es una distribución estable con el mismo exponente característico, pero con parámetro de escala c_n dado por:

$$(2.10) \quad c_n = cn^{1/\alpha}$$

donde c es el parámetro de escala de los términos individuales en la suma. Sustituyendo en esta igualdad estimadores \hat{c}_n y \hat{c}_1 de c_n y c_1 respectivamente y despejando α se obtiene el estimador

$$(2.11) \quad \hat{\alpha} = \ln(n) / (\ln(\hat{c}_n) - \ln(\hat{c}_1))$$

que no resulta ser un estimador eficiente relativo a $\hat{\alpha}_{.97}$.

Otro estimador del exponente característico α es propuesto en De Haan y Resnik (1980). Este es construido también con estadísticas de orden, obtenidas de variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n independientes e igualmente distribuidas con función de distribución perteneciente al dominio de atracción de una distribución estable con índice α , $0 < \alpha < 2$.

Para construir el estimador, sean $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ las estadísticas de orden de las variables $|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|$, y $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$ las estadísticas de orden de $|X_1|^{-1}, |X_2|^{-1}, \dots, |X_n|^{-1}$. Con esta notación se tiene que:

$$(2.12) \quad Y_{(l)} = X_{(n-l+1)}^{-1} \quad l=1, 2, \dots, n$$

Utilizando la caracterización de los dominios de atracción dada por la expresión (1.12) del Capítulo I, en un artículo anterior De Haan (1979) demuestra que si $k=k(n) \rightarrow \infty$ y $k/n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces se tiene el siguiente límite en probabilidad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (nk)^{-1} (\ln Y_{(k)} - \ln Y_{(1)}) = \alpha^{-1}$$

De (2.12) se tiene en particular que:

$$(2.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (nk)^{-1} (\ln X_{(n-k+1)}^{-1} - \ln X_{(n)}^{-1}) = \alpha^{-1}$$

en probabilidad.

Esta igualdad proporciona un estimador

$$(2.14) \quad \hat{\alpha} = \frac{nk}{\ln X_{(n)}^{-1} - \ln X_{(n-k+1)}^{-1}}$$

del exponente característico α , el cual por construcción es debilmente

consistente .

Para el caso particular en que X_1, X_2, \dots, X_n sea una muestra aleatoria de una distribución estable, Harn y Resnick (1980) obtienen la distribución asintótica de la estadística (2.14). Resultado que a continuación se presenta.

TEOREMA

Según X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución estable F con índice α , $0 < \alpha < 2$. Entonces para las estadísticas de orden $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ de las variables $|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|$; la variable aleatoria

$$(2.15) \quad \alpha \ln X_{(n)} - \alpha \ln X_{(n-k+1)} - \ln k$$

tiene la función de distribución asintótica

$$(2.16) \quad G(x) = \exp(-\exp(-x))$$

donde $k=k(n)=\ln n$ o $k=k(n)=\exp(\ln n)^p$ con $0 < p < 1$.

Observación: La distribución (2.16) es una de tres posibles distribuciones de extremos.

2.3 METODOS DE ESTIMACION DE LOS PARAMETROS DE UNA DISTRIBUCION ESTABLE SIMETRICA.

En esta sección se presentan diferentes métodos de estimación para los parámetros de una distribución estable simétrica.

2.3.1 ESTIMADORES POR EL METODO DE MOMENTOS.

Una versión del " método de momentos " es desarrollada en Press (1972). En este artículo las distribuciones estables son parametrizadas mediante la función característica, expresando el logaritmo de esta función en la siguiente forma:

$$(2.17) \quad \ln \phi(t) = i\mu t - \sigma |t|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha)\right)$$

donde el vector de parámetros $(\mu, \sigma, \alpha, \beta)$ y la función $\omega(t, \alpha)$ cumplen con los requisitos del teorema 1.1 .

Primera mente, se deducen estimadores explícitos para el parámetro de escala σ y para el exponente característico α y en función de éstos, se obtienen estimadores de los parámetros μ y β .

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución estable con función característica dada por (2.17). Los estimadores de α y σ los obtiene resolviendo el sistema de dos ecuaciones para α y σ que se forma al evaluar el módulo de la función característica

$$|\phi(t)| = \exp(-\sigma |t|^\alpha)$$

en dos valores de t diferentes de cero, $t_1 \neq t_2$; suponiendo que $\alpha \neq 1$ y sustituyendo $\phi(t)$ por la función característica empírica $\hat{\phi}(t)$ definida

por:

$$(2.18) \quad \hat{\phi}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(itX_j)$$

La solución del sistema da como estimadores de α y β respectivamente a:

$$(2.19) \quad \hat{\alpha} = \frac{\ln \left| \frac{\hat{\phi}(t_1)}{\hat{\phi}(t_2)} \right|}{\ln |t_1/t_2|}$$

y

$$(2.20) \quad \ln \hat{\sigma} = \frac{\ln |t_1| \ln(-\ln |\hat{\phi}(t_2)|) - \ln |t_2| \ln(-\ln |\hat{\phi}(t_1)|)}{\ln |t_1/t_2|}$$

Para estimar el parámetro de localización μ y el sesgo β , se define a $u(t)$ como la parte imaginaria del logaritmo de la función característica es decir:

$$(2.21) \quad u(t) = \mu + \sigma |t|^{\alpha-1} \beta v(t, \alpha)$$

se eligen dos valores de t diferentes de cero, $t_3 \neq t_4$ y para $\alpha \neq 1$ se tiene

$$(2.22) \quad \frac{u(t)}{t_k} = \mu - \sigma \beta |t_k|^{\alpha-1} t_k \frac{\pi \alpha}{2} \quad k = 3,4$$

Descomponiendo la parte real e imaginaria de la función característica empírica $\hat{\phi}(t)$, en sumas de senos y cosenos, y expresándola en coordenadas polares, Press deduce el siguiente estimador de la función $u(t)$:

$$\hat{u}(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sum_1^n \operatorname{sen} t X_j}{\sum_1^n \operatorname{cos} t X_j}\right)$$

Sustituyendo esta expresión en (2.22) y resolviendo el sistema de ecuaciones que generan t_3 y t_4 , se obtienen los siguientes estimadores para μ y β .

$$(2.23) \quad \hat{\mu} = \frac{|t_4|^{\hat{\alpha}-1} \frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1} \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}}{|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}}$$

$$(2.24) \quad \hat{\beta} = \frac{\left| \frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4} \right|}{\left| |t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1} \right| \operatorname{ctg} \frac{\pi \hat{\alpha}}{2}}$$

Para el caso $\alpha = 1$, deducen en forma análoga los estimadores

$$(2.25) \quad \hat{\sigma} = - \frac{\ln |\hat{\phi}(t_1)|}{|t_1|}$$

$$(2.26) \quad \hat{\mu} = \frac{\frac{\ln |t_4|}{t_3} \hat{u}(t_3) - \frac{\ln |t_3|}{t_4} \hat{u}(t_4)}{\ln \left| \frac{t_4}{t_3} \right|}$$

$$(2.27) \quad \hat{\beta} = \frac{\frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}}{\frac{2 \hat{\sigma}}{\pi} \ln \left| \frac{t_4}{t_3} \right|}$$

Todos estos estimadores de "momentos" son consistentes ya que la función característica empírica $\hat{\phi}(t)$ es un estimador consistente de $\phi(t)$. Obsérvese que la rapidez de convergencia depende de los valores t_1, t_2, t_3 y t_4 elegidos.

Press (1972) demuestra que:

$$(2.28) \quad \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{s_1} \quad \text{y} \quad \frac{\ln \hat{\sigma} - \ln \sigma}{s_2} \\ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad \quad \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

convergen en distribución a la distribución normal estándar, cuando $n \rightarrow \infty$, en donde s_1 y s_2 están dadas por:

$$s_1 = \frac{1 + |\hat{\phi}(2t_1)| - 2|\hat{\phi}(t_1)|^2}{2[|\hat{\phi}(t_1)| \ln |\hat{\phi}(t_1)| \ln |t_1/t_2|]^2} + \frac{1 + |\hat{\phi}(2t_2)| - 2|\hat{\phi}(t_2)|^2}{2[|\hat{\phi}(t_2)| \ln |\hat{\phi}(t_2)| \ln |t_1/t_2|]^2} \\ - \frac{[|\hat{\phi}(t_1+t_2)| + |\hat{\phi}(t_1-t_2)| - |\hat{\phi}(t_1)|] |\hat{\phi}(t_2)|}{|\hat{\phi}(t_1)| |\hat{\phi}(t_2)| \ln |\hat{\phi}(t_1)| \ln |\hat{\phi}(t_2)| \ln |t_1/t_2|^2} \\ s_2 = \frac{[1 + |\hat{\phi}(2t_1)| - 2|\hat{\phi}(t_1)|^2] [\ln |t_2|]^2}{2[|\hat{\phi}(t_1)| \ln |\hat{\phi}(t_1)| \ln |t_1/t_2|]} + \frac{[1 + |\hat{\phi}(2t_2)| - 2|\hat{\phi}(t_2)|^2] [\ln |t_1|]^2}{2[|\hat{\phi}(t_2)| \ln |\hat{\phi}(t_2)| \ln |t_1/t_2|]} \\ - \frac{[|\hat{\phi}(t_1+t_2)| + |\hat{\phi}(t_1-t_2)| - 2|\hat{\phi}(t_1)| |\hat{\phi}(t_2)|] \ln |t_1| \ln |t_2|}{|\hat{\phi}(t_1)| |\hat{\phi}(t_2)| \ln |\hat{\phi}(t_1)| \ln |\hat{\phi}(t_2)| \ln |t_1/t_2|^2}$$

Por lo tanto, los intervalos de confianza para los parámetros α y σ con tamaño de muestra lo suficientemente grandes, están dados por las expresiones:

$$(2.29) \quad \hat{\sigma} - Z_{1-\epsilon/2} \frac{s_1}{\sqrt{n}} < \sigma < \hat{\sigma} + Z_{1-\epsilon/2} \frac{s_1}{\sqrt{n}}$$

$$(2.30) \quad \hat{\sigma} \exp(-Z_{1-\epsilon/2} \frac{s_2}{\sqrt{n}}) < \sigma < \hat{\sigma} \exp(Z_{1-\epsilon/2} \frac{s_2}{\sqrt{n}})$$

donde $Z_{1-\epsilon/2}$ es el $(1-\epsilon/2)$ percentil de la distribución normal estándar.

Es importante comentar que los estimadores propuestos por Press (1972), tienen la desventaja de que pueden producir resultados no satisfactorios, como proporcionar una estimación de σ menor que cero o mayor que dos, es decir el estimador $\hat{\sigma}$ no preserva rango.

2.3.2 METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD.

Para obtener el estimador máximo verosímil del vector de parámetros de una distribución estable debemos encontrar un vector $\theta = (\alpha, \sigma, \mu, \beta)$ que corresponda a un máximo de la función de verosimilitud $L(\theta)$.

Una representación de esta función se obtiene aplicando a la igualdad

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_x(x_i; \theta)$$

la fórmula de inversión:

$$(2.31) \quad f_x(x; \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ixt) \phi_n(t) dt$$

En particular, para variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n independientes con función de densidad común $f_x(x; \theta)$ en la familia de

distribuciones estables simétricas, se obtiene que:

$$(2.32) \quad L(\theta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i(\mu - x_i)t + \frac{\sigma^\alpha}{\alpha} |t|^\alpha) dt$$

o equivalentemente

$$(2.33) \quad L(\theta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i \sum (\mu - x_i)t_i + \frac{\sigma^\alpha}{\alpha} \sum |t_i|^\alpha) dt_1 \dots dt_n$$

Debido a la complejidad de estas expresiones, es claro que necesitamos contar con técnicas especiales para encontrar un máximo de $L(\theta)$.

DuMouchel (1973) demuestra que si se desconocen α y μ entonces la función de verosimilitud $L(\theta)$ no tiene máximo si $0 < \alpha \leq 2$ y $-\infty < \mu < \infty$, ya que $L(\alpha, \mu) \rightarrow +\infty$ cuando $(\alpha, \mu) \rightarrow (0, x_k)$, donde x_k es cualquiera de los n valores muestrales observados. Este resultado nos dice que no existe el estimador máximo verosímil en el espacio de parámetros $\Theta = \{(\alpha, \mu) | 0 < \alpha \leq 2, -\infty < \mu < \infty\}$ de la familia de distribuciones estables. Sin embargo DuMouchel demuestra que el estimador máximo verosímil $\hat{\theta}_n$ restringido al espacio de parámetros $\theta_c = \{(\alpha, \mu) | \epsilon < \alpha \leq 2, -\infty < \mu < \infty\}$ para $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, existe, es consistente y asintóticamente normal. Además el caso $(\alpha=1, \beta \neq 0)$ debe ser excluido. En esta convergencia la matriz límite de covarianzas de $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ es $I^{-1}(\theta)$ donde I es la matriz de información de Fisher.

Feuerverger y McDunnough (1981) utilizan el algoritmo de la transformada rápida de Fourier para evaluar la función de densidad dada en la expresión (2.31) y presentan un estudio Monte Carlo para los estimadores de máxima verosimilitud de leyes estables simétricas.

También utilizan el algoritmo de la transformada rápida de Fourier para resolver la ecuación de verosimilitud

$$(2.34) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f_x(x; \theta)}{\partial \theta} d[F_n(x) - F_x(x; \theta)] = 0$$

donde f_x y F_x son las funciones de densidad, y de distribución respectivamente y F_n es la función de distribución empírica.

2.3.3 MÉTODO DE MINIMA DISTANCIA.

Otro método de estimación del vector de parámetros de una distribución estable es presentado por Paulson, Holcomb y Leitch (1975) Este método también utiliza la función característica empírica $\hat{\phi}(t)$.

El estimador de "distancia mínima" $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{c}, \hat{\beta})$ que proponen, es aquel que cumple con:

$$(2.35) \quad I = \text{Min}_{(\alpha, \gamma, c, \beta)} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(t) - \hat{\phi}(t)|^2 \exp\{-t^2\} dt$$

Los autores antes mencionados, utilizan los polinomios de Hermite de grado 20 (ver Abramowitz y Stegun (1964, p 924) para resolver esta expresión y presentan los resultados para varios tamaños de muestra, observándose una concordancia excelente de los valores estimados con los parámetros.

En el análisis general que presentan afirman que cuando $\beta=0$, $\hat{\alpha}$ y \hat{c} están fuertemente correlacionados, aunque de manera débil con $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$. Además $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$ también se correlacionan fuertemente. En el caso general todos $\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{c}, \hat{\beta}$ están correlacionados conjuntamente.

Excepto cuando $\beta = \pm 1$, por simetría los rangos estudentizados muestran que las distribuciones marginales de $\hat{a}, \hat{\gamma}, \hat{c}, \hat{\beta}$ son consistentes con la normalidad en el nivel de significancia del 5%. De hecho, cuando $\beta = 0$, los estadísticos $\hat{a}, \hat{\gamma}, \hat{c}$ son asintóticamente normales y \hat{a} y \hat{c} se distribuyen independientemente de $\hat{\gamma}$.

2.4 OTROS TÓPICOS DE INFERENCIA ESTADÍSTICA.

2.4.1 PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE Y UNA PRUEBA DE SIMETRÍA.

Las pruebas de bondad de ajuste clásicas como por ejemplo la ji-cuadrada de Pearson, la de Kolmogorov y Smirnov o la de Anderson-Darling, requieren evaluar la función de distribución hipotética $F(x)$ en varios valores de x , y por lo tanto puede suceder que estas pruebas no sean útiles cuando no se tengan medios disponibles como tablas de probabilidad o algoritmos para evaluar la función de distribución $F(x)$, tal como sucede en el caso de las distribuciones estables con exponente característico $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq 2$.

Una alternativa a este problema la proporcionan Heathcote (1972) y Kontrouvelis (1980), quienes desarrollan pruebas de bondad de ajuste basadas en estadísticas de prueba obtenidas con la función característica empírica. Esto es posible debido a la correspondencia uno a uno entre las funciones de distribución y las funciones características, por lo cual las hipótesis pueden ser expresadas equivalentemente en términos de la función característica $\phi(t)$ en lugar de la función de distribución $F(x)$.

En la prueba de bondad de ajuste que presenta Heathcote (1972) considera la hipótesis nula

$$(2.7) \quad H_0 : \phi(t) = \phi_0(t)$$

dónde $\phi_0(t)$ es la función característica de una variable aleatoria X simétrica alrededor del origen, la cual debe ser completamente especificada, contra una hipótesis alterna completamente general.

La restricción que hace el autor a variables aleatorias simétricas

alrededor del origen es únicamente por conveniencia, debido a que estas variables aleatorias tienen función característica real, la parte imaginaria se hace cero con la consecuente simplificación en las distribuciones límite de las partes real e imaginaria de la función característica empírica.

La estadística de prueba que propone Heathcote es:

$$(2.38) \quad W_n(t) = \sqrt{\frac{t-1}{n}} \sum_1^n \sin\left\{\frac{(t-1)X_j}{2}\right\}$$

donde X_1, X_2, \dots, X_n es una muestra aleatoria de la distribución referida.

Si la hipótesis nula es cierta se tiene que:

$$(2.39) \quad \begin{aligned} E[W_n(t)] &= 0 & ; & \quad \text{Var}[W_n(t)] = 1 - \phi_0(t) \\ \text{y} & & & \\ \text{Cov}\{W_n(t_1), W_n(t_2)\} &= \phi_0\left\{\frac{t_2 - t_1}{2}\right\} - \phi_0\left\{\frac{t_2 + t_1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

La independencia de las variables X_1, X_2, \dots, X_n implica la validez del Teorema Central del Límite aplicado a las variables $\sin\left\{\frac{tX_j}{2}\right\}$, con $j=1, 2, \dots, n$, en donde para cada t se tiene:

$$(2.40) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{W_n(t) \leq x\} = [2\pi(1 - \phi_0(t))]^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{y^2}{2[1 - \phi_0(t)]}\right\} dy$$

En virtud de esta igualdad la hipótesis nula (2.37) queda determinada por las colas de la distribución ji-cuadrada con un grado de libertad, es decir, se rechaza H_0 si:

$$(2.41) \quad W_n(t) \leq \{1 - \phi_0(t)\} \chi^2_{(1, c/2)}$$

o si

$$(2.41) \quad W_n(t) \geq [1 - \phi_{\epsilon/2}(t)] \chi^2_{(1, 1 - \epsilon/2)}$$

donde $\chi^2_{(1, \epsilon/2)}$ es el $\epsilon/2$ percentil de la distribución ji-cuadrada con un grado de libertad.

En las pruebas de bondad de ajuste, la hipótesis de investigación generalmente coincide con la hipótesis nula, de ahí que el estudio de la potencia de la prueba que en este caso depende del valor de t elegido, es de fundamental importancia. Al respecto Heathcote (1972) observa lo siguiente:

Suponiendo que la función de distribución es $F(x)$ con función característica

$$(2.42) \quad \phi(t) = u(t) + i v(t) = \int \exp(itx) dF(x)$$

entonces la media y la varianza de $W_n(t)$ son:

$$(2.43) \quad E[W_n(t)] = (2n)^{1/2} v(t/2) ; \text{Var}[W_n(t)] = 1 - u(t) - 2v^2(t/2)$$

La variable aleatoria $W_n(t)/(1 - u(t) - 2v^2(t/2))$ tiene una distribución asintótica ji-cuadrada no central con un grado de libertad y parámetro de no centralidad

$$(2.44) \quad \lambda_n(t) = \frac{2nv^2(t/2)}{1 - u(t) - 2v^2(t/2)}$$

Una aproximación a la potencia de la prueba cuando el parámetro de no centralidad es estrictamente positivo es:

$$(2.45) \quad K_n = 1 - \Phi(a_n(t)) + \Phi(b_n(t))$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-\frac{1}{2}y^2) dy$$

$$b_n(t) = \left(\frac{2\chi_{(1, \epsilon/2)}^2 [1 - \phi_0(t)] [1 + \lambda_n(t)]}{[1 - u(t) - 2v^2(t/2)] [1 + 2\lambda_n(t)]} \right)^{1/2} - \left(1 + \frac{2\lambda_n^2(t)}{1 + 2\lambda_n(t)} \right)^{1/2}$$

$$a_n(t) = \left(\frac{2\chi_{(1, 1-\epsilon/2)}^2 [1 - \phi_0(t)] [1 + \lambda_n(t)]}{[1 - u(t) - 2v^2(t/2)] [1 + 2\lambda_n(t)]} \right)^{1/2} - \left(1 + \frac{2\lambda_n^2(t)}{1 + 2\lambda_n(t)} \right)^{1/2}$$

Pero $\lambda_n(t) > 0$ si y solo si $v(t/2) \neq 0$. Si $v(t/2) = 0$ como en el caso de una variable aleatoria X simétrica alrededor del origen, entonces $\phi(t) = u(t)$ y se tiene una ji-cuadrada central. Además la potencia de la prueba es:

$$(2.46) K_n = 1 - P \left(\frac{(1 - \phi_0(t)) \chi_{(1, \epsilon/2)}^2}{1 - \phi(t)} < Z^2 < \frac{(1 - \phi_0(t)) \chi_{(1, 1-\epsilon/2)}^2}{1 - \phi(t)} \right)$$

donde Z^2 es una variable aleatoria que se distribuye como la ji-cuadrada con un grado de libertad. En este caso la potencia de la prueba no se aproxima a 1 cuando $n \rightarrow \infty$, y bajo esta situación $W_n(t)$ no es una estadística de prueba satisfactoria. Se puede evitar esta situación desagradable usando una estadística de prueba más adecuada, por ejemplo Heathcote (1972) propone la estadística:

$$(2.47) U_n(t) = \sqrt{\frac{2v}{n}} \sum \cos \left(\frac{tX_j}{2} \right)$$

basado en la parte real de la función característica empírica con media y varianza:

(2.48) $E[U_n(t)] = (2n)^{1/2} u(t/2)$; $\text{Var}[U_n(t)] = 1 + u(t) - 2u^2(t/2)$
 respectivamente. La potencia de la prueba basada en $U_n(t)$ es de la
 forma (2.45) y es asintóticamente igual a 1.

Heathcote (1972) aplica esta metodología en dos casos especiales:

a).- Cuando las hipótesis nula y alterna difieren únicamente en los
 parámetros de localización y escala; en tal caso la hipótesis alterna es
 de la forma :

$$(2.49) \quad H_1 : F(x) = F_0 \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)$$

donde $F_0(x)$ es la función de distribución especificada en la hipótesis
 nula.

b).- Cuando la variable aleatoria X tiene una distribución estable
 simétrica y las hipótesis nula y alterna en términos de la función
 característica quedan planteadas de la siguiente forma: (suponiendo que
 el exponente característico α es desconocido)

$$(2.50) \quad \begin{aligned} H_0 : \phi(t) &= \exp(-|t|^\alpha) \\ H_1 : \phi(t) &= \exp(i\mu t - c|t|^\alpha) \end{aligned}$$

donde $0 < \alpha \leq 2$, $c > 0$ y $-\infty < \mu < \infty$.

En la prueba de bondad de ajuste que presenta Koutrouvelis (1980) se
 contrasta la hipótesis nula $H_0 : \phi(t) = \phi_0(t)$ contra una hipótesis
 alternativa simple $H_1 : \phi(t) = \phi_1(t)$.

Se define $C_1(t)$ y $S_1(t)$ como la parte real e imaginaria
 respectivamente de la función $\phi_1(t)$ para $i=0,1,n$. Donde $\phi_n(t)$ es la
 función característica empírica. Dados m números reales t_1, t_2, \dots, t_m sea
 $\xi_1(t_1, t_2, \dots, t_m)$ el vector de dimensión $2m$ definido por:

$$(2.51) \quad \xi_1(t_1, t_2, \dots, t_m) = [C_1(t_1), \dots, C_1(t_m), S_1(t_1), \dots, S_1(t_m)]$$

y sea $\Omega_1 = (w_{jk}^1)$ la matriz simétrica de orden $2m \times 2m$, donde:

$$(2.52) \quad w_{jk}^1 = \begin{cases} C_1(t_j+t_k) + C_1(t_j-t_k) - 2C_1(t_j)C_1(t_k) & \text{si } 1 \leq j, k \leq m \\ C_1(t_j-t_k) - C_1(t_j+t_k) - 2S_1(t_j)S_1(t_k) & \text{si } m+1 \leq j, k \leq 2m \\ S_1(t_j+t_k) - S_1(t_j-t_k) - 2C_1(t_j)S_1(t_k) & \text{si } 1 \leq j \leq m \\ & m+1 \leq k \leq 2m \end{cases}$$

La prueba que propone Koutrouvelis se fundamenta en el siguiente resultado:

TEOREMA.

Sean t_1, t_2, \dots, t_m m números reales tales que Ω_0 sea no singular, la forma cuadrática

$$(2.52) \quad Q_n^0 = 2n(\xi_n - \xi_0)' \Omega_0^{-1} (\xi_n - \xi_0)$$

tiene bajo H_0 una distribución asintótica ji-cuadrada con $2m$ grados de libertad.

Este teorema sugiere que cuando el tamaño de la muestra n sea lo suficientemente grande, se puede probar la hipótesis H_0 con la siguiente regla de decisión:

$$(2.53) \quad \text{Rechazamos } H_0 \text{ si : } Q_n^0 > \chi_{(2m, \epsilon)}^2$$

donde $\chi_{(2m, \epsilon)}^2$ es el ϵ -percentil de la distribución ji-cuadrada con $2m$ grados de libertad.

Estas pruebas deberían ser fáciles de aplicar cuando $\phi_0(t)$ sea fácil de evaluar, como en el caso de las distribuciones estables. Sin embargo esta metodología es complicada debido a que, por una parte se deben elegir adecuadamente el número entero m y los valores t_1, t_2, \dots, t_m para

que resulte factible invertir la matriz Ω_0 de orden $2m \times 2m$ establecida en el resultado que fundamenta esta prueba, y por otra parte para valores grandes de m , Q_n^0 converge en distribución muy lentamente a $\chi^2_{(2m)}$ y así, a menos que n sea muy grande, esta prueba resulta inútil.

En el presente trabajo no se han tenido estas dificultades debido a que se construyeron algoritmos para evaluar tanto las funciones de densidad como las funciones de distribución de las leyes estables simétricas.

En un artículo posterior Koutrouvelis y Kellermeier (1981) proporcionan una prueba de bondad de ajuste extendiendo el caso propuesto por Koutrouvelis (1980) al caso en que se tengan que estimar los parámetros de la distribución. La estadística de prueba propuesta tiene también una distribución asintótica ji-cuadrada que disminuye los grados de libertad en cantidad igual al número de parámetros estimados.

La hipótesis nula es de la forma:

$$(2.54) \quad H_0 : \phi(t) = \phi_0(t, \theta) \quad \text{con } \theta \in \Theta \subset \mathbb{C}R^p$$

donde $\phi_0(t, \theta)$ es un elemento de una familia de funciones características para la cual el vector de parámetros $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ es desconocido y debe ser estimado.

El procedimiento de la presente prueba es análogo al presentado por Koutrouvelis (1980), pero se generalizan las partes real e imaginaria de $\phi(t)$, considerandolas también como funciones de θ , así como los vectores ξ_i , $i=0, n$ de dimensión $2m$ que en este caso están dados por:

$$(2.55) \quad \xi_i(t_1, t_2, \dots, t_m, \theta) = [C(t_1, \theta), \dots, C(t_m, \theta), S(t_1, \theta), \dots, S(t_m, \theta)].$$

También la matriz $\Omega(\theta)$ de orden $2m \times 2m$ se considera como función de θ . Aplican el procedimiento proporecionado por Feuerwerker y

McDunnough (1981) tratado anteriormente en la sección (2.3.2) para estimar el vector de parámetros. Con el estimador $\hat{\theta}_n$ de θ se lleva a cabo la prueba de hipótesis (2.5-4) basándose en la forma cuadrática

$$(2.56) \quad Q_n = 2n(\xi_n - \xi(\hat{\theta}_n))' Q(\hat{\theta})^{-1} (\xi_n - \xi(\hat{\theta}_n))$$

que bajo H_0 obedece una distribución asintótica ji-cuadrada con $2m-p$ grados de libertad.

Una prueba de hipótesis para probar la simetría de una distribución de probabilidad alrededor del origen es desarrollada en Feuerverger y Mureika (1977). Utilizan la función característica empírica $\phi_n(t)$ para proponer la siguiente estadística de prueba:

$$(2.57) \quad T_n = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{Im} \phi_n(t))^2 dG(t)$$

donde G es una función de distribución simétrica alrededor de origen con función característica $g(t)$. Los autores sugieren esta estadística basándose en el hecho de que una función característica es real si y solo si la función de distribución correspondiente es simétrica alrededor del origen.

La prueba se fundamenta en el siguiente resultado.

TEOREMA.

Sea G una función de distribución simétrica alrededor del origen y sea T_n como en (2.57), además sean

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{Im} \phi(t))^2 dG(t)$$

y

$$\sigma^2 = \iint \operatorname{Im} \phi(t_1) \operatorname{Im} \phi(t_2) [2 \operatorname{Re}(-\phi(t_1+t_2) + \phi(t_1-t_2)) - 4 \operatorname{Im} \phi(t_1) \operatorname{Im} \phi(t_2)] dG(t_1) dG(t_2)$$

Cuando $\sigma^2 > 0$, $n^{-1/2} (T_n - I)$ es asintóticamente normal con media cero y varianza σ^2 . Si $\sigma^2 = 0$ la distribución asintótica es degenerada en cero.

Los procesos de inferencia estadística que se basan en la función característica empírica como estimador de la función característica son consistentes debido a que $\phi_n(t)$ es un estimador consistente de $\phi(t)$. En efecto, para cualquier valor de t fijo $\phi_n(t)$ es la suma de v.a.i.i.d. con valor esperado $\phi(t)$. Por lo tanto, por la ley fuerte de los grandes números, $\phi_n(t)$ converge en probabilidad a $\phi(t)$. Además se tiene el siguiente resultado cuya demostración se encuentra en Feuerverger y Muroika (1977). Este es análogo del teorema de Glivenko-Cantelli para funciones de distribución.

TEOREMA Para $T < \infty$

$$P \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \leq T} |\phi_n(t) - \phi(t)| = 0 \right] = 1$$

Finalmente mencionemos que otras técnicas de inferencia estadística en leyes estables como regresión y series de tiempo son actualmente temas de investigación. Los artículos Karier y Steiger (1974), Yohai y Maronna (1977), Cline (1986), y Cline Brockwell (1985) entre otros, tratan estos temas y contienen referencias al respecto.

CAPITULO III

INFERENCIA ESTADISTICA PARA EL PARAMETRO DE LOCALIZACION

3.1 INTRODUCCION.

El presente capítulo lo dedicaremos a desarrollar inferencia estadística para el parámetro de localización de una distribución estable simétrica.

Se demostró en el teorema 1.12 que las distribuciones estables son invariantes bajo transformaciones lineales. Además por definición, son distribuciones límite de sumas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, estandarizadas convenientemente. Por éstas razones, como se verá más adelante, los aspectos de inferencia estadística se desarrollaran en forma análoga a como se hace en la teoría clásica de la distribución normal.

Hacer el análisis de esta manera, permite establecer en el marco de la estadística inferencial, similitudes y contrastes entre la distribución normal y las otras distribuciones estables simétricas.

Primeramente se estudia la robusticidad de la distribución t-student en la familia de las distribuciones $ESE(\alpha)$ cuando α decrece alejándose de 2. Se estudia además, la distribución asintótica de una estadística tipo t-student generalizada, que se obtiene al estandarizar en forma adecuada al estadístico \bar{x} , cuando la muestra aleatoria corresponde a una distribución $ESE(\alpha)$.

Se construyen intervalos de confianza para el parámetro de localización μ de una distribución ESE(α), tanto para el caso en que el parámetro de escala es conocido, como el caso en que es desconocido. Cuando el parámetro de escala es desconocido, se pueden construir intervalos de confianza para el parámetro de localización μ , mediante la distribución t-student, en el rango de valores de α donde esta distribución es robusta. También se pueden construir intervalos de confianza utilizando la estadística t-student generalizada, para valores de α y tamaños de muestra n , en donde la distribución empírica se ajuste a la distribución asintótica. Estudiaremos la calidad de estos intervalos de confianza en el dominio común de valores de α en donde ambas construcciones tienen validez.

3.2 DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DEL ESTADÍSTICO \bar{X}

La inferencia estadística para la media $\mu = E[X]$ en el caso en que la muestra X_1, X_2, \dots, X_n proceda de una distribución normal, con varianza $\sigma^2 = \text{Var}[X]$ conocida, se desarrolla a través de la distribución exacta del estadístico \bar{X} . Esta distribución se conoce debido a que la distribución normal es invariante bajo transformaciones lineales. Sabemos que esta propiedad también se satisface en la familia de las distribuciones estables. Entonces, en analogía con este resultado, se deduce del teorema 1.12 del capítulo 1, que si X_1, X_2, \dots, X_n es una muestra aleatoria de una distribución $ES(\alpha, \mu, \sigma^\alpha)$, la estadística \bar{X} tiene una distribución estable con vector de parámetros $(\alpha, \mu, n^{1-\alpha} \sigma^\alpha)$. Si además aplicamos el resultado obtenido en la

expresión 1.26 a la estadística \bar{x} , se obtiene que

$$(3.1) \quad Z(\alpha) = \frac{(n-1)/\sigma \left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \right)}{\sigma}$$

tiene una distribución $ESE(\alpha)$.

Cuando el parámetro de escala σ y el exponente característico α son conocidos, el hacer inferencia estadística en la familia de las distribuciones $ES(\alpha, \mu, \sigma^\alpha)$ para el parámetro de localización μ no presenta mayor problema, debido a que se conoce la distribución de probabilidad exacta de la variable aleatoria dada en la igualdad (3.1), y es suficiente con tener acceso a tablas de probabilidad de distribuciones $ESE(\alpha)$. Con éste propósito se elaboraron tablas con percentiles de distribuciones $ESE(\alpha)$ para valores de α en el intervalo $1 < \alpha < 2$. De las curvas se presenta un extracto en el capítulo I del presente trabajo. Una versión más completa de estas tablas se encuentra en Gómez Arias-Pérez Abreu (1986).

3.3 ROBUSTICIDAD DE LA DISTRIBUCIÓN t-STUDENT DENTRO DE LA FAMILIA DE DISTRIBUCIONES ESTABLES SIMÉTRICAS.

Es bastante conocido que la distribución t-student es robusta dentro de un conjunto grande de distribuciones. Además, del teorema de continuidad de Levy se deduce que las distribuciones $ES(\alpha, \mu, \sigma^\alpha)$ convergen en distribución a la distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$ cuando $\alpha \rightarrow 2$. Estos resultados sugieren realizar un estudio sobre la robusticidad de la distribución t-student en la familia de las distribuciones $ES(\alpha, \mu, \sigma^\alpha)$, cuando el exponente característico α se aleja de 2.

Este estudio se llevó a cabo simulando muestras aleatorias de distribuciones $ESE(\alpha)$ para diferentes valores de α entre 1 y 2 y para diferentes tamaños de muestra. Se utilizó la estadística Anderson-Darling para las pruebas de bondad de ajuste de la estadística

$$(3.2) \quad t = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu}{s}$$

$$\text{donde } \bar{x} = 1/n \sum x_i \quad \text{y} \quad s^2 = 1/(n-1) \sum (x_i - \bar{x})^2$$

contra la distribución t-student con $n-1$ grados de libertad.

Con un nivel de significancia $\epsilon=0.01$, se obtuvo que para muestras de tamaño $n=10$, la distribución t-student es robusta sólo para valores de α entre 1.4 y 2. Asimismo se obtuvo que para muestras de tamaño n entre 15 y 30 esta estadística es robusta para valores de α entre 1.3 y 2. Ver tabla 3.1 al final de este capítulo.

Además se observó el comportamiento bimodal de la distribución (3.2) alrededor de $\alpha=1$, siendo esta bimodalidad más marcada cuando α se acerca a 1 y desapareciendo a medida que α se hace más grande, como puede observarse en los siguientes histogramas, los cuales se obtuvieron generando 800 muestras aleatorias de tamaño $n=15$ de distribuciones $ESE(\alpha)$ y agrupando en 16 intervalos los valores correspondientes del estadístico t . Las figuras 3.1 a 3.5 corresponden a los valores de $\alpha=1.0$, 1.1, 1.2, 1.3, y 1.4, respectivamente.

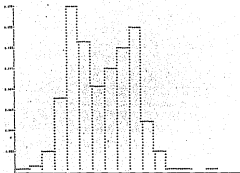


Figure 3.1

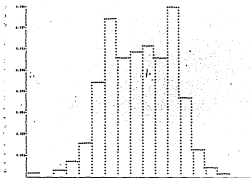


Figure 3.2

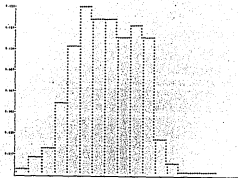


FIGURA 3.3

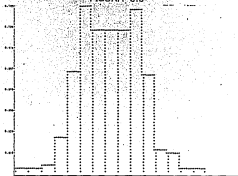


FIGURA 3.4

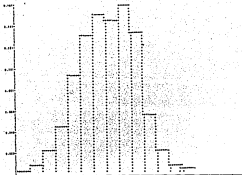


FIGURA 3.5

Debido a que es peligroso hacer inferencia estadística para el parámetro de localización cuando la distribución muestral de la estadística correspondiente es bimodal, no conviene hacer un estudio de la distribución exacta de la estadística (3.2) fuera del rango de valores de x donde la distribución t-estudent es robusta.

3.4 UNA ESTADÍSTICA t-STUDENT GENERALIZADA.

Otra forma de hacer inferencia estadística para el parámetro de localización μ de una distribución estable simétrica, cuando el parámetro de escala es desconocido, se puede llevar a cabo tal igual que con la distribución normal, sustituyendo en la expresión (3.1) el parámetro de escala σ por un estimador $\hat{\sigma}$. A partir de esto hay dos posibilidades, una es investigar la distribución exacta del estadístico así obtenido, y la otra consiste en investigar su distribución asintótica.

Procediendo de esta manera, obtendremos en primer lugar un estimador consistente del parámetro de escala. Reemplazando en la ecuación (1.39) los percentiles Q_{r_α} y Q_{1-r_α} por los correspondientes r_α y $r_{1-\alpha}$ percentiles muestrales, que denotaremos por q_{r_α} y q_{1-r_α} respectivamente, obtenemos un estimador $\hat{\sigma}$ del parámetro de escala σ , es decir

$$(3.3) \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{2} \alpha^{1/\alpha} (q_{r_\alpha} - q_{1-r_\alpha})$$

La correspondiente estadística que se obtiene al sustituir el estimador $\hat{\sigma}$ por el parámetro de escala σ en la igualdad (3.1), es una generalización de la estadística t-student, la cual puede expresarse en la forma

$$(3.4) \quad t^{\alpha-n(1-\alpha)/\alpha} \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}}$$

En inferencia estadística para leyes estables no normales, no es importante conocer la distribución exacta del estadístico (3.4). Esto se debe a que siempre se necesitan considerar muestras de tamaño n lo suficientemente grandes para observar el comportamiento de las

colas pesadas de las distribuciones estables no normales. Por lo tanto para los propósitos del presente trabajo, es suficiente investigar solo la distribución asintótica de la estadística (3.4).

Las propiedades de la distribución asintótica del estadístico (3.4) dependen de las propiedades de los percentiles muestrales. Es bien conocido que estos últimos son estimadores consistentes de los correspondientes percentiles de la distribución. Por lo tanto, concluimos que el estimador (3.3) es un estimador consistente del parámetro de escala σ .

A continuación presentamos otras propiedades del estimador (3.3), que se obtienen de manera casi inmediata a partir de las propiedades asintóticas de los percentiles muestrales, como estimadores de los percentiles de una distribución. Se deducirá de estas propiedades la distribución asintótica del estadístico (3.4).

PROPOSICION 3.1 Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $ES(\alpha, \mu, \sigma^\alpha)$ con $0 < \alpha \leq 2$. El estadístico (3.3) satisface lo siguiente:

- Es un estimador fuertemente consistente del parámetro de escala σ
- Es asintóticamente normal, y es un estimador insesgado de varianza asintótica dada por

$$(3.5) \quad \frac{1}{2n} \frac{\sigma^{2/\alpha}}{\sigma^2} \frac{(1+r_\alpha)(2r_\alpha-1)}{[f(Q_{r_\alpha})]^2}$$

donde f es la función de densidad de N_1 .

DEMOSTRACION

a) Esta afirmación es un caso particular del teorema 2.3.1 demostrado en Serfling (1980), el cual establece que para cualquier número p tal que $0 < p < 1$, si ξ_p es la única solución de $F(x) = p \leq F(x)$, entonces el p -percentil muestral q_p de una muestra de tamaño n , converge a ξ_p con probabilidad uno. En particular, por ser las distribuciones estables continuas, se tiene que el p -percentil Q_p de una distribución estable es la única solución de $F(x) = p \leq F(x)$. Por lo tanto el p -percentil muestral q_p de una distribución estable es un estimador fuertemente consistente del p -percentil Q_p de la distribución. De este resultado se sigue la demostración de la propiedad.

b) Como la función de densidad de una distribución estable es positiva y continua, entonces por el teorema 2.3.3 B demostrado en Serfling (1980) se tiene que el vector $(q_{1-r/\alpha}, q_{r/\alpha})$ es asintóticamente normal bivariado, con vector de medias $(Q_{1-r/\alpha}, Q_{r/\alpha})$ y matriz de varianzas y covarianzas σ_{ij} dada por

$$\sigma_{11} = \frac{(1-r/\alpha)r/\alpha}{n[f(Q_{1-r/\alpha})]^2} ; \sigma_{22} = \frac{r/\alpha(1-r/\alpha)}{n[f(Q_{r/\alpha})]^2} ; \sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{(1-r/\alpha)^2}{n[f(Q_{1-r/\alpha})f(Q_{r/\alpha})]}$$

Del teorema de Cramer-Wold (ver Serfling (1980) p.18) se concluye que la combinación lineal establecida en (3.3) converge en distribución a la distribución normal. Además aplicando la linealidad del operador $E\{x\}$ se tiene

$$\begin{aligned} E\{\hat{\sigma}\} &= E\left\{\frac{1}{2}\alpha^{1/\alpha}(q_{r/\alpha} - q_{1-r/\alpha})\right\} = \frac{1}{2}\alpha^{1/\alpha}\left(E\{q_{r/\alpha}\} - E\{q_{1-r/\alpha}\}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\alpha^{1/\alpha}\{Q_{r/\alpha} - Q_{1-r/\alpha}\} = \sigma. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la simetría de la función de densidad a la matriz de varianzas y covarianzas, y de la fórmula para la variancia de una combinación lineal de variables aleatorias se tiene

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\sigma}) &= \frac{1}{4} \sigma^{2/\alpha} \left[\text{Var}[q_{1-r/\alpha}] + \text{Var}[q_{r/\alpha}] - 2 \text{Cov}[q_{1-r/\alpha}, q_{r/\alpha}] \right] = \\ &= \frac{1}{4} \sigma^{2/\alpha} \left[\frac{2r/\alpha (1-r/\alpha)}{n [f(Q_{r/\alpha})]^2} - \frac{2(1-r/\alpha)^2}{n [f(Q_{r/\alpha})]^2} \right] = \frac{1}{4n} \sigma^{2/\alpha} \frac{(1-r/\alpha)(2r/\alpha - 1)}{[f(Q_{r/\alpha})]^2} \end{aligned}$$

Q. Q. D.

El siguiente teorema establece la distribución asintótica del estadístico (3.4).

TEOREMA 3.1

Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución $ES(\mu, \alpha, \sigma^\alpha)$ con $0 < \alpha < 2$. Entonces la estadística (3.4) converge en distribución a la distribución $ESE(\alpha)$.

DEMOSTRACION

El teorema 1.12 establece que la función de distribución de la variable aleatoria $n^{(\alpha-1)/\alpha}(x-\mu)$ corresponde a la distribución $ES(\alpha, 0, \sigma^\alpha)$. Podemos entonces decir que la sucesión de variables aleatorias $n^{(\alpha-1)/\alpha}(x-\mu)$ converge en distribución a una variable aleatoria con distribución $ES(\alpha, 0, \sigma^\alpha)$. Además de acuerdo con la proposición 3.1 a) tenemos que la variable aleatoria σ converge en probabilidad a la constante σ . Por el teorema de Slutsky (ver Serfling

(1980) p.19) concluimos que la sucesión de variables aleatorias

$$\sqrt{n}^{(\alpha-1)/\alpha} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

converge en distribución a una variable aleatoria X con distribución $ESE(\alpha)$.

Q.Q.D.

Se realizó un estudio de simulación para investigar la rapidez de convergencia de la estadística (3.4) para diferentes valores de α , tales que $1 \leq \alpha \leq 2$. Este estudio se llevó a cabo aplicando pruebas de bondad de ajuste a (3.4). Se utilizó la estadística Anderson-Darling como estadística de prueba y los resultados obtenidos se muestran en la tabla 3.2, de los cuales con un nivel de significancia $\epsilon=0.01$, se concluye que la convergencia es rápida para valores de α entre 1 y 1.7, siendo esta aproximación bastante buena para tamaños de muestra mayores o iguales que 15.

3.5 ESTIMACION POR INTERVALOS PARA EL PARAMETRO DE LOCALIZACION μ DE UNA DISTRIBUCION ESTABLE SIMETRICA.

La construcción de intervalos de confianza para el parámetro de localización μ de una distribución estable simétrica para el caso en que el exponente característico α sea conocido, se puede llevar a cabo en forma análoga a como se hacen estas construcciones en la teoría clásica de la distribución normal. Esto es debido a la simetría de la función de densidad y a la analogía entre las estadísticas (3.1) y (3.4) con las estadísticas z y t (normal estándar y t -student) respectivamente. Así pues, un intervalo de confianza para el parámetro de localización μ de

una distribución $ES(\alpha, \mu, \sigma^\alpha)$ es de la forma

Estimador Intervalo $100(1-\epsilon)\%$ de confianza (Escala estándar)

Si el exponente característico α y el parámetro de escala son conocidos, un intervalo de confianza al $(1-\epsilon)100\%$ es

$$\bar{X} \pm Z_{1-\epsilon/2}^\alpha \frac{\sigma}{n^{1/\alpha}}$$

donde $Z_{1-\epsilon/2}^\alpha$ es el percentil $1-\epsilon/2$ de una distribución $ES(\alpha)$.

Para el caso en que el parámetro de escala σ sea desconocido los resultados obtenidos de los estudios de simulación proporcionan dos formas de construir los intervalos de confianza para μ . Una² consiste en utilizar la distribución t-student en el rango de valores de α y tamaños de muestra donde esta distribución sea robusta. Por lo tanto, de las conclusiones obtenidas en la sección 3.2, se tiene que para $n \geq 15$ y valores de α entre 1.3 y 2, un intervalo de confianza para μ al $(1-\epsilon)100\%$ es:

$$\bar{X} \pm t_{1-\epsilon/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Otra forma de construir intervalos de confianza consiste en utilizar la rapidez de convergencia de la estadística t-student generalizada estudiada en la sección 3.4. Se tiene que para $n \geq 15$ y α entre 1 y 1.7, un intervalo de confianza para μ al $(1-\epsilon)100\%$ es

$$\bar{X} \pm Z_{1-\epsilon/2}^{\alpha} \frac{\sigma}{n^{(\alpha-1)/\alpha}}$$

Sustituyendo σ por su equivalente dado en (3.3), el intervalo queda expresado por

$$\bar{X} \pm Z_{1-\epsilon/2}^{\alpha} \frac{\sigma^{1/\alpha} (q_{r/\alpha} - q_{1-r/\alpha})}{\Delta_{\alpha}^{1/\alpha} (\alpha-1)^{1/\alpha}}$$

Cuando el parámetro de escala σ es desconocido, observemos que para valores de α entre 1.3 y 1.7 y tamaños de muestra $n \geq 15$, se pueden utilizar las estadísticas (3.2) y (3.4) para construir los intervalos de confianza. Se estudió la calidad de ambas construcciones através de un estudio de simulación para comparar la longitud promedio de ambos intervalos de confianza. Los resultados obtenidos se reportan en la tabla 3.2. En ellos se concluye que la construcción que utiliza la estadística (3.4), proporciona en promedio intervalos más precisos, es decir de menor longitud, que los construidos con la estadística (3.2). Por esta razón recomendamos el uso de la estadística (3.4) cuando ambas construcciones tengan validez. Además debemos tener en cuenta el comportamiento bimodal de la estadística (3.2) a medida que α decrece acercándose a 1.

3.6 SIMULACION.

Los estudios de simulación realizados en el presente trabajo se basan en el algoritmo presentado en Chambers-Mallows-Stuck(1976) para

generar variables aleatorias independientes con función de distribución estable. El algoritmo considera dos variables aleatorias w y ϕ distribuidas independientemente como una exponencial estándar, y como una uniforme en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ respectivamente. Entonces con $\phi_0 = -(1/2)\pi\beta(k(\alpha)/\alpha)$, las expresiones

$$(3.5) \quad \begin{cases} S(\alpha, \beta) = \frac{\sin(\phi - \phi_0)}{(\cos(\phi))^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos(\phi - \alpha(\phi - \phi_0))}{w} \right)^{(1-\alpha)/\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ S(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \left(\left(\frac{1}{2}\pi + \beta\phi \right) \tan(\phi) - \beta \ln \left(\frac{\frac{1}{2}\pi + \beta \cos(\phi)}{\frac{1}{2}\pi + \beta\phi} \right) \right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

son representaciones de variables aleatorias con función de distribución estable estándar con exponente característico α y parámetro de sesgo β .

La estadística de prueba utilizada en todas las pruebas de bondad de ajuste es la estadística Anderson-Darling A_m^2 , la cual para valores x_1, x_2, \dots, x_m de la distribución empírica es:

$$(3.6) \quad A_m^2 = -m \cdot \frac{1}{m} \sum (2i-1) (\ln(X_{(i)}) + \ln(1 - X_{(m+1-i)}))$$

en donde $X_{(i)}$ representa la estadística de orden. Los valores críticos de esta estadística para algunos niveles de significancia ϵ y tamaños de muestra $m \geq 15$ con los siguientes:

ϵ	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
valores críticos	1.610	1.923	2.492	3.070	3.857

Se realizaron $m=500$ repeticiones en los estudios de simulación que

se hicieron para investigar la robusticidad de la distribución t-student, la rapidez de convergencia de la distribución t-student generalizada y la calidad de los intervalos de confianza construidos con tales estadísticas.

TABLA 3.1

Estadística Anderson-Darling (AD) obtenida con muestras de tamaño $n=10$ y $n=15$ con 500 repeticiones, para probar la robusticidad de la distribución t-student.

	α	1.99	1.98	1.97	1.96	1.95	1.90	1.80
$n=10$	AD	0.352	1.195	1.678	1.411	1.607	1.792	1.215
$n=15$	AD	0.682	0.682	1.409	1.647	1.698	1.631	1.228

α	1.70	1.60	1.50	1.40	1.30	1.20	1.10	1.00
AD	1.004	1.226	1.645	1.755	3.590	3.600	4.294	4.801
AD	1.074	1.037	1.149	2.261	4.020	5.173	4.837	5.625

TABLA 3.2

Estadística Anderson-Darling (AD) obtenida con tamaños de muestra $n=10$ y $n=15$ con 500 repeticiones, para evaluar la rapidez de convergencia de la distribución t-student generalizada.

	α	1.99	1.98	1.97	1.96	1.95	1.90	1.80
$n=10$	AD	6.971	5.619	4.664	5.748	5.601	4.362	3.802
$n=15$	AD	14.73	5.843	8.676	9.688	7.384	6.009	2.733

α	1.70	1.60	1.50	1.40	1.30	1.20	1.10	1.00
AD	3.500	2.010	1.488	1.406	0.796	0.466	1.055	0.552
AD	1.637	1.513	1.496	1.313	0.322	0.247	0.202	0.568

TAJLA 3.2

Longitud promedio de 500 intervalos de confianza construidos con la t-student (t) y con la t-generalizada (t-g) para tamaños de muestra $n=10$ y $n=15$.

	α	1.99	1.98	1.97	1.96	1.95	1.90	1.80
$n=10$	t	1.975	1.452	1.450	1.535	1.630	2.098	2.006
	t-g	1.123	1.152	1.170	1.178	1.228	1.280	1.473
$n=15$	t	1.104	1.128	1.162	1.139	1.160	1.356	2.320
	t-g	0.882	0.892	0.892	0.916	0.915	0.988	1.205

α	1.70	1.60	1.50	1.40	1.30	1.20	1.10	1.00
t	3.005	2.649	2.900	14.360	14.560	28.370	36.521	74.054
t-g	1.883	2.432	3.213	4.490	6.260	9.535	16.256	20.118
t	2.802	2.888	2.700	4.886	16.240	34.170	34.237	38.576
t-g	1.426	1.865	2.526	3.664	5.199	8.071	14.350	16.830

BIBLIOGRAFIA

- Abramowitz, M. & Stegun, I.A., Handbook of Mathematical Functions. Washington: National Bureau of Standards. (Eds.) (1964).
- Andrews, D.F., et al., Robust Estimates of Location: Survey and Advances, Princeton University Press, Princeton, 1972.
- Chamber, J.M., C.L. Mallows and B.W. Stuck., A Method for Simulating Stable Random Variables. J. Amer. Statistic. Assoc. 71, pp. 340-344, 1976.
- Cline, D.B.H. and J. Brockwell, Linear prediction of ARMA Processes with Infinite Variance, Stochastic Processes and their Appl., 19, pp. 281-296, 1985.
- Cline, D.B.H., Consistent square regression estimator with infinite variance data., Tech. Report No. 167, Center for Stochastic Processes University of North Carolina at Chapel Hill. 1986.
- De Haan, L., Estimation of the minimum of a function using order statistics. Technical report 7902/S, Econometric Institute, Erasmus University, Rotterdam, 1979.
- De Haan, L. and Resnick, . I., A simple Asymptotic Estimate for the Index of a Stable Distribution, J. R. Statist. Soc. B, 42, pp. 83-88.
- DuMouchel, W.H., On the Asymptotic Normality of Maximum-Likelihood Estimates when Sampling from a Stable Distribution, Ann.

Statist., 1, 1973, pp. 948-957.

Elliott W. Montroll, and John T. Bendler, On Levy Distribution and the Williams-Watts Model of Dielectric Relaxation, Journal of Statistical Physics, Vol 34, pp. 129-162, 1984.

Fama, E. F. and R. Roel, Some Properties of Symmetric Stable Distributions, J. Amer. Statist. Assoc., 63, 1968, pp. 817-836.

Fama, E. F. and Roel Richard. . Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions. J. Amer. Statist. Assoc., 66, pp. 331-338.

Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol II, Second Edition, Wiley & Sons, New York, 1966.

Feuerverger, A. and P. McDunnough, On Efficient Inference in Symmetric Stable Law and Processes. In Statistics and Related Topics. Csorgo, M., D.A. Dawson, J.N.K. Rao y A.K.M.E. Salehi (eds.), North Holland, Amsterdam, 1981.

Feuerverger, A. and R. A. Mureika, The Empirical Characteristic Function and its Applications, Ann. Statist., 5, 1977, pp. 88-97

Fielitz, B. D., and Smith, E. W., Asymmetric Stable Distributions of Stock Price Changes, J. Amer. Statist. Assoc. 67. 1972 pp. 813-814.

- Gnedenko, B. V. and A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1954.
- Gómez Arias J. y Victor Pérez-Abreu, *Tablas de distribuciones estables simétricas. Comunicaciones Técnicas, I.I.M.A.S.-U.N.A.M. Series Desarrollo, núm. 60, México, 1968.*
- Heathcote, C. R. , A test of goodness of fit for symmetric random variables. *Austral. J. Statist.* 14, pp. 172-181.
- Ibragimov, I. A. and Chernin, K. E., On the Unimodality of Stable Laws *Theory of Probability and its Applications*, 4 No. 4 pp. 417-419 1959.
- John T. Bendler., *Levy (Stable) Probability Densities and Mechanical Relaxation in Solid Polymers*, *Journal of Statistical Physics*. 36 Nos. 5,6 1984.
- Kanter, M. and W.L. Stelger, *Regression and Autoregression with Infinite Variance. Adv. Appl. Prob.* 6, pp.768-783, 1974.
- Kontrovelis, I. A., A Goodness of fit Test of Simple Hypothesis Based on the Characteristic Function, *Biometrika*, 67 pp. 238-240, 1980.
- Kontrovelis, I. A. and Kellermeier, J., A Goodness of fit Test on the Empirical Characteristic Function when Parameters must be Estimated., *J. R. Statist. Sec. B.* 43, No 2, pp. 172-176, 1981.
- Levy, P., *Theorie des erreurs. La loi de Gauss et les lois*

exceptionnelles, Bull. Soc. Math. France 52 pp. 49-85, 1924.

Lévy, P., *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris, 1927.

Paulsen, A. S., Holcomb, E. W. and Lettich, R. A., The Estimation of the Parameters of the Stable Law, *Biometrika*, 62, pp. 163-170, 1975.

Press, S. J., Estimation in Univariate and Multivariate Stable Distributions, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 67, pp. 842-846, 1972.

Mandelbrot, B., The Variation of Some Other Speculative Prices, *J. Business*, 39, 1967, pp. 242-255.

Serfling, R.J., *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, Wiley New York 1980.

Shapiro, J., Domains of Attraction for Reciprocal of Powers of Random Variables, *SIAM J. Appl. Math.*, 29 pp. 734-739, 1975.

Shashanka S. Mitra, Distribution of Symmetric Stable Laws of Index 2^{-n}
The Annals of Probability Vol 9 No. 4, pp. 710-711, 1981.

Yohai, V.T. and R.A. Maronna, Asymptotic Behavior of Least-squares Estimates for Autoregressive Processes with Infinite variance, *Ann Statist*, 5, pp. 554-560, 1977.

Zolotarev V.M., One Dimensional Stable Distribution, *Translations of Mathematical Monographs*, American Mathematical Society, Vol. 65., 1986.