

38  
2ej



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
"ARAGON"**

**ANALISIS GRAFICO DE ELEMENTOS  
ESTRUCTURALES**

**T E S I S**

PARA OBTENER EL TITULO DE:

**INGENIERO CIVIL**

P R E S E N T A :

**EVERARDO SOLIS ALCANTAR**

**MEXICO, D. F.**

**1988**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## "ANÁLISIS GRÁFICO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES"

### CONTENIDO.

### INTRODUCCIÓN

#### Capítulo 1. GENERALIDADES

- 1.1. Concepto de estática
- 1.2. Acción de una fuerza
- 1.3. Representación gráfica de una fuerza
- 1.4. Reacción de una fuerza
- 1.5. Elementos de Aplicación
- 1.6. Uniones
- 1.7. Diagrama de cuerpo libre
- 1.8. Condiciones de Isostaticidad, estabilidad y grado de indeterminación de una estructura

#### Capítulo 2. ANÁLISIS GRÁFICO DE COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS EN EL PLANO

- 2.1. Composición de fuerzas
  - 2.1.1. Resultante de fuerzas concurrentes y concepto de polígono de fuerza
  - 2.1.2. Composición de fuerzas que actúan en la misma línea de acción
  - 2.1.3. Resultante de fuerzas no concurrentes utilizando el punto de encuentro

2.1.4. Resultante fuerzas no concurrentes - aplicando los polígonos vectorial y funicular

2.1.5. Traslación del polo y propiedades de los polígonos vectorial y funicular

2.1.6. Resultante de varias fuerzas paralelas con diferentes puntos de aplicación.

## 2.1. Descomposición de fuerzas

2.2.1. Determinación de los componentes de una fuerza  $F$ , conocidas sus líneas de acción

2.2.3. Conocidas las magnitudes de dos componentes determinar las direcciones y sentidos

2.2.4. Dadas las magnitudes de una componente y su dirección para la otra resolver el problema

2.2.5. Como hacer pasar el polígono funicular por dos puntos dados

2.2.6. Descomposición de una fuerza en tres o más componentes de líneas de acción conocida

2.2.7. Composición de una fuerza dada en dos componentes paralelas

2.2.8. Momento estático de una fuerza

2.2.9. Momento de un par

2.2.10 Sustitución del punto de encuentro

Capítulo 3. OBTENCIÓN GRÁFICA DE LAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS

3.1. Centros de gravedad

3.1.1. Definición gráfica de centro de gravedad

3.1.2. Propiedades de los centros de gravedad

3.1.3. Centro de gravedad de fuerzas paralelas

3.1.4. Determinación de la distancia  $x$  al centro de giro arbitrario

3.1.5. Centros de gravedad de figuras rectilíneas, homogéneas

3.1.6. Centro de gravedad de áreas planas

3.2. Momentos de inercia de segundo orden

3.2.1. Condiciones generales

3.2.2. Momento de inercia de una serie de fuerzas paralelas

3.2.3. Momentos de inercia de una área plana respecto a un eje contenido en su plano

Capítulo 4. VIGAS SOLUCIONADAS POR MÉTODOS GRÁFICOS

4.1. Vigas isostáticas

4.1.1. Reacciones en los apoyos

- 4.1.2. Momento flexionante y esfuerzo constante en una viga sometida a fuerzas paralelas
- 4.1.3. Carga uniformemente distribuida
- 4.1.4. Carga mixta directa
- 4.1.5. Viga en volado
- 4.2. Vigas continuas articuladas
  - 4.2.1. Aclaraciones
  - 4.2.2. Viga con cargas aisladas
  - 4.2.3. Viga con carga uniformemente distribuida
- 4.3. Vigas hiperestáticas
  - 4.3.2. Línea elástica de una viga
  - 4.3.3. Puntos focales o fijos
  - 4.3.4. Puntos fijos o focales en el eje de una viga
  - 4.3.5. Líneas en cruz
  - 4.3.6. Viga de un tramo con extremo empotrado
  - 4.3.7. Viga de un tramo doblemente empotrada con momento de inercia constante
  - 4.3.8. Viga de dos tramos con carga uniformemente distribuida y concentrada
  - 4.3.9. Viga de tres tramos con momentos de inercia variables

## Capítulo 5. DETERMINACION GRAFICA DE ARMADURAS

### 5.1. Armaduras isostáticas

#### 5.1.1. Aclaraciones

#### 5.1.2. Métodos de análisis gráfico para armaduras

#### 5.1.3. Armaduras de una sola vertiente

### 5.2. Deformaciones elásticas de los sistemas reticulares plano

### 5.3. Armaduras hiperestáticas

#### 5.3.1. Armaduras de hiperestaticidad externa

#### 5.3.2. Armadura hiperestática interna

#### 5.3.3. Método de doble sección de Ritter

#### 5.3.4. Armaduras con diagonales cruzadas

## Capítulo 6. SOLUCION GRAFICA DE ARCOS Y PORTICOS

### 6.1. Arcos isostáticos

#### 6.1.1. Aclaraciones

#### 6.1.2. Líneas de presión

#### 6.1.3. Solución gráfica del arco Tri-articulado

#### 6.1.4. Arco libremente apoyado

#### 6.1.5. Porticos isostáticos

#### 6.2.1. Elementos mecánicos de un arco

### 6.3. Porticos hiperestáticos

**Capítulo 7. CONCLUSIONES**

**7.1. Utilización de los métodos gráficos en la -  
actualidad**

**7.2. Utilidad práctica de los métodos gráficos**

**7.3. Comentarios del trabajo**



## INTRODUCCION

Las gráficas son una de las herramientas más utilizadas actualmente en todas las ramas de las ciencias para hacer representaciones físico-matemáticas; éstas además nos muestran, en forma de dibujo, la descripción de la realidad visible de todas aquellas formas, objetos, movimientos, materiales, etc. Las gráficas también sirven para realizar cálculos gráficos de elementos estructurales como se muestra en el presente trabajo.

Tal vez sea repetir lo que aparece en muchos de los trabajos de Mecánica Aplicada, pero hemos querido recopilar los más todos gráficos que puedan ser más útiles para el Ingeniero estructurista y a los estudiantes de la carrera de ingeniería civil interesados en este tema.

El trabajo de investigación, además del análisis de los teoremas de la estática gráfica, contiene ejemplos prácticos que ilustran en forma clara y sencilla la aplicación de estos teoremas. Por otra parte, el trabajo se complementa con conceptos importantes de los teoremas elásticos y su aplicación a la solución de los problemas hiperestáticos, ésta última parte, no estaba contemplada en principio para el presente trabajo. Sin embargo, al encontrar que es posible la solución de los problemas hiperestáticos utilizando los métodos gráficos, se optó por incluir la solución de algunos problemas que pueden resolverse de una forma práctica y sencilla por estos métodos.

En su primer capítulo, el trabajo comienza con la definición de las propiedades de la estática y conceptos importantes de los elementos estructurales y seguido.

Continúa el segundo capítulo con la parte que fundamenta la solución de los problemas gráficos, definiéndose los teoremas de composición y descomposición de fuerzas.

El capítulo tres contiene la determinación gráfica de diferentes figuras de los centros de gravedad y momentos de inercia.

Los capítulos cuarto, quinto y sexto se dedican a la solución de vigas, armaduras y arcos respectivamente, aplicando se los principios definidos con anterioridad presentando la solución de ejemplos prácticos.

El último capítulo hace una evaluación del tema de tesis y comentarios respecto al mismo.

## 1. GENERALIDADES

Para poder resolver los problemas de la Estática Aplicada es necesario definir algunos conceptos importantes tales como: concepto de estática, acción de una fuerza, representación gráfica de una fuerza, reacción de una fuerza, elementos de aplicación, uniones, diagramas de cuerpo libre, condiciones de isostaticidad, estabilidad y grado de indeterminación de una estructura, conceptos definidos en el presente capítulo.

### 1.1. Concepto de estática

Estática. En los textos es definida como una parte de la mecánica que trata el equilibrio de los cuerpos sometidos a la acción de fuerzas que lo solicitan; si actúan fuerzas en varios puntos de un cuerpo sin que causen movimiento alguno se establece que el cuerpo está en equilibrio. Por otra parte, "la estática gráfica se le denomina al conjunto de métodos utilizados para la composición y descomposición de fuerzas, así como la investigación y enunciados de las condiciones que deben cumplir las fuerzas, para que estén en equilibrio"(1).

### 1.2. Acción de una fuerza

La fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro, entendiéndose por fuerza: toda causa capaz de producir o modificar el movimiento de un cuerpo. En la naturaleza encontramos una extensa serie de fuerzas, las cuales se ejercen mediante contacto directo o a distancia. Las fuerzas se clasifican con diferentes criterios: según su origen, su superficie de aplicación, la variación en su acción, etc.

Según su origen tenemos entre otras las siguientes fuerzas: la gravedad, la sísmica, la magnética y la calorífica. De estas fuerzas "la de gravedad es la más importante por que provoca un movimiento que nosotros conocemos como peso. En estado de equilibrio, un cuerpo permanece estático. Esto es el movimiento creado por la gravedad es contrarrestado por una reacción o una serie de ellas"(2).

- 1) Paul Killman " Escuela del técnico mecánico" Elementos de grafoestática pág. 435
- 2) H Weerner Rosenthal " La Estructura " pág. 21

### 1.3. Representación gráfica de una fuerza

Todas las fuerzas se caracterizan por su magnitud, dirección, sentido y punto de aplicación, dichas características pueden representarse en un vector.

**Magnitud.** Es la medida de la eficiencia, se expresa en unidades de peso (Kg., Lbs. etc.).

**Dirección.** Es la línea de acción recta, por donde la fuerza tiende a mover el cuerpo.

**Sentido.** Indica hacia donde se mueve la fuerza, si es hacia el cuerpo o en contra del mismo, su sentido se indica como mo positivo o negativo.

**Punto de aplicación.** Es el lugar donde actúan todas las fuerzas de un cuerpo cualquiera, representado gráficamente por un segmento.

Para representar una fuerza, es necesario que a partir del punto de aplicación de la misma tracemos una recta en la dirección en que debe actuar. Para representar la magnitud, tomamos sobre ella tantos segmentos iguales a la unidad como unidades de peso contiene la fuerza y en el extremo obtenido trazamos una flecha, cuyo sentido representa la acción de la fuerza. El número de unidades de peso se representa por las unidades de longitud y es llamada escala de fuerzas.

La representación gráfica de una fuerza se hace en la fig. 1. En un punto A cualquiera, donde actúa la fuerza F, bajo un ángulo  $\infty$  respecto a la horizontal CD, elegimos una escala de fuerzas, la dirección es dada por el  $\infty$ , el sentido por la flecha y la magnitud es el número de segmentos iguales contenidos en la recta.

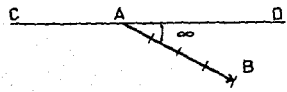


fig. 1

#### 1.4. Reacción de una fuerza

"En estática no puede existir nunca una fuerza sola o aislada; pues, en virtud de la ley del equilibrio, es preciso que haya otra igual y contraria que la contrarreste" (3). Así como fue necesario conocer la fuerza por su acción o efecto; la reacción la encontramos en función de la fuerza, pues la reacción es igual a la fuerza pero de sentido contrario, es aquí donde se presenta la estabilidad de los cuerpos. Por ejemplo si tenemos un cuerpo de peso  $P$  apoyado en una viga fig.2, para que  $P$  esté en equilibrio es necesario una fuerza  $R$  de igual magnitud a  $P$  pero de sentido contrario; que a su vez se descompone en las reacciones parciales  $R_1$  y  $R_2$  en los apoyos.

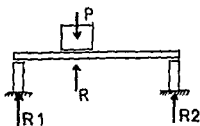


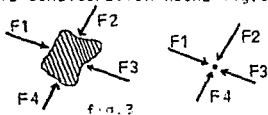
fig.2

#### 1.5. Elementos de aplicación

En los problemas que resuelve la Estática Aplicada, las fuerzas actúan sobre elementos que transmiten sus efectos a otros cuerpos, siendo los elementos también cuerpos físicos que para facilitar el análisis se simplifican presentándolos de manera idealizada, logrando así una representación más simple del problema real. Los elementos de aplicación más importantes son: El punto material o partícula, el cuerpo rígido y la barra.

##### a) Punto material

Se llama punto material a un cuerpo de dimensiones tan pequeñas que su masa y su peso pueden considerarse concentrados en un punto. Esto es, al realizar el análisis mecánico de un cuerpo puede considerarse que las fuerzas actuantes en él están concentradas en un punto y el resultado de este análisis no se altera por la consideración hecha fig.3.



(3) Enrique Rodón " Lo que no encontré en los tratados de -- construcción" pág.6

### b) Cuerpo rígido

Se llama cuerpo rígido a aquel que ante cualquier solici-  
tación exterior de fuerzas no modifica la distancia relativa  
que existe entre dos puntos A, B cualesquiera dentro de él  
fig.4. Esto es, el cuerpo no sufre ninguna deformación por la  
aplicación de fuerzas.

Un cuerpo en la realidad, al aplicársele fuerzas exterior  
res siempre resulta deformado en diferentes escalas, las de-  
formaciones están en función de la rigidez del cuerpo y la  
magnitud de las fuerzas aplicadas a éste, pero está simplifi-  
cación de considerar como cuerpo rígido indeformable, sólo se  
acepta si los resultados del análisis son de rango menor que  
los máximos tolerados.

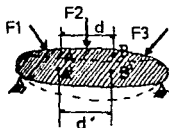


fig.4

### c) La barra

La barra es un cuerpo de tres dimensiones pero que dos -  
de ellas son mucho menores que la tercera fig.5; la barra se  
representa por su eje longitudinal que representa el eje de  
simetría del cuerpo, o es el lugar geométrico de los centros  
de gravedad de cada una de las secciones transversales. Existen  
barras de eje curvo y recto básicamente.

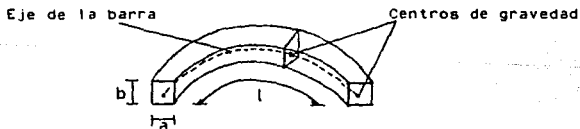
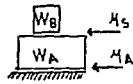


fig.5

Un conjunto de barras forma un sistema cuando para el  
análisis de uno de sus elementos es necesario analizar todo  
el sistema. La fig.6 presenta dos esquemas uno de ellos forma  
un sistema y el otro no.



(a)  
Forma sistema



(b)  
No forma sistema

fig.6

## 1.6. Uniones

Las uniones son los elementos que ligan una barra con un cuerpo rígido, con el sistema tierra o bien con otra barra, la función de las uniones es restringir algunos o todos los desplazamientos entre los elementos que unen, de aquí resulta necesario definir el grado de libertad; siendo el número de posibilidades de desplazamientos independientes que tiene el cuerpo, éstos pueden ser lineales ( $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ ), o bien angulares ( $\phi_x$ ,  $\phi_y$ ,  $\phi_z$ ). De lo anterior se deduce que un sistema en el espacio, sin ninguna unión, tiene 6 grados de libertad. En la tabla 1 se muestran los tipos de uniones en el plano más comunes, con sus uniones y desplazamientos respectivos.

Tabla 1. Tipo de uniones en el plano

Tipo de unión	apoyo directo	Apoyo libre	Articulación	empotramiento	nudo elástico
Esquema					
Desplazamiento	$\delta x$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$
	$\delta y$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$
	$\phi$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$
Reacción	$R_x$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
	$R_y$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
	$M$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$

## 1.7. Diagrama de cuerpo libre

Al quitar la unión que liga un elemento de aplicación al sistema tierra (fig.7a), es necesario equilibrar el sistema aplicando las reacciones necesarias para mantener el equilibrio de la viga sometida a una carga uniformemente distribuida y una fuerza oblicua  $F$ . Al sustituir todas las uniones, para mantener el equilibrio es necesario aplicar las reacciones que muestra el esquema de la fig.7b.

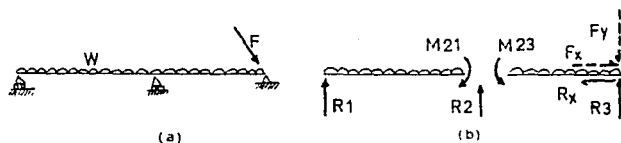


fig.7

### 1.8. Condiciones de isostaticidad, estabilidad y grado de indeterminación de una estructura.

Estas características de las estructuras las podemos conocer por el número y la disposición de sus apoyos, elementos y uniones.

Se dice que un sistema estructural es isostático si éste puede resolverse a partir de las ecuaciones del equilibrio que establece la teoría de la estática, cuando no es posible resolver el problema por esta teoría se hace necesario aplicar la teoría elástica.

Una estructura es inestable si tiene menos reacciones de las requeridas para mantener el equilibrio. Se dice que si una estructura es estable para condiciones particulares de carga, pero inestable para condiciones generales, la estructura será inestable fig.8a.

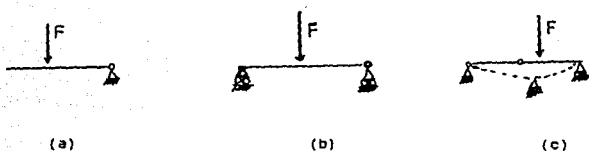


fig.8

Los sistemas de las figuras 8a y 8b son inestables por que sólo tienen dos reacciones y para que haya equilibrio estable, como mínimo se requieren tres reacciones; además en el caso de la fig.8a no se cumple el equilibrio horizontal. Cuando se coloca una articulación a un sistema que es estable, en la articulación el momento es nulo, por lo que el sistema se hace inestable y es necesario colocar por lo menos un elemento adicional de reacción fig.8c. Para que el sistema sea estable, concluimos que una estructura estáticamente determinada es aquella cuyas reacciones se pueden calcular a partir de las ecuaciones del equilibrio. Es decir cuando el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones el sistema es isostático o estáticamente determinado. La fig. 9 tiene tres reacciones y tres ecuaciones por lo cual cumple las condiciones de la isostaticidad.

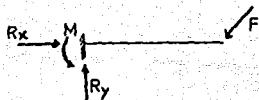


fig.9

Si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones, se dice que el sistema es estáticamente indeterminado teniendo un número infinito de soluciones (fig.10).

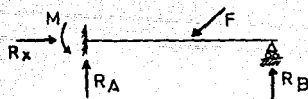


fig. 10

Criterio para determinar el grado de indeterminación o estabilidad de una viga. (Ver fig.11).

- |                 |                          |
|-----------------|--------------------------|
| a) Si $r < 3+c$ | la viga es inestable     |
| b) Si $r = 3+c$ | la viga es isostática    |
| c) Si $r > 3+c$ | la viga es hiperestática |

Donde  $r$  = número de reacciones o incógnitas  
 $c$  = número de condiciones adicionales o articulaciones

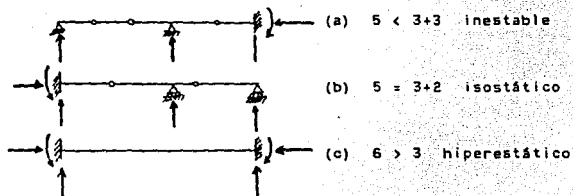


fig.11



En una armadura fig.12, el número total de incógnitas es el número de reacciones más el número de barras, cada nudo tiene dos ecuaciones de equilibrio.

Criterio para determinar la estabilidad y el grado de in determinación de una armadura.

- a) Si  $b+r < 2j$       inestable  
 b) Si  $b+r = 2j$       isostático  
 c) Si  $b+r > 2j$       hiperestático

Donde  $b$  = número de barras  
 $r$  = número de reacciones  
 $j$  = número de articulaciones

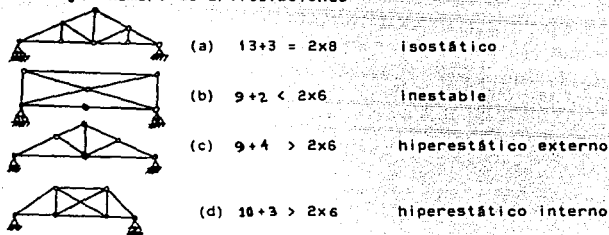


fig.12

Cuando la hiperestaticidad depende de una reacción o apoyo es exterior, como en el caso de la fig.12c. Cuando la hiperestaticidad depende de una barra, la hiperestaticidad es interior (fig.12d).

## 2. ANALISIS GRAFICO DE COMPOSICION Y DESCOMPOSICION DE FUERZAS EN EL PLANO.

### 2.1. Composición de fuerzas.

#### 2.1.1. Resultante de fuerzas concurrentes y concepto de polígono de fuerzas.

En el punto A de un cuerpo cualquiera (fig.13a), actúan las fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$ , (debe entenderse fuerza  $F_1$  y  $F_2$ , en lo sucesivo se utilizará esta notación), representadas gráficamente por los segmentos AD y AB respectivamente. Si deseamos encontrar la fuerza resultante R de las dos fuerzas actuantes, la podemos determinar trazando el polígono ABCD que resulta al trazar las líneas BC igual y paralelas a AD e DC igual y paralela a AB. La resultante R se obtiene al unir los puntos A con C, cuya diagonal representa en magnitud, dirección y sentido la fuerza resultante R. El polígono ABCD recibe el nombre de paralelograma de fuerzas.

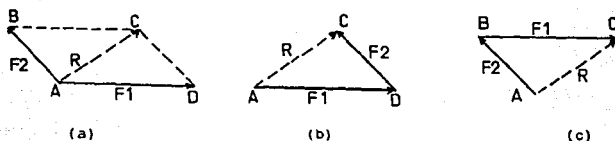


fig.13

Por lo regular no se traza el paralelograma de fuerzas pues se trabaja más y no es necesario, podemos encontrar la fuerza resultante trazando el triángulo de fuerzas ADC (fig. 13b), o el triángulo ABC (fig.13c), ahorrando trabajo de dibujo. Los triángulos ADC y ABC se construyen trasladando paralelamente una fuerza hasta que el punto de aplicación coincida con el extremo de la otra fuerza que permanece fija en su punto de aplicación inicial A, al unir el punto inicial A, con el extremo C, encontramos la fuerza resultante R que tiene sentido contrario a la de sus dos componentes en el contorno del triángulo.

Al cambiar el sentido de la resultante en la fig.13, las flechas que indican los sentidos de  $F_1$ ,  $F_2$  y R tendrían en su contorno el mismo sentido, obteniendo una fuerza resultante de acción nula, entonces se dice que el sistema está en equilibrio; esta propiedad se enuncia como:

" Si tres fuerzas concurrentes con diferentes líneas de acción se equilibran, se puede componer en un triángulo de fuerzas con un sentido constante en su contorno" (4).

Quando varias fuerzas concurrentes  $F_{1234}$  actúan en el punto A, podemos encontrar la resultante construyendo los paralelogramos sucesivos de fuerzas. Para la composición de cada una de las resultantes parciales  $r_{123}$  (fig.14a), construimos los triángulos sucesivos de fuerzas, obteniendo el mismo resultando (fig.14.b); construyendo el polígono de fuerzas, el trazo se simplifica aun más que el anterior, para ello acumulamos cada una de las fuerzas en el extremo de la que le precede, sin necesidad de trazar las resultantes parciales  $r_{123}$ , basta con trazar la resultante total R, ( véase fig.14c), en la cual se observa además que el orden como se coloquen las fuerzas no hace que cambie el resultado de R, en todo caso el lado AE, que cierra el polígono, representa la fuerza resultante en magnitud dirección y sentido. Al igual que en el triángulo de fuerzas, aquí la fuerza resultante también tiene sentido contrario a las componentes que forman el contorno del polígono de fuerzas, si cambiamos el sentido de la resultante obtenemos un polígono cerrado, teniendo entonces una fuerza resultante de acción nula, estableciendo el equilibrio en el sistema de fuerzas, concluyendo que:

"El orden como se coloquen las fuerzas es indiferente, siempre que se consideren todas las componentes, partiendo del origen, siempre se llega a un punto extremo E, obteniendo la misma línea de cierre" (5).

"Para que el sistema de fuerzas se encuentre en equilibrio es necesario que el extremo de la última fuerza coincida con el extremo de la primera, todas con el mismo sentido, es decir  $R = 0$ " (6)

### 2.1.2. Composición de fuerzas que actúan en la misma línea de acción.

Quando nos encontramos con fuerzas que actúan sobre la misma línea de acción y en el mismo sentido (fig.15a), el poli-

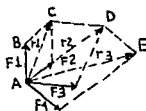
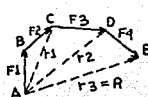
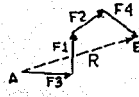


fig.14 (a)



(b)



(c)

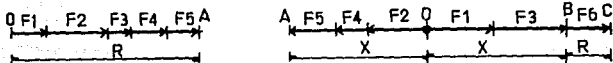
(4) Otto Henkel "Estática Aplicada"

(5) Paul Killman "Esc. del Técnico Mecánico"

(6) Jaime Torres H. "Mecánica Aplicada"

gono de fuerzas es una recta igual a la suma de todas las fuerzas que componen el sistema, lo cual representa la fuerza resultante  $R$  en todas sus características, magnitud, dirección y sentido: donde  $R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = OA$ .

Si las fuerzas actúan en la misma línea de acción, pero de diferente sentido, la resultante la encontraremos haciendo la suma algebraica correspondiente al sistema de fuerzas, sumamos las fuerzas del mismo sentido y efectuamos en seguida la diferencia, la solución gráfica es la mostrada en la fig. 15b, donde  $R = (F_1 + F_3 + F_6) - (F_2 + F_4 + F_5) = BC$ , si no existe diferencia el sistema está en equilibrio.



(a)

fig. 15

(b)

### 2.1.3. Resultante de fuerzas no concurrentes utilizando el punto de encuentro.

Quando se presenta el caso de componer varias fuerzas de un sistema  $F_{1234}$ , no concurrentes (fig.16), aplicadas en los puntos ABC; la fuerza resultante  $R$ , se puede encontrar en magnitud, dirección y sentido, valiéndonos del siguiente principio: "El punto de aplicación de una fuerza lo podemos trasladar a otro diferente en su línea de acción, pero el nuevo punto de aplicación debe estar unido al cuerpo invariabilmente".

La composición de las fuerzas se realiza en la fig.16 de la siguiente manera: para componer las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  no tenemos ningún problema, pues tienen el mismo punto de aplicación A, obtenemos la resultante parcial  $r_1$  utilizando el paralelogramo de fuerzas. Logrado esto, componemos las fuerzas  $r_1$  y  $F_3$ , prolongándolas siguiendo sus correspondientes líneas de acción hasta que se crucen en un punto N, al cual trasladamos la magnitud de cada una de estas fuerzas, encontramos  $r_2$  con el auxilio del paralelogramo de fuerzas. Siguiendo el mismo procedimiento prolongamos las líneas de acción de  $r_2$  y  $F_4$  que se cortan en el punto M, al cual llevamos las magnitudes de las fuerzas y encontramos la fuerza  $r_3 = R$ . Fuerza resultante buscada, el trazo se agiliza utilizando el triángulo de fuerzas, no se hizo así para hacerlo más entendible.

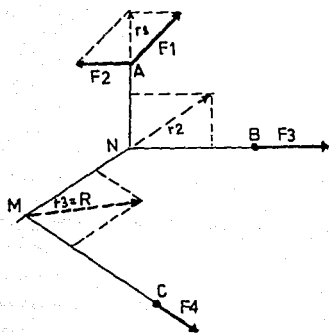


fig. 16

#### 2.1.4. Resultante de fuerzas no concurrentes, aplicando los polígonos vectorial y funicular.

##### a). Principio del polígono funicular

Quando deseamos encontrar la resultante de un sistema de fuerzas  $F_{123}$ , coplanares y no concurrentes (fig.17), la composición de este tipo de fuerzas se puede realizar utilizando la construcción gráfica del polígono funicular, que se basa en el siguiente análisis.

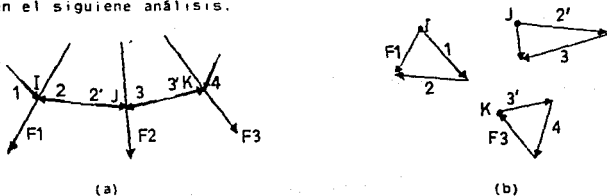


fig. 17

En un punto 1 cualquiera sobre la línea de acción  $F_1$ , podemos descomponer dicha fuerza en las componentes 1 y 2, que son coplanares y concurrentes en el punto 1; en el punto J la

calizado sobre la línea de acción de  $F_2$ , descomponemos esta fuerza en las componentes  $2'$  y  $3$ , de tal forma que  $2'$  resulte colineal, igual y contraria a la componente  $2$ ; finalmente en  $K$ , sobre la línea de acción  $F_3$ , se descompone esta fuerza en las componentes  $3'$  y  $4$ , donde  $3'$  es colineal, igual y contraria a  $3$ . Con esta construcción del sistema de fuerzas original se reduce a las componentes  $1$  y  $4$  que determinan la fuerza resultante buscada, pues las componentes  $2$ ,  $2'$  y  $3$ ,  $3'$ , anulan su acción por ser iguales en magnitud, de sentidos opuestos y actúan sobre la misma línea de acción.

#### b) Principio del polígono vectorial

De un sistema de fuerzas se obtiene el polígono de fuerzas mostrando en la fig.18, para formar el polígono vectorial o de Varignon, descomponemos cada una de las fuerzas  $F_{123}$ , en sus correspondientes componentes:  $F_1$  en  $1$  y  $2$ , las cuales se intersectan en un punto  $O$  llamado polo, que forma el triángulo  $ABO$ ; en seguida  $F_2$  en  $2'$  y  $3$ , de tal forma que  $2'$  sea igual, colineal y opuesta a su homóloga  $2$ , obteniendo el triángulo  $BCO$  y por último  $F_3$  en  $3'$  y  $4$ , donde  $3'$  sea igual, colineal y contraria a  $3$ , formando el triángulo  $COD$ . Con la construcción realizada, al igual que en el polígono funicular las componentes homólogas  $2$ ,  $2'$  y  $3$ ,  $3'$  resultan de acción nula, siendo las componentes  $1$  y  $4$  las que determinan la fuerza resultante  $R$ .

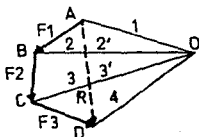


fig.18

#### c) Composición de fuerzas no concurrentes

Para obtener la resultante de este tipo de fuerzas, podemos determinarla sin hacer uso de los puntos de encuentro, tal como se realizó en (2.1.3.), para ello utilizamos los principios de los polígonos vectorial y funicular.

De un sistema de fuerzas  $F_{1234}$  (fig 19a) trazamos el polígono de fuerzas de la misma manera como se realizó para un sistema de fuerzas concurrentes; aunque las fuerzas no son concurrentes, las fuerzas se puede resolver así, gracias al principio que establece que: "Por la traslación de una fuerza no cambia la magnitud ni la dirección". En la fig. 19b construimos el polígono de fuerzas acumulando cada una de ellas en el extremo de la fuerza que le precede hasta llevarlas todas paralelas a las fuerzas dadas, y uniendo el punto inicial con el extremo final, obtenemos la fuerza resultante  $R$ , en mag

nitudo dirección y sentido. En un punto cualquiera fuera del polígono de fuerzas marcamos un punto O, llamado polo unimos este punto con cada uno de los puntos ABCDE, obteniendo las componentes de cada una de las fuerzas según el principio del polígono vectorial; a los segmentos OA, OB, OC, OD y OE los llamamos 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente, a éstos se les denominan radios vectores y en conjunto haz de radios; realizadó esto, con los radios vectores formamos el polígono funicular transportando cada uno de los radios paralelamente hasta que corten las fuerzas en la siguiente forma: el vector 1 corta F1 en I, a partir de I trazamos 2 que corta F2 en J, desde J, trazamos 3 que corta F3 en K, a partir de K trazamos 4 que corta F4 en L y desde L trazamos 5 que intersecta el vector 1 en un punto M, donde pasará la fuerza resultante R determinando su línea de acción.

Como se enunciará en los principios de los polígonos funicular y vectorial la descomposición de cada una de las fuerzas F1, F2, F3 y F4 en las componentes a, -a, -b, c, -c, d, -d, y e; de las que tenemos que: a, -a; c, -c; y d, -d, tienen la misma línea de acción, son iguales y de sentidos contrarios, por lo que las componentes -b y e, en este caso particular son las que determinan el valor de la resultante.

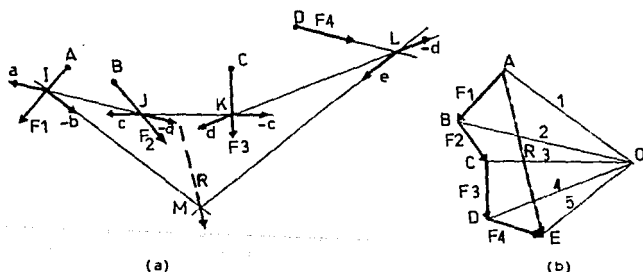


fig.19

Si pretendemos equilibrar el sistema de fuerzas F1234, (fig.19a), es necesario aplicar una fuerza F5, de magnitud igual a R, pero de sentido contrario, con lo cual obtenemos un polígono cerrado, donde F5 actúa de E a A equilibrando el sistema de fuerzas dado.

#### 2.1.5. Traslación del polo y propiedades de los polígonos vectorial y funicular

"El punto donde se coloque el polo, respecto al polígono

de fuerzas es arbitrario, es indiferente cualquiera que éste sea, de tal manera que la línea de acción para la resultante sea la misma".

En un sistema de fuerzas  $F_{1234}$  (fig.20) que actúan en puntos diferentes, trazamos el polígono de fuerzas; utilizando diferentes posiciones del polo  $O$  y  $O'$  trazamos los radios vectores  $12345$  y  $1'2'3'4'5'$  correspondientes a cada posición de los polos. Los trasladamos al sistema de fuerzas formando dos polígonos funiculares, los vectores  $1, 5$  y  $1', 5'$  determinan la misma línea de acción de la resultante, con lo cual queda demostrado el enunciado anterior.

La distancia polar  $L$ , es la distancia normal que hay desde la fuerza resultante al polo  $O$ , o a una fuerza resultante parcial.

La línea recta que une los polos  $O$  y  $O'$  de los polígonos vectoriales se llama línea de polos.

La línea de homología está determinada por los lados homólogos del polígono funicular que se intersecta en los puntos  $P_{12345}$ . Los lados homólogos corresponden a la misma componente, de una fuerza determinada por los polos diferentes ( $1-1', 2-2', 3-3', 4-4'$ ), el eje de homología es paralelo a la línea de polos.

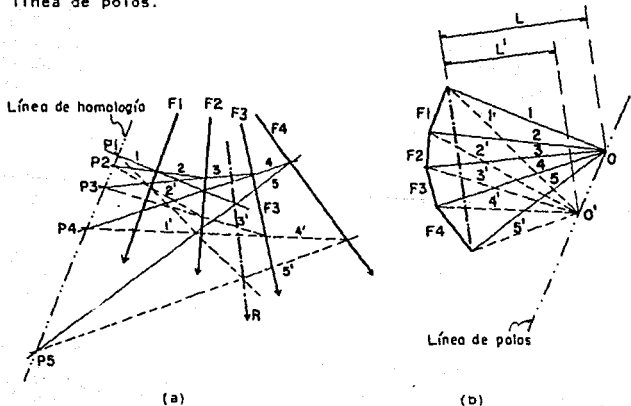


fig.20



### 2.1.6. Resultante de varias fuerzas paralelas con diferentes puntos de aplicación.

#### a) Fuerzas que actúan en un sólo sentido

La composición de un sistema de fuerzas paralelas se realiza de la misma forma como se hizo para las fuerzas no concurrentes; pues estas fuerzas son del mismo género y por lo tanto se utiliza el mismo principio de los polígonos vectorial y funicular.

En el sistema de fuerza  $F_{12345}$  que actúan según muestra fig. 21a, trazamos el polígono vectorial que en este caso es una recta de magnitud igual a la suma de cada una de las fuerzas dadas (fig. 21b), marcando un polo  $O$ , determinamos el haz de radios  $123456$ , que trasladamos paralelamente hasta el sistema de fuerzas, de la forma ya conocida, encontrando la línea de acción de la fuerza resultante  $R$ , con lo cual el problema queda resuelto.

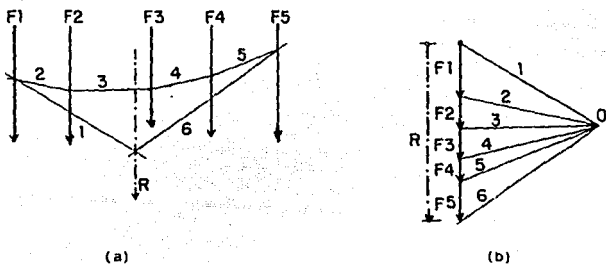
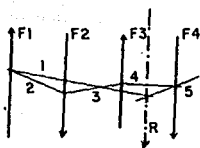


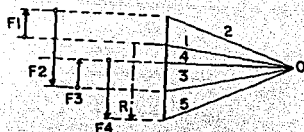
fig.21

#### b) Fuerzas que actúan en diferentes sentidos

En caso de que tengamos fuerzas paralelas pero de sentido contrario (fig.22a), procedemos de la siguiente forma para su composición: trazamos el polígono vectorial (fig. 22b) ligando cada una de las fuerzas dadas sobre una línea paralela al polígono de fuerzas; separando cada una de ellas para encontrar con mayor claridad la fuerza resultante  $R$ , unimos cada punto de estas fuerzas a un polo  $O$  cualquiera, cuyas rectas determinan el haz de radios, que al trasladarlos paralelamente al sistema de fuerzas obtenemos la línea de acción donde actúa  $R$ .



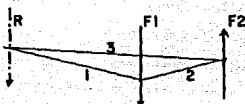
(a)



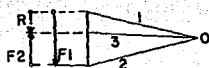
(b)

fig.22

Quando sólo son dos las fuerzas de diferentes sentidos y desiguales entre sí, la resultante es exterior en su aplicación a las componentes, como se muestran en la fig.23.



(a)



(b)

fig.23

## 2.2. Descomposición de fuerzas

### 2.2.1. Determinación de dos componentes de una fuerza $F$ , conocidas sus líneas de acción.

Una fuerza  $F$  podemos descomponerla en dos componentes ortogonales  $F_1$  y  $F_2$  concurrentes y coplanares, sólo si cumple entre otras condiciones que sean sólo dos las componentes y que se conozca su línea de acción sobre la cual actúan las componentes. Así, si la fuerza  $F$  actúa en un punto  $A$  donde concurren  $F_1$  y  $F_2$  (fig. 24), las componentes actúan según las líneas de acción  $l_1$  y  $l_2$ . Para determinar la magnitud y dirección basta con construir el paralelogramo de fuerzas  $ABCD$ , o el triángulo  $ADC$ .

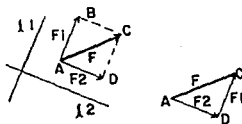


fig.24

De la solución gráfica obtenida, tenemos que este problema es estáticamente determinado y presenta solución única.

### 2.2.2. Obtención de una componente conocida una de ellas y su resultante

Quando conocemos la línea de acción y la magnitud de una componente  $F_1$ , podemos determinar la otra componente  $F_2$  en magnitud dirección y sentido construyendo el triángulo de fuerzas ABC, desde luego  $F$  es conocida. El punto de aplicación de  $F_2$  se localiza en el punto de encuentro de las fuerzas  $F_1$ ,  $F$  y la magnitud queda determinada por el segmento AC (fig. 25).

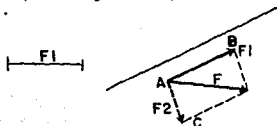


fig.25

### 2..2.3. Conocidas las magnitudes de dos componentes determinar las direcciones y sentidos

El problema de determinar las direcciones y sentidos de dos componentes conocidas sus magnitudes, es estáticamente determinado sólo si cumple con la condición  $F_1 + F_2 > F$ . Si tenemos  $F_1$  y  $F_2$  de magnitudes AB y BC respectivamente y una resultante  $F$  (fig.26). Para resolver el problema trazamos con un compás arcos de círculo cuyos radios sean AB y BC, apoyamos en el extremo y origen de  $F$ . Las componentes buscadas  $F_1$  y  $F_2$  quedan determinadas por la intersección de estos arcos como se puede observar en la figura, donde el problema tiene como solución  $F_1$  y  $F_2$  ó  $F_1'$  y  $F_2'$ , con lo cual el problema tiene dos soluciones.

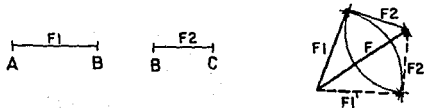


fig. 26

El problema presenta solución única sólo si la suma algebraica de las componentes es igual a la fuerza  $F$  o sea  $F = F_1 + F_2$  o bien  $F = F_2 - F_1$  (fig.27).

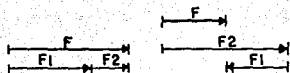


fig.27

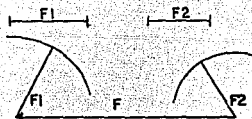


fig.28

Si la suma algebraica de las fuerzas componentes es menor que la fuerza resultante  $F$ , entonces los arcos no se cortan en ningún punto por lo que tenemos un problema estáticamente indeterminado (fig.28).

#### 2.2.4. Dada la magnitud de una componente y la dirección para la otra resolver el problema

Si conocemos la fuerza  $F$  en magnitud, dirección y sentido de la línea de acción  $ll$  y la magnitud  $BC$  de otra componente  $F_2$  se pueden encontrar las partes faltantes que constituyen los vectores de cada componente; trazado  $ll$  paralelo a ella misma que intersecta  $F$  en  $A$ , con un compás hacemos centro en el extremo de  $F$ , cuyo arco tiene como radio la magnitud  $F_2$  y trazamos el arco que intersecta la línea de acción conocida  $ll$  en los puntos  $B$  y  $B'$ . Del trazo resulta un problema estáticamente determinado, presentando dos soluciones  $F_1$  y  $F_2$  ó  $F_1'$  y  $F_2'$  (fig.29).

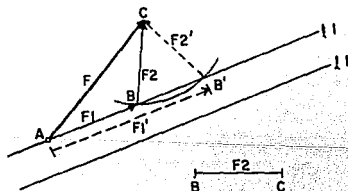


Fig. 29

El problema tiene solución única, sólo si la línea de acción de una de las componentes resulta exactamente tangente al arco de círculo que representa la magnitud de las otras componentes (fig.30), o se presenta el triángulo dentro de la circunferencia como indica la fig. 31.

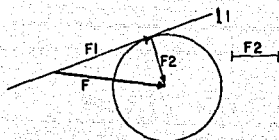


fig. 30

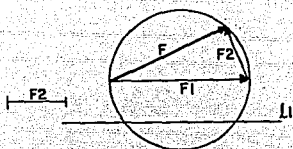


fig. 31

El problema es indeterminado si el arco de círculo es igual a una de las componentes y no corta en ninguno de los puntos la línea de acción conocida (fig. 32).

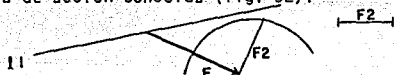


fig. 32

### 2.2.5. Como hacer pasar el polígono funicular por dos puntos dados

Cuando deseamos que el polígono funicular pase por dos puntos I, J en un sistema de fuerzas, el problema que se presenta es básicamente el de determinar las componentes de las fuerza resultante del sistema de fuerzas dado, las cuales deben ser concurrentes y coplanares con la resultante, para su solución se emplean los principios conocidos de los polígonos vectorial y funicular.

Para el sistema de fuerzas  $F_{123}$  (fig. 33), deseamos que los lados 1 y 4 que determinan la fuerza resultante pasen por los puntos I y J. Primeramente determinamos la línea de acción de la resultante, construyendo el polígono vectorial con un polo denominado O y su correspondiente polígono funicular; realizado esto, en cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza resultante escogemos un punto A cualquiera y lo unimos con los puntos I y J; obteniendo los segmentos AI y AJ, los cuales transportamos paralelamente al polígono vectorial, en la intersección de estos segmentos encontramos el punto polar O', con lo cual hemos encontrado los lados 1' y 4' que determinan la misma línea de acción de la resultante y pasan por los puntos I y J deseados; por consiguiente, el problema queda resuelto. Este tipo de problemas tiene un número infinito de soluciones y son indeterminados.

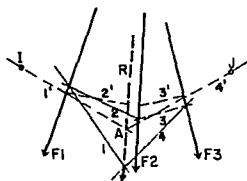
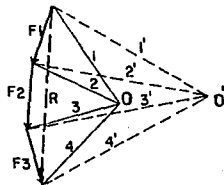


fig. 33



### 2.2.6. Descomposición de una fuerza en tres o más componentes de línea de acción conocida.

Una fuerza  $F$  no se puede descomponer en tres componentes concurrentes, conocidas sus líneas de acción. Sin embargo, cuando las fuerzas son no concurrentes, de líneas de acción conocidas, si se puede descomponer en tres componentes. Sea la fuerza  $F$  y las direcciones  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  dadas (fig. 34). Para descomponer esta fuerza prolongamos la fuerza  $F$  hasta que intersecte la línea de acción  $l_1$  en el punto  $I$ , en seguida buscamos la intersección de las dos líneas de acción restantes en el punto  $J$ . Unimos los puntos  $I$  y  $J$  con el segmento  $IJ$  por donde pasará una de las componentes  $F_1'$ , siendo la otra componente  $F_1$  que actúa en la dirección  $l_1$ , determinadas por la construcción del polígono de fuerzas, finalmente en  $J$  descomponemos  $F_1'$  en las componentes  $F_2$  y  $F_3$  que actúan en sus respectivas líneas de acción  $l_2$  y  $l_3$ , componentes determinadas con el polígono de fuerzas, por lo que el problema queda resuelto siendo estáticamente determinado y de solución única. El problema también se resuelve utilizando el polígono vectorial (fig. 35).

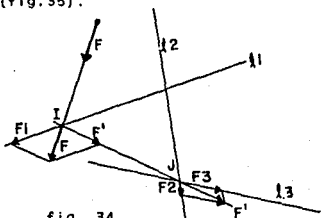


fig. 34

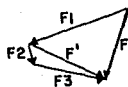


fig. 35

### 2.2.7. Descomposición de una fuerza dada en dos componentes paralelas.

Para descomponer una fuerza resultante, en dos componentes paralelas  $R_1$  y  $R_2$  (fig. 36a), de líneas de acción conocidas  $l_1$  y  $l_2$  trazamos un segmento de magnitud igual a  $R$ , el cual unimos por los extremos a un polo origen  $O$  (fig. 36b) determinando los radios vectores  $1$  y  $2$ , éstos los llevamos paralelamente a la fig. 36a, a partir de un punto cualquiera  $I$  en la línea de acción de  $R$ , trazamos los vectores  $1$  y  $2$  que cortan las líneas de acción  $l_1$  y  $l_2$  en los puntos  $J$  y  $K$  respectivamente, cerramos el polígono funicular por medio del segmento  $JK$  al que llamamos  $3$ , lo trasladamos paralelamente hasta el polígono vectorial, el trazo lo realizamos desde  $O$ , cortando la fuerza  $R$  en un punto  $B$ . Por lo tanto, se han encontrado las componentes buscadas, siendo  $R_1 = AB$  y  $R_2 = BC$ .

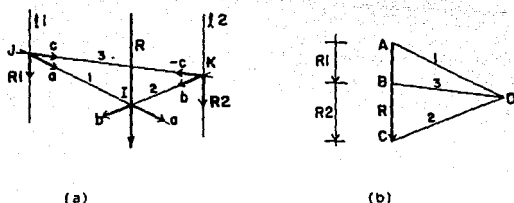
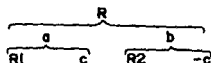


fig. 36

Como se puede observar en la figura el problema se resuelve haciendo una serie de descomposiciones de la fuerza  $R$ . Primero se descompone  $R$  en las componentes  $a$  y  $b$ , las cuales a su vez se vuelven a descomponer en los componentes  $R_1$ ,  $c$  y  $R_2$ ,  $-c$  respectivamente. De estas componentes  $c$  y  $-c$  son iguales y contrarias anulando sus acciones, con lo cual quedan  $R_1$  y  $R_2$  siendo las componentes buscadas.

"En el esquema siguiente se muestra el procedimiento de la descomposición" (7).



Esquema. 1

Cuando las líneas de acción se encuentran ambas a un lado de la fuerza  $R$  que se desea descomponer, la solución se obtiene de la misma forma anterior, véamos el caso de la fig. 37. Teniendo la fuerza  $R$  y las líneas de acción  $l_1$  y  $l_2$  sobre las que deben actuar las componentes  $R_1$  y  $R_2$ . Construimos el polígono vectorial incompleto: con  $R$ , el polo  $O$  y los radios  $1, 2$ ; desde un punto  $I$  trazamos los vectores  $1$  y  $2$  que cortan las líneas de acción  $l_1$  y  $l_2$  en los puntos  $J$  y  $K$  respectivamente, cerramos el polígono vectorial con el segmento  $-JK = 3$ , transportado al polígono vectorial que corta en  $C$ , se determino  $R_1 = AC$  y  $R_2 = CB$ . La descomposición de  $R$  sigue el mismo esquema enunciado anteriormente.

(7) Paul Killman "Escuela del Técnico Mecánico (Elemento de Grafoestática)" pág. 453

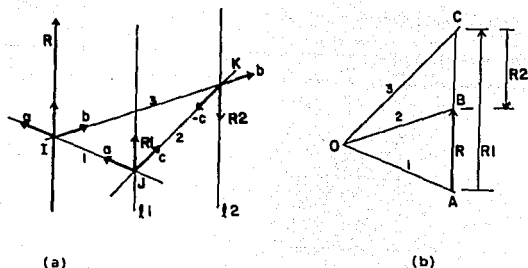


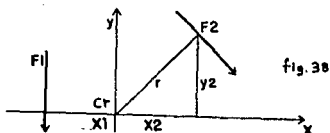
fig. 37

### 2.2.8. Momento estático de una fuerza

Sean las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  aplicadas a una distancia  $x_1$  y  $r$  respecto a un punto denominado centro de giro  $Cr$ , ubicado en un sistema de ejes coordenados (fig 38). Por definición sabemos que el momento estático de una fuerza es el producto de dicha fuerza por la distancia normal al centro de giro ( $M_e = F \cdot x$ ). Obtenemos que los momentos estáticos para las fuerzas dadas son:

$$M_1 = - F_1 \cdot x_1$$

$$M_2 = F_2 \cdot r$$



En el caso de los momentos estáticos el signo no está determinado por la posición respecto a los ejes coordenados, sino por el sentido del giro y se sigue por regla general la convención: Si el giro que provoca la fuerza es siguiendo la trayectoria de las manecillas del reloj, el momento será positivo (+) y si es contrario a éstas, entonces el momento es negativo (-). Las distancias  $x_1$  y  $r$  se llaman brazos de palanca de las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  con respecto al centro de rotación.

El momento estático de un sistema de fuerzas está definido por el teorema general que enuncia:

"La suma algebraica de los momentos estáticos, de todas las fuerzas de un sistema situadas en un plano respecto a un cualquiera de los puntos de éste, es igual al momento estático de su resultante respecto a ese mismo centro" (8).



$$M_e = F \cdot x$$

donde F es la fuerza resultante de un sistema de fuerzas,  
 $F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$

Por el enunciado del teorema general podemos encontrar el momento estático que produce un sistema de fuerzas, ahorrando el trabajo de calcular el momento para cada fuerza y después realizar la suma algebraica.

Vamos a demostrar que se puede representar el momento estático de una fuerza, respecto a un punto cr, haciendo uso del polígono funicular.

Un sistema de fuerzas  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$  no concurrentes y coplanares, que actúan respecto al punto cr (fig. 39a). Sea R = AE la fuerza resultante para el sistema de fuerzas dado, que se determinó con el polígono vectorial, construimos el polígono funicular localizando la línea de acción de R, en el punto S intersección de los vectores 1 y 5, llamamos L a la distancia normal desde R al polo O, y r la distancia perpendicular desde cr a la línea de acción de R. Por definición el momento estático es  $M_e = R \cdot r$

Podemos obtener otra expresión para el momento; con el auxilio de la semejanza de triángulos, en efecto, si trazamos por cr una línea paralela a R que corta a los lados extremos del polígono funicular en M y N, obtenemos del dibujo, que los triángulos SMN y OAE son semejantes, por estar sus lados en la misma relación que sus alturas. De lo anterior podemos decir:

$$\begin{aligned} MN/r &= AE/L && \text{donde } AE = R \text{ y llamamos } MN = y \\ \text{tenemos } R \cdot r &= y \cdot L && \text{pero } R \cdot r = M_e \\ \text{luego } M_e &= y \cdot L \end{aligned}$$

La nueva expresión del Teorema de momento estático; nos dice: el momento estático para un sistema de fuerzas cualquiera respecto a un centro de rotación es igual al producto de la distancia que existe entre sus lados extremos del polígono funicular, determinada sobre la recta paralela a la resultante trazada por el centro de momentos, multiplicada por la distancia polar.

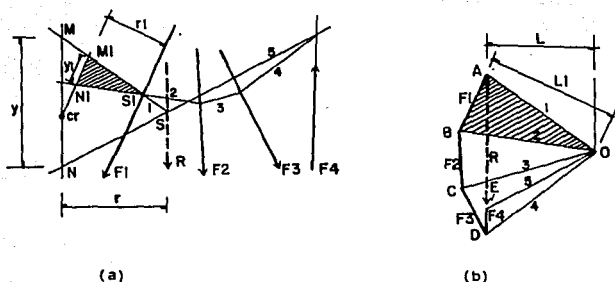


fig. 39

Cuando se desee el momento estático para sólo una cualquiera de las fuerzas del sistema, se procede de la misma forma. Por ejemplo, para la fuerza  $F_1$  la distancia polar es  $L_1$ , perpendicular a  $F_1$ , distancia medida desde  $F_1$  hasta  $O$ ,  $r_1$  es la distancia perpendicular desde  $or$  a la línea de acción de  $F_1$ ; la distancia  $y_1 = M_1/N_1$  que está determinada entre los lados del polígono funicular 1 y 2. Obsérvese fig. 39a, que las partes sombreadas representan la solución en la semejanza de los triángulos axurados.

El momento estático es  $M_e = y_1 \cdot L_1$

Si en el sistema de fuerzas dado son paralelas todas las fuerzas, el procedimiento para determinar  $L$  y  $y$  no varía en nada prácticamente, sólo en el polígono vectorial se observa que la resultante es una recta igual a la suma algebraica de todas sus fuerzas. No consideramos importante su exposición; pues sería redundar sobre el mismo punto.

#### 2.2.9 Momento de un par.

Se dice que dos fuerzas  $F$  y  $-F$  forman un par si tienen la misma magnitud, línea de acción paralelas y sentidos contrarios; están separados entre sí por una distancia  $d$ . Es evidente que por tener una acción nula  $R = 0$  formando un polígono de fuerzas cerrado, el conjunto de fuerzas no puede sustituirse por una fuerza única, aunque las fuerzas no desplazan el cuerpo sobre el que actúan, éstas si producen un efecto de giro. La acción de las fuerzas se representa por el producto:

$$M = -F \cdot d$$

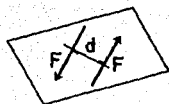


fig.40.

Entonces el momento del par es el producto de una fuerza  $F$  por su brazo de palanca  $d$ . El signo depende al igual que el momento estático del sentido del giro, es positivo cuando sigue la trayectoria de las manecillas del reloj, si actúa en sentido contrario será negativo.

Al pretender encontrar la resultante del sistema de fuerzas de un par y su punto de aplicación por los métodos gráficos lo único que logramos es transformar un par de fuerzas en otro par, como podemos observar en la fig.41.

Para ello construimos el polígono vectorial. Trazamos el segmento  $AB$  que representa la fuerza  $F$ , al trazar el segmento  $BA = -F$  regresamos al punto inicial  $A$ , siendo  $R = O$ , sus radios vectores  $1$  y  $3$  están en la misma línea; llevamos los vectores al sistema de fuerzas, el vector  $1$  corta  $F$  en un punto  $I$ , el vector  $2$  parte de  $I$  y corta  $-F$  en  $J$ , al llevar el vector  $3$  y trasladarlo a partir de  $J$ , no es posible que se corten. Entonces el par de fuerzas  $-(F, -F)$  se transforma en otro par  $(u, -u)$  ya que las componentes actúan sobre la misma línea, siendo iguales y opuestas teniendo acción nula.

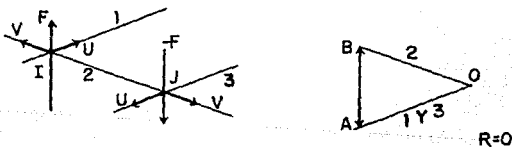


fig.41

#### 2.2.10. Sustitución del punto de aplicación de una fuerza $F$ .

Una fuerza  $F$  actúa en un punto  $A$ , en la dirección  $y-y$  (fig.42), se requiere transportar el punto de aplicación a otro lugar  $B$  en el mismo plano, situado a una distancia  $x$ . Para lograr trasladar la fuerza, es necesario agregar una fuerza  $-F$  en el punto  $B$ , en el mismo punto aplicamos otra fuerza

$F$  convirtiendo el sistema en una fuerza  $-F$  aplicada en  $B$ , que junto con la antigua  $F$  aplicada en  $A$  forman un par, con  $R = 0$ . Tenemos además la fuerza  $F$  aplicada en  $B$ , fuerza trasladada que sustituye la fuerza en  $A$ .

De lo anterior se establece: " Toda fuerza puede ser transportada paralelamente en su plano agregandose un momento de traslación, cuya magnitud es el producto de la fuerza por la distancia  $x$  entre ambas líneas de acción".(10)

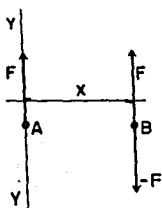


fig. 42

### 3. OBTENCION GRAFICA DE LAS PROPIEDADES GEOMETRICAS

#### 3.1. Centros de gravedad

##### 3.1.1. Definición gráfica de centro de gravedad

En los trabajos de física al centro de gravedad se le define, para cada cuerpo pesado, como el punto de aplicación en el cual suponemos concentrado el peso del cuerpo.

Así por ejemplo si tenemos un cuerpo sólido, el cual dividimos en partículas infinitamente pequeñas, llamadas puntos materiales, el peso de cada partícula se le considera como fuerza que provoca un movimiento dirigido hacia el centro de la tierra, todas estas pequeñas fuerzas pueden considerarse que actúan paralelamente entre sí; pues considerando las dimensiones del cuerpo, éste resulta ser muy pequeño en comparación con las dimensiones de la tierra, además el ángulo de inclinación que existe entre las fuerzas no se distingue, resulta despreciable. Ahora bien los puntos de aplicación de las fuerzas paralelas están invariablemente unidos entre sí, teniendo una resultante equivalente a la suma de todas las fuerzas paralelas infinitamente pequeñas que actúan como el peso total en el punto de aplicación, denominado centro de atracción terrestre o de gravedad.

Al resumir el último párrafo tenemos que el centro de gravedad es:

"El centro de todas las fuerzas paralelas, que partiendo del centro de la tierra actúan sobre todos los puntos materiales que componen el cuerpo en cuestión" (11)

Queda claro que la gravedad es: la intensidad de la fuerza con que atrae la tierra a los cuerpos que se encuentran en su superficie o cerca de ella, por lo que resulta de especial importancia conocer el centro de aplicación de la fuerza que constituye el peso del cuerpo, para así lograr el equilibrio con otra fuerza de igual magnitud aplicada en el mismo centro y de sentido contrario.

##### 3.1.2. Propiedades de los centros de gravedad

El estudio de los centros de gravedad de todas las figuras se suele clasificar en: líneas, superficies y cuerpos. En este trabajo de investigación se resuelven algunos problemas de figuras que son de uso más común para la solución de problemas de ingeniería civil en particular.

Todas las figuras representativas de cuerpos materiales cuyas partículas de longitud, superficie o volumen son iguales en todos los puntos de la figura y tienen el mismo peso, se llama homogéneas. Por lo tanto se denominarán heterogéneas aquellas figuras materiales, cuyas partes aisladas de igual magnitud tienen pesos diferentes.

Para facilitar la determinación de los centros de gravedad se supone que las figuras de planos y líneas son homogéneas.

Se dice que un área de una figura es homogénea con respecto a un eje  $ss$ , que divide la figura en dos partes iguales y cada punto  $P$  del área corresponde a otro punto  $P'$  de su misma área, de tal forma que la línea que une los puntos  $PP'$  es perpendicular al eje de simetría  $ss$  fig.43.

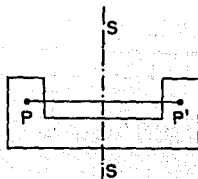


fig.43

Si dividimos el cuerpo en partes iguales de cada lado del eje de simetría, a igual distancia, tenemos que estas partes actúan como fuerzas que giran con el mismo momento pero de sentidos opuestos. Por consiguiente, el eje debe estar localizado en el centro de gravedad, por ésta razón se habla de líneas o ejes de simetría

### 3.1.3. Centro de gravedad de fuerzas paralelas.

Una figura compuesta homogénea se puede descomponer en dos porciones que se representan como dos fuerzas actuantes en los centros de gravedad respectivos (fig.44a); el centroide de toda la figura se localiza en la línea recta que une los dos centros. El centro de gravedad (c.g) de estas fuerzas se puede determinar como el punto de aplicación de dos fuerzas paralelas, cuyas distancias al centro de gravedad son  $d_1$  y  $d_2$  respectivamente (fig.44c).

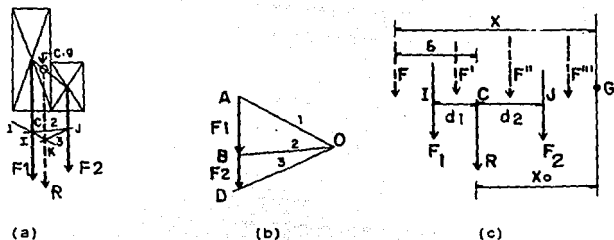


fig.44

Al considerar la semejanza de los triángulos OAB y IKC tendremos que:

$$\frac{IC}{CK} = \frac{OB}{AB}$$

y la de los triángulos OBD y JCK se tiene:

$$\frac{CK}{CJ} = \frac{BD}{OD}$$

multiplicando miembro a miembro las dos igualdades tenemos:

$$\frac{IC}{CK} \cdot \frac{CK}{CJ} = \frac{OB}{AB} \cdot \frac{BD}{OB} \quad \text{y} \quad \frac{IC}{CJ} = \frac{BD}{AB}$$

pero como  $AB = F_1$

y  $BD = F_2$  tendremos:  $\frac{IC}{CJ} = \frac{F_2}{F_1}$

y finalmente  $IC = d_1$

y  $CJ = d_2$  queda:  $\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1}$  -----1

El siguiente teorema nos dice que:

"El centro de una fuerza paralela del mismo sentido  $d_{12}$  de al segmento de sus puntos de aplicación en forma inversa a las fuerzas dadas" (12).

El teorema nos permite encontrar el centro de gravedad de una forma mucho más sencilla para el caso de 2 fuerzas paralelas. Atendiendo al teorema que indica como se divide el segmento AB fig.45; en razón inversa a sus fuerzas, lo único

que debemos hacer para encontrar el c.g. es cambiar entre si las dos fuerzas, el sentido de una de ellas y unir los extremos a y b, que corta AB en el punto C centro de aplicación de FR.

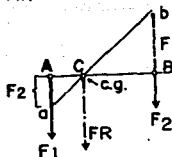


fig. 45

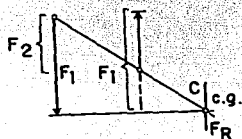


fig. 46

Podemos encontrar también el centro de gravedad cuando tenemos fuerzas paralelas pero con sentido opuestos (fig. 46), para ello, puesto que el punto de aplicación es exterior hay que permutar los puntos de aplicación y suponer las dos fuerzas dirigidas en el mismo sentido como se muestra en la figura.

Quando tenemos fuerzas paralelas inclinadas, igualmente se puede aplicar el teorema que nos facilita la determinación del c.g. (fig. 47).

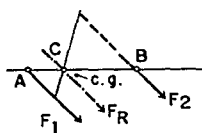


fig. 47

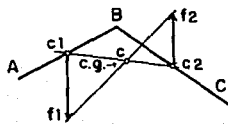


fig. 48

De la misma manera podemos encontrar el centro de gravedad de una línea quebrada formada por dos segmentos cualesquiera AB y BC (fig. 48), primero encontramos los puntos medios respectivos C1 y C2, trazamos en estos puntos las fuerzas f1-f2 proporcionales a su peso y encontramos el centro de gravedad c como muestra la figura.

#### 3.1.4. Determinación de la distancia x. al centro de giro arbitrario.

Del teorema uno tenemos que  $\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1}$  ----- (1)

o bien  $F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$  ó  $F_1 \cdot d_1 - F_2 \cdot d_2 = 0$



De lo anterior sabemos que  $F_1$  y  $F_2$  constituyen una resultante, por lo que podemos enunciar el teorema en una forma general diciendo que: "La suma de los momentos de un grupo de fuerzas respecto al centro de gravedad es cero" esto es:

$$\sum F \cdot d = 0 \quad \text{-----} (2)$$

si en la fig.44.c, aceptamos D como centro de giro, donde  $x_0$  es la distancia desde D a C, tenemos que

$$d = x - x_0$$

con lo cual

$$\sum Fd = \sum F(x - x_0) = x \sum F - x_0 \sum F = 0$$

de donde

$$x_0 = \frac{\sum F \cdot x}{\sum F} \quad \text{-----} (3)$$

El valor representa la distancia al centro de fuerzas paralelas a un punto de giro arbitrario D.

$x$  = distancia a un punto cualquiera de giro en el mismo plano.

### 3.1.5. Centros de gravedad de figuras rectilíneas homogéneas.

#### a) Centro de gravedad de una línea recta

El c.g. de un segmento de recta homogéneo se encuentra en el punto medio de la recta, por este punto del segmento pasa el eje de simetría NN que es perpendicular al segmento AB (fig.49).

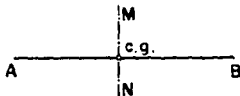


fig.49

#### b) Centro de gravedad del perímetro de un triángulo cualquiera.

Para la obtención de su c.g., primero encontramos los puntos medios de los segmentos AB, BC y CA que son los puntos 1, 2 y 3 respectivamente, unimos estos tres puntos formando otro triángulo auxiliar. El centro de gravedad se encuentra en el centro del círculo inscrito (fig.50).

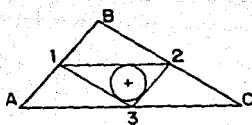
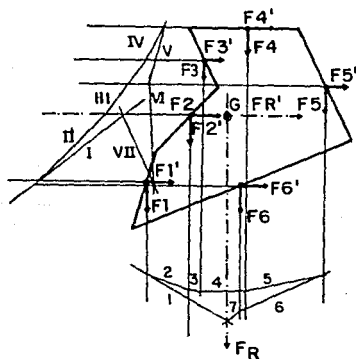


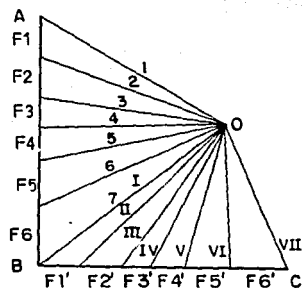
fig.50

c) Centro de gravedad del contorno de una figura irregular.

Para resolver el centro de gravedad del polígono, encontramos los puntos medios de cada uno de los lados que constituyen la figura, en los cuales aplicamos una fuerza proporcional a los pesos de cada línea; como la línea es homogénea, la fuerza es proporcional a la longitud de cada recta. Logrado esto, trazamos fuerzas perpendiculares iguales a las anteriores en el mismo punto de aplicación, procedemos a trazar el polígono de fuerzas y el funicular en la forma conocida para el caso de fuerzas paralelas. Las fuerzas auxiliares  $F'$  se trazan a continuación de las originales formando un ángulo de  $90^\circ$ , trazamos los radios vectores I, II, III, IV, V, VI y VII uniéndolas con el mismo polo O y trazamos el polígono correspondiente. En la intersección G de las dos líneas  $FR$  y  $FR'$  que constituyen ejes de simetría, se encuentra el c.g. buscado (fig.51).



(a)



(b)

fig.51

## d) Centro de gravedad de un arco de círculo.

Para encontrar el centro de gravedad de una línea regular (fig. 52), tenemos la ecuación  $X_o = (\sum F \cdot x) / (\sum F)$ , descomponemos la longitud  $l$  en  $\Delta l$ , que tienen una distancia  $x$  respecto a un punto de giro  $O$  cualquiera, ubicado en el mismo plano. Las diferencias  $\Delta l$  pueden encontrarse como un grupo de fuerzas paralelas, al sustituir las variables de nuestro problema en la fórmula obtenemos.

$$X_o = \frac{\sum F \cdot x}{\sum F} = \frac{(\Delta l \cdot x)}{l} = \frac{(As \cdot r)}{l} = \frac{r \sum As}{l}$$

Tenemos que  $s = S$ , siendo  $s$ , la longitud ab de la cuerda que une los extremos del arco circular por lo cual:

$$X_o = (r \cdot s) / l$$

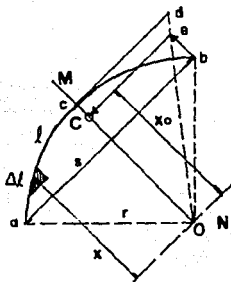


fig. 52

Para localizar el punto de aplicación de  $l$  (arco circular), disponemos de la expresión  $X_o = (r \cdot s) / l$ , que representa la distancia del centro de origen  $O$ , al centro de gravedad buscando, sabemos que  $MN$  es un eje de simetría y en cualquier punto del mismo podemos encontrar el centro de gravedad. Para encontrar el punto exacto, trazamos  $cb = l/2$  como recta, llevándola en forma tangente al arco circular a partir del punto  $c$ , hasta  $d$ , unimos este extremo con el origen  $O$ , obteniendo la recta  $Od$ , desde  $b$  trazamos  $be$  paralela al eje  $MN$  que corta  $Od$  en el punto  $e$ , trazamos una perpendicular a la recta  $be$ , a partir de  $e$  que cruza el eje  $MN$  en el punto  $C$ , punto buscado.

La demostración de esta construcción se obtiene de la semejanza de los triángulos  $Ocd$  y  $Oce$ , siendo:

$$r / (l/2) = x / (s/2) \quad \text{igual a} \quad X_o / s = r / l$$

### 3.1.6. Centro de gravedad de áreas planas.

#### a) Centro de gravedad de la superficie triangular y de un cuadrilátero

Por definición es sabido que toda mediana de un triángulo es eje de simetría, por lo cual contiene el centro de gravedad, entonces basta con trazar dos de estas rectas y en la intersección encontramos el centro de gravedad. Según la propiedad geométrica la intersección de dos medianas divide un triángulo en la razón 1:2; de donde se deduce que el centro de gravedad está en cada mediana a una distancia  $1/3$  de la base.

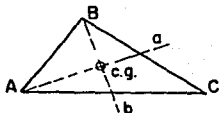


fig. 53

Para encontrar el centro de gravedad de un cuadrilátero regular, basta con cruzarlo uniendo sus diagonales y en la intersección de estas encontramos el c.g. (fig. 54).

En un cuadrilátero irregular (fig. 55), descomponemos el cuadrilátero ABCD en dos triángulos ABD y BCD separados por la diagonal BD, encontramos sus centros respectivos:  $c_1$  y  $c_2$ , unimos ambos puntos con la recta  $c_1c_2$ . Con la diagonal AC obtenemos dos nuevos triángulos ABC y ACD, cuyos centros de gravedad son  $c_3$  y  $c_4$ ; uniendo los puntos  $c_3$  y  $c_4$  que corta  $c_1c_2$  en el punto C, punto que constituye el centro de gravedad de la figura. Las rectas  $c_1c_2$  y  $c_3c_4$  son ejes de simetría --- pues en ellas se encuentra el c.g..

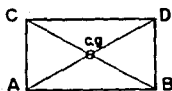


fig. 54

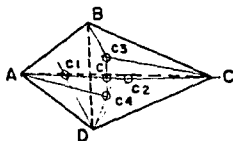


fig. 55

#### b) Centro de gravedad de un trapecio.

La determinación del centro de gravedad del trapecio ABCD (fig. 56), se construye de la siguiente manera: localizamos los

puntos medios de las bases y los unimos con la recta  $ab$ , la cual constituye un eje de simetría; con la recta  $Cg$  paralela a  $AB$ , dividimos la figura en un triángulo y un cuadrilátero, cuyos centros de gravedad son  $c_2$  y  $c_1$  respectivamente, al unir

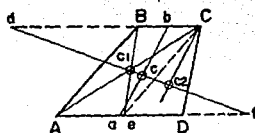


fig. 56

los puntos  $c_1$  y  $c_2$  cortan  $ab$  en  $c$ , centro de gravedad de la figura. Si prolongamos la recta  $c_1c_2$ , ésta corta a la prolongación de las bases en los puntos  $d$  y  $f$ . Si hacemos una revisión de la figura, observamos que la recta  $Bd = AD$  y  $Df = BC$ ; deducimos que para encontrar el centro de gravedad de un triángulo, basta con transportar la distancia de la base mayor a continuación de la menor y la menor a continuación de la mayor, en sentido contrario a la anterior. Unimos ambos extremos con una recta diagonal  $df$ , en la intersección de las rectas  $ab$  y  $df$  encontramos el centroide  $C$ .

#### a) Centro de gravedad de un sector Circular

Si el sector circular  $ABC$  de radio  $r$  fig. 57, lo descomponemos en pequeños sectores de ángulos muy pequeños; los cuales representan triángulos, cuyo centro de gravedad dista del origen  $2r/3$ . El arco que tiene el radio  $2r/3$  contiene el centro de gravedad, por lo cual el c.g. se determina de la misma forma como se encontró para el arco de círculo.

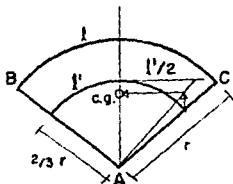


fig. 57

d) Solución gráfica del centro de gravedad de una figura plana cualquiera.

Sea la figura A, que tiene un contorno cualquiera fig.-58; de la cual queremos conocer el centro de gravedad: dividimos la figura en fajas paralelas, tratamos de semejar rectángulos lo más pequeños posibles para evitar mucho error; aplicamos fuerzas paralelas, correspondiente a cada faja, que sean proporcionales a las pequeñas áreas aplicadas en sus respectivos centros de gravedad. Construimos el polígono de fuerzas original y el polígono de fuerzas auxiliar que son perpendiculares a las originales, aplicadas en el mismo punto, para los radios vectores utilizamos el mismo polo, de éstos construimos los polígonos funiculares y en la intersección de las líneas de acción de las fuerzas  $F$  y  $F'$  está ubicado el centro de gravedad.

Para encontrar el centro de gravedad de una área poligonal de figuras compuestas; seguimos el mismo procedimiento descrito anteriormente (fig.59).

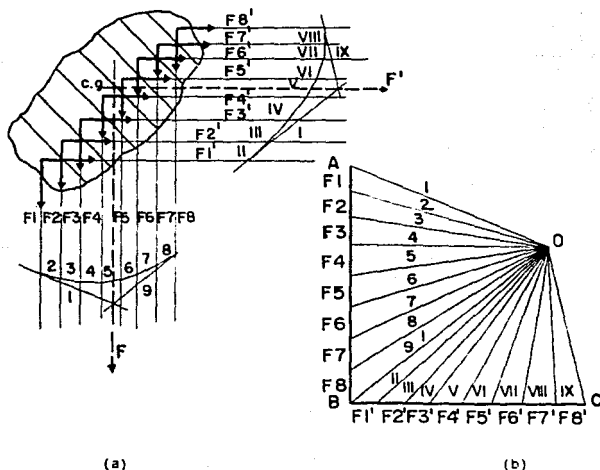


fig. 58

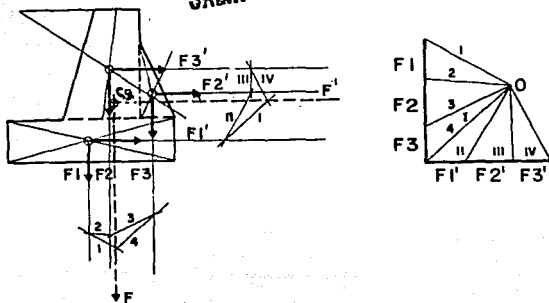


fig. 59

### 3.2. Momentos de inercia o de segundo orden

#### 3.2.1. Consideraciones generales.

En la misma forma como el momento de primer orden es requerido para la solución de problemas de ingeniería, también lo es el momento de inercia. Esta expresión representa propiedades físicas y geométricas del elemento en estudio; al igual que los centros de gravedad, donde su valor está en función de la geometría; en el caso de los momentos de inercia, también depende del marco de referencia al cual se le relacione.

Como se ha mencionado, el momento estático o de primer orden es el producto de una fuerza  $F$  por la distancia a un eje fijo llamado " $x$ ", el cual se presenta que:

$$M = F \cdot x$$

Al multiplicar el producto anterior  $F \cdot x$ , nuevamente por la distancia " $x$ ", obtenemos el nuevo momento " $I$ ", llamado momento de inercia o de segundo orden, teniendo como:

$$I = F \cdot x \cdot x = F \cdot x^2$$

Pero también dado un sistema de fuerzas paralelas; el momento de inercia es igual a la suma algebraica del sistema de fuerzas, pudiendo expresarlo en forma general como:

$$I = \sum F \cdot x^2$$

### 3.2.2. Momento de inercia de una serie de fuerzas paralelas

Para determinar gráficamente el momento de inercia de un sistema de fuerzas paralelas  $F_1, F_2, \dots, F_n$  (fig.60), respecto a un eje  $yy$ , existen básicamente dos métodos; el método de Culmann y el método de Mohr.

#### a) Método de Culmann.

En primer lugar construimos el polígono vectorial correspondiente al sistema de fuerzas paralelas, encontramos el haz de radios  $123456$ , llamamos  $d$  la distancia que hay desde el polo  $O$  a la fuerza resultante  $R$  que actúa perpendicularmente. Trazamos cada uno de los radios vectores en el sistema de fuerzas formando el polígono funicular, prolongamos los vectores hasta que corten el eje  $yy$  en los puntos  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . De la construcción podemos observar en el dibujo que se forman los triángulos  $OP_1P_2, \dots, OP_{n-1}P_n$ , formados por cada dos lados sucesivos del polígono funicular con el eje  $yy$ , estos triángulos son semejantes a los triángulos  $Oab$  y  $Obc$  del polígono vectorial, de la semejanza encontramos las relaciones:

$$x_1/P_1P_2 = d/F_1, \dots, \quad x_2/P_2P_3 = d/F_2, \dots,$$

de los cuales tenemos:

$$F_1 \cdot x_1 = d \cdot P_1P_2 \quad \text{y} \quad F_2 \cdot x_2 = d \cdot P_2P_3$$

de aquí tenemos que:

$$P_1P_2 = \frac{F_1 x_1}{d} \quad \text{y} \quad P_2P_3 = \frac{F_2 x_2}{d}$$

tomando todos los triángulos obtenemos la expresión en forma general:

$$\sum F \cdot x = d(P_1P_2 + P_2P_3 + \dots)$$

observando la figura sabemos que:

$$P_1P_2 + P_2P_3 + \dots = P_1P_n = p$$

Cuidando de tomar cada segmento de recta con su signo correspondiente, en éste caso todos son positivos.



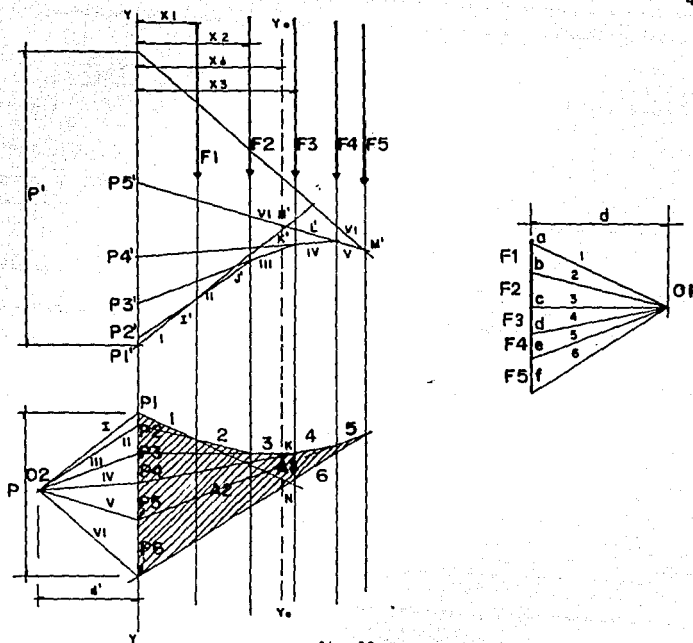


fig.60

Para obtener el momento estático sabemos que éste es:

$$M = \sum F \cdot X = d \cdot P$$

Los segmentos de recta P1P2, P2P3, P3P4, P4P5 y P5P6 encontrados sobre el eje yy, los consideramos como fuerza que tienen una misma línea de acción. Trazamos un polo O2, determinamos el haz de radios I II III IV V VI y paralelamente a ellos trazamos el polígono funicular que corta al eje yy con los radios I al VI en los puntos P1'P2'P3'P4'P5' y P6' que forman los triángulos.

I'P1'P2'..... y J'P2'P3'.....

semejantes a los triángulos que tiene el polígono funicular

auxiliar O2P1P2 y O2P2P3..., designamos con  $d'$ , la distancia; entonces tenemos que:

$$X1 / P1'P2' = d' / P1P2 \dots\dots, \quad X2 / P2'P3' = d' / P2P3 \dots\dots$$

o bien

$$X1 \cdot P1P2 = d' \cdot P1'P2' \quad X2 \cdot P2P3 = d' \cdot P2'P3'$$

sustituyendo los valores P1P2 y P2P3 obtenidos en la primera consideración tenemos:

$$X1 \cdot \frac{F1X1}{d} = d' \cdot P1'P2' \quad X2 \cdot \frac{F2X2}{d} = d' \cdot P2'P3'$$

$$X1^2 \cdot F1 = dd' \cdot P1'P2' \quad X2^2 \cdot F2 = dd' \cdot P2'P3'$$

y considerando todos los triángulos obtenemos:

$$F1X1^2 + F2X2^2 + \dots\dots = dd' (P1'P2' + P2'P3' + \dots\dots)$$

pero  $P1'P2' + P2'P3' + \dots\dots = P1'P5' = P'$

finalmente tenemos que el momento de inercia de una serie de fuerzas paralelas es:

$$I = \sum_1^5 F \cdot X^2 = d \cdot d' \cdot P'$$

Nota. Al efectuar las operaciones de la fórmula la distancia  $d$  debe medirse con la escala de fuerzas; las distancias  $d'$  y  $P'$  con la escala de longitudes.

El enunciado de la fórmula obtenida nos dice: "El momento de inercia de un sistema de fuerzas paralelas es igual al producto de las distancias polares por el segmento que los la dos extremos del segundo polígono funicular determinan en el eje de momentos" (13).

#### b) Método de Mohr.

El método siguiente no utiliza el polígono funicular auxiliar pero si el primer polígono funicular con sus pasos iniciales iguales, hasta llegar a la determinación de:

$$P1P2 = \frac{F1 \cdot X1}{d} \dots\dots, \quad P2P3 = \frac{F2 \cdot X2}{d} \dots\dots,$$

Para determinar el momento de inercia se requiere también el área que se muestra axurada en el dibujo de la fig. 60, la cual está limitada por el primer polígono funicular, sus lados extremos y el eje de momentos  $yy$ . Esta área se de-

signa con la letra F en la fórmula por lo que tenemos que:

$$F = A1 + A2 \text{ en este caso particular}$$

$$F = \frac{1}{2} (P1P2 \cdot X1 + P2P3 \cdot X2 + \dots)$$

y sustituyendo los valores P1P2, P2P3, ... del primer método

$$F = \frac{1}{2} \left( \frac{F1 \cdot X1}{d} \cdot X1 + \frac{F2 \cdot X2}{d} \cdot X2 + \dots \right) = \frac{1}{2d} \sum F \cdot X^2$$

por lo tanto el momento de inercia según el método de Mohr es tá dado por

$$I = \sum_{i=1}^5 F \cdot X^2 = 2 \cdot F \cdot d$$

Cuyo enunciado nos dice que:

"El momento de inercia de un sistema de fuerzas paralelas es igual al doble producto de la distancia polar, con el área F, comprendida entre el polígono funicular, sus lados extremos y el eje de momentos" (14).

La distancia polar d la medimos con la escala de fuerzas y F con la escala de longitudes.

### 3.2.3. Momentos de inercia de una área plana respecto a un eje contenido en su plano.

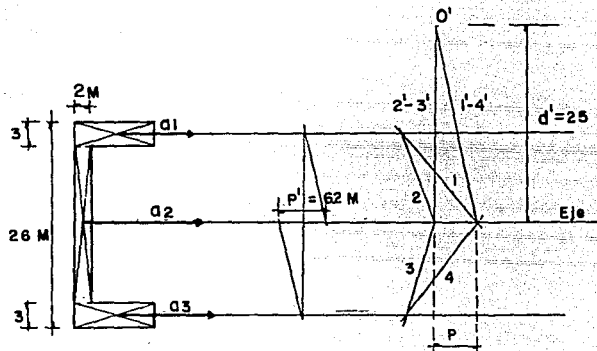
Para determinar el momento de inercia de cualquier figura plana, podemos dividir el área de la figura del problema considerando pequeñas áreas elementales que representan figuras de las cuales podamos encontrar el centro de gravedad fácilmente. En los centros aplicamos fuerzas que sean proporcionales a las áreas elementales y además paralelas respecto al eje con el cual se pretende determinar el momento de inercia, habiendo hecho estas consideraciones podemos resolver el problema utilizando cualquier método expuesto para la determinación del momento de inercia de fuerzas paralelas.

Quando se pretende encontrar el momento de inercia mínimo de una figura plana, al observar el dibujo fig.60, nos damos cuenta que si el eje yy pasará por el eje yo yo, eje de simetría que contiene el centro de gravedad; tendríamos solamente el área F1 = A1, disminuyendo F en A2, comprendida en

el polígono funicular IJKLMN, consecuentemente el momento de inercia mínimo será.

$$I_{\min} = 2 F l \cdot d \quad \text{método de Mohr.}$$

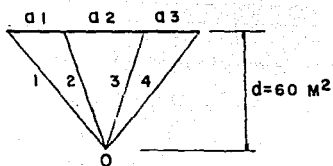
ejemplo ilustrativo. Determinar el momento de inercia de una figura plana compuesta, mostrada en la fig.61, respecto a un eje que pase por el centro de gravedad.



$$Q_1 = 3 \times 10 = 30 \text{ M}^2$$

$$Q_2 = 2 \times 20 = 40 \text{ M}^2$$

$$Q_3 = 3 \times 10 = 30 \text{ M}^2$$



0 1 5 10 ESC. LONG.

0 10 50 100 ESC. FZAS.

$$I = d \cdot d' \cdot P$$

$$I = 60 \times 25 \times 6.20 = 9300 \text{ M}^4$$

fig.61

#### 4. VIGAS SOLUCIONADAS POR METODOS GRAFICOS.

##### 4.1. Vigas Isostáticas

Las condiciones de isostaticidad para una estructura fueron descritas en el primer capítulo, estableciéndose como punto importante: una viga será isostática si a partir de las ecuaciones que establece la teoría de la estática el problema tiene solución, esto es, el número de ecuaciones debe ser igual al número de incógnitas del sistema.

La teoría necesaria para resolver las vigas isostáticas, se estableció en el segundo capítulo y la parte que completa esta teoría será presentada en la solución de cada una de las vigas, cuya explicación se realiza a base de ejemplos considerando más ilustrativo.

##### 4.1.1. Reacciones de los apoyos

Las presiones en los apoyos son iguales y contrarias a las reacciones de los mismos. La solución gráfica de las reacciones en los apoyos la determinamos utilizando los principios de los polígonos vectorial y funicular; así como la descomposición de una fuerza en dos componentes paralelas, conceptos que vienen presentados en el segundo capítulo.

Encontramos las reacciones para la viga (fig.62), que contiene los datos de carga y longitudes, mismos que son necesarios para poder resolver el problema. Obsérvese que para todo cálculo gráfico es necesario fijar una escala, en este caso una escala de fuerzas y otra de longitudes.

Definidas las escalas podemos trazar el polígono vectorial acumulando cada una de las fuerzas; representando la magnitud a una misma escala; fijamos un polo O cualquiera, uniendo O con los puntos extremos de las fuerzas formamos el haz de radios 12345, trazamos el polígono funicular llevando cada uno de los radios vectores paralelamente cortando las fuerzas dadas en un punto de su línea de acción, el trazo del primer radio se hace en un punto 1 cualquiera. Sabemos ya que en la intersección de los radios extremos 1 y 5 actúa la fuerza resultante. Ahora para encontrar las presiones en los puntos A y B, el problema se reduce a la descomposición de una fuerza en dos componentes de líneas de acción conocidas y paralelas, para lograrlo no es necesario trazar nuevos polígonos, pudiendo utilizar los ya trazados: pues la descomposición de R se realiza mediante los lados extremos 1 y 5 que cortan las líneas de acción en A' y B'. La línea de cierre (L.c) es la que une los puntos A', B', al llevar L.c paralelamente hasta el

polígono vectorial, que determina el valor de las reacciones, quedando resuelto el problema.

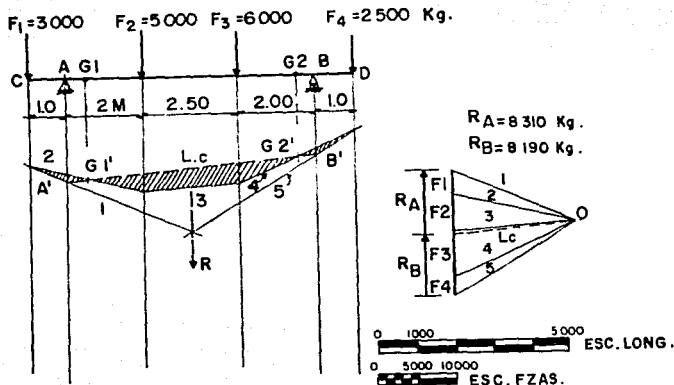


fig.62

El diagrama de momentos flexionante corresponde a la zona sombreada, punto a demostrar en el inciso siguiente.

#### 4.1.2. Momento flexionante y esfuerzo cortante en una viga sometida a fuerzas paralelas.

a) Esfuerzo cortante. Fijadas las escalas de fuerzas y longitud, procedemos a determinar las reacciones en los apoyos A y B en la forma ya explicada (fig.62). En la fig.63 se observa que los polígonos funicular y vectorial son cerrados indicando que las fuerzas están en equilibrio con las reacciones.

Por definición la fuerza cortante en una sección de un elemento estructural cualquiera: es igual a la suma de todas las fuerzas activas y reactivas, a la izquierda o a la derecha de la sección; tomando como positivo el sentido ascendente y negativo el descendente. Si  $N - N$  es un corte que divide la viga en dos tramos, el esfuerzo que actúa en  $N - N$  debe ser igual a la suma de todas las fuerzas que actúan a la izquierda del corte, teniendo que el esfuerzo en  $N - N$  es.

$$Q_N = R_A - 4000$$

Ahora bien el corte N - N encuentra los lados del polígono no funicular 2 y L.c., si prolongamos líneas ortogonales a partir de los puntos B y E, localizados en el polígono vectorial que cortan la línea de acción del polígono de fuerzas. Determinamos el valor del esfuerzo cortante en el corte N - N.

Esto nos da la pauta para poder trazar el diagrama del esfuerzo cortante, para ello basta proyectar líneas perpendiculares a partir de los puntos A,B,C,D y E situadas en el polígono de fuerzas. El área axurada representa los esfuerzos cortantes o tangentes siendo la línea de ceros o eje, el vector L.c. Los valores del esfuerzo cortante determinados gráficamente están dados en el diagrama.

b) El momento flexionante está definido para cualquier sección de una viga como: la suma algebraica de los momentos estáticos de todas las fuerzas situadas a un mismo lado de la sección.

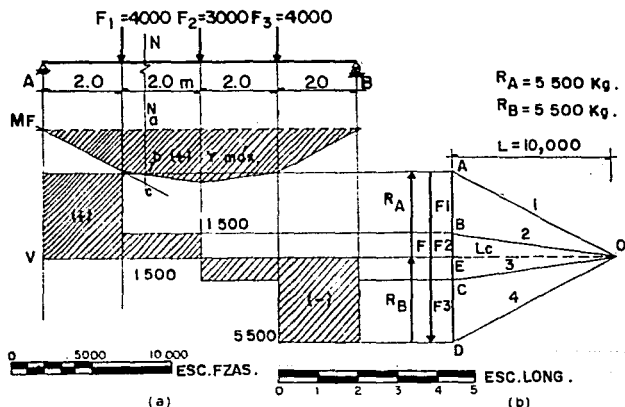


fig.63

Obtenemos a partir de la definición el momento flexionante en el corte N - N de la viga. Los momentos de las fuerzas  $R_A = 5500$  y  $4000$  Kg que se encuentran a la izquierda de la sección están determinados por la ecuación  $M_e = y.L$ , expresión deducida en el inciso (2.2.8.).

El momento flexionante es igual a la suma de los dos momentos estáticos que producen las fuerzas 5500 y 4000 Kg. Los cuales están de acuerdo a la expresión  $ac \cdot L - bc \cdot L = MF$ , donde  $L$  es la distancia polar y los segmentos  $ac$  y  $bc$  representan a y por lo tanto:

$$MF = (ac - bc) \cdot L$$

$$\text{o bien } MF = ab \cdot L$$

Según el dibujo, si llamamos  $Y_m$  a cualquier punto intermedio del polígono funicular la ecuación se transforma en la siguiente expresión.

$$MF = Y_m \cdot L$$

Expresión que nos permite determinar el momento flexionante para cualquier punto de la viga.

La distancia polar  $L$  debe ser medida con la escala de fuerzas y  $Y_m$  con la escala de longitudes; así obtenemos que los momento flexionante para el corte N-N y el momento flexionante máximo son:

$$MF \cdot N - N = 1.2 \times 10,000 = 12,000 \text{ kg-m} = 1.2 \text{ ton-m}$$

$$MF \text{ máx} = 1.4 \times 10,000 = 14000 \text{ kg-m} = 1.43 \text{ ton-m}$$

#### 4.1.3. Carga uniformemente distribuida.

Si consideramos la viga mostrada en la fig.64, que tiene una carga uniformemente distribuida  $W = 500 \text{ Kg/m}$ , ocasionada por el peso propio de cualquier elemento estructural, con un claro de 4 metros. Determinar sus reacciones, esfuerzo cortante y momento flexionante.

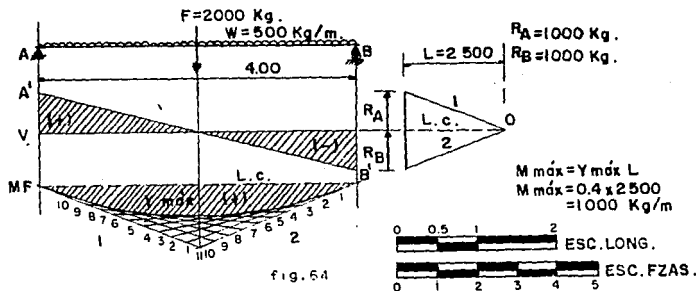


fig. 64



Al considerar toda la carga  $W$  actuando en el centro de la viga, formamos el polígono vectorial con la fuerza  $F$  y el correspondiente funicular que tiene los lados 1, 2 y L.c. El triángulo formado por el polígono funicular no corresponde al diagrama de momentos flexionantes en este caso; pues para cargas distribuidas, el diagrama de momento flexionantes es una parábola. Los lados 1 y 2 del funicular son tangentes a la parábola que define el momento. Para construir el diagrama trazamos una serie de líneas tangentes en la forma que muestra la fig. 64.

El esfuerzo cortante está determinado por la línea descendente  $A'B'$  y L.c. que cortan  $A'B'$  en un punto donde el momento flexionante es máximo.

Las reacciones, el cortante y el momento flexionante están determinados en la fig.64.

#### 4.1.4. Carga mixta directa

En ocasiones es necesario resolver vigas con cargas uniformes como la mostrada en la fig.65., utilizando el método gráfico se puede resolver con una aproximación aceptable y sobre todo si se tiene habilidad para el dibujo, puede resultar más fácil resolverlo gráficamente que utilizando el método analítico.

Para resolverlo, descomponemos la carga en dos tipos: una triangular y otra rectangular, al aplicar los principios de los polígonos vectorial y funicular correspondientes obtenemos las reacciones, momentos flexionantes y esfuerzo cortante para los dos tipos de carga considerados. Los diagramas de momentos; los trazamos a cada lado de la L.c., siendo el diagrama que corresponde a toda la carga la suma de los dos momentos. Para determinar el esfuerzo cortante también hay que sumar los dos diagramas del cortante acumulamos el valor de uno de los diagramas al otro, utilizando un compás el problema se simplifica.

También se puede resolver dividiendo la figura en fajas, resolviendo todo el problema a la vez, como cargas aisladas

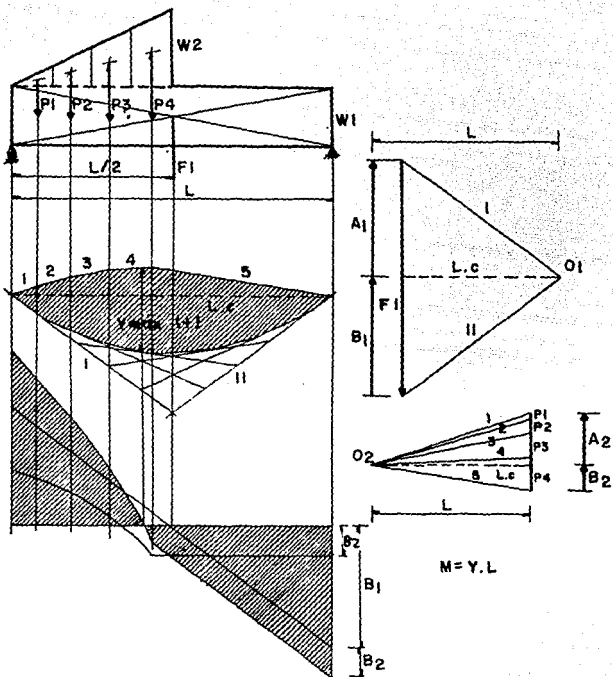


Fig. 65

#### 4.1.5. Viga en volado

La viga en volado también llamada mensula, está libre en un extremo y fija en el otro. En la mayoría de las soluciones analíticas para este tipo de problemas; la solución de la viga se da suponiendo que la viga está tan fuertemente empotrada en la pared o muro, que podemos cargar lo que queremos, con la condición de que la viga no se rompa, teniendo tres reacciones probables  $R_x$  y  $R_y$  y un momento par  $M_A$ .

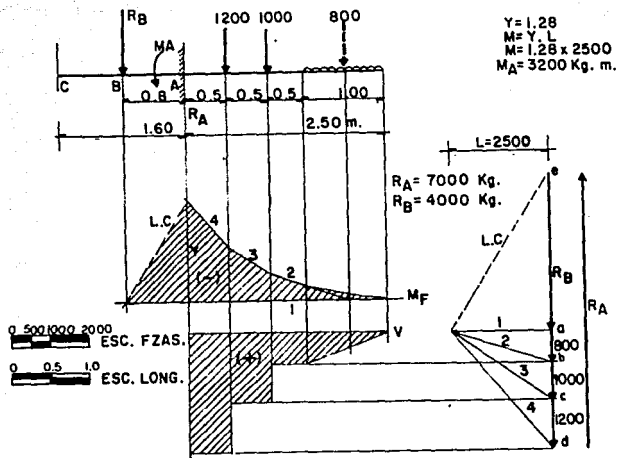


fig. 66

Para la solución anterior, no hemos pensado en que pudiera fallar el empotramiento en el apoyo y que éste se desquebraje antes que pudiera romperse la viga, por lo que es preciso al resolver una viga mensula: conociendo el momento  $M_A$ , revisar si el trozo de viga introducido en el muro resiste las cargas aplicadas a la viga.

Para la viga empotrada en un macizo AC se originan dos reacciones contrarias  $R_B$  y  $R_A$ , con brazo de palanca  $a$ , cuyo producto corresponde al valor del momento  $M_A$ . La reacción  $R_B$  es resistida por el peso de la pared superior, que equilibre con exceso (factor de seguridad), la reacción en A es igual a la suma de las fuerzas que actúan en la viga más la reacción en B, esto es,  $R_A = R_B + F$ .

Para obtener la solución gráfica (fig. 66), determinamos - en el siguiente orden:

a) Momentos flexionantes. Trazamos los polígonos vectorial y funicular correspondientes a las cargas actuantes en la viga de modo que el primer lado de los polígonos sea horizontal. Al construir el polígono funicular la línea de cierre L.C. corta junto con los lados 4 y 1 las líneas de acción de las reacciones  $R_A$  y  $R_B$ . El momento máximo se origina en el empotramiento A, siendo  $M_{\text{máx}} = -L \cdot y_{\text{máx}}$ .

b) Esfuerzo cortante y reacción. Al llevar L.c al polígono vectorial, ésta corta la prolongación de las fuerzas en un punto e, obteniéndose  $RA = F + RB$ , siendo RB el segmento ea. El esfuerzo tangencial o cortante, lo obtenemos al prolongar líneas ortogonales a las fuerzas del polígono vectorial, cuyos valores están representados en la figura, el valor positivo, es debido al cálculo análítico, ya que el recorrido para determinar los valores del cortante se hace de izquierda a derecha, teniendo como primer fuerza RA, que tiene un sentido ascendente (+).

## 4.2. Vigas continuas articuladas

### 4.2.1. Aclaraciones.

Las vigas que descansan en más de dos apoyos se llaman vigas continuas, este tipo de vigas son hiperestáticas si no se agregan articulaciones. La cantidad de articulaciones que requiere una viga para hacerla isostática está en función del número de reacciones que tenga la viga, esta cuestión fue tratada en el capítulo I. Para una viga de tres reacciones y sólo dos ecuaciones; la solución utilizando las ecuaciones de la estática se puede hacer colocando una articulación, transformando la viga hiperestática en una viga continua articulada o Viga Gerber.

### 4.2.2. Viga Gerber con cargas aisladas.

a) Momento flexionante. Una viga Gerber puede reducirse a una viga con extremos en volado, como en la fig.62, donde tenemos una viga en doble volado con cargas aisladas paralelas, al componer las fuerzas y formar el polígono funicular la línea de cierre  $A'B' = L.c$ , corta los lados 2 y 4 determinando momentos negativos por encima de L.c y positivos debajo de la misma. En los puntos C y D,  $G_1$  y  $G_2$  los momentos son cero, caso que sucede en la articulación de una viga Gerber, pues las articulaciones no provocan momentos de reacción.

Si aplicamos articulación en los puntos  $G_1$  y  $G_2$ , la viga se hace inestable pero no se altera el equilibrio de la misma, obsérvese que el segmento  $G_1'G_2'$  define la línea de cierre, observación que nos da una pauta para resolver el momento flexionante de una viga Gerber.

Resolvemos la viga (fig.67), construimos tantos polígonos vectoriales y funiculares como tramos de viga existan (entre apoyo y apoyo), utilizando la misma distancia polar L. Prolongamos líneas verticales a partir de las articulaciones I y II que cortan al polígono funicular correspondiente en los puntos I' y II', para cuyos puntos el momento flexionante es cero; siendo estos puntos, lugar por donde pasan líneas de cierre: donde  $D'C' = C_3$ , la cual debe pasar por II',  $C'B' = C_2$

que debe pasar por  $I'$  y finalmente  $B'A' = C1$ , con lo cual hemos encontrado el área de momentos flexionantes para la viga Gerber. Trasladando las líneas de cierre  $C1$ ,  $C2$  y  $C3$  a sus respectivos polígonos vectoriales, encontramos las reacciones en los apoyos, según muestra el dibujo. Para lograr una sola línea de cierre  $L.c$  horizontal basta con hacer un transporte de polo, de tal manera que la línea de cierre sea horizontal.

b) Esfuerzo tangencial. El diagrama de fuerzas cortantes hay que trazarlo tomando en cuenta cada una de las fuerzas actuales. En nuestro caso descendemos  $-F$ , luego ascendemos  $RA$ , bajamos  $F2$  y así seguimos trazando cada una de las fuerzas, teniendo en cuenta la magnitud a escala y el sentido para cada fuerza hasta llevarlas todas al dibujo.

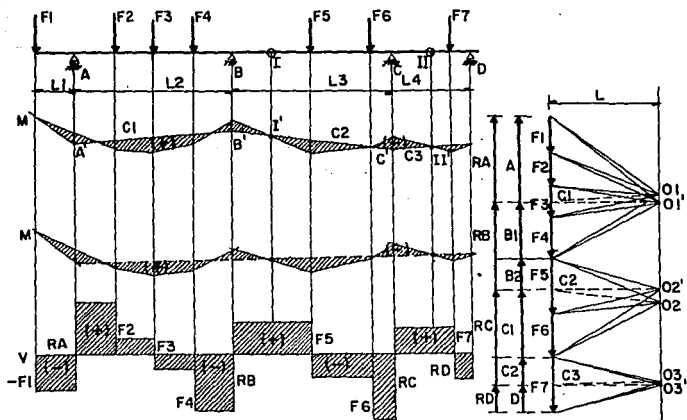


fig. 67

## 4.2.3. Viga Gerber con carga uniformemente distribuida.

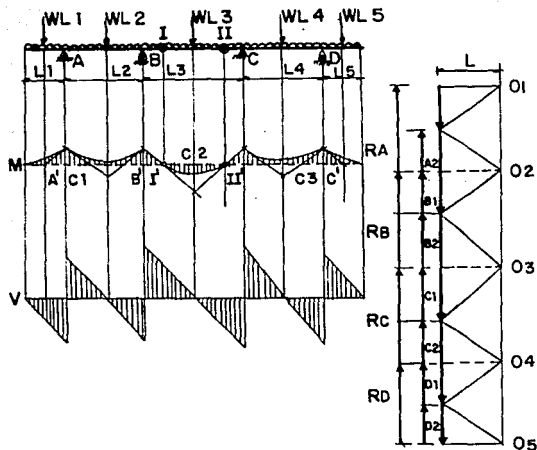


fig.68

a) Momentos flexionante. Sustituyendo la carga uniformemente repartida en cargas concentradas al centro de cada claro, la viga queda reducida al caso anterior.

Hecho esto procedemos a trazar los polígonos vectorial y funicular, de tal forma que las líneas de cierre estén en la misma línea horizontal.

Sabemos que en los puntos donde se tienen las articulaciones no hay momento flexionante, por lo tanto, al unir los puntos I' y II' tenemos una de las líneas de cierre C2, esta línea hay que prolongarla hasta que encuentre la línea de acción de los apoyos en B' y C'.

Las otras dos líneas están definidas por la unión de los segmentos A'B' y C'D'. Los puntos se trazan en la forma ya conocida.

### 4.3. Vigas Hiperestáticas

#### 4.3.1. Aclaraciones

Para la solución de las vigas; no basta la aplicación de los principios de la estática gráfica por depender de la naturaleza de los apoyos o la continuidad de la viga y de la elasticidad de los mismo, por lo que para poder resolverlas se hace necesario utilizar la teoría de la elasticidad, cuyos principios no serán tratados en la forma o atención que merece el tema por estar fuera del objetivo este trabajo.

#### 4.3.2. Línea elástica de una viga

##### a) Método Gráfico de Mohr.

Para obtener la deformación de sistemas hiperestáticos o estáticos es utilizada la teoría de la elasticidad, misma teoría que nos sirve para resolver los problemas hiperestáticos. Existen diferentes métodos analíticos que fundamentan su análisis en esta teoría y los métodos gráficos no son la excepción.

Las fuerzas exteriores actuantes sobre una sección Z-Z de una viga (fig.69), podemos componerlas y obtener una fuerza resultante  $R$ , la cual a su vez se puede descomponer en los esfuerzos internos: Longitudinal o normal  $N$ , otro perpendicular o cortante  $Q$  y un momento flexionante  $M = N \cdot y = R \cdot h$ , siendo  $y$  y  $h$  los brazos de palanca de las fuerzas correspondientes con respecto al centro de gravedad de la sección.

En la práctica basta obtener los esfuerzos de flexión para determinar las deformaciones, cuya línea resultante simplemente se llama línea elástica.

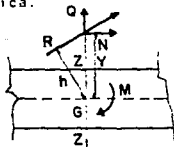


fig.69

La representación gráfica de la línea elástica de una viga empotrada en un extremo (fig.70) que tiene un  $E$  y  $J$  constantes a lo largo de toda la viga. Para encontrar dicha línea debemos cargar la viga con el área de momentos obtenida como resultado de las fuerzas externas actuantes en ella; dividimos la superficie de momentos en pequeñas áreas cuyo va-

Por es  $W = M \cdot Ax$

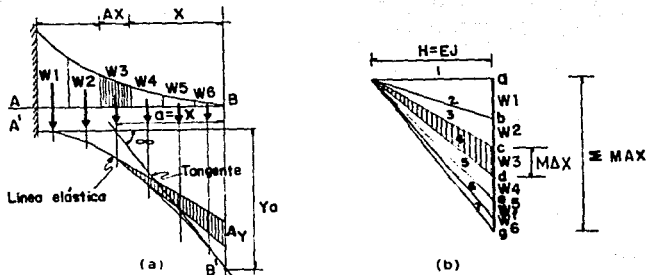


fig. 70

En seguida componemos estas fuerzas que representan las áreas en un polígono de fuerzas abcdefgh y con una distancia polar  $H = EJ$ , obtenemos el polígono vectorial y su correspondiente funicular, si tomamos un valor cualquiera  $W = M \cdot x$  y prolongamos sus vectores hasta cortar la línea  $B+B'$  obtenemos el segmento  $y$ , pero a la vez tenemos el triángulo axurado en el polígono funicular y su homologo en el polígono vectorial, por semejanza de triángulos tenemos que:

$$(M \cdot \Delta x) / H = \Delta y / x$$

$$y = \frac{(M \cdot \Delta x)}{H} \cdot x = \frac{W \cdot x}{H} \quad \text{pero } H = JE$$

$$\therefore y = \frac{W \cdot x}{E \cdot J} \quad \text{valor para sólo un tramo } x \text{ elástico de la viga.}$$

Al considerar toda la viga hay que tener en cuenta todos los demás valores  $W$ , con lo cual tenemos que el valor total de la deformación vale.

$$y_a = \sum_0^l \Delta y = \frac{1}{EJ} \sum_0^l M \cdot \Delta x \cdot x$$

La ecuación para la línea tangente de la deformación máxima es:

$$\bar{p} = \frac{1}{EJ} \sum_0^l M \cdot \Delta x \cdot x$$

$$\therefore \bar{p} = \frac{1}{EJ} \sum_0^l M \cdot \Delta x$$



En este caso el polígono funicular nos define la línea elástica de la viga.

#### 4.3.3. Puntos focales o fijos

Para poder hacer el análisis gráfico de la determinación de los focos o puntos fijos; es necesario en primer lugar determinar el área de momentos flexionantes de la viga, el cual tenemos que resolver por los métodos analíticos o utilizar algún método gráfico-analítico, el cual usa muchas gráficas y ecuaciones analíticas, complicando demasiado la solución; - pues, hay que considerar el área de momentos como si fuesen pesos  $W$  y encontrar la línea elástica, en seguida encontrar la tangente a la elasticidad en cada uno de los apoyos de la viga, siendo necesario utilizar más gráficas y así seguir una serie de pasos, resultando muy extenso y nada práctico para los propósitos del trabajo, obtando por omitir este punto.

Sin embargo, aunque se dejó por un lado la demostración rigurosa de como llegar a obtener los puntos fijos, dando por verdadera la forma de obtenerlos; pues los autores han experimentado y verificado sus propias experiencias y los llevaran a tales conclusiones, nosotros no encontraríamos la verdad de tal principio, el cual admitimos por cierto.

Pero si indicamos la forma de encontrarlos, haciendo una explicación clara y lógica para su determinación, además de mostrar la forma completa de encontrar el momento flexionante que en este caso es el punto importante a resolver.

#### 4.3.4. Puntos fijos o focales en el eje de una viga

Cuando tenemos una viga de dos tramos  $l_1$  y  $l_2$  empotrada en un extremo y dos apoyos fijos, cargada solamente en el tramo  $l_2$ , con una carga  $W$ . La viga sufre una flexión según muestra la fig. 71, donde las fibras tensadas son marcadas con líneas gruesas, correspondiendo un momento flexionante negativo y las comprimidas con líneas delgadas, teniendo un momento flexionante positivo. Observese que el diagrama de momentos flexionantes cambia de signo en el punto  $M$  de inflexión de la viga, o sea donde cambia el sentido de curvatura. Al punto  $M$  ZAFRA lo llamaba absisa unitaria o límite en su obra "Calculo de Estructuras" trataremos de aclarar el por qué de este nombre.

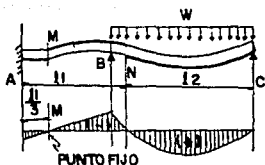


fig. 71

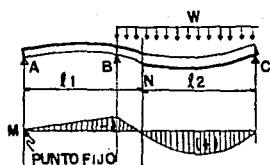


fig. 72

Al sustituir el empotramiento de A (fig. 71) por un apoyo fijo, el punto fijo M se desplaza hasta el apoyo A (fig. 72), teniendo un valor de cero. Por lo tanto, de acuerdo con esta observación, la distancia del apoyo al punto fijo varía, entre cero y un tercio de la luz, cuyo valor depende de la elasticidad de los claros contiguos, punto que aclararemos después de explicar como encontrar los puntos fijos desconocidos.

En una viga existen puntos fijos conocidos que son los que tenemos a una distancia del apoyo A, igual a cero y otro a una distancia del apoyo A igual a un tercio de la luz, caso explicado en el párrafo anterior; pero también hay puntos fijos desconocidos como el marcado con la letra N (fig. 71 y 72) que están situados a una distancia  $0 < l/3$ , pero en todo caso desconocidos. Estos puntos podemos encontrarlos haciendo unos sencillos trazos. Por ejemplo, para encontrar el punto N de la viga (fig. 71). En primer lugar dividimos en tercios cada uno de los tramos (fig. 73), transportamos el tercio de menor vano al tercio del claro contiguo, en este caso  $l_1/3$ , trazamoslo a partir de D hacia la izquierda, en cuyo punto trazamos una vertical; línea que llamamos diferencia de tercios; en seguida, a partir del punto fijo conocido M, trazamos una línea MG de inclinación cualquiera, unimos E con B, prolongamos hasta encontrar F, que unimos con G, siendo el punto FG la intersección del eje de la viga con la recta FG, cuya distancia es obtenida al hacer el dibujo a escala.

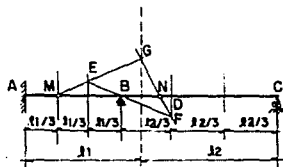


fig. 73

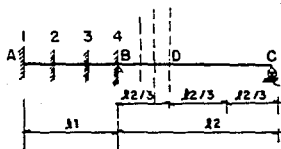


fig. 74

Si el empotramiento A de la viga (fig 71), lo vamos desplazando hacia el apoyo B, situándolo en los puntos 1, 2, 3 hasta llegar a B (fig. 74). Esto equivale a anular el tramo  $l_1$  que al hacerse cada vez más corto va disminuyendo la elasticidad hasta convertirse en un empotramiento perfecto en B. Asimismo observamos que el punto focal N va desplazándose hacia D, en proporción al acercamiento del empotramiento hacia B y cuando alcanza este punto, tenemos el punto focal exactamente en el punto D a una distancia  $l_2/3$ . La construcción anterior nos ayuda a entender cómo la variación de los puntos fijos depende de la longitud de cada uno de los claros contiguos, del tipo de sustentación y no de la carga actuante.

Concluimos que los puntos fijos están situados todos entre un intervalo  $0 < l/3$  independientemente del tipo de carga, el punto fijo encontrado es el límite para el cual puede presentarse la inflexión de la viga; pues la inflexión no depende sólo del tipo de viga sino también del tipo de carga. Por lo cual, nace la necesidad de explicar otro término que son las líneas en cruz o cruzadas.

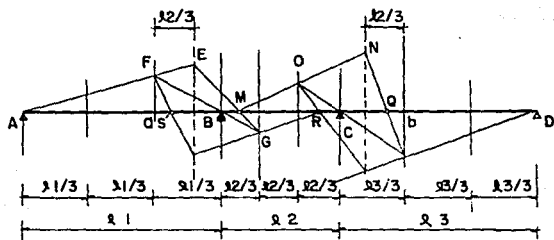


fig. 75

Para calcular los puntos fijos de una viga de varios tramos procedemos en la siguiente forma: consideramos una viga de tres tramos, (fig. 75),  $l_1 = l_3$ ,  $l_2$  menor que los anteriores, en primer lugar dividimos los tramos en tercios y encontramos las líneas diferencia de tercios, en este caso el tercio menor es  $l_2/3$  el cual llevamos a los tercios contiguos de los tramos  $l_1$  y  $l_3$ , trazándolos a partir de los puntos a y b, hacia la derecha e izquierda respectivamente. Después, trazamos la línea AE de inclinación arbitraria, el trazo a partir de A lo podemos empezar ahí pues éste es un punto fijo conocido según se explicó; unimos FB prolongando hasta G que unimos

con E, la intersección de la recta EG con el eje de la viga determina el punto fijo M, conocido este punto trazamos otra línea de inclinación arbitraria MN, unimos OC prolongando hasta P, trazamos la recta PN que determina otro punto fijo conocido y haciendo los trazos por la parte inferior de la viga podemos encontrar los puntos fijos R y S según muestra dibujo de fig.75.

Si el apoyo A estuviera empotrado empezamos el trazo a partir de  $1/3$  medido desde A.

#### 4.3.5. Líneas en cruz

Para poder encontrar los momentos en los apoyos, además de los puntos fijos es necesario conocer las líneas en cruz o cruzadas. Para cada tipo de carga tenemos un diagrama de momentos flexionantes y sus correspondientes líneas en cruz.

Para una viga con carga uniformemente distribuida a lo largo de toda la viga, obtenemos el diagrama de momentos, siendo una parábola del tipo x, las líneas en cruz son las que unen el vértice de la parábola con los apoyos (fig.76).

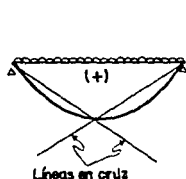


fig. 76

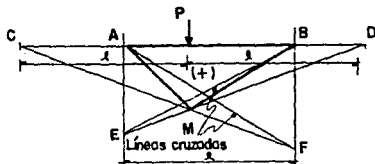


fig. 77

Las líneas en cruz para una viga con carga concentrada las encontramos trazando  $l$  a cada lado de la carga, unimos c con M, prolongando hasta encontrar F y trazamos AF que define la primera de las líneas cruzadas; para encontrar la otra línea procedemos de la misma forma: unimos D con M prolongando hasta encontrar E, que unimos con B siendo ésta la línea en cruz BE (fig. 77).

Para encontrar las líneas en cruz de una carga concentrada sólo en un tramo del claro (fig. 78), podemos considerar la carga como concentrada, para encontrar las líneas en cruz, utilizamos el procedimiento fig. 77, o el que explicamos a continuación, que por supuesto puede aplicarse al caso de carga concentrada en un punto.

Trazamos una línea horizontal BC, unimos cada una con los apoyos, estas líneas las llevamos paralelamente encontrando los puntos E y D que al unir con los apoyos determinan las líneas en cruz (fig.78).

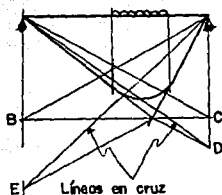


fig.78

Cuando en el tramo de una viga se tienen varios tipos de carga: para encontrar las líneas en cruz, basta con sumar a una de ellas el ángulo de la otra. Por ejemplo, si tenemos una viga con carga uniformemente distribuida y concentrada fig.79 obtenemos para cada diagrama de momentos sus correspondientes líneas cruzadas, la línea en cruz total AC podemos obtenerla con  $\alpha_0 + \beta_0 = \beta_0$  que define la línea cruzada AC y la recta BC es definida por la dirección  $\alpha_1 + \beta_1 = \beta_1$ .

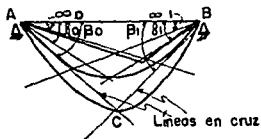


fig.79

El diagrama total es la suma de los dos momentos, para obtener esta gráfica basta sumar a uno de ellos el otro momento en diferentes puntos.

## 4.3.6. Vigas de un tramo con un extremo empotrado

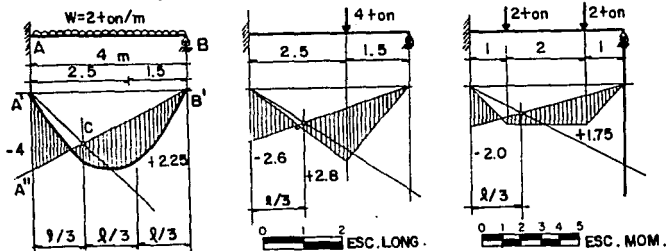


fig. 80

fig. 81

fig. 82

Entre las vigas hiperestáticas que podemos resolver fácilmente por un diagrama a escala, utilizando los métodos gráficos, están las vigas empotradas en uno de sus extremos y en el otro apoyo móvil.

Resolvemos la viga para los dos tipos de carga más comunes. Por ejemplo, para una carga uniformemente distribuida a lo largo de toda la viga (fig. 80), primero procedemos a dividir en tercios el claro de la viga. Determinamos el punto fijo, el cual está ubicado a un tercio medido a partir de A. Ahora hay que encontrar el diagrama de momento isostático que vale  $wl^2/8$  y dibujarlo a escala (especificada en croquis). Encontramos las líneas en cruz; para el problema sólo es necesario la línea a la izquierda, trazamos una vertical que pase por el punto fijo, intersectando la línea en cruz en el punto C, finalmente trazamos la línea B'C que pasa por el punto fijo conocido B', quedando resuelto el problema; siendo el diagrama de momentos flexionantes el que está delimitado por la recta B'C y la parábola de momentos isostáticos. Para obtener el valor numérico del momento; medimos verticalmente, teniendo en cuenta la escala conocida; obtenemos los momentos que nos interesan por lo general son ( $M -$ ) y ( $M +$ ).

En el problema de las vigas con carga concentradas (fig. 81 y 82) el procedimiento es el mismo, obteniendo únicamente otro tipo de momentos isostáticos,  $M = Pba/L$  para la fig. 81.

## 4.3.7. Viga de un tramo doblemente empotrado con momento de inercia constante.

La solución gráfica de una viga con un claro empotrado en sus dos extremos es muy simple (fig. 83 y 84). Al igual que

la viga del problema anterior y para todas las vigas el problema está prácticamente resuelto si sabemos encontrar los puntos fijos, las líneas en cruz y los diagramas de momentos isostáticos. Para este problema en particular los puntos fijos están situados a  $1/3 L$ , medidos a partir de cada extremo, el momento vale  $(wL^2)/8$  para la carga uniformemente distribuida a lo largo de la viga (fig.83) y  $Pba/L$  para la carga concentrada (fig.84). Las líneas en cruz de la fig.83 son  $A'C$ ,  $B'C$  y  $A'D$ ,  $B'C$  para la fig.84; finalmente obtenemos el diagrama de momentos flexionante, quedando determinado por el momento isostático y la línea  $A"B$  que pasa por la intersección entre los puntos fijos y las líneas en cruz.

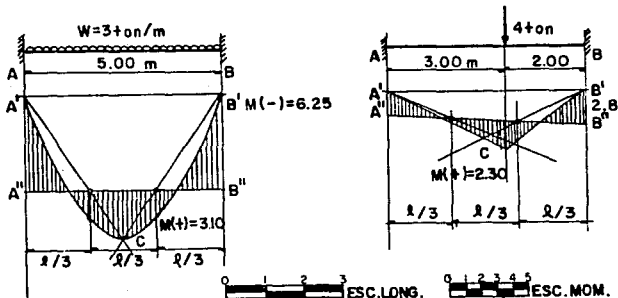


fig.83

fig.84

a) Reacciones en los apoyos y diagrama de esfuerzos cortantes.

El valor total para una reacción de este tipo de vigas es la suma de la reacción isostática debida a carga más la reacción hiperestática producida por un momento en el empotramiento o por la continuidad de la viga misma, en la que existe un momento.

$$\text{Así pues} \quad R_t = R_{ist} + R_{hip} \quad R_{hip} = M/L$$

si la viga es continua a ambos extremos de los apoyos o doblemente empotrada existen dos momentos, por lo tanto la reacción hiperestática vale

$$R_{hip1} = (M_1 - M_2)/L$$

$$\text{y} \quad R_{hip2} = (M_2 - M_1)/L$$

4.3.8 Viga de dos tramos con carga uniformemente distribuida y concentrada.

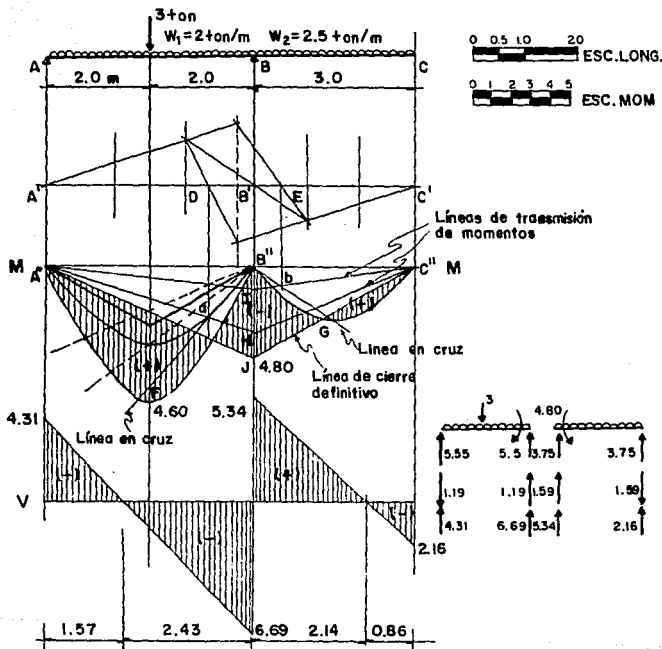


fig. 85

Para resolver gráficamente una viga con más de un tramo y con diferentes cargas, el problema puede llegar a complicarse por la cantidad de trazos que en ocasiones son necesarios hacer. Sin embargo, la solución es muy simple. Por ejemplo, para la viga (fig. 85) determinamos los puntos fijos D y E usando el método explicado; después encontramos los diagramas de momentos isostáticos y trazamos en la parte inferior el dia-



grama de los puntos fijos, luego hay que trazar las líneas en cruz, trazando únicamente las que pasan por B"; pues son las únicas que necesitamos, en el primer tramo de la viga se hace necesario hacer la suma de las dos líneas en cruz (marcadas con líneas punteadas) obtenidas para cada diagrama de momentos y así obtener la línea de cruce total B"F; también, necesitamos obtener el diagrama isostático total para este tramo de viga, encontrándolo al hacer la suma de ambos diagramas para diferentes distancias a lo largo del claro de la misma.

Tenemos ya los puntos fijos, los momentos isostáticos y las líneas en cruz; pudiendo encontrar la intersección a y b entre puntos fijos y líneas en cruz. Ahora trazamos la línea de transmisión de momentos, siendo para el primer tramo A"H y HC" (la línea debe pasar por la intersección "a" y los puntos fijos conocidos A" y C"), para el segundo tramo las líneas de transmisión de momentos son C"l y lA" (la línea debe pasar por la intersección "b" y los puntos fijos C" y A"). Nos queda por encontrar únicamente la línea de cierre definitiva, la cual podemos encontrar sumando o restando, según corresponda, el momento que transmiten las cargas que actúan en el claro contiguo. Para nuestro problema, con sumar los momentos en el apoyo central podemos encontrar esta línea, si sumamos las distancias B"H + B"l = B"J tenemos el punto por donde pasa la línea de cierre definitiva que junto con la línea de momentos isostáticos determinan el diagrama de momentos flexionantes.

De la misma forma como se han resuelto estas vigas simples, podemos resolver vigas de 3, 4 ó 5 tramos, con diferentes tipos de carga empotradas en sus extremos o no, utilizando el método gráfico. El procedimiento es el mismo para cualquier caso que se presente.

Para obtener el diagrama de esfuerzos cortante, teniendo el diagrama de momentos es muy sencilla su determinación. Procedemos primero a descomponer la viga en sus respectivos tramos calculando las reacciones isostáticas para cada viga, en seguida obtenemos el cortante hiperestático para el tramo II.

$$A-V_{hip} = 4.80/L1$$

de tal forma que reaccione como un par, para el tramo 2 donde el cortante hiperestático vale.

$$B-V_{hip} = 4.80/L2$$

Para obtener el cortante definitivo solamente sumamos las reacciones isostáticas e hiperestáticas en cada uno de los puntos A, B y C como muestra dibujo.

#### 4.3.9. Viga de tres tramos con momentos de inercia variables.

Quando las secciones en los tramos son diferentes, la diferencia única que existe en el procedimiento de solución es la forma de encontrar la línea de diferencia de tercios, para después poder determinar los puntos fijos y los momentos en las barras.

Para encontrar la diferencia de tercios en la viga (fig. 86a), dividimos en tercios los tramos. Si los momentos de inercia son  $I_1 = 19,531$ ,  $I_2 = 10,000$  y  $I_3 = 13,333 \text{ CH}^4$ , debemos calcular los coeficientes.

$$a_1 = \frac{I_2}{I_2} = \frac{400}{10,000} = 0.04 \times 100 = 4$$

$$b_1 = \frac{I_1}{I_1} = \frac{500}{19,531.25} = 0.025 = 2.5$$

$$a_2 = \frac{I_3}{I_3} = \frac{350}{13,333} = 0.026 = 2.6$$

$$b_2 = \frac{400}{10,000} = \frac{I_2}{I_2} = 0.04 = 4$$

Después, trazamos líneas de inclinación arbitraria a partir de los puntos  $I_1$  y  $I_2$  (fig. 86b), luego llevamos los valores de los coeficientes en la forma indicada en la figura; unimos los puntos  $X_1$  y  $X_2$  con las líneas de tercios  $I_1'$  y  $I_2'$  respectivamente; finalmente trazamos las líneas paralelas a  $X_1I_1'$  y a  $X_2I_2'$ , a partir de las distancias  $a_1$  y  $a_2$  que nos determinan las líneas de diferencia de tercios en los puntos  $I_1''$  y  $I_2''$ , entonces, podemos ya encontrar los puntos fijos 12345 fig. 86c.

Luego obtenemos los momentos isostáticos (fig. 86d); con las líneas en cruz que intersectan a los puntos fijos en a, b, c, d, y e, trazamos la línea A'a, continuando esta línea hasta el apoyo B, que debe transmitir el momento a los tramos 2 y

3, pasando por los puntos fijos 3 y 5. Continuamos con el tramo 2, unimos las intersecciones de los puntos fijos y líneas en cruz b y c que continuamos hasta los apoyos, hacemos la transmisión de momentos, cuya línea pasa por los puntos fijos A' y 5. Igual hacemos con el tramo tres: uniendo las intersecciones d y e, continuando la línea a los apoyos, transmitimos el momento que pasa por los puntos fijos conocidos 2 y A'. Para encontrar la línea de cierre definitiva, sumamos los momentos de cada tramo con los transmitidos por los otros tramos. Por ejemplo para encontrar la línea A' B'' sumamos los momentos en el apoyo B en la siguiente forma:

$$B'' = m_{11} + m_{21} - m_{31}.$$

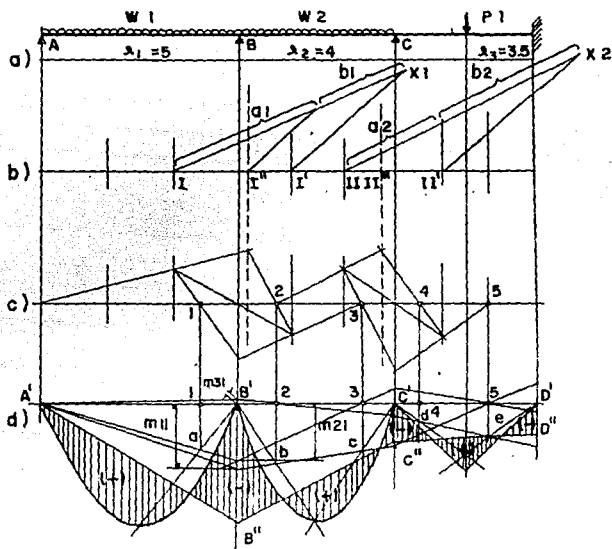


fig. 86

## 5 DETERMINACION GRAFICA DE ARMADURAS

### 5.1. Armaduras isostáticas

#### 5.1.1. Aclaraciones

Una armadura es un sistema compuesto por un conjunto de barras situadas en un mismo plano, de tal manera que formen una red de triángulos llamados sistemas reticulares, armaduras o celosía. En los vértices de los triángulos se forman nudos que unen las piezas con articulaciones sin rozamiento (charnelas). Son llamadas cordones o cabezas a los miembros de la armadura que forman el contorno exterior (fig.87), (inferior ADF, superior ABCE), y las barras que hay entre dos cordones son denominadas barras de relleno o celosías.

En las armaduras, la carga es de aplicación indirecta; pues ésta es aplicada de modo que actúe sobre los nudos utilizando elementos auxiliares.

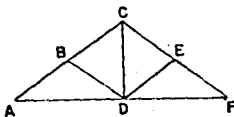


fig.87

Se ha dicho en el primer capítulo que una armadura es isostática sólo si el número de ecuaciones es igual al número de reacciones más el número de barras; si esto no ocurre, entonces la armadura es hiperestática interna o externamente; para poderla resolver es necesaria la aplicación de la teoría de la elasticidad, pero si ésta es isostática basta la teoría de la estática.

#### 5.1.2. Métodos de análisis gráfico para armaduras

Entre los métodos gráficos más conocidos están los de Culmann y el de Cremona: el primero es adecuado para hallar los esfuerzos de algunas barras solamente; cuando es necesario conocer los esfuerzos en todas las barras es recomendable utilizar el método gráfico de Cremona que deduce los esfuerzos en las barras correspondientes con la aplicación sucesiva de diagramas de fuerzas; para ilustrar dichos métodos utilizamos un ejemplo práctico de la armadura Alemana.

### a) Método gráfico de Culmann

Para encontrar los esfuerzos en todas las barras de una armadura utilizando el método gráfico de Culmann; resulta igual de laborioso que el método analítico de los nudos; siendo éste, especialmente indicado para hallar los esfuerzos sólo de algunas de las barras. Resolvamos la armadura (fig. 88a). Si hacemos un corte N - N de tal forma que corte a lo más tres barras. Para restablecer el equilibrio del sistema aplicamos las fuerzas internas V,U,W; que sólo pueden actuar en la dirección de las barras existiendo sólo esfuerzos de compresión y tensión.

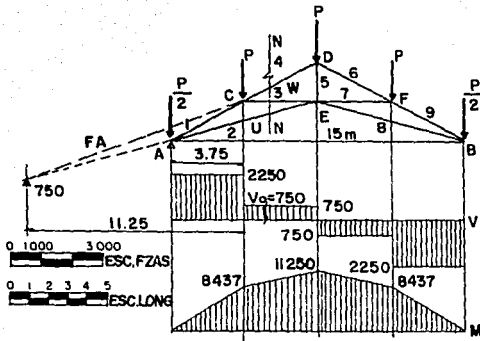
El cálculo de las fuerzas V,U y W, pueden hacerse con el método de Culmann (fig. 88b) (obsérvese que nos encontramos en el caso explicado en 2.2.6. "Descomposición de una fuerza en tres componentes no concurrentes de línea de acción conocida").

Las fuerzas que debemos encontrar actúan en las direcciones de las barras 234. La fuerza desconocida es el esfuerzo cortante que actúa en el corte N-N; si obtenemos la fuerza cortante en este punto, debemos también localizar la línea de acción donde ésta actúa (este punto está ubicado a una distancia tal que  $V_0 \cdot x = MF$ ), el producto del esfuerzo cortante por su distancia nos determina el momento flexionante en el punto donde se hacen concurrir las fuerzas (fig. 88a).

Resuelta esta parte, para encontrar las magnitudes de las tres componentes (fig. 88b), basta trazar  $V_0$  a escala, teniendo en cuenta el sentido, llevamos U paralela a AC hasta  $V_0$ , igual llevamos la fuerza auxiliar Fa que cierra el polígono y aún faltan por encontrar dos componentes. Para encontrarlas descomponemos Fa en las componentes W y V paralelas a las líneas de acción 3 y 4 respectivamente. Obsérvese que el polígono es cerrado y por lo tanto el sistema está en equilibrio.

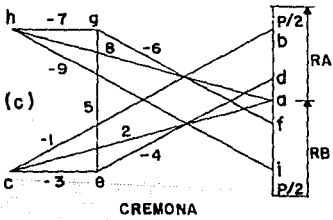
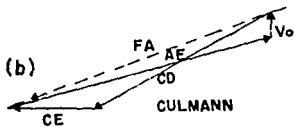
Para saber si las fuerzas corresponden a tensión o compresión se sigue la regla: cuando las fuerzas actúan hacia el nudo es una compresión y si actúa en el otro sentido entonces es tensión.

La magnitud de las fuerzas, la determinamos midiendo a escala cada una de las componentes obtenidas en el trazo.



VALORES OBTENIDOS  
POR EL METODO DE  
CREMONA.

- 1 = 9600 Kg.
- 2 = 8800 "
- 3 = 2800 "
- 4 = 6350 "
- 5 = 4450 "
- 6 = 6350 "
- 7 = 2800 "
- 8 = 8800 "
- 9 = 9600 "



VALORES DEL METODO  
DE CREMONA.

- CE = 2800 Kg.
- CD = 6350 "
- AE = 8800 "
- RA = 3000 Kg.
- RB = 3000 Kg.

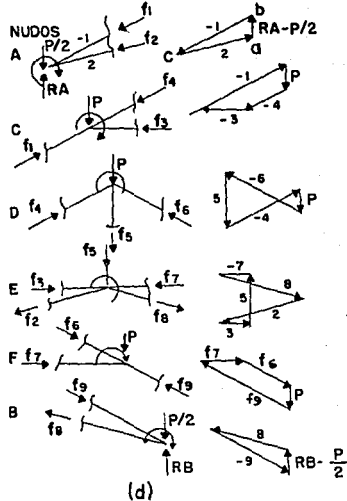


fig. 88

### b) Método gráfico de Cremona

El método de Cremona, resuelve el problema gráficamente por el principio de los nudos, estableciendo el equilibrio en cada nudo por medio de una sucesión de polígonos de fuerzas. Las fuerzas actúan en la dirección de las barras, teniendo el mismo punto de aplicación; por lo cual, trabajaremos con sistemas de fuerzas concurrentes y coplanares.

Para aplicar este método es necesario seguir un sentido de análisis que sea el mismo para todos los nudos, empezando con una fuerza conocida y terminando con la última desconocida.

Para hacer el análisis gráfico de la armadura (fig. 88a) seguimos el giro de las manecillas del reloj, designamos las barras con números y los nudos con letras. Los datos necesarios para realizar el cálculo; están dados en la figura mencionada, las cargas están compuestas del peso propio y de la presión de la masa ( $P = 1500 \text{ Kg.}$ ), para determinar las fuerzas en las barras la figura debe ser trazada a escala (escala de longitudes) y el trazo del polígono de Cremona (a escala de fuerzas (fig. 88c)). Para determinar las fuerzas en cada una de las barras; debemos empezar por un nudo donde haya no más de dos fuerzas desconocidas y una fuerza conocida, en nuestro caso podemos empezar por los nudos A ó B iniciando por el nudo A.

La armadura tiene cargas simétricas verticales, donde las reacciones son fácilmente deducibles, teniendo que:

$$R_a = R_b = 1/2P$$

Para una mayor claridad del método, analizamos cada nudo por separado con la presentación del diagrama de fuerzas (fig. 88d) para cada nudo analizado de la (fig. 88a), a la vez vamos construyendo el diagrama de Cremona (fig. 88c). Suponemos cortadas las barras 1 y 2 para restablecer el equilibrio en el sistema es necesario aplicar las fuerzas  $f_1$  y  $f_2$  (fig. 88d), el valor de estas fuerzas lo encontramos fácilmente si construimos un triángulo de fuerzas abc, dibujamos a escala la fuerza que actúa en el nudo A ( $R_a = P/2$ ) y trazamos las líneas paralelas a las barras 1 y 2, líneas de acción de las fuerzas desconocidas  $f_1$  y  $f_2$  que actúan también en el nudo A, la intersección de las líneas 1 y 2 se localiza en el punto c, con este trazo hemos encontrado los valores de las fuerzas siendo  $1 = bc$  y  $2 = ca$ . El trazo del polígono debe realizarse siguiendo

el sentido de las manecillas del reloj, debemos trazar primero  $ab$  seguidos de  $bc$  y  $ca$ , para que no se tenga confusión hay que poner el número de la barra que corresponda a la fuerza en el diagrama de Cremona; además, marcamos con el signo (-) la fuerza de compresión y con (+) la de tensión, estos signos no indican operación únicamente los utilizamos para distinguir el tipo de fuerza.

Si seguimos analizando la armadura, debemos continuar con el nudo C, único nudo que tiene dos fuerzas desconocidas. Haciendo un corte alrededor del nudo C, el equilibrio es restablecido al aplicar las fuerzas  $f_1$ ,  $f_4$  y  $f_3$ ; conocemos las fuerzas  $f_1$  y  $P$ , la primera fuerza conocida es  $f_1$  y la última desconocida es  $f_3$ , según el sentido de análisis. En la construcción del polígono de Cremona, tenemos trazado  $f_1$  marcada como -1, ahora trazamos  $P$  igual a  $bd$ . Nos falta únicamente por conocer  $f_4$  y  $f_3$ , las cuales actúan siguiendo las direcciones de las barras 4 y 3, las que llevamos paralelamente al polígono de Cremona (fig.88c). Construido el polígono de fuerzas cerrado para el nudo C, hemos determinado las magnitudes y sentidos desconocidos para estas fuerzas.

Podemos continuar describiendo la forma como se va construyendo el polígono de Cremona para cada nudo. Esto es innecesario, pues la fig.88d muestra claramente el proceso seguido. Indicando el sentido de análisis en cada nudo y el recorrido de la armadura está marcado con la numeración.

### 5.1.3. Armaduras de una sola vertiente

Por lo general son empleados en tejados alados; como son las marquesinas, balcones, andenes, entramados de edificios, etc.

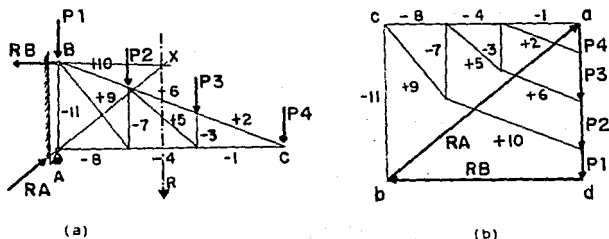


fig.89

En la fig.89, está representada una armadura de este tipo, sometida a las cargas  $P1234$ , en el punto A la armadura



está apoyada en una articulación y en B anclada horizontalmente.

Para encontrar las reacciones en A y B, localizamos la línea de acción de R, para ello prolongamos la dirección de B que interseca R en x y unimos A con x; enseguida con un polígono vectorial abd fig. 89b, encontramos las magnitudes RA y RB.

Los esfuerzos en las barras los podemos encontrar trazando el polígono de Cremona, comenzamos en el nudo C, continuando hasta llegar a B. El diagrama resuelto se presenta en la fig. 89b, observese como el polígono cierra perfectamente con las fuerzas exteriores.

## 5.2. Deformaciones elásticas de los sistemas reticulares planos.

Las fuerzas exteriores actuantes en un sistema reticular plano, producen en las barras esfuerzos de tensión o compresión; los cuales, a su vez ocasionan deformaciones de alargamiento o acortamiento y giro, para cada uno de los elementos.

Según la Mecánica, una barra de longitud L y área transversal A, sometida a un esfuerzo T, sufre una variación de longitud  $\Delta L = + \frac{TL}{EA}$  -----5

Donde el signo (+) indica tensión, y (-) compresión. Si todos los puntos de una barra experimentan el mismo aumento de temperatura t se produce un incremento de longitud adicional

$$\Delta L' = w \cdot t \cdot l$$

siendo w - el coeficiente de dilatación

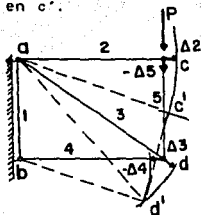
Los alargamientos o acortamientos para las diferentes barras son proporcionados directamente por la ecuación 5. Debido a las deformaciones en las barras, se producen giros que determinan una nueva posición en los nudos, cuyas posiciones definen la deflexión del sistema reticular.

El Ingeniero Francés Williot desarrolló un método gráfico para determinar la deformación elástica aplicando el siguiente razonamiento.

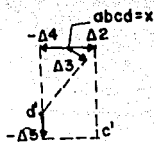
En el tablero de la fig. 90; sujeto a una fuerza P, se desean encontrar las deflexiones de los puntos d y b que resultan de las deformaciones  $\pm \Delta L$ .

Para iniciar la adición de esfuerzos empezaremos en un punto fijo, en este caso a y b. El primer punto móvil a calcular d; que está unido directamente a los dos puntos fijos. Usando un compás con radio  $\pm \Delta L$ , trazamos un arco que

intersecta el arco  $4 - \Delta 4$  en el punto  $d'$  que indica la nueva posición de  $d$  (girando desde  $d$  hasta  $d'$ ). Igual hacemos para encontrar el punto  $c'$ , trazamos los arcos  $5 - \Delta 5$  haciendo centro en  $d'$  y  $2 + \Delta 2$  con centro en  $a$ , que se intersectan en  $c'$ .



(a)



(b)

fig.90

La construcción anterior puede ser práctica en estructuras pequeñas, pero no para estructuras reales donde las deformaciones y los giros son muy pequeños no pudiendo distinguirse la deformación..

Williot notó que si efectuaba las mismas operaciones con la misma secuencia, pero considerando todas las longitudes iniciales a cero, puede obtenerse la misma información (fig. 90b). Además, con esta construcción no es necesario utilizar el tamaño real de la estructura, teniendo la libertad de elegir la escala conveniente para obtener una mayor exactitud.

Para hacer el diagrama (fig.90b). Consideramos que todas las longitudes en las barras valen cero, con lo cual se traen todos los puntos  $a, b, c$  y  $d$  al punto llamado  $x$ , siendo el anterior, el lugar de arranque del diagrama de Williot.

Los puntos de la estructura deformada se localizan por medio de la deformación en dos miembros que tengan un extremo fijo, los puntos  $a$  y  $b$  son fijos, empezamos en el punto  $a$  que nos permite localizar el punto  $d'$ .

Para localizar  $d'$  trazamos  $-\Delta 4$  y  $\Delta 3$  en correspondencia con el signo a partir de  $x$ ; hecho esto, debemos trazar arcos que intersecten en  $d'$ . Sin embargo, en el diagrama de Williot, los arcos se convierten en rectas ortogonales a las direcciones de las deformaciones  $\Delta 4$  y  $\Delta 3$  que se intersectan en  $d'$ , lugar donde trazamos  $-\Delta 5$  que intersecta en línea perpendicular, a la línea de acción de  $\Delta 2$  en el punto  $b'$ , con lo cual hemos encontrado la deformación de la armadura simple (fig.90).

Resolvamos un ejemplo (fig.91a). Primero trazamos el diagrama de Cremona y encontramos los esfuerzos en las barras,

suponemos unas secciones transversales de las barras de las cuales conocemos sus áreas. Utilizamos  $E=2\ 100\ 000\ \text{Kg/cm}^2$ , de terminamos las deformaciones  $\Delta L$  de cada barra, luego construimos el diagrama de Williot (fig.91b), que se aumento 15 veces.

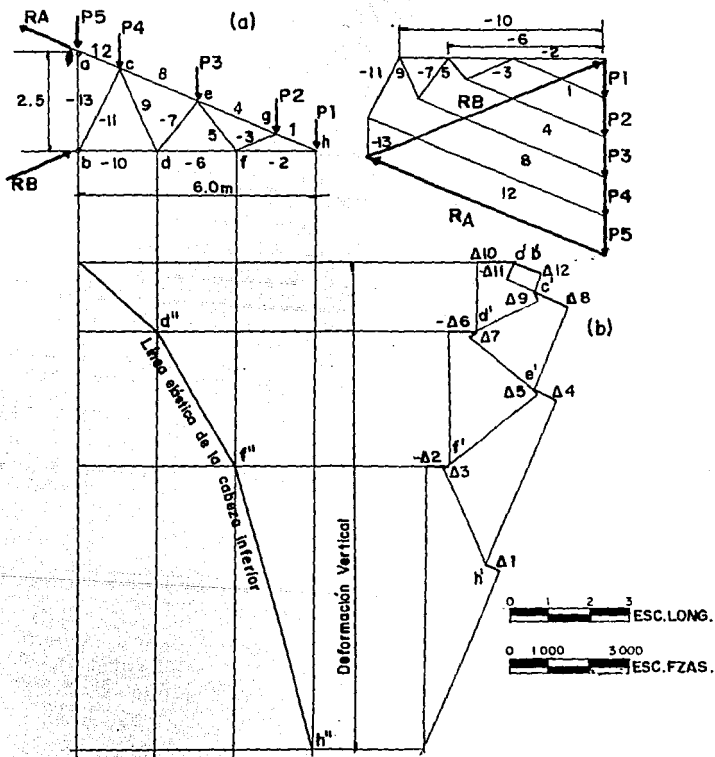


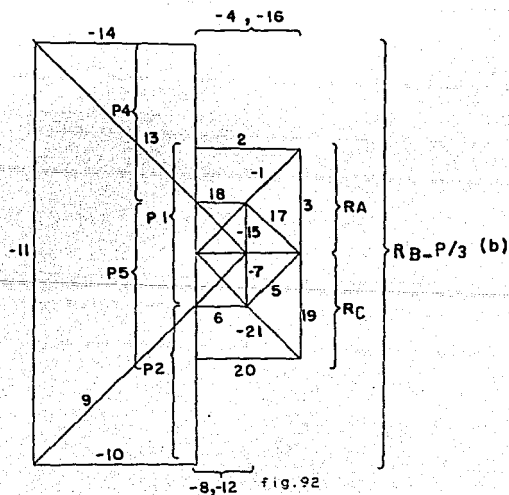
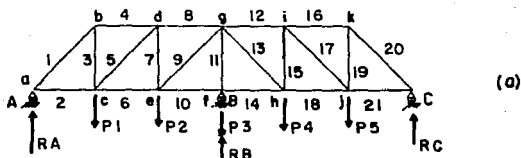
fig.91

BARRA	ESFUERZO (Kg.)	LONG. (CM)	PERFIL (CM)	AREA (CM <sup>2</sup> )	L = L EA	DEFORMACIONES DE LA BARRA AUMENTADA 15
1	+2700	140	35x4	5.34	+0.034	0.51
2	-2500	200	35x4	5.34	-0.045	0.67
3	-1100	90	35x4	5.34	-0.009	0.14
4	+3650	190	40x4	6.16	+0.054	0.81
5	+ 850	160	35x4	5.34	-0.012	0.18
6	-3880	200	40x4	6.16	-0.059	0.88
7	+1440	160	35x4	5.34	-0.020	0.30
8	+5200	200	40x4	6.16	+0.080	1.20
9	+1200	220	35x4	5.34	+0.024	0.36
10	-5250	200	40x4	6.16	-0.081	1.22
11	-1750	240	35x4	5.35	-0.037	0.56
12	-6600	120	40x4	6.16	+0.061	0.91
13	_____	250	35x4	5.34	_____	_____

### 5.3. Armaduras hiperestáticas.

Según se mencionó en el capítulo I, existen armaduras de hiperestaticidad externa o interna, cualquiera que ésta sea, el problema se puede resolver utilizando el polígono de Cremona; con el auxilio de otros métodos, que nos ayuden a encontrar el valor de las redundantes.

#### 5.3.1 Armadura de hiperestaticidad externa



Ejemplifiquemos con una armadura fig.92a, estáticamente indeterminada exteriormente con una redundante. Si calculamos los valores de las reacciones RA, RB, y RC por el método gráfico de los puntos fijos o si se prefiere algún método analítico, el problema puede resolverse fácilmente construyendo el polígono de Cremona (fig.91b), cuyos diagramas de fuerzas están desglosados en la fig.92c, correspondientes a cada nudo del diagrama de la armadura (fig.92a).

### 5.3.2. Armadura hiperestáticamente interna

Si la armadura resulta ser con hiperestaticidad interna como lo es la armadura fig 93a, para resolverla procedemos en la siguiente forma.

El polígono de Cremona puede construirse sin ningún problema para los nudos a,b,c,d y e, pero al llegar al nudo f nos encontramos con una redundante, o sea hay tres esfuerzos desconocidos y con el método de Cremona sólo podemos resolver problemas estáticamente determinado ( con dos incógnitas a lo máximo); lo mismo ocurre si pasamos al nudo g. Por lo cual no es posible seguir el análisis hasta conocer el valor del esfuerzo en una de las barras que concurren en cualquiera de los nudos f ó g.

El valor de estos esfuerzos los podemos encontrar si hacemos un corte que afecte las barras de cualquiera de los nudos que nos interesa conocer, el corte debe hacerse de tal forma que no cargamos nuevamente en un sistema indeterminado, luego hay que encontrar los valores para las barras utilizando el método gráfico de Culmann o el método analítico de secciones (método de Ritter). Este último método es muy práctico pues permite encontrar el esfuerzo en una sola de las barras, caso que no es posible con el método gráfico Culmann para el que hay que componer todas las direcciones de las barras.

El método de Ritter consiste en aislar por medio de un corte una parte de la armadura y considerarla como cuerpo libre que debe permanecer en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores y las fuerzas de los miembros afectadas por el corte. El corte debe hacerse de tal forma que las fuerzas desconocidas no sean más de tres, ni sean todas concurrentes, pues de lo contrario caemos en un problema indeterminado.

Volviendo al problema, si hacemos un corte que afecte al menos una de las barras que concurren en el nudo f, nos encontramos con que todos los cortes posibles afectan a cuatro barras. Sin embargo, si hacemos un corte que afecte una de las barras que concurren en g, con 3 incógnitas como máximo, teng

# ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

79

mos el corte R - R que resuelve nuestro problema, pudiendo aplicar sin ningún problema el método de Ritter para encontrar la fuerza desconocida f22:

$$\Sigma M_i = 0$$

$$5,5P \times 12,5 - P \times 10,5 - P \times 8,0 - P \times 6,2 - P \times 4,2 - 2,2P - f22 \times 5 = 0$$

$$f22 \times 5 = -68303$$

$$f22 = 13622 \text{ Kg.}$$

Después de encontrada la magnitud de la barra 22 en el nudo g, tenemos solamente 3 incógnitas por lo que podemos continuar analizando la armadura para todas las demás nudos f, n, i, j, y k según muestra la fig.93b.

La armadura que estudiamos es de cargas simétricas, para la cual basta resolver la mitad de la armadura, los valores obtenidos en la primera mitad de la armadura son igual a las barras homólogas de la otra mitad.

valores de los esfuerzos para la armadura  
fig.93.

1 = 10 600 Kg.	-12 = 22 600 Kg.
2 = 8 500 "	-13 = 1 750 "
3 = 6 500 "	14 = 2 250 "
4 = 20 400 "	-15 = 2 600 "
5 = 22 750 "	16 = 2 700 "
6 = 25 000 "	-17 = 5 150 "
-7 = 26 800 "	18 = 2 700 "
-8 = 26 000 "	-19 = 2 600 "
-9 = 23 000 "	20 = 2 600 "
-10 = 22 250 "	-21 = 1 750 "
-11 = 23 400 "	22 = 1 300 "

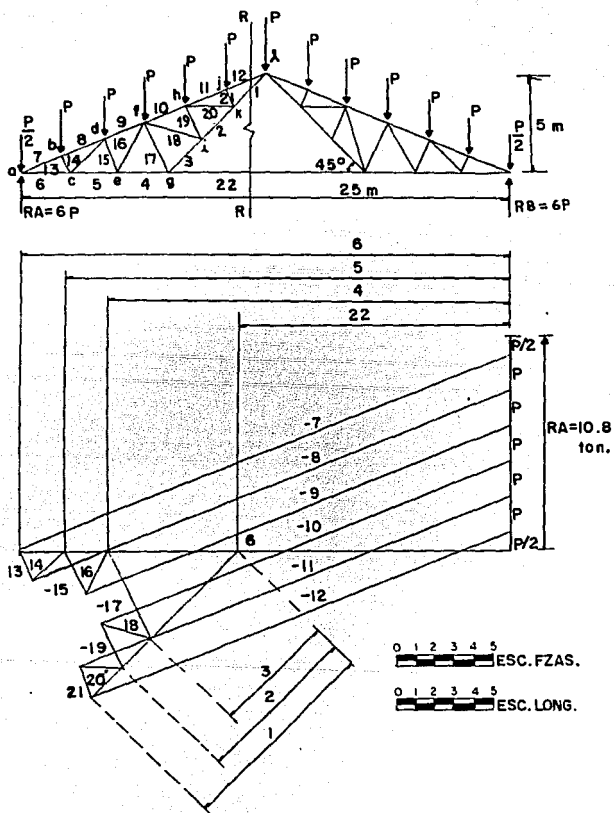


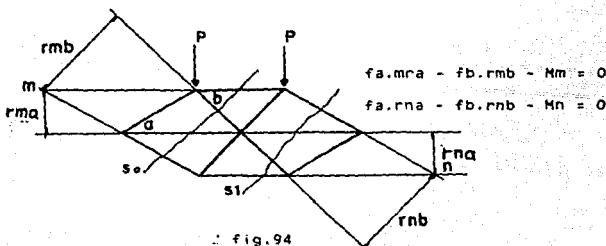
fig. 93



### 5.3.3. Método de doble sección de Ritter.

Cuando no es posible trazar una sección que corte a tres barras no concurrentes y que separe en dos partes la estructura, podemos trazar dos secciones  $S_0$  y  $S_1$  las cuales cortan cuatro barras cada una (fig.94), de las que dos son comunes a ambas secciones.

Para encontrar los esfuerzos en las barras comunes a las dos secciones, escribimos para cada sección la ecuación de momentos referidas a los puntos  $m$  y  $n$ , intersección de las líneas de acción de las barras no concurrentes a los cortes de cuyas expresiones se obtiene un sistema de dos ecuaciones que tiene como incógnitas los esfuerzos para estas barras.



donde  $M_m$  es el momento que producen  $P_1$  y  $P_2$  respecto de  $m$   
 $M_n$  es el momento que producen  $P_1$  y  $P_2$  respecto de  $n$   
 $r_{ma}$  y  $r_{mb}$  son las distancias desde  $m$  a las barras  $a$  y  $b$   
 $r_{na}$  y  $r_{nb}$  son las distancias desde  $n$  a las barras  $a$  y  $b$

Resolviendo el sistema anterior se deducen los esfuerzos  $f_a$  y  $f_b$ .

En ocasiones no es posible resolver el sistema, esto sucede cuando el determinante de los coeficientes es nulo.

$$\frac{r_{ma}}{r_{mb}} = \frac{r_{na}}{r_{nb}}$$

Lo cual se presenta cuando el punto de corte  $o$  de las barras  $a$  y  $b$ , está alineado con los puntos  $m$  y  $n$ .

Sin embargo, es preciso notar que existen otros métodos analíticos igualmente prácticos para determinar esfuerzos en una sección de 4 incógnitas como son: método de la suma de momentos y método de transporte de barras.

### 5.3.4. Armaduras con diagonales cruzadas

La armadura de puente (fig.95), es indeterminada 4 veces según puede observarse. Si pretendemos resolverlo por el método de Cremona debemos conocer por lo menos los esfuerzos de 4 barras diagonales (5,10,16 y 21) ó (6,11,15 y 20). Sin embargo, un análisis en esta forma resulta complicado; deberíamos hacer 4 secciones las que resultarían ser de 4 barras complicando más su estudio.

En lugar de encontrar las redundantes por secciones, podemos dividir la armadura primaria en dos armaduras parciales (a) y (b) lo mismo hacemos con las cargas.

Las armaduras parciales son estáticamente determinadas y por lo tanto podemos construir sin ningún problema el polígono de Cremona para cada una.

Si se ha determinado la magnitud de cada barra para la armadura (a) y (b), para encontrar los esfuerzos de la armadura primaria: sumamos los esfuerzos de las barras que existan en las dos armaduras. Por ejemplo, para obtener el esfuerzo de las barras  $1 = 1' + 1''$ ,  $3 = 3' + 3''$  y así sucesivamente para cada barra. Para las barras diagonales el esfuerzo que se obtenga en las armaduras parciales es el que corresponda a la armadura primaria, así es válido proceder para este tipo de problemas.

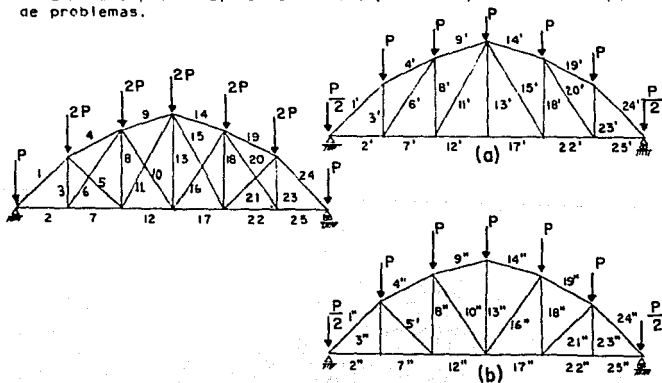


fig.95

## 6. SOLUCION GRAFICA DE ARCOS Y PORTICOS

### 6.1 Arcos isostáticos

#### 6.1.1. Aclaraciones.

Son llamados arcos, las estructuras curvas que cargadas verticalmente producen presiones oblicuas en los apoyos. Éstos se comportan como una viga de eje curvo, cuyas reacciones dependen de las características de los uniones o sustentaciones, dependiendo de éstas tenemos que las estructuras son isostáticas o hiperestáticas.

Cuando el arco tiene una extensión en el sentido de su anchura recibe el nombre de bóveda, los porticos son estructuras continuas que pueden estar formados por un número variable de elementos, todos rectos o curvos y curvos, cuando están formados de elementos rectos ortogonales reciben el nombre de marcos (fig.96c).

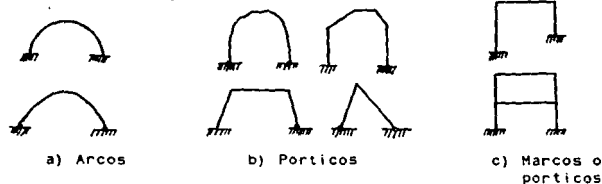


fig.96

Para el estudio de los arcos es necesario hacer un análisis de los grados de indeterminación para los diferentes tipos de sustentación utilizados en la construcción; así por ejemplo, consideramos el arco de la fig.97a, sometido a una fuerza  $F$ , cuya carga dá origen a las reacciones  $R_A$  y  $R_B$ , de las cuales desconocemos: las direcciones, magnitudes y puntos de aplicación, o bien desconocemos las componentes --

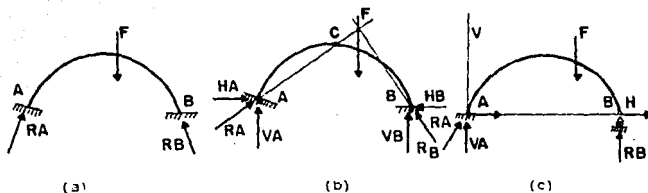


fig.97

horizontales y verticales de RA y RB y sus momentos de empotramiento en A y B. Para encontrar las 6 reacciones sólo digamos que ponemos 3 ecuaciones de la estática:  $V = 0$ ,  $H = 0$  y  $M = 0$ , siendo el sistema 6-3=3 veces indeterminado ( para un arco empotrado en sus dos apoyos)

Para lograr un sistema isostático es necesario eliminar 3 redundantes, lo cual logramos utilizando otro tipo de sustentación diferente al empotramiento. Si el arco anterior lo colocamos 3 articulaciones una en cada apoyo y otra en la clave, tenemos un arco isostático ( fig.97b).

Teóricamente este tipo de apoyos: articulaciones, pueden considerarse como un punto por el cual deben pasar las reacciones, como en ellos está impedido el desplazamiento la reacción puede tener una dirección cualquiera. Así pues, escogemos unos ejes ortogonales que pasen por las articulaciones de sustentación A y B, descompones las reacciones RA y RB que las siguientes componentes horizontales y verticales:

$$RA = \begin{cases} HA -? \\ VA -? \end{cases} \quad RB = \begin{cases} HB -? \\ VB -? \end{cases}$$

o bien gráficamente desconocemos

$$RA \begin{cases} Magnitud -? \\ Dirección -? \\ Punto de aplicación - \end{cases} \quad RB \begin{cases} Magnitud -? \\ Dirección -? \\ Punto de aplicación - \end{cases}$$

Observamos que el problema tiene cuatro incógnitas y la estática sólo da tres ecuaciones para establecer el equilibrio en el sistema. Sin embargo, puede establecerse una cuarta ecuación sabiendo que la línea de presiones debe pasar necesariamente por la articulación C, esto es:

$$McF_i = 0$$

Enunciado nos dice que:

"La suma de los momentos con respecto a la articulación C, de todas las fuerzas que se encuentran a la izquierda de la sección de dicha articulación, deben ser iguales a cero" (15).

Con esta ecuación tenemos cuatro. Tres que establece la estática y la cuarta establecida por las condiciones, de que la línea de presiones debe pasar forzosamente por la articulación de enlace C y 4 incógnitas, demostrando que se trata de un problema isostático.

Otro arco isostático es el de la fig.97c, para encontrar la dirección de las reacciones trazamos unos ejes ortogonales, de tal manera que uno pase por los apoyos A, B y el otro por A; del trazo conocemos las componentes  $H_A$  y  $V_A$  de la reacción  $R_A$ , la reacción  $R_B$  es conocida en dirección, debe actuar perpendicular al plano de apoyo. Del problema desconocemos las magnitudes de las tres reacciones, mismas que podemos determinar directamente por las ecuaciones del equilibrio.

#### 6.1.2. Línea de Presiones.

Para el estudio de las estructuras de eje curvo, la línea de presiones, o línea de fuerzas obtenida al formar secciones a la izquierda de un corte cualquiera de la viga curva, consideradas todas y cada una de las secciones transversales, no es otra cosa que las fuerzas interiores de compresión a que está sometido el elemento estructural.

Para encontrar la línea de presiones es necesario haber determinado las reacciones. Por ejemplo, para la fig.98 podemos encontrar fácilmente la línea de presiones, trazando los polígonos de fuerzas y funicular, (para el problema consideremos conocidos  $R_A$  y  $R_B$ ).

Trazamos el polígono de fuerzas; el cual, debe contener  $R_A$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  y  $R_B$ , que debe ser cerrado y tener un mismo sentido en su contorno. Considerando como polo O el punto de intersección de las dos reacciones  $R_A$  y  $R_B$ ; el radio vector 1, en este caso es igual a  $R_A$ , siendo ésta la única fuerza que actúa a la izquierda de la sección a-a; el vector 2 es la resultante de las fuerzas  $R_A$  y  $F_1$  que actúan a la izquierda del corte b-b; el vector 3 es la fuerza resultante de  $R_A$ ,  $F_1$  y  $F_2$  que actúan a la izquierda del corte c-c. Al trazar el polígono funicular 123 hemos encontrado la dirección por donde pasa la línea de presiones y el polígono vectorial determina las magnitudes de estas fuerzas para cada sección de la viga curva. Si el arco lo sustituimos por la figura que forma la línea de presiones articulandola en sus uniones, tenemos un sistema trabajando a compresión únicamente.

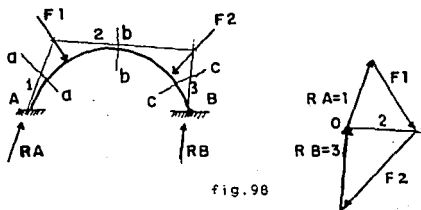


fig.98

## 6.1.3 Solución Gráfica del Arco Tri-articulado.

## a) Solución General

El arco de tres articulaciones es una estructura formada por dos barras de eje curvo, que tienen una articulación de enlace común a las dos barras y en sus apoyos articulaciones de sustentación.

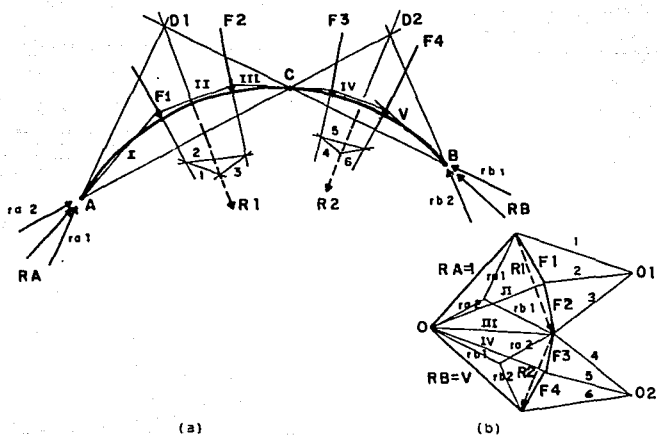


fig.99

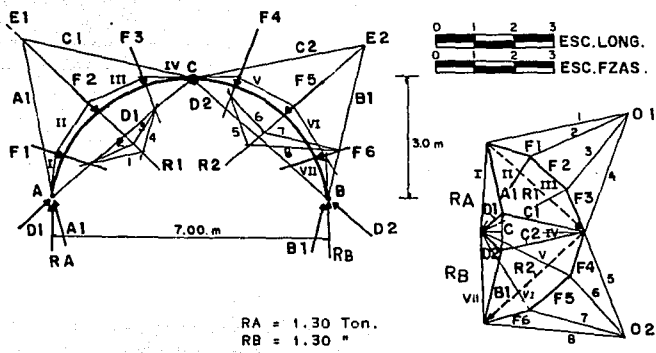
Para resolver el arco (fig.99a), se procede por etapas. Primero consideramos que sólo está cargada la barra CB, para la cual encontramos la fuerza resultante  $R_2$ , determinada al componer las fuerzas  $F_3$  y  $F_4$ , mediante el polígono vectorial de polo  $O_2$  y su correspondiente polígono funicular 456, que determina la línea de acción.

Las reacciones parciales  $ra_2$  y  $rb_2$  que produce  $R_2$  podemos encontrarlas, sabemos que la línea de presiones debe pasar forzosamente por la articulación C, la única fuerza que está a la izquierda de la sección C es la reacción  $ra_2$ . Por lo tanto, esta reacción debe pasar por las articulaciones A y C; la prolongación de la recta AC interseca la línea de acción de  $R_2$  en D<sub>2</sub>, al unir este punto con B encontramos la dirección de  $rb_2$ . El procedimiento seguido es válido pues únicamente tenemos tres fuerzas  $ra_2$ ,  $R_2$  y  $rb_2$ . Conocemos las direcciones de  $ra_2$  y  $R_2$ , las cuales no son paralelas. Por lo tanto, para que tres fuerzas estén en equilibrio es necesario que sean concurrentes, siendo concurrentes precisamente en D<sub>2</sub> el sistema de fuerzas  $ra_2$ ,  $R_2$  y  $rb_2$ .

De igual manera resolvemos para la barra AC, encontrando las reacciones parciales  $ra_1$  y  $rb_1$ . Tenemos ya definidas la magnitud y dirección de  $R_2$  y las direcciones  $ra_2$ ,  $rb_2$ . Para encontrar las magnitudes de estas reacciones, llevamos paralelamente a los extremos de  $R_2$  las direcciones encontradas, formando un polígono de fuerzas  $R_2$ ,  $ra_2$  y  $rb_2$ , con el mismo sentido en su contorno (fig. 99b). Se presenta el mismo caso con  $R_1$ ,  $ra_1$  y  $rb_1$  procediendo a hacer lo mismo para encontrar las magnitudes  $ra_1$  y  $rb_1$ .

Para encontrar la reacción RA componemos las reacciones parciales  $ra_1$  y  $ra_2$ , llevando  $ra_2$  paralelamente al extremo de  $ra_1$ , cuya resultante define RA en magnitud, dirección y sentido. Igual hacemos para encontrar RB, componiendo  $rb_1$  y  $rb_2$ . La intersección Ra y RB determina el polo O que es solución del problema y lo utilizamos para trazar los vectores I, II, III, IV y V que forman el polígono funicular de la línea de presiones. El polígono funicular debe pasar forzosamente por las articulaciones A, B y C; siendo cada radio resultante, de todas las fuerzas situadas a la izquierda de la sección considerada. Por ejemplo, el radio polar III es la resultante de las fuerzas RA y F<sub>1</sub> y F<sub>2</sub> situadas a la izquierda del corte c-c.

Cuando tenemos un arco de tres articulaciones, demasiado curvo, frecuentemente las líneas de acción de las fuerzas resultantes no se intersectan con las líneas de unión de las articulaciones, o caen fuera del alcance del dibujo por lo que el método anterior es sustituido por el que se describe a continuación.



RA = 1.30 Ton.  
RB = 1.30 "

Fig. 100

Resolvemos el arco (fig.100a) a modo de ejemplo, el cual tiene los datos: altura 3m, luz 7m y las fuerzas F123456 de igual magnitud 1.2 ton.

Calculamos primero las dos resultantes R1 y R2 de la forma conocida; luego descomponemos R1 en las fuerzas A1 y C1 que hacemos concurrir en un punto arbitrario E1, cuyas componentes han de pasar, una por la articulación A y la otra por C. Descomponemos de la misma manera la resultante R2, haciendo concurrir las componentes B1 y C2 en un punto cualquiera E2.

Componemos las fuerzas C1 y C2 en el polígono vectorial (fig.100b), dando origen a la fuerza C que debe descomponerse en las componentes D1 y D2 de direcciones conocidas AC y BC. Finalmente, encontramos las reacciones en los apoyos: en A componemos A1 y D1, obteniendo RA y en B componemos D2 y B1 que nos da RB, la intersección de estas reacciones define el polo O, que utilizamos para trazar el diagrama de presiones, definido por el funicular I, II, III, IV, V, VI y VII.

b) Cargas verticales

b.1) Bóveda con cargas verticales asimétricas.

Las bóvedas están unidas al sistema tierra por los estribos E1 y E2 (fig.101), para este sistema tenemos seis incógnitas, sin embargo como los materiales de construcción de las bóvedas no son completamente elásticas para simplificar su



solución se plantea la hipótesis de que una bóveda actúa como arco triplemente articulado, considerando articulaciones en la unión entre la bóveda y los estribos y otra en la clave cuya posición se supone arbitraria.

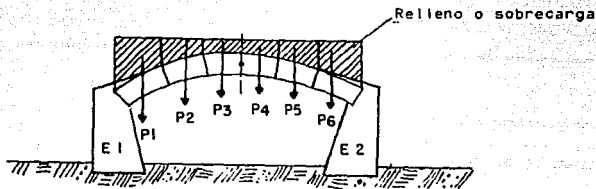


fig.101

Para determinar las reacciones en los apoyos de un arco con cargas asimétricas; en el caso general de cargas verticales, primero encontramos los pesos que actúan en la bóveda, dividiendo el área en cortes normales a la superficie de intrados (fig.101), formando dovelas para las cuales encontramos su peso, igual obtenemos los pesos de las dovelas del relleno o sobrecarga y los sumamos con los pesos de las dovelas obteniendo finalmente los pesos actuantes  $P_1$  y  $P_2 \dots P_n$ .

Para resolver el arco consideramos que se obtuvieron los pesos  $F_1, F_2, \dots, F_c$  (fig.102a) con las fuerzas formamos el polígono vectorial  $abO1$  (fig.102b) y su funicular  $1'2'3'4'5'6'7'$ ; en seguida trazamos las líneas de cierre  $C1$  y  $C2$  para cada una de las vigas curvas  $AC$  y  $BC$ , direcciones que transportamos paralelamente al polígono vectorial, trazándolas a partir del polo  $O$ , cuyos trazos determinan los puntos  $x$  e  $y$  que proporcionan la magnitud de las presiones en las articulaciones  $A, B$  y  $C$ . Después unimos los puntos  $A$  y  $C$  obteniendo la línea  $S1$ , uniendo  $B$  y  $C$  obtenemos la otra línea  $S2$ : líneas que al trazar en el polígono de fuerzas proporcionan la magnitud dirección y sentido de las reacciones  $RA$  y  $RB$ . Si las cargas se hacen más pequeñas, el diagrama de presiones se convierte en una curva continua que corresponde a una solución más exacta.

Los valores de las reacciones se encuentran midiendo a escala el segmento de recta determinado.

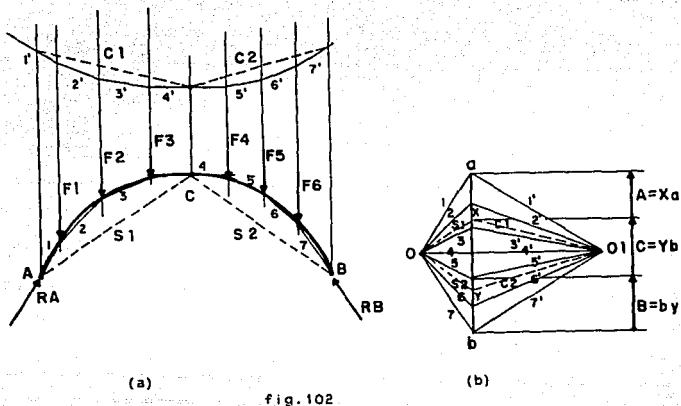


fig. 102

### b.2) Bóveda con cargas verticales simétricas

Cuando las cargas de la bóveda y sobrecarga actuantes (fig. 103a) son simétricas respecto a un eje E-E, podemos operar con la mitad de la misma y encontrar una solución más rápida.

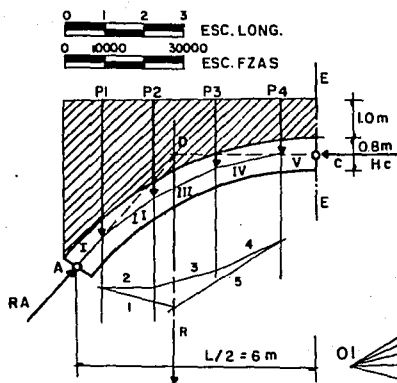
Consideramos un ejemplo para ilustrar el método que resuelve una bóveda simétrica, los datos están dados en el dibujo (fig. 103).

Para resolver el problema debemos calcular los pesos correspondientes al número de divisiones de la bóveda en dovelas, más los pesos de las secciones de sobrecarga que corresponden a cada dovela y encontrar su respectivo centro de fuerza. (Los pesos encontrados para los datos están anexos al dibujo).

Habiendo encontrado los pesos  $P_{1234}$  componemos éstos en un polígono de fuerzas  $ab$  y con un polo  $O_1$ , formamos el polígono vectorial y su correspondiente funicular que nos proporciona la línea de acción  $R$ .

Sabemos que la línea de presiones debe pasar por las articulaciones  $A$  y  $C$ . El empuje  $H$  en  $C$  podemos considerarlo  $h_g$

rizantal, el cual prolongamos hasta intersectar R en el punto D, que unimos con A, construcción que permite descomponer la fuerza R en los componentes RA y Hc concurrentes en D, que llevados al polígono de fuerzas, determinan las magnitudes en la intersección O y nos permite encontrar la línea de presiones I, II, III, IV, y V.



relleno = 1.8 ton/m<sup>3</sup>

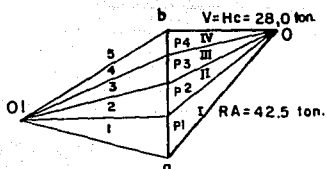
bóveda = 2 200 ton/m<sup>3</sup>

P1 = 10 650 Kg.

P2 = 8 500 "

P3 = 7 180 "

P4 = 6 200 "



(a)

fig.103

(b)

#### 6.1.4. Arco Libremente Apoyado

##### a) Solución General para cualquier condición de carga

El arco libremente apoyado, es isostático y puede resolverse por la teoría de la estática, la solución al problema es muy simple. El arco (fig.104a) sujeto al sistema de fuerzas F123456, donde las fuerzas valen F1346 = 1000 Kg, y F25 = 1200 Kg.

Trazamos en primer instancia el polígono de fuerzas ab, utilizando un polo O1, obtenemos los radios vectores 1'2'3'4'5'6'7' (fig.103b), con éstos trazamos el polígono funicular, haciendo que el vector 1' pase por la articulación A y el vector 7' corte la línea de acción conocida RB en un punto

C, cuyos puntos definen la línea de cierre L.c.. Llevamos esta línea al polígono vectorial, trazandola por el polo  $O_1$ , ahora trazamos  $RB$  en el polígono vectorial que corta  $L.c$  en un punto  $O$ , la reacción la trazamos a partir del punto  $b$ , finalmente unimos  $O$  con  $a$  que determina la reacción  $RA$ , con lo cual podemos trazar el polígono de presiones 1234567.

En el problema las reacciones  $H$  y  $V$ , son muchas veces las que interesan, para encontrarlas hay que descomponer  $RA$  y  $RB$  en las dos direcciones conocidas, el arco sometido al sistema de fuerzas dado tiende a desplazarse en  $B$  hacia la derecha por lo que para evitar este desplazamiento suele ponerse un tirante  $AB$  que resista la fuerza de la reacción  $HB$ . En sentido inverso.

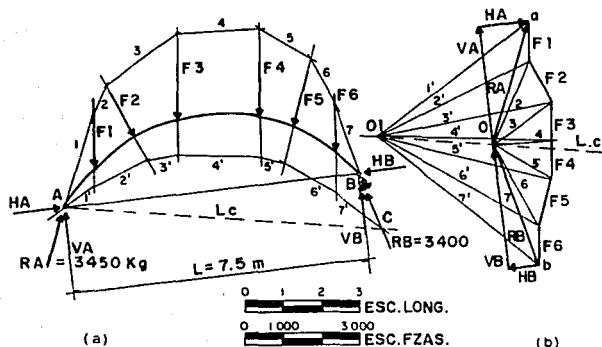
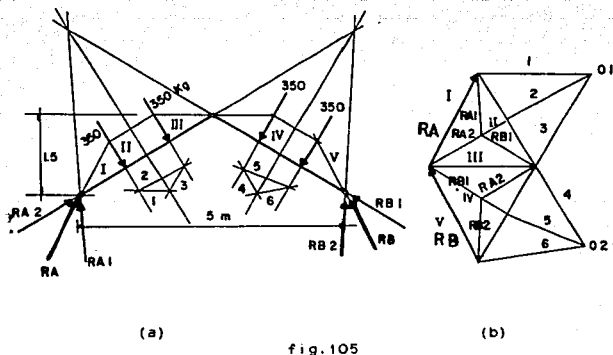


fig.104

### 6.1.5 Pórticos isostáticos.

Los marcos o pórticos de tres articulaciones se resuelven igual que el arco de 3 articulaciones, pues las reacciones no dependen de la forma de la estructura en general, sino de la intensidad de las cargas y posición de las articulaciones.

El método de solución ya lo conocemos, por lo que consideramos explicación suficiente el dibujo (fig.105a y 105b) resuelto con los datos contenidos en la figura.



### 6.2.1 Elementos mecánicos de un arco.

Para encontrar los momentos flexionantes existen varias formas de hacerlo analíticamente, así si deseamos encontrar el momento que producen las fuerzas a la izquierda del punto G (fig.106), el momento será  $M_a = R \times o - P1X1 - P2X2$ . Observe que las distancia o brazo de palanca deben ser ortogonales a la fuerza considerada, la expresión anterior puede simplificarse si en lugar de considerar cada una de las fuerzas utilizamos la resultante de todas las fuerzas actuantes a la izquierda de la sección. Sabemos que la línea de presiones es una resultante de estas fuerzas precisamente; el brazo de palanca que habrá de considerar es la excentricidad  $e$ , por lo tanto tenemos  $MG = R3.e$ .

Para encontrar los esfuerzos normales y cortantes en el punto G1 descomponemos R2 en una fuerza paralela a la tangente  $t$ , que corresponde a la fuerza normal N2 y otra perpendicular a N2, que es el esfuerzo cortante QG, el momento flexionante para ese punto vale :

$$MG1 = N2.e'$$

y generalizado

$$M = N_i . e' i$$

donde  $e'$  es la excentricidad medida perpendicularmente a la normal desde  $G_1$ .

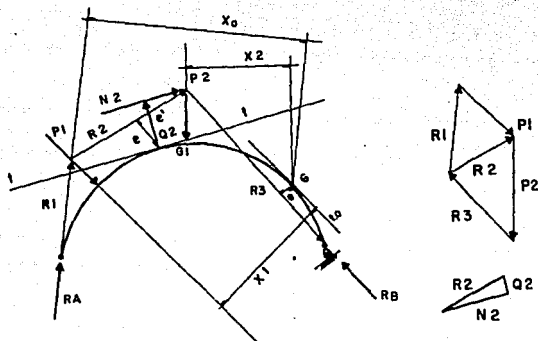


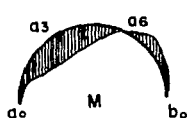
fig.106

El método anterior podemos utilizarlo para determinar los elementos mecánicos ( $M, Q$  y  $N$ ) del arco de la fig.107.

El momento es negativo cuando la línea de acción de  $R_1$  pasa por la parte inferior del arco y positivo si ésta actúa por la parte superior.

El esfuerzo cortante es positivo si tiene sentido hacia afuera del centro de curvatura y negativo si es contrario.

El esfuerzo normal es negativo cuando comprime y positivo si es tensión.

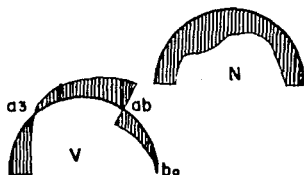


DIAGRAMAS

Arco semicircular  
 $r = 4.00 \text{ m.}$

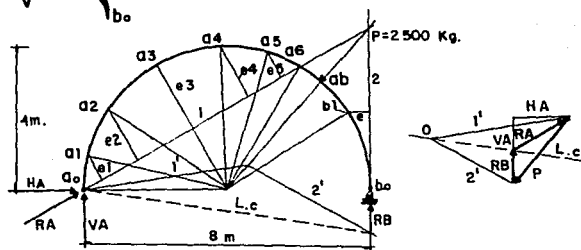
$RA = 1900 \text{ Kg.}$   $RB = 970 \text{ Kg.}$

$VB = 930 \text{ Kg.}$   $VA = 1600 \text{ "}$



1 2 3 5 ESC. DE LONG.

ESC. DE FZAS.



Obtención gráfica de los esfuerzos en los puntos.

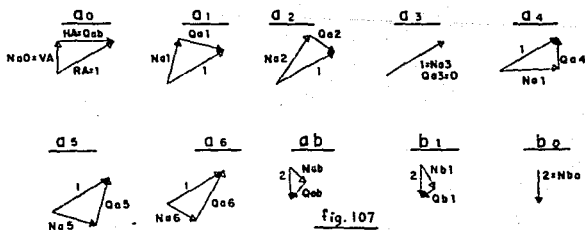


fig. 107

## VALORES DE LOS ESFUERZOS DEL PROBLEMA FIG. 107

PUNTO	MOMENTO FLEXIONANTE	ESFUERZO CORTANTE	ESFUERZO NORMAL
a0	_____	- 1 650	930
a1	- 1 615	- 1 400	1 350
a2	- 3 040	- 850	- 1 600
a3	- 3 895	_____	- 1 650
a4	- 3 040	900	- 1 600
a5	- 1 520	1 400	- 1 300
a6	_____	1 650	950
ab	3 363	1 800 y 700	600
b1	1 178	500	980
b0	_____	_____	970



### 6.3. Pórticos hiperestáticos

El cálculo gráfico para la viga continua también puede aplicarse al cálculo de ciertas estructuras del tipo portico, que al desarrollarlas constituyen una viga continua, siempre y cuando las estructuras no sean susceptibles de deformarse por la acción de las cargas.

Una estructura puede ser indeformable debido a su configuración y tipo de sustentación (es indeformable sujeta a cualquier condición de carga), ejemplo fig.108a, 108b y 108c

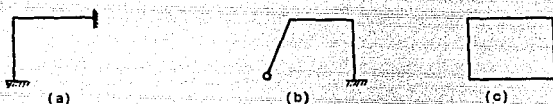


fig.108

O cuando a pesar de ser deformable por actuar las cargas simétricas respecto a su eje de simetría, no producen deformación de la misma.



fig.109

Como ilustración del procedimiento a seguir se resuelven los pórticos de las figuras 108a y 109a, la solución de este sistema no requiere básicamente explicación adicional, bastando los conocimientos ya adquiridos en la solución de las vigas, solamente es necesario desarrollar los marcos como vigas y en los cambios de dirección considerar apoyos directos, procediendo a resolver el problema, la solución de estos sistemas se presenta en las figuras 110 y 111.

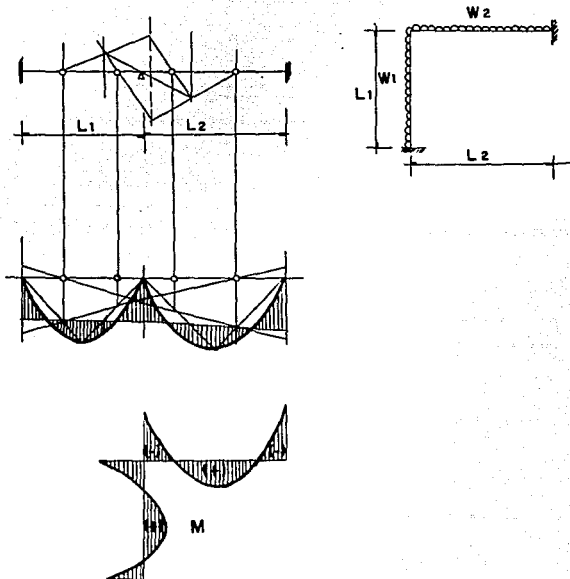


fig. 110

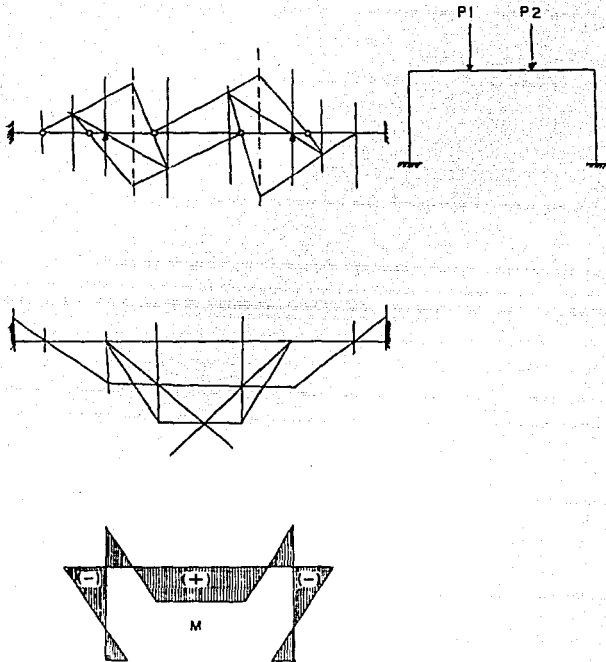


fig. 111

## 7. CONCLUSIONES

Este capítulo nace una evaluación comparativa de los métodos gráficos con respecto a los métodos analíticos y resalta a grandes rasgos las ventajas y desventajas de estos métodos. Asimismo se vierten los comentarios referentes al trabajo presentado.

### 7.1. Utilización de los métodos gráficos en la actualidad.

La utilización de los métodos gráficos para la solución de elementos estructurales en la actualidad está prácticamente en el olvido, debido principalmente a que la enseñanza de éstos no se imparte a los estudiantes de las carreras de ingeniería mas que en una forma muy superficial, enseñándose sólo las nociones del polígono de fuerzas, el paralelogramo y el triángulo de fuerzas, para a través de estos principios obtener una solución analítica de los problemas de la Mecánica Aplicada. Cabe mencionar que la solución gráfica de problemas de Mecánica Aplicada es tan antigua como el planteamiento de estos problemas, resultando un método de solución bastante práctico para ciertos problemas específicos de la ingeniería civil, tales como armaduras, arcos isostáticos y algunas vigas hiperestáticas. Por otra parte, probablemente no sean muy utilizados estos métodos debido al auge que últimamente a tenido la utilización de la computadora para la solución de este tipo de problemas.

### 7.2. Utilidad práctica de los métodos gráficos

Al resolver determinado número de problemas de Mecánica Aplicada por métodos analíticos o métodos gráficos manualmente, podemos darnos cuenta de la utilidad, ventajas y desventajas de uno de los métodos con respecto al otro. Al realizar el presente trabajo de investigación de métodos gráficos, para resolver problemas estructurales que interezan particularmente al ingeniero civil dedicado a las estructuras, puedo concluir lo siguiente:

#### Ventajas

1. La solución gráfica de un problema nos permite visualizar muy bien la solución y el planteamiento del mismo en una forma más objetiva y clara.
2. Conociendo los principios de los polígonos vectorial y funicular, podemos resolver cualquier tipo de viga isostática.

ca para la cual podemos determinar el valor de las reacciones en los apoyos, los diagramas de momentos flexionantes y el esfuerzo cortante. Asimismo podemos resolver cualquier tipo de estructuras: armaduras, para las cuales encontramos los valores de las tensiones y compresiones en las barras; para los marcos y pórticos isostáticos, determinando las reacciones en los apoyos en una forma bastante simple; en donde suele complicarse un poco la solución gráfica es en algunas estructuras hiperestáticas donde se tiene que hacerse otro tipo de consideración y es necesario hacer demasiados trazos, complicando más el problema: como en el caso particular de los arcos hiperestáticos.

3. Los métodos gráficos resultan de interés primordial para las personas que tienen facilidad y les gusta el dibujo técnico, pues los conocimientos teóricos que se requieren para resolver las estructuras por métodos gráficos son mínimos.
4. Especialmente en lo que se refiere a la solución gráfica de armaduras ya sean isostáticas o hiperestáticas, de pocas o muchas barras, el método gráfico resulta más práctico para encontrar los valores de los esfuerzos en las barras; pues el procedimiento nos permite encontrar rápidamente estos valores sin necesidad de resolver manualmente una gran cantidad de ecuaciones para lo cual es necesario una máquina programable o una computadora, requiriendo un programa.

#### Desventajas

1. Al resolver un problema gráficamente por lo general se cometen errores de medición, al transportar un vector a otra posición, puede fallar el ángulo. Estas deficiencias traen como consecuencia que el resultado obtenido no sea muy exacto y se obtenga un resultado aproximado, para obtener soluciones más exactas, es recomendable utilizar escalas grandes de tal forma que se pueda manejar el problema.
2. Todo el trazo, desde el elemento que se va a analizar hasta la solución, deben hacerse a escala y con la mayor precisión posible, de no hacerse así, el resultado puede estar mal o tener demasiado error.

### 7.3. Comentarios del trabajo

1. Este trabajo tiene como objetivos hacer una recopilación de los métodos gráficos que sean más prácticos y que permitan al estudiante de la carrera de ingeniería civil e ingenieros estructuristas contar con una herramienta más para resolver los problemas de la Mecánica Aplicada en una forma más sencilla y amena.
2. Con esta tesis se pretende también contribuir al acervo bibliográfico de esta escuela en las materia de estructuras.



10. PAUL KILLMAN                      Escuela del Técnico Mecánico, Editorial Labor S.A. Barcelona 1956.
11. H. WEERNER ROSENTHAL            La Estructura, Editorial C.E.C.S.A, Séptima Impresión.
12. ENRIQUE RODON                    Lo que no Encontré en los Tratados de Construcción editorial Labor S. A.
13. JAIME TORRES H.                   Mecánica Aplicada, Editorial Limusa S.A. México -- D. F. 1978.
14. ANTONIO MURRIETA NEUCOECHEA    Aplicaciones de la Estática Editorial Limusa S.A. México D. F. 1982.
15. BEER Y JOHNSTON                  Mecánica Vectorial para Ingenieros, Editorial Mc Graw Hill Bogotá Colombia 1979.
16. FACULTAD DE INGENIERIA            Apuntes de Análisis Estructural I  
    " UNAM "