9 2ej.

GAME: UN LENGUAJE GEOMETRICO PARA LA EXPLORACION Y ELABORACION DE HIPOTESIS GEOMETRICAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA

MA. HERENDIRA GARCIA TELLO

— o —

DIRECTOR: ARTURO RAMIREZ FLORES

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

1988

INTRODUCCION

No es necesario argumentar demasiado acerca de la importancia que las computadoras han alcanzado en casi todos los ámbitos de la vida social. Sin embargo, a pesar de que en el comercio se pueden encontrar poderosos programas para computadora que auxilian el trabajo en varias áreas (contabilidad, arquitectura, estadística, prensa, diseño, etc), así como numerosos juegos de computadora, existen pocos programas para apoyar la enseñanza en general, y la de la matemática en particular. Por lo que considero que alentar el diseño de programas para computadora con fines educativos es una tarea importante.

Además de mi creciente interés por la computación como auxiliar de la enseñanza de la matemática está mi antiguo interés por la geometría y por su enseñanza; así pues, este trabajo intenta ayudar a este hermoso tema de la matemática a reubicarse dentro de la enseñanza de la matemática pero ahora con una nueva presentación, la que permiten algunos programas no tutoriales de computadora.

Para llevar a cabo este trabajo fue necesario revisar los modelos de uso que se han desarrollado a partir de los primeros intentos por llevar la computadora al aula, en el primer capítulo se encuentra lo referente a este estudio. Así mismo se hizo una revisión de varios artículos escritos a partir de la reforma educativa de los 60 sobre la enseñanza de la geometría en general, y los que intentan dar una opción a la enseñanza de este tema usando la computadora; esta parte conforma el capítulo dos. Finalmente, en el capítulo tres se encuentra la descripción de nuestro Lenguaje Geométrico y la del Laboratorio Geométrico y en el capítulo cuatro, algunas secuencias que ilustran su uso.

Cómo nace GAME

Las características de GAME las propuse en función de las actividades que se deseaban realizar así como la forma de interaccionar con la computadora. Para definir el aspecto técnico operativo del programa estudié varios programas que se han diseñado para el estudio de algunos temas de geometría; aunque en esta parte me basé en textos impresos porque no pude conseguir el software. En la mayoría de los casos mi acercamiento a esos programas no es por medio de una descripción escrita de ellos sino reportes de estudios realizados con ellos, en donde tampoco se describen las actividades pero de alguna manera sugieren lo que se puede hacer con estos programas. Lo que me ayudó mucho en la concreción de las ideas fue la orientación que el profesor Galindo me ha brindado a lo largo de cinco años en esta dirección.

Quien llevó a cabo el programa que dio vida a GAME fue Enrique Galindo, el lenguaje que usó para ello fue el Turbo Pascal. En el anexo 1, se encuentra el listado del programa para que aquellos profesores con conocimientos de programación puedan retomar el trabajo, enriqueciéndolo y modificándolo para adaptarlo a la particularidad de sus clases. Esto es sugerencia del mismo realizador de GAME. En el anexo 2 se encuentra la solución a los problemas propuestos y algunas sugerencias de cómo usar el programa para guiar al estudiante en el descubrimiento de las respuestas.

Finalmente, GAME no quiere decir juego sino Geometría Animada como un Medio de Enseñanza. Aunque en realidad, sí quisieramos hacer del aprendizaje de esta disciplina algo así como un juego de detectives en que el estudiante tiene que elaborar sus propias hipótesis, verificarlas y validarlas.

El contexto que define a GAME

En el estudio realizado para la elaboración de la tesis *La reforma educativa y sus repercusiones en la enseñanza de la geometría en el nivel elemental* García [18], se observó un "deterioro" en la enseñanza de la geometría en este nivel. En otro estudio comparativo[1] sobre el desempeño geométrico en niños de secundaria, realizado en tres escuelas de extracción socio-económica diferente (pocos recursos, clase media y clase acomodada), se observó que los estudiantes de pocos recursos casi no han desarrollado su intuición geométrica; también se observó que no hay diferencia en el desarrollo de la intuición geométrica entre los estudiantes de clase media y la clase acomodada, pero sí distan mucho estos dos últimos de los primeros. En un estudio paralelo al anterior se observó una disminución en el número de lecciones de geometría en los textos de secundaria, así como el número de clases dedicadas a este tema en los programas oficiales. Aunque entrevistas con profesores de este nivel reflejan una preocupación por esta paulatina desaparición del tema, la presión por cubrir el programa oficial los obliga a desatender el desarrollo de las habilidades geométricas de los estudiantes. Finalmente, mi experiencia dando clases de geometría en el CCH me ha permitido observar las dificultades que les representa a los estudiantes de este nivel el estudio de esta materia.

Por todo lo anterior se puede concluir que las nuevas generaciones de la carrera de matemáticas no contarán con el conocimiento ni con la intuición geométrica necesaria para abordar los cursos donde las habilidades de este tipo facilitan la labor del aprendizaje. Pero si además, agregamos las observaciones

---

1. Los resultados se presentaron en el "Seminario de los Viernes" de la Sección de Matemática Educativa en 1982. Sin embargo, en ese momento aún no existían los foros apropiados para publicar este tipo de trabajos, aquí, en nuestro país; posteriormente, la dinámica del trabajo no me ha permitido retomarlo por lo que se ha quedado sin publicar. La charla se intituló *Los resultados de un pre-cuestionario.*

realizadas por Dina van Hiele-Geldof publicadas en [49] sobre las etapas del desarrollo del pensamiento geométrico, nos daremos cuenta que realmente estamos ante una situación verdaderamente alarmante.

El laboratorio geométrico

Considerando válido el modelo de van Hiele que afirma que el estudiante, asistido por experiencias instruccionales apropiadas, pasa a través de 5 niveles de pensamiento [2] y que el estudiante no puede alcanzar un nivel sin pasar a través de los anteriores y que el progreso de un nivel al siguiente depende más de las experiencias educativas que de la edad o de la madurez; entonces se hace necesario desarrollar un espacio en el que las nuevas generaciones de estudiantes de la carrera de matemáticas tengan la oportunidad de desarrollar los niveles del pensamiento geométrico que son anteriores al nivel de abstracción que deben desarrollar durante sus estudios de la licenciatura.

El modelo de van Hiele se complementa perfectamente con la

---

[2] 1) **Formas**, reconocimiento de figuras geométricas como entidades, sin ninguna conciencia de las partes de las figuras o de las relaciones entre las componentes de las figuras. 2) **Propiedades**, se reconocen las partes de una figura y sus propiedades, pero no son formalmente definidas. Un estudiante en este nivel puede reconocer que dos figuras tienen propiedades en común pero no puede concluir, por ejemplo, que un rectángulo es también un paralelogramo. 3) **Relaciones**, se establecen relaciones entre las propiedades de una figura, así como relaciones entre las figuras mismas. Aparece un orden lógico parcial de las clases de figuras. 4) **Deducción**, se establecen las estructuras lógicas de análisis y verificación. Se entiende la deducción como un medio para construir una teoría geomética. 5) **Abstracción**, este nivel está caracterizado por los estándares de rigor y abstracción representados por las geometrías modernas. Un estudiante de este nivel desarrolla una teoría geométrica sin referencia a aplicaciones concretas.

hipótesis de la psicología genética[3] que considera que lo que "es válido para el desarrollo de la humanidad, lo es para el desarrollo del individuo"

Tratando de apoyarnos en los dos estudios mencionados las prácticas del laboratorio se diseñaron observando, primeramente, las etapas del desarrollo histórico de la geometría, y, posteriormente, tratando de relacionar estas etapas con los niveles del desarrollo del pensamiento geométrico propuestos en el modelo de van Hiele. Así, las actividades conforman tres grupos: **la geometría primitiva, la geometría inductiva y el razonamiento deductivo.**

Los agradecimientos

LLegados a este punto es necesario reconocer que este impreso y GAME son el producto de la experiencia acumulada a través de varios años de trabajo con personas cuyo emporio de conocimientos y de experiencia en matemática y en programación, es muy amplio. Primeramente debo agradecer mi acercamiento a la computadora como algo más que una herramienta para la enseñanza, a Enrique Galindo; y, a Arturo Ramírez el haberme ayudado a concebir una nueva forma de generar conocimiento geométrico por medio de la computadora. De

[3]. 1) FORMAS, reconocimiento de figuras geométricas como entidades, sin ninguna conciencia de las partes de las figuras o de las relaciones entre las componentes de las figuras. 2) PROPIEDADES, se reconocen las partes de una figura y sus propiedades, pero no son formalmente definidas. Un estudiante en este nivel puede reconocer que dos figuras tienen propiedades en común pero no puede concluir, por ejemplo, que un rectángulo es también un paralelogramo. 3) RELACIONES, se establecen relaciones entre las propiedades de una figura, así como relaciones entre las figuras mismas. Aparece un orden lógico parcial de las clases de figuras. 4) DEDUCCION, se establecen las estructuras lógicas de análisis y verificación. Se entiende la deducción como un medio para construir una teoría geométrica. 5) ABSTRACCION, este nivel está caracterizado por los estándares de rigor y abstracción representados por las gemetrías modernas. Un estudiante de este nivel desarrolla una teoría geométrica sin referencia a aplicaciones concretas.

hecho, GAME está inspirado en la idea de los laboratorios gemétricos de Arturo y todo este trabajo se originó a partir de uno de sus "problemitas", es el número 5 de la segunda secuencia de actividades.

También el trabajo desarrollado durante dos años con el Grupo de Enseñanza de la Matemática me sirvió de inspiración para dar forma a las secuencias de actividades presentadas en el Laboratorio Geométrico. Esto en cuanto a la concepción de la tesis, y en cuanto a su redacción quiero agradecer las observaciones que me hicieron Guillermo Gómez y Santiago López de Medrano y a la oportunidad que me dieron de exponerla en el "Seminario de Titulación y Enseñanza" pues esto me ayudó a darme cuenta dónde hacía falta información o argumentación sobre el desarrollo de las ideas.

Por último, un sincero reconocimiento a María del Cármen Alvarez por haber leído tan minuciosamente el trabajo y por sus correcciones que ayudaron a mejorar la presentación final de esta tesis y sobretodo porque siempre pude encontrar en ella una compañía confortable, cuando la soledad se me hacía insoportable.

Una pequeña advertencia

En toda esta historia sobre mi formación en el uso de las computadoras para la enseñanza de la matemática Papert ha jugado un papel muy especial en el aspecto ideológico, y no me queda más que aceptar que ha ejercido una gran influencia sobre mi concepción en el uso de la tecnología moderna en la enseñanza. Por lo que pido al lector no se alarme al ver aparecer a Papert como "la medida de todas las cosas" que se han de decir en las páginas siguientes.

Considero que las proposiciones papertianas constituyen un ideal digno por el que se debe luchar; sin embargo, clara de las limitaciones que la enseñanza escolarizada nos impone y de su contubernio con la clase dominante, creo que aún estamos muy lejos de hacerlo realidad. Por lo que la única forma que encontré para no caer en una postura contradictoria *-usar las ideas de Papert para reforzar la enseñanza curricular-* fue ubicar mi trabajo en una zona de frontera, esto es, después del bachillerato y antes de los estudios universitarios. Es ahí donde se ubica el nivel de este trabajo. Y como aún no hay un currículo para este nivel, no estoy proponiendo nada que refuerze el currículo, sino más bien favoreciendo el desarrollo de algunas estructuras intelectuales que ayuden a los alumnos a asimilar la enseñanza curricular, dado que ésta parece inevitable, al menos por el momento.

Heréndira García Tello
México D.F., 1988

DISEÑANDO EL FUTURO

> Es difícil pensar sobre las computadoras del futuro sin proyectar en ellas los atributos y las limitaciones de las que creemos conocer hoy en día. Y en ningún otro aspecto esto es más cierto que al imaginar cómo pueden entrar en el mundo de la educación.
>
> Papert [41, p. 17]

Es interesante observar las consecuencias de concebir los eventos pasados y futuros desde la óptica actual; como éste es un error muy usual entre los historiadores y entre los planificadores (de la educación, de la economía, de la urbanización de las ciudades, etc.) es necesario detenerse en este punto a fin de contextualizar la discusión siguiente sobre computación y enseñanza.

Al parecer resulta extremadamente difícil desprendernos de los parámetros que la sociedad y la educación nos inculcan a lo largo de nuestras vidas sobre el funcionamiento de los universos "físico", cultural y social. Estos parámetros son determinantes pues por medio de ellos se justifican las sociedades tal y como son en la actualidad ,y, como tienen por objetivo preservar el *status quo* (del momento) no sirven para analizar otros universos "físicos", culturales y sociales del pasado o del futuro. Muchas interpretaciones erróneas de los paradigmas científicos que se usaron en el pasado son consecuencia de ello Kuhn, [32]. Si analizáramos, desde nuestra óptica, la interpretación que daban los griegos a muchos fenómenos físicos no vacilaríamos en ubicarlos como fantasías pueriles, o como argumentaciones semejantes a las justificaciones divinas de la teología. Sin embargo, las observaciones de los pensadores griegos conformaron el estudio científico de la época, y es más, sus interpretaciones de los fenómenos naturales fueron el principio y la inspiración de una larga secuencia de investigaciones científicas posteriores.

Algo análogo sucede al imaginar o diseñar el futuro desde nuestra óptica actual. Basta con revisar algunas obras de corte futurista para observar que siempre la imagen actual del futuro ha resultado burda, grotesca e inoperante cuando el futuro se hace presente:[4]

> "Lo que hace antieconómica la previsión futurológica es que, si se nos ocurre la idea de una novedad, no podemos imaginarla sino guiándonos por lo que ya conocemos (por eso todas las primeras utopías sobre el vuelo humano partían del principio que las alas tenían que ser batientes, como las de los pájaros) mientras que guiándonos por lo que conocemos nace sólo la idea de algo, pero su realización requiere una cosa que no logramos todavía imaginar. Y esto nos dice algo sobre la dinámica de la invención -por un lado- y sobre el modo en que nuestro aparato cognitivo puede concebir lo que aún no conoce."
>
> Humberto Eco [10, p.9]

En lo que sigue abordaremos el tema sobre el diseño de los sistemas educativos del "futuro", centrándonos en la aplicación de la tecnología computacional en la enseñanza, y analizaremos dentro de este contexto los cuatro modelos de uso de la computadora en la enseñanza que distingue Papert en [41]: el modelo de entrenamiento

---

4 Humberto Eco [9] nos dice que a fines de siglo, un tal Jean Mar Coté dibujó una serie de tarjetas sobre la vida en el 2 000 y que ahora Isaac Asimov las ha reunido en el volumen *Nostalgia del futuro* y que comenta con gracia la divergencia entre la imaginación futurológica y la realidad.

y práctica, el modelo que usa la simulación, la programación con Basic y el modelo de la Tortuga.

El modelo de entrenamiento y práctica

Como una consecuencia de no poder imaginar a un profesor jugando un papel diferente al que lleva a cabo en la actualidad, tenemos que el primer intento de llevar la computadora al aula fue imitando este rol del profesor. Al respecto Papert nos dice que el modelo. de ejercitación y práctica ve a la computadora como un maestro automatizado, haciendo esencialmente el mismo trabajo que haría uno 'real' este modelo utiliza los programas tutoriales diseñados para que los estudiantes lleven a cabo una serie de ejercicios repetitivos que a la larga llevarán al estudiante a que dé la "respuesta correcta" a preguntas que en el fondo no entiende, ni sabe por qué su respuesta es correcta. Esta forma de imaginar el uso de la computadora en la enseñanza es representativa de una actitud particular hacia el conocimiento. Continuando con nuestra línea de exposición podríamos pensar esta etapa de desarrollo análoga a ésa en que "las primeras utopías sobre el vuelo humano partían del principio que las alas tenían que ser batientes como las de los pájaros"

El modelo que usa la simulación

Pero conforme la tecnología computacional ha permitido un número mayor de aplicaciones, y ha mejorado las características de las máquinas, se han podido plantear nuevas formas de aplicación y uso de las computadoras en la enseñanza, por ejemplo, los programas de simulación que usan a la computadora como un laboratorio en el cual la simulación de experimentos se puede realizar. Aunque esta manera de utilizar la computadora puede resultar más atractiva que el modelo anterior de ejercitación y práctica, Papert afirma que en realidad el alumno no tiene libertad de investigar en esos laboratorios computacionales, "lo que el estudiante está en libertad de descubrir no es nada más que lo que se ha colocado en la situación a descubrir", por lo que el estudiante aún está jugando un papel pasivo y no existe una interacción real entre la máquina y el usuario.

El modelo que usa programas cortos

Al lado del modelo anterior se encuentra el que promueve que el estudiante programe a la computadora utilizando un lenguaje "sencillo" el BASIC. Sin embargo, como consecuencia de las limitaciones técnicas que presentaron las primeras computadoras, los primeros lenguajes que en un principio parecían poderosos, han venido a quedar en desuso porque han sido sustituídos por otros que permiten ir más allá que los primeros, y facilitan el diseño de programas así como su depuración. Esto mismo está sucediendo ahora con BASIC que fue el lenguaje que pareció más accesible de enseñar a los jóvenes principiantes. El lenguaje de la tortuga que ha diseñado el equipo del proyecto LOGO, es mucho más accesible para alguien que aprende a programar e incluso puede ser enseñado a niños de muy corta edad. Sin embargo, en su momento, ciertamente BASIC era el lenguaje más accesible para enseñar a programar a estudiantes de secundaria, pero al existir ahora una mejor opción se puede cuestionar su uso como Papert hace al rechazar que BASIC sea realmente un lenguaje sencillo de aprender, "ciertamente los niños aprenderán su vocabulario muy rápidamente, pero gastarán el resto de su tiempo luchando con sus limitaciones. Tendrán que buscar formas tortuosas para codificar aun ideas moderadamente complicadas en este reducido vocabulario...Algunos estudiantes lo aprenden rápidamente, así como algunos aprenden matemáticas muy fácilmente independientemente de lo mal que sean enseñadas. Son atrapados por el poder de la computadora y encuentran en ella un medio de expresión. Pero estos estudiantes son pocos." A pesar de que cada vez hay más escuelas del nivel medio y medio superior y padres de familia que se equipan con microcomputadoras esto no es garantía de que los chicos aprendan más programación, pues a pesar de que disponen de más tiempo de máquina, prefieren gastarlo en los así llamados "videojuegos". Lo que desvía la atención de los estudiantes de nuestro objetivo de utilizar a la computadora para la enseñanza. Aparte de la gran cantidad de tiempo que los jóvenes invierten en los juegos de computadora, reciben fuertes estímulos que les refuerza una actitud agresivamente competitiva y crean una predisposición para concebir a la computadora como un medio de entretenimiento, que provoca un rechazo a los programas de computación educativos porque son "aburridos"[5]. Y en mucho, tal vez esto sea consecuencia de que la programación con un lenguaje como el BASIC no representa ningún atractivo a la mayoría de los jóvenes estudiantes, aunque esto no quiere decir que LOGO por sí solo, realmente logre centrar más la atención sobre el estudio de la matemática. Si los estudios que hasta ahora se han reportado presentan resultados positivos, en mucho se debe a que las actividades las han diseñado y supervisado los matemáticos, habrá que esperar a ver si los mismos resultados se obtienen cuando LOGO haya sido asimilado por el sistema educativo escolar, final que parece inevitable a pesar de todos los argumentos en contra de su creador.

Así tenemos que la etapa de desarrollo de los modelos de uso de la computadora en la enseñanza que corresponde a los programas de simulación y a la programación en BASIC, se puede comparar con aquella etapa de desarrollo de la aeronáutica en que por fin el hombre logró diseñar y fabricar las primeras máquinas voladoras, pero desafortunadamente éstas fueron usadas con fines bélicos en la Primera Guerra. Y aunque ahora vivimos tiempos de "paz" y los aviones también se utilizan para el comercio y el transporte, no

---

[5] Recuérdese que algo similar sucedió con el uso de la televisión en la enseñanza. Una de las primeras aplicaciones de la TV fue llevar entretenimiento a los hogares, luego ha sido casi imposible romper con este patrón de uso que obstaculiza la implementación de otras aplicaciones de este poderoso medio con gran incidencia social.

es un recurso al alcance de las mayorías. Sin embargo, esperamos al igual que Papert que realmente la computadora sea "una alternativa viable a la escuela pública, menos cara y más efectiva que la escuela privada", aunque sabemos que esto implica un movimiento que revolucione las estructuras actuales de la sociedad y que se creen los nuevos parámetros para aprehender los nuevos universos "físico", cultural y social.

El modelo de la Tortuga

La exposición que Papert hace sobre los micromundos y el modelo de la tortuga es tan rica en ejemplos y de llamados a la intuición que verdaderamente resulta difícil resumirlo sin correr el riesgo de caer en un esquematismo rígido, perdiéndose así muchas de sus argumentaciones más fuertes. Sin embargo, más con el afán de motivar al lector a leer la fuente original [43], delinearemos las características esenciales que constituyen los micromundos de Papert.

Los ambientes computacionales o micromundos se basan en los dos hechos siguientes: 1) los chicos reflexionan mucho sobre su propio pensamiento, 2) todos aprendemos construyendo, explorando y elaborando teorías. Respecto del primer punto, Papert nos dice que los niños "efectivamente se preocupan por sus intuiciones. Las confrontan y las depuran. Si no lo hicieran la idea de lograr que lo hagan sería verdaderamente utópica. Pero dado que ya lo hacen, podemos proveer materiales para ayudarlos a hacerlo mejor". El siguiente punto resulta un poco más difícil de explicar pues aunque todos aprendemos construyendo, explorando y elaborando teorías... "la mayor parte de la elaboración teórica con la que nos iniciamos desemboca en teorías que posteriormente tuvimos que abandonar...los niños no siguen una vía de aprendizaje que va de una 'opinión correcta' a otra 'opinión correcta' más avanzada. Sus vías naturales de aprendizaje incluyen 'teorías falsas' que enseñan tanto sobre elaboración de teorías como las verdaderas.

Pero en la escuela las teorías falsas ya no se toleran". Lo que ha creado una falsa idea sobre cómo se genera el conocimiento científico, y tanto chicos y adultos creen en esa falsa imagen de Newton debajo del manzano, que sintetiza al científico aislado del mundo concibiendo la idea brillante.

Pero no solamente los niños sino también los adultos generamos conocimiento partiendo de 'teorías falsas' Kuhn [32]. Y desde aquí podemos empezar a esbozar cierto paralelismo entre la evolución cognitiva de un individuo y los grandes estadios del desarrollo del conocimiento científico a lo largo de la historia de la humanidad. Hipótesis que retomaremos más adelante en el capítulo cuatro.

Papert trata de estimular esa actividad 'epistemológica' del niño y su inclinación por elaborar 'teorías', por medio del modelo de la Tortuga. "El trabajo en los micromundos de la Tortuga es un modelo de lo que significa llegar a conocer una idea de la misma forma en que uno llega a conocer a una persona. Los alumnos que trabajan en estos ambientes ciertamente descubren hechos, hacen proposiciones generalizadas y aprenden habilidades. Pero la experiencia fundamental de aprendizaje no es la de memorizar datos o practicar destrezas. Más bien es llegar a conocer a la Tortuga, explorar lo que ella puede o no puede hacer. Es similar a las actividades cotidianas del niño, como hacer tortas de barro y probar los límites de la autoridad parental, todo lo cual tiene la componente 'llegar a conocer'".

Lo anterior Papert lo ilustra con varios ejemplos de micromundos -programas que el niño elabora para explorar una idea poderosa- utilizando ya la Tortuga de piso o la Tortuga en la pantalla, aunque esta última tiene diferentes caracterizaciones: la Tortuga geométrica, la Tortuga velocidad, la Tortuga aceleración y la Tortuga newtoniana. Describe los micromundos dando la lista de instrucciones que el chico puede usar para explorar ideas geométricas, partículas (Tortugas) con velocidad y aceleración, "de tal modo que esta secuencia de tortugas ... constituye un camino hasta Newton".

Así pues, Papert nos dice que encuentra a la computadora útil en dos sentidos: "en primer lugar, permite, u obliga, al niño a externar sus suposiciones intuitivas. Cuando la intuición se traduce en un programa llama más la atención y se vuelve más accesible a la reflexión. En segundo lugar, las ideas computacionales pueden retomarse como materiales para el trabajo de remodelación del conocimiento intuitivo". Sin embargo, aunque la introducción de la computadora ofrece una alternativa a los problemas de la enseñanza de la matemática, generalmente se las utiliza en formas que las exacerban al reforzar los modos paradójicos de pensar sobre el conocimiento, sobre la 'matemática escolar' y la 'ciencia escolar'.

Micromundos curriculares

Sin embargo, a pesar de que Papert ha concebido el lenguaje LOGO y el modelo de la Tortuga para ser usados en actividades sin programa escolar, muchas de las investigaciones hechas sobre la enseñanza de la matemática usando LOGO están enfocadas a la aplicación de este lenguaje al currículo de matemáticas. Un buen ejemplo de esto, resulta ser el artículo [27] publicado por **Hoyles** y **Noss** donde definen lo que significaría un micromundo en el contexto escolar y que enseguida pasamos a resumir.

Un micromundo no puede ser definido aislado del estudiante, ni del maestro, o del escenario; la actividad en el micromundo será formada por las experiencias pasadas e intuiciones del estudiante, y por los objetivos y expectativas del maestro. Para Hoyles y Noss un micromundo está constituido por cuatro componentes: **la componente técnica, la componente pedagógica, la componente contextual y la componente del alumno.**

La componente técnica: está compuesta de un lenguaje de programación. Es el lenguaje el que proporciona la estructura para el campo conceptual modelado en el micromundo. Define y restringe el rango de ideas que pueden ser convenientemente modeladas, y permite por su estructura la exploración y el uso flexible de los conceptos matemáticos accesibles vía el micromundo (obviamente usan el lenguaje LOGO, aunque dicen que se podría usar algún otro que tenga sus características). En este punto ellos señalan que pueden escribirse nuevos programas que incorporen conceptos específicos. Estos son los que comunmente son llamados "micromundos", pero es la relación entre éstos y el lenguaje en sí mismo lo que es crucial, de esta manera los estudiantes pueden examinar la construcción de un programa, descubrir los efectos de variar sus partes constituyentes así como explorar su construcción.

La componente pedagógica: la función de la componente pedagógica de un micromundo es estructurar la investigación y exploración de los conceptos incorporados en la componente de los conceptos incorporados en la componente técnica, para centrar la reflexión sobre aspectos particulares, sugerir órdenes productivos para las operaciones, indicar puntos de partida útiles, y provocar vínculos con otras actividades. Los aspectos físicos de la componente pedagógica pueden incluir un profesor, libros, carteles, etc. El profesor también tiene la responsabilidad de alentar el uso de actividades tanto intuitivas como reflexivas y orientar a los estudiantes hacia el desarrollo de sus propios procesos metacognitivos; es decir, estimular la predicción, la reflexión y la evaluación.

La componente contextual: esta componente relaciona el ambiente social en el cual la actividad de programar se lleva a cabo. La forma como un niño conceptualiza una actividad está matizada por una historia completa de influencias de situación, culturales, sociales y afectivas, y moldeada por la interacción social. Hay amplia evidencia de la relación crítica entre cómo un problema se percibe y la forma en que es representado, y cómo ambas son fuertemente influenciadas por el medio social y cultural. Entre los factores que influirán la respuesta del alumno están: la colaboración entre el estudiante y sus iguales, qué tan lejos pueden desplegarse las ideas acerca del salón de clases, la atmósfera de investigación (o la falta de ella) en el salón de clases, la expectativa del alumno hacia los requerimientos de la tarea y, más crucialmente cómo puede esto afectar las contribuciones desde (y hacia) las actividades matemáticas existentes del currículo "tradicional".

La componente del alumno: abarca los aspectos cognitivos y afectivos. En primer lugar, en lo que concierne al aspecto cognitivo, la forma como una tarea es percibida depende inevitablemente de los sistemas de representación del alumno, y si las demandas cognitivas de la tarea están dentro de su "zona de desarrollo proximal". Esta componente está relacionada con las concepciones parciales y comprensiones existentes que los niños traen a la situación de aprendizaje y con la cual ellos tratan dentro del micromundo técnico. Los alumnos también traerán a su interacción con la componente técnica del micromundo, estilos de aprender y formas de trabajar diferentes. Finalmente nos dicen que lo que se requiere es una investigación detallada de los conceptos matemáticos clave y las relaciones entre ellos en el currículo escolar, esto involucra el diseño de las componentes técnicas de los micromundos. Al respecto Papert comenta:

> "...la mayoría de los maestros que me consultan sobre su aplicación tratan, muy comprensiblemente, de utilizarla de ese modo. Sus preguntas se refieren a la organización del aula, los problemas del horario, cuestiones pedagógicas planteadas por la introducción de la Tortuga y, especialmente, a cómo se relaciona conceptualmente con el resto del programa. Por cierto que la Tortuga puede ser útil en la enseñanza del programa tradicional, pero yo la he concebido como vehículo para el aprendizaje piagetiano, el cual para mí es aprendizaje sin programa."
>
> Papert [45, p. 46-47]

Aunque hay que aclarar que Papert no entiende por "enseñanza sin programa" la improvisación de aulas de forma libre ni simplemente "dejar a los niños solos". Más bien "significa apoyar a los chicos en tanto ellos construyen sus propias estructuras intelectuales con materiales tomados de la cultura circundante. En este modelo, la intervención educativa significa modificar la cultura, introducir en ella nuevos elementos constructivos y eliminar los nocivos" [*Idem*].

Para comprender mejor por qué Papert está en contra del currículo sería conveniente hablar un poco acerca de lo que él entiende por "matemática escolar"

La matemática escolar

Papert, como buen matemático inicia su discusión haciendo manifiesta la diferencia entre *su* matemática y la matemática escolar de *los otros*: "es importante recordar la distinción entre la *Matemática* -un vasto territorio de investigación cuya belleza rara vez sospechan los no matemáticos- y una cosa diferente que llamaré *matemática escolar*".[45 p. 68]

> "*La clase de matemática* que se impone a los niños en las escuelas no tiene sentido, ni es divertida, ni siquiera muy útil".
>
> Papert [45 , p. 68]

Considera a la "matemática escolar" una construcción social; un conjunto de accidentes históricos determinaron la elección de ciertos temas matemáticos como el bagaje matemático que deberían portar los ciudadanos. Algunas de estas condiciones históricas fueron pragmáticas: antes de que existieran las calculadoras electrónicas era una necesidad social que las personas pudieran realizar operaciones tales como la división larga con rapidez y exactitud. Pero la utilidad fue sólo una de las razones históricas que definieron la matemática escolar. Otras tuvieron que ver con lo que era aprendible y enseñable en la era precomputacional, esto es con la tecnología del lápiz y papel. Otro factor de la construcción social de la matemática escolar es la tecnología de la calificación.

A fin de cuentas, sostiene que la matemática escolar está fuertemente influída por lo que parecía enseñable cuando la matemática se enseñaba como una materia "muerta", utilizando las tecnologías primitivas y pasivas de palitos y arena, tiza y pizarrón, lápiz y papel.

Con esta tradición detrás y frente a la era computacional, la educacación matemática puede tomar dos enfoques: 1) el tradicional acepta a la matemática escolar como una entidad dada y se esfuerza por hallar modos de enseñarla (algunos educadores emplean computadoras para este propósito); lo que implica obligar a tragar material indigerible remanente de la era precomputacional. 2) La geometría de la Tortuga propone un uso totalmente diferente para la computadora, utilizarla como un medio matemáticamente expresivo, que nos deja en libertad de diseñar temas matemáticos significativos, intelectualmente coherentes y fáciles de aprender para los chicos.

En realidad, para la mayoría de las personas de nuestra cultura es inconcebible que la matemática escolar pueda ser muy diferente: esta es la única matemática que conocen. Y ante la espectativa del cambio se matienen renuentes.

Existe una profunda diferencia entre los enfoques sobre el uso de la computadora en la enseñanza de la matemática que existe entre los matemáticos (como Papert), los investigadores educativos (como Hoyles y Noss) y cientos de miles de profesores de matemáticas de la enseñanza media en el mundo. Para comprender esta discrepancia es necesaria una reflexión más profunda que rebasa el objetivo de este capítulo, pero sin duda no deja de parecernos un problema interesante que se ha manifestado en formas diversas en varios momentos de la historia de la matemática escolar, pero con mucha mayor fuerza a partir del movimiento de la reforma educativa de los 60, García [18].

Difieren también, sobre el problema de la enseñanza de la matemática en los niveles elementales de la escolaridad, el matemático, el investigador educativo, el planificador educativo (de esos de la SEP) y el profesor de matemáticas de la secundaria o de la primaria. Todos ellos han tenido vivencias diferentes con la matemática y con la experincia didáctica, y son estas experiencias previas las que regulan su discusión y no sólo eso, sino también, su forma de *imaginar el futuro*. Por lo que hasta ahora ha sido imposible diseñar un plan de desarrollo gobal de la enseñanza elemental de la matemática que esté estructurado coherentemente.

Retorno a los presocráticos

El diseño de los micromundos que Papert propone, en cierto sentido, se podría considerar como el redescubrimiento de la redondéz de la Tierra. Así como los antiguos griegos no sólo tenían pruebas para demostrar que la Tierra era redonda, sino que además ya habían calculado su diámetro; las escuelas griegas del tiempo de Tales fueron una excepción en la tradición escolástica. Al respecto Popper comenta en [47 , p. 190] que "...fue Tales quien fundó la nueva tradición de libertad -basada en una nueva relación entre maestro y discípulo- y quien creó, así un nuevo tipo de escuela muy diferente a la pitagórica. Tales parece haber sido capaz de tolerar la crítica. Y lo que es más parece haber creado la tradición de que se debe tolerar la crítica...Y con todo me inclino a pensar que hizo más que eso. Me cuesta imaginar una relación entre maestro y discípulo en la cual el maestro simplemente tolere la crítica sin estimularla activamente".

También nos explica porqué se perdió esta tradición crítica o racionalista [47 , p.191] "Según mi conocimiento, la tradición crítica o racionalista sólo fue creada una vez. Se perdió después de dos o tres siglos, debido quizás al auge de la doctrina aristotélica de la *episteme*, del conocimiento seguro y demostrable (que fue desarrollo de la distinción eleática y heraclitiana entre verdad segura y mera conjetura)"

Este es un fenómeno que nos permite comentar algo sobre el *decalage* entre la evolución cultural y la evolución biológica. *Esta dicotomía esencial ... entre nuestra cultura galopante y nuestro lento desarrollo biológico, es lo más notable de la existencia humana y la base de la mayoría de nuestros problemas*, Barash [4, p. 3]. La lenta evolución biológica nos impide cambios rápidos en nuestras estructuras intelectuales y emocionales lo que se refleja en la dificultad de generar nuevos modelos sociales más acordes con las necesidades de producción económica y cultural que generan los avances científicos y tecnológicos. Por ejemplo, aunque hace siglos que la humanidad ha corregido su concepción errónea sobre la forma que tiene la Tierra; aún no ha podido establecer sistemas escolares que revivan la *tradición crítica* de Tales. Si comparamos la esencia de los sistemas educativos actuales con los del pasado remoto nos sorprenderemos al hallar un gran parecido entre ellos:

> En todas o casi todas las civilizaciones encontramos algo semejante a una enseñanza religiosa y cosmológica, y en muchas sociedades encontramos escuelas. Ahora bien,las escuelas, especialmente las escuelas primitivas, tienen todas, al parecer, una estructura y una función características. Lejos de ser lugares de discusión crítica, su tarea es impartir una doctrina definida y conservada pura e inalterada. La tarea de una escuela es transmitir la tradición, la doctrina de su fundador, de su primer maestro, a la generación siguiente; y para este fin, lo más importante es mantener la doctrina intacta. Una escuela de esta especie nunca admite una idea nueva. Las ideas nuevas son herejías y conducen a cismas; si un miembro de la escuela trata de modificar la doctrina, es expulsado por herético"
>
> Popper [47, p. 189]

Una forma de explicar el rezago de los contenidos escolares con respecto del desarrollo de la ciencia actual, es analizando[6] las características de los sistemas educativos actuales, y la mejor descripción que encontré es la siguiente:

> "...De hecho, una de sus funciones esenciales es la de repetir a cada generación el saber que la generación precedente poseía y la de sus antepasados. Por lo tanto están dentro del orden de las cosas el que una de las tareas de los sitemas educativos sea (o al menos haya sido hasta ahora) el transmitir los valores del pasado; esta es la razón de que tiendan por naturaleza a constituirse en sistema cerrado en el tiempo y en el espacio, preocupados por su propia existencia y por su propio éxito; por tanto su tendencia natural les inclina a la introspección. A este respecto, la educación concurre objetivamente a consolidar las estructuras existentes, a formar individuos aptos para vivir en la sociedad tal y como es. Bajo este ángulo, y sin dar al término un sentido peyorativo, la educación es conservadora por naturaleza".
>
> Faure [12, pp. 116-117]

Ya antes Ivan Illich ha hablado sobre la conveniencia de una sociedad desescolarizada, y otros visionarios de la educación como Dewey, Montessori y Neill han propuesto educar a los niños en ambientes que favorezcan el desarrollo integral de sus emociones y de sus estructuras intelectuales, con espíritu crítico y de libertad, sin embargo en los hechos no han pasado a ser más que buenas intenciones que la práctica escolar se ha encargado de deformar, haciendo un mal uso de esta filosofía de la educación como se puede constatar en todas las "escuelas activas" que usaron este cartabón para explotar la idea, justificando colegiaturas elevadas.

Según Papert, la computadora representa la posibilidad real

---

6. El resultado de este análisis se encuentra compilado en el libro *Aprender a ser*, coordinado y editado por Edgar Faure [ ].

de modificar el proceso de enseñanza pero no concebido dentro del aparato educativo sino fuera de él. En particular, considero que para que esto suceda es necesario un cambio radical en todas las estructuras sociales, no sólo en las escolares (ya se ha dicho antes que la escuela sirve para preservar la sociedad tal y como es). No basta con salirse de las escuelas para que el cambio se dé. La transmisión del conocimiento siempre requerirá de un maestro (humano o no) si éste continúa con ideas reaccionarias, así será su enseñanza, aunque no la ejerza dentro de una escuela.

Sin embargo, esta situación no se va a poder modificar nunca si no damos los primeros pasos para ello, así que apoyando la proposición de Papert sobre crear ambientes computacionales que permitan al alumno un encuentro más vivo con la matemática y a fin de propiciar un reencuentro con la *tradicón crítica* o *racional* de Tales, hemos tratado de armar una secuencia de actividades que favorezcan una situación tal. No creo que la discusión se deba centrar en torno a las ventajas o desventajas de los sistemas educativos, sino al papel que juega el profesor dentro de estos sistemas, pues él será el promotor o detractor de las nuevas propuestas didácticas. Si la reforma educativa de los 60 fracasó, en mucho fue porque nunca tomó en cuenta el papel que iba a jugar el profesor.

LA GEOMETRIA EN LA ERA COMPUTACIONAL

Antes de la reforma educativa la enseñanza de la geometría en los niveles elementales se reducía a enseñar algunos elementos de la geometría euclideana, en los cursos preuniversitarios se enseñaba geometría analítica (enfocándose al estudio de las secciones cónicas) y en los dos primeros semestres de la carrera de matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM estaban los cursos de "Geometría moderna I y II" y de "Geometría analítica I y II" (con un enfoque vectorial). Y en todo el currículum no hay más créditos obligatorios que cubran temas de geometría. Sin embargo, estos cursos que se pueden considerar introductorios a la carrera de matemáticas, no proporcionan una idea global del vasto campo de estudio que conforma la geometría.

Después de la reforma educativa se han hecho propuestas sobre la enseñanza de la geometría en el nivel elemental y al lado de los temas del cálculo de perímetros áreas y volúmenes, ahora aparecen otros temas como los de simetría, escala y una introducción al plano cartesiano. En los cursos del nivel medio superior también ha habido cambios, dentro de los cursos de geometría se presentan breves introducciones a las geometrías no euclideanas y a la teoría de gráficas. Sin embargo, los cursos en la carrera de matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM permanecen los mismos.

Se ha corrido mucha tinta sobre la necesidad de actualizar los contenidos de matemáticas de los cursos en los niveles elementales de la escolaridad; y, pareciera que el tiempo y esta necesidad de actualización no tocara las estructuras académicas de la enseñanza superior. Sin embargo, en un futuro cercano la irrupción de las computadoras en la enseñanza forzará este cambio, será mejor estar preparados para cuando ello suceda. Por tanto, se hace necesario explorar las posibilidades que presentan las computadoras para la enseñanza de la matemática en todos los niveles escolares. Aunque sin duda alguna estas posibilidades se multiplicarán y se diversificarán conforme se desarrolle la tecnología computacional, y nuestras primeras aportaciones aparecerán "burdas, grotescas e inoperantes". Pero a pesar de ello, los primeros pasos en esta dirección deben darse y tomarse como lo que son, una incursión dentro de un universo nuevo, poco conocido y explotado.

1. La geometría después de la reforma educativa

Siempre se ha intentado adaptar la enseñanza a los progresos de las ciencias, pero muy a menudo se ha hecho con retraso, lo que no ha dejado de perjudicar a las dos por igual. Sobre todo, a partir de este siglo el avance de la ciencia ha sido tan rápido que parecía inevitable un retraso considerable; y esto mismo ha sucedido al currículo de matemáticas. La revolución debida a la reestructuración del edificio matemático, derivada de la axiomatización y de la teoría de conjuntos ha dado lugar a una situación totalmente nueva.

Sin embargo, los matemáticos de esta era (a diferencia de los antiguos matemáticos) más preocupados por desarrollar sus propias ideas, no se ocuparon por la enseñanza de su disciplina. Lo que provocó un divorcio completo entre la formación matemática en los sistemas elementales de la enseñanza y los requisitos teóricos para iniciar una carrera científica o de investigación. Empezó a ser evidente este retraso cuando generación tras generación de jóvenes aspirantes a las instituciones de estudios superiores se encontraban frente al abismo que había entre su formación elemental y las nuevas exigencias del formalismo teórico.

El trabajo que implicó actualizar los contenidos de los programas escolares, y el de los correspondientes libros de texto, no resultó ser una tarea fácil, ya que en el seno mismo de la comunidad matemática había opiniones antagónicas respecto de los contenidos que había que tomar en cuenta para enseñar en los cursos elementales de matemáticas. Sin embargo, las presiones sociales eran demasiadas y la reforma se llevó a cabo a pesar de que no había consenso:

> "La puesta en marcha de la reforma se hizo por instigación y de acuerdo a las ideas de un número bastante reducido de personas, y algunas investigaciones entonces en marcha sobre la enseñanza de la matemática al nivel elemental, sirvieron como base de trabajo para las comisiones que se crearon en muchos países, sin que se hicieran simultáneamente experiencias originales. Se pudo tener la ilusión de un gran consenso internacional, mientras que en realidad se trataba de un fenómeno de resonancia alrededor de una gama de proposiciones bastante reducida."
>
> Unesco [51, p. 20]

Quien llevó la peor parte en el desenlace subsecuente a la reforma educativa fue la geometría. Encarnizadas discusiones se suscitaron en torno a si era conveniente, o no, enseñarla, sin llegar nunca a nigún acuerdo: "El problema del aprendizaje de la geometría queda siempre pendiente" Krygowska [31]. Y como consecuencia de ello empezó a desaparecer, si no del currículo, sí de la cátedra de los profesores: cada vez se daba menos importancia al tema y así pasaron más de diez años.

> "...si no ha desaparecido completamente del currículo de matemáticas de la secundaria, la geometría es ahora menos importante que antes"
>
> Braconne y Dionne [7, p. 109]

2. La nueva enseñanza de la geometría

En la historía de la computación en la enseñanza de la matemática dos hechos han favorecido a que la gemetría vuelva a la escena de la enseñanza, éstos son: 1) una mayor resolución en las pantallas de los monitores de las computadoras, que permiten el diseño de gráficas[7], y 2) el lenguaje Logo, que es esencialmente geométrico. Y esto es evidente, durante la década de los setentas hubo un gran énfasis en las investigaciones educativas enfocadas al aspecto numérico de la matemática curricular, porque parecía que este tema facilitaría la entrada de las calculadoras primero, y de las computadoras después, a la enseñanza de la matemática escolar dentro del aula.

Una vez que Logo ha demostrado ser un lenguaje tan sencillo que los niños muy pequeños lo aprenden y por su ventaja de ser extendible, la comunidad de investigadores en educación matemática se ha volcado sobre él, y se han hecho numerosos intentos por diseñar micromundos para varios temas de la matemática en general, y para la geometría en particular. Haremos una breve reseña de estos últimos, pues esto ayudará a ubicar nuestro propio trabajo después. Este estudio es meramente bibliográfico y no se ha tenido acceso a los programas que algunos artículos mencionan.

2.1. Artículos que reportan estudios sin el uso de la computadora

Annette Braconne y Jean Dionne [7] se proponen 1) describir dentro de un modelo de comprensión, la forma en como los maestros y los alumnos de secundaria entienden la prueba y la demostración en geometría; y 2) buscar qué clase de relación puede existir entre la comprensión de una demostración y los niveles de van

[7] En las primeras pantallas las rectas se veían como escaleras y también había que convencer a los alumnos de que el círculo era tal y no una elipse deforme.

introducido no como un tema propiamente dicho, sino como un medio para lograr ciertos objetivos, que al parecer ahora no resultan convincentes.

El primero de estos objetivos fue esencialmente negativo. Se sintió que la geometría euclideana tradicional no era apropiada para la mayoría de los niños de secundaria. Aunque la crítica se aplicaba no al tema mismo sino a la forma como se enseñaba: como un sistema deductivo que muchos niños aprendían solamente de memoria. Bajo esta circunstancia no es sorprendente que hubiera resistencia a la introducción de temas muy diferentes (así como métodos menos formales) particularmente cuando el material que se descartaba constituía un sistema matemático elegante, correctamente considerado como una parte importante de nuestra herencia cultural.

Una segunda razón para introducir el tema fue la espectativa de que los niños descubrieran reglas generales acerca de las combinaciones de las transformaciones que permite comprender la estructura matemática, particularmente la estructura de grupo. Sin embargo, muchos programas escolares actuales no exigen que este tema deba verse completamente, con el resultado que alumnos y maestros trabajan hacia metas que son confusas e incompletas.

Parecería, por tanto, que al introducir el tema de transformaciones geométricas en el currículo de la escuela secundaria lo importante era garantizar la desaparición de una área de conocimiento de alto *status* (la geometría deductiva euclideana) que se reconoció como inapropiada, intoduciendo otras áreas de conocimiento de *status* alto, aunque igualmente inapropiadas. Esto es importante para proteger el *status* de las matemáticas escolares y refleja el interés profesional de los matemáticos quienes con solo examinar el sistema ejercieron un control fuerte sobre la reforma curricular. Desafortunadamente estos intereses no necesariamente coinciden con lo de los niños que estudian el tema.

En el artículo [22] **Denise Greniere** presenta una secuencia de enseñanza del concepto de simetría axial a 28 niños de 11 años de edad. Este estudio lo realizó en 1985 en Grenoble. El objetivo de esta secuencia de enseñanza era propiciar que los alumos llegaran a definir la reflexión y sus propiedades básicas. Las actividades se realizaron usando figuras de papel que los niños podían doblar y sobre las que podían pintar.

Finalmente, en el artículo [23] **Grenier** y **Laborde** también presentan un estudio sobre las transformaciones geométricas; nos dicen que las diferentes investigaciones desarrolladas sobre este tema tienen dos enfoques: 1) las transformaciones geométricas como medio para la evolución de habilidades para la utilización de vectores en los ángulos y 2) la simetría ortogonal. Sin embargo, ellos están interesados en un enfoque diferente y llevan a cabo un estudio de comparación transcultural del concepto entre estudiantes franceses y japoneses. Concluyen que la simetría, además de ser una noción matemática es una noción cultural y social, y que el contexto socio-cultural ejerce una gran influencia en el aprendizaje de este tema.

2.2. Ambientes computacionales para la enseñanza de la geometría

En esta parte se pueden distinguir claramente dos tendencias en los trabajos publicados: 1) los que usan Logo y 2) los que usan otros programas. En seguida describiremos brevemente los artículos que aplican Logo al currículo de geometría y después nos detendremos un poco más en la presentación de los otros artículos, dado que nuestro trabajo va en esta dirección.

2.2.1. Artículos que reportan estudios usando Logo

Hoyles y Noss reportan en [29] los resultados de un estudio en el que se involucró a los alumnos en la actividad matemática a través de la interacción en un micromundo Logo basado en el concepto de un paralelogramo. El objetivo era identificar las formas en que los alumnos llegaban progresivamente a ser concientes de las relaciones involucradas en los paralelogramos y las generalizaban. Los datos fueron analizados desde la perspectiva de un modelo general para el aprendizaje de las matemáticas dentro de situaciones funcionales y llenas de significado. El análisis de los datos ha proporcionado conocimiento sobre la forma en que un ambiente Logo puede proporcionar un contexto en que los conceptos pueden ser *usados* primero y *comprendidos* después, basados en la interacción entre modos de pensamiento simbólicos y visuales, los estratos parciales, la discriminación, y la forma en que la computadora actúa como andamiaje cognitivo para el estudiante.

Trabajaron con un grupo de 7 niños de 13-14 años con experiencia previa en Logo; durante un año se llevaron a cabo estudios de casos sobre sus actividades en Logo dentro del salón de clases, lo que proporcionó los antecedentes para el diseño de las tareas que son la base del estudio. Estas tareas se trataron de resolver en una sesión de dos horas en el laboratorio de computación del Instituto de Educación de la Universidad de Londres.

Los resultados muestran que los alumnos llegan a usar las relaciones matemáticas muy espontáneamente con el objeto de realizar una tarea, aunque estas relaciones tan sólo sean al principio rutinas, posteriormente pueden formar las bases de una reflexión más conciente. Los datos indican también que la representación simbólica de un programa de computadora puede actuar como una forma de andamio que permite aprender a bosquejar el problema en la forma como lo contempla el propio alumno, lo que permite cuidar los elementos del concepto que aún necesitan ser desarrollados por él. El estudio indica que es necesario aprender mucho más acerca de las formas en que la presencia de la computadora puede influir los conceptos matemáticos de los niños y ser un medio en que los conceptos pueden ser *usados* y *comprendidos* después.

Pallascio y **Allaire** [42] diseñan un micromundo que les permita desarrollar las habilidades perceptivas de "observación", de "abstracción" y de "comunicación", correspondientes a las operaciones respectivas de "visualización", de "estructuración" y de "transfiguración", definidos en el marco de una tipología global de la percepción estructural de los objetos geométricos, aunque este estudia se limita a los poliedros.

Olive y **Lankenan** [38] estudian las habilidades específicas que pueden ser influídas por un ambiente de aprendizaje del tipo Logo diseñado para explorar las relaciones geométricas. Al comparar a los estudiantes de Logo con los grupos testigo, los resultados sugieren que la experiencia en Logo puede mejorar las habilidades evaluadas. Aunque este impacto parece depender, en parte, del; entrenamiento y de las habilidades de los profesores que estaban bien versados en la filosofía de la cultura educacional de Logo.

Kynigos [34] lleva a cabo una investigación con 20 niños griegos de entre 11 y 12 años de edad que habían trabajado unas 40 o 50 horas en Logo antes del estudio, cuyo objetivo es observar la naturaleza del "esquema intrínseco" -la relación sintónica entre el niño y la tortuga- su extensión y la forma en que los niños escogen usarlo.

Susan Paalz [41] parte del hecho -que muchos estudios sugieren- que los estudiantes no tienen las experiencias necesarias requeridas en el tercer nivel de van Hiele -el de las relaciones geométricas- para seguir en su estudio axiomático formal de geometría del décimo grado, y propone un ambiente de aprendizaje Logo como un medio de proporcionar estas experiencias. El ambiente se llevó a cabo y sus efectos fueron analizados en varias formas. En este estudio, los niveles de pensamiento geométrico de van Hiele de los estudiantes fueron determinados analizando las transcripciones de las entrevistas clínicas usando un diseño de pre y post grupos de comparación. El artículo describe las tareas de ángulo que fueron desarrolladas. Los resultados indicaron que hay poca diferencia de los niveles entre los grupos, los de la pre y post entrevistas. Cuando las entrevistas fueron analizadas dentro de las diferencias de nivel de los temas, los estudiantes de Logo presentaron mejor desempeño que su contraparte.

2.2.2. Estudios que usaron otros programas

Gallou-Dumiel [17] utiliza el programa Mac Draw de la Macintosh que favorece los procedimientos que permiten diferentes descomposiciones de la figura. El objeto de su estudio es observar las dificultades de los alumnos cuando usan el Teorema de Tales en la solución de un problema. La investigación fue llevada a cabo en dos ambientes: uno computacional y otro de papel y lápiz. También se estudiaron las modificaciones en las estrategias de los alumnos debidas a la computadora.

Chazan [8] utiliza el GEOMETRIC SUPPOSER para estudiar las dificultades en el aprendizaje del concepto de semejanza y nos dice que estudios anteriores han identificado tres áreas de dificultad que los estudiantes parecen tener en el tema: la razón proporcional, el desarrollo de relaciones dimensionales y la correspondencia en la semejanza de triángulos rectos. Así pues se diseñó una actividad dirigida a estas tres dificultades y se observó a los estudiantes cuando estudiaban esta unidad. El uso de la tecnología, específicamente el GEOMETRIC SUPPOSER, proporcionó dos beneficios: 1) da soporte a una pedagogía que busca abordar las dificultades de los estudiantes en la comprensión de la semejanza, y 2) el laboratorio permitió a los investigadores y a los maestros examinar directamente los procesos del pensamiento del estudiante.

Yerushalmy y Chazan [9] usan el GEOMETRIC SUPPOSER en la clase de geometría de la secundaria, y sugieren que para su uso hay tres cosas que tomar en cuenta: el tamaño de las tareas, la cantidad de los procesos de las instrucciones y la naturaleza de la especificación de la construcción. El artículo se basa en un estudio realizado en tres grupos de secundaria durante el periodo 85-86 en donde se enseñó geometría con el apoyo de la computadora.

Osta [40] en su investigación trata de usar las posibilidades que ofrece la computadora para crear una situación de enseñanza en el tratamiento dinámico de diseños como medio de resolución de un problema, que hace evolucionar ciertos conocimientos geométricos.

Franck Belleman [6] nos habla del proyecto Cabri-Géomètre que incluye el diseño de un programa que ayude a la construcción y la transformación de figuras para la resolución de problemas de geometría euclideana. Sugieren tener en cuenta las siguientes consideraciones al diseñar un programa didáctico:

1) Apoyarse en un estudio epistemológico de dominio matemático sobre el cual se trabaje.

2) Poner en práctica las herramientas de observación y análisis de las concepciones y de las conductas de los alumnos.

3) Permitir la intervención de los maestros en la concepción del programa y su puesta en práctica en la situación de la enseñanza.

4) La puesta en práctica de los conocimientos de programación suficientes para la mejor utilización de la computadora y el diseño de programas cuya modularidad permita modificaciones con el mínimo esfuerzo.

Para cubrir estos puntos el proyecto ha constituido un equipo formado por programadores, matemáticos, pedagógos y maestros, que considera los problemas específicos de cada área.

3. Artículos de análisis

En este apartado deberían incluirse los artículos que hacen una reflexión retrospectiva sobre la evolución del uso del Logo y de otros programas en la enseñanza, lo que permitiría una apreciación comparativa de las ventajas y desventajas de uno respecto de los otros, así como sus diversas formas de aplicación al currículo y de las posibles aplicaciones alternativas. Sin embargo, aún no existe la literatura de este tipo y tan sólo incluiremos un artículo de carácter general donde Celya Hoyles intenta describir las tendencias actuales en el uso de la computadora para la enseñanza de la geometría.

Celya Hoyles [28] primero nos hace ver que "... aún somos ignorantes respecto del aprendizaje de las ideas espaciales y de las ideas geométricas en general, ..., y aún más ignorantes sobre la influencia que la computadora podría tener sobre tal aprendizaje", por lo que aún hay muchas líneas de investigación por explorar. Ella distingue principalmente tres temas de investigación:

I. La investigación que explora el desarrollo de la comprensión de los niños de los significados geométricos y espaciales y cómo la progresión (por ejemplo, de la generalidad, a la creciente diferenciación) puede ser afectada por "tratamientos" computacionales.

II. La que investiga la influencia del "entrenamiento" de ambientes computacionales sobre diferentes habilidades espaciales, por ejemplo, sobre las dos habilidades constructivas que distingue Bishop:

1. La habilidad para interpretar información con figuras (IIF). Esta habilidad involucra la comprensión de

representaciones visuales y vocabulario espacial usado en el trabajo geométrico: gráficas, representaciones gráficas y diagramas de todo tipo. En las matemáticas abundan representaciones tales y tienen que ver con la lectura, comprensión e interpretación de tal información. es una habilidad de contenido y de contexto y relaciona particularmente a la forma con el estímulo material.

2. La habilidad para el procesamiento visual (PV). esta habilidad involucra la visualización y la translación de relaciones abstractas e información no figurativa en términos visuales. También incluye la manipulación y transformación de las representaciones visuales e imaginación visual. Es una habilidad de proceso, y no relaciona a la forma con el estímulo material presentado.

III. La investigación que toma como punto de partida el diseño de situaciones geométricas basadas en la computadora que confrontan a los estudiantes con "obstáculos" específicos y busca identificar las estrategias estudiante/computadora, los significados que construyen los estudiantes, y cómo estos significados se relacionan a las representaciones disponibles mediante las "herramientas" de la computadora. Esta investigación emplea a la computadora más o menos explícitamente para crear herramientas didácticas para facilitar la comprensión o la adquisición de conceptos matemáticos específicos.

Posteriormente pasa a una clasificación de los artículos publicados en esta dirección dentro de los temas de investigación que acabamos de citar: en el tema II, sugiere que hay tres artículos **Olive** y **Lankenau** [38], **Scally** [49] y **Allaire** [1]. En el tema III agrupa los siguientes artículos **Chazan** [8], **Gallou-Dumiel** [17], **Hoyles** y **Noss** [29], **Janvier** y **Garancon** [30], **Osta** [40] y **Yerushalmy** y **Chasan** [9].

Luego establece una serie de preguntas que considera que pueden ser útiles como punto de partida para la discusión de estos artículos:

1. ¿Qué tipo de software es usado y cuál es la razón para su elección y el diseño del ambiente computacional?

2. ¿Cuál es el propósito de la investigción: evaluar la influencia del ambiente computacional sobre concepciones matemáticas específicas o sobre habilidades espaciales más generales?

3. ¿Cuál es el conocimiento geométrico investigado y cómo es modelado en el ambiente computacional?

4. ¿Cuál es la influencia de la computadora sobre el ambiente de aprendizaje? Hay dos formas de abordar esta pregunta: ¿Cómo afectan la *representación* del conocimiento? y ¿Cómo afecta el *proceso* de aprendizaje el ambiente computacional?

5. ¿Cuál es la relación de la comprensión desarrollada en el contexto computacional con otros contextos? Es plausible sugerir que un ambiente simulado poco familiar sobre las relaciones enclavadas en la computadora son más fácilmente discernidad *pero* ¿Cómo el reconocimiento de estas relaciones se transfiere a través de los contextos?

6.¿Cuál es el papel del maestro y la naturaleza de la intervención del maestro en el proceso de aprendizaje?

7. ¿Cuál es la reacción del estudiante hacia el software: por ejemplo, fueron motivados para experimentar? ¿Pudieron con el aspecto técnico? ¿Fueron diferencias individuales o entre grupos observados?

Después de la descripción de las metodologías y de algunas lineas en común de los artículos revisados hace algunas observaciones sobre algunos aspectos de las investigaciones que sería bueno puntualizar: 1) es necesario especificar el papel del profesor dentro del ambiente computacional, 2) hacen falta investigaciones comparativas entre diferentes ambientes computacionales y en ambientes no computacionales, 3) también hace falta un análisis de las bases de los errores conceptuales, visuales o simbólicos, 4) sería interesante observar las diferencias en aprendizaje entre diferentes grupos étnicos y sociales como opuestas a las características individuales, 5) ya que muchas investigaciones describen el trabajo en parejas, parecería importante observar si esta relación influye en el aprendizaje, 6) hace falta investigar dentro de una estructura evolutiva involucrando estudios longitudinales así como la evaluación del trabajo de los niños en un ambieinte computacional.

Finalmente, se concluye que "...aún falta una gran cantidad de investigación sobre el efecto de la interacción en un ambiente computacional sobre las habilidades espaciales y sobre la influencia en la construcción de los estudiantes del conocimiento geométrico a partir de la actividad con software que permita al estudiante manipular o graficar objetos sobre la pantalla"

Las computadoras y la enseñanza de la matemática en México

El único trabajo que conozco sobre el uso de la computadora en la enseñanza de la geometría, realizado en México, es la tesis de maestría de María del Cármen Alvarez. Pero considerando conveniente la difusión de las investigaciones hechas en esta dirección en nuestro país abro este apartado, aunque no todos los trabajos traten el tema que aquí desarrollamos.

Es difícil tener una imagen global de lo que se hace en esta dirección en el país ya que no existen los foros adecuados para una difusión amplia y sistemática sobre el trabajo y los proyectos de los matemáticos, los investigadores educativos, los planificadores educativos y los maestros. Sin embargo, estoy segura que investigación seria en esta dirección ya se está llevando a cabo, además de la que aquí se describe:

Hay grupos de matemáticos dedicados a la elaboración de programas educativos para la enseñanza de la matemática como el **Grupo de Enseñanza de la Matemática** (GEM) del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM; el **Centro de Investigación Matemática** (CIMAT) en Guanajuato; el **Instituto de Investigación en Matemática Aplicada y Sistemas** (IIMAS) y el **Departamento de Máquinas y Enseñanza** (DEMEN) de la Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV.

Sin embargo, también hay matemáticos y profesores de matemáticas que han realizado programas educativos para la enseñanza de la matemática que trabajan de forma independiente, como por ejemplo, Rodolfo San Agustín Chi del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Enrique Galindo Morales de la Sección de Matemática Educativa y Esnel Pérez Hernández de la Escuela Normal Superior.

No sólo se ha desarrollado trabajo en la dirección de la elaboración de programas educativos (software educativo), sino que también se han hecho algunas investigaciones sobre el uso de estos programas en la enseñanza de la matemática, estas investigaciones por lo general han quedado impresas en trabajos de tesis:

Alfinio Flores Peñafiel

En primer lugar, aparece la tesis doctoral de Alfinio Flores Peñafiel [1985] intitulada: *El efecto de programar la computadora sobre el aprendizaje de conceptos de cálculo* [15]. Ya antes se han mencionado las diferentes concepciones que hay sobre el uso de la computadora en la enseñanza: 1) que la computadora programe al estudiante o, 2) que el estudiante programe a la computadora. Aunque el primer punto está ampliamente documentado, no tanto así el segundo pues éste es un enfoque 'relativamente reciente'. Así pues, este estudio pretende determinar si al programar la computadora los estudiantes mejoran su comprensión sobre algunos conceptos de cálculo.

Antes de llevar a cabo la experimentación propiamente dicha se realizaron dos estudios piloto: 1) un experimento informal de enseñanza con alumnos de licenciatura de matemáticas sirvió para seleccionar los programas de computación; 2) otra experiencia con alumnos de cálculo de bachillerato sirvió para desarrollar un conjunto de materiales de referencia y de actividades para familiarizar a los alumnos con el lenguaje BASIC. Estas actividades, ligeramente modificadas constituyeron el tratamiento previo del experimento. Así mismo se desarrollaron el examen previo, y actividades para ambos tratamientos. Durante esta experiencia también se probaron algunas de las preguntas del examen subsecuente. La experiencia ganada durante el estudio piloto sirvió de base para tomar decisiones concernientes con los métodos y procedimientos del experimento.

El estudio fue conducido con dos grupos (29 y 26 alumnos) de estudiantes de química de primer año en un curso de cálculo en una universidad del centro del país. Se utilizaron 12 computadoras Timex-Sinclair 2068 (72 K DE MEMORIA). Cada grupo tenía tres horas de teoría a la semana, y una sesión con la computadora de dos horas a la semana. Un matemático dio la clase en el turno de la mañana. El experimentador (también un matemático) dio la clase en el turno de la tarde, en ambos casos la teoría fue una clase de tipo tradicional. El experimentador supervisó a ambos grupos en las actividades de computación. Para las sesiones de computación cada grupo fue dividido en dos secciones, de modo que no hubiera más de 15 alumnos con las 12 computadoras.

La experiencia se diseñó de la siguiente manera: todos los alumnos tuvieron el mismo tratamiento previo, el mismo examen previo, fueron asignados aleatoriamente al tratamiento 1 o al tratamiento 2, y presentaron el mismo examen subsecuente.

Aunque el estudio no mostró diferencias significativas entre uno u otro tratamiento, se observó un desempeño alto en ambos grupos de estudiantes pues de los 56 alumnos que se sumaban con los dos grupos sólo 8 tuvieron menos del 50% de respuestas correctas. Al respecto el autor señala que los alumnos permanecieron entusiasmados durante todo el tiempo que duró la investigación. Frecuentemente los estudiantes interactuaban entre sí, en mucho debido a que tenían que compartir la computadora. Cuando tenían problemas o aparecía un error, los alumnos preguntaban a otros equipos o compañeros, así como al supervisor. Se observó también que durante la sesión de laboratorio los alumnos hacían más preguntas de las que usualmente hacen en la clase de teoría.

Ricardo Quintero y Sonia Ursini

Presentaron una tesis conjunta para obtener el grado de Maestría en Ciencias [1987] titulada: *Microcomputadoras en la clase de matemáticas. Una propuesta metodológica* [48]. En su introducción confiesan su debilidad original por diseñar lecciones interactivas de tipo tutorial "lecciones que resultaron pobres instrumentos de enseñanza" [48, p. 2]. Pero afirman que su posterior contacto con LOGO y sobre todo con su filosofía los hizo cambiar su punto de vista: ahora usan LOGO para diseñar "micromundos curriculares": *estudiamos la forma de utilizar los esquemas anteriores* (los de Papert) *en contextos de enseñanza escolarizada*.[48, p. 49].

Trabajaron en un grupo de 34 niños de sexto año de primaria, dentro de su horario normal de clase de matemáticas. El trabajo lo condujo su maestro regular. La experiencia se llevó a cabo en tres sesiones de un hora. Solamente en la última sesión se trabajó con la microcomputadora, una para todo el grupo, y la manipuló el profesor. Los programas que se utilizaron se armaron con las subrutinas de su primer programa tutorial con algunas modificaciones para que su ejecución fuera controlada por el usuario. Este es el único ejemplo que se conoce donde se intenta hacer un "micromundo" con un programa cuya estructura es la de un tutorial.

María del Carmen Alvarez

Otra tesis desarrollada en esta dirección es la que presentó Ma. del Carmen Alvarez para obtener el grado de Maestro en Ciencias [1987] cuyo título es: *Construcción del concepto de ángulo con apoyo de microcomputadora* [2]. Este trabajo incluye: 1) un análisis del programa oficial de matemáticas (SEP) para el cuarto grado de primaria, sobre el tema de ángulo; 2) el diseño, aplicación y análisis de una evaluación diagnóstica sobre el tema de ángulo; 3) el diseño de tres juegos de computadora para introducir el concepto de ángulo; 4) una propuesta didáctica para introducir la noción de ángulo para niños de 10 a 11 años; 5) así como su implementación; 6) finalmente, un análisis de la experiencia.

Para la implementación de la propuesta didáctica se diseñaron 14 sesiones de 90 minutos cada una. Se trabajó con 4 niños y 5 niñas en tres máquinas. Los niños no quisieron trabajar con las niñas así que trabajaron 4 niños en una máquina, 2 niñas en una y 3 niñas en otra. El equipo de investigación estuvo integrado por la autora y el director de la tesis (Fernando Hitt) que fueron observadores permanentes de las sesiones llevadas a cabo, tres observadores ocasionales, encargados de hacer registros escritos de la observación y la profesora a cuyo cargo estuvo la aplicación de la secuencia didáctica.

Carmen comenta en sus conclusiones que observó "un arraigo de las hipótesis empíricas en los estudiantes. En este trabajo se pudieron observar cambios en las estrategias de resolución y búsquedas de nuevos procedimientos y acciones, a partir de acercamientos de ensayo y error a través de la computadora. Incluso surgieron modificaciones de esquemas internos". [2, p. 307].

Enrique Galindo Morales

Presentó el trabajo titulado *Un acercamiento a algunas de las ideas del cálculo diferencial empleando LOGO y programas para graficar* [16] para obtener el grado de Maestro en Ciencias [1988]. Este trabajo refleja la doble inquietud del autor: 1) enseñar cálculo y 2) enseñar a programar la computadora a los profesores de matemáticas con fines didácticos. Y su amplia experiencia en ambas direcciones matizan sus reflexiones sobre estos dos puntos. Tanto el diseño de sus programas como la tesis misma parten de problemas epistemológicos localizados en la enseñanza del cálculo.

Su trabajo incluye una revisión de las investigaciones realizadas sobre las dificultades que les representa a los estudiantes aprender ciertas nociones del cálculo, como por ejemplo, el concepto de tangente y el de límite. También hace una revisión de los programas para computadora educativos que se han diseñado para enseñar cálculo y desarrolla un estudio paralelo sobre el uso de estos programas en la enseñanza de las matemáticas, observando tres grupos: 1) el estudiante elabora sus propios programas; 2) la instrucción basada en la computadora y 3) la computadora como herramienta del profesor. Finalmente realiza un estudio sobre las investigaciones hechas sobre el diseño de actividades para enseñar cálculo usando la computadora.

A la luz de su experiencia personal como profesor de cálculo y como programador profesional, así como de los resultados de su minuciosa investigación documental, diseñó primero, el programa LAGRAF 88, y después una serie de micromundos con el lenguaje LOGO para explorar algunos conceptos del cálculo, tanto con un acercamiento geométrico como numérico. LAGRAF 88 y los programas realizados en LOGO permiten al usuario *manipular ejemplos y contraejemplos del concepto en un contexto moderadamente complejo.* David Tall [50, p.]. Para Enrique, el profesor juega un papel central en el diseño de los micromundos, "algo que debe quedar claro es que será el profesor, si estuviera interesado en usar el software aquí presentado, quien deberá diseñar actividades para su uso. Aunque las aquí propuestas pueden dar algunas ideas". [16, p. 67].

Un desafío para las Instituciones de Estudios Superiores

A lo largo de este capítulo se han descrito varios trabajos de investigación sobre el diseño de ambientes computacionales: "micromundos", "micromundos curriculares" y "otros". La gran mayoría se centra en la enseñanza de la matemática para el nivel medio básico (la secundaria), otros en niños más pequeños y muy pocos hay sobre el diseño de ambientes computacionales para el nivel superior.

Pregunta: ¿cómo reaccionarán las nuevas generaciones formadas en ambientes computacionales, ante una clase tradicional de tiza y pizarrón, como muchas que se imparten ahora en las instituciones del nivel superior?

A este respecto resulta interesante observar los resultados del trabajo desarollado por David Tall [50]. El propósito de su investigación es probar la hipótesis de que los programas de computación interactivos, animan la demostración del maestro y la investigación del alumno sobre una amplia variedad de ejemplos y contraejemplos, y que pueden ser usados para ayudar a los estudiantes a desarrollar una imagen conceptual más rica, capáz de responder más apropiadamente a nuevas situaciones. Trabajó con tres grupos experimentales (de 12, 14 y 16 alumnos) de jóvenes de 16 años que estudiaron en paquetes de programas capaces de amplificar las gráficas, de tal modo que les permitía observar "si habían visto bien". Las actividades con los programas de graficación proporcionaron las bases para la discusión en clase y las investigaciones de pequeños grupos para motivar la formación de una relación coherente entre los conceptos de gradiente y tangente. Estos grupos se compararon con otros cinco, que fueron enseñados con métodos más tradicionales. Los dos cuestionarios administrados durante el curso confirmaron que los estudiantes experimentales pudieron responder más apropiadamente a situaciones nuevas.

La investigación enfatiza las dificultades representadas por el concepto de tangente, pero sugiere que las experiencias del grupo experimental ayudaron a desarrollar una imagen conceptual más coherente, con una habilidad mayor para transferir este conocimiento a un nuevo contexto. *En el nivel general la investigación lleva a fundamentar la teoría de que la computadora puede ser usada para concentrarse en las propiedades esenciales de un nuevo concepto al proporcionar programas de computadora que permitan al usuario manipular ejemplos y contraejemplos del concepto en un contexto moderadamente complejo.* David Tall [50, p.].

La parte interesante de este artículo es que las pruebas administradas durante la investigación, también se aplicaron a un grupo de estudiantes de matemáticas del primer año de la universidad, quienes estaban más altamente calificados tanto de los alumnos experimentales, como los de control; y sin embargo, en los resultados del examen posterior a la experiencia, los alumnos experimentales salieron casi tan bien como los alumnos universitarios.

Aunque aún no haya claridad sobre el tipo de habilidades que desarrollan los niños al interactuar con las computadoras, ni de las implicaciones que ello puede tener sobre su formación matemática subsecuente, sí está claro que después de interactuar en ambientes computacionales que activan su creatividad y promueven una mayor participación del estudiante dentro del salón de clases, será difícil que se adapten a las clases de corte "tradicional" que sin duda recibirán en la enseñanza superior.

Afortunadamente, en nuestro país no se ha generalizado aún el uso de la computadora en la enseñanza elemental, pero sin duda tarde o temprano sucederá. Sería conveniente que la nueva situación que plantean las computadoras en la enseñanza no nos sorprendiera perezosos, ni apáticos, ni recelosos frente a los cambios. Porque los profesores somos los *verdaderos diseñadores del futuro*, pues de nosotros depende el cambio real.

3. G A M E: GEOMETRIA ANIMADA COMO UN MEDIO DE ENSEÑANZA

Tratando de sistematizar la propuesta de Enrique Galindo en la elaboración de programas para computadora para la enseñanza de la matemática, impresa en [16]; partimos de un estudio epistemológico de la geometría, lo que definió y reguló el diseño de GAME y de las actividades propuestas para el Laboratorio Geométrico.

El programa está diseñado de tal forma que se permite observar y analizar las concepciones intuitivas de los alumnos, así mismo, permite la intervención del maestro en el desarrollo de las actividades dentro del salón de clase.

GAME no ha sido concebido como un producto final, ni se le ofrece como "el lenguaje definitivo". Se presenta como un ejemplo de lo que es posible hacer en la dirección de la elaboración de software educativo. En este sentido, apoyamos la propuesta de Enrique [16, p.38] de presentar el software "abierto" para que los profesores con experiencia en programación puedan modificarlo, hacerlo crecer, o adecuarlo a sus necesidades; este es el propósito de incluir los listados.

Este trabajo difiere de los estudios mencionados en el capítulo dos, pues para él se ha diseñado un lenguaje que se adapta a las necesidades específicas de nuestro estudio; mientras que los estudios reportados adaptan sus objetivos a los lenguajes y a los programas para computadora disponibles en el mercado (excepto el programa diseñado por el equipo de Franck Belleman). Tampoco nos interesa proponer modificaciones curriculares, ni centrarnos en la enseñanza de un tema específico del currículo de geometría. Nos interesa explorar nuevas formas de uso de la computadora que permitan al estudiante "hacer matemáticas" en el sentido de Papert.

Hemos observado que a pesar de que no hay duda de que la computadora facilita y lleva a cabo más rápidamente todos los trabajos en las áreas en las que ha entrado, hay personas (sobre todo las personas adultas) quienes encuentran, de alguna manera, problemático empezar a interactuar con la computadora. Creemos que esto se debe un poco a la herencia que han legado los primeros programas de computadora comerciales como el Word Star que a pesar de ser un simple procesador de texto, no es inmediato empezar a interaccionar con él, lo que ha provocado el rechazo de muchos hacia la computadora pues quedan convencidos de que el tiempo que se gana con la rapidez de la máquina, se pierde al intentar aprender a usar los programas.

Sin embargo, la aparición de lenguajes cada vez más poderosos ha permitido una producción vertiginosa de programas para computadora cuya interacción resulta más "amigable" lo que reditua para el usuario en la posibilidad de aplicar casi inmediatamente los programas en el punto de interés: su trabajo.

Con esta filosofía de los programas "amigables" se ha pensado en diseñar un programa representado por un "lenguaje" que permite una interacción rápida y fácil con la máquina, y la sintaxis del lenguaje de programación no representa un obstáculo para el usuario. De esta manera, semejante a la geometría, las primitivas de nuestro programa son puntos, rectas, círculos y relaciones entre ellos que permiten construir nuevas situaciones. Esto permite que la atención se centre rápidamente en el tema, y que no se pierda mucho tiempo en introducir la sintaxis de un lenguaje de programación

Cómo funciona GAME

En GAME, el control de la computadora se logra por el uso del MENU o por programación. Los estudiantes primero se familiarizan con el lenguaje usando el menú. El menú está dividido en cuatro áreas: **punto, línea y círculo, control y programable.** A diferencia de Logo, puede evitarse el uso de números en una etapa inicial, aunque pueden ser introducidos después.

Los puntos pueden introducirse "señalando" el sitio de la pantalla con el cursor (que se puede controlar desde el teclado con las flechas, o con el "ratón"), cuando el cursor está sobre el sitio en donde se desea colocar el punto se oprime la tecla "return". Podemos referirnos a los puntos introducidos en esta forma, así como a la intersección de líneas y círculos, como puntos *especiales*.

La opción PUNTO es complicada por el hecho de que hay tres intenciones distintas al señalar un punto. Cuando colocamos el cursor podemos desear:

1) indicar un punto especial que ya está en el dibujo.
2) indicar un punto no especial sobre una línea o un círculo del dibujo.
3) indicar un punto nuevo que aún no está en el dibujo.

El cursor nos permite realizar cualquiera de estas intenciones. El cursor es un rectángulo cuyo tamaño se puede hacer variar con las flechas del teclado. Cuando se presiona la tecla "return", la computadora busca primero un punto especial dentro del rectángulo. Si encuentra varios se seleccionará el más cercano al punto donde se cruzan las diagonales del rectángulo. Si no hay ningún punto especial dentro del rectángulo, la computadora en seguida busca una línea o un círculo del dibujo y toma el punto más cercano al centro del cursor. Si no se encuentra ningún punto dentro del rectángulo, entonces introducirá un punto nuevo donde se encuentre el centro del rectángulo.

Las opciones LINEA Y CIRCULO del menú permiten introducir (extender) lineas, segmentos de lineas, rayos, circulos y arcos. Al seleccionar cualquiera de estas opciones la máquina nos pedirá que demos los puntos necesarios. Si presionamos LINEA, será necesario dar los dos puntos que la determinan (si introducimos el mismo punto dos veces, recibiremos un mensaje que nos marca nuestro error "los puntos deben ser distintos" y nos pedirá de nuevo el segundo punto).

La opción CIRCULO está basada en el uso del compás. Al escoger esta opción se nos pedirá el centro, que será el primer punto que se introduzca, y el radio se calculará al introducir el segundo punto; entonces en la pantalla aparecerá un circulo cuyo radio es igual a la distancia entre los dos puntos dados. Las operaciones SEGMENTO, RAYO Y ARCO son similares.

Cuando se desea realizar un dibujo, la secuencia de instrucciones escogidas se enlista en la pantalla. Esta lista es muy útil para que los estudiantes corrigan sus errores, o bien introduzcan modificaciones en la figura.

La opción CONTROL contiene el submenú que permite BORRAR, REGRESAR AL DIBUJO ANTERIOR y ACERCAMIENTOS.

La opción PROGRAMAR como su nombre lo indica permite programar. De una manera semejante a como se hace en Logo. Como ejemplo podemos dar la construcción del procedimiento BISECTRIZ.

Para construir el procedimiento, simplemente tecleamos las siguientes siete lineas (la numeración de las lineas no son parte del programa, solo sirven como una referencia para la siguiente explicación):

1. PARA BISECTRIZ P1 P2
2. DIBUJA C1 CIRCULO P1 P1 P2
3. DIBUJA C2 CIRCULO P2 P2 P1
4. DIBUJA Q1 PRIMERA INTERSECCION ENTRE C1 C2
5. DIBUJA Q2 SEGUNDA INTERSECCIÓN ENTRE C1 C2
6. TRAZA LA LINEA Q1 Q2
7. FIN

La palabra PARA en el primer renglón avisa a la computadora que estamos definiendo un procedimiento llamado BISECTRIZ. Los otros dos datos en este renglón, P1 y P2, denotan variables. Si al correr el programa no se les ha asignado valores, se le pedirá al operador que los dé.

La palabra DIBUJA le avisa a la computadora que la palabra siguiente será definida por las variables que le siguen. Esto es, el renglón dos dice que C1 es el círculo con centro en P1 cuyo radio está dado por la longitud entre los puntos P1 y P2. El renglón tres es semejante.

INTERSECCION ENTRE C1 C2 es una "lista" que consiste de los puntos que están sobre la intersección de C1 y C2 (si la intersección fuera infinita, el procedimiento mandaría un mensaje marcando el error). PRIMERA escoge el primer elemento de esa lista (si la intersección fuera vacía, el procedimiento enviaría un mensaje señalando el error). Esto es, en el renglón cuatro se define Q1 como el primer elemento en la lista y en el renglón cinco se define Q2 como el segundo (si la intersección contiene un único punto, el procedimiento señalaría el error en el renglón cinco).

La instrucción TRAZA hace que la línea indicada sea dibujada sobre la pantalla del monitor (si Q1 y Q2 fueran el mismo punto, saldría un mensaje señalando el error). Finalmente, FIN significa lo que quiere decir.

Para correr el procedimiento BISECTRIZ, simplemente teclear BISECTRIZ P1 P2. Si P1 y P2 ya han sido definidos, entonces el programa correrá. Si P1 y P2 no se han señalado en la pantalla, se pedirá que los introduzca con el cursor. Cuando el programa corre, los círculos C1 y C2 son calculados pero no graficados ya que no hay una instrucción que pida que los dibuje.

En lo que sigue presentaremos algunas de las actividades que se han diseñado para el Laboratorio Geométrico. Claro que esta es una proposición que aún tiene que ser confrontada con la práctica del estudiante, lo que seguramente servirá de fuente de inspiración para diseñar más actividades, y para adecuarlas al proceso del desarrollo intelectual del alumno.

4. EL LABORATORIO GEOMETRICO

Si partimos de la hipótesis que establece la psicología genética que afirma que "lo que es válido para el desarrollo de la humanidad lo es para el individuo"[1], entonces debieramos dar la oportunidad al estudiante de que experimente los estadios del desarrollo histórico de la geometría hasta que alcanza su carácter lógico-deductivo.

Lo que se pretende con el diseño de este Laboratorio es crear un medio que le permita al estudiante recrear los tres grandes estadios del desarrollo de la geometría: la geometría empírica, la geometría inductiva y la geometría deductiva. Para ello se han diseñado algunas secuencias de ejercicios que ilustran este modelo de uso de la computadora.

En la primera etapa se pide al estudiante que verifique teoremas conocidos para un número "grande" de casos, tarea que sería realmente tediosa si no se contara con el recurso de la computadora. En esta parte el alumno empieza a familiarizarse con el lenguaje geométrico, toma confianza al emprender ejercicios que no le son completamente desconocidos y además repasa los conocimientos de la geometría elemental. En la segunda etapa se presentan situaciones nuevas para el estudiante, a fin de que él mismo establezca sus propias hipótesis y las verifique mediante la exploración de varios casos particulares, a fin de que establezca sus primeras proposiciones de carácter general. Finalmente, se

---

1. Esta hipótesis es reforzada por los resultados obtenidos en el trabajo de investigación que Dina van Hiele-Geldof realizó para la tesis doctoral que sustentó en 1957 [ ].

presentarían situaciones en las que la hipótesis funciona para un número pequeño de casos, pero que no es válida para todos los casos, lo que propiciaría la discusión sobre el papel de la demostración matemática, que permite hacer afirmaciones sobre todos los casos particulares a los que se refiera una proposición dada.

La geometría empírica

Tradicionalmente se suelen atribuir las primeras reglas geométricas empíricas a los egipcios como se puede observar en esta cita tomada de Nagel [36 p. 205]: "Es bien sabido que la geometría se originó en las artes prácticas de la tierra, entre los antiguos egipcios. Estos descubrieron una serie de fórmulas útiles, que permitieron a sus agrimensores, los *haperdonaptai*, fijar límites definidos entre los campos y calcular sus áreas. Sus fórmulas eran simplemente una colección de reglas prácticas independientes entre sí, y el descubrimiento de que las mismas se hallan conectadas por relaciones de implicación lógica aparentemente fue una realización de los antiguos griegos"

Sin embargo, hay evidencia de que tres mil años antes de nuestra era, los babilónicos tenían reglas similares a las ya descritas Grupo de Enseñanza de la Matemática [24]; y también se desarrolló esta actividad en otras culturas de la antigüedad. Pero lo importante de esta historia es observar cuánto tiempo le llevó a la humanidad desarrollar esta geometría empírica, pues no fue sino hasta el siglo VI antes de nuestra era que aparecieron los primeros teoremas.

No queremos decir con ello que un alumno pase el resto de sus días repasando propiedades particulares sin poder alcanzar nunca el formalismo deductivo. Solo queremos hacer hincapié en que es conveniente que pase rápidamente por la verificación de casos de algunos teoremas, como por ejemplo el teorema de Pitágoras.

Hacer esta labor, sin el recurso de la computadora no solo resultaría tediosa, sino que se perdería la óptica de lo que se desea lograr y pronto llegaría a volverse una tarea inútil, como tantas que hay en la matemática escolar.

Primera secuencia de actividades

Casi cada problema de geometría sirve de objeto para una pequeña investigación independiente, que exige imaginación y una manera de pensar original. Creemos, como Vasiliev [53, p. 196] que a veces tiene sentido enfocar a la geometría con concepciones físicas "un dibujo exacto es un experimento geométrico que permite llegar a comprender cierta afirmación que se refiere a toda una familia de líneas o a una configuración embrollada, al advertir una regularidad nueva".

Muchas cosas, sobre las que se habla en los teoremas, es útil comprobarlas en la práctica: hacer un dibujo, luego algunas cuantas variantes (situando las figuras en diversas posiciones). Semejante método experimental, además de que ayuda a adivinar la respuesta, y a formular una hipótesis, sugiere a menudo el camino hacia la demostración matemática.

1. Dibuja varios triángulos rectángulos, observa la relación entre sus lados.

2. Verifica que las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo son concurrentes.

3. Verifica que las medianas de un triángulo son concurrentes. Observa en qué razón corta el punto de intersección a cada una de las medianas

La geometría inductiva

A diferencia de la oscuridad que yace sobre el orígen de la geometría primitiva, "hay una gran cantidad de evidencia que señala a Tales y a sus alumnos como los primeros descubridores de teoremas y del método inductivo" GEM [24] que constituyen los antecedentes de la geometría euclideana

> "...los griegos analizaron las fórmulas egipcias, definieron algunas figuras geométricas en términos de otras y establecieron relaciones adicionales entre las superficies y los bordes limítrofes de los cuerpos. Además, después de varios siglos de una labor semejante, se demostró que, si se acepta sin prueba un pequeño número de proposiciones acerca de magnitudes en general y de figuras geométricas en particular, se puede deducir de ellas un número indefinido de otras proposiciones, inclusive las aceptadas anteriormente.'
>
> Nagel [36, p. 205].

Esta etapa de desarrollo de la geometría se extiende durante tres siglos, del siglo VI al siglo III antes de nuestra era. En este lapso bastante corto en comparación con el anterior, se desarrollaron casi todos los teoremas de geometría que luego Euclides organizó en los *Elementos*.

Segunda secuencia de actividades

1. Una escalera situada sobre el suelo liso y apoyada con un extremo en la pared, se desliza hacia abajo ¿Qué línea describe el movimiento de un gatito sentado en la parte media de la escalera? -¿Qué línea describirá el movimiento del gatito, si no está sentado en el centro de la escalera? Vasiliev [53 , p.11].

2. Por el interior de una circunferencia inmóvil rueda tocándola sin deslizar otra circunferencia cuyo radio es dos veces menor que el de la primera. ¿Qué línea describirá el punto K de la circunferencia rodante? [Idem, p.15]

3. ¿Qué figura describe un diámetro de la circunferencia móvil del problema anterior? [Idem, p.17]

4. Si a un triángulo se circunscribe una circunferencia y desde un punto cualquiera de ella se bajan perpendiculares a los lados del triángulo ¿Cómo es la línea que une los pies de las perpendiculares trazadas? -Repite el ejercicio para varios puntos sobre la circunferencia.

5. Dibuja un triángulo cualquiera y toma un punto del plano, traza perpendiculares a cada uno de los lados del triángulo dado desde el punto seleccionado. Qué figura determinan el conjunto de puntos que generan triángulos de área cero; y los de área uno; y los de área cinco. ¿Podrías establecer una hipótesis para la figura que determinaría el conjunto de puntos que generan triángulos de área n? [propuesto por: A. Ramírez]

La geometría deductiva

Finalmente, este emporio de conocimiento acumulado se organizó aplicándole sistemáticamente el método deductivo que desarrollaran Aristóteles y Platón. Los *Elementos* de Euclides fueron, así, una codificación teórica del arte de medir que tuvo sus raíces en prácticas con una larga historia anterior, y durante siglos Euclides fue aceptado como modelo de rigor lógico y como forma ideal de una ciencia teórica. Aunque en la actualidad ya no sea así, su estudio resulta una buena introducción a "un modo de pensar la matemática".

> "Existe un abismo entre el empirismo práctico de los agrimensores que parcelaban los campos del antiguo Egipto, y la geometría de los griegos del siglo VI antes de nuestra era. Aquello fue lo que precedió a las matemáticas; esto, las matemáticas propiamente dichas; ese abismo lo salva el puente del razonamiento deductivo aplicado en forma conciente y deliberada a las inducciones prácticas de la vida diaria. Las matemáticas no existen sin la estricta demostración deductiva a partir de hipótesis admitidas y claramente establecidas como tales. Lo anterior, no niega que la intuición, los experimentos, la inducción y el golpe de vista sean elementos importantes en la inventiva matemática; únicamente establece el criterio por el cual el resultado final de todo golpe de vista, sea cualquiera el nombre que se le asigne, se juzga o no como matemáticas."

Bell [5 , p. 14]

Tercera secuencia de actividades

1. Decide si es verdadera o no la siguiente proposición: *el número de regiones que se obtiene en un círculo al unir entre sí n puntos de la circunferencia es igual a* 2^{n-1}.

2. Decide si es verdadera o no la siguiente proposición: *el número de triángulos que se forman al unir un vértice de un polígono de n lados, con todos los vértices restantes es igual a* n-2.

3. Demuestra que para todo par de rectas l_a y l_b que se cortan, al girar en el plano alrededor de dos puntos fijos A, sobre una recta, y B, sobre la otra; el punto de intersección entre las rectas describe una circunferencia.

Una forma de aplicación de GAME

En esta parte se incluirán las rutinas en la computadora que ilustran o resuelven los problemas formulados con anterioridad. Esta sección se ilustrará con las imágenes que aparecen en pantalla.

BIBLIOGRAFIA

[1] Allaire.

[2] Alvárez, Ma. del Carmen. *Construcción del concepto de ángulo con apoyo de microcomputadora.* Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México D. F., 1987.

[3] Apéry, R; Caveing, M; *et al. Pensar la matemática.* Cuadernos Infimos 114. Tusquets Editores. Barcelona. 1982.

[4] Barash, David P. *La liebre y la tortuga.* Biblioteca Científica Salvat. Salvat Editores. Barcelona. 1987.

[5] Bell, E. T. *Historia de las matemáticas.* Fondo de Cultura Económica. México, D. F. 1949.

[6] Belleman, Franck. "Le projet Cabri-Géomètre: Elaboration d'un logiciel d'aide à la construction et la transformation de figures pour la résolution de problème de géométrie Euclidienne". Equipe de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble IMAG, Université de Grenoble, France. Tenth PME Conference.

[7] Braconne, Annette y Dionne, Jean J. "Secondary school student's and teachers' understanding of demonstration in geometry". vol 3. *Proceedings of the Eleventh International Conference PME-XI.* Montreal, July 19-25, 1987, p. 109-116.

[8] Chazan, Daniel. "Similarity: unraveling a conceptual knot with the aid of technology". vol 2. *Proceedings of the Eleventh International Conference PME-XI*, Montreal. July 19-25, 1987. pp. 3-9.

[9] Chazan, Daniel; Yerushalmy, Michal. "Effective problem posing in an inquiry environment: a case study using the geometric supposer". vol 2. *Proceedings of the Eleventh International Conference PME-XI.*, Montreal. July 19-25,

1987. pp 53-59.

[10] Eco, Humberto, "Representar el futuro". Publicado en el suplemento dominical de la *Jornada*. 11 de septiembre de 1988. p. 9.

[11] Efimov, N. V. *Geometría superior*. Editorial MIR, Moscú, 1984.

[12] Faure, Edgar (compilador) *Aprender a ser*. Unesco/Alianza Editorial. Madrid 1960

[13] Fetisov, A. I. *Acerca de la demostración en geometría*. Lecciones populares de matemáticas. MIR, Moscú. 1980.

[14] Flavell, John H. *La psicología evolutiva de Jean Piaget*. Editorial Paidós. México. 1987.

[15] Flores Peñafiel, Alfinio. *Effect of Computer programming on the learning of calculus concepts*. Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias en la Universidad del Estado de Ohio. 1985

[16] Galindo Morales, Enrique. *Un acercamiento a algunas de las ideas del cálculo diferencial empleando LOGO y programas para graficar*. Tesis presentada para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa en el Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN. México D.F. 1988.

[17] Gallou-Dumiel, Elisabeth. "Théorème de Thalès et Micro-ordinateur". vol 2. *Proceedings of the Eleventh International Conference PME-XI.*, Montreal. July 19-25, 1987. pp. 10-16.

[18] García Tello, Ma. Heréndira. *La reforma educativa y sus repercusiones en la enseñanza de la geometría en el nivel elemental*. Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigaciones y Estudios Superiores. México D. F.,1987.

[19] García Tello, Ma. Heréndira. "La geometría en la primaria". *Memorias de la primera reunión Centroaméricana y del Caribe sobre la formación de profesores e investigación en matemática educativa*. Mérida, Yucatán. México. 1987.

pp. 183-188.

[20] García Tello, Ma. Heréndira y Alarcón Bortolusi, Jesús. "La geometría del profesor". *Memorias de la segunda reunión Centroaméricana y del Caribe sobre la formación de profesores e investigación en matemática educativa.* Guatemala, Guatemala. 1988. pp. 313-316.

[21] Greenleaf, Newcomb. "Euclid: a graphics language for Plane Geometry". Publicado en: Hansen & Zweng (ed) *Computers in mathematics education 1984 yearbook*. National Council of Teachers of Mathematics, INC. USA, 1984, pp 146-154.

[22] Grenier, Denise. "The pupil's conceptions on axial symmetry: an individual activity in a classroom (with 11 years old pupils)". Equipe de Didactique des Mathématiques et de l'informatique de Grenoble IMAG, Univesité de Granoble, France. Tenth PME Conference, p.1-10.

[23] Grenier, Denise et Laborde, C. "Transformations géométriques: le cas de la symetrie orthogonale". Fotocopia sin referencia.

[24] Grupo de Enseñanza de la Matemática. *La geometría antes de Euclides* (audiovisual). Departamenteo de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM/Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV. México, D. F. 1988.

[25] Hatfield, Larry L. "Enseñanza vía la computadora en la formación de profesores de matemáticas" Publicado en: Galindo, Morales (compilador). *La computadora y la enseñanza de la matemática. Lecturas para el curso de introducción a la computación.* Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas. México D. F., 1988.

[26] Horblit, Marcus y Nielsen Kaj. *Plane Geometry Problems: with solutions*. Barnes & Noble Books. New York. 1947.

[27] Hoyles, Celia y Noss, Richard. "Sintetizando concepciones matemáticas y su formalización a través de la construcción de un currículo para la matemática escolar basado en Logo". Publicado en: Galindo, Enrique (compilador). *La computadora y la enseñanza de la matemática. Lecturas para el curso de introducción a la computación*. Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas. México D. F., 1988.

[28] Hoyles, Celia. "Geometry and computer environment". vol 2. *Proceedings of the eleventh International Conference PME-XI.*, Montreal. July 19-25, 1987. pp. 60-66.

[29] Hoyles, Celia and Noss, Richard. "Seeing what matters: developing and understanding of the concept of parallelogram through a Logo microworld" vol.2. *PME XI*, 1987, p. 17-23.

[30] Janvier y Garancon

[31] Krigowska, A. "Educación matemática en el primer ciclo de enseñanza post-elemental y secundaria".Publicado en: Unesco. *Nuevas tendencias para la enseñanza de la matemática.* vol 4. UNESCO. 1977.

[32] Küchemann. "reflections and rotations". *Children's understanding of mathematics.* Murray, 1981. p. 11-16.

[33] Kuhn, Thomas S. *La estructura de las revoluciones científicas.* Breviarios del Fondo de Cultura Económica. No. 213. México, D. F., 1971.

[34] Kynigos, Chronis. "From intrinsic to non-intrinsic geometry". vol 2. *Proceedings of the Eleventh Internationalconference PME-XI.*, Montreal. July 19-25, 1987. pp. 43-49.

[35] Luerhmann, Arthur. "¿Puede la computadora enseñar al estudiante o viceversa?". Publicado en: Galindo, Enrique (compilador). *La computadora y la enseñanza de la matemática. Lecturas para el curso de introducción a la computación.* Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas. México D. F., 1988.

[36] Nagel, Ernest. *La estructura de la ciencia.* Paidos. Barcelona, España, 1981.

[37] Noss, Richard. "How do children do mathematics with Logo?". *Journal of Computer Assisted Learning.* 1986.

[38] Olive, John & Lankenan, Cheryl. "The effects of Logo-based learning experiences on students' non-verbal cognitive abilities". vol. 2. *Proceedings of the Eleventh International Conference PME-XI.*, Montreal. July 19-25, 1987. pp 24-30.

[39] O'Shea, Tim and Self, John. *Learning and Teaching with computers. Artificial intelligence in education.* Prentice-Hall INC., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.

[40] Osta, I. "L'Outil informatique et L'enseignement de la geometrie dans l'espace". vol 2. *Proceedings of the Eleventh International Conference PME-XI.*, Montreal. July 19-25, 1987. pp. 31-38 .

[41] Paalz Scally, Susan. "The effects of learning Logo on ninth grade students' uderstanding of geometric relations". vol. 2. *Proceedings of the Eleventh International Conference PME-XI.*, Montreal. July 19-25, 1987. pp. 46-52.

[42] Pallascio, Richard y Allaire, Richard. "Les habiletés perceptives d'objets polyédriques". vol 2. *Proceedings of the Eleventh International Conference PME-XI.*, Montreal. July 19-25, 1987. pp. 39-45.

[43] Papert, Seymour. "Computadoras y aprendizaje". Publicado en: Galindo, Enrique (compilador). *La computadora y la enseñanza de la matemática. Lecturas para el curso de introducción a la computación.* Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas. México D.F., 1988.

[44] Papert, Seymour."Enseñar a los niños a ser matemáticos *vs* enseñar matemáticas a los niños". Publicado en: Coll, Cesar (compilador). *Psicología genética y aprendizajes escolares.* siglo XXI de España, 1983, p. 129-148.

[45] Papert, Seymour.*Desafío a la mente. Computadoras y educación.* Ediciones Galápago, Buenos Aires, 1981.

[46] Pedoe, D. *Circles a mathematical view.* Dover, New york. 1957.

[47] Popper, Karl R. *Conjeturas y refutaciones. El desarrollo del conocimiento cientifico.* Paidos. Barcelona. 1963.

[48] Quintero Zazueta, Ricardo y Ursini Legovich, Sonia. *Microcomputadoras en la clase de matemáticas. Una propuesta metodológica*. Tesis presentada para obtener el grado de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. en el Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN. México D.F. 1987.

[49] Scally,

[50] Tall, David.

[51] Unesco. *Nuevas tendencias en la enseñanza de la matemática*. vol. 3. UNESCO. 1976.

[52] Van Hiele-Geldof, Dina. "Didactics of geometry as learning process for adults". *English translation of selected writings of Dina van Hiele Geldof and Pierre M van Hiele*. Brooklyn College, Geddes,D., Fuys,D., Tischler, R. (Eds). 1984.

[53] Vasiliev, N. B. y Gutenmájer, V. L. *Rectas y curvas*. MIR, Moscú. 1980.

[54] Wentworth & Smith. *Geometría*. Ginn y Compañía, 1915.

INDICE

0. Introducción 4

1. Diseñando el futuro 11

2. La geometría en la era computacional 27

3. GAME: Geometría Animada como un Medio de Enseñanza 50

4. El laboratorio Geométrico 57

5. Bibliografía 63