

01169
2ej. 2

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

SOBRE CONTROL ADAPTABLE ROBUSTO

T E S I S D O C T O R A L

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONAMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

D O C T O R E N I N G E N I E R I A
(CONTROL)

por
T A N G Y U

J U R A D O

- Presidente : Dr. Romeo Ortega Martinez
Vocal : Dr. Rogelio Lozano Leal
Vocal : Dr. Ernesto López Mellado
Vocal : Dr. Francisco J. Garcia Ugalde
Secretario : Dr. Rafael Kelly Martinez
Suplente : Dr. Federico Kuhlmann Rodriguez
Suplente : Dr. Cristina Verde Rodarte

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

SOBRE CONTROL ADAPTABLE ROBUSTO

Yu Tang

Firma:

Dr. Romeo Ortega
Asesor

RESUMEN

En esta tesis presentamos una serie de algoritmos de estimación para el control adaptable robusto. El objetivo principal de la tesis es proporcionar condiciones que garantizan la estabilidad robusta de sistemas de control adaptable, i.e., el acotamiento de todas las señales en el sistema en la presencia de dinámicas despreciadas y ruidos acotados.

Resultados de esta tesis son varios. El primero es una serie de teoremas de estabilidad para el problema de sintonización adaptable. Mediante uso del formalismo entrada/salida, condiciones en términos de la velocidad de adaptación, margen de estabilidad del sistema en malla cerrada con un controlador estabilizante constante y algunas otras cantidades para garantizar la estabilidad robusta. Por medios de métodos de promediación y imponiendo condiciones en ciertas señales en la malla de adaptación, se obtiene un límite de estabilidad/inestabilidad para el problema de sintonización adaptable. Gracias a la introducción de un factor de olvido variante en el tiempo en un algoritmo de estimación, se evita la linealización alrededor de un sistema sintonizado, y como consecuencia, el resultado es global. Como el siguiente resultado, en el problema de estabilización adaptable, se demuestra que si existe una parametrización del controlador que pone los polos en malla cerrada suficientemente a la izquierda

del eje imaginaria en el plano complejo y la adaptación es lenta, entonces el controlador adaptable asegura el acotamiento de todas las señales en el sistema. En ambos problemas, sintonización adaptable y estabilización adaptable, el caso de plantas variantes en el tiempo también es considerado. Los resultados mencionados arriba se establecen sin asumir el orden o el orden relativo de la planta, tampoco se basan en el modelo de perturbación ni la cota de ruidos acotados ni la cota de la ganancia sintonizada. En tercer lugar, se presentan dos nuevos algoritmos de estimación en que las mediciones pasadas son incorporadas. Mediante el análisis de ecuaciones diferenciales, se establece la estabilidad robusta en términos de una condición de excitación persistente que depende de un parámetro de diseño en ciertas señales normalizadas en la malla de adaptación. También se discute el problema de convergencia en tiempo finito en la estimación de parámetros. Finalmente, se considera el problema de control adaptable de precompensación. Condiciones en término del diagrama de Nyquist de la función de transferencia de malla y la velocidad de adaptación son dadas para asegurar la estabilidad robusta del sistema adaptable.

ON ROBUST ADAPTIVE CONTROL

Yu Tang

Signature: 

Dr. Romeo Ortega
Advisor

ABSTRACT

In this thesis we present a number of new adaptive laws for robust adaptive control systems. The main objective of the thesis is to give conditions to insure the robust stability of the adaptive control system, i. e., the boundedness of all signals in the overall system in the presence of unmodeled dynamics and bounded output disturbances.

The results of this thesis are many. The first is a set of stability theorems for the adaptive tuning problem. We make use of the input/output formalism to give conditions in terms of adaptation speed, stability margin of the closed-loop transfer function with a fixed stabilizing controller and some other quantities to insure the robust stability of the overall system. By using the method of averaging and imposing conditions on certain signals in the adaptive loop, a stability/instability boundary is also given for this problem, where by means of a time-varying forgetting factor in the adaptive law, the linearization around a tuning system is avoided. So, the results are global. Next, the problem of adaptively stabilizing a plant with reduced information is studied. It is shown that if there exists a fixed parametrization of the controller that places the closed-loop poles sufficiently far to the left on the complex plane and the adaptation speed is slow, then the adaptive

controller will insure the boundedness of all signals in the overall system. In both adaptive tuning and adaptive stabilizing problems, the case of time-varying plant is analyzed as well. In all above results, no assumptions regarding the plant order or relative degree are imposed, neither the arguments of plant perturbation model nor information about bound on the output disturbances, bound on the tuning gain are used. In the third place, two new adaptive laws in which the past measurements are incorporated are presented. By taking the functional differential equation approach, robust stability is established in terms of a parameter-dependent persistent excitation condition on certain normalized signals in the adaptive loop. The problem of finite convergence time in the parameter estimation is also discussed. Finally, the feedforward adaptive control problem is considered. Conditions in terms of the Nyquist diagram of the feedback control system and the adaptation speed are given to insure the robust stability of the overall system.

INDICE

Resumen	i
Abstract	iii
Agradecimiento	v
Indice	iv
Lista de Símbolos	viii
Capítulo I. Introducción	1
1.1 Control Adaptable	1
1.2 Control Adaptable Robusto	4
1.2.1 Panorama General	4
1.2.2 Método de Análisis	5
1.3 Sobre el Trabajo	6
1.3.1 Contribuciones	6
1.3.2 Organización	7
1.3.3 Notaciones	7
Capítulo II. Sintonización Adaptable Robusta	9
2.1 Introducción	9
2.2 Formulación del Problema	11
2.2.1 Ecuación de Error	11
2.2.2 Señal de Normalización	13
2.3 Ley de Adaptación — σ -modificación	14
2.3.1 Ley de Adaptación	14
2.3.2 Modelo de Error	15
2.3.3 Análisis de Estabilidad	16
2.4 Ley de Adaptación — ρ -modificación	19
2.4.1 Ley de Adaptación	19
2.4.2 Modelo de Error	22
2.4.3 Análisis de Estabilidad	22
2.5 Sintonización Adaptable: Modelo de Referencia y PI	35
2.5.1 Planta	35
2.5.2 Controladores	35
2.6 Sintonización de Plantas LVT	41
2.6.1 Planta y Modelo	41
2.6.2 Ley de Adaptación	43
2.6.3 Modelo de Error	43
2.6.4 Análisis de Estabilidad	44
Capítulo III. Estabilización Adaptable Robusta	46

2.6.4 Análisis de Estabilidad	44
Capítulo III. Estabilización Adaptable Robusta	46
3.1 Introducción	46
3.2 Estabilización Adaptable de Plantas LIT	47
3.2.1 Formulación del Problema	47
3.2.2 Análisis de Estabilidad	52
3.3 Estabilización Adaptable de Plantas LVT	58
3.3.1 Formulación del Problema	58
3.3.2 Análisis de Estabilidad	62
Capítulo IV. Leyes de Adaptación Usando Informaciones Pasadas	66
4.1 Introducción	66
4.2 Formulación del Problema	68
4.2.1 Suposiciones sobre Planta	68
4.2.2 Controlador de Modelo de Referencia	69
4.2.3 Ecuación de Error	70
4.3 Algoritmo de Gradiente Promedio	73
4.3.1 Algoritmo de Gradiente Promedio	73
4.3.2 Análisis de Convergencia y Robustez	75
4.4 Ley de Adaptación con Swicheo	80
4.4.1 Ley de Adaptación con Swicheo	80
4.4.2 Análisis de Convergencia y Estabilidad	82
Capítulo V. Conclusión	86
Apéndice A.	88
Referencias	90

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{R}^n : espacio de los números reales cuya dimensión es n

$\mathbb{R}^{m \times n}$: espacio de las matrices de orden $m \times n$

\mathbb{N}_0 (\mathbb{Z}_+): conjunto de los números reales (enteros) no negativos

\vdash : definición

$C(a, b)$: $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $a < b$

$\|\cdot\|$: norma en \mathbb{R}^n

$L_{\rho, \tau}^n := \{f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \int_0^T \|f(t)\| dt < \infty, \forall T > 0, 1 \leq \rho \leq \infty\}$

$L_{\infty, \tau}^n := \{f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \text{ess sup}_t \|f(t)\| < \infty, \forall T > 0\}$

$L_{\rho}^n := \{f \in L_{\rho, \tau}^n \mid T < \infty\}$, $1 \leq \rho < \infty$

$L_{\infty}^n := \{f \in L_{\infty, \tau}^n \mid T < \infty\}$

$\|\cdot\|_{\rho, T}$, $\|\cdot\|_{\infty, T}$: normas en $L_{\rho, T}^n$ y $L_{\infty, T}^n$, respectivamente, $1 \leq \rho < \infty$

$\mathcal{L}_{\rho}^n(B) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \beta \in \mathbb{R}, \|v\|_{\rho, T} \leq \beta \|v\|_{\rho, T} \forall v \in L_{\rho, T}^n\}$

$\mathbb{R}[p]$: anillo formado por los polinomios en p con coeficientes en \mathbb{R}

$\mathbb{R}(p)$: campo formado por las fracciones en p con coeficientes en \mathbb{R}

$\mathcal{C}_{\delta}^n := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ es acotada y regulada, } \forall t_1, t_2 \text{ donde } |f| \text{ es discontinua, } |t_1 - t_2| \geq \delta\}$

$\mu(A)$: medida de la matriz cuadrada A

$\lambda(A)$: el conjunto de los valores característicos de la matriz A

$\lambda_1(A)$: l -ésimo elemento de $\lambda(A)$

$\lambda_{\min}(A)$: $\min(\lambda(A))$

$\lambda_{\max}(A)$: $\max(\lambda(A))$

□□□: fin de enunciado de un teorema o lema

□□□□: fin de demostración de un teorema o lema

CAPITULO I. INTRODUCCION

1.1 Control Adaptable

Un problema que se encuentra en el diseño de un sistema de control es la incertidumbre sobre la planta. La incertidumbre puede ser, por ejemplo, desconocimiento sobre el orden de la planta o conocimientos imprecisos sobre los parámetros de la misma. Existen básicamente dos métodos para resolver este problema: el primer método, *control robusto*, consiste en diseñar un controlador fijo (controlador con parámetros constantes) de tal manera que el desempeño promedio para un rango específico de variaciones de parámetros en el sistema sea aceptable; El segundo método consiste en ajustar los parámetros del controlador en línea mediante un mecanismo de adaptación (*ley de adaptación*) que usa las mediciones obtenidas en la salida y entrada de la planta. A este último método se le llama *control adaptable*. El control adaptable fue introducido como una herramienta eficiente para tratar el problema de control en donde se involucran incertidumbres a gran escala sobre la planta o variaciones de los parámetros del sistema. En principio, el control adaptable puede tener mejor desempeño que el control robusto por el ajuste constante de los parámetros del controlador.

Dos esquemas más populares en el control adaptable se han estudiado intensamente en la literatura: el regulador

auto-sintonizable [Aström, Wittenmark 1973] y el controlador adaptable de modelo de referencia (MRAC) [Narendra, Valavani 1978].

En el regulador auto-sintonizable, se diseña el controlador en base de un modelo de la planta. Un identificador es colocado en paralelo con la planta para estimar los parámetros del modelo en línea. Se usan los parámetros estimados en la sintetización de la señal de control de acuerdo con el principio de certeza. Este esquema se llama también *control adaptable indirecto* por el proceso explícito de identificación de la planta.

En el MRAC, por otra parte, el comportamiento dinámico deseado está especificado por un modelo. Los parámetros del controlador están reparametrizados en términos de los parámetros de la planta y son ajustados directamente por el mecanismo de adaptación, por lo que este esquema se denomina también *control adaptable directo*.

El control adaptable se puede subdividir en dos problemas: sintonización adaptable y estabilización adaptable. En el primero, se concentra en el desempeño del sistema adaptable, se diseña el controlador adaptable suponiendo el conocimiento de un controlador que estabiliza la planta. En el segundo, se pone más atención a la estabilización de la planta con informaciones reducidas sobre la misma.

En ambos problemas, la introducción del mecanismo de adaptación al sistema agrega una malla de retroalimentación no-lineal y variante en el tiempo, lo cual complica su análisis y diseño. Para que el control adaptable sea aplicable en la práctica, se tiene que resolver unos problemas importantes en el diseño de un sistema de control, e.g., la estabilidad del sistema.

En el caso de MRAC, el problema de estabilidad se ha resuelto al final de los 70's y al principio de los 80's bajo condiciones

ideales, i.e., que la planta se pueda describir por un modelo de orden conocido y que opere libre de perturbaciones, [Morgan, Narendra 1977], [Anderson 1977], [Kreisselmeier 1977], [Narendra, Valavani 1978], [Narendra, Lin, Valavani 1980], [Goodwin, Ramadge, Caines 1980], [Morse 1980]. Las suposiciones comunes hechas en el establecimiento de estabilidad del sistema de control adaptable son:

- (SI1) El signo de la ganancia de la planta es conocido;
- (SI2) El orden y el orden relativo de la planta son conocidos;
- (SI3) La planta es de fase mínima.

Bajo estas condiciones se han demostrado:

- (RI1) Todas las señales en el sistema son acotadas;
- (RI2) El error entre la salida de la planta y la salida del modelo (*error de seguimiento*) tiende asintóticamente a cero;
- (RI3) Si el regresor es persistentemente excitante, los parámetros del controlador convergen a un punto en el espacio de parámetros (*ganancia sintonizada*) con el cual se logra el seguimiento perfecto (i.e., para todas las referencias acotadas el error de seguimiento es idénticamente igual a cero).

En una situación real, las suposiciones mencionadas arriba son fácilmente violadas. El orden de una planta puede ser infinito y nunca se conoce en forma exacta, el ambiente de operación siempre está perturbado por ruidos. Mediante evidencias de simulación, [Rohrs *et al* 1981] demostraron que las leyes de adaptación que se usan en las referencias mencionadas anteriormente son extremadamente sensibles a dinámicas no-modeladas y ruidos acotados. Los sistemas de control adaptable pueden volverse inestable debido a la presencia de dinámicas no-modeladas y/o ruidos acotados. De allí, surgió el interés de

estudiar la robustez de los sistemas de control adaptable.

1.2 Control Adaptable Robusto

1.2.1 Panorama General

Desde el trabajo [Rohrs *et al* 1981] una serie de trabajos han tratado de explicar el fenómeno de inestabilidad en los sistema de control adaptable, [Ioannou, Kokotovic 1983], [Aström 1983], [Ioannou Kokotovic 1984], [Riedle, Kokotovic 1984], [Ortega, Tang 1986]. Los trabajos coincidieron en un punto: para garantizar la estabilidad del sistema en la presencia de dinámicas no-modeladas y/o ruidos acotados los esquemas de control adaptable tienen que ser rubustizados. El control *adaptable robusto* se refiere a los sistemas de control adaptable que garantizan la estabilidad de sistema en la presencia de dinámicas no-modeladas y ruidos acotados. La estabilidad que se habla aquí es la *estabilidad- L_∞* y la *estabilidad exponencial*. Si todas las señales de un sistema son acotadas para entradas externas y condiciones iniciales acotadas, entonces se dice que el sistema es *L_∞ -estable*. Si la respuesta al impulso de la función de transferencia (o la matriz de transición de las ecuaciones de estado) del sistema está acotada por una exponencial, entonces se dice que el sistema es *exponencialmente estable*. A la estabilidad que se mantiene en la presencia de dinámicas no-modeladas y ruidos acotados, se le llama *estabilidad robusta*.

Dos líneas se han seguido en el estudio de control adaptable robusto. En la primera, la ley de adaptación es modificada de tal manera que garantice la estabilidad robusta. Entre las modificaciones más populares se encuentran: "zona muerta",

[Peterson, Narendra 1982], [Sastry, 1984], [Kreisselmeier, Narendra 1982], [Kreisselmeier, Anderson 1986], el en cual la adaptación toma lugar sólo cuando el error de seguimiento excede de cierto límite; "σ(t)-modificación", [Ioannou, Kokotovic 1983], [Ioannou, Tsakalis 1986], [Narendra, Annaswamy 1987a], [Tang, Ortega 1987a], en que se agrega un término $-\sigma(t)\theta(t)$ en la ley de adaptación para evitar el fenómeno de deriva de los parámetros; "Proyección", [Kreisselmeier, Anderson 1986], en que se proyecta el vector de los parámetros a un conjunto que tiene ciertas características cuando éste excede a cierto límite. En la segunda línea, se establece la estabilidad robusta en base de la propiedad de excitación de ciertas señales en la malla de adaptación, [Anderson, Johnstone 1981], [Narendra, Annaswamy 1986a]. La idea aquí es establecer la estabilidad exponencial del sistema no-perturbado, y la estabilidad del sistema perturbado es garantizada si la magnitud de la perturbación es "pequeña".

1.2.2 Métodos de Análisis

En la búsqueda de soluciones para el problema de control adaptable robusto se han utilizado una gran variedad de herramientas matemáticas [Narendra, Annaswamy 1986b], [Ortega, Tang 1987].

El método entrada/salida (E/S), que fue desarrollado hace poco [Zames 1966], [Desoer, Vidyasagar 1975], es un método eficiente para tratar el problema de robustez en sistemas de control adaptable, [Ortega, Praly, Landau 1985], [Kosut, Friedlander 1985]. En el método de E/S no se requiere un modelo de las dinámicas no-modeladas en el análisis de estabilidad, lo cual nos permite relajar condiciones sobre el orden de la planta. El método Lyapunov (e.g., [Vidyasagar 1978]) se ha usado ampliamente en el establecimiento de una serie de resultados importantes de estabilidad y convergencia de parámetros. En este método la propiedad de excitación del regresor es esencial

para establecer la estabilidad exponencial del sistema no-perturbado [Morgan, Narendra 1977], [Kresselmeier 1977], [Narendra, Annaswamy 1987b]. Si los parámetros varían lentamente comparando con la evolución de los estados de la planta, el método de promediación (e.g., [Hale 1980]) puede usarse para aproximar el sistema variante en el tiempo por un sistema invariante en el tiempo. Consecuentemente, la estabilidad del sistema no-autónomo puede establecerse mediante el análisis de un sistema autónomo [Riedle, Kokotovic 1984], [Kosut, Anderson, Mareels 1987], [Mason et al 1987].

1.3 Sobre el Trabajo

1.3.1 Contribuciones

El presente trabajo tiene como objetivo de estudiar la estabilidad robusta de los sistemas de control adaptable. Los análisis en este trabajo se llevan a cabo por los métodos de E/S, Lyapunov, y promediación. Los problemas de sintonización adaptable y estabilización adaptable son tratados aquí. En ambos problemas plantas lineales invariantes en el tiempo (LIT) y plantas lineales variantes en el tiempo (LVT) son consideradas.

Las contribuciones principales de este trabajo son:

- (C1) Desarrollo de una serie de nuevas leyes de adaptación;
- (C2) Desarrollo de nuevos modelos de error para el análisis de estabilidad;
- (C3) Demostración de estabilidad robusta de los sistemas de control adaptable que usan las leyes de adaptación desarrolladas en este trabajo.

1.3.2 Organización

En Capítulo II, se trata el problema de sintonización adaptable robusta. Se presentan dos leyes de adaptación. Se establecen, mediante los métodos de E/S y promediación, condiciones que garantizan estabilidad robusta del sistema adaptable con las leyes de adaptación propuestas.

En Capítulo III, se estudia el problema de estabilización adaptable robusta. Mediante el método Lyapunov, se establecen condiciones para estabilizar adaptablemente a una clase de plantas con información reducida.

En Capítulo IV, se presenta una clase de leyes de adaptación en que las mediciones pasadas son incorporadas en la estimación de los parámetros del controlador. Mediante el método Lyapunov y E/S, se establecen condiciones que garantizan la convergencia de parámetros estimados y la estabilidad del sistema.

En Capítulo V, se estudia el problema de estabilidad de un sistema de control adaptable de precompensación. Se dan condiciones de estabilidad robusta en términos de los contenidos frecuenciales de la señal de referencia y la respuesta en frecuencia del sistema en malla cerrado con un controlador de malla. Los resultados de experimentos de control adaptable de precompensación son presentados al final del capítulo.

Se termina el trabajo con unos comentarios en Capítulo VI. Trabajos futuros respecto a los problemas estudiados aquí son indicados.

1.3.3 Notaciones

Las expresiones son numeradas secuencialmente dentro de una

misma sección. La referencia a una expresión es como sigue: (n) se refiere a la expresión numerada con n dentro de la misma sección, (m.n) se refiere a la expresión numerada con n en la sección m dentro del mismo capítulo, y (nc,m,n) se refiere a la expresión numerada con n en la sección m del capítulo nc. Lo mismo es cierto para la numeración y referencia de los comentarios, teoremas, lemas y gráficas.

Los símbolos frecuentemente usados en este trabajo se encuentran en la lista de símbolos.

CAPITULO II. SINTONIZACION ADAPTABLE ROBUSTA

2.1 Introducción

En muchas aplicaciones se puede diseñar un controlador fijo que estabiliza la planta a pesar de la información *a priori* reducida sobre la misma. Por lo que el problema de sintonizar los parámetros de controlador alrededor del conjunto de los parámetros estabilizantes es de interés práctico para mejorar el desempeño del sistema de control. La adición del mecanismo de adaptación al sistema introduce una retroalimentación no-lineal y variante en el tiempo, por lo que el problema de estabilidad es muy importante para que el sintonizador adaptable sea aplicable.

En este capítulo se estudia el problema de estabilidad en la sintonización. Se supone que se conoce un controlador fijo que estabiliza la planta, se diseña un sintonizador adaptable con el fin de mejorar el desempeño del sistema de control. El objetivo de este capítulo es establecer condiciones que garantizan la estabilidad robusta del sistema adaptable.

En Sección 2 se formula el problema de una manera general sin especificar la estructura del controlador. Se da directamente la ecuación de error. Se presenta una señal de normalización y se discuten sus propiedades.

En Sección 3 se presenta una ley de adaptación en la que se involucran una α -modificación y la señal de normalización. Mediante el formalismo E/S se establecen condiciones que garantizan la estabilidad robusta. Estas condiciones relacionan la velocidad de adaptación, el margen de estabilidad del sistema en malla cerrada con el controlador fijo y la ganancia del operador $H_S(p)$ en la ec. (3.11).

En Sección 4 se presenta una ley de adaptación con p -modificación. Mediante el análisis por el teorema de pequeñas ganancias, el método de promediación y el teorema de círculo se obtienen los siguientes resultados:

1. La estabilidad robusta es garantizada si la velocidad de adaptación es más lenta que el límite dado por el margen de estabilidad del sistema en malla cerrada con el controlador fijo multiplicado por una constante (Teorema 4.1);
2. Si la velocidad de adaptación es lenta, el sistema adaptable es *exponencialmente estable* si el regresor normalizada \bar{m} tiene energías dominantes en las frecuencias donde el sistema en malla cerrada con el controlador fijo tiene retraso de fase menor que π radianes. De lo contrario, el sistema adaptable es *exponencialmente inestable* (Teorema 4.2, 4.3);
3. Si el diagrama de Nyquist recorrido de la función de transferencia en malla cerrada con el controlador fijo está dentro del círculo unitario centrado en el origen del plano complejo, el sistema adaptable es L_∞ -estable si la velocidad de adaptación no excede de cierto límite que depende del margen de estabilidad de esta función de transferencia (Teorema 4.6).

En todos estos resultados la restricción sobre la ganancia

$H_3(p)$ en Sección 3 es eliminada.

En Sección 5 se consideran dos estructuras de controlador específicos: el MRAC y el PI adaptable. Las formas de los operadores en las ecuaciones de error y la señal de normalización son dadas para estos dos controladores.

En Sección 2.6 se estudia el problema de sintonizar una planta LVT. Mediante el formalismo de E/S se establecen condiciones de estabilidad robusta en términos de la velocidad de adaptación y el margen de estabilidad del sistema en malla cerrada con el controlador estabilizante que posiblemente variante en el tiempo.

2.2 Formulación del Problema

2.2.1. Ecuación de Error

Considérese el sistema de error mostrado en la siguiente figura:

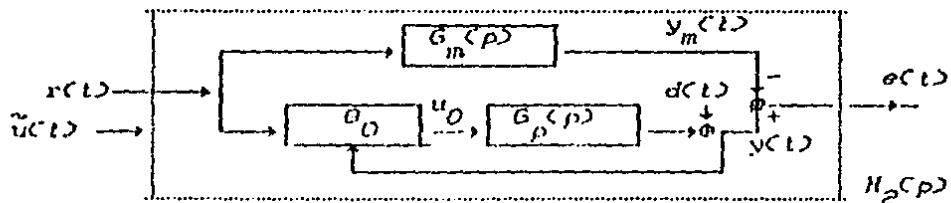


Fig. 1 Sistema de Error

donde θ_0 es el vector de parámetros del controlador fijo, u_0 es el control correspondiente. $G_p(p)$ es la función de transferencia de

la planta, $y(t)$ es la salida de la planta perturbada por ruidos acotados $d(t)$. Una señal de referencia $r(t)$ uniformemente acotada entra al modelo, cuya función de transferencia está dada por $G_m(p)$, para proporcionar la salida deseada $y_m(t)$.

De Fig. 1 se obtiene la siguiente ecuación de error:

$$e(t) := y(t) - y_m(t) = H_2(p) \tilde{u}(t) + e_0(t) \quad (1)$$

donde $H_2(p)$ es la función de transferencia en malla cerrada con el controlador fijo θ_0 , cuya forma depende de la estructura específica del controlador que se dará en Sección 5, $\tilde{u}(t)$ es la desviación del control definida como:

$$\tilde{u}(t) := \tilde{\theta}^T(t) w(t) \quad (2)$$

$\tilde{\theta}(t)$ es la desviación de parámetros:

$$\tilde{\theta}(t) := \theta(t) - \theta_0 \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

donde n es el orden del controlador, $w(t) \in \mathbb{R}^n$ es el regresor y $e_0(t)$ es el error cuando se aplica sólo el control u_0 .

El objetivo de control adaptable es generar la señal $\tilde{u}(t)$ (o equivalentemente $\theta(t)w(t)$) con el fin de mejorar el desempeño del sistema de control. El problema de control adaptable es diseñar un mecanismo de adaptación para ajustar $\theta(t)$ que garantiza todas las señales en el sistema sean acotadas.

En este capítulo se necesita la siguiente suposición:

(S1) $H_2(p)$ es exponencialmente estable. i.e., $\exists K_2, \lambda_2 > 0$, tales que la respuesta al impulso de $H_2(p)$, $h_2(t)$ satisfaga

$$|h_2(t)| \leq K_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (4)$$

Comentario 1 La suposición (S1) requiere que el controlador θ_0 establezca la planta. El margen de estabilidad de $H_2(p)$ está dada por λ_2/K_2 .

Comentario 2 En muchos casos prácticos, la planta es en si misma estable. En tales situaciones, $\theta_0=0$ satisface la suposición (S1). La suposición (S1) no implica necesariamente que θ_0 tenga un buen desempeño. Considérese el siguiente ejemplo:

$$y(t) = \frac{1}{p-1} u(t)$$

$$y_m(t) = \frac{1}{p+1} r(t) \quad , \quad r(t) = r_0 = \text{cte.}$$

$$u_0(t) = \theta_1^0 r(t) + \theta_2^0 y(t)$$

entonces para todo $\theta_0 \in \Theta := \{ \theta \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_2 < -1 \}$ el sistema en malla cerrada es estable. Si se selecciona $\theta_0 = [10, -3]$, el error $e_0(t)$ puede llegar a $5r_0$.

2.2.2. Señal de Normalización

Considérese la señal de normalización dada por

$$p(t) = -\sigma_0 p(t) + g(t) \quad (5)$$

donde $\sigma_0 > 0$ es un parámetro de diseño, $g(t) \in \mathbb{R}$ es una función que depende posiblemente de la entrada, la salida de la planta y la referencia de acuerdo con la estructura de controlador que se escoga. El parámetro σ_0 y la función $g(t)$ tienen que escogerse de tal manera que se cumplan las siguiente propiedades, $\forall t \in \mathbb{R}_+$:

$$(P1) \quad p(t) \geq \epsilon_p > 0$$

$$(P2) \dot{\rho}(t) \geq -\alpha \rho(t)$$

$$(P3) \|w(t)\| / \rho(t) \leq K_w, \quad K_w > 0$$

Una señal de normalización que cumple las propiedades (P1)-(P3) se introdujo originalmente en [Praly 1983] para robustizar la ley de adaptación en la presencia de dinámicas no-modeladas. Otras señales de normalización se han propuesto en, por ejemplo, [Ioannou, Tsialis 1986], [Kreisselmeier, Anderson 1986], [Narendra, Annaswamy 1987a], [Tang, Ortega 1987a] y [Ortega, Tang, Praly 1987].

Comentario 3 Se puede obtener $K_w = 1$ en (P3) mediante filtraje adecuado de las señales involucradas en la función $g(t)$ [Tang, Ortega, 1987b], lo cual permite tener una interpretación más clara del resultado de estabilidad en término de la velocidad de adaptación y el margen de estabilidad del sistema en malla cerrada con el controlador fijo.

2.3 Ley de Adaptación — σ -modificación

2.3.1. Ley de Adaptación

Consideremos en esta sección la siguiente ley de adaptación:

$$\dot{\theta}(t) = -\sigma \theta(t) - \gamma \frac{w(t) \theta(t)}{\rho^2(t)} + \theta_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad (1)$$

donde $\sigma > 0$ es el factor de olvido y $\gamma > 0$ es un parámetro de diseño que determina la velocidad de adaptación, $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$ es el vector de parámetros del controlador fijo (Fig. 2.1).

Comentario 1 La ley de adaptación (1) se difiere a la de Ioannou

Kokotovic [1983] en dos aspectos: la introducción de la señal de normalización $\rho(t)$ y el término forzante θ_0 , en el que la información *a priori* es fácil de incorporarse. Nótese en la ley de adaptación (1) que si el θ_0 es "bueno" (en el sentido de que el error $e_0(t)$ es "pequeño"), $\theta(t)$ se mantendrá cerca del θ_0 . De lo contrario $\theta(t)$ se partirá de θ_0 con una velocidad determinada por γ .

2.3.2. Modelo de Error

La ley de adaptación (1) se puede expresar en forma de operador como sigue:

$$\dot{\theta}(t) = -H_f(p) \frac{u(t)\theta(t)}{\rho^2(t)} \quad (2a)$$

$$H_f(p) = \frac{\gamma}{\rho(t)} \quad (2b)$$

La ec. (2) junto con la ec. (2.1) construye el modelo de error (Fig. 1).

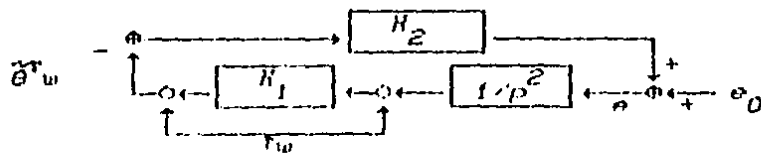


Fig. 1 Modelo de Error

Definiendo las señales normalizadas como

$$\bar{u}(t) = u(t)/\rho(t) \quad (3)$$

$$\bar{\theta}(t) = \theta(t)/\rho(t) \quad \bar{\theta}_0(t) = \theta_0(t)/\rho(t) \quad (4)$$

De las ecs. (2.1), (2)-(4) se obtiene el modelo de error normalizado:

$$\bar{e}(t) = H_2^p(\rho) \bar{w}^T(t) \bar{\theta}(t) + e_0(t) \quad (5)$$

$$H_2^p(\rho) := \rho^{-1}(t) H_2(\rho) \rho(t) \quad (5a)$$

$$\bar{\theta}(t) = -H_1(\rho) \bar{w}(t) \bar{e}(t) \quad (6)$$

El cual se representa esquemáticamente en Fig. 2.

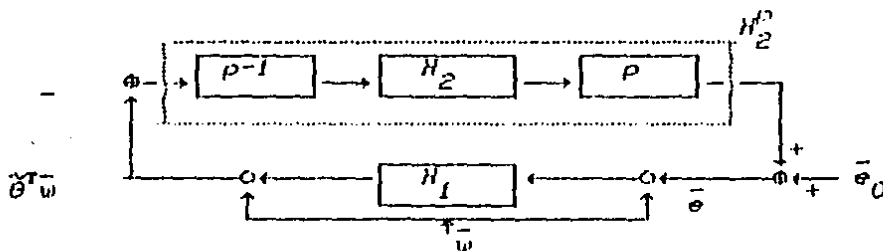


Fig. 2 Modelo de Error Normalizado

Nótese en Fig. 2 que el operador $H_2(\rho)$ es pre- y pos-multiplicado por $\rho^{-1}(t)$ y $\rho(t)$, respectivamente. Entonces si $\rho(t)$ es acotado, el sistema en Fig 1 es estable si y sólo si el sistema en Fig. 2 es estable [Desoer, Vidyasagar 1975].

2.3.3. Análisis de Estabilidad

Aplicando el teorema de pequeñas ganancias [Desoer, Vidyasagar 1975] se obtiene el siguiente resultado de estabilidad:

Teorema 1 Considérese el sistema adaptable (2.1) y (1). Supóngase

que la suposición (S1) (ec. (2.4)) se cumple. Entonces, $\exists \varepsilon_0 \geq 0$, tal que $\forall \gamma/\omega \in (0, \varepsilon_0)$, el sistema adaptable es L_ω -estable, i.e., $\theta_0 \in L_\omega \rightarrow \theta \in L_\omega$, $w, \theta \in L_\omega^H$.

□□□

La demostración de este teorema necesita los siguientes lemas técnicos.

Lema 1 Sea $H: L_P \rightarrow L_P$ operador lineal y causal cuya respuesta al impulso $h(t, \tau)$ satisface

$$|h(t, \tau)| \leq K e^{-\lambda(t-\tau)}, \quad \forall t \geq \tau \geq 0,$$

para algunas constantes $K, \lambda > 0$. Entonces $\gamma_P(H) \leq K/\alpha$, $\forall \rho \in (1, \omega)$.

□□□

Prueba: (ver [Anderson et al 1986, pg33]).

■ ■ ■

Lema 2 Sea H_2^D definido en (5a). $\gamma_\omega(H_2^D) \leq \frac{K_2}{\lambda_2 - \sigma_0}$, donde σ_0, K_2 , y λ_2 están dadas en las ecs. (2.5) y (2.4).

□□□

Prueba: Sea $H_2: L_P \rightarrow L_P$ definido en (2.1) y satisface la suposición (S1), $y(t) = H_2(\rho)u(t)$,

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \int_0^t |h_2(t, \tau)| |u(\tau)| d\tau \\ &\leq K_2 \int_0^t e^{-\lambda_2(t-\tau)} |u(\tau)| d\tau \end{aligned} \quad (7)$$

Multiplicando $\rho^{-1}(t)$ en ambos lados de la ec. (7), y denotando (\bar{y}) la señal normalizada se obtiene:

$$|\bar{y}(t)| \leq K_2 \int_0^t e^{-(\lambda_2 - \sigma_0)(t-\tau)} [\rho^{-1}(t)\rho(\tau) e^{-\sigma_0(t-\tau)}] |u(\tau)| d\tau$$

$$\leq K_2 \int_0^t e^{-\lambda_2^{-\sigma} (t-\tau)} |\bar{u}(\tau)| d\tau \quad (8)$$

ya que $h_2(t)$ satisface (2.4) y $\rho^{-1}(t)\rho(\tau)e^{-\sigma(t-\tau)} \leq 1$ por la propiedad (P3) de $\rho(t)$. En vista de (8) y Lema 1 se prueba el lema.

■ ■ ■

Prueba de Teorema 1: Aplicando el teorema de pequeñas ganancias a las ecs. (5) y (6), de acuerdo con Lema 1 y 2 $\gamma_w(H_1) \leq \gamma/\sigma$, $\gamma_w(H_2) \leq K_2/(\lambda_2^{-\sigma})$.

$$\|\bar{e}\|_\infty \leq \frac{K_2}{\lambda_2^{-\sigma}} K_w \|\ddot{\theta}\|_\infty + \|\bar{\sigma}_0\|_\infty$$

$$\|\ddot{\theta}\|_\infty \leq \frac{\gamma}{\sigma} K_w \|\bar{e}\|_\infty$$

de aquí, el sistema normalizado es L_∞ -estable si

$$c_1 := \frac{\gamma}{\sigma} \frac{K_2}{\lambda_2^{-\sigma}} K_w^2 < 1 \quad (9)$$

Además,

$$\|\ddot{\theta}\|_\infty \leq \frac{\gamma}{\sigma \rho (1 - c_1)} \|\bar{\sigma}_0\|_\infty \quad (10)$$

La cota superior (10) se obtiene de propiedad (P1) de $\rho(t)$. Para demostrar la estabilidad del sistema en Fig. 2 hay que demostrar $\rho \in L_\infty$, o equivalentemente $w \in L_\infty^n$. Para ello, se expresa $w(t)$ como la salida de un operador $H_3: L_\infty \rightarrow L_\infty^n$ [Anderson et al 1986], cuyos polos son los polos del operador $H_2(p)$ y de los filtros estable de controlador (ver Sección 5).

$$w(t) = H_3(p) \ddot{\theta}^T w(t) + w_0(t) \quad (11)$$

donde $w_0(t)$ es obtenido cuando sólo se aplica el control u_0 . De

acuerdo con la suposición (S1), $w_0 \in L_\infty^n$. De las ecs. (2.10) y (2.11) $w \in L_\infty^n$ si

$$\gamma_\omega (H_3) \frac{\rho}{\rho - c_1} \|e_0\|_\infty < 1 \quad (12)$$

Entonces,

$$c_0 := \max(\gamma/\alpha) \quad (7) \text{ y } (12) \text{ se cumplen} \quad (13)$$

Y por lo tanto el sistema es L_∞ -estable.

■ ■ ■

Comentario 2 Las condiciones (7) y (12) relacionan la velocidad de adaptación γ , el margen de estabilidad del sistema en malla cerrada con el controlador fijo y la ganancia del operador H_3 . La prueba de Teorema 1 no se basa en los siguientes argumentos: el orden n o el orden relativo de H_2 , la propiedad de excitación de $w(t)$. Lo único que se necesita es el conocimiento de un controlador fijo que estabilice la planta y que la velocidad de adaptación sea lenta.

Comentario 3 La condición (12) pone una restricción sobre la ganancia del operador H_3 . En el caso de MRAC esto implica que los polos de la planta tienen que estar en $\mathbb{C}_{-\epsilon}$, para algún $\epsilon > 0$. Esta restricción se removerá en la ley de adaptación que presenta a continuación.

2.4 Ley de Estimación — ρ -modificación

2.4.1. Ley de Adaptación

En esta sección se considera una ley de adaptación en que el término α es tiempo-variante. Para diferenciar de otras modificaciones de esta naturaleza, lo llamamos como ρ -modificación.

Considérese la ley de adaptación

$$\dot{\theta}(t) = -\alpha(t)\theta(t) - \gamma \frac{u(t)\theta(t)}{\rho^2(t)} + \alpha(t)\theta_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad (1a)$$

$$\dot{\alpha}(t) = \alpha_1 - \alpha_0 + \frac{g(t)}{\rho(t)} \quad (1b)$$

donde α_0 , $g(t)$ y $\rho(t)$ están dados en la ec. (2.5), $\alpha_1 \geq 0$ es un parámetro de diseño. Los demás parámetros y variables están definidos de la misma manera que en la ley de adaptación (3.1).

Comentario 1 La motivación de la selección de $\alpha(t)$ en la ec. (1b) es como sigue: reescribiendo ésta como

$$\dot{\alpha}(t) = \alpha_1 + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \quad (2)$$

de lo cual el parámetro α_1 se puede ver como el factor de olvido constante, mientras el segundo término $\dot{\rho}(t)/\rho(t)$ como factor de olvido variante en el tiempo. Este último varía dependiendo de las señales involucradas en la función $g(t)$ (i.e., $u(t)$, $y(t)$, $r(t)$). En términos no muy rigurosos, cuando estas señales contienen componentes de alta frecuencia, las cuales pueden excitar a las dinámicas no-modeladas, la ley de adaptación (1) modifica su comportamiento dinámico cambiando el término $-\alpha(t)\theta(t)$ para combatir contra el efecto causado por las dinámicas no-modeladas.

Comentario 2 La ley de adaptación (1) está relacionada con la α -modificación [Ioannou, Tsakalis 1986] y σ_1 -modificación [Marendra, Annaswamy 1987a] en que el factor de olvido es tiempo-variante. Pero la implementación de $\alpha(t)$ en la ley (1b) no se necesita la cota superior de la norma de la ganancia

sintonizada, en el análisis de estabilidad tampoco se necesita una separación del modelo de la planta (un modelo nominal más dinámicas no-modeladas con una ganancia pequeña), por lo que no se necesitan los conocimientos sobre el orden o el orden relativo del operador $H_2(p)$ (ec. 2.1)).

2.4.2. Modelo de Error

Defínase

$$z(t) = p(t)C\theta(t) - \theta_0 = p(t)\tilde{\theta}(t) \quad (3)$$

De las ecs. (1a), (2) y (3) es fácil verificar que $z(t)$ cumple la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{z}(t) = -\sigma_f z(t) - \gamma \bar{u}(t) e(t) \quad , \quad z(0) = 0 \quad (4)$$

donde $\bar{u}(t)$ es la señal normalizada definida en (3.3). Expresando en forma de operador, esta última ec. se puede escribir como:

$$z(t) = H_f(p) \bar{u}(t) e(t) \quad (5)$$

En términos de $z(t)$ y $\bar{u}(t)$, la ec. de error (2.1) se puede escribir como:

$$e(t) = H_2(p) \bar{u}^T(t) z(t) + e_0(t) \quad (6)$$

Las ecs. (4) y (6) (forma de operador y ec. diferencial, para el análisis de estabilidad por el método promediación) y las ecs. (5) (6) (forma de operador, para el análisis de estabilidad por el método de E/S) construyen el modelo de error (Fig. 1).

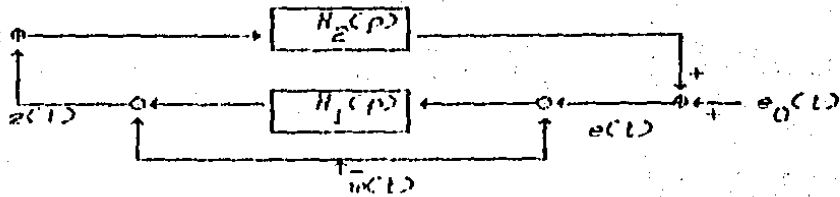


Fig. 1. Modelo de Error (ecs. (5) y (6))

Comentario 3 De Fig. 1 se observa que igual que en el modelo de error de Fig. 3.7, el operador $H_1(p)$ está pre- y pos-multiplicado por la señal normalizada, la cual es acotada (por la propiedad (P3) de $p(t)$). Esta es una clave en la demostración de estabilidad. Se observa también que en este modelo de error se ha eliminado el multiplicador p^{-1} y p (Fig. 3.2), lo cual permitirá relajar la restricción sobre la ganancia $\gamma_\omega(H_2)$ en la ec. (3.11).

2.4.3. Análisis de Estabilidad

A. L_ω -estabilidad — análisis por pequeñas ganancias

En virtud de Lema 3.1 aplicando directamente el teorema de pequeñas ganancias [Desoer, Vidyasagar 1975] a las ecs. (5) y (6), se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 1 Considérese el sistema adaptable (2.1) y (1) con $\sigma_1 > 0$. Supóngase que la suposición (S1) (2.4) cumple. Entonces, si

$$\lambda_2 < \frac{\sigma_1}{K_2} - \frac{\sigma_1}{K_\omega} \quad (7)$$

el sistema adaptable es L_ω -estable, i.e., $e_0 \in L_\omega + e \in L_\omega$, $u, \theta \in L_\omega^n$. Además,

$$\|e_0\|_{\infty} \leq c_2 \|e_0\|_{\infty}, \quad c_2 = \frac{1}{1 - \gamma K_w^2 / (\sigma_1 \lambda_2)} \quad (8)$$

$$\|0 - 0\|_{\infty} \leq \frac{\gamma}{\sigma_1} \frac{c_2}{\rho} \|e_0\|_{\infty} \quad (9)$$

□□□

Prueba: De las ecs. (5) y (4) se obtiene

$$\|a\|_{\infty} \leq \frac{\gamma}{\sigma_1} K_w \|e\|_{\infty} \quad (10)$$

$$\|e\|_{\infty} \leq \frac{K_w}{\lambda_2} \|z\|_{\infty} + \|e_0\|_{\infty} \quad (11)$$

donde $\|w\|_{\infty} \leq K_w$. Sustituyendo (10) en (11) se obtiene (8). De (10), (8) y la propiedad (P1) de la señal de normalización $\rho(t)$ se obtiene (9). Por otra parte, la ec. (3.11) se puede escribir como:

$$w(t) = H_3(\rho) z^T(t) \bar{w}(t) + w_0(t) \quad (12)$$

entonces,

$$w_0, \bar{w}, z \in L_{\infty}^n \rightarrow w \in L_{\infty}^n \rightarrow u, \rho \in L_{\infty}$$

□□□

Comentario 4 Igual que el resultado de Teorema 3.1, Teorema 1 no se basa en los conocimientos sobre el orden o el orden relativo de la planta, ni en las propiedades de excitación de la señal $w(t)$. Además, la condición (7) relaja la restricción sobre la ganancia $\gamma_w(H_3)$ y sólo se requiere que el término exponencial $\lambda_2 > 0$ en lugar de $\lambda_2 > \sigma_0$.

Comentario 5 La condición (7) tiene una interpretación muy clara (sin pérdida de generalidad tomamos $K_w = 1$): el sistema adaptable es

Definase la matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como

$$B := \sum_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega) \alpha^*(\omega) H_2(-j\omega) \quad (21)$$

Bajo estas condiciones, si $\lambda(B) \neq 0$, entonces $\exists \gamma_* > 0$, tal que el sistema es

i) exponencialmente estable si

$$\operatorname{Re} \lambda(B) > -\sigma_f / \gamma \quad (22)$$

ii) exponencialmente inestable si

$$\operatorname{Re} \lambda_{\min}(B) < -\sigma_f / \gamma \quad (23)$$

□□□

Comentario 6 Si la señal $\bar{w}(t)$ es *casi periódica*, \bar{w} tiene promedio uniforme [Kosut, Anderson, Mareels 1987]. En este caso el sistema adaptable es exponencialmente estable si la energía promedio en las frecuencias donde $\operatorname{Re} H_2(j\omega) > 0$ es dominante. De lo contrario el sistema es inestable.

Comentario 7 Similar límite de estabilidad/inestabilidad se obtiene por decomposición de estado [Riedle, Kokotovic 1984] y por decomposición de operador [Kosut, Anderson, Mareels 1987]. Pero, como consecuencia de la introducción del factor de olvido (1b), la ley de adaptación (1a) permite que en el modelo de error tenga la señal normalizada, lo cual evita la linealización alrededor de un sistema estable [Riedle, Kokotovic 1984], [Kosut, Anderson, Mareels 1987]. Por lo tanto los resultados de Teorema 2 y Teorema 3 se cumplen para todas entradas externas y condiciones iniciales dadas.

Comentario 8 De las condiciones (18), (17), (22) y (23) se

Definición 2 Sea $R: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, cuyos elementos son funciones acotadas y reguladas. Si existe

$$\bar{R} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(s) ds \quad (15)$$

uniforme en s , se dice que $R(t)$ tiene promedio uniforme y está dado por \bar{R} .

El siguiente teorema establece condiciones de estabilidad/inestabilidad para el caso en que el regresor normalizado \bar{w} pertenece a la clase de funciones $C_{\mathcal{S}}^n$, las que tienen el promedio muestreado.

Teorema 2 Considérese el sistema adaptable (2.1) y (1). Supóngase que se cumplen las suposiciones (S1) (2.4) y

(S2) $\bar{w} \in C_{\mathcal{S}}^n$ con la representación de Fourier por intervalo $\forall t \in \mathbb{Z}_+$:

$$\bar{w} \cong \sum_{k \in \Omega_k} \alpha_k C_k \omega e^{j\omega t}, \quad \forall t \in [kT, (k+1)T), \quad T \geq \delta \quad (16)$$

donde Ω_k es el conjunto de las distintas exponentes de Fourier y α_k son los coeficientes correspondientes.

Defínase $B(\omega) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como

$$B(\omega) := \sum_{k \in \Omega_k} \alpha_k C_k \omega \alpha_k^* C_k^* \omega H_2^* C^* (-j\omega), \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad (17)$$

donde $(.)^*$ denota la conjugación transpuesta. Bajo estas condiciones,

i) Si $\exists T \geq \delta$ tal que

$$\mu(-BCK_2) < \sigma_1 / (\gamma - 2K_w^2 K_2^2 / (CT\lambda_2^2)) \quad \forall h \in \mathbb{Z}_+ \quad (18)$$

entonces, $\exists \gamma_x > 0$ tal que $\forall \gamma \in (0, \gamma_x)$, el sistema adaptable es exponencialmente estable.

ii) Si $\exists T \geq \delta$, tal que

$$\mu(BCK_2) < -\sigma_1 / (\gamma - 2K_w^2 K_2^2 / (CT\lambda_2^2)) \quad \forall h \in \mathbb{Z}_+ \quad (19)$$

entonces, $\exists \gamma_x > 0$ tal que $\forall \gamma \in (0, \gamma_x)$, el sistema es exponencialmente inestable (en el sentido (20a)).

□□□

Una interpretación energética de la condición de estabilidad (18) y la condición de inestabilidad (19) es que si la energía promedio de la componente con período T del regresor normalizado $\bar{u}(t)$ es dominante y T es mucho mayor que la constante de tiempo del sistema en malla cerrada H_2 (λ_2) el sistema adaptable es exponencialmente estable, de lo contrario, es exponencialmente inestable. Si se restringe \bar{u} a la clase de funciones que tienen promedio uniforme, se puede obtener un límite de estabilidad/inestabilidad separado por un número.

Teorema 3 (Límite de estabilidad/inestabilidad) Considérese el sistema adaptable (2.1), (1). Supóngase que se cumplen las suposiciones (51) (2.4) y

(52') \bar{u} tiene promedio uniforme con la representación de Fourier generalizada

$$\bar{u}(t) \approx \sum_{\omega \in \Omega} a(\omega) e^{j\omega t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (20)$$

donde Ω es el conjunto de las distintas exponentes de Fourier y $a(\omega)$ son los coeficientes correspondientes.

Definase la matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como

$$B := \sum_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega) \alpha^*(\omega) H_2(-j\omega) \quad (21)$$

Bajo estas condiciones, si $\lambda(B) \neq 0$, entonces $\exists \gamma_* > 0$, tal que el sistema es

i) exponencialmente estable si

$$\operatorname{Re} \lambda(B) > -\sigma_1 / \gamma \quad (22)$$

ii) exponencialmente inestable si

$$\operatorname{Re} \lambda_{\min}(B) < -\sigma_1 / \gamma \quad (23)$$

□□□

Comentario 6 Si la señal $\bar{w}(t)$ es casi periódica, \bar{w} tiene promedio uniforme [Kosut, Anderson, Mareels 1987]. En este caso el sistema adaptable es exponencialmente estable si la energía promedia en las frecuencias donde $\operatorname{Re} H_2(j\omega) > 0$ es dominante. De lo contrario el sistema es inestable.

Comentario 7 Similar límite de estabilidad/inestabilidad se obtiene por decomposición de estado [Riedle, Kokotovic 1984] y por decomposición de operador [Kosut, Anderson, Mareels 1987]. Pero, como consecuencia de la introducción del factor de olvido (1b), la ley de adaptación (1a) permite que en el modelo de error tenga la señal normalizada, lo cual evita la linealización alrededor de un sistema estable [Riedle, Kokotovic 1984], [Kosut, Anderson, Mareels 1987]. Por lo tanto los resultados de Teorema 2 y Teorema 3 se cumplen para todas las entradas externas y condiciones iniciales dadas.

Comentario 8 De las condiciones (16), (17), (22) y (23) se

observa que el límite de estabilidad/inestabilidad depende de σ_f/γ . Lo cual permite lograr una mayor robustez mediante una selección adecuada de estos parámetros (ver Comentario 5).

Comentario 9 Un obstáculo en la utilización de los resultados de Teorema 2 y 3 es que las condiciones de estabilidad/inestabilidad (18), (19), (22) y (23) están expresadas en las componentes de frecuencias del regresor normalizado $\bar{w}(t)$. Lo cual no se ha podido relacionar con las propiedades de excitación de la señal de referencia en la presencia de dinámicas no-modeladas.

La demostración de Teorema 2 y 3 es análoga a la de [Kosut, Anderson, Marcellis 1987], por lo que a continuación sólo se dan los pasos principales de la demostración. Los siguientes resultados pueden encontrarse en dicha referencia.

Teorema 4 Considérese la ecuación diferencial

$$\dot{z}(t) = -\gamma(\sigma_2 I_n + R(t))z(t), \quad z(0), \quad (24)$$

con $\sigma_2 \geq 0$. Supóngase que $R(t)$ es acotada y regulada con promedio muestreado $\bar{R}_T(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}_+$. Entonces,

1) Si $\exists T, \alpha > 0$, tales que

$$\mu(\bar{R}_T(t)) \leq -\alpha, \quad \forall t \in \mathcal{T}_+, \quad (25)$$

entonces $\exists \gamma_\alpha > 0$, tal que $\forall \gamma \in (0, \gamma_\alpha)$,

$$\| \Gamma(t, \tau) \| \leq K_2 e^{-\lambda_2 (t-\tau)} \quad \forall t \geq \tau \geq 0 \quad (26a)$$

donde $\Gamma(t, \tau)$ es la matriz de transición de (24), y K_2, λ_2 están dados por

$$K_2 = e^{\gamma \|R\|_{\infty} / \beta} \quad (26b)$$

$$\lambda_2 = \gamma / \beta \quad (26c)$$

para alguna constante $\beta > 0$.

ii) Si $\exists T, \alpha > 0$, tales que

$$\mu(\bar{R}_T(kT)) \leq -\alpha, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad (27)$$

entonces $\exists \gamma_1 > 0$, tal que

$$\|f(t, \tau)\| \geq K'_2 e^{-\lambda_2(t-\tau)}, \quad \forall t, \tau \geq 0 \quad (28a)$$

$$K'_2 = 1/K_2 \quad (28b)$$

□□□

Teorema 5 Supóngase que $R(t)$ en Teorema 4 tiene además promedio uniforme \bar{R} , si $\lambda(\bar{R}) > 0$, entonces,

i) Si $\exists \alpha > 0$, tal que

$$\operatorname{Re} \lambda(\bar{R}) \geq \alpha \quad (29)$$

entonces $\exists \gamma_N > 0$, tal que $\forall \gamma \in (0, \gamma_N) \rightarrow (26)$.

ii) Si $\exists \alpha > 0$, tal que

$$\operatorname{Re} \lambda_{\min}(\bar{R}) \leq -\alpha \quad (30)$$

entonces $\exists \gamma_N > 0$, tal que $\forall \gamma \in (0, \gamma_N) \rightarrow (28)$.

□□□

Lema 1 Las ecs. (4) y (6) se pueden expresar equivalentemente como

$$\dot{z}(t) = -\gamma \left[\sigma_2 I_n + R(t) \right] z(t) - \gamma w_0(t) - \gamma^2 w(t) \quad (31a)$$

donde $\sigma_2 = \sigma_1 / \gamma \geq 0$, $\bar{w}(t) = w(t) / p(t)$ es el regresor normalizado, y

$$R(t) := \bar{w}(t) H_2^T(p) \bar{w}^T(t) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (31b)$$

$$\dot{w}(t) = \bar{w}(t)G_w(\bar{w}(t)e_0(t) + \bar{w}(t)H_2(\rho)I_w^T(t)z(t)) - \sigma_2 z(t) \quad (31c)$$

donde G_w es un operador integral lineal con núcleo

$$K_w(t, \tau) = \int_0^\tau h_2(t-s)\bar{w}(s)ds, \quad \forall t \geq \tau \geq 0 \quad (31d)$$

□□□

Prueba: De las ecs. (4) y (6) se tiene

$$\dot{z}(t) = -\gamma I_n z(t) - \gamma \bar{w}(t)H_2(\rho)I_w^T(t)z(t) - \bar{w}(t)e_0(t) \quad (32)$$

Se expresa el término $\bar{w}(t)H_2(\rho)I_w^T(t)z(t)$ en la ec. (32) mediante integral por pasos como

$$\begin{aligned} & \bar{w}(t)H_2(\rho)I_w^T(t)z(t) \\ &= \bar{w}(t) \int_0^t h_2(t-\tau)\bar{w}^T(\tau)z(\tau)d\tau \\ &= \bar{w}(t) \left\{ \int_0^t h_2(t-\tau)\bar{w}^T(\tau)dz(\tau) - \int_0^t \sigma_w(t, \tau)\dot{z}(\tau)d\tau \right\} \\ &= R(t)z(t) + \gamma W(t) \end{aligned} \quad (33)$$

en este último paso se sustituyó la ec. (32). De las ecs. (32) y (33) se prueba el lema.

□□□

Comentario 10 Nótese que la ecuación diferencial (31) consiste en tres partes: la parte homogénea $\dot{z}(t) = -\gamma[\sigma_2 I_n + R(t)]z(t)$, una perturbación externa acotada $-\gamma\bar{w}(t)e_0(t)$ y una perturbación que depende del estado $z(t)$, $-\gamma^2 W(t)$. Si la velocidad de adaptación es lenta (γ pequeña), este último término tiene menos efecto en la estabilidad de la ec. (31). Es un resultado bien conocido que si la parte homogénea de la ec. (31) es exponencialmente estable, y si las perturbaciones son pequeñas, el sistema perturbado también

es estable (e.g., [Anderson et al 1986]).

Prueba de Teorema 2 y 3 (Lineamiento) Según Lema 1, la estabilidad de la ec. (32) (modelo de error (4) y (6)) se puede estudiar de la ecuación equivalente (31). De acuerdo con Comentario 10, el siguiente paso es establecer la estabilidad exponencial de la parte homogénea de la ec. (31).

La condición (18) (la condición (19)) de Teorema 2 implica que la medida de la matriz $\bar{R}(sI)$ cumple la condición de estabilidad (25) (de inestabilidad (27)) de Teorema 4, entonces la parte homogénea de la ec. (31) es exponencialmente estable, i.e., (26) (exponencialmente inestable, i.e., (27)).

Similarmente, la condición (22) (la condición (23)) de Teorema 3 implica que los valores característicos (el mínimo valor característico) de la matriz \bar{R} cumplen la condición de estabilidad (29) (de inestabilidad (30)), entonces la parte homogénea de la ec. (31) es exponencialmente estable, i.e., (26) (exponencialmente inestable, i.e., (27)).

Una vez se establece la estabilidad (inestabilidad) de la parte homogénea de la ec. (31), y si las perturbaciones son pequeñas (adaptación lenta), se tiene $ze^{L_{\infty}^n} (z(L)+\omega)$. Entonces la estabilidad del sistema sigue de $ze^{L_{\infty}^n}$, $\rho(L) \geq \rho + \bar{\theta}e^{L_{\infty}^n}$, $\tilde{u} = z^{-1}we^{L_{\infty}^n}$, $\rightarrow e = H_2 \tilde{u} + e_0 e^{L_{\infty}^n}$.

■ ■ ■

C. L_{∞} -estabilidad — análisis por el teorema de círculo

Definiendo

$$\gamma(s) := -[z^T C(s) e(s)]^T \tag{34a}$$

$$Y_1(s) = (0 \ I_{n \times n} \ e_0(s))^T \quad (34b)$$

se puede expresar el modelo de error (5), (6) en la siguiente forma:

$$Y(s) = -H(s)Y(s) + Y_1(s) \quad (35)$$

$$Y(s) = N(s)Y(s) \quad (36)$$

donde

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_1(s)I_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & -H_2(s) \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \bar{u}(s) \\ \bar{u}(s) & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Las ecs. (35) y (36) forman un sistema de retroalimentación con la ganancia de retroalimentación $N(s)$ acotada, lineal y sin memoria (i.e., operador multiplicativo), lo cual nos permite usar el teorema de círculo [Marris, Valencia 1983], [Desoer, Vidyasagar 1975, pp143]. Sin pérdida de generalidad y para facilitar la interpretación de resultado, se usa $K_w = I$ en la propiedad (P1) de $\rho(s)$ en el siguiente teorema.

Teorema 6 Considérese el sistema de control adaptable (2.1) y (1). Supóngase que se cumplen las suposiciones (S1) (2.4) y

- (S7) $\exists \epsilon > 0, \sigma < \lambda_2$, tal que el diagrama de Nyquist recorrido de $H_2(j\omega)$, $\omega \in H_2(j\omega - \epsilon)$ esté dentro del círculo unitario centrado en el origen en el plano complejo.

Bajo estas condiciones, si $\rho < 1, \epsilon$, entonces $e_0 \in L_\infty + e \in L_\infty, \theta, u \in L_\infty^n$.

□□□

La demostración de este teorema necesita el siguiente lema.

Lema 2 $NC(s) \in \text{sect}[-1, 1]$, $\forall t \geq 0$, donde $\text{sect}[-1, 1]$ denota el sector $[-1, 1]$.

□□□

Prueba: Es fácil verificar que los valores propios de $NC(t)$ son ceros excepto

$$\lambda_{\min}(NC(t)) = -\left(\bar{w}^T C(t) \bar{w}(t)\right)^{1/2} \geq -1 \quad (39)$$

$$\lambda_{\max}(NC(t)) = \left(\bar{w}^T C(t) \bar{w}(t)\right)^{1/2} \leq 1 \quad (40)$$

Por otro lado

$$\lambda_{\min}(NC(t)) x^T x \leq x^T NC(t) x \leq \lambda_{\max}(NC(t)) x^T x, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (41)$$

Con las ecs. (39)-(41) se prueba el lema.

□□□

Prueba de Teorema 4: De la ec. (35) se tiene

$$Y(t) = -\int_0^t h_w(t-\tau) V(\tau) d\tau + Y_1(t) \quad (42)$$

donde $h_w(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es la respuesta al impulso de $HC(p)$.

Sustituyendo la ec. (36) en (42), multiplicando e^{Ft} en ambos lados de esta ecuación y denotando $C_w(t) := e^{Ft} C(t)$, se obtiene

$$Y_w(t) = -\int_0^t h_w(t-\tau) e^{F(t-\tau)} NC(\tau) e^{-F\tau} Y_w(\tau) d\tau + Y_{1,w}(t) \quad (43)$$

De acuerdo con Lema 2, $NC(s) \in \text{sect}[-1, 1]$. Como el diagrama de Nyquist de $h_w(s)$ es $\omega HC(j\omega)$, la condición del teorema del

circulo se satisfacen por la hipótesis (S3). Por lo tanto, $y_{1,w} \in L_{2,T}^{n+1} \rightarrow y_w \in L_{2,T}^{n+1}$ y $\exists \epsilon > 0$ tal que

$$\|y_w\|_{2,T} \leq \epsilon \|y_{1,w}\|_{2,T} \quad (44)$$

pero

$$\|y_{1,w}\|_{2,T} \leq e^{\epsilon T} (\lambda_2 - \epsilon)^{1/2} \|y_{1,w}\|_{\infty} \quad (45)$$

De las ecs. (43)-(45) se obtiene para todo $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \int_0^t \|h(t-\tau)\| \|v(\tau)\| d\tau + \|y_1\|_{\infty} \\ &= e^{-\epsilon t} \int_0^t \|h_w(t-\tau)\| \|e^{\epsilon \tau} v(\tau)\| d\tau + \|y_1\|_{\infty} \\ &\leq e^{-\epsilon t} \|h_w\|_2 \|v_w\|_{2,t} + \|y_1\|_{\infty} \quad (\text{por la desigualdad Schwartz}) \\ &\leq e^{-\epsilon t} \frac{k_2}{\lambda_2 - \epsilon} \|y_w\|_{2,t} + \|y_1\|_{\infty} \quad (\text{por (S3) y Lema 2}) \\ &\leq \left(\frac{k_2 \epsilon}{(\lambda_2 - \epsilon)(2\epsilon)} + 1 \right) \|y_1\|_{\infty} \quad (\text{por (44) y (45)}) \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} e_0 \in L_{\infty} \rightarrow y_1 \in L_{\infty}^{n+1} \rightarrow y \in L_{\infty}^{n+1} \\ \rightarrow \theta \in L_{\infty}^n, z \in L_{\infty}^n \rightarrow u \in L_{\infty}^n \quad (\text{por ec. (12)}) \\ p(x) \geq \epsilon_{\rho} \rightarrow \theta \in L_{\infty}^n \end{aligned}$$

■ ■ ■

Comentario II Teorema 4 establece condiciones de estabilidad robusta en término de la información frecuencial (S3), la cual se puede verificar mediante experimento. Esto permite que este teorema puede usarse fácilmente en la práctica.

2.5 Sintonización Adaptable: Modelo de Referencia y PI

En esta sección se consideran dos estructuras de controlador: el controlador de Modelo de referencia (MR) el controlador Proporcional e Integral (PI).

2.5.1 Planta

Considérese la planta descrita por

$$y(z) = G_p(p)u(z) + d(z) \quad (1)$$

donde las señales están mostradas en Fig. 2.1, $G_p(p)$ es la función de transferencia de la planta, cuyo orden y parámetros son desconocidos.

2.5.2 Controladores

A. Controlador MR

En el controlador MR la señal de control u es generada de acuerdo con las siguientes ecs.:

$$u(z) = \theta^T(z)w(z) \quad (2a)$$

$$w(z) = [r(z) \ w_1^T(z) \ w_2^T(z) \ y(z)]^T \quad (2b)$$

$$\theta(z) = [\theta_1^T(z) \ \theta_2^T(z) \ \theta_3^T(z) \ \theta_4^T(z)]^T \quad (2c)$$

$$w_1(z) = F(p)u(z) \quad (2d)$$

$$w_2(z) = F(p)y(z) \quad (2e)$$

$$F(p) := (cpI_n - A_f)^{-1} b_f = \frac{1}{\Lambda(p)} [1 \ p \ \dots \ p^{n-2}]^T \quad (2f)$$

donde $\Lambda(p) \in \mathbb{R}[p]$ es Hurwitz de orden $n-1$, siendo $2n$ el orden del controlador. La selección de n tiene que cumplir la suposición (S1) (2.4), i.e., el sistema en malla cerrada es estable cuando $\theta(t) = \theta_0$ en la ec. (2a) con algún $\theta_0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Este controlador está mostrado en Fig. 1.

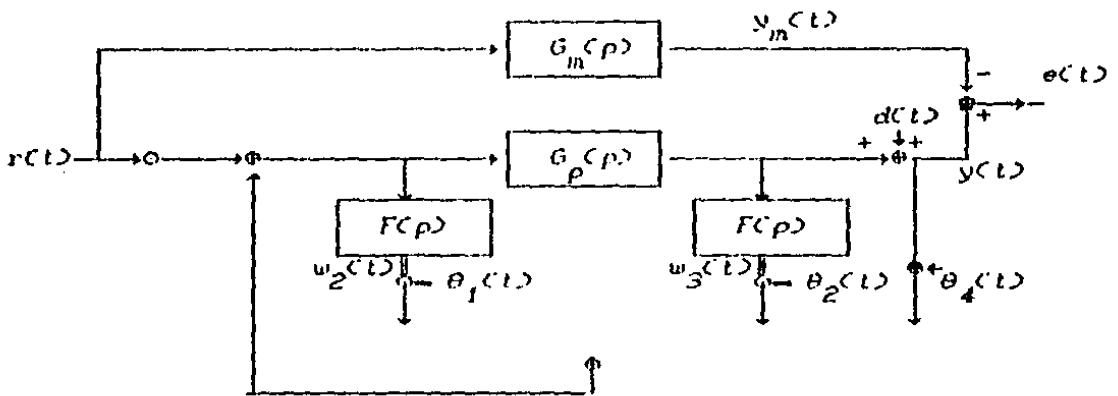


Fig. 1. Controlador MR

Es fácil verificar que en la ec. de error (2.1)

$$e(t) = H_2(p) \ddot{u}(t) + \theta_0(t) \quad (2.1)$$

el operador $H_2(p)$ y la señal de error $e_0(t)$ están dados por las siguientes ecs.:

$$H_2(p) = \frac{\Lambda(p)G_p(p)}{\Lambda(p) - \theta_2^0(p) - [\theta_4^0 \Lambda(p) + \theta_3^0(p)]G_p(p)} \quad (3a)$$

$$\theta_0(t) = [\theta_1^0 H_2(\rho) - G_m(\rho)] r(t) + d_1(t) \quad (3b)$$

donde

$$\theta_l^0(\rho) = [1 \quad \rho \quad \dots \quad \rho^{n-2}] \theta_l^0 \quad l=2,3 \quad (3c)$$

$$\theta_0 = [\theta_1^0 \quad (\theta_2^0)^T \quad (\theta_3^0)^T \quad \theta_4^0]^T \quad (4)$$

y $d_1(t)$ es el efecto de ruidos acotados. Y el operador $H_3(\rho)$ (3.11) está dado por

$$H_3(\rho) = \begin{bmatrix} 0 \\ F(\rho) \Lambda(\rho) / D_2(\rho) \\ F(\rho) H_2(\rho) \\ H_2(\rho) \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde $D_2 \in R[\rho]$ es el denominador de $H_2(\rho)$.

Se seleccionan $g(t)$ y σ_0 en la señal de normalización (2.5) como

$$g(t) = \delta C |y(t)| + |u(t)| + 1, \quad \delta > 0 \quad (6a)$$

$$0 < \sigma_0 \leq \min(\operatorname{Re} |\lambda(A)|, \lambda_2) \quad (6b)$$

donde λ_2 está dado en la ec. (2.4), y con la condición inicial

$$\rho(0) \geq \sigma_0 / \delta \quad (6c)$$

Lema 1 La señal de normalización $\rho(t)$ (2.5) junto con la selección (6) cumple las propiedades (P1)-(P3).

□□□

Prueba: 1) De las ecs. (2.5) y (6a) se tiene

$$\begin{aligned} \rho(t) &= e^{-\sigma_0 t} \rho(0) + \delta \int_0^t e^{-\sigma_0(t-\tau)} C |y(\tau)| + |u(\tau)| + 1 d\tau \\ &\geq e^{-\sigma_0 t} \rho(0) + (1 - e^{-\sigma_0 t}) \delta / \sigma_0 \end{aligned}$$

$$\geq \delta/\sigma_0$$

ii) Es obvio porque $g(t) > 0$.

iii) De las ecs. (2.1)-(2.3), se puede reescribir $y(t)$ como

$$y(t) = H_2(p)u(t) - H_2(p)[\theta_1^0 r(t) + \frac{\theta_2^0}{\Lambda(p)} u(t) + \frac{\theta_3^0}{\Lambda(p)} y(t) + y(t)] \quad (7)$$

En vista de Lema A1 en el apéndice A, las ecs. (2d), (2e) (7) y la selección (5) se prueba el lema.

■ ■ ■

Comentario 2.12 Mediante filtraje adecuado en el regresor w se puede obtener $K_w = I$ como se ve a continuación.

$$w(t) = [r_f(t) \quad w_1^T(t) \quad w_2^T(t) \quad y_f(t)] \quad (8a)$$

$$w(t) = A_w u(t) + b_w [r(t) \quad u(t) \quad y(t)]^T, \quad w(0) \quad (8b)$$

$$A_w = \text{diag} \{ -f \quad -f \quad A_f \quad A_f \} \quad (8c)$$

$$b_w = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & b_f & 0 \\ 0 & 0_f & b_f \end{bmatrix} \quad (8d)$$

donde $f > 0$ es un parámetro de diseño, y A_f, b_f están definidos en la ec. (2f). Se seleccionan en la señal de normalización (2.5)

$$\alpha_0 = \min(f, \text{Re} \lambda(A_f)) \quad (9a)$$

$$g(t) = \delta (|y(t)| + |u(t)| + |r(t)| + 1) \quad (9b)$$

$$\delta \geq \|b_w\| \quad (9c)$$

$$\rho(0) \geq \|w(0)\| \quad (9d)$$

Es fácil ver de que la ec. (8b) junto con la selección (9) cumple

$$\|w(t)\| \leq e^{-\sigma_0 t} \|w(0)\| + \|b_w\| \int_0^t e^{-\sigma_0(t-\tau)} c(|y(\tau)| + |u(\tau)| + |r(\tau)|) d\tau \quad (10)$$

Por otro lado, la ec. (2.5) junto con (9b) tiene solución dada por

$$p(t) = e^{-\sigma_0 t} p(0) + \delta \int_0^t e^{-\sigma_0(t-\tau)} c(|y(\tau)| + |u(\tau)| + |r(\tau)| + 1) d\tau \quad (11)$$

Comparando las expresiones (10) y (11), en vista de (9c) y (9d) se obtiene $\|w(t)\|/p(t) \leq 1$.

B. Controlador PI

En esta ocasión la señal de control es generada por las siguientes ecs.:

$$u(t) = \theta^T(t) w(t) \quad (12a)$$

$$\theta(t) = [\theta_1(t) \quad \theta_2(t)]^T \quad (12b)$$

$$w(t) = [\theta_f(t) \quad \theta_i(t)]^T \quad (12c)$$

$$\theta_f(t) = \frac{f}{p+f} e(t) \quad (12d)$$

$$\theta_i(t) = \frac{1}{p+\epsilon_i} \theta_f(t) \quad (12e)$$

donde $f, \epsilon_i > 0$ son parámetros de diseño. Este sistema de control está mostrado en Fig. 2.

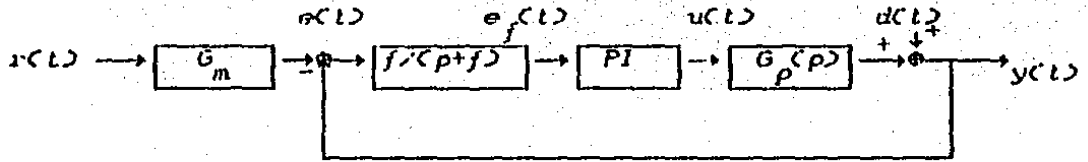


Fig. 2. Controlador PI

Comentario 2.13 Se observa en la ec. (12e) que la acción integral se pierde cuando $\varepsilon_l > 0$. Sin embargo, para ε_l pequeña el controlador (12) actúa aproximadamente como un PI, por lo que retenemos el nombre. Observa también de Fig. 2 que la entrada al controlador es la versión filtrada del error. esto se debe a la razón técnica para acotar $u(t)$ con la señal de normalización.

En este caso el operador $H_2(p)$ en la ec. de error (2.1) y $H_3(p)$ en la ec. (3.11) están dados por

$$H_2(p) = \frac{G_p(p)}{1 + G_p(p)C_0(p)f/(p+f)} \quad (13a)$$

$$C_0(p) = \theta_1^0 + \theta_2^0 \frac{1}{p + \varepsilon_l} \quad (13b)$$

$$\theta_0 = [\theta_1^0 \quad \theta_2^0]^T \quad (13c)$$

$$e_0(t) = \left[\frac{f}{p+f} H_2(p) C_0(p) - 1 \right] G_m(p) r(t) + d_1(t) \quad (13d)$$

$$H_3(p) = \left[\frac{f}{p+f} H_2(p) \quad \frac{f}{(p+\varepsilon_l)(p+f)} H_2(p) \right]^T \quad (14)$$

donde $d_1(t)$ es el efecto debido a ruidos acotados. La señal de normalización está dada por la ec. (2.4) y

$$g(t) = \delta(|e(t)| + |e_i(t)| + 1) \quad (15a)$$

$$0 < \alpha_0 \leq f \quad (15b)$$

$$\rho(0) \geq \delta/\alpha_0 \quad (15c)$$

Lema 2 La señal de normalización (2.4) junto con las selecciones (15) cumple las propiedades (P1)-(P3).

□□□

Prueba: Similar a Lema 1.

■ ■ ■

2.6 Sintonización de Plantas LVT

El controlador adaptable resulta especialmente atractivo cuando la planta a controlar es LVT. Las variaciones de los parámetros pueden ser, por el instante, debido a la linealización del modelo, cambios en las condiciones de trabajo (temperatura, carga, etc.) etc.. En esta sección, se estudia el problema de sintonización adaptable para plantas LVT. Similar al caso de plantas LIT, suponemos aquí que la planta es estabilizable con un controlador conocido.

2.6.1 Planta y Modelo

Considérese la planta LVT descrita por

$$y(t) = B(p, t)A(p, t)^{-1}u(t) + d(t) \quad (1)$$

donde $B(p, t)$ y $A(p, t)$ son operadores LVT definidos de la siguiente

forma:

$$A(\rho, t) = \sum_{l=0}^{n_p} a_l(t) \rho^l \quad (2a)$$

$$B(\rho, t) = \sum_{l=0}^{m_p} b_l(t) \rho^l \quad (2b)$$

donde n_p es el orden de la planta, $m_p < n_p$, el orden de $B(\rho, t)$. Los valores de n_p y m_p son desconocidos. $a_l, b_l \in L_\infty$ son los parámetros desconocidos de la planta. Sin pérdida de generalidad, a continuación se supone que $a_{n_p} = 1$.

El objetivo de control es seguir un modelo LIT dado por

$$y_m(t) = G_m(\rho) r(t) \quad , G_m \in \mathbb{R}(\rho) \quad (3)$$

es decir, que el error de seguimiento

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (4)$$

sea lo más cercano a cero posible.

Para ello, se usa el la siguiente ley de control (MR)

$$u(t) = \theta^T(t) w(t) + \theta_0^T(t) w(t) =: u_a(t) + u_0(t) \quad (5)$$

donde $\theta(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ es el vector de parámetros del controlador adaptable, y $w(t)$ es el regresor

$$w(t) = [r_f(t) \quad w_1^T(t) \quad w_2^T(t) \quad y_f(t)]^T \in \mathbb{R}^{2n} \quad (6)$$

cuyas componentes están definidas en (5.8a), y

$$\theta_0^0(t) = [\theta_1^0(t) \quad (\theta_2^0(t))^T \quad (\theta_3^0(t))^T \quad \theta_4^0(t)]^T \in \mathbb{R}^{2n} \quad (7)$$

es el controlador conocido, cuyas componentes son funciones

acotadas. $2n$ es el orden del controlador que se escoge de tal manera que con el control $u_0(t)$ se estabilice la planta.

2.6.2 Ley de Adaptación

Se ajusta el vector de parámetros $\theta(t)$ por la siguiente ley de adaptación:

$$\dot{\theta}(t) = -\sigma(t)\theta(t) - \gamma \frac{u(t)e(t)}{p^2(t)}, \quad \theta(0) \quad (8a)$$

$$\sigma(t) = \sigma_1 - \sigma_0 + g(t)/r(t) \quad (8b)$$

donde $g(t)$ está definida en (5.9b) y los demás parámetros y variables están definidas idénticamente que en la ley de adaptación (4.1).

Comentario 1 La única diferencia entre la ley de adaptación (8) y la de (4.1) es que en (8) se elimina el término forzante. Lo cual nos permite tratar el caso en que el controlador θ_0 puede tener componentes que cambian drásticamente (e.g. una función de swicheo).

2.6.3 Modelo de Error

De las ecs. (1)-(5) se obtiene

$$e(t) = H_2(p, t)\theta^T(t)u(t) + e_0(t) \quad (9a)$$

donde $H_2(p, t)$ es un operador LVT definido como

$$H_2(p, t) = \left\{ [1 - BC(p, t)AC(p, t)]^{-1} [(1 - \theta_2^0 C(p)C(p)AC(p) + f\theta_4^0 C(p) + f)^{-1}] \right. \\ \left. \cdot BC(p, t)AC(p, t)(1 - \theta_3^0 C(p)AC(p))^{-1} \right\} \quad (9b)$$

y $e_0(t)$ es el error correspondiente a $u(t) = u_0(t)$.

$$e_0(t) = \theta_1^0 H_2(p, t) - y_m(t) + d_f(t) \quad (9c)$$

con $d_f(t)$ el efecto de ruidos acotados.

Definase la variable

$$z(t) = p(t)\theta(t) \quad (10)$$

En términos de $z(t)$ y la señal normalizada $\bar{u}(t)$ (ec. (3.3)), la ley de adaptación (8) y la ec. de error (9) se pueden escribir como

$$z(t) = -H_f(p, t)\theta(t) + \theta(t)\theta^{-\sigma_f t} \quad (11a)$$

$$H_f(p, t) = \frac{\gamma}{\rho^2 \sigma_f} \bar{u}(t) \quad (11b)$$

$$e(t) = H_2(p, t)\bar{u}^T(t)z(t) + e_0(t) \quad (12)$$

Las ecs. (11) y (12) construyen el modelo de error.

7.6.4 Análisis de Estabilidad

A continuación se aplica el teorema de pequeñas ganancias a las ecs. (11) y (12) para establecer condiciones de estabilidad del sistema adaptable.

Teorema 1 Considérese el sistema adaptable (1)-(8). Supóngase que la siguiente suposición se cumple,

(ST1) El controlador θ_0 estabiliza la planta, i.e., la respuesta al impulso $h_2(t, \tau)$ de $H_2(p, t)$ satisface

$$|h_2(t, \tau)| \leq K_2 e^{-\lambda_2(t-\tau)}, \quad \forall t \geq \tau \geq 0, \quad K_2, \lambda_2 > 0 \quad (13)$$

entonces, si $\gamma < \lambda_2 / K_2 \sigma_1$, el sistema es L_∞ -estable.

□□□

Prueba: Es fácil ver que $\gamma_\infty(H_1(p, t)) \leq \gamma / \sigma_1$ y $\gamma_\infty(H_2(p, t)) \leq K_2 / \lambda_2$ (Lema 4.1). Los demás es similar a lo de Teorema 4.1.

■ ■ ■

Comentario 2 El resultado de Teorema 1, como los resultados en Sección 4, no se basa en el conocimiento del orden o el orden relativo de la planta. A diferencia de los otro métodos para tratar plantas LVT (e.g., [Tsakalis, Ioannou 1987]), Teorema 1 no se necesita una separación de escala de tiempo, por lo que no es necesario suponer que la variación de los parámetros de la planta sea lenta.

CAPÍTULO III. ESTABILIZACIÓN ADAPTABLE ROBUSTA

3.1 Introducción

La estabilización adaptable concierne al problema de estabilizar una planta desconocida mediante informaciones obtenidas en la salida y/o la entrada de la planta. El cual consiste en diseñar un mecanismo de adaptación que junto con un controlador genera una señal de entrada acotada que garantiza todas las señales en el sistema adaptable sean acotadas. En un trabajo reciente [Materson 1985], se demuestra que el orden de un controlador estabilizante es información *a priori* suficiente para estabilizar adaptablemente a una planta LIT, se propone también un controlador conceptual para llevarlo acabo.

En este capítulo, se considera el problema de estabilización robusta con información *a priori* reducida. La estructura de controlador que se considera aquí es el controlador de retroalimentación de salida. El objetivo de este capítulo es establecer condiciones que garantizan estabilidad robusta del sistema adaptable respecto a las dinámicas no-modeladas. Plantas tanto LIT como LYT son tratadas, [Ortega, Tang, Praly 1987], [Tang, Ortega 1987c].

En Sección 2 se trata el problema de estabilización de una planta LIT. Similar a la tesis de [Materson 1985], se caracteriza

aquí una clase de plantas que se puede estabilizar adaptablemente sólo con la información *a priori* del orden de un controlador de retroalimentación de salida que estabiliza la planta. Mediante el método Lyapunov, se demuestra que si este controlador puede poner los polos del sistema en malla cerrada suficientemente a la izquierda del eje imaginario en el plano complejo, y la velocidad de adaptación es lenta, entonces el controlador adaptable garantizará que todas las señales sean acotadas.

En Sección 3 se considera el problema de estabilización de una planta LVT. Via los argumentos de estabilidad total se demuestra que si i) existe un controlador, cuyos parámetros pueden variar lentamente en el tiempo, que estabiliza la planta y la ganancia de la función de transferencia en malla cerrada es pequeña, ii) la variación de los parámetros del sistema en malla cerrada con este controlador estabilizante es lenta, iii) la velocidad de adaptación es lenta, entonces el controlador adaptable garantiza la L_{∞} -estabilidad del sistema.

3.2 Estabilización Adaptable de Plantas LIT

3.2.1 Formulación del Problema

A. Planta

Considérese la planta LIT

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + b_p u(t), \quad x_p(0) \quad (1a)$$

$$y_p(t) = c_p^T x_p(t) \tag{1b}$$

donde $A_p \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$, $c_p, b_p \in \mathbb{R}^{n_p}$, (A_p, b_p, c_p) es una realización mínima de la planta. n_p es el orden de la planta. Tanto n_p como los componentes de A_p, b_p, c_p son desconocidos. $x(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$, $u(t), y(t) \in \mathbb{R}$ son los estados, la entrada y la salida de la planta, respectivamente.

D. Controlador

Considérense el controlador de retroalimentación de salida

$$u(t) = \theta^T(t) w(t) \tag{2a}$$

$$\dot{w}(t) = A_f w(t) + b_f u(t) \tag{2b}$$

donde $A_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz Hurwitz, $b_f \in \mathbb{R}^n$ con $\|b_f\| = 1$, y n es el orden del controlador seleccionado de tal manera que el sistema en malla cerrada con $u(t) = \theta^T w(t)$, para algún $\theta_f \in \mathbb{R}^n$, sea estable. $\theta(t), w(t) \in \mathbb{R}^n$ son el vector de parámetros de controlador y el vector de regresor, respectivamente. Este esquema de control está representado en la Fig. 1.

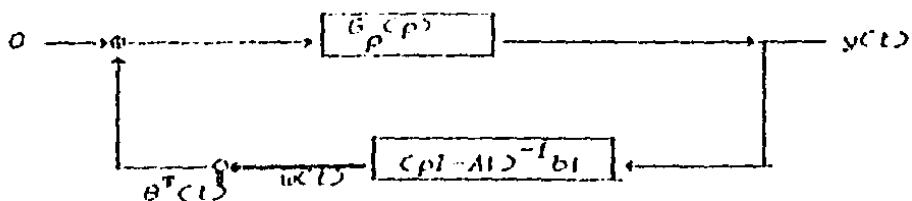


Fig. 1 Controlador de retroalimentación de salida

Comentario 1 La clase de plantas que se consideran aquí son aquellas que se pueden estabilizar con retroalimentación de salida. Mediante una formulación ligeramente diferente, el método que se usa aquí también puede tratar el caso con retroalimentación completa (i.e. retroalimentación con entrada y salida). Nótese que la información *a priori* en el planeamiento del problema es el orden de un controlador estabilizante.

C. Ley de Adaptación

Se ajusta el vector de parámetros del controlador por la ley de adaptación

$$\dot{\theta}(t) = -\alpha(t)\theta(t) - \gamma \frac{w(t)y(t)}{p^2(t)} + \alpha(t)\theta_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad (3)$$

$$\alpha(t) = \frac{\delta}{\varepsilon} \frac{1+y^2(t)}{p^2(t)} \quad (4)$$

$$\dot{p}^2(t) = -\sigma_0 p^2(t) + \delta(y^2(t) + 1), \quad p(0) \geq \sqrt{\varepsilon} \|w(0)\| \quad (5)$$

donde $\gamma, \delta, \sigma_0 > 0$ son parámetros de diseño, y $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$ es el término forzante. Se escogen σ_0 y δ de tal manera que se cumplan, para algún $\sigma_f > 0$, las siguientes restricciones.

$$\frac{1}{\varepsilon} (\sigma_0 + \sigma_f) \leq \min_i |\operatorname{Re} \lambda_i(A_f)| \quad (6a)$$

$$\delta \geq \varepsilon / \sigma_f \quad (6b)$$

Comentario 2 El término forzante θ_0 en la ec. (3), a diferencia

de lo de la ley de adaptación (2.4.1), sólo representa el mejor estimador *a priori* del controlador estabilizante θ_* , el cual no necesariamente estabiliza la planta.

Comentario 3 La señal de normalización $\rho(t)$ en la ec.(5) es similar a la de (2.2.5) con $\kappa(t) = \delta(|y(t)| + 1)$. La razón por la que se presenta en esta forma es para encontrar una función Lyapunov conveniente para el análisis (ec. (30)). Obsérvese de las ecs. (4) y (5) que ésta se puede escribir como

$$\alpha(t) = -\frac{\sigma_0}{2} + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \quad (7)$$

D. Modelo de Error

Defínase el vector

$$z(t) = \rho(t)(\theta(t) - \theta_0) \quad (8)$$

Es fácil verificar de las ecs. (3) y (8) que $z(t)$ cumple la ec. diferencial

$$\dot{z}(t) = -\frac{\sigma_0}{2} z(t) - \gamma \bar{w}(t) y(t), \quad z(0) = 0 \quad (9a)$$

$$\bar{w}(t) = u(t) / \rho(t) \quad (9b)$$

Sea $\check{\theta}(t)$ el vector de error de parámetros definido como

$$\check{\theta}(t) = -\theta(t) + \theta_* \quad (10)$$

donde $\theta_* \in \mathbb{R}^n$ es un vector de parámetros que cumple la suposición (SE1) en la ec. (17). De las ecs. (1)-(3) y (10) la planta y el controlador se pueden representar por

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{b}\bar{u}^T(t)w(t) \in \mathbb{R}^{n_p+n} \quad (11a)$$

$$y(t) = \bar{c}^T \bar{x}(t) \quad (11b)$$

con

$$\bar{x}(t) := [x_p^T(t) \quad w^T(t)]$$

$$\bar{A} := \begin{bmatrix} A_p & b_p \theta_x^T \\ b_f c_p^T & A_f \end{bmatrix} \quad (11c)$$

$$\bar{b} := \begin{bmatrix} b_p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} := \begin{bmatrix} c_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

En esta sección se necesita la siguiente suposición:

(SE1) θ_x estabiliza la planta, i.e.,

$$\operatorname{Re} \lambda_i(\bar{A}) < 0, \quad i=1, 2, \dots, n_p+n \quad (12)$$

Sin pérdida de generalidad se supone que el sistema (11) se puede transformar en la forma normal [Kailath 1980],

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b\bar{u}^T [z(t) + \check{\theta}(0)r(t)] \quad (13a)$$

$$y(t) = c^T x(t) \quad (13b)$$

donde $x(t) = T\bar{x}(t)$, siendo T la matriz de transformación, $TT^T = I$, y

$$A = T\bar{A}T^{-1} = \operatorname{diag}\{p_1, \dots, p_{n_p+n}\} \quad (13c)$$

$$b = T\bar{b} = [b_1 \dots b_{n_p+n}]^T \quad (13d)$$

$$c = \bar{c}^T T^{-1} = [1 \dots 1]^T \quad (13e)$$

donde se usan las ecs. (8) y (10) para expresar $\bar{\theta}^T(t)u(t)$ en términos de $x(t)$ y $\bar{w}(t)$. De acuerdo con la suposición (SE1) los polos p_j se pueden escribir como

$$p_j = \eta_j + i\beta_j, \quad j=1, 2, \dots, n_p + n \quad (14)$$

El sistema adaptable está descrito completamente por las ecs. (5), (9) y (13). Expresando de manera compacta

$$\dot{y}(t) = A_1 y(t) + A_2(t) y(t) + b_1(t) p(t) \quad (15a)$$

$$\dot{p}^2(t) = -\sigma_0 p^2(t) + \delta y^T(t) c_1 y(t) + \delta \quad (15b)$$

donde

$$A_1 = \text{diag}[-\sigma_0 I_n \quad A] \quad (15c)$$

$$A_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \bar{w}(t) c^T \\ b \bar{w}^T(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (15d)$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \bar{w}^T(t) \bar{\theta}(0) \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c c^T \end{bmatrix} \quad (15e)$$

$$y(t) = [z^T(t) \quad x^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{2n+np} \quad (15f)$$

3.2.2 Análisis de Estabilidad

Mediante uso del método de Lyapunov, se obtiene el resultado de estabilidad resumido en el siguiente teorema.

Teorema 1 Considérese el sistema adaptable (1)-(6). Supóngase que la suposición (SE1) se cumple y que para algunas constantes positivas $\mu, \alpha > 0$, se satisfagan las siguientes desigualdades:

$$1 - (n_p + n) \left(\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\gamma^2}{2\sigma^2} \right) - \frac{1}{2} \eta^2 \|b_p\|^2 - \max\left(\frac{1}{\sigma_0}, \bar{\eta}\right) (1 + \mu) \geq 0 \quad (16a)$$

$$\sigma_0 - \mu - \frac{\alpha}{2} \bar{\eta} \|\check{\theta}(0)\|^2 \|b_p\|^2 \geq 0 \quad (16b)$$

Donde

$$\bar{\eta} = \max\{1/\eta_i\} \quad (16c)$$

con η_i como parte real de los polos del sistema en malla cerrada (ec. (14)). Bajo estas condiciones, todas las señales en el sistema adaptable son acotadas. Además, el estado del sistema en malla cerrada pertenece al conjunto residual S ,

$$S = \left\{ x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n+n_p} \mid \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{T > 0} \int_{t_0}^{t_0+T} \|x(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{\delta}{\mu\alpha} \max(\eta_i), \forall t_0 \geq 0 \right\} \quad (17)$$

□□□

La prueba de Teorema 1 necesita dos lemas técnicos que se presentan a continuación.

Lema 1. El vector $\check{w}(t)$ dado por las expresiones (7b), (2b), (5) y (6) cumple

$$\|\check{w}(t)\| \leq 1 \quad (18)$$

□□□

Prueba: La ec. (2b) nos da

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \|e^{A_1 t}\| \|u(0)\| + \int_0^t \|e^{A_1(t-\tau)}\| |y(\tau)| d\tau \\ &\leq e^{-1/2(\sigma_0 + \sigma_1)t} \|u(0)\| + \int_0^t e^{-1/2(\sigma_0 + \sigma_1)(t-\tau)} |y(\tau)| d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

Esta última desigualdad se obtiene de la condición (6a). Elevando cuadrado en ambos lados de (19) y aplicando la desigualdad Schwartz, ésta se puede escribir como

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\leq \left\{ e^{-\sigma_0 t} \|u(0)\|^2 + \left(\int_0^t e^{-1/2(\sigma_0 + \sigma_1)(t-\tau)} |y(\tau)| d\tau \right)^2 \right\} \\ &\leq \left\{ e^{-\sigma_0 t} \|u(0)\|^2 + \int_0^t e^{-\sigma_1(t-\tau)} d\tau \int_0^t e^{-\sigma_0(t-\tau)} y^2(\tau) d\tau \right\} \\ &\leq \left\{ e^{-\sigma_0 t} \|u(0)\|^2 + \frac{1}{\sigma_1} \int_0^t e^{-\sigma_0(t-\tau)} y^2(\tau) d\tau \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

Por otro lado, la ec. (5) nos da

$$p^2(t) = e^{-\sigma_0 t} p^2(0) + \delta \int_0^t e^{-\sigma_0(t-\tau)} y^2(\tau) d\tau + \delta / \sigma_0 \quad (21)$$

Comparando las ecs. (20) y (21), y en vista de la selección de δ y $\mu(0)$ (6b) y (5) se obtiene el resultado.

Lemma 2. Sea $p \in C^2(n, \mathbb{R}) \times C^2(n, \mathbb{R})$, la única solución de

$$A_1^* P + P A_1 = -I \quad (22)$$

donde $(.)^*$ se denota la conjugación transpuesta. Entonces las condiciones (16) implican $\forall t \geq 0$,

$$1 - \delta / \alpha C_1 - [F A_2(C) + A_2^T(C)] \geq (1 + \mu) P \quad (23a)$$

$$\alpha_0 - \alpha b_1^T(C) F b_1(C) > \mu \quad (23b)$$

ooo

Prueba: La única solución de P en la ec. (22) con A_1 y A dados en las ecs. (15c), (13c) y (14) está dada por

$$P = 1/2 \text{diag}[1/\alpha_0, \dots, 1/\alpha_0, 1/\eta_1, \dots, 1/\eta_{n_p+n}] \quad (24)$$

Por lo tanto,

$$P A_2(C) + A_2^T(C) P = \begin{bmatrix} 0_{n_p \times (n_p+n)} & \bar{w}(C) d^T \\ d \bar{w}^T(C) & 0_{(n_p+n) \times n_p} \end{bmatrix} \quad (25a)$$

$$d = (b_\eta - \gamma / \alpha_0 c) / 2$$

$$b_\eta := [b_1 / \eta_1, \dots, b_{n_p+n} / \eta_{n_p+n}]^T \quad (25b)$$

De acuerdo las propiedades de una matriz de bloque [Kailath 1980, p650], el máximo valor característico de la matriz (25a) está acotado por

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(P A_2(C) + A_2^T(C) P) &\leq \| \bar{w} \| \lambda_{\max}(d d^T) \\ &= \| \bar{w} \|^2 \| d \|^2 \end{aligned}$$

$$\leq (\eta \|b_\rho\| + \gamma/\sigma_0 C_{np+n})^2 \quad (26a)$$

$$d := 1/2(Cb_\eta - \rho/\sigma_0 c) \quad , \quad b_\eta := (b_1/\eta_1 \dots b_{n+np}/\eta_{n+np})^T \quad (26b)$$

La desigualdad (26) se obtiene de las ecs. (13e), (18) y (16c) y la desigualdad triángulo.

Por otro lado, de las ecs. (13e) y (15e), se tiene

$$\lambda_{\max}(C_F) = \|c\|^2 = \eta_1 \eta_n \quad (27)$$

Es claro de las ecs. (24) y (16c) que

$$\lambda_{\max}(F) = 1/2 \max(C/\sigma_0, \bar{\eta}) \quad (28)$$

Entonces (23a) sigue de las ecs. (16a), (26)-(28). La implicación (de (23a) a (16a)) sigue de la desigualdad

$$b_F^T C b_F \leq \dots \leq b_\eta^T C b_\eta \leq \dots \leq \|C\| \|b_\rho\|^2 / \eta^2 \quad (29)$$

En el último paso se usan la desigualdad Schwarts, (18) y (13d).

■ ■ ■

Ahora podemos probar Teorema 1.

Prueba de Teorema 1: Definase la función Lyapunov

$$V(x) = \alpha^T C(x) P(x) C(x) \alpha \quad , \quad \alpha \neq 0 \quad (30)$$

donde P está definida en Lema 2 (ec. (22)). La derivada de $V(x)$ a lo largo de las soluciones de (15a) y (15b) está dada por

$$\dot{V}(x) = \alpha^T C(x) \Pi_1 A_2^T C(x) P(x) \Gamma A_2^T C(x) \alpha - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} C_F P(x) \alpha$$

$$-\sigma_0 \rho^2 C^T C + 2\alpha Y^T C L P b_f C L p C L + \delta \quad (31)$$

Pero, de acuerdo con la desigualdad triángulo,

$$2Y^T C L P b_f C L p C L \leq Y^T C L P Y C L + b_f^T C L P b_f C L p^2 C L \quad (32)$$

Sustituyendo la desigualdad (32) en (31) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(L) &= -Y^T C L (\alpha I - \delta C_f - \alpha (P A_2 C L + A_2^T C L) I - \alpha P) \\ &\quad - \rho^2 C L p \sigma_0 - \alpha b_f^T C L P b_f C L p + \delta \end{aligned} \quad (33)$$

De acuerdo con Lema 2, las condiciones (16) implican que

$$\begin{aligned} \alpha I - \delta C_f - \alpha (P A_2 C L + A_2^T C L) I - \alpha P &> \mu \alpha I \\ \sigma_0 - \alpha b_f^T C L P b_f C L p &\geq \mu \end{aligned} \quad (34)$$

para algún $\mu > 0$. De las desigualdades (33) y (34) se obtiene

$$\dot{V}(L) \leq -\mu V(L) + \delta \quad (35)$$

Esto implica que Y y ρ son acotados, lo cual implica a su vez que todas las señales del sistema adaptable son acotadas. El conjunto residual S se obtiene integrando la desigualdad (35).

■ ■ ■

Con el fin de interpretar el resultado de Teorema 1, necesitamos la siguiente proposición.

Proposición 1. Supóngase que $\exists \bar{\mu} \in \mathbb{R}$ tal que $\text{Re}(\lambda_i(A)) < -\bar{\mu} < 0$, con $\bar{\mu}$ suficientemente grande, donde $\bar{\lambda}$ está dada en (11c). Entonces siempre existen γ , σ_0 , y δ tales que las condiciones de Teorema 1

(16) cumplan.

□□□

Prueba: Es evidente de las condiciones (16).

□□□

Comentario 3 De acuerdo con Proposición 1, el resultado de Teorema 1 se puede interpretar como sigue: dada la planta (1), si existe un controlador de la forma (2) con parámetros constantes que pone los polos del sistema en malla cerrada suficientemente a la izquierda del eje imaginario en el plano complejo y la velocidad de adaptación es lenta, el controlador adaptable (2)-(5) garantiza la estabilidad robusta del sistema.

Comentario 4 Como en los resultados en Capítulo II, la demostración de Teorema 1 no se asumen conocimientos del orden o el orden relativo de la planta ni se basa en las propiedades de excitación de las señales en la malla de adaptación.

3.3 Estabilización Adaptable de Plantas LVT

3.3.1 Formulación del Problema

A. Planta

Considérese la planta LVT

$$y(t) = BC(p, t)AC(p, t)^{-1}u(t) \quad (1a)$$

donde $BC(p, t)$ y $AC(p, t)$ son operadores LVT en p definidos de la siguiente forma:

$$A(\rho, t) = \sum_{i=0}^{n_p} a_i(t) \rho^i \quad (1b)$$

$$B(\rho, t) = \sum_{i=0}^{m_p} b_i(t) \rho^i \quad (1c)$$

donde n_p es el orden de la planta, $m_p < n_p$, el orden de $B(\rho, t)$. Los valores de n_p y m_p son desconocidos. $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ son los parámetros desconocidos de la planta. Sin pérdida de generalidad, a continuación se supone que $a_{n_p} = 1$.

B. Controlador

Considérese el controlador de retroalimentación de salida

$$u(t) = \theta^T(t) w(t) \quad (2a)$$

$$\dot{w}(t) = A_f w(t) + b_f u(t) \quad (2b)$$

donde $A_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz Hurwitz, $b_f \in \mathbb{R}^n$ con $\|b_f\| = 1$, y n es el orden del controlador seleccionado de tal manera que el sistema en malla cerrada con $u(t) = \theta_*^T(t) w(t)$, para algún $\theta_*: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, sea estable, donde θ_* es una función de tiempo cuyas componentes son funciones acotadas con derivadas acotadas. $\theta(t), w(t) \in \mathbb{R}^n$ son el vector de parámetros de controlador y el regresor, respectivamente.

C. Ley de Adaptación

Se ajusta el vector de parámetros $\theta(t)$ por la siguiente ley de adaptación:

$$\dot{\theta}(t) = -\sigma(t)\theta(t) - \gamma \frac{w(t)y(t)}{p^2(t)} + f(t), \quad \theta(0) = \theta_0(0) \quad (3a)$$

$$\sigma(t) = \delta C |y(t)| + 1 / p(t) \quad (3b)$$

$$|p(t)| = -\nu_0 p(t) + \delta C |y(t)| + 1, \quad p(0) \geq \delta / \sigma_0 \quad (3c)$$

$$f(t) = \sigma(t)\theta_0(t) + \dot{\theta}_0(t) \quad (3d)$$

donde $\gamma, \sigma_0 > 0$ son parámetros de diseño. Se escoge σ_0 de tal manera que

$$0 < \sigma_0 \leq \min_i |\operatorname{Re} \lambda_i(A_f)| \quad (4)$$

Y $\theta_0: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un término forzante, cuyas componentes son funciones de tiempo acotadas con derivadas acotadas.

Comentario 1 El término forzante θ_0 , igual que en la ley de adaptación (2.3), sólo representa el mejor estimador a priori de θ_* , el cual no necesariamente estabiliza la planta.

D. Modelo de error

Sea

$$\theta(t) = \tilde{\theta}(t) - \theta_*(t) \quad (5)$$

el error de parámetros. En término de $\tilde{\theta}(t)$ la ec. (1) se puede escribir como

$$y(t) = H_c(p, t) \tilde{\theta}^T(t) w(t) \quad (6a)$$

donde $H_c(p, t)$ es un operador LVT definido como

$$H_2(p, t) = \left\{ I - BC(p, t)AC(p, t)^{-1} \theta_*(t) [pI - A_f]^{-1} b_f \right\}^{-1} BC(p, t)A^{-1}(p, t) \quad (6b)$$

Definase $z(t)$ como

$$z(t) = p(t)(B(t) - \theta_0(t)) \quad (7)$$

la cual satisface la ec. diferencial

$$\dot{z}(t) = -\sigma_0 z(t) - \gamma \bar{w}(t) x(t) \quad , \quad z(0) = 0 \quad (8)$$

Sea $(A_2(t), b_2(t), c_2(t))$ una realización de $H_2(p, t)$ con estado $x(t)$, se escribe la ec. (6a) en forma de estado y en términos de $z(t)$,

$$\dot{x}(t) = A_2(t)x(t) + b_2^T(t) \bar{w}(t) [\theta_0(t) - \theta_*(t)] p(t) \quad (9)$$

Entonces, el sistema adaptable está completamente descrito por las ecs. (3c), (8) y (9). Escribiéndolas en forma compacta se obtiene

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + B(t)U(t) + c \quad (10a)$$

donde

$$Y(t) := [z^T(t) \quad x^T(t) \quad p(t)]^T \quad (10b)$$

$$A(t) := \text{diag} \{ -\sigma_0 I_n, A_2(t), -\sigma_0 \} \quad (10c)$$

$$B(t) := \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \bar{w}(t) c_2^T(t) & 0 \\ b_2^T(t) \bar{w}^T(t) & 0 & b_2^T(t) \bar{w}^T(t) [\theta_0(t) - \theta_*(t)] \\ 0 & \delta \text{sgn} c_2^T(t) & 0 \end{bmatrix}$$

(10d)

$$c = [0 \quad 0 \quad \delta]^T \quad (10e)$$

3.3.2 Análisis de Estabilidad

Ahora se aplican los argumentos de estabilidad total [Anderson *et al* 1966] para analizar el sistema (10). La idea de estabilidad total es que si el sistema no perturbado $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ es exponencialmente estable, el sistema perturbado (10) tolerará ciertas perturbaciones, e.g., variaciones de parámetros. El Teorema 1 a la continuación precisa esta idea.

Teorema 1 Considérese la ec. diferencial

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t, x) + g(t, x), \quad x(0) \in \mathbb{R}^m \quad (11)$$

donde $A(t)$, $f(t, x)$ y $g(t, x)$ son localmente integrables en t $\forall x \in B_r$, donde $B_r = \{x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq r\}$, y $\forall x_1, x_2 \in B_r, \forall t \geq 0$, cumplen

$$(A1) \quad f(t, 0) = 0$$

$$(A2) \quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \beta_1 \|x_1 - x_2\|$$

$$(A3) \quad \|g(t, x_1)\| \leq \beta_2 r$$

$$(A4) \quad \|g(t, x_1)\| \leq \beta_2 \|x_1 - x_2\|$$

donde β_1 y β_2 son constantes positivas. Si el sistema no perturbado

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$$

es exponencialmente estable, i.e., $\exists \alpha, K > 0$, tales que

$$\| \Gamma(t, \tau) \| \leq K e^{-\alpha(t-\tau)}, \quad \forall t \geq \tau \geq 0$$

con

$$\| x(0) \| \leq r K \tag{12a}$$

$$(\beta_1 + \beta_2) K \alpha < 1 \tag{12b}$$

entonces, $x \in L_{\omega}^m$

□□□

Prueba: ver a [Anderson et al 1986, pg161].

■ ■ ■

El siguiente teorema resume el resultado de esta sección.

Teorema 2. Considérese el sistema adaptable (1)-(3). Supóngase que

(ST1) $\exists \theta_*: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$1) \operatorname{Re} \lambda(\Lambda_2(\tau)) < 0, \quad \forall \tau \geq 0 \tag{13}$$

2) $\exists c > 0$ que depende solo del margen de estabilidad de $H_2(\rho, 1)$, tal que

$$\sup_{t \geq 0} \| \dot{\Lambda}_2(t) \| \leq c \tag{14}$$

$$(ST2) \quad b_0 < \lambda_2 / K_2 \tag{15a}$$

donde

$$b_0 := \max(r K_w \| c \|_{\omega}, K_w \| b_2 \|_{\omega} (1 + \| \theta_* - \theta_* \|_{\omega}, \delta \| c \|_{\omega}) \tag{16}$$

y λ_2, K_2 satisfacen

$$\|F(L, r)\| \leq K_2 e^{-\lambda \|L-r\|} \quad (17)$$

$F(L, r)$ denota la matriz de transición de

$$\dot{Y}(L) = A(L)Y(L) \quad (18)$$

Bajo estas condiciones, todas las señales en el sistema adaptable son acotadas.

□□□

Prueba: La suposición (S11) garantiza que el sistema no-perturbado (18) sea exponencialmente estable [Vidyasagar 1977, pg185]. Por otra parte, en la ec. (10a)

$$\|B(L)\| \leq b_0$$

con b_0 definida en (16). En vista de (S12), las condiciones de Teorema 1 están satisfechos. Por lo tanto, $y \in L_{\infty}^{2n+1}$, lo cual implica que todas las señales en el sistema adaptable son acotadas.

□□□

Comentario 2 El resultado de Teorema 2 puede interpretarse como sigue: si existe un controlador posiblemente variante en el tiempo que i) el sistema en malla cerrada es estable para todo instante "congelado", ii) la variación de los parámetros en malla cerrada es lenta, iii) la ganancia del sistema en malla cerrada es pequeña (i.e., $\|b_0\|_{\infty}$ o $\|c_0\|_{\infty}$ pequeño), y iv) la velocidad de adaptación es lenta, entonces, el controlador adaptable garantiza que todas las señales sean acotadas.

Comentario 3 La restricción de que la variación de los parámetros en el sistema en malla cerrada no necesariamente implica que la variación de los parámetros de la planta sea lenta. Es un resultado conocido que existe parametrizaciones de controlador tal que el sistema en malla cerrada sea invariante en el tiempo (e.g., [Tskalis, Ioannou 1997]).

CAPÍTULO IV. LEYES DE ADAPTACION USANDO INFORMACIONES PASADAS

4.1. Introducción

Las leyes de adaptación presentadas en los capítulos II y III usan las mediciones instantáneas en la adaptación de los parámetros de controlador. En este capítulo, se considera una clase de leyes de adaptación en que las mediciones pasadas son incorporadas en el proceso de adaptación.

Entre las leyes pertenecientes a esta clase, la más popular es la que se conoce como algoritmo de mínimos cuadrados recursivo (RLS). Sus propiedades de estabilidad y convergencia son bien estudiadas y detalladas en la literatura (e.g., Mason et al 1987).

Cuando la planta está perturbada, el comportamiento de convergencia de parámetros (si es el caso) es pobre aun cuando estos se mantienen acotados. Otro tipo de leyes de adaptación en esta clase usa las mediciones pasadas en forma promediada en el proceso de adaptación (Mitschke 1977, Narendra, Khalifa, Chaffee 1985, Hara, Haraquaga 1987a,b, Uang 1987a,b). El efecto de promediación de las mediciones pasadas elimina el fenómeno de oscilaciones en la convergencia de parámetros, haciendo que el error de parámetros tienda monótonicamente a una vecindad de cero en el espacio de parámetros. Consecuentemente, se eliminan los comportamientos de altas frecuencias en las señales y

proporciona un mayor grado de robustez al sistema.

Un aspecto interesante en el análisis de convergencia de parámetros es el problema de tiempo finito de convergencia. Recientemente, este problema fue discutido en Krause, Murgonegal (1976) y (Ortega 1987). En (Ortega 1987) se establecen, mediante una descomposición de valores singulares, condiciones que garantizan la estabilidad del sistema y que el tiempo de convergencia sea finito.

Motivado por estos trabajos, en este capítulo se presentan dos leyes de adaptación para sistema de NRAC.

En Sección 2, se formula el problema. A diferencia de los problemas tratados anteriormente, aquí se supone una separación de las dinámicas no-modeladas, i.e., la planta está descrita por una parte modelada en paralelo con las dinámicas no-modeladas. La parte modelada tiene orden y orden relativo conocidos, mientras la parte no-modelada sólo se supone que es estable con una ganancia B .

En Sección 3, se presenta el algoritmo de gradiente promedio. Bajo condición de excitación persistente en ciertas señales en la malla de adaptación, se establecen condiciones que garantizan la estabilidad del sistema adaptable. Estas condiciones relacionan: i) la velocidad de adaptación, ii) el margen de estabilidad del sistema en malla cerrada con θ_0 (ganancia sincronizada), iii) el nivel de excitación del regresor filtrado normalizado, iv) cota superior de los ruidos acotados y la ganancia de las dinámicas no-modeladas.

En Sección 4, se presenta un algoritmo con switcheo que consiste en dos partes: primero, se monitorea la información supervicando la condición de excitación suficiente (Krause, Murgonegal 1976), en el regresor filtrado. Una vez esta condición se cumple, el algoritmo hace un switcheo. En condiciones ideales, los parámetros convergen en este instante a la ganancia sincronizada. Se discute también la implementación práctica de este

algoritmo, el cual se puede implementar de una forma estándar de ISR después de cierto tiempo.

4.2 Formulación del Problema

4.2.1 Suposiciones sobre Planta

Consideremos la planta

$$y'(t) = G_P(\rho) u(t) + d(t) \quad (1)$$

donde las variables están definidas en forma usual (Fig. 2.1), $d(t) \in S_{d_0}$, $\forall t \geq 0$, para alguna constante $d_0 > 0$. En esta ocasión se supone que la función de transferencia de la planta $G_P(\rho)$ se puede expresar como

$$G_P(\rho) = G_0(\rho) \tilde{G}(\rho) \quad (2a)$$

$$G_0(\rho) = b_P \frac{R_0(\rho)}{A_0(\rho)} \quad (2b)$$

donde $G_0(\rho)$ es la parte modelada y las dinámicas no-modeladas están agrupadas en $\tilde{G}(\rho)$ cuya ganancia es $\mu > 0$. Se supone que $\exists \lambda_0 > 0$ tal que $\tilde{G}(\rho)_{\lambda_0}$ es estable. $A_0(\rho)$, $R_0(\rho)$ son polinomios coprimos de grado n y m ($m \leq n-1$), respectivamente, y $R_0(\rho)$ es Hurwitz. El signo de b_P y los valores de n y m son especificados, pero los coeficientes de $A_0(\rho)$ y $R_0(\rho)$ son constantes desconocidas.

Comentario 1. La ec. (1) describe una clase de plantas en las que las dinámicas no modeladas tienen constantes de tiempo rápidas. En el problema de valores singulares se le llama a μ perturbaciones singulares (Luyven, Botbol, cit. [197]).

4.2.2 Controlador de Modelo de Referencia

El objetivo de control es seguir la salida del modelo dado por

$$y_m(t) = G_m(s) u(t) \quad (2a)$$

$$G_m(s) = b_m \frac{1}{A_m(s)} \quad (2b)$$

donde la señal de referencia $u(t)$ entra al modelo $G_m(s)$ proporcionando la salida $y_m(t)$, donde $A_m(s) = \det P(s)$ es Hurwitz de grado $n-m$. El problema de control es determinar una entrada acotada a la planta que cumple el objetivo de control y mantiene las señales en el sistema acotadas. A continuación se restringe al caso en que la ganancia b_f es conocida. Sin pérdida de generalidad se supone $b_m = b_f = 1$.

El controlador de modelo de referencia está descrito por las eqs. (2.5.2) con $\alpha_0 = 1$,

$$u(t) = y(t) \alpha^T c + u(t) \quad (4a)$$

$$b_1(t) = (a_1^1)^T c + a_1^0(t) = a_1^0(t) + a_1^T c e^{-(t-\tau)} \quad (4b)$$

$$a_1^0(t) = (a_1^0)^T c + a_1^0(t) = a_1^0(t) + a_1^T c e^{-(t-\tau)} \quad (4c)$$

$$a_1^0(t) = z(t) p^T c \quad (4d)$$

$$a_1^0(t) = \alpha^T p y(t) \quad (4e)$$

$$f(p) = (pI - A_f)^{-1} b_f = \frac{1}{\Delta_f(p)} [1 \ p \ \dots \ p^{n-1}]^T \quad (4f)$$

donde $A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$, cuyos valores propios satisfacen $|\operatorname{Re} \lambda_i| \leq -\lambda_0$, (A_f, b_f) es controlable, $\Delta_f(p) = \det(pI - A_f)$, α^T es el regresor y

θ es el vector de parámetros de controlador. Para cualquier modelo dado $G_m(p)$, existe un vector (ganancia sincronizada) $\theta_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, tal que el error de seguimiento es minimizado (Kosut, Friedlander 1989). En el caso ideal, $(p=d_0=0)$, cuando $\theta=\theta_0$, la planta junto con el controlador comporta idénticamente como el modelo (Harendra, Liu, Valavaní 1980).

4.2.3 Ecuaciones de Error

Sean el error de parámetros $\tilde{\theta}(t)$ y el error de seguimiento $e(t)$ definidos

$$\tilde{\theta}(t) = \theta(t) - \theta_0 \tag{5}$$

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \tag{6}$$

De las eq. (1)-(6) el error de seguimiento puede expresarse como

$$e(t) = G_m^{-1}(p) \tilde{\theta}^T(t) \phi_m(t) + d_f(t) \tag{7a}$$

donde $\eta(t)$ y $d_f(t)$ son efectos debido a las dinámicas no-modeladas y ruidos acotados, respectivamente:

$$\eta(t) = G_m^{-1}(p) \omega(t) \tag{7b}$$

$$G_m^{-1}(p) = G_m^{-1} \frac{(A - \sigma_f^* I)^{-1} \tilde{\theta}}{A} \tag{7c}$$

$$d_f(t) = G_m^{-1}(p) d(t) \tag{7d}$$

$$G_m^{-1}(p) = G_m^{-1} \frac{A_0^{-1} A \cdot \sigma_f^* I}{A} \tag{7e}$$

donde $\sigma_f^* = \text{tr}(A - p) = \text{tr}(A) - \sigma_f^*$, y $(A - \sigma_f^* I)^{-1} \sigma_f^* I = A_0^{-1} A \cdot \sigma_f^* I = \sigma_f^* I$. De acuerdo con las suposiciones de la planta, G_m and G_p son funciones de transferencia estables, σ_f^* estrictamente propia, σ_f^* propia.

Definase el vector $\tilde{w}_1(t)$ y $\tilde{m}_1(t)$ como sigue:

$$\tilde{w}_1(t) = \begin{bmatrix} F \left[\frac{\sigma_2^* \Delta \sigma_2^* \Lambda}{\Lambda^2 \sigma_1^*} - G_m^{-1} \frac{\Lambda}{\Lambda^2 \sigma_1^*} - I \right] \\ F G_m \\ G_m \end{bmatrix} \tilde{e}(t) \quad (6)$$

$$\tilde{m}_1(t) = \tilde{w}_1(t) - \tilde{m}_1(t) \quad (7)$$

donde σ_2^* se define de manera similar a σ_1^* . De las ec. (4), (6) y (7) se obtiene

$$\tilde{m}_1(t) = G_1 \tilde{e}(t) + G_2 \tilde{e}(t) + G_3 \tilde{e}(t) \quad (8)$$

donde

$$G_1 = \begin{bmatrix} F \left[\frac{\sigma_2^* \Delta \sigma_2^* \Lambda}{\Lambda^2 \sigma_1^*} - G_m^{-1} \frac{\Lambda}{\Lambda^2 \sigma_1^*} - I \right] \\ F G_m \\ G_m \end{bmatrix} \quad (9a)$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} F \left[\frac{\sigma_2^* \Delta \sigma_2^* \Lambda}{\Lambda^2 \sigma_1^*} - G_m^{-1} \frac{\Lambda}{\Lambda^2 \sigma_1^*} \right] \\ F G_m \\ G_m \end{bmatrix} \quad (9b)$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} F \left[\frac{\sigma_2^* \Delta \sigma_2^* \Lambda}{\Lambda^2 \sigma_1^*} - G_m^{-1} \frac{\Lambda}{\Lambda^2 \sigma_1^*} \right] \\ F G_m \\ G_m \end{bmatrix} \quad (9c)$$

Las ecs. (8a) y (8b) son las ecuaciones de error que se analizarán en las siguientes secciones.

En las siguientes definiciones $\sigma_1^* \Delta \sigma_1^* \Lambda$ es acotado.

Definición 1. (condición PE) Se dice que x satisface la condición de excitación persistente, si $\exists \epsilon, T_0$ tales que

$$\int_{t-T}^t x^T(x) x^T(x) dx > \epsilon, \quad \forall t > T_0 \quad (11)$$

Se denota $x \in PE(\epsilon, T)$.

Definición 2. (condición SE) Se dice que x satisface la condición de excitación suficiente si $\exists \epsilon, T$ tales que

$$\int_0^T x^T(x) x^T(x) dx > \epsilon \quad (12)$$

Se denota $x \in SE(\epsilon, T)$.

Definición 3. (condición ϵ -PE) Se dice que x satisface la condición ϵ -PE, donde $\epsilon > 0$, si $\exists \epsilon, T_0$, tales que

$$\int_0^T \exp(-\epsilon t) x^T(x) x^T(x) dx > \epsilon, \quad \forall T > T_0 \quad (13)$$

Se denota $x \in \epsilon\text{-PE}(\epsilon, T)$.

De aquí en adelante se referirá a ϵ como el nivel de excitación de x .

Comentarios. La condición PE en el regresor es suficiente para la convergencia de parámetros en muchos esquemas de estimación, e.g., [Brockwell, 1977], [Lloyd, Sasthy 1986] y [Narendra, Annaswamy 1987b]. Esta condición requiere que $x(t)$ espanda todo el espacio de parámetros en todos los instantes. La condición SE, por otro lado, solo requiere que $x(t)$ espanda el espacio de parámetros en el transcurso de la operación del sistema, la cual es estrictamente débil que la condición PE; obviamente para cualquier

de $E(\alpha, T)$, se tiene $e \leq SE(\alpha, T)$, pero ningún $e \leq SE(\alpha, T)$ y $e \leq 0$ o $e \leq \frac{\delta \alpha}{\delta T}$ o $e \leq \frac{\delta T}{\delta \alpha}$ pertenece a $PE(\alpha, T)$, para cualquier $\alpha, T > 0$ (Haruhiko, Annasamy 1987b).

Comentario 2. La condición ϵ -PE es esencialmente la condición PE cuando $\epsilon > 0$. Es fácil ver que para cualquier $e \in PE(\alpha, T)$, se tiene $e \in \epsilon$ -PE (α, T) ; y para cualquier $e \in \epsilon$ -PE (α, T) , se tiene $e \in PE(\alpha', T')$ para algún α' suficientemente pequeño y T' suficientemente largo. Sin embargo, en la condición ϵ -PE se puede obtener un nivel de excitación ϵ deseado mediante una selección adecuada del parámetro ϵ . Mientras más pequeño se escoge ϵ , más grande α se puede lograr. En el caso extremo, cuando $\epsilon = 0$ la ϵ -PE condición coincide con la de SE.

4.3 Algoritmo de Gradiente Promedio

4.3.1 Algoritmo de Gradiente Promedio

El vector de parámetros de controlador es ajustado en esta ocasión con el Algoritmo de Gradiente Promedio:

$$\dot{\theta}(t) = -\gamma g(t) \quad , \quad \theta(0) = \theta_0 \tag{1a}$$

$$\dot{g}(t) = -\epsilon (1 - Z(t)) g(t) + \frac{E(t) \phi_1(t)}{\delta^2(t)} \quad , \quad g(0) = 0 \tag{1b}$$

$$\dot{Z}(t) = -s Z(t) + \frac{E(t) \phi_1^T(t)}{\delta^2(t)} \quad , \quad Z(0) = 0 \tag{1c}$$

$$\dot{\delta}(t) = -\rho \delta(t) (|y(t)| + |u(t)| + 1) \quad , \quad \delta(0) \geq \frac{\delta}{\sigma} \tag{1d}$$

$$E(t) = \frac{1}{\delta} \dot{\delta}(t) \tag{1e}$$

$$e_f(t) = e(t) - \alpha \sum_{i=1}^m \rho_i \theta_i^T e(t) \phi_i^T(t) \theta_i(t) \quad (17)$$

donde ρ_i , δ_i , $\alpha > 0$ son parámetros de diseño que se especifican más tarde, y $\theta_i^T(t) = e_f(t)$ es el que se llama error aumentado (e.g., [Mannou, Tsafalis 1986]). De la ec. (1.7a) se puede escribir el error aumentado como

$$e_f(t) = e_f^T(t) \bar{Q}^{-1} \bar{Q} \theta_f(t) \quad (18)$$

Comentario 4. Escribiendo (1b) de la siguiente forma

$$\dot{e}(t) = \int_0^t \Phi(t, \tau) \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{e(\tau)}{\rho^2(\tau)} \right) + \frac{e(\tau)}{\rho^2(\tau)} \right] d\tau \quad (19)$$

donde $\Phi(t, \tau)$ es la matriz de transición de (1b), se observa que $e(t)$ es el gradiente promedio de $J(\theta) = e_f^T(t) \bar{Q}^{-1} e_f(t)$ ponderado por la matriz $\Phi(t, \tau)$. El algoritmo ajusta el vector de parámetros de controlador en la dirección de este gradiente promedio (ec. (1a)) con la velocidad determinada por el parámetro α . En términos no muy rigurosos, este promedio se toma en un intervalo de tiempo determinado por el término $e(t)/\rho^2(t)$ en la ec. (1c), el cual puede ser interpretado como el error normalizado. Este promedio se realiza (ver el algoritmo en [Mannou, Tsafalis 1986], Lema A2 en Apendice A) de la siguiente manera:

$$e_f(t) = \int_0^t \exp(-\alpha \rho^2(t-\tau)) \bar{Q}^{-1} \theta_f^T(\tau) d\tau \quad (20)$$

Cuando $\bar{Q} = I$ (e.g., I), de la definición 1.3 se tiene $\theta_f(t) = e_f(t)$ para $\alpha > 0$. Entonces el intervalo en que se toma el promedio está aproximadamente dado por $[t, t + \frac{1}{\alpha \rho^2(t)}]$. De esta manera el algoritmo es capaz de ampliar o reducir este intervalo dependiendo del valor de α y $\rho(t)$.

Comentario 6. El parámetro de diseño ϵ en la ec. (1c) determina el tiempo de respuesta en que las mediciones pasadas $\hat{Y}(t)$ se toman en cuenta. Teóricamente, se puede asignar $\epsilon \rightarrow 0$ en caso ideal. En tal circunstancia todas las mediciones pasadas se usan en el proceso de adaptación de los parámetros. Sin embargo, cuando la planta es perturbada por dinámicas no-modeladas y ruidos aculados la ley de adaptación debe de tener cierta capacidad de seleccionar las mediciones que tienen más información en algún sentido (e.g., en el sentido de "razón de señal-ruido", o "más reciente más información").

4.3.2 Análisis de Convergencia y Robustez

La propiedad de convergencia del algoritmo (1) está resumida en el siguiente lema.

Lema 1. Si $\hat{\theta} \in FE(\epsilon, T)$ entonces $\| \hat{\theta}(t) - \theta^* \|_{\infty} \leq \lambda_{\mu}^{-1} \epsilon$ al $t \rightarrow \infty$ exponencialmente con la constante de tiempo no mayor que $1/\lambda_{\mu}$. Donde $\lambda_{\mu}^{-1}(\theta^*)$ está definido por

$$\lambda_{\mu}^{-1}(\theta^*) = \left\{ \alpha \exp^{2\alpha} \left[\| \theta^* - \theta_0 \|_{\infty} \left(\frac{k_1}{\alpha} + \frac{k_2}{\alpha} \right) \right] \right\} \quad (5)$$

y $k_1, k_2, k_3 > 0$, son constantes que dependen de la planta y el filtro (2.4f).

□

Prueba: Las ecs. (1b) y (1f) nos dan

$$\dot{\hat{\theta}}(t) + \epsilon \hat{\theta}(t) = \epsilon \left(\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} \right)^T \hat{Y}(t) + \epsilon \left(\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} \right)^T \hat{Y}(t) - \epsilon \hat{\theta}(t) + \epsilon \hat{\theta}(t) \quad (6)$$

(a) y $\dot{\hat{\theta}}(t) + \epsilon \hat{\theta}(t) = \epsilon \hat{\theta}(t) + \epsilon \hat{\theta}(t)$ en la última ecuación y

multiplicando $e^{-\rho t}$ en ambos lados se obtiene

$$\begin{aligned} \rho \tilde{\theta}(t) + \dot{\tilde{\theta}}(t) \exp(\rho t) &= \int_0^t \exp(\rho(t-\tau)) \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\tau} \tilde{\theta}(\tau) \right) \exp(\rho \tau) \right] \frac{\rho \tilde{\theta}(\tau) \exp(\rho \tau)}{\rho^2} d\tau \\ &+ \tilde{\theta}(t) \exp(\rho t) \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \tilde{\theta}(t) \right) \exp(\rho t) \end{aligned}$$

Integrando esta ecuación de 0 a t y sustituyendo la ec. (1a):

$$\tilde{\theta}(t) = -2 \rho \int_0^t \tilde{\theta}(\tau) d\tau + J(t) \quad (6)$$

donde

$$J(t) = \int_0^t \exp(\rho(t-\tau)) \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\tau} \tilde{\theta}(\tau) \right) \exp(\rho \tau) \right] d\tau \quad (7)$$

De acuerdo con Lema A2 en Apéndice A $J(t)$ está acotada por

$$\|J\|_{\infty} \leq \frac{2}{\rho} \int_0^{\rho} \exp(-\tau) d\tau \quad (8)$$

Donde las constantes K 's dependen solamente de la planta y el filtro (2.4f).

Sea $\tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}$, cuya derivada a lo largo de $\dot{\tilde{\theta}}(t) = -2\rho \tilde{\theta}(t)$ es

$$\dot{\tilde{\theta}} = -2\rho \tilde{\theta} \quad \forall t \geq 0 \quad (9)$$

La desigualdad se debe a la exposición $\tilde{\theta}(t) \in \mathcal{E}(0, T)$, i.e., $\forall t \in [0, T], \forall \epsilon > 0$. Como todas las señales en el sistema son funciones "suaves" en el tiempo, el tiempo de escape es infinito (i.e., las señales se van a infinito solo cuando $t \rightarrow \infty$). Por lo tanto todas las señales son acotadas en el intervalo $t \in [0, T]$. Por otra parte, de la ec. (7) la solución de transición de la ecuación (6) está acotada por

$$\|\tilde{\theta}(t)\| \leq \| \exp(-\gamma \rho(t-1)) \| \|\tilde{\theta}(1)\| \quad \forall t \geq 1 \tag{10}$$

Por lo tanto, la solución (6) está acotada por

$$\|\tilde{\theta}(t)\| \leq \| \exp(-\gamma \rho(t-1)) \| \|\tilde{\theta}(1)\| + \int_0^t \| \exp(-\gamma \rho(t-1-s)) \| \rho(s) ds \tag{11}$$

donde E está definida en (5). Con lo cual se prueba lema.

Comentario 6. Nótese que en el caso ideal ($p=0$), se puede asignar $\rho=0$, i.e., todas las mediciones pasadas se usan en la adaptación de los parámetros. Es fácil demostrar en este caso (usando la función de Lyapunov definida arriba) que $\tilde{\theta}(t)$ está acotado independientemente de las otras señales en el sistema y tiende a cero exponencialmente si $\bar{\xi} \in PE(\alpha, T)$.

Ahora, se aplica el algoritmo (1) junto con la ley de control (2.4) a la planta (2.1). La estabilidad de este sistema adaptable está garantizada por el siguiente lema.

Proposición 1. Considérese el sistema adaptable (2.1)-(2.4) y (1). Supóngase que la planta satisface las suposiciones hechas en la subsección 4.2.1 y el regresor filtrado normalizado $\bar{\xi} \in PE(\alpha, T)$. Entonces $\exists \mu_\alpha > 0$, tal que $\forall \mu \in (0, \mu_\alpha)$, todas las señales en el sistema adaptable son acotadas. Donde μ_α satisface

$$\left(\frac{n_1}{\lambda_0} + \mu \right) \mu_\alpha + \frac{m_2}{\lambda_0} \mu_\alpha + \mu_\alpha \left(\frac{m_1}{\lambda_0} + \mu \right) \mu_\alpha + \mu_\alpha \frac{m_2}{\lambda_0} \mu_\alpha = 1 \tag{12}$$

Prueba: De la ec. (2.10a) se obtiene

$$\tilde{w}(t) = \int_0^t [g_1(t-\tau)\tilde{w}^T(\tau) + p g_2(t-\tau)\tilde{w}^T(\tau)] \tilde{w}(\tau) d\tau + f_1(t) \quad (14)$$

Donde se excluye, como siempre, los términos debidos a las condiciones iniciales, los cuales no afectan los resultados de estabilidad. $g_1(t)$ y $g_2(t)$ son las respuestas al impulso de las funciones de transferencia de $G_1(p)$ y $G_2(p)$ definidas en las ecs. (2.10). De acuerdo con las suposiciones hechas en la subsección 4.2.1, existen $m_1, m_2 > 0$, tales que

$$\|g_1(t)\| \leq m_1 \exp(-\lambda_0 t) \quad \forall t \geq 0 \quad (15a)$$

$$\|g_2(t)\| \leq m_2 \exp(-\lambda_0 t) \quad \forall t \geq 0 \quad (15b)$$

y

$$f_1(t) = - \int_0^t [g_1(t-\tau)\tilde{w}^T(\tau) + p g_2(t-\tau)\tilde{w}^T(\tau)] m_2(\tau) d\tau \quad (16)$$

En vista de Lema 1, $f_1(t)$ está acotada por

$$\|f_1\|_{\infty} \leq \|m_2\|_{\infty} \sup_{t \geq 0} \left[\frac{c_1 t^{\alpha}}{\lambda_0^{\alpha} \Gamma(\alpha)} (\exp(\rho t) - \exp(-\lambda_0 t)) + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} (1 - \exp(-\lambda_0 t)) \right] + \|D\|_{\infty} \quad (17a)$$

$$\leq \|m_2\|_{\infty} \left[\frac{c_1 \rho^{\alpha}}{\lambda_0^{\alpha} \Gamma(\alpha)} + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right] + \|D\|_{\infty} = c_0 \quad (17b)$$

donde

$$c_1 = \|\tilde{w}(0)\| (m_1 + m_2) \quad (18)$$

$$c_0 = E \{ m_1 + m_2 \} + \|D\|_{\infty} \quad (19)$$

donde E está definido en (5). Sustituyendo las ec. (15)-(19) en la ec. (14) se obtiene

$$\| \ddot{w}(t) \| \leq \int_0^t (c_1 \rho e^{-\lambda_0(t-\tau)} + c_2 \rho e^{-\lambda_1(t-\tau)}) \| \dot{w}(\tau) \| d\tau$$

De acuerdo con la desigualdad Bellman-Gronwall (Desoer, Vidyasagar, 1975), esta última se puede escribir como

$$\| \ddot{w}(t) \| \leq e^{(\lambda_0 + \lambda_1)t} \int_0^t (c_1 \rho e^{-\lambda_0 \tau} + c_2 \rho e^{-\lambda_1 \tau}) \| \dot{w}(\tau) \| d\tau \quad (20)$$

donde

$$c_1 = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{\lambda_0} c_1 \rho e^{-\lambda_0 \tau} d\tau \quad (21)$$

De las ecs. (20) y (21) $\forall t \in [0, \mu_0]$, donde μ_0 está dado en (14), se tiene $\lambda_1 \lambda_0 \mu_0 > 1$ y

$$\| \ddot{w}(t) \| \leq c_1 \rho e^{-\lambda_0 t} + c_2 \rho e^{-\lambda_1 t} + \lambda_0 \lambda_1 \mu_0 \rho e^{-\lambda_0 t}$$

■

Comentario 7. Como en Lema 1, es fácil ver que en el caso ideal $\| \ddot{w}(t) \|$ al tem exponencialmente como consecuencia de la convergencia de los parámetros de controlador a la ganancia sintonizada, y esta convergencia se puede lograr bajo la condición SE.

Comentario 8. Télese en la ec (15) que $m_1 \lambda_0, m_2 \lambda_0$ son márgenes de estabilidad de las funciones de transferencia $G_1(p)$ y $G_2(p)$ definidas en (2.10), respectivamente. La condición (13) relaciona: i) la velocidad de adaptación (γ), ii) el margen de estabilidad del sistema en lazo cerrado ($m_1 \lambda_0, m_2 \lambda_0$), iii) el nivel de excitación del regresor filtrado normalizado (ρ), iv) la cota superior de los ruidos ponderados (d_0) y la ganancia de las derivadas de los parámetros. Se observa también que cuando no hay

dinámicas no-modeladas, (i.e. $p \neq 0$), la estabilidad del sistema es garantizada si

$$\gamma \frac{1}{\sigma} > \frac{1}{\rho_j}$$

con $\sigma = \min_j |\rho_j|$. En este caso, se puede lograr una mayor robustez por medio de reducir la velocidad de adaptación, incrementar el nivel de excitación o ampliar el margen de estabilidad del sistema en malla cerrada con la ganancia sintonizada.

4.4 Ley de Adaptación con Switcheo

En esta sección no se dirige directamente el problema de robustez ante las dinámicas no-modeladas y ruidos acotados, sino se pone más atención a la convergencia de parámetros. Intuitivamente, si el vector de parámetros de controlador converge en un "corto" tiempo a la ganancia sintonizada, se espera que el sistema adaptable comporte de manera similar al modelo, el cual se escoge de tal manera que se cumplan ciertas propiedades deseadas (e.g., robustez y desempeño). Por tanto, el problema de robustez del sistema adaptable se resuelve como consecuencia de la convergencia de los parámetros de controlador.

4.4.1 Ley de Adaptación con Switcheo

Consideremos el controlador de modelo referencia (2.4). El vector de parámetros de controlador $\theta(t)$ es ajustado con la siguiente ley de adaptación

$$\theta_k(t) = \begin{cases} \theta_0 & 0 \leq t < t_0 \\ \theta^{-1}(t) \theta_0 & t \geq t_0 \end{cases} \quad (10)$$

donde

$$\theta_0(t) = (C^T P_0^{-1} C)^{-1} C^T P_0^{-1} y(t) \quad ; \quad \theta_0(0) = \theta_0 \quad (11)$$

$$P_0(t) = (C^T P_0^{-1} C)^{-1} C^T P_0^{-1} \quad ; \quad P_0(0) = P_0 \quad (12)$$

$$y_f(t) = \theta_0^T \phi(t) \quad (13)$$

y $\phi(t)$ es el vector de seguimiento (cc. (2.6)) y $\theta_0(t)$ es el regresor filtrado (cc. (3.1e)). θ_0 es el mejor estimador a priori de θ_0 y t_0 es el tiempo de swicheo el cual es determinado mediante el monitoreo de las mediciones:

$$|y(t) - y_f(t)| \geq \alpha \quad (2)$$

para alguna constante positiva α .

Comentario 1. De las ecc. (1) y (2) se observa que la ley de adaptación (1) consiste en dos pasos: primero el sistema opera con el controlador fijo θ_0 (el cual no necesariamente estabiliza la planta) mientras monitorea las mediciones a través de la matriz $P_0(t)$. Una vez la condición SE (cc. (2.12)) se cumple (cc. (2)), la ley de adaptación (1) hace un swicheo y empieza a adaptar los parámetros. La idea de ajustar los parámetros en el momento cuando se disponga alguna "nueva" información no es novedosa, (e.g., Khalil et al 1985). (Saf, Sasthy (1973)), lo atractivo de la ley de adaptación (1) es que el tiempo de convergencia de parámetros es finito en el caso ideal y la implementación de la ley se puede realizar en una forma estándar de LSR (Comentario 2 a continuación).

4.4.2 Análisis de Convergencia y Estabilidad

El siguiente lema resume la propiedad de convergencia de la ley de adaptación (1).

Lema 1. Considérese la planta (2.1) y la ley de adaptación (1). Supóngase que la planta está libre de dinámicas no-modeladas y ruidos acotados ($\mu=0$) y $e(0)=0$, entonces $\theta(t)=0, \forall t \geq T_0$. Donde T_0 está dado por (2).

Prueba: La ley de adaptación (1) se puede escribir como

$$\dot{\theta}(t) = -\rho \theta(t), \quad \forall t > T_0 \quad (3)$$

Por otro lado, de las ecs. (2.5), (2.7a) y (3.1e) se tiene

$$\xi^T(t) \theta(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (4)$$

En esta última ecuación se usa el hecho de que $\mu=0$, y $e(0)=0$. Premultiplicando $\xi(t)$ en ambos miembros de la ec. (4) e integrando de 0 a t (ecs. (1b), (1c)):

$$\theta(t) \int_0^t \xi^T(\tau) \xi(\tau) d\tau = \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (5)$$

De las ecs. (3) y (5) se obtiene

$$\theta(t) \int_0^t \xi^T(\tau) \xi(\tau) d\tau = 0 \quad (6)$$

La ec. (6) junto con la condición (2) implica que

$$\theta(t) = 0, \quad \forall t > T_0$$

El siguiente teorema establece condiciones para garantizar la estabilidad del sistema adaptable cuando se aplica la ley de adaptación y la ley de control (2.4) a la planta

(2.1).

Teorema 1. Considérese el sistema adaptable (2.1)-(2.4) y (1). Supóngase que

- (SF1) La planta está libre de dinámicas no-modeladas y ruidos aditivos;
- (SF2) La condición inicial $y_m(0) = y(0)$;
- (SF3) La referencia y sus $m-1$ derivadas $r^{(i)} \in U_{\delta}$, $i=0,1,\dots,m-1$ y satisfacen

$$\int_0^{T_f} \|B_0 + B_0^T C\|^2 dt \geq \alpha \quad (7)$$

para algunas constantes positivas T_f, α .

Bajo estas condiciones, $\theta(t) \rightarrow \theta_*$, $\forall t \geq T_0$, con $0 < T_0 \leq T_f$, y $e(t) \rightarrow 0$, $\forall t \geq \omega_0 T_0$ al ∞ exponencialmente.

□□□

Para la demostración de teorema 1, primero veamos el siguiente lema.

Lema 2. Supóngase que la señal de referencia $r(t)$ cumple la suposición (SF3) en teorema 1, entonces la condición SE (2) se satisface para alguna $0 < T_0 \leq T_f$.

□□□

Prueba: De la ec. (3.1e), el regresor filtrado $\lambda(t)$ se puede expresar como

$$\lambda(t) = H_0^T(p) \theta(t) \quad (8a)$$

donde

$$H_0^0(p) = \begin{bmatrix} F \\ 1 \\ G_0 \end{bmatrix} \frac{G_m^0(p)}{K(p) = G_1^0(p)G_2^0(p)G_3^0(p)G_4^0(p)} \quad (8b)$$

y $G_i^0(p)$ están definidos en (2.5.3c). La alcanzabilidad de (8a) es garantizada por las suposiciones de que (A_f, b_f) es controlable y $G_1^0(p), G_2^0(p)$ son coprimos. En vista de (SF3) en Teorema 1, $t \in SE(\alpha, T_0)$ para alguna constante $0 < T_0 \leq T_f$ (Nordström, Sastry 1986).

Lema de Teorema 1. De acuerdo con Lema 1 y Lema 2, bajo las condiciones (SF1)-(SF3), $\theta(t) = 0, \forall t > T_0$. En el intervalo $[0, T_0]$, como todas las señales en el sistema son funciones "suaves" en el tiempo, el tiempo de escape es infinito. Por lo tanto, todas las señales son acotadas en este intervalo.

Por otro lado, de las ecs. (2.7a) y (2.10a), para $t > T_0$, se tiene

$$|p(t)| \leq |e(t, T_0)| e^{\lambda_m t} \quad \text{al } t \rightarrow \infty$$

y

$$\|u(t)\| \leq \|u(t, T_0)\| e^{-\lambda_1 t} \quad \text{al } t \rightarrow \infty$$

donde λ_m y $\lambda_1 > 0$ son números reales más grandes tales que $G_m(p - \lambda_m)$ y $G_1(p - \lambda_1)$ son estables. De aquí, todas las señales en el sistema adaptable son acotadas.

Comentario 2. Es fácil ver de la ec. (4) que el tiempo finito de convergencia de parámetros solo se logra cuando la condición inicial $\theta(0)$ es exactamente medida y bajo condiciones ideales (p, T_0) ideales, es decir, condiciones ideales, la convergencia

es exponencial si el regresor filtrado cumple la condición PE. En este caso, la ley de adaptación (1) no debe detenerse después de T_0 . Afortunadamente, esta ley puede implementarse de una forma estándar del ISG como sigue: derivando la ec. (3) con respecto a tiempo y usando las ecs. (1) se obtiene

$$\dot{P}(t) = -P(t) \left[\frac{1}{T_0} + \frac{1}{T_0} \frac{P(t)}{P(t)} \right] + \frac{1}{T_0} P(t) \frac{1}{P(t)} - \frac{1}{T_0} P(t)$$

la cual se puede escribir como, $\forall t \geq T_0$

$$\dot{P}(t) = -\frac{1}{T_0} P(t) \left[1 + \frac{P(t)}{P(t)} \right] + \frac{1}{T_0} P(t) \frac{1}{P(t)} - \frac{1}{T_0} P(t) \quad (5a)$$

$$\dot{P}(t) = -\frac{1}{T_0} P(t) \left[1 + \frac{P(t)}{P(t)} \right] + \frac{1}{T_0} P(t) \frac{1}{P(t)} - \frac{1}{T_0} P(t) \quad (5b)$$

donde $e_j(t)$ es el error aumentado definido en (3.10).

CAPITULO VI. CONCLUSION

En este trabajo se ha desarrollado una serie de nuevas leyes de adaptación para el control adaptable robusto. Nuevos modelos de error fueron derivados en Capítulo II y III. En los cuales las señales entran en una forma normalizada, lo cual permite obtener los resultados de estabilidad robusta sin asumir los siguiente argumentos: i) el conocimiento del orden y el orden relativo de la planta, ii) modelo para las dinámicas no-modeladas, iii) linealización alrededor de un sistema estable, iv) propiedades de excitación de las señales en la malla de adaptación.

Suponiendo una separación de las dinámicas no-modeladas, se demostraron en Capítulo IV, bajo la condición ϵ -PE la estabilidad de los sistemas de control adaptable en los cuales las mediciones pasadas son incorporadas en la adaptación de los parámetros de controlador.

Trabajos futuros para seguir los problemas estudiados en este tesis son:

.Evaluación analítica del desempeño de los sistemas adaptables en el problema de sintonización (Capítulo II) y controlador de precompensación (Capítulo V).

.Caracterización de una clase de plantas que se puede estabilizar mediante un controlador adaptable y sólo con la información *a priori* del orden de un controlador estabilizante, encontrar la ley de adaptación que se lleva a cabo la estabilización de esta clase de plantas.

.Estabilidad en el sistema de control adaptable que se usa las mediciones pasadas (Capítulo IV) sin asumir las propiedades de excitación de las señales en la malla de adaptación, o encontrar una relación de excitación persistente en el regresor normalizado con la excitación de la señal de referencia en la presencia de dinámicas no-modeladas y ruidos acotados.

El problema de estabilidad de un sistema adaptable de precompensación fue discutido en Capítulo V. Se estableció la estabilidad en términos de los contenidos frecuenciales de la señal de referencia y la repuesta en frecuencia del sistema en malla cerrada con un controlador de malla.

La formulación del problema de control adaptable robusto en el dominio de frecuencia se estudió en [Tang 1988], [Tang, Ortega 1988], en que se combinan las síntesis de control robusto desarrolladas en el dominio de frecuencia y técnicas de procesamiento digitales para resolver los problemas que se formulan en este trabajo.

APENDICE A.

Lema A1 Considerése la señal de normalización (2.2.5). Sea

$$V(t) = H(\rho)w(t) \quad (a1)$$

donde $V(t) \in \mathbb{R}^n$, $w(t) \in \mathbb{R}$, $|w(t)| \leq g(t)$, y $H(\rho)$ es LIT cuya respuesta al impulso $h(t)$ satisface

$$\|h(t)\| \leq K e^{-\lambda t}, \quad K, \lambda > 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (a2)$$

Si σ_0 en la ec. (2.2.5) cumple

$$0 < \sigma_0 \leq \lambda \quad (a3)$$

entonces

$$\|V(t)\|/\rho(t) \leq K_V \quad (a5)$$

para alguna constante $K_V > 0$.

□□□

Prueba: De la ec. (a1)

$$\begin{aligned} \|V(t)\| &\leq \int_0^t \|h(t-\tau)\| |w(\tau)| d\tau + \|V(0)\| \|h(t, 0)\| \\ &\leq K \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} |w(\tau)| d\tau + K \|V(0)\| e^{-\lambda t} \\ &\leq K \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} |g(\tau)| d\tau + K \|V(0)\| e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (a6)$$

Por otro lado, de la ec. (2.2.5) se tiene

$$\rho(t) = \rho(0) e^{-\sigma_0 t} + \int_0^t e^{-\sigma_0(t-\tau)} |g(\tau)| d\tau \quad (a7)$$

Comparando (a6) y (a7) y en vista de (a3) se obtiene el resultado.

■ ■ ■

Lema A2 $\exists K_1, K_2 > 0$, tales que $|\eta(t)|/p(t) \leq K_1$, $\|\dot{\eta}(t)\|/p(t) \leq K_2$.

□ □ □

Prueba: Sigue de las suposiciones sobre la planta (Subsección 4.2.1) las ecs. (4.2.7c), (4.3.1e). Donde K_1 depende sólo de la planta (4.2.2a) y el filtro (4.2.4f), y K_2 depende del modelo (4.2.3b).

■ ■ ■

REFERENCIAS

Anderson, B. D. O., (1977) "Exponential stability of linear equations arising in adaptive identification," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-22, pp83-88

Anderson, B. D. O., Bitmead, R. R., Johnson, C. R. Jr., Kokotovic, P. V., Kosut, R., L., Mareels, I. M. Y., Praly, L., Riedle, B. D., (1986) *Stability of Adaptive Systems: Passivity and Averaging Analysis*, MIT Press

Anderson, B. D. O., Johnstone, R. M., (1981) "Robust Lyapunov stability results and adaptive systems," *20th IEEE Confr. Decision Contr.*, San Diego, USA

Aström, K. J., Wittenmark, B., (1973) "On self tuning regulator," *Automatica*, Vol. 9, pp185-199

Aström, K. J., (1983) "Analysis of Rohrs counter-example of adaptive control," *22th IEEE Confr. Decision Contr.*, San Antonio, USA

Bai, E. W., Sastry, S. S., (1987) "Global stability proofs for continuous-time indirect adaptive control schemes," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-32, pp537-543

Boyd, S., Sastry, S. S., (1986) "Necessary and sufficient conditions for parameter convergence in adaptive control," *Automatica*, Vol. 22, pp629-639

Desoer, C. A., Vidyasagar, M., (1975) *Feedback Systems: Input Output Properties*, Academic Press

Elliot, H., Cristi, R., Das, M., (1985) "Global stability of adaptive pole placement algorithms," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-30, pp348-356

Goodwin, G. C., Ramadge, P. J., Caines, P. E., (1980) "Discret time multivariable adaptive control," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-25, pp449-456

Hale, J. K., (1980) *Ordinary Differential Equations*. Kreiger, Molaban, Florida

Harris, C. J., Valenca, J. M. E., (1983) *The Stability of Input Output Dynamical Systems*, Academic Press

Ioannou, P. A., Kokotovic, P. V., (1983) *Adaptive Systems with Reduced Models*, Springer-Verlag, NY

Ioannou, P. A., Kokotovic, P. V., (1984) "Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control," *Automatica*, Vol. 20, pp583-594

Ioannou, P. A., Tsakalis, K., (1986) "A robust adaptive direct controller," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-31, pp1033-1043

Kailath, T., (1980) *Linear Systems*, Prentice Hall

Kosut, R. L., Friedlander, B., (1985) "Robust adaptive control: conditions for global stability," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-30, pp610-624

Kosut, R., L., Anderson, B. D. O., Mareels, I. M. Y., (1987) "Stability theory for adaptive system: method of averaging and persistency of excitation," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-32, pp26-34

Krause, J. K., Khargonegar, P. P., (1987a) "Thorough use of

information in deterministic adaptive control," *IFAC 10th World Congr. Automat. Contr.*, Munich FRG

Krause, J. K., Khargonekar, P. P., (1987b) "Parameter Information content of measurable signals in direct adaptive control," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-32

Kreisselmeier, G., (1977) "Adaptive observer with exponential rate of convergence," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-22, pp2-9

Kreisselmeier, G., Anderson, B. D. O., (1986) "Robust model reference adaptive control," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-31, pp127-133

Kreisselmeier, G., Narendra, K. S., (1982) "Stable model reference adaptive control in the presence of bounded disturbances," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-27, pp1169-1175

Mason, J. E., Bai, E. W., Fu, L. C., Bodson, M., Sastry, S. S., (1987) "Analysis of adaptive identifiers in the presence of unmodeled dynamics: averaging and tuned parameters," *26th Confr. Decision Contr.*, Los Angeles, USA

Matersson, B., (1985) "The order of any stabilizing regulator is sufficient a priori information for adaptive stabilization," *Syst. & Contr. Lett.*, Vol. 6

Morgan, A. P., Narendra, K. S., (1977) "On the uniform asymptotic stability of certain linear non autonomous differential equations," *SIAM J. Contr. Optim.*, Vol. 15

Morse, A. S., (1980) "Global stability of parameter adaptive control system," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-25, pp433-440

Narendra, K. S., Annaswamy, A. M., (1986a) "Robust adaptive control in the presence of bounded disturbances," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-31, pp306-315

Narendra, K. S., Annaswamy, A. M., (1986b) "Robust adaptive control," Plenum Press

Narendra, K. S., Annaswamy, A. M., (1987a) "A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-32, pp134-145

Narendra, K. S., Annaswamy, A. M., (1987b) "Persistent excitation in adaptive systems," *Int. J. Contr.*, Vol. 45

Narendra, K. S., Khalifa, I., H., Annaswamy, A. M., (1985) "Error models for stable hybrid adaptive systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-30, pp339-347

Narendra, K. S., Lin, Y. H., Valavani, L. S., (1980) "Stable adaptive controller design — part II: proof of stability," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-25, pp440-448

Narendra, K. S., Valavani, L. S., (1978) "Stable adaptive controller design — direct control," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-23, pp570-583

Nordström, N., Sastry, S. S., (1986) "Persistency of excitation in possibly unstable continuous time systems and parameter convergence in adaptive identification," *2nd IFAC Workshop Adpat. Syst. Contr. & Signal Processing*, Lund, Sweden

Ortega, R., (1988) "An on-line least-square parameter estimator with finite convergence time," *Proc. IEEE*

Ortega, R., Kelly, R., (1985) "On the stability-instability conditions of a simple robust adaptive servo controller," *24th Conf. Decision Contr.*, Florida, USA

Ortega, R., Praly, L., Landau, I., (1985) "Robustness of discrete-time adaptive controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*

Vol. AC-30, pp1179-1187

Ortega, R., Praly, L., Tang, Y., (1987) "Direct adaptive tuning of robust controllers with guaranteed stability properties," *Syst. & Contr. Lett.*, Vol. 7

Ortega, R., Tang, Y., (1986) "Instabilities in adaptive control systems," *INRIA Lecture Notes Contr. Infor. Sc.*, Vol. 83, Springer-verlag

Ortega, R., Tang, Y., (1987) "Robustness of adaptive controllers: a survey," *Automatica* 1988 (va a aparecer)

Ortega, R., Tang, Y., Praly, L., (1987) "On bounded adaptive control with reduced prior knowledge," *UNAM Rep. Interno*, (sometido a *IEEE Trans Autom. Contr.*)

Peterson, B. B., Narendra, K. S., (1982) "Bounded error adaptive control," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-27, pp1161-1168

Praly, L., (1983) "Robustness of model reference adaptive control," *the 3rd Yale Workshop on Application of Adapt. Syst. Theory*, Yale Univer. USA

Riedle, B., Kokotovic, P. V., (1984) "A stability-instability boundary for disturbance-free slow adaptation and unmodeled dynamics," *23rd IEEE Conf. Decision Contr.*, Las Vegas, USA

Rohrs, C., Valavani, L. S., Athans, M., Stein, G., (1981) "Analytical verification of undesirable properties of direct model reference adaptive control algorithms," *IEEE Conf. Decision Contr.*, San Diego, USA

Sastry, S. S., (1984) "Model reference adaptive control: stability, parameter convergence and robustness," *I.H.A. J. Contr. Infor.* Vol. 1, pp27-66

- Tang, Y., (1988a) "A new algorithm for identification of perturbed plants", *American Control Conference*, Atlanta, USA
- Tang, Y., (1988b) "Robust adaptive control — averaging gradient algorithm," *8th International Conf. Analy. Optim. Systems*, INRIA, Antibes, Francia
- Tang, Y. (1988c) "Frequency domain approach to robust adaptive control," *UNAH, Rep. Interno*. (sometido a *IEEE Trans. Autom. Contr.*)
- Tang, Y., Kelly, R. (1988) "Direct adaptive control with finite parameter convergence time," *VI Coloquio Contr. Automt. AMCA/CINVESTAV Ciudad de México*
- Tang, Y., Ortega, R., (1987a) "Performance improvement of linear controllers via adaptive tuning," *Int. J. Adapt. Contr. Signal Proc.* (va a aparecer)
- Tang, Y., Ortega, R., (1987b) "Sintonización adaptable de sistemas lineales variantes en el tiempo," *VI Coloquio Contr. Automt. AMCA/CINVESTAV Ciudad de México*
- Tang, Y., Ortega, R., (1987c) "On the adaptive stabilization of linear time-varying systems," *26th IEEE Conf. Decision Contr.* LOS Angeles, USA
- Tang, Y., Ortega, R., (1987d) "A robust feedforward adaptive control," *VI Coloquio Contr. Automt. AMCA/CINVESTAV Ciudad de México*
- Tang, Y., Ortega, R., Kelly, R., (1987) "Adaptive control of a heat exchanger," *IEEE Contr. Syst.* Vol. 7
- Tang, Y. Ortega, R., (1988) "Adaptive frequency response tuning," *UNAH, Rep. Interno*, (sometido a *Automatica*)

Tsakalis, K., Ioannou, P. A., (1987) "Adaptive control of linear time-varying plants," *Automatica* Vol. 23

Vidyasagar, M., (1978) *Nonlinear Systems Analysis* Prentice-Hall

Zame, G., (1966) "On the input output stability of nonlinear time-varying feedback systems, Part I, II," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-11 pp228-238, pp465-477