

42
2y.

**FUNCIONES
DIFERENCIABLES DONDE SEA
PERO
MONOTONAS EN NINGUNA PARTE**

CARMEN ROCIO VITE GONZALEZ

**TESIS PARA OBTENER
EL TITULO DE
M A T E M A T I C A**



**FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

MEXICO, D. F 1988



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

Prólogo (XI)

Notación (XVII)

Convenciones (XXI)

■ PRIMERA PARTE

PRELIMINARES

Capítulo 1.- FUNCIONES DE BAIRE (3)

Capítulo 2.- TEOREMA DE LA CATEGORIA DE BAIRE (13)

Capítulo 3.- TOPOLOGIA DE LA DENSIDAD Y TEOREMA DE ZAHORSKI (19)

3.1 Densidad 19.

3.2 Funciones Aproximadamente Continuas y Topología de la
Densidad 27.

3.3 Teorema de Zahorski 39.

■ ■ SEGUNDA PARTE

EXISTENCIA DE FUNCIONES DIFERENCIABLES MONOTONAS EN NINGUNA PARTE

Capítulo 4,- PRUEBA DE WEIL (69)

Capítulo 5,- PRUEBA DE GOFFMAN (85)

Capítulo 6,- PRUEBA DE PETRUSKA Y LACZKOVICH (89)

Capítulo 7,- PRUEBA DE BRUCKNER, MARIK Y WEIL (99)

Bibliografía (115)

PROLOGO

La intuición geométrica es muy útil cuando se estudian los principales conceptos del cálculo (límite, continuidad, diferenciabilidad, integración, etc.).

Sin embargo todos hemos enfrentado alguna vez situaciones que chocan con nuestra intuición.

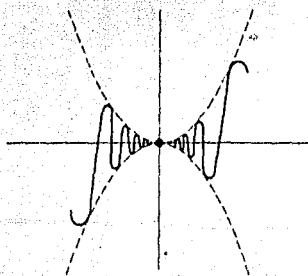
Por ejemplo, en un primer curso de cálculo, nos encontramos con la función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

$$f(x) = 0 \quad \text{si } x = 0$$

que es diferenciable en el origen.



Más tarde en un curso de análisis estudiamos la función de Weierstrass, una función continua que no es diferenciable en ningún punto ([20], teo. 7.18).

En este trabajo trataremos con una situación de este tipo, aunque no tan elemental como los ejemplos anteriores.

Analizaremos algunas pruebas sobre la existencia de funciones reales que están definidas y son diferenciables en un intervalo, pero que sin embargo, no existe ningún intervalo en el que sean crecientes o decrecientes.

Con respecto a este problema en [12] Hobson señala:

"El primer intento para construir una función con un máximo y un mínimo en cada intervalo que tuviera cociente diferencial finito en cada punto fué hecho por Hankel (1882). La función que construyó, sin embargo, no era una función que oscilara en cada intervalo. Du Bois-Reymond había manifestado ya en 1875, que una función así no podía existir, pero Dini consideraba que la existencia de tales funciones era altamente probable. La primera construcción válida de una función de este tipo se debe a Köpcke, quien primero construyó una función oscilante en cada intervalo, derivable por la derecha y derivable por la izquierda en cada punto, más tarde obtuvo una función que tenía las propiedades deseadas. La construcción de Köpcke fué modificada por Pereno". En su trabajo, Hobson presenta una prueba basada en la modificación de Pereno.

Casi cincuenta años después, Bruckner escribe en [4]:

"En 1887 Köpcke dió una construcción de una función de este tipo. Discutiendo el trabajo de Köpcke, Denjoy dió en 1915: "En 1887 Köpcke dió en Math-Annalen un ejemplo de una función que tenía en cada punto (o así lo pensaba él) una derivada la cual se

anulaba y tomaba ambos signos en cada intervalo contenido en su dominio de definición. Este geómetra retomó el problema varias veces corrigiendo, en cada ocasión, los errores de las pruebas anteriores. La cuestión de funciones diferenciables monótonas en ninguna parte ha originado también muchos otros trabajos".

Las diferentes pruebas a que Denjoy se refería eran demasiado complicadas. Al respecto en el trabajo de Denjoy [referencial], él había dado tres construcciones diferentes. Antes de dar una construcción del tipo Köpcke, aclaraba al lector que la claridad y simplicidad de esta construcción era posible gracias a las ideas de Borel y Lebesgue sobre la medida de conjuntos. Para Denjoy sus construcciones eran simples y claras. Probablemente nosotros las encontraríamos horrendas.

Hobson modificó la modificación de Pereno a la construcción de Köpcke en su libro [12]. Este fué publicado cuarenta años después de la primera corrección de Köpcke, treinta años después de la modificación de Pereno y cincuenta años después de el simple y claro desarrollo de Denjoy. ¡La modificación de Hobson requirió diez páginas!.

En la actualidad existen varias pruebas accesibles. Algunas son de naturaleza constructiva, como la bien conocida construcción de Zahorski [23], y las recientes y relativamente elementales construcciones de Katznelson y Stromberg [13] y Blazek, Borak y Maly [referencial]."

En [4] Bruckner bosqueja siete pruebas con técnicas bastante modernas no disponibles para Hobson. En este trabajo se presentan cuatro de estas pruebas. La finalidad es reunir el material en

xiv torno al cual giran estas pruebas (material que se encuentra disperso en un gran número de publicaciones) y presentarlo con lenguaje uniforme; de tal manera que las pruebas resulten accesibles a quienes que hayan estudiado teoría de la medida. Es por este motivo que la primera parte de este trabajo está dedicada a presentar aquellos temas fundamentales para la comprensión de tales pruebas.

Las cuatro pruebas que analizaremos son debidas a 1) Weil [22], 2) Goffman [9], 3) Petruska y Laczkovich [14] y 4) Bruckner, Marik y Weil [5]; publicadas en 1976, 1975, 1974 y 1982, respectivamente.

La prueba de Weil es la más clara y elemental de las cuatro pruebas, aunque es una prueba indirecta, puesto que la existencia de la función se deduce del Teorema de la Categoría de Baire. Entretanto, las otras tres pruebas son de naturaleza constructiva, tan constructiva como quiera entenderse la construcción de una función mediante un procedimiento similar al usado en el lema de Urysohn en Topología.

La primera parte (tres primeros capítulos), ya se dijo arriba, son preliminares. El primer capítulo se refiere a las *Funciones de Baire 1* (que son límite puntual de funciones continuas), el objetivo es presentar una caracterización de estas funciones que será de gran utilidad en las cuatro pruebas. El segundo capítulo es solamente una prueba del *Teorema de la Categoría de Baire*. El capítulo tres, es el más extenso, está dividido en tres secciones en las cuales se abordan temas como *Densidad de un conjunto en un punto*, *Funciones Aproximadamente Continuas*, *Topología de la Densidad* y el *Teorema de Zahorski*. En la segunda parte (capítulos

4, 5, 6 y 7) es en donde se presentan las pruebas sobre la existencia de funciones diferenciables monótonas en ninguna parte, cada capítulo corresponde a una prueba y al principio de cada uno se da un ligero esbozo de la demostración.

Se incluye a continuación, una lista de los símbolos más usados, con una breve definición y también se da una lista de convenciones, que pueden ser de utilidad en la lectura del texto.

NOTACION

$\rightarrow$	Converge.
$\xrightarrow{u}$	Converge uniformemente.
$\max$	Máximo.
$\min$	Mínimo.
$\inf$	Infimo.
$\sup$	Supremo.
A^c	Complemento del conjunto A .
A^-	Cerradura del conjunto A .
A'	Conjunto derivado de A . (Conjunto de puntos de acumulación de A).
A^{co}	Conjunto de puntos de condensación de A .
$A \Delta B$	Diferencia simétrica de los conjuntos A y B ($A \cup B - A \cap B$).
G_δ	Un conjunto es G_δ si es intersección numerable de conjuntos abiertos.

$V_\varepsilon(x)$	Un conjunto del tipo F_σ es una unión numerable de conjuntos cerrados.
$V_\varepsilon^*(x)$	Bola de radio ε y centro en el punto x .
$A\{f = \alpha\}$	Bola agujerada de radio ε con centro x .
$A\{f \leq \alpha\}$	$\{x \in A; f(x) = \alpha\}$.
$A\{f \geq \alpha\}$	$\{x \in A; f(x) \leq \alpha\}$.
$f _A$	$\{x \in A; f(x) \geq \alpha\}$.
$dis(x, y)$	Restricción de la función f al conjunto A .
$dis(x, A)$	Distancia del punto x al punto y .
$diam(A)$	Distancia del punto x al conjunto A .
$l(J)$	Diámetro del conjunto A .
$m^*(A)$	Longitud del intervalo J .
$m_*(A)$	Medida exterior del conjunto A , según Lebesgue.
$m(A)$	Medida interior del conjunto A , según Lebesgue.
$\int_A f$	Medida del conjunto A según Lebesgue.
	Integral de f sobre A (integral de Lebesgue).

La notación que a continuación se da, forma parte del material de este trabajo, por tal motivo, después de señalar el significado de un símbolo se indica la página en que se define tal concepto.

$\bar{\phi}(A, x)$	Densidad superior del conjunto A en el punto x .	(20)
$\underline{\phi}(A, x)$	Densidad inferior del conjunto A en el punto x .	(20)
$\phi(A, x)$	Densidad del conjunto A en el punto x .	(20)
τ_d	Topología de la Densidad.	(27)
$\mathbb{R}_d$	Conjunto de los números con la Topología de la densidad.	(32)
$A \subset^* B$	$A \subset B$ y $\phi(A, x) = 1$ para todo x en A .	(54)
$\mathfrak{B}$	Conjunto de las funciones de Baire definidas en [0,1] .	(3)
$\mathfrak{U}$	Familia de las funciones aproximadamente continuas definidas en [0,1] .	(95)
Δ	$\{ f : f \text{ es derivada de alguna}$ función definida en [0,1] $\}$.	(XIX)
Δ'	$\{ f \in \Delta : f \text{ está acotada} \}$.	(69)
Δ'_o	$\{ f \in \Delta' : f \text{ se anula en}$ algún subconjunto denso $\}$.	(71)
$\mathfrak{F}_A$	Si $\mathfrak{F}$ es una familia de funciones, $\mathfrak{F}$ denota el conjunto de funciones de A en $\mathbb{R}$ que se pueden extender a un elemento de $\mathfrak{F}$.	(95)

XX

68

Subfamilia de funciones
acotadas en $\mathbb{R}$.

(95)

CONVENCIONES

- En este trabajo estudiaremos funciones reales definidas en un subconjunto de números reales, a menos que se diga otra cosa.
- Se dirá que una función es *diferenciable*, si tiene derivada finita en cada punto de su dominio, cuando otro sea el caso se dirá explícitamente.
- La medida de conjuntos será en todos los casos la *medida de Lebesgue*. De la misma manera, cuando hablemos de la integral de una función, estaremos hablando de la *integral de Lebesgue*.
- Llamaremos *nulo*, a un conjunto de medida cero.
- Por un conjunto *numerable* entenderemos un conjunto con la cardinalidad del conjunto de los números naturales.
- Diremos que un conjunto es *contable*, si es finito o numerable.

PRIMERA PARTE:

PRELIMINARES

CAPITULO 1

FUNCIONES DE BAIRE

El objetivo de este capítulo es presentar un teorema de caracterización de las funciones de Baire, este teorema, debido a Lebesgue, asegura que las funciones de Baire (límite puntual de funciones continuas) son aquellas cuyas imágenes inversas de conjuntos abiertos son del tipo F_σ . O equivalentemente, imágenes inversas de conjuntos cerrados son del tipo G_δ .

DEFINICION 1.1 Una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una función de Baire o que está en la clase Baire 1 ($\mathcal{B}$), si es límite puntual de funciones continuas.

PROPOSICION 2.2 Dada $\{H_n\}$ una sucesión de conjuntos del tipo F_σ existe otra sucesión $\{F_n\}$ también de F_σ 's tal que:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

$$F_n \subset H_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$F_n \cap F_m = \emptyset \quad \text{si } m \neq n.$$

Demostración: Sabemos que H_n es de la forma:

$$H_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^k \text{ donde } A_n^k \text{ es cerrado para todo } k \text{ en } \mathbb{N}.$$

Sea $\sigma(n,k)$ una numeración para $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Definimos para cada i en $\mathbb{N}$, $A_n^i = A_n^k$ si $\sigma(n,k) = i$.

Ahora si $r = \sigma(n,k)$, definimos $B_n^k = A_n^k - \bigcup_{l=1}^{r-1} A_n^l$. Y también definimos $F_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_n^k$.

— Puesto que en $\mathbb{R}$ los conjuntos abiertos son del tipo F_σ cada B_n^k es un conjunto del tipo F_σ . Y entonces F_n lo es.

— $F_n \subset H_n$ puesto que, dado k en $\mathbb{N}$, $B_n^k \subset A_n^k$.

— Veamos que $F_n \cap F_m = \emptyset$ si $n \neq m$.

Basta probar que $B_n^k \cap B_m^l = \emptyset$ para todo k y l en $\mathbb{N}$.

Sean k y l en $\mathbb{N}$. Sean $\sigma(n,k) = r$ y $\sigma(m,l) = s$, $r \neq s$ ya que $n \neq m$. Supongamos (S.P.3.) que $r < s$, entonces, como $B_n^k = A_n^r - \bigcup_{i=1}^{r-1} A_n^i$ y $B_m^l = A_m^s - \bigcup_{i=1}^{s-1} A_m^i$, y $A_n^r \cap B_m^l = \emptyset$ entonces $B_n^k \cap B_m^l = \emptyset$.

— Finalmente veamos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$.

Claramente $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$.

Para ver la otra contención tomemos x en H_n para alguna n entonces $x \in A_n^k$ para alguna k en $\mathbb{N}$. Entonces existe $i = \sigma(n,k)$ tal que $x \in A_n^i$. Sea i_0 mínimo con la propiedad de que $i_0 \in A_n^i$.

Entonces

$$x \in A_{i_0}^{i_0} = \bigcup_{l=1}^{i_0-1} A_{i_0}^l.$$

Sean n_0 y k_0 (únicos) en $\mathbb{N}$ tales que $\sigma(n_0, k_0) = i_0$, esto es $A_{n_0}^{k_0} = A_{i_0}^{i_0}$. Por lo tanto $x \in B_{n_0}^{k_0} \subset F_{n_0} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. ■

LEMA 1,3 Si un intervalo $[a,b]$ es unión finita de los conjuntos ajenos $F_1, F_2, \dots, F_n$ y cada uno de estos conjuntos es un F_σ , entonces cualquier función real definida en $[a,b]$ que sea constante en cada F_k es una función de Baire.

Demostración: Sea $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c_k$ para todo x en F_k .

Supongamos que $F_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i^k$ donde cada uno de los conjuntos F_i^k es cerrado.

Para cada número natural m definimos

$$E_k^m = \bigcup_{i=1}^m F_i^k \quad \text{y} \quad E^m = \bigcup_{k=1}^n E_k^m.$$

También definimos la función $\varphi_m : E^m \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue

$$\varphi_m(x) = c_k \quad \text{si} \quad x \in E_k^m, \quad k = 1, \dots, n.$$

Puesto que la función φ_m está definida en una unión finita de conjuntos cerrados, y es constante en cada uno de estos, entonces es una función continua.

Entonces, ver ([6], cap.VII, teo.5.1) o ([20], cap.IV, ejer.5), es posible construir una extensión continua $f_m : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ de φ_m .

Veamos que $\{f_m\}_m$ converge puntualmente a f . Sea x en $[a,b]$ entonces $x \in F_i^k \subset E_k^i$ para algunas i y k en $\mathbb{N}$. Ahora, puesto que la sucesión de conjuntos $\{E_{k-m}^m\}$ es creciente, se tiene que $x \in E_k^m \subset E^m$ para todo $m > i$. Se deduce que $\varphi_m(x) = c_k$ para todo $m > i$. Por lo tanto $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x) = f(x)$. ■

LEMA 1.4 Sean $A \subset \mathbb{R}$ y f una función de Baire definida en A . Si M es una cota para f , entonces f es límite (puntual) de funciones continuas acotadas por M .

Demostración: Sea $\{\varphi_n\}_n$ una sucesión de funciones continuas definidas en A tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x),$$

para todo x en A .

Dado n en $\mathbb{N}$, definimos $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$f_n(x) = \min \left\{ \max \{ \varphi_n(x), -M \}, M \right\}. \text{ Claramente esta función es continua. Y dado } x \text{ en } A, \max \{ \varphi_n(x), -M \} \geq -M, \text{ así que } -M \leq f_n(x) \leq M.$$

Por otro lado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \min \left\{ \max \{ f(x), -M \}, M \right\}$$

(por que los máximos y mínimos respetan límites). Pero $-M \leq f(x) \leq M$, de modo que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. ■

LEMA 1.5 Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones de Baire definidas en A . Y sea $\{M_n\}_n$ una sucesión de números positivos tales que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo n en $\mathbb{N}$ y todo x en A . Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

converge, entonces

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

es una función de Baire.

Demostración: Ya que $|f_n(x)| \leq M_n$, tenemos que entonces que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge para todo x en A , de modo que φ está bien definida.

De acuerdo con el lema anterior, para cada n en $\mathbb{N}$, existe una sucesión $\{f_n^k\}_k$ de funciones continuas en A tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_n^k(x) = f_n(x)$$

y $|f_n^k(x)| \leq M_n$ para todo x en A .

Dado n en $\mathbb{N}$, definimos $\varphi_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera $\varphi_n(x) = f_1^n(x) + \dots + f_n^n(x)$. φ_n es continua, por supuesto.

Veamos que $\{\varphi_n\}_n$ converge puntualmente a φ :

Sean x en A y $\varepsilon > 0$. Elegimos N_0 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} M_n < \varepsilon / 3.$$

Dado $n > N_0$, tenemos

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| &= \left| \sum_{l=1}^n f_l^n(x) - \sum_{l=1}^{\infty} f_l(x) \right| \leq \\ &\sum_{l=1}^{N_0} |f_l^n(x) - f_l(x)| + \sum_{l=N_0+1}^n |f_l^n(x)| + \sum_{l=N_0+1}^{\infty} |f_l(x)| \leq \\ &\sum_{l=1}^{N_0} |f_l^n(x) - f_l(x)| + \sum_{l=N_0+1}^n M_n + \sum_{l=N_0+1}^{\infty} M_n < \\ &\sum_{l=1}^{N_0} |f_l^n(x) - f_l(x)| + \frac{2}{3} \varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora, ya que

$$\sum_{l=1}^{N_0} |f_l^n(x) - f_l(x)|$$

tiende a cero cuando n tiende a infinito, existe N en $\mathbb{N}$ tal que $N > N_0$ y esta suma es menor que $\varepsilon/3$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Es decir $\{\varphi_n\}_n$ converge a φ . ■

TEOREMA 1.6 (LÍMITE UNIFORME DE FUNCIONES DE BAIRE ES DE BAIRE).

Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones definidas en $A \subset \mathbb{R}$, donde cada una de ellas es límite (puntual) de funciones continuas. Si $f_n \xrightarrow{u} f$ entonces f también es límite puntual de alguna sucesión de funciones continuas.

Demostración: Como $f_n \xrightarrow{u} f$ existe $N(1)$ en $\mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < 1/2$ para cualesquiera n y m mayores o iguales que $N(1)$ y para todo x en A .

Del mismo modo existe $N(2)$ en $\mathbb{N}$ tal que $N_2 > N_1$ y $|f_n(x) - f_m(x)| < 1/2^2$ para todos n y m mayores o iguales que $N(2)$ y para todo x en A .

Procediendo de esta manera es posible construir una sucesión $\{N(n)\}_n$ de números naturales tales que $N(1) < N(2) < \dots$ y $|f_{N(n+1)}(x) - f_{N(n)}(x)| < 1/2^n$ para todo x en A y todo n en $\mathbb{N}$.

Usando el lema anterior tenemos que la función

$$\sum_{n=1}^{\infty} [f_{N(n+1)}(x) - f_{N(n)}(x)]$$

es una función de Baire.

Ya que la $(n-1)$ -ésima suma parcial de esta serie es:

$$\begin{aligned} & [f_{N(n)}(x) - f_{N(n-1)}(x)] + \\ & [f_{N(n-1)}(x) - f_{N(n-2)}(x)] + \dots + [f_{N(2)}(x) - f_{N(1)}(x)] = \\ & f_{N(n)}(x) - f_{N(1)}(x) \end{aligned}$$

tenemos que esta serie converge a $f(x) - f_{N(1)}(x)$. Por lo tanto $f(x) - f_{N(1)}(x)$ es una función de Baire y en consecuencia $f(x)$ lo es. ■

TEOREMA 1.7 Una condición necesaria y suficiente para que una función f definida en $A \subset \mathbb{R}$, sea una función de Baire es que los conjuntos $\{x \in A : f(x) > \alpha\}$ y $\{x \in A : f(x) < \alpha\}$ sean conjuntos del tipo F_σ , para α arbitrario.

Demostración:

(Necesidad): Supongamos que f es una función de Baire, es decir

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

con f_n continua para cada n en $\mathbb{N}$.

$$\text{Sean } F_n^k = \{x \in A : f_n(x) \leq \alpha - \frac{1}{k}\} \quad \text{y} \quad S_m^k = \bigcap_{n=m}^{\infty} F_n^k.$$

Tenemos entonces lo siguiente:

$$S_m^k = \{x \in A : f_n(x) \leq \alpha - \frac{1}{k}, \quad \forall n \geq m\}$$

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} S_m^k = \{x \in A : \exists m \ni f_n(x) \leq \alpha - \frac{1}{k}, \quad \forall n \geq m\}$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m^k = \{x \in A : \exists k \ni \exists m \ni f_n(x) \leq \alpha - \frac{1}{k}, \quad \forall n \geq m\}$$

pero puesto que $f_n \rightarrow f$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m^k = \{x \in A : \exists k \ni f(x) \leq \alpha - \frac{1}{k}\},$$

de donde

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m^k = \{x \in A : f(x) < \alpha\}$$

ahora, puesto que f_n es continua F_n^k es cerrado y por ende los S_m^k 's lo son, se concluye entonces que $\{x \in A : f(x) < \alpha\}$ es del tipo F_σ .

Como $\{x \in A : f(x) > \alpha\} = \{x \in A : -f(x) < -\alpha\}$, por lo que ya probamos $\{x \in A : f(x) > \alpha\}$ es también un F_σ .

(Suficiencia): Consideremos primero el caso en que f es una función acotada, esto es $m < f(x) < M$, m, M en $\mathbb{R}$.

Sea n en $\mathbb{N}$ y consideremos la partición

$$a_0 = m, a_1 = a_0 + \frac{M - m}{n}, \dots, a_n = M$$

Sean

$$A_k = \{x : a_{k-1} < f(x) < a_{k+1}\} \quad k = 1, \dots, n-1.$$

$$A_0 = \{x : f(x) < a_1\}$$

$$A_n = \{x : a_{n-1} < f(x)\}$$

Por hipótesis cada A_k , $k = 0, \dots, n$, es un F_σ y $A = \bigcup_{k=0}^n A_k$. De acuerdo con la proposición 1.2, existe otra descomposición $A = \bigcup_{k=0}^n B_k$ de conjuntos B_k del tipo F_σ , ajenos dos a dos y tales que $B_k \subset A_k$, $k = 0, \dots, n$.

Consideremos la siguiente función

$$f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = a_k \text{ para } x \text{ en } B_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Con base en el lema 1.3 concluimos que f_n es una función de Baire.

Sea $x_0 \in A$ entonces $x_0 \in B_k \subset A_k$ para alguna k entre 0 y n . Esto significa que $f_n(x_0) = a_k$ y $a_{k-1} < f(x_0) < a_{k+1}$ entonces $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{M - m}{n}$. Se concluye entonces que $f_n \xrightarrow{u} f$.

De acuerdo con el teorema 1.6 f es una función de Baire.

Consideremos ahora el caso general. Sea $g(x) = \arctan f(x)$. Entonces g es una función acotada. Y además tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \{x : g(x) > \alpha\} &= \{x : f(x) > \tan \alpha\} & \text{si } \alpha \in [-\pi/2, \pi/2) \\ \{x : g(x) > \alpha\} &= A & \text{si } \alpha < -\pi/2 \\ \{x : g(x) > \alpha\} &= \emptyset & \text{si } \alpha > \pi/2 \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $\{x : g(x) > \alpha\}$ es un F_σ (A es un F_σ ya que $A = f^{-1}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(-\infty, n)$).

De manera similar concluimos que $\{x : g(x) < \alpha\}$ es un F_σ . Por lo que ya probamos g es una función de Baire.

Pero $f = \tan g(x)$ y como la función tangente es continua, entonces f es una función de Baire. ■

COROLARIO 1.8 Una condición necesaria y suficiente para que una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sea una función de Baire es que los conjuntos $\{x \in A : f(x) \leq a\}$ y $\{x \in A : f(x) \geq a\}$ sean G_δ para a arbitraria en $\mathbb{R}$.

TEOREMA 1.9 Si $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una derivada entonces f es una función de Baire.

Demostración: Definimos para cada n en $\mathbb{N}$, $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ \frac{f(1) - f(1 - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} & \text{si } 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

donde f es una primitiva de f . Para cada n , f_n es una función continua bien definida. Además $f_n(x) \rightarrow f'(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$, para cada x en $[0,1]$. Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f'$. ■

CAPÍTULO 2

TEOREMA DE LA CATEGORIA DE BAIRE

En este capítulo presentamos las versiones del Teorema de la Categoría de Baire, que usaremos en el capítulo IV (prueba de Weil).

DEFINICION 2.1 En un espacio métrico X , un subconjunto D , es llamado denso en ninguna parte, si D no es denso en ninguna vecindad no vacía de X . Es decir, si para todo x en X y para todo $\varepsilon > 0$, existen y en X y $\delta > 0$ tal que $V_\delta(y) \subset V_\varepsilon(x)$ y $D \cap V_\delta(y) = \emptyset$.

TEOREMA 2.2 Sea X un espacio métrico completo. Si $\{F_n\}$ es una sucesión de subconjuntos cerrados densos en ninguna parte, entonces $X - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ es denso.

Demostración: Sean x_0 y $\varepsilon > 0$. Como $V_\varepsilon(x_0)$ no está contenido en F_1 podemos elegir un punto $x_1 \in V_\varepsilon(x_0) - F_1$. Entonces existe ε_1 tal que

$$0 < \varepsilon_1 < 1$$

y

$$\left[V_{\varepsilon_1}(x_1) \right]^- \subset V_\varepsilon(x_0) - F_1.$$

Procediendo de esta manera es posible construir sucesiones $\{x_n\}_n \subset X$ y $\{\varepsilon_n\}_n$ de números positivos tales que

$$\varepsilon_n < \frac{1}{n}$$

y

$$\left[V_{\varepsilon_n}(x_n) \right]^- \subset V_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}) - F_n.$$

Si $m > n$ entonces

$$V_{\varepsilon_m}(x_m) \subset V_{\varepsilon_n}(x_n),$$

así que $\text{dis}(x_m, x_n) < \varepsilon_n < \frac{1}{n}$. Es decir $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y, por tanto, converge a un punto x en X .

Además

$$x_m \in V_{\varepsilon_n}(x_n)$$

para todo $m > n$, esto implica que

$$x \in \left[V_{\varepsilon_n}(x_n) \right]^-$$

para todo n en $\mathbb{N}$.

Resumiendo tenemos que $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ y $x \in V_\varepsilon(x_0)$. ■

LEMA 2.3 Si X es un espacio métrico y O es un subconjunto abierto denso entonces O^c es denso en ninguna parte.

Demostración: Sean x_0 en X y $\varepsilon > 0$. Veamos que 0° no es denso en $V_\varepsilon(x_0)$.

Puesto que 0 es denso en X , podemos elegir un punto x en $0 \cap V_\varepsilon(x_0)$. Y como este conjunto es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $V_\delta(x) \subset 0 \cap V_\varepsilon(x_0)$. Es decir, tenemos $V_\delta(x) \subset V_\varepsilon(x_0)$ y $0^\circ \cap V_\delta(x) = \emptyset$. ■

COROLARIO 2.4 Sea X un espacio métrico completo. Dada una familia $\{0_n\}_n$ de conjuntos abiertos densos, se cumple que $\bigcap_{n=1}^{\infty} 0_n$ es denso.

Demostración: Es inmediato del teorema 1.2 y el lema 1.3. ■

COROLARIO 2.5 Si X un espacio métrico completo y $\{G_n\}_n$ es una sucesión de conjuntos densos del tipo G_δ entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso.

LEMA 2.6 En un espacio métrico se cumple que D es denso en ninguna parte si y sólo si D^- lo es.

Demostración:

$\Leftarrow$) D^- denso en ninguna parte implica trivialmente que D lo es.

$\Rightarrow$) Supongamos que D es denso en ninguna parte. Entonces dados x_0 en X y $\varepsilon > 0$, existe x_1 en $V_\varepsilon(x_0)$ y $\delta > 0$ tal que $V_\delta(x) \subset V_\varepsilon(x_0)$ y $D \cap V_\delta(x) = \emptyset$. Entonces $D \subset D^- \subset [V_\delta(x)]^c$. Por tanto $V_\delta(x) \subset V_\varepsilon(x_0)$ y $D^- \cap V_\delta(x) = \emptyset$. Es decir D^- no es denso en $V_\varepsilon(x_0)$. Por tanto D^- es denso en ninguna parte. ■

COROLARIO 2.7 Si X es un espacio métrico completo entonces D es denso en ninguna parte si y sólo si D^- tiene interior vacío.

Demostración:

$\Rightarrow$) Si D es denso en ninguna parte, entonces D^- lo es, en particular tiene interior vacío.

$\Leftarrow$) Supongamos D^- tiene interior vacío. Entonces dados x en X y $\varepsilon > 0$ se tiene que $D^- \cap V_\varepsilon(x) \neq \emptyset$, es decir D^- es denso. Por el lema 2.3 se concluye que D^- es denso en ninguna parte y entonces D también lo es. ■

DEFINICION 2.8 En un espacio métrico completo, un subconjunto A es llamado de la primera categoría, si puede ser expresado como una unión contable de conjuntos densos en ninguna parte.

TEOREMA 2.9 (TEOREMA DE LA CATEGORIA DE BAIRE) En un espacio métrico completo, el complemento de un conjunto de la primera categoría es denso.

Demostración: Consideremos $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, donde para cada n en $\mathbb{N}$, D_n es denso en ninguna parte. 17

Por el lema 2.6 y el teorema 2.2 se tiene que $X - \bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n)^-$ es denso, pero $X - \bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n)^- \subset X - \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, entonces $X - \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ es denso. ■

CAPITULO 3

TOPOLOGIA DE LA DENSIDAD Y TEOREMA DE ZAHORSKI

La idea de este capítulo es introducir la *Topología de la Densidad*, τ_d , y estudiar algunas propiedades de las funciones aproximadamente continuas que, son precisamente aquellas funciones continuas del espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_d)$ en $(\mathbb{R}, \text{topología usual})$.

Los principales teoremas de este capítulo se refieren a la existencia de funciones aproximadamente continuas que separan ciertos subconjuntos de los reales (dos *Teoremas de Zahorski* y el teorema que dice que la *Topología de la Densidad* es completamente regular).

3.1 DENSIDAD

En esta sección introducimos el concepto de densidad de un subconjunto de $\mathbb{R}$ en un número real. Al respecto probamos algunas propiedades elementales y el *Teorema de la densidad de Lebesgue*

que asegura que un conjunto medible tiene densidad 1 en casi todos sus puntos.

DEFINICION 3.1.1 Si $x \in \mathbb{R}$ y $X \subset \mathbb{R}$ es un conjunto medible, la Densidad Superior de X en x , se denota por $\bar{\phi}(X, x)$ y se define como:

$$\bar{\phi}(X, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\phi}_n(X, x)$$

donde

$$\bar{\phi}_n(X, x) = \sup \left\{ \frac{m(X \cap I)}{\ell(I)} \mid x \in I, \ell(I) < \frac{1}{n} \text{ e } I \text{ intervalo abto.} \right\}$$

De manera análoga se define $\phi(X, x)$, la Densidad Inferior de X en x .

Nótese que los límites $\bar{\phi}(X, x)$ y $\phi(X, x)$ siempre existen, pues, las sucesiones $\{\bar{\phi}_n\}_n$ $\{\phi_n\}_n$ son decreciente y creciente respectivamente y además acotadas (entre 0 y 1).

DEFINICION 3.1.2 (DENSIDAD) Dado un conjunto X , medible y un número real x , si los límites $\bar{\phi}(X, x)$ y $\phi(X, x)$ son iguales, definimos la Densidad de X en x , $\phi(X, x)$, como:

$$\phi(X, x) = \bar{\phi}(X, x) = \phi(X, x).$$

TEOREMA 3.1.3 Sea x un número y A un conjunto. Para que $\phi(A, x) = L$ es condición necesaria y suficiente que para cualquier sucesión de intervalos abiertos $\{I_n\}_n$ tal que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(I_n) = 0$$

se cumpla que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(\Lambda \cap I_n)}{\ell(I_n)} = L$$

Demostración:

(Necesidad): Sea $\{I_n\}_n$ una sucesión de intervalos abiertos tales que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(I_n) = 0$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $L = \bar{\phi}(\Lambda, x) = \underline{\phi}(\Lambda, x)$ tenemos que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|\bar{\phi}_M(\Lambda, x) - L| < \varepsilon$ y $|\underline{\phi}_M(\Lambda, x) - L| < \varepsilon$, de aquí que $L - \varepsilon < \underline{\phi}_M(\Lambda, x) < \bar{\phi}_M(\Lambda, x) < L + \varepsilon$.

Ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(I_n) = 0$$

entonces existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$\ell(I_n) < \frac{1}{M}$ para todo $n \geq N$. Entonces

$$\frac{m(\Lambda \cap I_n)}{\ell(I_n)} \in \left\{ \frac{\ell(\Lambda \cap I)}{\ell(I)} : x \in I, \ell(I) < \frac{1}{M} \text{ e } I \text{ un interv. abto.} \right\}$$

De modo que

$$\underline{\phi}_M(\Lambda, x) \leq \frac{m(\Lambda \cap I_n)}{\ell(I_n)} \leq \bar{\phi}_M(\Lambda, x) \quad \text{si } n \geq N$$

Por tanto:

$$\left| \frac{m(\Lambda \cap I_n)}{\ell(I_n)} - L \right| < \varepsilon \quad \text{si } n \geq N$$

(Suficiencia): Sea $\varepsilon > 0$. Para cada n en $\mathbb{N}$ por definición de

$\bar{\phi}_n$ y $\underline{\phi}_n$ existen r_n y s_n en

$$\left\{ \frac{m(\Lambda \cap I)}{\ell(I)} : x \in I, \ell(I) < \frac{1}{n} \text{ e } I \text{ un intervalo abierto} \right\}$$

tales que $\bar{\phi}_n(\Lambda, x) - r_n < \varepsilon$ y $s_n - \underline{\phi}_n(\Lambda, x) < \varepsilon$ es decir

22

$r_n > \bar{\phi}_n(A, x) - \varepsilon$ y $s_n < \underline{\phi}_n(A, x) + \varepsilon$. Si elegimos intervalos I_n para r_n y J_n para s_n , podemos aplicar la hipótesis, así que tomando límite cuando n tiende a infinito, tenemos $L \geq \bar{\phi}(A, x) - \varepsilon$ y $L \leq \underline{\phi}(A, x) + \varepsilon$, tenemos entonces que $\bar{\phi}(A, x) - \varepsilon \leq L \leq \underline{\phi}(A, x) + \varepsilon$.

Ahora tomando límite cuando ε tiende a cero, se tiene que $\bar{\phi}(A, x) \leq L \leq \underline{\phi}(A, x)$. Pero por definición de $\bar{\phi}$ y $\underline{\phi}$ tenemos que $\underline{\phi}(A, x) \leq \bar{\phi}(A, x)$. Así que $\bar{\phi}(A, x) = \underline{\phi}(A, x) = \phi(A, x) = L$. ■

LEMA 3.1.4 Dado X medible, si $\phi(X, x)$ existe, entonces:

$$0 \leq \phi(X, x) \leq 1.$$

LEMA 3.1.5 Si $\bar{\phi}(X, x) = 0$ entonces $\phi(X, x) = 0$.

Demostración: Por definición de $\bar{\phi}$ y $\underline{\phi}$ tenemos que $0 \leq \underline{\phi}(X, x) \leq \bar{\phi}(X, x)$ así que $0 \leq \underline{\phi}(X, x) \leq 0$, esto significa que $\underline{\phi}(X, x) = 0$. Por tanto $\phi(X, x) = 0$. ■

LEMA 3.1.6 Si $\underline{\phi}(X, x) = 1$ entonces $\phi(X, x) = 1$.

Demostración: Es análoga a la prueba de 3.1.5. ■

COROLARIO 3.1.7 Si x es un número real, A y B son conjuntos medibles, $A \subset B$ y $\phi(A, x) = 1$ entonces $\phi(B, x) = 1$.

Demostración De la definición de densidad inferior tenemos que $\phi(A, x) \leq \phi(B, x) \leq 1$ entonces $1 \leq \phi(B, x) \leq 1$. ■

LEMA 3.1.8 Si A y B son conjuntos medibles, $A \subset B$ y $\phi(A, x)$ y $\phi(B, x)$ existen entonces $\phi(A, x) \leq \phi(B, x)$.

Demostración: Puesto que $A \subset B$ entonces

$$\frac{m(A \cap I)}{l(I)} \leq \frac{m(B \cap I)}{l(I)}$$

para cualquier intervalo I , así que $\bar{\phi}(A, x) \leq \bar{\phi}(B, x)$, esto es $\phi(A, x) \leq \phi(B, x)$. ■

LEMA 3.1.9 Sea $x \in \mathbb{R}$. Si A es medible $B \subset A$ y $m(A-B) = 0$ entonces $\phi(A, x)$ existe si y sólo si $\phi(B, x)$ existe. En caso de que $\phi(A, x)$ y $\phi(B, x)$ existan son iguales.

Demostración: Puesto que $B = A - (A - B) = A \cap (A - B)^c$ se tiene que B es medible.

Por otro lado si I es un intervalo tenemos:

$A \cap I = (A \cap B \cap I) \cup [(A - B) \cap I] = (B \cap I) \cup [(A - B) \cap I]$
de donde $m(A \cap I) = m(B \cap I) + m[(A - B) \cap I]$ pero,
 $m[(A - B) \cap I] = 0$ por tanto $m(A \cap I) = m(B \cap I)$ para todo intervalo I .

Entonces para que $\phi(A, x)$ exista, es necesario y suficiente que exista $\phi(B, x)$ y, es claro que, en el caso de que existan son iguales . ■

LEMA 3.1.10 Si A es medible, $m(A \cap B) = 0$ y $\phi(A, x)$ existe, entonces $\phi(B, x)$ existe y $\phi(A, x) = \phi(B, x)$.

Demostración: Como $A = (A \cap B) \cup (A - B)$ y $m(A - B) = 0$ por el lema anterior tenemos que $A \cap B$ es medible y $\phi(A, x) = \phi(A \cap B, x)$.

Ya que $B = (A \cap B) \cup (B - A)$ y $m(B - A) = 0$, tenemos que B es medible. Aplicando otra vez el lema anterior tenemos que $\phi(B, x) = \phi(A \cap B, x)$.

Por tanto $\phi(A, x) = \phi(B, x)$. ■

TEOREMA 3.1.11 Si x es un número real, A es un conjunto medible y $\phi(A, x)$ existe entonces $\phi(A^c, x)$ también existe y $\phi(A^c, x) = 1 - \phi(A, x)$.

Demostración: Desde luego A^c es medible. Veamos que se cumple lo demás.

Tomemos una sucesión de intervalos abiertos $\{I_n\}_n$ tal que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} l(I_n) = 0$.

Como

$$1 = \frac{m((A \cup A^c) \cap I_n)}{l(I_n)} = \frac{m(A \cap I_n)}{l(I_n)} + \frac{m(A^c \cap I_n)}{l(I_n)}$$

y como por el teorema 3.1.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(A \cap I_n)}{l(I_n)} = \phi(A, x)$$

tenemos entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(A^c \cap I_n)}{l(I_n)}$$

existe y es igual a $1 - \phi(A, x)$. Aplicando nuevamente el teorema

3.1.3 concluimos que $\phi(A^c, x) = 1 - \phi(A, x)$. ■

25

TEOREMA 3.1.12 (DE LA DENSIDAD DE LEBESGUE). Si A es un conjunto medible entonces $\phi(A, x) = 1$ para casi todo x en A .

Demostración. Consideremos el caso en que A es acotado. Y supongamos que no es cierto el resultado. Esto implica que si $S = \{x \in A : \phi(A, x) < 1\}$ entonces $m^*(S) > 0$. Así que existe un natural n_0 tal que $T = \left\{x \in A : \phi(A, x) < 1 - \frac{1}{n_0}\right\}$ y $m^*(T) > 0$, pero el conjunto T es medible puesto que $T = A \cap \left\{x \in \mathbb{R} : \phi(A, x) < 1 - \frac{1}{n_0}\right\}$, A es medible por hipótesis y $\left\{x \in \mathbb{R} : \phi(A, x) < 1 - \frac{1}{n_0}\right\}$ es medible ya que $\phi(A, \cdot)$ es medible por ser el límite de las funciones medibles $\phi_n(A, \cdot)$. (Es fácil comprobar que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} : \phi_n(A, x) < \alpha\}$ es igual a

$$\bigcup \left\{ I : \text{intervalo abierto tal que } \ell(I_n) < \frac{1}{n} \text{ y } \frac{m(A \cap I)}{\ell(I_n)} \right\} ,$$

Resumiendo tenemos un natural n_0 y un subconjunto T medible de A tal que $\phi(A, x) < 1 - \frac{1}{n_0}$ para cada x en T y $m(T) = k > 0$.

Sea G un conjunto abierto y acotado el cual contiene a A y $m(G) - m(A) = \frac{k}{n_0}$. Sea x en T , como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(A, x) < 1 - \frac{1}{n_0}$$

existe una sucesión $\{I_{x_n}^n\}$ de intervalos abiertos contenidos en G , tales que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{x_n}^n , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(I_{x_n}^n) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{m(A \cap I_{x_n}^n)}{\ell(I_{x_n}^n)} < 1 - \frac{1}{n_0} \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Notemos que la familia $\mathcal{I} = \{I_x^n : x \in T \vee n \in \mathbb{N}\}$ cubre a T en el sentido de Vitali. Así que existe una familia $I_1, I_2, \dots$ numerable de intervalos ajenos dos a dos que cubre a T excepto por un conjunto de medida cero. Ver ([8], cap.14 cor.1).

Tenemos entonces

$$\frac{m(A \cap I_n)}{\ell(I_n)} < 1 - \frac{1}{n_0} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de aquí que

$$\frac{m(A^c \cap I_n)}{\ell(I_n)} > \frac{1}{n_0},$$

o bien

$$m(A^c \cap I_n) > \frac{1}{n_0} \ell(I_n).$$

Y entonces

$$\begin{aligned} m\left(A^c \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) &= m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [A^c \cap I_n]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A^c \cap I_n) > \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n_0} \ell(I_n) &= \frac{1}{n_0} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \frac{1}{n_0} m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \geq \frac{1}{n_0} m(T) = \frac{k}{n_0}. \end{aligned}$$

Ya que $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset G$ entonces $m(A^c \cap G) > k / n_0$.

Por otro lado $m(G) = m(A \cap G) + m(A^c \cap G)$, pero

$$G = (A \cap G) \cup (A^c \cap G) = A \cup (A^c \cap G) \text{ entonces}$$

$m(G) = m(A) + m(A^c \cap G)$, de la definición de G tenemos

$$m(A) + \frac{k}{n_0} = m(A) + m(A^c \cap G) \text{ entonces } m(A^c \cap G) = \frac{k}{n_0} \quad \forall. \text{ Esto}$$

termina la prueba en el caso de que A esté acotado.

Consideremos ahora el caso general.

A se puede expresar como $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap (-n, n)$, así que $\{x \in A : \phi(A, x) \neq 1\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A \cap (-n, n) : \phi(A \cap (-n, n)) \neq 1\}$ por lo que probamos al principio para cada n en $\mathbb{N}$ el conjunto $\{x \in A \cap (-n, n) : \phi(A \cap (-n, n)) \neq 1\}$ tiene medida cero, de donde $m(\{x \in A : \phi(A, x) \neq 1\}) = 0$. ■

En esta parte se definen los conjuntos d -abiertos como aquellos subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$ que tiene densidad 1 en cada uno de sus puntos. Verificamos que la familia de los d -abiertos es una topología, la cual es llamada *Topología de la Densidad*.

Otro resultado importante de esta sección es el teorema que asegura que el producto de una derivada acotada por una aproximadamente continua acotada, es una derivada.

DEFINICION 3.2.1 (d -ABIERTO) Un conjunto A es llamado d -abierto, si es medible y la densidad de A existe y es igual a 1 en cada uno de sus puntos.

TEOREMA 3.2.2 (TOPOLOGÍA DE LA DENSIDAD) La familia τ_d de los conjuntos d -abiertos es una topología.

Demostración:

i) $\mathbb{R} \in \tau_d$:

Esto es claro ya que $\mathbb{R}$ es medible y dado cualquier intervalo I , $\mathbb{R} \cap I = I$ por lo que

$$\frac{m(\mathbb{R} \cap I)}{m(I)} = 1,$$

de donde $\phi(\mathbb{R}, x) = 1$ para todo x en $\mathbb{R}$.

ii) Si A y B están en τ_d entonces $A \cap B$ también está en τ_d :

— Por supuesto la intersección de dos medibles es medible.

— Veamos que $\phi(A \cap B, x) = 1$ para todo x en $A \cap B$.

Sea x en $A \cap B$ y sea I un intervalo abierto, tenemos que

$$0 \leq \frac{m([A^c \cup B^c] \cap I)}{\ell(I)} = \frac{m([A^c \cap I] \cup [B^c \cap I])}{\ell(I)} \leq \frac{m(A^c \cap I)}{\ell(I)} + \frac{m(B^c \cap I)}{\ell(I)}$$

de aquí que dado n en $\mathbb{N}$

$$0 \leq \sup \left\{ \frac{m([A^c \cup B^c] \cap I)}{\ell(I)} \mid x \in I, \ell(I) < \frac{1}{n} \text{ e } I \text{ es un intervalo abierto} \right\} \leq \sup \left\{ \frac{m(A^c \cap I)}{\ell(I)} + \frac{m(B^c \cap I)}{\ell(I)} \mid x \in I, \ell(I) < \frac{1}{n} \text{ e } I \text{ es un intervalo abierto} \right\}$$

entonces

$$0 \leq \sup \left\{ \frac{m([A^c \cup B^c] \cap I)}{\ell(I)} \mid x \in I, \ell(I) < \frac{1}{n} \text{ e } I \text{ es un intervalo abierto} \right\} \leq \sup \left\{ \frac{m(A^c \cap I)}{\ell(I)} \mid x \in I, \ell(I) < \frac{1}{n} \text{ e } I \text{ es un intervalo abto.} \right\} + \sup \left\{ \frac{m(B^c \cap I)}{\ell(I)} \mid x \in I, \ell(I) < \frac{1}{n} \text{ e } I \text{ es un intervalo abto.} \right\}$$

entonces

$$0 \leq \bar{\phi}_n(A^c \cup B^c, x) \leq \bar{\phi}_n(A^c, x) + \bar{\phi}_n(B^c, x)$$

como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\phi}_n(A^c, x) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\phi}_n(B^c, x)$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\bar{\phi}_n(A^c, x) + \bar{\phi}_n(B^c, x)] = 0.$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\phi}_n(A^c \cup B^c, x) = 0$$

esto es $\bar{\phi}(A^c \cup B^c, x) = 0$ por lo tanto $\phi(A^c \cup B^c, x) = 0$, o bien

$$\phi(A \cap B, x) = 1.$$

iii) Si $\{A_\alpha\}_\alpha$ es una familia de elementos de τ_d , entonces $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$ está en τ_d :

— Primero veamos que A es medible.

Supongamos que no es medible, esto es, supongamos que existen conjuntos F y G del tipo G_δ y F_σ respectivamente tales que $F \subset A \subset G$, $m(F) = m_*(A)$, $m^*(A) = m(G)$ y $m(G - F) > 0$.

Ahora, por un lado, $m^*(A - F) > 0$, ya que si $m^*(A - F) = 0$ entonces $A - F$ sería medible, de donde A resultaría medible también.

Por otro lado, por el Teorema de la Densidad de Lebesgue, $\{x \in G - F : \bar{\phi}(G - F, x) \neq 1\}$ tiene medida cero.

De los párrafos anteriores y como $A - F \subset G - F$, tenemos que existe $x_0 \in A - F$ tal que $\phi(G - F, x_0) = \bar{\phi}(G - F, x_0) = 1$. Entonces existe α tal que $x_0 \in A_\alpha$ y $\phi(G - F, x_0) = 1$. Y por hipótesis $\phi(A_\alpha, x_0) = 1$. De donde $\phi(A_\alpha \cap (G - F), x_0) = 1$. Esto implica que $m(A_\alpha \cap (G - F)) > 0$. Pero

$A_\alpha \cap (G - F) \subset A_\alpha - F \subset A - F$, entonces $m_*(A - F) > 0$ $\forall$. Por tanto A es medible.

— Ahora veamos que $\phi(A, x) = 1$ para todo x en $\bigcup_\alpha A_\alpha$.

Como $A_\alpha \subset A$ entonces $\phi(A_\alpha, x) \leq \phi(A, x)$ para todo x . Entonces si x está en A_α para alguna α tenemos que $1 \leq \phi(A_\alpha, x) \leq \phi(A, x) \leq 1$. Por tanto $\phi(A, x) = 1$ para todo x en A . ■

30 **TEOREMA 3.2.3** Si un conjunto A tiene medida cero entonces $\phi(A, x) = 0$ para todo x en $\mathbb{R}$. En particular A es d -cerrado.

Demostración: Es inmediato de las definiciones 3.1.1 y 3.1.2 el teorema 3.1.11 y la definición anterior.

DEFINICION 3.2.4 Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, es aproximadamente continua en a , un punto de A , si para cada $\varepsilon > 0$, $\{x \in A : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$ tiene densidad 1 en x_0 .

DEFINICION 3.2.5 Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, es aproximadamente continua en A si es aproximadamente continua en cada punto de A .

TEOREMA 3.2.6 Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es aproximadamente continua entonces f es medible.

Demostración:

i) Para cada α en $\mathbb{R}$, $E = \{x : x \in f(x) < \alpha\}$ es medible:

Sea α en $\mathbb{R}$. Si $E = \emptyset$ no hay nada que hacer. Supongamos entonces que E es no vacío.

Sea $y_0 = \inf(-\infty, \alpha) \cap \text{Im } f = \inf f(E)$. (Notemos que y_0 puede ser $-\infty$).

— Consideremos el caso en que $y_0 \in f(E)$. Sea x_0 en E tal que $f(x_0) = y_0$. Como $f(x_0) = y_0 \in f(E)$ entonces $f(x_0) < \alpha$

así que $\alpha - f(x_0) > 0$. Entonces el conjunto

$E_0 = \{x : |f(x) - f(x_0)| < \alpha - f(x_0)\}$ está bien definido y es medible por hipótesis.

Pero E_0 es precisamente E , ya que: Obviamente $E_0 \subset E$. Y si $x \in E$ entonces $f(x) - f(x_0) < \alpha - f(x_0)$; y por definición de x y x_0 , $f(x_0) \leq f(x)$, es decir $f(x) - f(x_0) \geq 0$; por lo tanto $|f(x) - f(x_0)| < \alpha - f(x_0)$ esto implica que $x \in E_0$, de donde $E \subset E_0$. Por lo tanto $E_0 = E$.

Concluimos entonces que E es medible.

— Consideremos ahora el caso en que $y_0 \notin f(E)$. Ya que $y_0 = \inf f(E)$ existe $\{y_n\}_n$ una sucesión en $f(E)$ tal que $y_n \rightarrow y_0$.

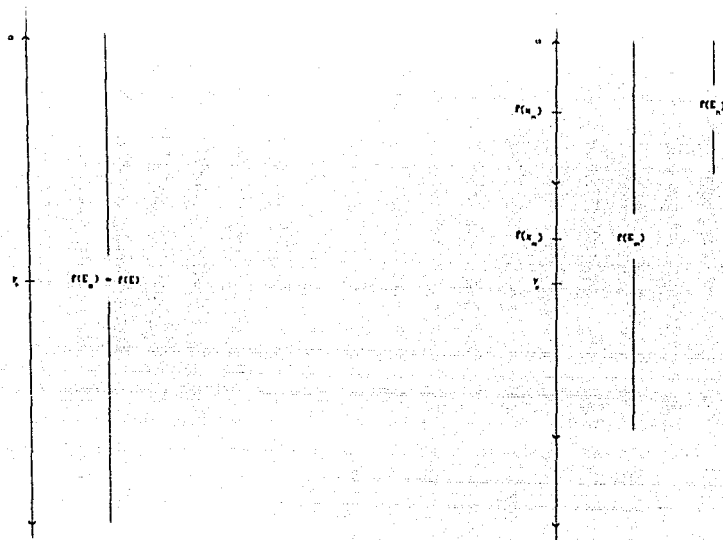
Sea $\{x_n\}_n \subset E$ tal que $f(x_n) = y_n$ para todo n en $\mathbb{N}$.

Para cada n en $\mathbb{N}$ sea

$E_n = \{x : |f(x) - f(x_n)| < \alpha - f(x_n)\}$. Entonces E_n está bien definido, puesto que $f(x_n) < \alpha$. Además E_n es medible por hipótesis.

Veamos que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Claramente $E_n \subset E$, de donde $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset E$. Si $x \in E$, puesto que $y_0 \notin f(E)$, $y_0 < f(x)$ y $y_0 < f(x_n)$, para todo n en $\mathbb{N}$. Y como $f(x_n) \rightarrow y_0$, existe N en $\mathbb{N}$ tal que $y_0 < f(x_N) < f(x)$, de donde $f(x) - f(x_N) > 0$ y como $x \in E$, $f(x) - f(x_N) < \alpha - f(x_N)$; entonces tenemos $|f(x) - f(x_N)| < \alpha - f(x_N)$, por lo tanto $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Por lo tanto también en este caso concluimos que E es medible.



(caso en que $y_0 \in f(E)$)

(caso en que $y_0 \notin f(E)$)

fig. 3.2.1

ii) Λ es medible:

Notemos que $\Lambda = f^{-1}(R) = f^{-1}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, n)\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(-\infty, n)$. Por lo que vimos en i) obtenemos que Λ es medible. ■

NOTACION 3.2.7 Denotaremos por $\mathbb{R}_d$ a los reales con la Topología de la Densidad.

TEOREMA 3.2.8. Las funciones $f : \mathbb{R}_d \rightarrow \mathbb{R}$ continuas son las aproximadamente continuas.

($\Rightarrow$) Supongamos que $f : \mathbb{R}_d \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Sean x_0 en $\mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos el conjunto $f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Entonces este conjunto es la imagen inversa de un abierto por lo que debe ser abierto en la Topología de la Densidad, esto quiere decir que tiene densidad 1 en todos sus puntos, en particular en x_0 .

($\Leftarrow$) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aproximadamente continua.

Basta ver que las imágenes inversas de los intervalos abiertos son d -abiertos.

Sea (a, b) un intervalo abierto. Por el teorema 3.2.6, $f^{-1}(a, b)$ es un conjunto medible.

Sea $x \in f^{-1}(a, b)$. Sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subset (a, b)$ y ya que f es aproximadamente continua, tenemos que $f^{-1}(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ tiene densidad 1 en x . Pero $f^{-1}(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subset f^{-1}(a, b)$, de aquí que $\phi(f^{-1}(a, b), x) = 1$.

Por lo tanto $f^{-1}(a, b)$ tiene densidad 1 en cada uno de sus puntos, es decir $f^{-1}(a, b)$ es d -abierto. ■

COROLARIO 3.2.9 Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es aproximadamente continua en x_0 ; si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$ tiene densidad 1 en cada uno de sus puntos.

TEOREMA 3.2.10 Si f y α son funciones acotadas, f una derivada y α aproximadamente continua en un intervalo J entonces αf es una derivada.

Demostración: Sea

$$g(x) = \int_0^x \alpha(t) f(t) dt$$

De los teoremas 1.9 y 3.2.6 se sigue que α y f son funciones medibles. Entonces αf es una función medible y acotada. Por lo cual g está bien definida.

Probaremos que $g'(x) = \alpha(x) f(x)$. Es decir necesitamos ver que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \alpha(x) f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sean $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} - \alpha(x_0) f(x_0) \right| = \\ & \left| \frac{1}{h} \left[\int_0^{x_0+h} \alpha(t) f(t) dt - \int_0^{x_0} \alpha(t) f(t) dt \right] - \alpha(x_0) f(x_0) \right| = \\ & \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \alpha(t) f(t) dt - \alpha(x_0) f(x_0) \right| = \\ & \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \left[\alpha(t) f(t) - \alpha(x_0) f(x_0) \right] dt \right| \leq \\ & \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) \left[\alpha(t) - \alpha(x_0) \right] dt \right| + \\ & \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \alpha(x_0) \left[f(x_0) - f(t) \right] dt \right| \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\left| \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} - \alpha(x_0) f(x_0) \right| \leq A(h) + B(h)$$

donde

$$A(h) = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) \left[\alpha(t) - \alpha(x_0) \right] dt \right| +$$

$$B(h) = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \alpha(x_0) \left[f(x_0) - f(t) \right] dt \right|.$$

Así que basta probar:

$$i) \lim_{h \rightarrow 0} A(h) = 0$$

$$ii) \lim_{h \rightarrow 0} B(h) = 0$$

Prueba de i)

Supongamos $h > 0$. Sea M una cota de f y α . Y sea $E = \alpha^{-1} \left[\bigvee_{\varepsilon/2M} (\alpha(x_0)) \right]$ puesto que α es aproximadamente continua, E tiene densidad 1 en x_0 o equivalentemente E^c tiene densidad 0 en x_0 , esto implica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(E^c \cap [x_0, x_0 + h])}{h} = 0$$

así que existe $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < h < \delta_1$ entonces

$$\frac{m(E^c \cap [x_0, x_0 + h])}{h} < \frac{\varepsilon}{4M^2}.$$

Calculemos $A(h)$ para $0 < h < \delta_1$

$$A(h) = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) \left[\alpha(t) - \alpha(x_0) \right] dt \right| \leq$$

$$\frac{M}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |\alpha(t) - \alpha(x_0)| dt =$$

$$\frac{M}{h} \int_{(x_0, x_0+h) \cap E} |\alpha(t) - \alpha(x_0)| dt +$$

$$\frac{M}{h} \int_{(x_0, x_0+h) - E} |\alpha(t) - \alpha(x_0)| dt \leq$$

$$\frac{M}{h} \int_{(x_0, x_0+h) \cap E} \frac{\varepsilon}{2h} dt + \frac{M}{h} \int_{(x_0, x_0+h) - E} 2M dt \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2h} \int_{x_0}^{x_0+h} dt + \frac{2M^2}{h} \int_{(x_0, x_0+h) - E} dt =$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + 2M^2 \frac{m([x_0, x_0+h] - E)}{h} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Se demuestra de manera análoga cuando $h < 0$.

Prueba de ii)

Podemos suponer que $\alpha(x_0) \neq 0$. Puesto que f es una derivada $f = f'$ para alguna función f . Así existe $\delta_2 > 0$ tal que si $|h| < \delta_2$ entonces

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{|\alpha(x_0)|}.$$

Ahora bien si $|h| < \delta_2$

$$B(h) = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \alpha(x_0) (f(t) - f(x_0)) dt \right| =$$

$$|\alpha(x_0)| \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt \right| =$$

$$\left| \alpha(x_0) \right| \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - f(x_0) \right| =$$

$$\left| \alpha(x_0) \right| \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f'(t) dt - f'(x_0) \right| =$$

$$\left| \alpha(x_0) \right| \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

para la última igualdad ver ([15], pp. 133 y 134).

COROLARIO 3.2.11 Si $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}$ es aproximadamente continua y acotada en el intervalo J , entonces α es una derivada.

DEFINICION 3.2.12 Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es semiaproximadamente continua superiormente en x_0 , un punto de A , si $\{x : f(x) < f(x_0) + \varepsilon\}$ tiene densidad 1 en x_0 .

Y es semiaproximadamente continua inferiormente en x_0 si $\{x : f(x) > f(x_0) - \varepsilon\}$ tiene densidad 1 en x_0 .

DEFINICION 3.2.13 (SEMIAPROXIMADAMENTE CONTINUAS) Una función real f es semiaproximadamente continua superiormente (inferiormente) si lo es en cada punto de su dominio.

PROPOSICION 3.2.14 Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es semiaproximadamente continua superior e inferiormente entonces f es aproximadamente

Demostración: Tenemos que

$$E = \{x : f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon\} = \\ \{x : f(x_0) - \varepsilon < f(x)\} \cap \{x : f(x) < f(x_0) + \varepsilon\}.$$

De la prueba hecha en el teorema 3.2.2 inciso ii) (la prueba se hizo puntualmente) se desprende que E tiene densidad 1 en x_0 . Es decir f es aproximadamente continua. ■

PROPOSICION 3.2.15 Si f es continua entonces f es aproximadamente continua.

Demostración: Basta demostrar que los conjuntos abiertos son d -abiertos.

Sea G un conjunto abierto con la topología usual en $\mathbb{R}$. Queremos ver que G tiene densidad 1 en cada uno de sus puntos.

Sea x en G . Puesto que G es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(x) \subset G$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$. Entonces tenemos que $G \cap I = I$ si $x \in I$, $\ell(I) < 1/n$ y $n > N$. Así que

$$\left\{ \frac{m(G \cap I)}{\ell(I)} \mid x \in I, \ell(I) < \frac{1}{n} \text{ e } I \text{ un intervalo abierto} \right\} = \{1\}$$

si $n > N$.

De donde $\phi_n(G, x) = 1$ si $n > N$, entonces $\phi(G, x) = 1$. Por tanto $\phi(G, x) = 1$. ■

En esta sección usamos un procedimiento del tipo Lema de Urysohn para probar que la Topología de la Densidad es completamente regular y que dos subconjuntos d -cerrados, ajenos y del tipo G_δ pueden ser separados mediante una función aproximadamente continua. Estos dos resultados son la herramienta fundamental para tres de las pruebas (caps. V, VI y VII).

LEMA 3.3.1 Si J es un intervalo y $\Lambda^{co} \cap J$ es contable entonces $\Lambda \cap J$ también lo es.

Demostración: Supongamos que esto no sucede, es decir que $\Lambda \cap J$ es no contable. Así que $\Lambda \cap J - \Lambda^{co} \cap J = \Lambda \cap J - \Lambda^{co}$ es no contable. Para cada $x \in \Lambda \cap J - \Lambda^{co}$, como $x \notin \Lambda^{co}$, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$V_{\delta_x}(x) \cap \Lambda$$

es contable.

Elijamos un natural n_x y un racional q_x tales que $x \in V_{1/n_x}(q_x) \subset V_{\delta_x}(x)$

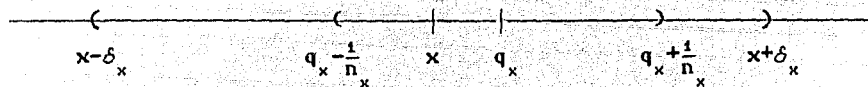


fig. 3.3.1

entonces

$$A \cap V_{1/n, x}(q_x) \subset A \cap V_\delta(x),$$

por lo cual

$$A \cap V_{1/n, x}(x)$$

es contable.

Pero $A \cap J - A^{co} \subset \bigcup \{ A \cap V_{1/n}(q) : n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q} \}$, y esto querría decir que $A \cap J - A^{co}$ es contable. Lo cual es absurdo. Por lo tanto $A \cap J$ debe ser contable. ■

LEMA 3.3.2 Para cualquier conjunto A se cumple que A^{co} es perfecto.

Demostración: El caso en que $A^{co} = \emptyset$ es trivial, supongamos entonces que $A^{co} \neq \emptyset$.

i) Todos los puntos de A^{co} son puntos de acumulación de A^{co} :

Sea $x \in A^{co}$. Puesto que x es un punto de condensación de A , para cada $\delta > 0$ se tiene que $A \cap V_\delta(x)$ no es contable, pero entonces, de acuerdo con el lema anterior, para cada $\delta > 0$, $A^{co} \cap V_\delta(x)$ es no contable, entonces x es un punto de acumulación de A^{co} .

ii) A^{co} es cerrado:

Sea x_0 un punto de acumulación de A^{co} y sea $\varepsilon > 0$. Entonces $A^{co} \cap V_\varepsilon^*(x_0) \neq \emptyset$. Sea x en $A^{co} \cap V_\varepsilon(x_0)$ y $\delta > 0$

tal que $V_\delta(x) \subset V_\varepsilon(x)$, entonces $A \cap V_\delta(x) \subset A \cap V_\varepsilon(x)$. Pero $A \cap V_\delta(x)$ es no contable puesto que $x \in A^{co}$. Por lo que $V_\varepsilon(x)$ es no contable. Entonces x es un punto de condensación de A , decir x está en A^{co} . ■

LEMA 3.3.3 Para cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}$, $A - A^{co}$ es contable, esto es, cuando mas una cantidad numerable de elementos de A no son de condensación.

Demostración: Sea W una base numerable de $\mathbb{R}$. Para cada a en $A - A^{co}$ podemos elegir $V_a \in W$ tal que $V_a \cap A$ es contable. Entonces $A - A^{co} \subset \bigcup \{V_a \cap A : a \in A - A^{co}\}$, y como esta unión es contable, entonces $A - A^{co}$ es contable. ■

COROLARIO 3.3.4 Si A es cerrado $m(A) = m(A^{co})$.

Demostración: Ya que A es cerrado $A^{co} \subset A$. Se tiene entonces que $A = A^{co} \cup (A - A^{co})$, entonces $m(A) = m(A^{co}) + m(A - A^{co})$, pero por el lema anterior $m(A - A^{co}) = 0$. De donde $m(A) = m(A^{co})$. ■

TEOREMA 3.3.5 Si A es cerrado entonces $A = P \cup C$, donde P es perfecto y C es contable y $P \cap C = \emptyset$.

Demostración: En este caso $A = A^{co} \cup (A - A^{co})$ y por los

42 lemas 3.3.2 y 3.3.3 A^{co} es perfecto y $A - A^{co}$ es contable, y evidentemente son ajenos. ■

LEMA 3.3.6 Si A es medible, $m(A) > 0$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe un conjunto perfecto P tal que $P \subset A$, $P \neq \emptyset$ y $m(A - P) < \varepsilon$.

Demostración: Puesto que A es medible y $m(A) > 0$, existe F cerrado tal que $F \subset A$, $m(F) > 0$ y $m(A - F) < \varepsilon$.

Veamos que $P = F^{co}$ satisface las condiciones deseadas:

- i) Por el lema 3.3.2 F^{co} es perfecto.
- ii) Como F es cerrado $F^{co} \subset F$ entonces $F^{co} \subset A$.
- iii) Por el corolario 3.3.4 $m(F^{co}) = m(F) > 0$, en particular $F^{co} \neq \emptyset$.
- iv) Ya que $m(A - F) < \varepsilon$, $F^{co} \subset F \subset A$ y $m(F^{co}) = m(F)$ se tiene que $m(A - F^{co}) < \varepsilon$. ■

LEMA 3.3.7 Cualquier conjunto abierto G , $G \subset \mathbb{R}$ puede ser expresado como unión contable de intervalos abiertos, ajenos dos a dos. Estos intervalos son las Componentes Conexas de G y se les llama Intervalos Contiguos a G^c (Nótese que dichos intervalos tienen extremos en G^c , si estos extremos son reales).

LEMA 3,3,8 Sea X un conjunto cerrado y acotado. Dado $n \in \mathbb{N}$ definamos $T_n = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n+1} < \text{dis}(x, X) \leq \frac{1}{n} \right\}$. Entonces T_n es unión finita de intervalos ajenos (posiblemente intervalos degenerados).

Demostración: Como X es cerrado y acotado, $X \subset [m, M]$, donde $m = \min X$ y $M = \max X$.

Puesto que X^c es abierto y $(-\infty, m) \cup (M, \infty) \subset X^c$, del lema anterior X^c es de la forma $X^c = J_0 \cup J_1 \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} J_n \right)$ con $J_0 = (-\infty, m)$, $J_1 = (M, \infty)$ y $J_0, J_1, J_2, \dots$ una sucesión de intervalos abiertos, ajenos dos a dos. Además cada J_n con $n \geq 2$ tiene extremos reales que pertenecen a X .

De esto desprendemos que si $y \in J_n = (a_n, b_n)$ con $n \geq 2$, entonces $\text{dis}(y, X) = \min\{y - a_n, b_n - y\}$, tenemos entonces

$$\text{dis}(y, X) \leq \frac{1}{2} \ell(J_n) \quad (I)$$

Como $\bigcup_{n=2}^{\infty} J_n \subset (m, M)$ entonces

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ell(J_n) = m \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} J_n \right) \leq M - m,$$

así que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(J_n) = 0.$$

Dado n_0 en $\mathbb{N}$, tomemos el mínimo N en $\mathbb{N}$ con la propiedad de que: Si $n > N$ entonces $\ell(J_n) < \frac{2}{n+1}$. Por (I) tenemos que si $n > N$ y $y \in J_n$ entonces $\text{dis}(y, X) < \frac{1}{n+1}$. Esto implica que si $n > N$ entonces $J_n \cap T_{n_0} = \emptyset$.

Para cada $2 \leq n \leq N$ tenemos

$$J_n \cap T_{n_0} =$$

$$44 \quad \left(a_n + \frac{1}{n_0+1}, a_n + \min \left\{ \frac{1}{n_0}, \frac{1}{2} l(J_{n_0}) \right\} \right) \cup$$

$$\left[b_n - \min \left\{ \frac{1}{n_0}, \frac{1}{2} l(J_{n_0}) \right\}, b_n - \frac{1}{n_0+1} \right)$$

y además

$$J_0 \cap T_{n_0} = [m - 1/n_0, m - 1/(n_0+1)]$$

$$J_1 \cap T_{n_0} = (M + 1/(n_0+1), M + 1/n_0)$$

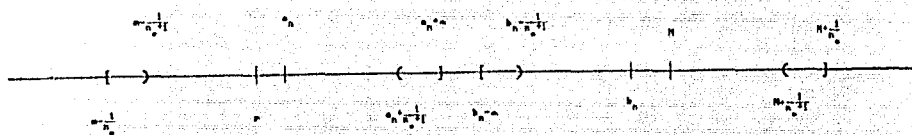


fig. 3.3.2

Es decir, $T_{n_0} = \bigcup_{n=0}^N (T_{n_0} \cap J_n)$. Esto es T_{n_0} es unión finita de conjuntos ajenos dos a dos y cada uno de estos conjuntos es unión finita de intervalos (o vacío). Por tanto T_{n_0} es unión finita de intervalos. ■

TEOREMA 3.3.9 Sea E un conjunto medible de diámetro menor o igual que 1 y sea X un subconjunto cerrado de E tal que $\phi(E, x) = 1$ para cada x en X . Entonces existe un conjunto P tal que:

- i) $X \subset P \subset E$
- ii) P es perfecto
- iii) $\phi(P, x) = 1$, $\forall x \in X$.

Demostración: Para cada n en $\mathbb{N}$, sea

$$T_n = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n+1} < \text{dis}(x, X) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Por el lema anterior sabemos que

$$T_n = \bigcup_{i=1}^{N(n)} J_i^n, \quad N(n) \in \mathbb{N},$$

donde los J_i^n 's son intervalos ajenos dos a dos.

Sea $S_i^n = E \cap J_i^n$, S_i^n es un conjunto medible y acotado, así que por el lema 3.3.6 sabemos que existe un conjunto perfecto $P_i^n \subset S_i^n$ tal que $m(S_i^n) < (P_i^n) + 1/N(n)2^n$.

Llamemos

$$P_n = \bigcup_{i=1}^{N(n)} P_i^n.$$

Y llamemos

$$S_n = \bigcup_{i=1}^{N(n)} S_i^n = \bigcup_{i=1}^{N(n)} E \cap J_i^n = E \cap T_n,$$

puesto que el diámetro de E es menor o igual que 1, tenemos

$$E = X \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \quad (\text{II})$$

Como los T_n 's son ajenos dos a dos, tenemos que los S_n 's también lo son. De manera que

$$\begin{aligned} m(S_n) &= m\left(\bigcup_{i=1}^{N(n)} S_i^n\right) = \sum_{i=1}^{N(n)} m(S_i^n) < \sum_{i=1}^{N(n)} \left[m(P_i^n) + \frac{1}{N(n)2^n} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{N(n)} m(P_i^n) + \sum_{i=1}^{N(n)} \frac{1}{N(n)2^n} = m\left(\bigcup_{i=1}^{N(n)} P_i^n\right) + \frac{1}{2^n} = m(P_n) + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$m(S_n) - m(P_n) < \frac{1}{2^n} \quad (\text{III})$$

Afirmación: $P = X \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ es el conjunto buscado:

i) Desde luego se cumple que $X \subset P \subset E$.

ii) P es perfecto:

— P es cerrado:

Sea $x \in P^-$ y $\{x_m\}_m$ tal que $x_m \rightarrow x$. Si una infinidad de x_m 's caen en alguna de las P_n 's o en X , ya habríamos terminado puesto que cada uno de estos conjuntos es cerrado.

En otro caso, si existiera sólo un número finito de x_m 's en cada P_n , podríamos tomar subsucesiones $\{x_{m(i)}\}_i$ y $\{P_{n(i)}\}_i$ de $\{x_m\}_m$ y $\{P_n\}_n$ respectivamente, tales que $x_{m(i)} \in P_{n(i)}$. Ahora ya que $P_{n(i)} \subset T_{n(i)}$ se tiene que $\text{dis}(x_{m(i)}, X) \leq \frac{1}{n(i)}$, de aquí que $\text{dis}(x_{m(i)}, X) \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$. Por lo que $\text{dis}(x, X) = 0$ entonces $x \in X^- = X \subset P$. Es decir P es cerrado.

— P es denso en sí mismo:

Desde luego $X' \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \right) \subset P'$. Falta ver que $X - X' \subset P'$.

Sea x en $X - X'$. Ya que x no es un punto de acumulación de X , existe m en $\mathbb{N}$ tal que $X \cap V_{3/m}^*(x) = \emptyset$, para todo natural $m \geq m$. Tomemos $m \geq m$.

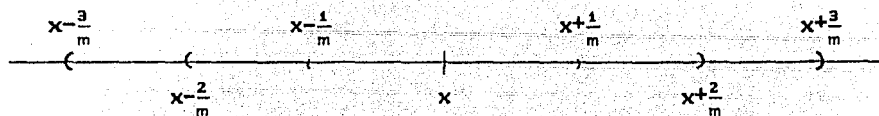


fig. 3.3.3

Puesto que $\phi(E, x) = 1$, se tiene que $m(E \cap V_{1/m}^*(x)) > 0$.
 Notemos que $V_{1/m}(x) \cap (T_1 \cup \dots \cup T_{m-1}) = \emptyset$. Esto implica que

$$E \cap V_{1/m}^*(x) = \left[X \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \right) \right] \cap V_{1/m}^*(x) = \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} S_n \right) \cap V_{1/m}^*(x).$$

Entonces

$$m\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} (S_n \cap V_{1/m}^*(x))\right) > 0.$$

De modo que existe $k \geq m$ tal que

$$S_k \cap V_{1/m}^*(x) = \left(\bigcup_{i=1}^{N(k)} S_i^k \right) \cap V_{1/m}^*(x) = \bigcup_{i=1}^{N(k)} (S_i^k \cap V_{1/m}^*(x))$$

tiene medida positiva. De aquí que

$$m(S_i^k \cap V_{1/m}^*(x)) > 0 \quad \text{para alguna } i \text{ en } \mathbb{N} \quad (\text{III})$$

En particular $S_i^k \cap V_{1/m}^*(x) \neq \emptyset$, de donde

$$J_i^k \cap V_{1/m}^*(x) \neq \emptyset \quad (\text{IV})$$

Dado y en $(x - \frac{2}{m}, x - \frac{1}{m}) \cup (x + \frac{1}{m}, x + \frac{2}{m})$, tenemos que $\text{dis}(y, X) > \frac{1}{m} \geq \frac{1}{k}$. De modo que $y \notin T_k$, así que $y \notin J_i^k$. Por tanto

$$J_i^k \cap \left[(x - \frac{2}{m}, x - \frac{1}{m}) \cup (x + \frac{1}{m}, x + \frac{2}{m}) \right] = \emptyset \quad (\text{V})$$

De (IV) y (V) y puesto que J_i^k es conexo, se tiene necesariamente que $J_i^k \subset V_{1/m}(x)$. Y de aquí que $J_i^k \cap V_{1/m}^*(x) = J_i^k$. De esto último tenemos que

$$S_i^k \cap V_{1/m}^*(x) = (E \cap J_i^k) \cap V_{1/m}^*(x) = E \cap J_i^k = S_i^k.$$

entonces, por (III) $m(S_i^k) > 0$. Así que $P_i^k \neq \emptyset$ y

$$P_i^k \subset S_i^k \subset S_i^k \cap V_{1/m}^*(x) \subset V_{1/m}^*(x) \subset V_{3/m}^*(x). \quad \text{De donde}$$

48

$P \cap V_{\beta/m}^*(x) \supset P_i^k \cap V_{\beta/m}^*(x) = P_i^k \neq \emptyset$. Entonces $P \cap V_{\beta/m}^*(x) \neq \emptyset$ para todo $m \geq m$. Por tanto x es un punto de acumulación de P .

iii) $\phi(P, x) = 1$ para todo x en X :

Para los puntos x en X tales que $\phi(X, x) = 1$ el resultado es claro. Analicemos, pues, el otro caso.

Sea $x \in X$ tal que $\phi(X, x) \neq 1$. Sea $\{I_j\}_j$ una sucesión de intervalos abiertos tal que

$$x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j \text{ y } \ell(I_j) \rightarrow 0 \text{ cuando } j \rightarrow \infty.$$

Ahora veremos que para cada j en $\mathbb{N}$, existe n_j mínimo con la propiedad de que $S_{n(j)} \cap I_j \neq \emptyset$. Para esto, basta ver que $\{n \in \mathbb{N} : I_j \cap S_n \neq \emptyset\}$ es no vacío.

Dada j en $\mathbb{N}$, no es posible que $E \cap I_j \subset X$, pues de otra manera $E \cap I_j = X \cap I_j$, y como $\phi(E, x) = 1$, se tendría que $\phi(X, x) = 1$, contrario a lo que estamos suponiendo. Por tanto podemos tomar y en $E \cap I_j - X$. Entonces existe n en $\mathbb{N}$ tal que $y \in T_n$. De aquí que $y \in I_j \cap S_n$. Hemos probado entonces que para todo j en $\mathbb{N}$, $\{n \in \mathbb{N} : I_j \cap S_n \neq \emptyset\} \neq \emptyset$.

Por definición de $S_{n(j)}$ tenemos que $\text{dis}(y, x) > \frac{1}{n(j) + 1}$, por lo que

$$\ell(I_j) > \frac{1}{n(j) + 1} \quad (VI)$$

Esto es $n(j) + 1 > \frac{1}{\ell(I_j)}$ y puesto que $\ell(I_j) \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$ entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} n(j) = \infty \quad (VII)$$

Ahora recordando la definición de P y $n(j)$ es claro que

$$P \cap I_j = \left[X \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \right) \right] \cap I_j = \left[X \cap I_j \right] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \cap I_j \right)$$

y como esta unión es ajena, se tiene entonces que

$$m(P \cap I_j) = m(X \cap I_j) + m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \cap I_j\right) \quad (\text{VIII})$$

Puesto que por construcción los $(P_n \cap I_j)$'s son ajenos dos a dos, entonces

$$m\left(\bigcup_{n=n(j)}^{\infty} P_n \cap I_j\right) = \sum_{n=n(j)}^{\infty} m(P_n \cap I_j) \quad (\text{IX})$$

De (VIII) y (IX) tenemos

$$m(P \cap I_j) = m(X \cap I_j) + \sum_{n=n(j)}^{\infty} m(P_n \cap I_j)$$

y por (II) tenemos

$$m(P \cap I_j) > m(X \cap I_j) + \sum_{n=n(j)}^{\infty} \left[m(S_n \cap I_j) - \frac{1}{2^n} \right]$$

Por tanto

$$m(P \cap I_j) > m(X \cap I_j) + \sum_{n=n(j)}^{\infty} m(S_n \cap I_j) - \frac{1}{2^{n(j)-1}} \quad (\text{X})$$

También por construcción los S_n 's son ajenos dos a dos, así que

$$m\left(\bigcup_{n=n(j)}^{\infty} S_n \cap I_j\right) = \sum_{n=n(j)}^{\infty} m(S_n \cap I_j) \quad (\text{XI})$$

Por (I) y la definición de $n(j)$

$$E \cap I_j = (X \cap I_j) \cup \left[\bigcup_{n=n(j)}^{\infty} (S_n \cap I_j) \right]$$

50 y por ser unión ajena

$$m(E \cap I_j) = m(X \cap I_j) + m\left(\bigcup_{n=n(j)}^{\infty} S_n \cap I_j\right) \quad (XII)$$

Por (X) y (XI)

$$m(P \cap I_j) > m(X \cap I_j) + m\left(\bigcup_{n=n(j)}^{\infty} S_n \cap I_j\right) - \frac{1}{2^{n(j)-1}}$$

y por (XII)

$$m(P \cap I_j) > m(E \cap I_j) - \frac{1}{2^{n(j)-1}}$$

entonces

$$\frac{m(P \cap I_j)}{\ell(I_j)} > \frac{m(E \cap I_j)}{\ell(I_j)} - \frac{1}{2^{n(j)-1} \ell(I_j)}$$

y por (VI)

$$\frac{m(P \cap I_j)}{\ell(I_j)} > \frac{m(E \cap I_j)}{\ell(I_j)} - \frac{n(j) + 1}{2^{n(j)-1}}$$

como

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m(E \cap I_j)}{\ell(I_j)} = 1$$

y por (VII)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n(j) + 1}{2^{n(j)-1}} = 0$$

entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m(P \cap I_j)}{\ell(I_j)} \geq 1$$

y como desde luego

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m(P \cap I_j)}{\ell(I_j)} \leq 1$$

tenemos entonces que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m(P \cap I_j)}{l(J_j)} = 1.$$

Como $\{I_n\}_n$ era arbitraria, entonces $\phi(P, x) = 1$. ■

TEOREMA 3.3.10 (LUSIN-MENCHOFF) : Sea E medible, X un subconjunto cerrado de E tal que $\phi(E, x) = 1$ para todo x en X , entonces existe un conjunto P tal que:

i) $X \subset P \subset E$

ii) P es perfecto

iii) $\phi(P, x) = 1 \quad \forall x \in X$.

Demostración: Para cada k en $\mathbb{Z}$ definimos:

$$I_k = (k, k+1)$$

$$I^k = (k + \frac{1}{2}, k + \frac{3}{2})$$

$$J_k = [k + \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}]$$

$$I^k = [k + \frac{3}{4}, k + \frac{5}{4}]$$

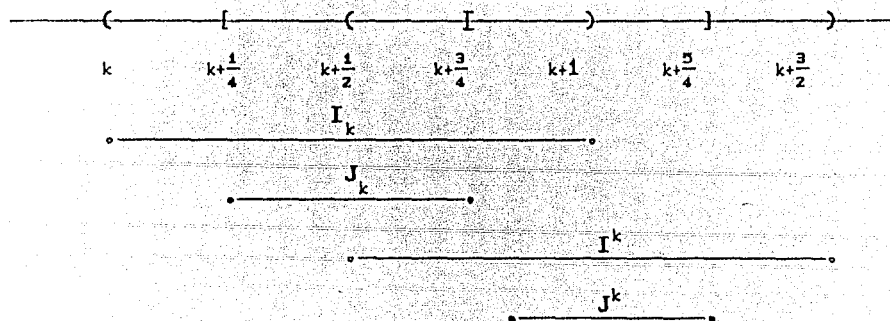


fig. 3.3.4

Sean $E_k = I_k \cap E$ y $E^k = I^k \cap E$, entonces

$$E_k \text{ es medible, } E_k \subset I_k, \text{ diam}(E_k) \leq 1 \quad (I)$$

$$E^k \text{ es medible, } E^k \subset I^k, \text{ diam}(E^k) \leq 1 \quad (II)$$

y además, sean $X_k = J_k \cap X$ y $X^k = J^k \cap X$, entonces

$$X_k \text{ es un subconjunto cerrado de } E_k \quad (III)$$

$$X^k \text{ es un subconjunto cerrado de } E^k \quad (IV)$$

Dado k en $\mathbb{Z}$, veamos que $\phi(E_k, x) = 1$, para todo x en X_k :

Sea x en X_k . Y sea $\{I_n^k\}$ una sucesión de intervalos tales que $x \in I_n^k$ para todo n en $\mathbb{N}$ y $\ell(I_n^k) \rightarrow 0$ cuando n tiende a infinito. Existe, entonces, n en $\mathbb{N}$ tal que $I_n^k \subset I_k$ si $n > N$. De aquí que si $n > N$

$$E_k \cap I_n^k = E_k \cap I_k \cap I_n^k = E \cap I_n^k, \text{ de donde}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(E_k \cap I_n^k)}{\ell(I_n^k)} = \frac{m(E \cap I_n^k)}{\ell(I_n^k)} = 1,$$

por lo tanto

$$\phi(E_k, x) = 1 \quad \forall x \in X_k \quad (V)$$

Análogamente se puede ver que

$$\phi(E^k, x) = 1 \quad \forall x \in X^k \quad (VI)$$

Por las propiedades (I), (III), y (V) y por el teorema anterior podemos concluir que; Existe P_k un conjunto perfecto tal que

$$X_k \subset P_k \subset E_k \text{ y } \phi(P_k, x), \text{ para todo } x \text{ en } X_k.$$

Y por (II), (IV), y (VI) concluimos que existe P^k un conjunto perfecto tal que

$$X^k \subset P^k \subset E^k \text{ y } \phi(P^k, x), \text{ para todo } x \text{ en } X^k.$$

$P = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (P_k \cup P^k)$ satisface las condiciones deseadas:

i) $X \subset P \subset E$:

— Es claro que $P \subset E$.

— Chequemos que $X \subset P$:

Puesto que $R = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (J_k \cup J^k)$ se tiene que

$$X = X \cap \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (J_k \cup J^k) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [(X \cap J_k) \cup (X \cap J^k)] =$$

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (X_k \cup X^k) \subset \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (P_k \cup P^k) = P.$$

ii) P es perfecto:

$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} P_k$ es unión de perfectos tales que $P_k \subset I_k$, pero $\{I_k\}_k$ es una sucesión de intervalos ajenos. De donde $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} P_k$ es perfecto. Por razones similares $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} P^k$ es perfecto. Así que P es perfecto por ser unión de dos perfectos.

iii) $\phi(P, x) = 1, \forall x \in X$:

Sea x en $X = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (X_k \cup X^k)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in X_k$, para alguna k en $\mathbb{N}$. Por como fueron definidos los P_k 's tenemos que $\phi(P_k, x) = 1$, pero $P_k \subset P$ entonces $\phi(P, x) = 1$. ■

54 NOTACION 3.3.11 Para indicar que un conjunto B tiene densidad 1 en cada uno de los puntos de un subconjunto A escribiremos $A \subset^* B$.

COROLARIO 3.3.12 Sea E medible, X un subconjunto cerrado de E tal que $\phi(E, x) = 1$ para x en X , entonces existe un conjunto perfecto P tal que $X \subset^* P \subset^* E$.

Demostración: Por el teorema de Lusin-Menchoff sabemos que existe un conjunto perfecto P_1 tal que $X \subset^* P_1 \subset^* E$.

Y por el teorema de la densidad de Lebesgue, sabemos que $F = \{x \in E : \phi(E, x) \neq 1\}$ tiene medida cero.

$P_1 - F$ satisface que $X \subset^* P_1 - F$ puesto que $X \subset^* P_1$ y P_1 y $P_1 - F$ difieren en un conjunto de medida cero. Y también se cumple que $P_1 - F \subset^* E$ esto de la definición de F . Es decir, tenemos $X \subset^* P_1 - F \subset^* E$.

Nuevamente por el teorema de Lusin-Menchoff, aseguramos que existe un conjunto perfecto P tal que $X \subset^* P \subset P_1 - F$. Por lo tanto $X \subset^* P \subset^* E$. ■

TEOREMA 3.3.13 (PRIMER TEOREMA DE ZAHORSKI): Sea E un conjunto F_σ tal que $\phi(E, x) = 1$ para todo x en E . Entonces existe una función f , aproximadamente continua, tal que:

$$0 < f(x) \leq 1 \quad \text{para todo } x \in E$$

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \notin E.$$

Demostración: Si $E = \emptyset$, $f \equiv 0$ satisface las condiciones. Consideremos el caso de que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, donde, para cada n en F_n , es cerrado y no vacío.

Sea $K_1 = F_1$. Ya que $\phi(E, x) = 1$, para todo x en E , $K_1 \subset^* E$. Así que por el teorema de Lusin-Menchoff sabemos que existe un conjunto perfecto P_2 tal que $K_1 \subset^* P_2 \subset^* E$.

Sea $K_2 = F_2 \cup P_2$ entonces K_2 es cerrado y $K_1 \subset^* K_2 \subset^* E$.

Supongamos que ya definimos n conjuntos cerrados $K_1, K_2, \dots, K_n$ tales que $F_i \subset K_i$, $i \leq i \leq n$ y $K_1 \subset^* K_2 \subset^* \dots \subset^* K_n \subset^* E$.

Definamos el cerrado K_{n+1} : Por el teorema de Lusin-Menchoff existe P_{n+1} perfecto tal que $K_n \subset^* P_{n+1} \subset^* E$.

Sea $K_{n+1} = F_{n+1} \cup P_{n+1}$, entonces K_{n+1} es cerrado, y además $F_{n+1} \subset K_{n+1}$ y $K_n \subset^* K_{n+1} \subset^* E$.

Hemos definido una sucesión de conjuntos cerrados $\{K_n\}$ tal que;

$$K_n \subset^* K_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (I)$$

$$F_n \subset K_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (II)$$

$$K_n \subset^* E \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (III)$$

De (II) y (III), $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, es decir

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \quad (IV)$$

Hemos definido un conjunto por cada natural, el siguiente paso será construir un conjunto K_λ para cada $\lambda = n/2^m$ con $n > 2^m$, con las características de los K_λ ya construidos. Esto lo haremos mediante un proceso inductivo.

Para $m = 0$, definimos $K_{n/2^m} = K_n$ y tenemos por (I)

$$K_{n/2^m} \subset^* K_{(n+1)/2^m}.$$

Supongamos que para m , hemos definido $K_{n/2^m}$ tal que $K_{n/2^{m+1}} \subset^* K_{(n+1)/2^{m+1}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos para los pares:

$$K_{2n/2^{m+1}} = K_{n/2^m} \quad (V)$$

y para los impares un conjunto cerrado (perfecto) $K_{(2n+1)/2^{m+1}}$ conjunto cerrado (perfecto) tal que

$$K_{n/2^m} \subset^* K_{(2n+1)/2^{m+1}} \subset^* K_{(n+1)/2^m} \quad (VI)$$

el cual sabemos que existe, por el corolario 3.3.12,

De (V) y la primera parte de (VI)

$$K_{2n/2^{m+1}} \subset^* K_{(2n+1)/2^{m+1}} \quad (VII)$$

De (V) y la segunda parte de (VI)

$$K_{(2n+1)/2^{m+1}} \subset^* K_{(2n+2)/2^{m+1}} \quad (VIII)$$

De (VII) y (VIII)

$$K_{n/2^{m+1}} \subset^* K_{(n+1)/2^{m+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Es decir dado m fijo, hemos definido una familia $\mathcal{F}_m = \{K_\lambda : \lambda = n/2^m, n > 2^m\}$ de conjuntos cerrados tal que:

$$K_{n/2^m} \subset K_{(n+1)/2^m} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{IX})$$

NOTA: Observemos que para cada λ de la forma $\lambda = n/2^m$, K_λ no depende de la representación de λ . Por que se desprende de (V) que, $K_\lambda = K_{r/2^q}$ donde $\lambda = r/2^q$ y r impar.

Ahora notemos que si $n/2^m < r/2^q$ (desde luego $n \geq 2^m$ y $r \geq 2^q$), se cumple que $K_{n/2^m} \subset K_{r/2^q}$.

Para mostrar esto, sea $t = \max(m, q)$ entonces $(2^{t-m})n/2^t = n/2^m < r/2^q = 2^{t-q}/2^t$. Así que por (IX) tenemos que

$$K_{n/2^m} \subset K_{r/2^q} \quad \text{si} \quad n/2^m < r/2^q \quad (\text{X})$$

Por último definiremos K_λ para cada $\lambda \geq 1$, como

$$K_\lambda = \bigcap_{n/2^m \geq \lambda} K_{n/2^m} \quad (\text{XI})$$

Observemos que si $\lambda = n_0/2^{m_0}$, la definición en (XI) coincide con la definición que habíamos dado en (V) y en (VI).

Puesto que obviamente

$$\bigcap_{n/2^m \geq n_0/2^{m_0}} K_{n/2^m} \subset K_{n_0/2^{m_0}}$$

y

$$K_{n_0/2^{m_0}} \subset \bigcap_{n/2^m \geq n_0/2^{m_0}} K_{n/2^m} \quad \text{por (X)}$$

Así para cada $\lambda \geq 1$ tenemos un conjunto cerrado K_λ . Y estos conjuntos satisfacen que $K_{\lambda_1} \subset K_{\lambda_2}$ si $\lambda_1 < \lambda_2$. Para ver que esto es cierto notemos primero que existen n y m tales que $\lambda_1 < n/2^m < (n+1)/2^m < \lambda_2$, entonces de (XI) es claro que $K_{\lambda_1} \subset K_{n/2^m} \subset K_{(n+1)/2^m} \subset K_{\lambda_2}$ y entonces por (X) $K_{\lambda_1} \subset K_{\lambda_2}$.

Ahora definiremos la función f como sigue:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\inf \{ \lambda : x \in K_\lambda \}} & \text{Si } x \in E \\ 0 & \text{Si } x \notin E \end{cases}$$

$$\text{donde } E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

i) Veamos que $0 < f(x) \leq 1$ para todo $x \in E$.

Si $x \in E$ entonces $x \in K_n$, para alguna n en $\mathbb{N}$. Entonces $\inf \{ \lambda : x \in K_\lambda \} \leq n$, entonces

$$\frac{1}{\inf \{ \lambda : x \in K_\lambda \}} \geq \frac{1}{n}.$$

esto es $f(x) \geq \frac{1}{n}$, y entonces $f(x) > 0$. Y puesto que $\lambda \geq 1$,

$\inf \{ \lambda : x \in K_\lambda \} \geq 1$, así que $f(x) \leq 1$.

ii) f es medible:

Puesto que $f \geq 0$, basta checar que para todo $\alpha > 0$ el conjunto $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ es medible.

Sea $\alpha > 0$. Notemos que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$$f(x) \geq \alpha$$

$$\inf\{\lambda : x \in K_\lambda\} \leq 1/\alpha$$

$$x \in K_\lambda \text{ para todo } \lambda > 1/\alpha$$

$$x \in \bigcap_{\lambda > 1/\alpha} K_\lambda$$

Esto implica que $\{x : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{\lambda > 1/\alpha} K_\lambda$. Por lo tanto $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ es medible.

iii) Veamos que f es aproximadamente continua:

— Para ver que f es aproximadamente continua en E^c veamos que f es continua ahí:

Sea x_0 en E^c y sea n en $\mathbb{N}$. entonces $x_0 \notin K_n$. Puesto que K_n es cerrado, existe $\delta > 0$ tal que $V_\delta(x_0) \cap K_n = \emptyset$. Si $x \in E \cap V_\delta(x_0)$, entonces $\inf\{\lambda : x \in K_\lambda\} \geq n$, de aquí que $f(x) \leq \frac{1}{n}$. Si $x \in E^c \cap V_\delta(x_0)$, $f(x) = 0 < \frac{1}{n}$. Como n era arbitraria, entonces $f(x) < \frac{1}{n}$ para todo x en $V_\delta(x_0)$. Y puesto que $f(x_0) = 0$ entonces f es continua en x_0 .

— Para ver que f es aproximadamente continua en E veremos dos casos:

a) f es semicontinua superiormente en E . (Y por tanto semiaproximadamente continua superiormente en E).

b) f es semiaproximadamente continua inferiormente en E .

De a) y b) concluiremos que f es aproximadamente continua en E .

a) Sea x_0 en E . Y sea $\varepsilon > 0$.

El caso en que $f(x_0) = 1$ es claro, ya que para todo x se tiene que $f(x) \leq 1$, en particular para todo x , se cumple que $f(x) \leq 1 + \varepsilon = f(x_0) + \varepsilon$.

Consideremos ahora el caso en el que $f(x_0) < 1$, podemos suponer que $\varepsilon < 1 - f(x_0)$. Puesto que

$$\inf \{ \lambda : x_0 \in K_\lambda \} = \frac{1}{f(x_0)} \geq \frac{1}{f(x_0) + \varepsilon} > 1$$

entonces

$$x_0 \notin K_{1/[f(x_0) + \varepsilon]}.$$

Y como

$$K_{1/[f(x_0) + \varepsilon]}$$

es cerrado, existe $\delta > 0$ tal que

$$V_\delta(x_0) \cap K_{1/[f(x_0) + \varepsilon]} = \emptyset.$$

Si $x \in E \cap V_\delta(x_0)$ entonces

$$\inf \{ \lambda : x \in K_\lambda \} \geq \frac{1}{f(x_0) + \varepsilon}$$

de donde $f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$. Si $x \in E^c \cap V_\delta(x_0)$ entonces $f(x) = 0 < f(x_0) + \varepsilon$. Por lo tanto $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ para todo x en $V_\delta(x_0)$.

De los dos casos anteriores se concluye que f es semicontinua superiormente en E .

b) Sea x_0 en E y sea $\varepsilon > 0$. Queremos ver que el conjunto $\{x : f(x) > f(x_0) - \varepsilon\}$ tiene densidad 1 en x_0 .

Los casos en que $f(x_0) - \varepsilon = 0$ y $f(x_0) - \varepsilon < 0$ son claros ya que tendríamos:

$$\{x : f(x) > f(x_0) - \varepsilon\} = \{x : f(x) > 0\} = E \quad \text{si } f(x_0) = \varepsilon$$

y

$$\{x : f(x) > f(x_0) - \varepsilon\} = \mathbb{R} \quad \text{si } f(x_0) < \varepsilon$$

Analicemos entonces el caso en que $f(x_0) - \varepsilon > 0$.

Sea $a = f(x_0) - \varepsilon$ tenemos entonces $f(x_0) > a > 0$ o bien $0 < 1/f(x_0) < 1/a$, entonces existe $\lambda_1 \geq 1$ tal que $x_0 \in K_{\lambda_1}$ y $\lambda_1 < 1/a$.

Sea $\lambda_2 \in (\lambda_1, 1/a)$ fijo, entonces $x_0 \in K_{\lambda_1} \subset K_{\lambda_2}$.

Veamos que $K_{\lambda_2} \subset f^{-1}(a, \infty)$. Sea $x \in K_{\lambda_2}$ entonces $\inf \{ \lambda : x \in K_\lambda \} \leq \lambda_2$ así que $f(x) \geq 1/\lambda_2 > a$. Entonces $K_{\lambda_2} \subset f^{-1}(a, \infty)$. Por lo tanto $K_{\lambda_1} \subset f^{-1}(a, \infty)$.

Por tanto $\phi(f^{-1}(a, \infty), x_0) = 1$. ■

TEOREMA 3.3.14 (SEGUNDO TEOREMA DE ZAHORSKI) Sean E_1 , E_2 y H tres conjuntos disjuntos, tales que $E_1 \cup E_2 \cup H = \mathbb{R}$ y $E_1 \cup H$ y $E_2 \cup H$ son conjuntos del tipo F_σ y d -abiertos entonces existe una función f aproximadamente continua tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{para todo } x \in E_1 \\ f(x) &= 1 && \text{para todo } x \in E_2 \\ 0 < f(x) < 1 && \text{para todo } x \in H. \end{aligned}$$

Demostración: Del primer teorema de Zahorski, sabemos que existen funciones $g(x)$ y $h(x)$ aproximadamente continuas tales que

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 && \text{para todo } x \in E_1 \\ 0 < g(x) &\leq 1 && \text{para todo } x \in E_2 \cup H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 && \text{para todo } x \in E_2 \\ 0 < h(x) &\leq 1 && \text{para todo } x \in E_1 \cup H. \end{aligned}$$

Sea $f : \mathbb{R}_d \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{g(x)}{g(x) + h(x)}$$

Dado que E_1 y E_2 son ajenos, entonces g y h no se anulan simultáneamente. Por tanto f está bien definida y es aproximadamente continua.

Por otro lado

si $x \in E_1$, $g(x) = 0$ así que $f(x) = 0$

si $x \in E_2$, $h(x) = 0$ entonces $f(x) = 1$

si $x \in H$, $g(x) > 0$ y $h(x) > 0$ de modo que $f(x) > 0$

y desde luego $f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular para todo $x \in H$. ■

COROLARIO 3.3.15 Si E_1 y E_2 son dos conjuntos G_δ 's ajenos y d -cerrados, entonces existe una función aproximadamente continua f tal que

$f(x) = 0$ para todo $x \in E_1$

$f(x) = 1$ para todo $x \in E_2$

$0 < f(x) < 1$ para todo $x \in E_1^c \cap E_2^c$.

Demostración: Apliquemos el segundo Teorema de Zahorski a los conjuntos E_1 , E_2 , $H = E_1^c \cap E_2^c$ ya que

$$E_1 \cup E_2 \cup H = E_1 \cup E_2 \cup (E_1^c \cap E_2^c) = \mathbb{R}$$

$$E_1 \cup H = E_1 \cup (E_1^c \cap E_2^c) = E_2^c$$

$$E_2 \cup H = E_2 \cup (E_1^c \cap E_2^c) = E_1^c$$

así que $E_1 \cup H$ y $E_2 \cup H$ son F_σ y d -abiertos por ser complemento, cada uno de un G_δ d -cerrado. ■

COROLARIO 3,3,16 Sean A y B conjuntos G_δ , ajenos y d -cerrados, entonces existen funciones α y β aproximadamente continuas tales que:

$$\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in A$$

$$0 \leq \alpha(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\beta(x) = 1 \quad \forall x \in B$$

$$0 \leq \beta(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \beta = 0.$$

Demostración: Por el corolario 3,3,15 sabemos que existe una función aproximadamente continua tal que:

$$\gamma(x) = 1 \quad \forall x \in A$$

$$\gamma(x) = 0 \quad \forall x \in B$$

$$0 < \gamma(x) < 1 \quad \forall x \in A^c \cap B^c.$$

Sean $A_1 = \{x : \gamma(x) \geq 1/2\}$ y $B_1 = \{x : \gamma(x) \leq 1/2\}$ entonces

$$A \cap B_1 = \emptyset$$

A y B_1 son G_δ 's ya que γ es de Baire (corolario 1,8).

A y B_1 son d -cerrados.

Así que existe una función aproximadamente continua α tal que:

$$\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in A$$

$$\alpha(x) = 0 \quad \forall x \in B_1$$

$$0 < \alpha(x) < 1 \quad \forall x \in A^c \cap B_1^c.$$

Análogamente existe una función β aproximadamente continua tal que:

$$\beta(x) = 0 \quad \forall x \in A_1$$

$$\beta(x) = 1 \quad \forall x \in B$$

$$0 < \beta(x) < 1 \quad \forall x \in A_1^c \cap B^c.$$

Así que $\alpha\beta$ es aproximadamente continua en $\mathbb{R}$ y además

$$\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in A$$

$$0 \leq \alpha(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\beta(x) = 1 \quad \forall x \in B$$

$$0 \leq \beta(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\alpha\beta = 0. \blacksquare$$

TEOREMA 3.3.17 La Topología de la Densidad es completamente regular.

Demostración: Sea U un d -abierto y x_0 en U . Puesto que $\phi(U, x) = 1$ para todo x en U y puesto que $K_1 = \{x_0\}$ es cerrado, por el teorema de Lusin-Menchoff, existe un conjunto cerrado (perfecto) tal que $K_1 \subset K_2 \subset U$ y puesto que U es d -abierto, se tiene entonces que $K_1 \subset K_2 \subset U$. Suponiendo que ya hemos definido el conjunto K_n para $n > 1$ tal que

$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset U$. Nuevamente por el teorema de Lusin-Menchoff, existe un conjunto K_{n+1} cerrado (perfecto) tal que $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_{n+1} \subset U$. Es decir podemos definir una sucesión $\{K_n\}$ de conjuntos cerrados tales que $K_n \subset K_{n+1} \subset U$ para todo n en $\mathbb{N}$.

Sea $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Puesto que cada K_n es cerrado E es un F_σ además $\phi(E, x) = 1$ para todo x en E . Dadas estas condiciones podemos aplicar el primer teorema de Zahorski, es decir podemos asegurar que existe;

$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, f aproximadamente continua, tal que:

$$0 < f(x) \leq 1 \quad \text{para todo } x \text{ en } E$$

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \text{ en } E^c$$

Puesto que $E \subset U$ y $x_0 \in E$ entonces

$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad \text{para todo } x \text{ en } U$$

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \text{ en } U^c$$

Si $f(x_0) = 1$ hemos terminado. Si $f(x_0) < 1$, definimos h como sigue:

$$h: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{f(x_0) + |f(x) - f(x_0)|}$$

h está bien definida ya que, como $x_0 \in E$, $f(x_0) > 0$. Y claramente h es aproximadamente continua. También es evidente que

$$h(x_0) = 1$$

$$h(x) = 0 \quad \text{para todo } x \text{ en } U^c$$

$0 \leq h(x) \leq 1$ para todo x en U

Por que si $f(x) > 0$, entonces

$$f(x_0) + |f(x) - f(x_0)| \geq f(x_0) + f(x) - f(x_0) > 0 \quad \text{entonces}$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{f(x_0) + |f(x) - f(x_0)|} \leq \frac{f(x)}{f(x_0) + f(x) - f(x_0)} = 1. \blacksquare$$

SEGUNDA PARTE:

EXISTENCIA DE FUNCIONES DIFERENCIABLES
MONOTONAS EN NINGUNA PARTE

CAPÍTULO 4

PRUEBA DE WEIL

Esta prueba consiste en mostrar que el espacio $(\Delta'_0, \|\dots\|)$ (el espacio de las derivadas acotadas definidas en $[0,1]$, que se anulan en algún subconjunto denso de $[0,1]$) es completo. Y mostrar que $E = \{f \in \Delta'_0 : \text{Existe algún intervalo } J \subset [0,1] \text{ tal que } f|_J \geq 0 \text{ o } f|_J \leq 0\}$ es de la primera categoría. Con estas dos premisas concluir, con base en el Teorema de la Categoría de Baire, que $R = \{f \in \Delta'_0 : \text{Para todo intervalo } J \subset [0,1], f \text{ toma valores positivos y negativos en } J\}$, es denso.

Así, si f es una primitiva de una función f en R , f será una función diferenciable que no es monótona en ningún intervalo.

TEOREMA 4.1 (LÍMITE UNIFORME DE DERIVADAS ES DERIVADA). Si $\{f_n\}$ es una sucesión de derivadas, definidas en $A \subset \mathbb{R}$, la cual converge uniformemente a una función f , entonces f es una derivada.

Demostración: Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones tales que $f'_n = f_n$, para todo n en $\mathbb{N}$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, definimos $g_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n = f_n - f_n(0)$ entonces $g'_n = f'_n = f_n$ y $g_n(0) = 0$ para todo n en $\mathbb{N}$. Esto es $g'_n \rightarrow f$ y $g_n(0) \rightarrow 0$, de acuerdo con ([20]; teo.7.17) existe $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g_n \rightarrow g$ y $g' = f$, es decir, f es una derivada. ■

TEOREMA 4.2 El espacio $(\Delta', \|\dots\|_\infty)$, de las derivadas acotadas en $[0,1]$ con la norma del supremo es un espacio de Banach.

Demostración: Es claro que $(\Delta', \|\dots\|_\infty)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Para ver que es completo consideremos una sucesión de Cauchy $\{f_n\}_n$ en Δ' .

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si n y m son mayores que N se tiene que $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Es decir $\{f_n\}_n$ es uniformemente de Cauchy. En particular para cada $x \in [0,1]$ $\{f_n(x)\}_n$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por lo tanto convergente; sea y_x tal que $f_n(x) \rightarrow y_x$.

Veamos que $f_n \xrightarrow{u} f$, donde $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $f(x) = y_x$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{f_n\}_n$ es uniformemente de Cauchy, existe N en $\mathbb{N}$ tal que para todo $x \in [0,1]$, n y m mayores que N se tiene $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ o bien

$$-\varepsilon + f_m(x) < f_n(x) < \varepsilon + f_m(x),$$

tomando límite cuando m tiende a infinito, tenemos que $-\varepsilon + f(x) < f_n(x) < \varepsilon + f(x)$. Esto es, para todo $x \in [0,1]$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ si $n > N$, por lo que $f_n \xrightarrow{u} f$. Y por el teorema anterior f es una derivada.

Por último veamos que f está acotada. Puesto que $f_n \xrightarrow{u} f$ existe algún natural N tal que para todo $x \in [0,1]$, $|f(x) - f_N(x)| < 1$ entonces $|f(x)| < 1 + |f_N(x)| < 1 + M$ si M es una cota de f_N . Es decir f está acotada.

Ya que $f \in \Delta'$, $(\Delta', \|\dots\|_\infty)$ es un espacio de Banach. ■

A continuación veremos que el espacio $(\Delta'_0, \|\dots\|_\infty)$ también es de Banach, donde Δ'_0 es el conjunto de las derivadas acotadas definidas en $[0,1]$, que se anulan en algún denso. Pero antes veremos dos lemas:

LEMA 4.3 Si $f \in \Delta'_0$ y $J \subset [0,1]$ es un intervalo entonces $J\{f=0\}$ es un denso en J del tipo G_δ .

Demostración: Que $J\{f=0\}$ es denso en J es inmediato de la definición de Δ'_0 . Por el corolario 1.8 y el teorema 1.9 sabemos que los conjuntos $J\{f \geq 0\}$ y $J\{f \leq 0\}$ son del tipo G_δ , de donde $J\{f \geq 0\} \cap J\{f \leq 0\} = J\{f=0\}$ también lo es. ■

LEMA 4.4 $(\Delta'_0, \|\dots\|_\infty)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Demostración: Si α es un número real y $f \in \Delta'_0$ es evidente que $\alpha f \in \Delta'_0$. Veamos entonces que f es cerrado bajo la suma.

Sean f y g en Δ'_0 . Por el lema anterior sabemos que los conjuntos $I\{f = 0\}$ y $I\{g = 0\}$ son conjuntos densos del tipo G_δ . Entonces por el Teorema de la Categoría de Baire, su intersección es densa pero además está contenida en $\{x \in I : (f+g)(x) = 0\}$ por lo tanto este último es denso. ■

TEOREMA 4.5 Δ'_0 es completo.

Demostración: Como $\Delta'_0 \subset \Delta'$ y Δ' es completo, basta probar que Δ'_0 es cerrado en Δ' .

Supongamos que $f \in \Delta'_0$, así que existe $\{f_n\} \subset \Delta'_0$ tal que $f_n \rightarrow f$.

Por el lema 4.3 sabemos que los conjuntos $I\{f_n = 0\}$ son del tipo G_δ y densos, entonces por el Teorema de la categoría de Baire tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I\{f_n = 0\}$ es denso. Ahora, dado x en $\bigcap_{n=1}^{\infty} I\{f_n = 0\}$ se tiene que $f_n(x) = 0$, para todo n en $\mathbb{N}$. De donde $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, para todo x en $\bigcap_{n=1}^{\infty} I\{f_n = 0\}$. Es decir f se anula en un denso, por lo tanto f está en Δ'_0 . ■

DEFINICION 4.6 (DERIVADA DE POMPEIU) : Una función definida en un intervalo cerrado, es llamada una derivada de Pompeiu, si es una función acotada, mayor o igual que cero, distinta de la constante cero, que se anula en algún denso y que por supuesto es una derivada.

Mostraremos la construcción que dió Pompeiu para una función de este tipo en el siguiente: 73

TEOREMA 4.7 Existen derivadas de Pompeiu que son positivas en algún subconjunto denso de su dominio.

Demostración: Escojamos $\{A_n\}$ una sucesión de números positivos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{A_n}$ convergen. Sean A y B los límites de estas series respectivamente. Y sea $\{a_n\}$ un conjunto numerable denso en $[0,1]$.

Consideremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n (x - a_n)^{1/3}$$

para x en $[0,1]$. Es claro que esta serie converge uniformemente en $[0,1]$, puesto que $(x - a_n)^{1/3}$ está acotada y $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ converge.

Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (x - a_n)^{1/3}, \quad x \in [0,1] \quad (I)$$

$f(x)$ es continua ya que es límite uniforme de funciones continuas y es estrictamente creciente ya que cada una de las funciones $A_n (x - a_n)^{1/3}$ lo es. Por lo que existe $f^{-1}: [\alpha, \beta] \rightarrow [0,1]$. $(Im f)$ es un intervalo ya que f es continua, es decir $Im f$ es compacto y conexo).

Afirmación: La función $(f^{-1})'$ es una derivada de Pompeiu que es positiva en un denso de $[a, b]$. Para demostrar esto probaremos antes tres propiedades:

$$i) \text{ La serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{|x - a_n|} \quad (II)$$

converge excepto en un conjunto de medida cero:

Sea k en $\mathbb{N}$. Si x es tal que $|x - a_n| \geq \frac{1}{k} \sqrt{A_n}$ para casi todo n en $\mathbb{N}$. Entonces $A_n / |x - a_n| \leq k \sqrt{A_n}$ y como

la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{A_n}$$

converge, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{|x - a_n|}$$

converge.

Analicemos ahora el conjunto de las x 's restantes, esto es $E_k = \{x \in [a, b] : |x - a_n| < \frac{1}{k} \sqrt{A_n}, \text{ para una infinidad de } n\text{'s}\}$
 $= \{x \in [a, b] : a_n - \frac{1}{k} \sqrt{A_n} < x < a_n + \frac{1}{k} \sqrt{A_n} \text{ para una infinidad de } n\text{'s}\}$

es decir E_k de la forma:

$$E_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(a_{n(i)} - \frac{1}{k} \sqrt{A_{n(i)}}, a_{n(i)} + \frac{1}{k} \sqrt{A_{n(i)}} \right)$$

entonces

$$E_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{k} \sqrt{A_n}, a_n + \frac{1}{k} \sqrt{A_n} \right)$$

por lo que

$$m(E_k) \leq m \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{k} \sqrt{A_n}, a_n + \frac{1}{k} \sqrt{A_n} \right) \right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{k} \sqrt{A_n} = \frac{2B}{k}.$$

Además es claro que el conjunto D , donde (II) no converge, está contenido en E_k . De donde $m(D) \leq \frac{2B}{k}$ y como k era arbitraria en $\mathbb{N}$ se tiene que $m(D) = 0$.

ii) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}}$$

converge en todos los puntos en que (II) converge. Es decir converge a alguna función f casi donde sea:

Dada x sea L_x tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{|x - a_n|} \rightarrow L_x$$

Notemos que si $|x - a_n| \leq 1$, $(x - a_n)^{2/3} \geq |x - a_n|$, de donde $A_n / (x - a_n)^{2/3} \leq A_n / |x - a_n|$ y si $|x - a_n| > 1$ también $(x - a_n)^{2/3} > 1$ entonces $A_n / (x - a_n)^{2/3} < A_n$. Así que, si definimos los conjuntos N_1 y N_2 como sigue $N_1 = \{n \in \mathbb{N} : |x - a_n| \leq 1\}$ y $N_2 = \{n \in \mathbb{N} : |x - a_n| > 1\}$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}} &= \sum_{n \in N_1} \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}} + \sum_{n \in N_2} \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}} \leq \\ &\sum_{n \in N_1} \frac{A_n}{|x - a_n|} + \sum_{n \in N_2} A_n \leq L_x + A \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}}$$

converge.

Sea E el conjunto donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}}$$

no converge, por i) y ii) $m(E) = 0$. De modo que $[0,1] - E$ es denso.

Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}} \quad , \quad x \in [0,1] - E \quad (III)$$

iii) $f'(x)$ existe para todo $x \in [0,1]$; $f'(x) = \frac{1}{3} f(x)$ en $[0,1] - E$ y $f'(x) = \infty$ para x en E . E es denso en $[0,1]$;

Observemos primero que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(x+h - a_n)^{1/3} - (x - a_n)^{1/3}}{h}$$

dado n llamemos

$$g_n(h) = (x+h - a_n)^{2/3} + (x+h - a_n)^{1/3}(x - a_n)^{1/3} + (x - a_n)^{2/3}$$

Resolviendo la ecuación $g_n(h) = 0$ para $x+h - a_n$, se muestra que en el caso de que $x \neq a_n$, $g_n(h) \neq 0$ para todo h , así que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(x+h - a_n)^{1/3} - (x - a_n)^{1/3}}{h} \frac{g_n(h)}{g_n(h)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n h}{h g_n(h)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{g_n(h)} \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{g_n(h)} \quad \text{si } x \neq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Consideremos ahora los siguientes casos:

77

Primer caso: Cuando $x \in [0,1] - E$ (en este caso $x \neq a_n$, para todo n en $\mathbb{N}$).

Si llamamos $\alpha_h^n = [(x + h - a_n) / (x - a_n)]^{1/3}$, por la observación hecha arriba

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{g_n(h)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_h^n)^2 + \alpha_h^n + 1} \cdot \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}}$$

la función $(\alpha_h^n)^2 + \alpha_h^n + 1$ nunca se anula y su valor mínimo es $\frac{3}{4}$ entonces

$$\frac{A_n}{g_n(h)} \leq \frac{4}{3} \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}}$$

para todo n y todo h . Esto implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{g_n(h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{como función de } h).$$

y recordemos que para $x \in [0,1] - E$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}} = f(x)$$

de donde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{A_n}{g_n(h)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^k \frac{A_n}{g_n(h)}$$

entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{g_n(h)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{A_n}{\frac{3}{4} (x - a_n)^{2/3}} =$$

$$\frac{4}{3} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}}$$

tomando los extremos de esta serie de igualdades, tenemos

78 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{3} f'(x)$

por lo tanto $f'(x) = \frac{1}{3} f'(x)$ si $x \in [0,1] - E$.

Segundo caso: $x \in E$ y $x \neq a_n$ para todo n en $\mathbb{N}$.

Demostraremos que dado M en $\mathbb{R}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq M \text{ para } |h| < \varepsilon$$

como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}}$$

diverge, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=1}^m \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}} > 3M$$

por otro lado

$$\sum_{n=1}^m \frac{A_n}{g_n(h)}$$

es continua en $h = 0$. Y

$$\sum_{n=1}^m \frac{A_n}{g_n(0)} = \sum_{n=1}^m \frac{A_n}{3(x - a_n)^{2/3}} > M$$

así que existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $|h| < \varepsilon$

entonces

$$\sum_{n=1}^m \frac{A_n}{g_n(h)} > M$$

de donde

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{g_n(h)} > M \text{ si } |h| < \varepsilon.$$

Por lo tanto $f'(x) = \infty$ si $x \in E$ y $x \neq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Tercer caso: Si $x = a_{n_0}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = A_{n_0} (x - a_{n_0})^{1/3} + \sum_{n \neq n_0} A_n (x - a_n)^{1/3}$$

$$\text{si } H(x) = \sum_{n \neq n_0} A_n (x - a_n)^{1/3},$$

entonces por los dos primeros casos $H'(a_{n_0}) \in \mathbb{R}$ o $H'(a_{n_0}) = \infty$.

y por otro lado

$$\left[\frac{d}{dx} A_n (x - a_n)^{1/3} \right] \Big|_{a_{n_0}} = \infty.$$

de donde $f'(x) = \infty$.

Resumiendo tenemos:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}} > 0 & \text{si } x \in [0,1] - E \\ \infty & \text{si } x \in E \end{cases}$$

$[0,1] - E$ es denso ya que $m(E) = 0$ y E es denso ya que $\{a_n\} \subset E$.

Finalmente veamos que $(f^{-1})'$ es una derivada de Pompeiu;

Por el inciso anterior sabemos que f^{-1} tiene una derivada en cada punto y ésta es;

$$\rho = (f^{-1})' : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\rho = (f^{-1})'(t) = \begin{cases} \frac{1}{f'(f^{-1}(t))} > 0 & \text{si } t \in f([0,1] - E) \\ 0 & \text{si } t \in f(E) \end{cases}$$

- p es una derivada, definida en un intervalo cerrado.
- $p(x) \geq 0$ para $x \in [\alpha, \beta]$.
- No es trivial ya que $f([0,1] - E) \neq \emptyset$ ya que $[0,1] - E \neq \emptyset$.
- p se anula en un denso de su dominio ya que f es invertible y continua y E es denso.
- p es positiva en un subconjunto denso de $[\alpha, \beta]$ puesto que $[0,1] - E$ es denso y f es continua e invertible.
- Está acotada ya que;

$$\text{Si } t \in f(E), (f^{-1})'(t) = 0.$$

Si $t \in f([0,1] - E)$ existe x tal que $f(x) = t$ y $x \in [0,1] - E$ entonces

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{A_n}{(x - a_n)^{2/3}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} A_n = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^k A_n = A$$

de donde

$$(f^{-1}(t))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))} = \frac{1}{f'(x)} < \frac{3}{A}.$$

COROLARIO 4.8 Existe una derivada de Pompeiu en Δ'_0 que es positiva en algún subconjunto denso de $[0,1]$.

Demostración: Sea $p: [\alpha, \beta] \rightarrow [0,1]$ una derivada como en el teorema anterior y $h: [0,1] \rightarrow [\alpha, \beta]$ la función $h(x) = (\beta - \alpha)x + \alpha$ entoces $p \circ h$ es una derivada de Pompeiu definida en $[0,1]$ que es positiva en un denso de $[0,1]$. ■

COROLARIO 4.9 Existe una función $f \in \Delta'_0$, tal que $f \leq 0$ y es negativa en un denso de $[0,1]$.

LEMA 4.10 Si $f(x) = f'(x)$ para todo x en $[a,b]$, $g(x) = g'(x)$ para todo x en $[b,c]$ y $f(b) = g(b)$ entonces la función

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a,b] \\ g(x) & \text{si } x \in (b,c] \end{cases}$$

es tal que $h = h'$, donde

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a,b] \\ g(x) - g(b) + f(b) & \text{si } x \in (b,c] \end{cases}.$$

Demostración: Claramente $h(x) = h'(x)$ para x en $[a,b) \cup (b,c]$, sólo faltaría ver que $h(b) = h'(b)$, pero

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{h(b+\alpha) - h(b)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(b+\alpha) - f(b)}{\alpha} = f'(b) = f(b) = h(b)$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{h(b+\alpha) - h(b)}{\alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{g(b+\alpha) - g(b) + f(b) - f(b)}{\alpha} = \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{g(b+\alpha) - g(b)}{\alpha} &= g'(b) = g(b) = f(b) = h(b). \blacksquare \end{aligned}$$

TEOREMA 4.11 Si $J = [a,b] \subset [0,1]$ entonces los conjuntos $E = \{f \in \Delta'_0 : f \geq 0 \text{ en } J\}$ y $F = \{f \in \Delta'_0 : f \leq 0 \text{ en } J\}$ son densos en ninguna parte.

Demostración: Veamos que si $f_0 \in \Delta'_0$ y $\varepsilon > 0$ entonces E no es denso en $V_\varepsilon(f_0)$.

82 Sabemos por el Corolario 4.9 que existe una función $f_1 \in \Delta'_0$ y $f_1 \leq 0$ y que existe c en (a,b) tal que $f_1(c) < 0$. Ahora como f_0 y f_1 están en Δ'_0 existe $x_0 \in (a,c)$ y $x_1 \in (c,b)$ tales que $f_0(x_0) = f_1(x_1) = 0$.

Consideremos la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x + c - x_0) & \text{si } x \in [0, x_0 + x_1 - c] \\ 0 & \text{si } x \in (x_0 + x_1 - c, 1] \end{cases}$$

f está bien definida, puesto que, como $f_1(t)$ está definida para $0 \leq t \leq 1$ entonces $f(x + c - x_0)$ está definida para $0 \leq x + c - x_0 \leq 1$, esto es, $-(c - x_0) \leq x \leq 1 - (c - x_0)$, en particular para $0 \leq x \leq 1 - (c - x_0)$. Además $f_1(x_0 + x_1 - c + c - x_0) = f_1(x_1)$.

Veamos que f está en Δ'_0 :

— Por el lema 4.10 $f(x)$ es la derivada de la función

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x + c - x_0) & \text{si } x \in [0, x_0 + x_1 - c] \\ f_1(x_1) & \text{si } x \in (x_0 + x_1 - c, 1] \end{cases}$$

donde $F' = f$.

— Para ver que f se anula en un subconjunto denso de $[0,1]$, basta ver que f se anula en algún subconjunto denso de $[0, x_0 + x_1 - c]$, pero f_1 se anula en algún denso de $[c - x_0, x_1]$ y la función $x \rightarrow x + c - x_0$ es continua e invertible, así que $f = f_1(x + c - x_0)$ se anula en algún denso de $[0, x_0 + x_1 - c]$.

— Claramente f está acotada por M una cota de f_1 .

De donde f está en Δ'_0 .

Si $g = \frac{\varepsilon}{M} f$ también está en Δ'_0 . $g(x_0) = \frac{\varepsilon}{M} f(x_0) = \frac{\varepsilon}{M} f_1(c) < 0$ y además para todo x en $[0,1]$, $g(x) = \frac{\varepsilon}{M} f(x) < \varepsilon$, es decir, $\|g\|_\infty < \varepsilon$.

Consideremos, por último, la función $h = f_0 + g \in \Delta'_0$. $\|h - f_0\| = \|g\| < \varepsilon$, entonces $h \in V_\varepsilon(f_0)$ y $h \notin E$ puesto que $h(x_0) = f_0(x_0) + g(x_0) = g(x_0) < 0$, pero observemos que $E = E^-$, así que $x \in V_\varepsilon(f_0)$ pero $x \notin E^-$, es decir E no es denso en $V_\varepsilon(f_0)$. Como $\varepsilon > 0$ y $f_0 \in \Delta'_0$ eran arbitrarios concluimos que E es denso en ninguna parte.

De manera análoga se prueba que F es denso en ninguna parte. ■

TEOREMA 4.12 El conjunto $E = \{f \in \Delta'_0 : \text{Existe algún intervalo } J \subset [0,1] \text{ tal que } f|_J \geq 0 \text{ o } f|_J \leq 0\}$ es de la primera categoría.

Demostración: Sea $\{I_n\}_n$ una numeración de la colección de subintervalos cerrados de $[0,1]$ que tienen extremos racionales.

Sean

$$E_n = \{f \in \Delta'_0 : f(x) \geq 0, \forall x \in I_n\}$$

$$F_n = \{f \in \Delta'_0 : f(x) \leq 0, \forall x \in I_n\}$$

$$\text{entonces } E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cup F_n).$$

Para cada n E_n y F_n son cerrados, además por el teorema anterior son densos en ninguna parte. Entonces $E_n \cup F_n$ es cerrado y denso en ninguna parte. De donde E es un conjunto de la primera categoría. ■

84 **COROLARIO 4.13** El conjunto $R = \{ f \in \Delta'_0 : \text{Para todo subintervalo } J \text{ de } [0,1], f \text{ toma valores positivos y negativos en } J \} , \text{ es denso en } \Delta'_0 .$

Demostración: Es inmediato de 4.5 , 4.12 y el Teorema de la Categoría de Baire.

COROLARIO 4.14 Existe una función diferenciable que no es monótona en ningún intervalo.

Demostración: Por el corolario anterior, sabemos que existe una derivada f que toma ambos signos en cada subintervalo de $[0,1]$. Así, si f es una primitiva de f entonces f es una función diferenciable que es monótona en ninguna parte. ■

CAPITULO 5

PRUEBA DE GOFFMAN

Esta prueba resulta muy breve, una vez que se conoce el material del capítulo tres, específicamente el hecho de que la *Topología de la Densidad* es completamente regular (teorema 3.3.17) y el hecho de que las funciones aproximadamente continuas acotadas son derivadas (corolario 3.2.11).

TEOREMA 5 *Existe una función f que es diferenciable, pero que no es monótona en ningún intervalo.*

Demostración: Sean

$A = \{ a_1, a_2, \dots \}$ y $B = \{ b_1, b_2, \dots \}$ dos conjuntos ajenos densos y numerables de $[0,1]$. Estos conjuntos son claramente cerrados en la Tología de la Densidad τ_d , y sabemos por el teorema 3.3.17 que esta topología es completamente regular, entonces para cada n en $\mathbb{N}$, existen funciones g_n y h_n τ_d -continuas tales que;

86

$$g_n(a_n) = 1$$

$$g_n(b) = 0 \quad \text{para todo } b \in B$$

$$0 \leq g_n(x) \leq 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$h_n(b_n) = 1$$

$$h_n(a) = 0 \quad \text{para todo } a \in A$$

$$0 \leq h_n(x) \leq 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$i) \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h_n \quad \text{es aproximadamente continua:}$$

Por ([6], cap. III, teo. 10.5), las funciones

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n$$

y

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h_n$$

son τ_d -continuas. De aquí que f también lo es, es decir, es aproximadamente continua.

ii) f está acotada:

Si $x \in \mathbb{R}$ tenemos

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h_n(x) \right| \leq$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n(x) \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h_n(x) \right| =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h_n(x) \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

De i), ii) y el teorema 3.2.11 tenemos que

$$f(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{es derivable}$$

y además $f'(x) = f(x)$, para todo x en $[0,1]$.

Pero entonces $f = f'$ toma valores positivos y negativos en cualquier intervalo. Ya que dado un intervalo $J \subset [0,1]$, existen a_i y b_j en J y

$$f(a_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n(a_i) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h_n(a_i) =$$

$$g_i(a_i) + \sum_{n \neq i} \frac{1}{2^n} g_n(a_i) \geq g_i(a_i) = 1 > 0.$$

$$f(b_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n(b_j) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h_n(b_j) =$$

$$-h_j(b_j) - \sum_{n \neq j} \frac{1}{2^n} h_n(b_j) \leq -h_j(b_j) = -1 < 0.$$

Por lo cual f es monótona en ninguna parte. ■

CAPITULO 6

PRUEBA DE PETRUSKA Y LACZKOVICH

Para esta prueba consideramos la siguiente función:

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} ; p, q \in \mathbb{Z} ; (p,q) = 1 \text{ y } q \text{ par} \\ -\frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} ; p, q \in \mathbb{Z} ; (p,q) = 1 ; q \text{ impar y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \text{ o } x = 0 \text{ o } x = 1 \end{cases}$$

y demostramos que esta es una función de Baire. Probamos también que la restricción de una función de Baire a un conjunto de medida cero se puede extender a una derivada. Así que existe una derivada $\bar{f}$ que extiende a $f|_{\mathbb{Q}}$ y cualquier primitiva de $\bar{f}$ satisface las condiciones deseadas.

PROPOSICION 6.1 Sea $\{r_1, r_2, \dots\}$ una numeración para $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ y sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales convergente a cero.

Si $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \{r_n\} \\ a_n & \text{si } x = r_n \end{cases}$$

entonces f es una función de Baire.

Demostración: Como primera parte construiremos una sucesión de funciones continuas y después probaremos que esta sucesión converge a f .

Dada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n = \sum_{k=1}^n a_k f_n^k$$

donde f_n^k está definida para cada pareja $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ como sigue

$$f_n^k : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n^k(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x - r_k}{\varepsilon_n} & \text{si } x \in (r_k - \varepsilon_n, r_k] \\ 1 - \frac{x - r_k}{\varepsilon_n} & \text{si } x \in (r_k, r_k + \varepsilon_n) \\ 0 & \text{si } x \in (I_n^k)^c \end{cases}$$

donde $I_n^k = (r_k - \varepsilon_n, r_k + \varepsilon_n)$ y

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2} \min \left\{ \min_{1 \leq i < j \leq n} |r_i - r_j|, \frac{1}{n}, \min_{1 \leq i \leq n} \{r_i, 1 - r_i\} \right\}$$

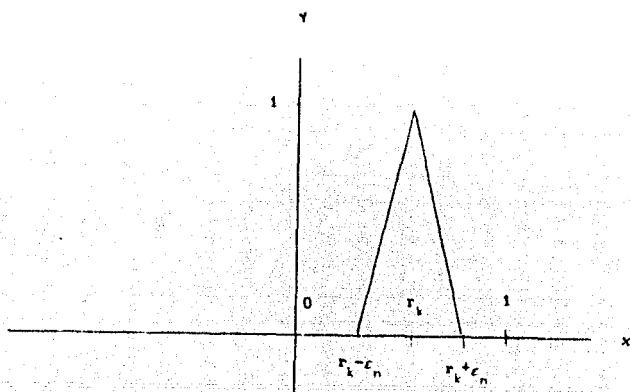


fig. 0.1

Observaciones:

1.- $|f_n^k| \leq 1$ para $k \leq n$.

2.- Dada $n \in \mathbb{N}$, $I_n^l \cap I_n^k = \emptyset$ si $l \neq k$:

Supongamos que $r_l < r_k$. Sea $x \in I_n^l$ entonces

$$x \leq r_l + \epsilon_n \leq r_k - \epsilon_n + (r_l + \epsilon_n + \epsilon_n - r_k) =$$

$$r_k - \epsilon_n - 2((r_k - r_l)/2 - \epsilon_n) \leq r_k - \epsilon_n$$

De aquí que $x \notin I_n^k$. Por tanto $I_n^k \cap I_n^l = \emptyset$.

$$a.- f_n^{l+1} = a_k f_n^k \text{ si } x \in I_n^k,$$

Como $x \notin I_n^k$ para $l \neq k$, de la definición de f_n^l se tiene que $f_n^l(x) = 0$ para todo $l \neq k$. Por tanto $f_n(x) = f_n^k(x)$.

4.- ϵ_n tiende a cero cuando n tiende a ∞ .

5.- f_n converge puntualmente a f :

Si $x = r_k$ para alguna k en $\mathbb{N}$, entonces $r_k \in I_n^k$ para todo $n \geq k$ y, por 3, $f_n(r_k) = a_k f_n^k(r_k) = a_k = f(r_k)$. Por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Ahora supongamos que $x \in \bigcup \{0, 1\}$. Y sea $\varepsilon > 0$.

Sea $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \varepsilon$ si $n \geq N_1$.

Sea $\delta = \frac{1}{2} \min_{1 \leq k \leq N_1} |r_k - x|$

Sea $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_n < \delta$ si $n \geq N_2$.

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Tomemos $n > N$. Como

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n f_n^k(x),$$

tenemos

$$|f_n(x)| \leq \left| \sum_{k=1}^{N_1-1} a_k f_n^k(x) \right| + \left| \sum_{k=N_1}^n a_k f_n^k(x) \right| \quad (I)$$

Si $k < N_1$, entonces $|r_k - x| \geq \delta > \varepsilon_n$. De modo que $x \notin I_n^k$. De aquí que

$$\sum_{k=1}^{N_1-1} a_k f_n^k(x) = 0. \quad (II)$$

Por otro lado, de la definición de los I_n^k 's y de la observación 2, x está necesariamente en uno y sólo uno de los conjuntos

$$\left[I_n^{N_1} \cup I_n^{N_2} \cup \dots \cup I_n^n \right]^c, I_n^{N_1}, I_n^{N_2}, \dots, I_n^n.$$

Si

$$x \in \left[I_n^{N_1} \cup I_n^{N_2} \cup \dots \cup I_n^n \right]^c,$$

de la definición de f_n^k tenemos que $f_n^k(x) = 0$, para todo $N_1 \leq k \leq n$ y por lo tanto

$$\sum_{k=N_1}^n a_k f_n^k(x) = 0$$

entonces

$$\left| \sum_{k=N_1}^n a_k f_n^k(x) \right| < \varepsilon.$$

En el otro caso, si $x \in I_{k_0}$, para algún k_0 , $N_1 \leq k_0 \leq n$; se tiene de lo visto en la observación 3, que $f_n^{k_0}(x) = 0$ si $k \neq k_0$. Por lo tanto

$$\sum_{k=N_1}^n a_k f_n^k(x) = a_{k_0} f_n^{k_0}(x).$$

De la observación 1,

$$\left| \sum_{k=N_1}^n a_k f_n^k(x) \right| \leq |a_{k_0}| < \varepsilon.$$

Es decir en cualesquiera de los casos citados se cumple que

$$\left| \sum_{k=N_1}^n a_k f_n^k(x) \right| < \varepsilon \quad \text{si } n > N \quad (\text{III})$$

De (I), (II) y (III) se tiene que $|f_n(x)| < \varepsilon$ si $n > N$.

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{I} \cup \{0,1\}$.

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} ; p, q \in \mathbb{Z} ; (p,q) = 1 \text{ y } q \text{ par} \\ -\frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} ; p, q \in \mathbb{Z} ; (p,q) = 1 ; q \text{ impar y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ o } x = 0 \text{ o } x = 1 \end{cases}$$

es una función de Baire.

Demostración: El resultado se sigue de la proposición anterior. Para ver que f satisface todas las condiciones, ordenamos a $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ como sigue:

$$\{r_n\}_n = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \dots \right\}$$

y

$$\{a_n\}_n = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots \right\}$$

Desde luego a_n queda definida a partir del orden que le dimos a $\mathbb{Q} \cap (0,1)$, esto es

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } r_n = \frac{p}{q} ; p, q \in \mathbb{Z} ; (p,q) = 1 \text{ y } q \text{ par} \\ -\frac{1}{q} & \text{si } r_n = \frac{p}{q} ; p, q \in \mathbb{Z} ; (p,q) = 1 ; q \text{ impar y } x \neq 1 \end{cases}$$

y claramente a_n tiende a cero cuando n tiende a infinito. ■

NOTACION 6.3 Si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones reales definidas en un subconjunto A de $\mathbb{R}$, entonces denotaremos por $\mathcal{F}_H$ a la familia de las funciones definidas en un subconjunto H de A , que tienen una extensión en $\mathcal{F}$.

NOTACION 6.4 Al conjunto de las funciones acotadas en $\mathcal{F}$ lo denotaremos por $b\mathcal{F}$.

TEOREMA 6.5 Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de las funciones aproximadamente continuas definidas en el intervalo $[0,1]$, y sea $\mathcal{B}$ la familia de las funciones de Baire definidas en $[0,1]$. Entonces tenemos que $b\mathcal{U}_H = b\mathcal{B}_H$ si $m(H) = 0$.

Demostración:

i) $b\mathcal{U}_H \subset b\mathcal{B}_H$:

Basta probar que $b\mathcal{U} \subset b\mathcal{B}$. Sea f en $b\mathcal{U}$. Entonces por el teorema 3.2.11 sabemos que f es una derivada y por el teorema 1.9 f es una función de Baire.

ii) $b\mathcal{B}_H \subset b\mathcal{U}_H$:

Sea f en $b\mathcal{B}_H$ supongamos que $-1 \leq f \leq 1$, probaremos que $f \in b\mathcal{U}_H$.

Como $m(H) = 0$ entonces existe H_0 tal que H_0 es un G_δ , $H \subset H_0$ y $m(H_0) = 0$.

Si $f|_{H_0}$ tiene una extensión en $b \mathcal{U}$ entonces necesariamente $f|_H$ la tiene, así que podemos suponer sin pérdida de generalidad que H es un G_δ .

Sean $H_1^* = \{x : f(x) \leq -1/3\}$ y $H_2^* = \{x : f(x) \geq 1/3\}$.

Por el corolario 1.8 sabemos que los conjuntos $H_1 = H \cap H_1^*$ y $H_2 = H \cap H_2^*$ son G_δ ajenos y además d -cerrados, pues tienen medida cero. Por el segundo teorema de Zahorski, existe una función φ_1 aproximadamente continua tal que

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -1/3 & \forall x \in H_1 \\ \varphi_1(x) &= 1/3 & \forall x \in H_2 \\ -1/3 < \varphi_1(x) < 1/3 & \forall x \in H_1^c \cap H_2^c \end{aligned}$$

Sea $f_1 = f - \varphi_1$. Entonces es fácil ver que $-\frac{2}{3} \leq f_1|_H \leq \frac{2}{3}$.

Supongamos que $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ya han sido definidas y cumplen las propiedades:

$\varphi_k \in \mathcal{U}$, $|\varphi_k| \leq (1/3)(2/3)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$
y para

$$f_n = f - \sum_{k=1}^n \varphi_k \tag{I}$$

se tiene que

$$-(2/3)^n \leq f_n|_H \leq (2/3)^n \tag{II}$$

Construyamos la función φ_{n+1} . Consideremos los conjuntos $H_1^n = H \cap \{x : f_n(x) \leq -(1/3)(2/3)^n\}$
y

$$H_2^n = H \cap \{x : f_n(x) \geq (1/3) (2/3)^n\}$$

entonces sea φ_{n+1} una función aproximadamente continua tal que

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) &= -(1/3) (2/3)^n & \forall x \in H_1^n \\ \varphi_{n+1}(x) &= (1/3) (2/3)^n & \forall x \in H_2^n \\ -(1/3) (2/3)^n &< \varphi_{n+1}(x) < (1/3) (2/3)^n & \forall x \in (H_1^n)^c \cap (H_2^n)^c \end{aligned}$$

por esta construcción tenemos que si $f_{n+1} = f_n - \varphi_{n+1}$, entonces
 $-(2/3)^{n+1} \leq f_{n+1}|_H \leq (2/3)^{n+1}$. Con esto hemos terminado la construcción de $\{\varphi_n\}_n$.

Definimos

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x).$$

Ya que $|\varphi_k| \leq (1/3) (2/3)^{k-1}$, por ([6], cap. III, 10.5),
 tenemos que g está bien definida y $g \in \mathcal{U}$. Y como $|g| \leq 1$,
 tenemos que $g \in b\mathcal{U}$.

Por (I) y (II) tenemos $g|_H = f|_H$. Entonces $f|_H \in b\mathcal{U}_H$. Por
 lo tanto $b\mathcal{B}_H \subset b\mathcal{U}_H$. ■

COROLARIO 6.6 La función $f|_{\mathbb{Q}}$ donde

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}; (p,q) = 1 \text{ y } q \text{ par} \\ -\frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, (p,q) = 1; q \text{ impar y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \text{ o } x = 0 \text{ o } x = 1 \end{cases}$$

se puede extender a una derivada.

Demostración: Por la proposición 6.2 f es una función de Baire. Por el teorema anterior, $f|_{\mathbb{Q}} \in b\mathcal{U}_{\mathbb{H}}$. Es decir, $f|_{\mathbb{Q}}$ puede ser extendida a una función aproximadamente continua acotada.

Pero por el teorema 3.2.11 las funciones aproximadamente continuas acotadas son derivadas. ■

COROLARIO 6.7. Existen funciones diferenciables que no son monótonas en ningún intervalo.

Demostración: Si $\bar{f} \in \Delta$ es una extensión para $f|_{\mathbb{Q}}$ entonces cualquier primitiva de $\bar{f}$ satisface tales condiciones. ■

CAPITULO 7

PRUEBA DE BRUCKNER, MARIK Y WEIL

En esta prueba consideramos la función:

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{2^n} & \text{si } x = r_n \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

donde $\{r_n\}_n$ es una numeración de los racionales con la siguiente propiedad; si $r_n = p/q$, con p y q primos relativos, entonces n y q tienen la misma paridad.

El primer resultado que probamos está basado en el segundo teorema de Zahorski, y de él se deduce que existe una sucesión de funciones aproximadamente continuas $\{\alpha_n\}_n$ del intervalo $[0,1]$ en si mismo tales que el producto de dos funciones distintas es cero y cada α_n vale uno en r_n .

Como segundo paso probamos que, las funciones características $\chi_{\{x\}}$ son producto de derivadas acotadas para todo x en $\mathbb{R}$.

Usando estos dos resultados deducimos que f es producto de dos derivadas y al final del capítulo argumentamos que la primitiva de una de estas dos derivadas, es una función como la que buscábamos.

TEOREMA 7.1 Sea $A_1, A_2, \dots$ una sucesión de conjuntos nulos, disjuntos dos a dos, que son a la vez G_δ 's y F_σ 's. Entonces existen funciones aproximadamente continuas $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ tales que para cada j

$$\alpha_j = 1 \text{ en } A_j,$$

$$0 \leq \alpha_j \leq 1 \text{ en } \mathbb{R}$$

$$\alpha_j \alpha_i = 0 \text{ en } \mathbb{R} \text{ si } i \neq j.$$

Demostración: Para cada j sea $S_j = \bigcup_{i \neq j} A_i$, entonces $m(S_j) = 0$. Sea T_j un G_δ tal que $S_j \subset T_j$ y $m(T_j) = 0$ y sea $B_j = T_j - A_j$. Entonces $S_j \subset B_j$; $B_j \cap A_j = \emptyset$; B_j y A_j son d -cerrados y conjuntos del tipo G_δ . Entonces por el corolario 3.3.16, para cada j existen funciones aproximadamente continuas α_j^*, β_j tales que

$$\alpha_j^* = 1 \text{ en } A_j$$

$$0 \leq \alpha_j^* \leq 1 \text{ en } \mathbb{R}$$

$$\beta_j = 1 \text{ en } B_j$$

$$0 \leq \beta_j \leq 1 \text{ en } \mathbb{R}$$

$$\alpha_j^* \beta_j = 0 \text{ en } \mathbb{R}.$$

Definimos $\alpha_j = \beta_1 \dots \beta_{j-1} \alpha_j^*$.

Claramente $0 \leq \alpha_j \leq 1$. Si $i < j$, $\alpha_i \alpha_j$ es múltiplo de $\alpha_i^* \beta_i$. De manera que $\alpha_i \alpha_j = 0$ en $\mathbb{R}$. Finalmente, si $x \in A_j$, entonces

$$x \in \bigcup_{i \neq 1} A_i \subset B_1, \quad x \in \bigcup_{i \neq 2} A_i \subset B_2, \quad \dots, \quad x \in \bigcup_{i \neq j-1} A_i \subset B_{j-1}.$$

De modo que $\alpha_j(x) = \beta_1(x) \dots \beta_{j-1}(x) \alpha_j^* = 1 \dots 1 = 1$. ■

PROPOSICION 7.2 Si a, b, c, d, α y β son números reales y $a < b$ entonces existe una función continuamente diferenciable

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(a) = c, \quad f(b) = d, \quad f'(a) = \alpha \quad \text{y} \quad f'(b) = \beta.$$

Demostración: La demostración es simple, sencillamente haremos ver que existe un polinomio de tercer grado que satisface dichas condiciones.

Primero mostraremos que existe un polinomio $\mathcal{P}(x)$ de la forma

$$\mathcal{P}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad \text{tal que:}$$

$$\mathcal{P}(0) = c.$$

Y si $b_1 = b - a$, entonces

$$\mathcal{P}(b_1) = Ab_1^3 + Bb_1^2 + Cb_1 + D = d$$

$$\mathcal{P}'(0) = \alpha$$

$$\mathcal{P}'(b_1) = 3Ab_1^2 + 2Bb_1 + C = \beta$$

De modo que $D = c$ y $C = \alpha$.

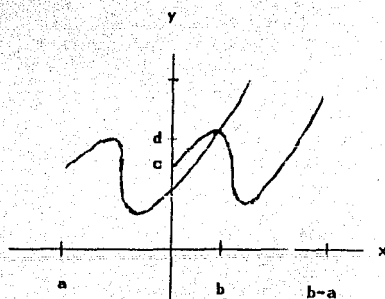


fig. 7.1

Así que tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$Ab_1^3 + Bb_1^2 = d - c - \alpha b_1 \quad (I)$$

$$3Ab_1^2 + 2Bb_1 = \beta - \alpha \quad (II)$$

Y para ver que existe el polinomio $\mathcal{P}$, veamos que el determinante del sistema es no nulo.

$$\begin{vmatrix} b_1^3 & b_1^2 \\ 3b_1^2 & 2b_1 \end{vmatrix} = -b_1^4 = -(b-a)^4 \neq 0$$

Definimos entonces f como sigue:

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathcal{P}(x - a).$$

f satisface las condiciones deseadas:

— f es continuamente diferenciable

$$— f(a) = \mathcal{P}(0) = c$$

$$— f(b) = \mathcal{P}(b_1) = d$$

$$— f'(a) = \mathcal{P}'(0) = \alpha$$

$$— f'(b) = \mathcal{P}'(b_1) = \beta. \blacksquare$$

Para el siguiente corolario necesitaremos la definición explícita de f , la cual determinaremos ahora.

Multiplicando cada miembro en la igualdad (II) por $-(1/2) b_1$, tenemos

$$-\frac{3}{2} Ab_1^3 - Bb_1^2 = \frac{1}{2} \alpha b_1 - \frac{1}{2} \beta b_1$$

(III) 103

Sumando miembro a miembro en las igualdades (I) y (III) queda

$$-\frac{1}{2} Ab_1^3 = d - c - \frac{1}{2} \alpha b_1 - \frac{1}{2} \beta b_1 \quad \text{entonces}$$

$$Ab_1^3 = -2(d - c) + \alpha b_1 + \beta b_1 \quad (IV)$$

entonces

$$A = \frac{-2(d - c) + \alpha b_1 + \beta b_1}{b_1^3} \quad (V)$$

Sustituyendo (IV) en (I) queda

$$-2(d - c) + \alpha b_1 + \beta b_1 + Bb_1^2 = d - c - \alpha b_1$$

entonces

$$B = \frac{3(d - c) - 2\alpha b_1 - \beta b_1}{b_1^2} \quad (VI)$$

Sustituyendo el valor de b_1 en (V) y (VI) tenemos

$$A = \frac{-2(d - c) + \alpha(b - a) + \beta(b - a)}{(b - a)^3}$$

$$B = \frac{3(d - c) - 2\alpha(b - a) + \beta(b - a)}{(b - a)^2}$$

$$f(x) = A(x - a)^3 + B(x - a)^2 + \alpha(x - a) + c$$

COROLARIO 7.3 Si a y b están en $\mathbb{R}$ y $a < b$, existe una función diferenciable y creciente tal que

$$f(a) = 2a - b$$

$$f(b) = b$$

$$f'(a) = 0$$

$$f'(b) = 0$$

$$f'(x) < 3 \quad \forall x \in [a, b]$$

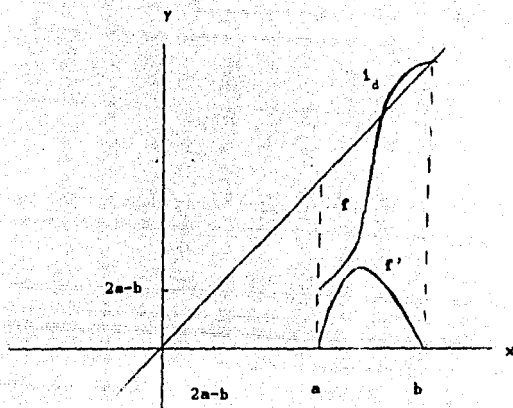


fig. 7.2

Demostración: Por el la proposición anterior sabemos que

$$f(x) =$$

$$\frac{-2[b - (2a - b)]}{(b - a)^3} (x - a)^3 +$$

$$\frac{3[b - (2a - b)]}{(b - a)^2} (x - a)^2 + 2a - b =$$

$$\frac{-4}{(b - a)^2} (x - a)^3 + \frac{6}{(b - a)} (x - a)^2 + 2a - b$$

es tal que $f(a) = 2a - b$, $f(b) = b$, $f'(a) = 0$, $f'(b) = 0$.

Por otro lado

$$f'(x) = - \frac{12}{(b - a)^2} (x - a)^2 + \frac{12}{(b - a)} (x - a)$$

es un polinomio de grado dos, el cual sabemos que tiene dos raíces a y b . Por lo cual sólo toma un signo en $[a, b]$. Por lo que f es estrictamente creciente o decreciente en (a, b) , pero

$f(a) = 2a - b < b < f(b)$. Por lo tanto f es estrictamente creciente. 105

Ahora

$$f''(x) = - \frac{24}{(b-a)^2} (x-a) + \frac{12}{(b-a)},$$

entonces

$$f''(x) = 0 \iff - \frac{24}{(b-a)^2} (x-a) + \frac{12}{(b-a)} = 0 \iff$$

$x = (b+a)/2$, es decir $(b+a)/2$ es un punto estacionario de f' .

Además

$f'''((b+a)/2) = -24/(b-a)^2 < 0$. De donde f' tiene un máximo en $(b+a)/2$. Y $f'((b+a)/2) = 3$. Por lo tanto $f'(x) \leq 3$ para todo x en $[a,b]$. ■

PROPOSICION 7.4 La función característica $\chi_{(1)}$ se puede expresar como el producto de dos derivadas acotadas en $[0,1]$.

Demostración: Consideremos la siguiente sucesión $r_n = 1 - 1/n$, para $n = 1, 2, \dots$. Y los intervalos $I_n = [r_n, r_{n+1}]$, $n = 1, 2, \dots$.

Evidentemente $[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Dada n en $\mathbb{N}$, por el corolario anterior podemos concluir que existen funciones diferenciables crecientes g_n y h_n de $[r_n, r_{n+1}]$ en $\mathbb{R}$ tales que:

$$g_n(x) = r_n$$

$$\forall x \in [r_n, (r_n + r_{n+1})/2]$$

$$g_n(r_{n+1}) = r_{n+1}$$

$$g'_n((r_n + r_{n+1})/2) = 0$$

$$g'_n(r_{n+1}) = 0$$

$$g'_n(x) < 3$$

$$\forall x \in [r_n, r_{n+1}]$$

$$h_n(x) = (r_n + r_{n+1})/2 \quad \forall x \in [(r_n + r_{n+1})/2, r_n]$$

$$h_n(r_n) = r_n$$

$$h'_n(r_n) = 0$$

$$h'_n((r_n + r_{n+1})/2) = 0$$

$$h'_n(x) < 3$$

$$\forall x \in [r_n, r_{n+1}]$$

Entonces las funciones

$$g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} g_n(x) & \text{si } x \in [r_n, r_{n+1}] \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

y

$$h : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) = \begin{cases} h_n(x) & \text{si } x \in [r_n, r_{n+1}] \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

son funciones bien definidas y evidentemente diferenciables en $[0,1]$, $g'(x)$, $h'(x) < 3$ para x en $[0,1)$ y $g'h' = 0 = \chi_{\{1\}}$ en $[0,1]$. (figura 7.9).

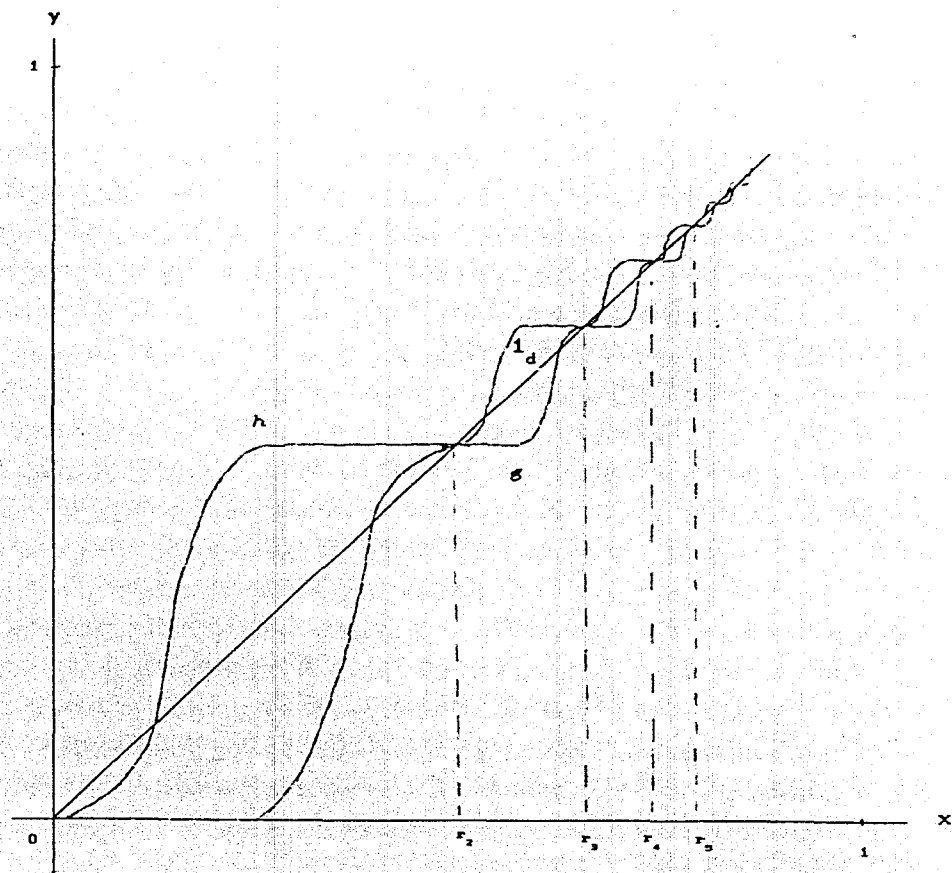


fig. 7.3

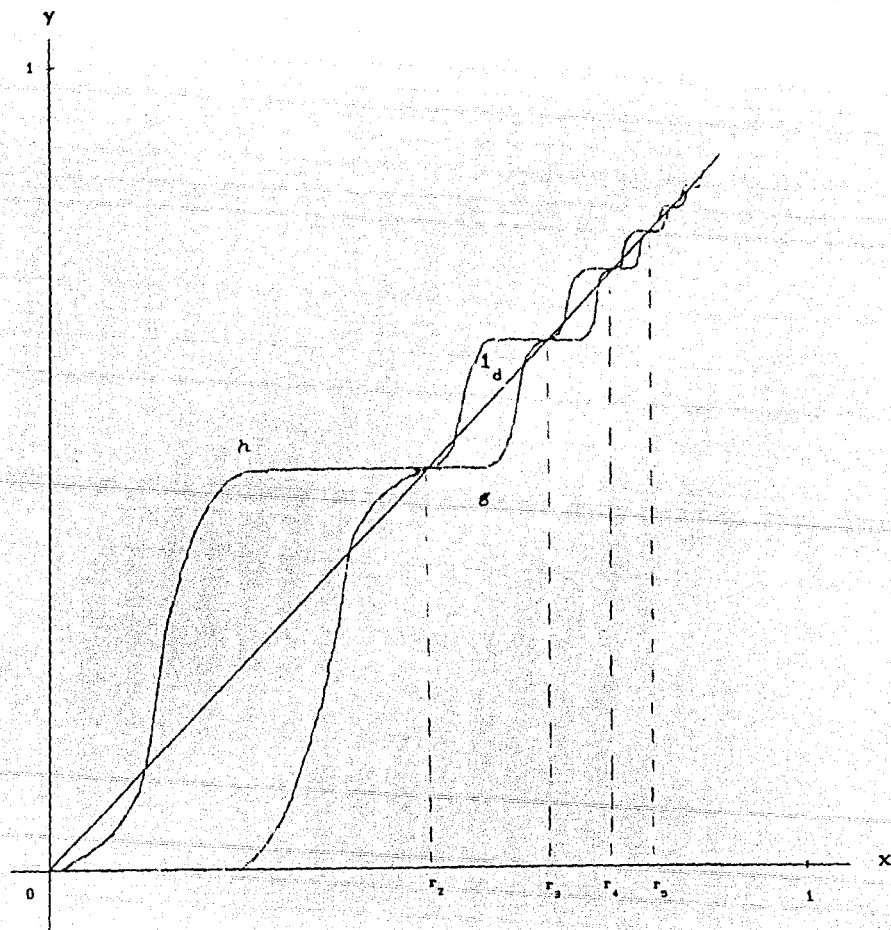


fig. 7.3

Así que sólo nos resta ver que g y h son diferenciables en 1 y que $g'(1) h'(1) = 1 = \chi_{(1)}(1)$.

Veamos que $g'(1)$ existe y $g'(1) = 1$.

Dada t en $[0,1)$ existe n_t en $\mathbb{N}$ tal que

$$t \in \left[1 - \frac{1}{n_t}, 1 - \frac{1}{n_t + 1} \right)$$

tenemos entonces que

$$\frac{1}{n_t + 1} < 1 - t \leq \frac{1}{n_t} \Rightarrow$$

$$n_t \leq \frac{1}{1-t} < n_t + 1 \quad (I)$$

y como g es creciente

$$g(1 - 1/n_t) \leq g(t) \leq g(1 - 1/(n_t + 1)) \Rightarrow$$

$$1 - \frac{1}{n_t} \leq g(t) \leq 1 - \frac{1}{n_t + 1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n_t + 1} < 1 - g(t) \leq \frac{1}{n_t} \quad (II)$$

De (I) y de (II)

$$\frac{n_t}{n_t + 1} < \frac{1 - g(t)}{1 - t} \leq \frac{n_t + 1}{n_t} \Rightarrow$$

$$\frac{n_t}{n_t + 1} < \frac{g(1) - g(t)}{1 - t} \leq \frac{n_t + 1}{n_t} \Rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{g(1) - g(t)}{1 - t} = 1.$$

De manera análoga se puede demostrar que existe $h'(1)$ y que $h'(1) = 1$. Entonces $h'(1) g'(1) = \chi_{(1)}(1)$.

Por lo tanto $\chi_{(1)} = h'g'$, $h'(x) g'(x) < 3$ para todo x en $[0,1]$.

Notemos que además $g(0) = 0 = h(0)$ y $g'(0) = 0 = h'(0)$.

PROPOSICION 7.8 La función característica $\chi_{(1)}$ se puede **109**
expresar como el producto de dos derivadas acotadas en $\mathbb{R}$.

Demostración: De la prueba anterior sabemos que existen funciones diferenciables g_1 y h_1 definidas en $[0,1]$, tales que:

$$\chi_{(1)} = g_1' h_1' \quad \text{en } [0,1]$$

$$g_1(0) = 0 = h_1(0)$$

$$g_1(1) = 1 = h_1(1)$$

$$g_1'(0) = 0 = h_1'(0)$$

$$g_1'(1) = 1 = h_1'(1)$$

y 3 es una cota para g_1' y h_1' .

Definimos entonces g y h tales que:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ g_1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 - g_1(2 - x) & \text{si } x \in [1, 2] \\ 2 & \text{si } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ h_1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 - h_1(2 - x) & \text{si } x \in [1, 2] \\ 2 & \text{si } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

son funciones diferenciables y además

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ g'_1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ g'_1(2-x) & \text{si } x \in (1, 2) \\ 0 & \text{si } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ h'_1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ h'_1(2-x) & \text{si } x \in (1, 2) \\ 0 & \text{si } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

desde luego 3 es una cota para g' y h' .

Dada x en $(1, 2)$ tenemos que $0 < 2 - x < 1$, así que $g'_1(x-2) h'_1(x-2) = 0$. De aquí que $g'(x) h'(x) = 0 = \chi_{(1)}(x)$ y claramente $g'(x) h'(x) = \chi_{(1)}(x)$ para $x \notin (1, 2)$. Por tanto $g' h' = \chi_{(1)}$. ■

COROLARIO 7.6 Sea x_0 un número real, entonces $\chi_{(x_0)}$ se puede expresar como el producto de dos derivadas acotadas por una cota que no depende de x_0 .

Demostración: Sabemos que existen g y h funciones diferenciables tales que $\chi_{(1)} = g'h'$ y 3 es una cota para g' y h' (ver prueba de la proposición anterior).

Sea $k(x) = x + 1 - x_0$.

Entonces $g \circ k$ y $h \circ k$ son funciones diferenciables y $(g \circ k)' = g' \circ k$ y $(h \circ k)' = h' \circ k$.

Veamos que $\chi_{(X_0)} = (g \circ h)' (h \circ h)'$.

Sea $x \neq x_0$.

$$(g \circ h)'(x) (h \circ h)'(x) =$$

$$g'(h(x)) h'(h(x)) = \chi_{(1)}(h(x)) = \chi_{(1)}(x+1-x_0) = 0.$$

Y para x_0 tenemos

$$(g \circ h)'(x_0) (h \circ h)'(x_0) =$$

$$g'(h(x_0)) h'(h(x_0)) = \chi_{(1)}(h(x_0)) = \chi_{(1)}(x_0+1-x_0) = 1. \blacksquare$$

TEOREMA 7.7 Sea $\{r_{2n}\}_n$ una ordenación de los racionales de la forma $\frac{p}{q}$, p y q en $\mathbb{Z}$, q par y p y q primos relativos.

Sea $\{r_{2n+1}\}_n$ una ordenación de los racionales de la forma $\frac{p}{q}$, p y q primos relativos en $\mathbb{Z}$ y q impar.

La función definida como sigue

$$f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{2^n} & \text{si } x = r_n \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

se puede expresar como el producto de dos derivadas.

Demostración: Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ como en el teorema 7.1 y sean g_n y h_n tales que $g_n h_n = \chi_{\{r_n\}}$, para todo n en $\mathbb{N}$, y $0 \leq g_n, h_n \leq 3$.

Definimos entonces g y h como sigue:

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}^n} \alpha_n g_n$$

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^n} \alpha_n h_n.$$

Ya que

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}^n} \alpha_n g_n \right|, \left| \frac{1}{\sqrt{2}^n} \alpha_n g_n \right| < \frac{3}{\sqrt{2}^n}$$

para todo n en $\mathbb{N}$ tenemos que las series que definen a g y h convergen uniformemente. Esto muestra que g y h están bien definidas. Por el teorema 3.2.10, cada una de las funciones $\alpha_n g_n$ y $\alpha_n h_n$ son derivadas entonces por el teorema 4.1 tenemos que g y h son derivadas.

Además

$$g h = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}^n} \alpha_n g_n \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^n} \alpha_n h_n \right]$$

como $\alpha_n \alpha_m = 0$ si $n \neq m$ entonces

$$g h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \alpha_n^2 g_n h_n$$

$$g h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \alpha_n^2 \chi_{\{r_n\}}$$

evidentemente si $x \in \mathbb{I}$ se tiene que $gh(x) = 0$, ahora si $x \in \mathbb{Q}$, entonces $x = r_n$ para alguna n en $\mathbb{N}$. Así que

$$gh(x) = gh(r_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \alpha_n^2 \chi_{\{r_n\}} = \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Por lo tanto $gh(x) = f(x)$ para todo $x \in [0,1]$. ■

TEOREMA 7.8 Existen funciones que son diferenciables y que no son monótonas en ningún intervalo.

Demostración: Del corolario anterior sabemos que la función:

$$f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{2^n} & \text{si } x = r_n \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

es el producto de dos derivadas g y h , (r_n como en el teorema 7.7).

Sean

$$A = \{ x : g(x) > 0, h(x) > 0 \}$$

$$B = \{ x : g(x) > 0, h(x) < 0 \}$$

$$C = \{ x : g(x) < 0, h(x) > 0 \}$$

$$D = \{ x : g(x) < 0, h(x) < 0 \}$$

Sabemos que f es positiva en un conjunto denso en $(0,1)$. Por lo que $A \cup D$ es denso.

Entonces existe algún intervalo J en el cual A es denso o D es denso.

Ahora, puesto que f es negativa en un conjunto denso en J , se tiene que $B \cup C$ es denso en J .

Así que, debe existir algún intervalo $K \subset J$ en el cual B o C es denso.

De lo anterior podemos concluir que una de las parejas siguientes, está formada por dos conjuntos densos en K , (A,B) , (A,C) , (D,B) o (D,C) . Desprendemos que g toma ambos signos en cada intervalo de K o bien h toma ambos signos en cada intervalo de K .

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que g toma ambos signos en cada subintervalo de K .

Así que si g es una primitiva de g , g es una función derivable que no es monótona en ningún intervalo de K . ■

BIBLIOGRAFIA

[1] BARTLE, R. G.

[1966] *The Elements of Integration.* John Wiley & Sons, Inc. New York.

[2] BOREL, E.

[1950] *Leçons sur la Théorie des Fonctions (Principes de la Théorie de Ensembles en vue des Applications à la Théorie des Fonctions).* Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions. (cuarta edición) París, Gauthier Villars.

[3] BRUCKNER, A. M.

[1978] *Differentiation of Real Functions.* Lecture Notes in Mathematics, 559, Berlín, Heidelberg, New York.

- [4] BRUCKNER, A.M.
[1983-84] *Some New Simple Proofs of Old Difficult Theorems.* Real Analysis Exchange, vol.9, (63-68).
- [5] BRUCKNER, A.M. ; MARIK, J. ; WEIL, G.E.
[1982] *Baire One Null Functions.* Classical Real Analysis, Madison, Wis., (29-41).
[1985] *Contemporary Math.* Vol42, American Mathematical Society, Providence, R. I., (26).
- [6] DUGUNDJI, J.
[1966] *Topology.* Allyn and Bacon, Inc., Boston.
- [7] GARCIA-MAYNEZ, C.A.
[1971] *Introducción a la Topología de Conjuntos.* Trillas, México.
- [8] GOFFMAN, C.
[1953] *Real Functions.* Rinehart & Company, Inc., New York.
- [9] GOFFMAN, C.
[1975] *Everywhere Differentiable Functions and the Density Topology.* Proceedings of the American Mathematical Society, vol.51 (250).
- [10] GOFFMAN, C. ; NEUGEBAUER, C.J. ; NISHURA, T.
[1961] *Density Topology and Aproximante Continuity.* Duke Mathematical Journal, vol.28, (497-505).

- [11] HOBSON, E. W.
 [1957] *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series.* Vol. I, (tercera edición), Dover Publications Inc., New York.
- [12] HOBSON, E. W.
 [1926] *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series.* Vol. II, (segunda edición), The McMillan Company, New York.
- [13] KATZNELSON, Y.; STROMBERG, R.
 [1974] *Everywhere Differentiable, Nowhere Monotone, Functions.* American Mathematical Monthly, vol. 81, (349-354).
- [14] PETRUSKA, G.; LACZKOVICH, M.
 [1974] *Baire 1 Functions, Aproximately Continuous Functions and Derivatives.* Acta Mathematica, Academiae Scientiarum Hungaricae, vol. 25, (189-212).
- [15] NATANSON, I. P.
 [1964] *Theory of the Functions of a Real Variable.* Vol. I, (edición revisada), Frederick Ungar Publishing Company, New York.
- [16] NATANSON, I. P.
 [1960] *Theory of the Functions of a Real Variable.* Vol. II, Frederick Ungar Publishing Company, New York.

- [17] OXToby, J. C.
[1970] *Measure and Category. (A Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces)*. Springer-Verlag, New York.
- [18] POMPIEU, D.
[1907] *Real Analysis*. (Segunda edición), The McMillan Company, London.
- [20] RUDIN, W.
[1980] *Principles of Mathematical Analysis*. (Tercera edición), McGraw Hill, México.
- [21] SACKS, S.
[1937] *Theory of Integral*. (Segunda edición), vol. VII, Hafner Publishing Company, New York
- [22] WEIL, G. E.
[1976] *On Nowhere Monotone Functions*. Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 56, (250).
- [23] ZAHORSKI, Z.
[1950] *Sur la Première Dérivée*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 69, (1-54).