4 2ej.

Desigualdades, Convexidad y Espacios de Birnbaum-Orlicz

Director
GUILLERMO GRABINSKY STEIDER
Dr. Matemáticas
Fac. Ciencias, UNAM

Tesis que para obtener el título de Matemático presenta:

GUILLERMO JOSÉ CORREA GÓMEZ
Fac. Ciencias, UNAM

Universidad Nacional Autónoma de México

UNAM

Biblioteca Central

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

Prefacio

Hoy en día el Análisis Matemático es una herramienta poderosa con la que cuenta el matemático moderno. Esta disciplina fecunda en aplicaciones, resulta de gran interés para su estudio.

Es un hecho que el Análisis aporta una gran cantidad de desigualdades y también las utiliza para el desarrollo de su propia teoría. Así pues, las desigualdades en Matemáticas son un tema muy vasto y sumamente útil en el Análisis Matemático.

Resulta frecuente que uno encuentre en cualquier libro de Análisis, ya sea una sección dedicada a las desigualdades o bien algunas desigualdades importantes que se requieren para el desarrollo de su teoría o de sus aplicaciones. Sin embargo, raras veces puede uno encontrarse con un texto dedicado exclusivamente a tan importante tema. La compilación de dichas desigualdades en un volumen es una tarea ardua e importante. En esta tesis no se agota exahustivamente el tema, pero sí se establecen algunas desigualdades importantes, considerando inclusive casos extremos. Además, en las demostraciones el lector puede apreciar las técnicas más comunes empleadas para las demostraciones de dichas desigualdades.

Se establecerán algunas de las desigualdades más importantes que involucran a la integral de Lebesgue, y se proporcionarán aplicaciones de dichas desigualdades al Análisis. Se estudiarán también las funciones convexas y las convexas de medio punto.

La tesis está dividida en cinco capítulos. En el primero se enuncian los conceptos básicos requeridos para el estudio general de las desigualdades, como lo son los espacios $\mathcal{L}_p$, *la norma* $\| \; \|_p$ *(inclusive para los casos extremos), etc. Se muestran las propiedades básicas de* $\mathcal{L}_p$ *y de la norma* $\| \; \|_p$. *La parte central de dicho capítulo la constituye el estudio de la desigualdad de Hölder en su forma más general. Enseguida se extraen algunos corolarios útiles de dicha* *desigualdad, como lo es un teorema debido a Riesz. Para concluir este capítulo se estudia brevemente la continuidad y diferenciabilidad de la función $\varphi_f(r) = \|f\|_r$. En el capítulo dos se estudian las desigualdades del tipo Minkowski, incluyendo el caso de un número infinito de sumandos y también cuando p resulta ser un número real extendido. Y por último se muestran dos desigualdades que involucran a las funciones de dos variables. El tercer capítulo trata sobre las funciones convexas, sus propiedades fundamentales, la desigualdad de Jensen y finalmente se estudia con cierto detalle las funciones convexas de punto medio. En los capítulos cuatro y cinco se muestran algunas aplicaciones al Análisis Funcional. En el capítulo cuarto se definen los espacios de Birnbaum-Orlicz, que resultan ser una generalización de los espacios de Lebesgue. También se generalizan algunos resultados obtenidos en los espacios de Lebesgue a estos espacios, como lo son la desigualdad de Hölder, etc. En el último capítulo se muestran las desigualdades de Beurling y Clarkson y se define el concepto de convexidad uniforme. Y por último se usan las desigualdades de Clarkson y Beurling para probar la convexidad uniforme de* $\mathcal{L}_p$.

Quiero agradecer de manera muy profunda a mi director de tesis Guillermo Grabinsky Steider por su dedicación y constante interés que prestó al desarrollo de este trabajo, así como por su paciencia al revisar un gran número de impresiones preliminares de la misma, aportando sugerencias e indicando errores tanto tipográficos como en la exposición de los resultados. Así mismo, quiero agradecer a cada uno de los profesores que intervinieron en mi formación como estudiante, pues gracias a su esfuerzo he podido conocer un poco de tan bella ciencia llamada Matemáticas.

Guillermo J. Correa Gómez
Mayo de 1988, Fac. Ciencias, UNAM

CAPITULO I

Desigualdades Básicas

En este capítulo se introducirán algunos conceptos básicos en los espacios $\mathcal{L}_p$. Se extenderán dichos conceptos a los casos en que p es un real extendido. Se establecerá la desigualdad de Hölder en su forma más general. La demostración aquí presentada de dicha desigualdad se basa en la desigualdad bien conocida: $\log x \leq x - 1$ con igualdad ssi $x = 1$. Una vez establecida la desigualdad de Hölder se obtendrán algunos corolarios inmediatos de ella. Por último se analizará en este capítulo la continuidad de la función $\varphi_f(p) = \|f\|_p$ y su diferenciabilidad.

1.1 Nociones Básicas

En todas las desigualdades que se han de considerar, excepto en el caso general de la desigualdad de Jensen para funciones convexas, se mostrarán las condiciones necesarias y suficientes para que la igualdad ocurra. Para facilitar el enunciado de dichos casos de igualdad resulta útil tener la notación que se introduce en la siguiente definición:

1.1 DEFINICIÓN. Sean (X, S, ν) un espacio de medida, $f, g : X \to \mathrm{R}$ funciones S-medibles. Se dice que f y g son **ν-equivalentes**, denotado $f \equiv_\nu g$ (o bien $f \equiv g$ cuando esté claro de que medida se está hablando), ssi $f(x) = g(x)$ (c.d. rel. ν).

En lo sucesivo se considerarán espacios de medida (X, S, ν) tales que $\nu(X) = 1$, **i.e. espacios de probabilidad**. Además, a menos de que se diga lo contrario, todas las funciones en cuestión serán S-medibles y **no-negativas** (i.e. funciones en el conjunto que denotaremos como $\mathrm{M}^+(X, S)$). La restricción de que las funciones sean no-negativas tiene tan sólo el propósito de no recargar la notación, aunque pueden establecerse los resultados para funciones S-medibles arbitrarias, siempre y cuando se sustituya el valor absoluto de la función en consideración cada vez que aparezca dicha función en alguna expresión, que por otro lado es la manera como se encuentran enunciados los resultados en la mayoría de los libros.

El considerar espacios de medida unitaria resulta en apariencia una restricción muy fuerte. Pero en realidad no es así. Pues la mayoría de las desigualdades obtenidas aquí pueden extenderse al caso más general, en el que el espacio no resulta de medida unitaria, mediante un procedimiento muy simple. Veamos, por ejemplo, cuál es el procedimiento para la desigualdad de Hölder, corolario 1.21. Sea (X, S, μ) un espacio de medida y supóngase que existe una función $h \in M^+(X, S)$, $h > 0$ (c.d. rel. μ) tal que $\int_X h\, d\mu = 1$. Pedir esto es equivalente a pedir que entre las funciones medibles positivas casi siempre, exista una cuya integral sea finita. Enseguida defínase $\nu(E) = \int_E h\, d\mu \ \forall E \in S$. Entonces ν resulta ser una medida en (X, S). Más aún (X, S, ν) es un espacio de probabilidad. Sean ahora $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}_q(\mu)$ y defínase $f_1 = f/h^{1/p}$, $g_1 = g/h^{1/q}$, entonces $f_1 \in \mathcal{L}_p(\nu)$, $g_1 \in \mathcal{L}_q(\nu)$ y por la desigualdad de Hölder:

$$\int f_1 g_1\, d\nu \leq \left(\int f_1^p d\nu\right)^{1/p} \left(\int g_1^q d\nu\right)^{1/q},$$

es decir:

$$\int f g\, d\mu \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q d\mu\right)^{1/q}$$

Con lo cual se obtiene la desigualdad de Hölder en el caso general. Para la desigualdad de Minkowski, su Compañera, etc. se procede de manera similar.

Es bien conocido que una integral de Rieman puede interpretarse como un caso particular de una integral de Lebesgue[1], así que las desigualdades que aquí se han de presentar pueden aplicarse al caso en el que se trate de la integral de Riemann de funciones positivas. Aunque en el caso general se establecen las condiciones para que la igualdad ocurra, tratándose de la integral de Riemann dichas condiciones pueden simplificarse un poco a la luz de los dos lemas que se enunciarán a continuación.

1.2 LEMA. Sean (X, S, ν) un espacio de medida y f una función no-negativa y ν-integrable dados. Entonces: $\int f\, d\nu = 0$ ssi $f \equiv 0$.

DEMOSTRACIÓN. ($\Leftarrow$) Si $f \equiv 0$ es claro que $\int f\, d\nu = 0$.

---

[1] Ver [H-S].

($\Rightarrow$) Sea $E_n = \{x : f(x) \geq 1/n\}$ y $E_0 = \{x : f(x) > 0\}$, entonces $E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y

$$0 = \int f\,d\nu \geq \int_{E_n} f\,d\nu \geq \frac{\nu(E_n)}{n} \geq 0$$

por lo tanto $\nu(E_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, de donde $0 \leq \nu(E_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) = 0$. $\square$

1.3 LEMA. Sea f no-negativa y Riemann-integrable. Entonces $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ ssi $f(x) = 0$ para toda x punto de continuidad de f.

DEMOSTRACIÓN. ($\Leftarrow$) Como f es Riemann-integrable entonces f es continua (c.d. rel. λ)[1], con λ la medida de Lebesgue y dado que $f(x) = 0$ para toda x punto de continuidad de f entonces $f \equiv_\lambda 0$. Como f es Riemann-integrable entonces f es Lebesgue-medible[1] y $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\lambda = 0$ pues $f \equiv_\lambda 0$.

($\Rightarrow$) Sea ξ un punto de continuidad de f tal que $f(\xi) > 0$, entonces $\exists \varepsilon > 0$ y un intervalo abierto relativo a $[a,b]$ tal que:

(a) $\xi \in I$, y

(b) $f(x) > \varepsilon\ \forall x \in I$.

Si $c < d$ son los extremos de I, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_c^d f(x)\,dx > \int_c^d \varepsilon\,dx = \varepsilon(d-c) > 0$.

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx > 0. \qquad \square$$

En algunas ramas del Análisis Matemático se trabaja a menudo con la clase de funciones denotada por $\mathcal{L}_r(X,S,\nu)$ para $r > 0$, la cual resulta ser un espacio vectorial. La siguiente definición extiende este concepto para el caso en que $r \in \mathbb{R} - \{0\}$. Por supuesto que en caso de que $r < 0$, $\mathcal{L}_r(X,S,\nu)$ es tan sólo una clase.

1.4 DEFINICIÓN. Sea (X,S,ν) un espacio de probabilidad y $r > 0$. Se define el conjunto $\mathcal{L}_r^+(X,S,\nu)$ como sigue:

$$\mathcal{L}_r^+(X,S,\nu) = \{f \in \mathrm{M}^+(X,S) : \left(\int f^r\,d\nu\right)^{1/r} < +\infty\}.$$

Si $r < 0$ se define el conjunto $\mathcal{L}_r^+(X,S,\nu)$ como sigue:

$$\mathcal{L}_r^+(X,S,\nu) = \{f \in \mathrm{M}^+(X,S) : 0 < \left(\int f^r\, d\nu\right)^{1/r} < +\infty\}.$$

Nótese que si $r < 0$, entonces para que $f \in \mathcal{L}_r^+(X,S,\nu)$ es necesario que $\nu(\{x : f(x) = 0\}) = 0$.

Se optará por omitir el espacio de medida, cuando quede claro de que espacio se trata, escribiendo tan sólo $\mathcal{L}_r^+$. $\mathcal{L}_r(X,S,\nu)$ denotará las funciones S-medibles y r-integrables, sin ser necesariamente no-negativas. A continuación se darán una serie de ejemplos que ilustran el comportamiento de los espacios $\mathcal{L}_p$.

1.5 EJEMPLOS.

Sea $X = (0,a)$ $(p > 1)$, con la medida y la σ-álgebra de Lebesgue.

(a) $x^{-1/p} \in \mathcal{L}_{p-\delta} - \mathcal{L}_p$ $(\delta > 0)$.

(b) $x^{-1/p}\left(\log \frac{1}{x}\right)^{-2/p} \in \mathcal{L}_p - \mathcal{L}_{p+\delta}$ $(\delta > 0)$.

(c) $\log\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{L}_p$ [1] $\forall p > 0$.

(d) $e^{1/x} \notin \mathcal{L}_p$ $\forall p > 0$

Sea $X = (0,+\infty)$:

(e) $x^{-1}(1 + |\log x|)^{-2} \in \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_p$ $\forall p \neq 1$ $(p \in (0,+\infty))$.

(f) Sea $p > 0$, entonces $f(x) = x^{-1/p}(1 + |\log x|)^{-2/p} \in \mathcal{L}_p - \mathcal{L}_q$ $\forall q \neq p$ $(q \in (0,+\infty))$.

DEMOSTRACIÓN.

(a) Sea $\delta > 0$.

(i) $\int_0^a (x^{-1/p})^{p-\delta}\, dx < +\infty$ P.D. $\int_0^a x^{\frac{\delta}{p}-1}\, dx < +\infty$.

$\int_0^a x^{\frac{\delta}{p}-1}\, dx = \lim\limits_{y\to 0} \frac{p}{\delta}[a^{\delta/p} - y^{\delta/p}] = \frac{p}{\delta}a^{\delta/p}$

(ii) $\int_0^a (x^{-1/p})^p\, dx = +\infty$. $\int_0^a x^{-1}\, dx = \lim\limits_{y\to 0}[\log a - \log y] = +\infty$.

(b) Sea $\delta > 0$

(i) $\int_0^a \frac{dx}{x(\log\frac{1}{x})^2} = \lim_{y\to 0}\left[\frac{1}{\log\frac{1}{a}} - \frac{1}{\log\frac{1}{y}}\right] = \frac{1}{\log\frac{1}{a}}$.

(ii) Sea $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}(\log\frac{1}{x})^{\frac{2}{p}}}$. P.D. $f \notin \mathcal{L}_{p+\delta}(0,a)$. La integral es del tipo: $\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha(\log\frac{1}{x})^{2\alpha}}$. Con $\alpha > 1$.

Partimos de la desigualdad $\rho(\log t) \leq t^\rho$ para $t > 0$. Aplicándola a $t = \frac{1}{x} > 0$ nos da:

$$\rho\left(\log\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x^\rho}$$

o bien:

$$\rho x^\rho\left(\log\frac{1}{x}\right) \leq 1.$$

Elevando a la 2α:

$$(\rho^{2\alpha})x^{2\alpha\rho}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2\alpha} \leq 1.$$

Sea $\rho = \frac{\alpha-1}{2\alpha}$, entonces:

$$(\rho^{2\alpha})x^{-1} \leq \frac{1}{x^\alpha\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2\alpha}}.$$

Por lo tanto no $f^{p+\delta}(x)$ es integrable.

(c) $\int_0^a \left(\log\frac{1}{x}\right)^p dx < +\infty\ \forall p > 0$. Como $\forall\alpha > 0$ se tiene que $\log t < \frac{t^\alpha}{\alpha}$, entonces $\left(\log\frac{1}{x}\right)^p < \frac{1}{\alpha^p x^{\alpha p}}$. Sea $p > 0$ dada, hallamos $\alpha > 0$ tal que $\alpha p < 1$, entonces: $\int_0^a \left(\log\frac{1}{x}\right)^p dx \leq \frac{1}{\alpha^p}\int_0^a \frac{dx}{x^{\alpha p}} < +\infty$. Además $-\log x \notin \mathcal{L}_\infty$, que equivale a decir que, en esencia, la función no tiene una cota superior.

(d) Como $\left(e^{1/x}\right)^p = e^{p/x} > \frac{p}{x}$, entonces:

$$\int_0^a \left(e^{1/u}\right)^p du \geq p\int_0^a \frac{du}{u} = +\infty.$$

Además $e^{1/x} \in \mathcal{L}_{-\infty}$, pues está acotada inferiormente por $e > 0$.

(e) Partimos de la desigualdad $\rho(1+\log t) \leq t^\rho$, válida para $t > 0$ y $\rho \leq 1$[2].

[2] $\rho - \rho\log t \leq 1 - \rho\log t = 1 + \log t^{-\rho} \leq t^{-\rho}$, pues $\log w \leq w - 1\ \forall w > 0$.

(i) $f \in \mathcal{L}_1$.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^\infty f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x(1-\log x)^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+\log x)^2} \\ &= \left[\frac{1}{1-\log x}\right]_0^1 + \left[\frac{-1}{1+\log x}\right]_1^\infty = 1+1=2.\end{aligned}$$

(ii) Sea $p \neq 1$, $p > 0$. Sea $x \in (0,1)$, entonces $\rho(1-\log x) \leq \frac{1}{x^\rho}$, entonces $f^p(x) = \frac{1}{x^p(1-\log x)^{2p}} \geq \rho^{2p}x^{p(2\rho-1)}$. Si $\rho = \frac{p-1}{2p}$, entonces $\rho < 1$ y $p(2\rho-1) = -1$. Por lo tanto $f^p(x) \geq \frac{\rho^{2p}}{x}$ en $(0,1)$. De donde $f^p \notin \mathcal{L}_1$.

(f) $(p > 0)$ Sea $f_1 = f^p$, por el inciso (e), $f_1 \in \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_q$ $\forall q \neq 1$. De donde:

(i) $f \in \mathcal{L}_p$. (ii) Si $q \neq p$ $(q > 0)$, $f^q = f_1^{q/p}$, $0 < p/q \neq 1$ como $f_1 \neq 1$. Como $f_1 \notin \mathcal{L}_{q/p}$, entonces $f \notin \mathcal{L}_p$.

Por el inciso (e) $f^p(x) \in \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_q$ $\forall q \neq 1$ $q > 0$, entonces $f \in \mathcal{L}_p - \mathcal{L}_q$ $\forall q \neq p$ $q > 0$. □

De manera análoga a la definición anterior se extiende la definición de la semi-norma denotada por $\|\ \|_r$ que, como es de esperarse, para el caso en que $r < 0$ deja de ser una semi-norma para convertirse tan sólo en una función.

1.6 Definición. Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad y $r \in \mathbb{R} - \{0\}$. Se define la función $\|\ \|_r : \mathcal{L}_r^+(X,S,\nu) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como sigue:

$$\|f\|_r = \left(\int f^r\,d\nu\right)^{1/r}. \qquad (\forall f \in \mathcal{L}_r^+(X,S,\nu))$$

Las siguientes propiedades de la función $\|\ \|_r$, recién definida, nos serán de gran utilidad, sobre todo para demostrar resultados de los casos en que $r < 0$ basándose en el caso $r > 0$.

1.7 Propiedades. Sean $r, k \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $f \in \mathcal{L}_r^+(X,S,\nu)$ entonces:

(1) Si $f(x) > 0$ (c.d. rel. ν), entonces $\|f\|_r = \frac{1}{\|1/f\|_{-r}}$.

(2) Si $f \equiv k$, entonces $\|f\|_r = |k|\ \forall r$.

(3) $\|f\|_r = \|f^r\|_1^{1/r}$.

La comprobación de tales propiedades es inmediata. Un caso particular importante es el siguiente:

1.8 EJEMPLOS. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ tales que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $X = \{1, \ldots, n\}$, $S = \mathcal{P}(X)$ y $\nu : S \to \mathbb{R}$ dada por $\nu(\{i\}) = \alpha_i\ \forall i \in X$. Si $f : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es tal que $f(i) = a_i$, entonces:

$$\|f\|_r = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i^r\right)^{1/r}$$

en particular si $r = 1$

$$\|f\|_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i.$$

A continuación se han de definir las funciones $\|\ \|_\infty$ y $\|\ \|_{-\infty}$ que van muy ligadas a las funciones $\|\ \|_r$ definidas previamente, pues como veremos más adelante, (teorema 1.26) $\|\ \|_\infty$ y $\|\ \|_{-\infty}$ resultan ser los límites de las funciones $\|\ \|_r$ cuando $r \to +\infty$ y $r \to -\infty$ respectivamente. Además este hecho justifica el uso de tal notación.

1.9 DEFINICIÓN. Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad y $f \in \mathrm{M}^+(X, S)$ dados. Se definen el **supremo y el ínfimo esencial** de f, denotados $\|f\|_\infty$ y $\|f\|_{-\infty}$ como sigue:

$$\|f\|_\infty = \inf\{A \geq 0 : \nu(\{x : f(x) > A\}) = 0\}$$

y

$$\|f\|_{-\infty} = \sup\{A \geq 0 : \nu(\{x : f(x) < A\}) = 0\}.$$

Además se definen

$$\mathcal{L}_\infty(X, S, \nu) = \{f \in \mathrm{M}^+(X, S) : \|f\|_\infty < +\infty\},$$

y

$$\mathcal{L}_{-\infty}(X, S, \nu) = \{f \in \mathrm{M}^+(X, S) : \|f\|_{-\infty} > 0\}.$$

Resulta conveniente conocer el comportamiento de las funciones $\| \|_\infty$ y $\| \|_{-\infty}$ y como están ligadas entre sí. Esto simplifica muchas demostraciones. A continuación se exponen algunas de las propiedades que nos dan información sobre tales funciones.

1.10 PROPIEDADES. Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad y $f \in M^+(X, S)$. Entonces:

(1) $\nu(\{x \in X : f(x) > \|f\|_\infty\}) = 0 = \nu(\{x \in X : f(x) < \|f\|_{-\infty}\})$.

(2) $\|f\|_{-\infty} \leq \|f\|_\infty$ con igualdad ssi $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $f \equiv k$.

(3) Sean $S_f = \{A \geq 0 : \nu(\{x : f(x) > A\}) = 0\}$ e $I_f = \{A \geq 0 : \nu(\{x : f(x) < A\}) = 0\}$. Si $B \notin S_f$ entonces B es una cota inferior de S_f y además $B < \|f\|_\infty$. Análogamente si $B \notin I_f$ entonces B es una cota superior de I_f y $\|f\|_{-\infty} < B$.

Con lo cual se concluye que tanto S_f como I_f resultan ser intervalos. Más aún $I_f = [0, \|f\|_{-\infty}]$ y $S_f = [\|f\|_\infty, +\infty)$.

(4) Si $f(x) > 0$ (c.d. rel. ν), entonces: $\|f\|_\infty = \frac{1}{\|1/f\|_{-\infty}}$ y $\|f\|_{-\infty} = \frac{1}{\|1/f\|_\infty}$.

(5) Si $r > 0$ entonces: $\|f^r\|_{-\infty}^{1/r} = \|f\|_{-\infty}$ y $\|f^r\|_\infty^{1/r} = \|f\|_\infty$. Si $r < 0$ y $f(x) > 0$ (c.d. rel. ν), entonces: $\|f^r\|_{-\infty}^{1/r} = \|f\|_\infty$ y $\|f^r\|_\infty^{1/r} = \|f\|_{-\infty}$.

(6) Si $f \equiv g$ entonces $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$ y $\|f\|_{-\infty} = \|g\|_{-\infty}$.

DEMOSTRACIÓN.

(1) Sea $M = \|f\|_\infty$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ $\nu(\{x : f(x) > M + \frac{1}{n}\}) = 0$, pero $\{x : f(x) > M\} = \bigcup_{i=1}^\infty \{x : f(x) > M + \frac{1}{n}\}$ así que $0 \leq \nu(\{x : f(x) > M\}) \leq \sum_{i=1}^n \nu(\{x : f(x) > M + \frac{1}{n}\}) = 0$.

Análogamente se demuestra que $\nu(\{x : f(x) < \|f\|_{-\infty}\}) = 0$.

(2) Supóngase que $\|f\|_\infty < \|f\|_{-\infty}$. Entonces $X = \{x : f(x) < \|f\|_{-\infty}\} \cup \{x : f(x) > \|f\|_\infty\}$. Aplicando la propiedad (1) resulta que: $\nu(X) \leq \nu(\{x : f(x) < \|f\|_{-\infty}\}) + \nu(\{x : f(x) > \|f\|_\infty\}) = 0$ pero esto contradice al hecho de que $\nu(X) = 1 > 0$, pues se trata de un espacio de probabilidad. Por lo tanto $\|f\|_{-\infty} \leq \|f\|_\infty$.

Si $\|f\|_\infty = \|f\|_{-\infty}$, sea k el valor común. Se afirma que $f \equiv k$. En efecto $\{x : f(x) \neq k\} = \{x : f(x) < k\} \cup \{x : f(x) > k\}$, así que $\nu(\{x : f(x) \neq k\}) \leq \nu(\{x :$

$f(x) < \|f\|_{-\infty}\}) + \nu(\{x : f(x) > \|f\|_\infty\}) = 0$. por lo que $f \equiv k$. Recíprocamente si $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $f \equiv k$ entonces $\nu(\{x : f(x) > k\}) = 0 = \nu(\{x : f(x) < k\})$, entonces por la definición de $\|f\|_\infty$ y de $\|f\|_{-\infty}$ se sigue que: $\|f\|_\infty \leq k \leq \|f\|_{-\infty} \leq \|f\|_\infty$.

(3) Supóngase que $B \notin S_f$, entonces

$$\nu(\{x : f(x) > B\}) > 0$$

lo cual implica que $\forall A \in S_f$ $B < A$, pues si $\exists A \in S_f$ con $B \geq A$ entonces $\nu(\{x : f(x) > A\}) \geq \nu(\{x : f(x) > B\}) > 0$ lo que contradice al hecho de que $A \in S_f$. Por lo tanto B es una cota inferior para S_f además por la propiedad (1), se tiene que

$$\nu(\{x : f(x) > \|f\|_\infty\}) = 0,$$

es decir que $\|f\|_\infty \in S_f$, de donde $B < \|f\|_\infty$. De hecho, se ha probado que S_f es un intervalo y por la definición de $\|f\|_\infty$ y del hecho de que $\|f\|_\infty$ resulta que $\inf S_f = \|f\|_\infty \in S_f$, por lo que $S_f = [\|f\|_\infty, +\infty)$.

Análogamente se prueba que si $B \notin I_f$ entonces B es una cota superior de I_f, que $\|f\|_{-\infty} < B$ y que $I_f = [0, \|f\|_{-\infty}]$.

(4) Por la propiedad (1) se deduce que $\nu(\{x : \frac{1}{f(x)} < \|\frac{1}{f}\|_{-\infty}\}) = 0$ de donde $\nu(\{x : f(x) > \frac{1}{\|\frac{1}{f}\|_{-\infty}}\}) = 0$, y por la definición de $\|f\|_\infty$ se sigue que:

$$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{\|1/f\|_{-\infty}}. \tag{1.1}$$

Nuevamente por la propiedad (1) se deduce que $\nu(\{x : f(x) > \|f\|_\infty\}) = 0$ de donde $\nu(\{x : \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{\|f\|_\infty}\}) = 0$, y por la definición de $\|1/f\|_{-\infty}$ resulta que: $\frac{1}{\|f\|_\infty} \leq \|1/f\|_{-\infty}$, por lo que:

$$\|f\|_\infty \geq \frac{1}{\|1/f\|_{-\infty}}. \tag{1.2}$$

Por las desigualdades (1.1) y (1.2) resulta que:

$$\|f\|_\infty = \frac{1}{\|1/f\|_{-\infty}}.$$

La igualdad $\|f\|_{-\infty} = \frac{1}{\|1/f\|_{\infty}}$ puede demostrarse aplicando el caso anterior a $g = 1/f$.

(5) Primero probaremos el caso en el que $r > 0$. Por la propiedad (1) $\nu(\{x : f^r(x) > \|f\|_{\infty}^r\} = \nu(\{x : f(x) > \|f\|_{\infty}\}) = 0$, así que por la definición de $\|f^r\|_{\infty}$:

$$\|f\|_{\infty}^r \geq \|f^r\|_{\infty}. \tag{1.3}$$

Nuevamente por la propiedad (1) $\nu(\{x : f(x) > \|f^r\|_{\infty}^{1/r}\}) = \nu(\{x : f^r(x) > \|f^r\|_{\infty}\}) = 0$, y por definición de $\|f\|_{\infty}$:

$$\|f^r\|_{\infty}^{1/r} \geq \|f\|_{\infty}. \tag{1.4}$$

De las desigualdades (1.3) y (1.4) se concluye que:

$$\|f^r\|_{\infty}^{1/r} = \|f\|_{\infty}.$$

La igualdad $\|f\|_{-\infty}^{1/r} = \|f\|_{-\infty}$ puede demostrarse aplicando el caso anterior a $g = 1/f$ usando la propiedad (4). Para el caso en el que $r < 0$ puede aplicarse el recién probado ($r > 0$) a $-r$ usando la propiedad (4).

(6) Sea $E_0 = \{x : f(x) = g(x)\}$, como $\nu(X - E_0) = 0$:

$$\nu(\{x \in X : f(x) > \|g\|_{\infty}\}) = \nu(\{x \in E_0 : f(x) > \|g\|_{\infty}\}), \tag{1.5}$$

dado que $f(x) = g(x)$ $\forall x \in E_0$ y por la ecuación (1.5)

$$\nu(\{x \in X : f(x) > \|g\|_{\infty}\}) = \nu(\{x \in E_0 : g(x) > \|g\|_{\infty}\}) = 0 \tag{1.6}$$

Y de la definición de $\|f\|_{\infty}$ se concluye que $\|f\|_{\infty} \leq \|g\|_{\infty}$. La otra desigualdad puede obtenerse intercambiando los papeles de la f y la g.

Análogamente se demuestra que:

$$\|f\|_{-\infty} = \|g\|_{-\infty}. \qquad \square$$

A continuación presentamos el primer teorema que involucra desigualdades e integrales, el cual proporciona una cota uniforme (tanto superior, como inferior) para los valores de todas las funciones $\|\ \|_r$.

1.11 TEOREMA. Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad,

$$f \in \mathcal{L}^+_{-\infty}(X, S, \nu) \cap \mathcal{L}^+_{\infty}(X, S, \nu).$$

Entonces $f \in \mathcal{L}^+_r(X, S, \nu)$ $\forall r \neq 0$ (con $f(x) > 0$ c.d. rel. ν si $r < 0$) y además:

(a) $\|f\|_{-\infty} \leq \|f\|_r \leq \|f\|_\infty$.

(b) La igualdad ocurre ssi $f \equiv \|f\|_r$.

DEMOSTRACIÓN.

CASO A. $(r = 1)$

Sean S_f y I_f como en la propiedad 1.10 (3). Como $\int (f - \|f\|_1)\, d\nu = \int f\, d\nu - \|f\|_1 = 0$ entonces $f - \|f\|_1$ es nula (c.d. rel. ν) o bien es positiva en un conjunto de medida positiva y negativa en un conjunto de medida positiva. La primera posibilidad implica que $f \equiv \|f\|_1$ y por la propiedad 1.10 (2) $\|f\|_{-\infty} = \|f\|_1 = \|f\|_\infty$.

Inversamente, basta que se de una de las igualdades y la otra automáticamente se da. Supóngase que $\|f\|_{-\infty} = \|f\|_1$ P.D. $\|f\|_{-\infty} = \|f\|_1 = \|f\|_\infty$ y que $f \equiv \|f\|_1$. Sea $E = \{x \in X : f(x) < \|f\|_{-\infty}\}$, por la propiedad 1.10 (1) $\nu(E) = 0$. Entonces

$$0 = \int_X (f - \|f\|_{-\infty})\, d\nu = \int_{X-E} (f - \|f\|_{-\infty})\, d\nu,$$

pero $f - \|f\|_{-\infty} \geq 0$ en $X - E$. De donde $f - \|f\|_{-\infty} \equiv 0$, es decir que $f \equiv \|f\|_{-\infty}$ y por la propiedad 1.10 (2) se concluye que $\|f\|_{-\infty} = \|f\|_\infty$. Análogamente se demuestra que si $\|f\|_1 = \|f\|_\infty$ entonces $f \equiv \|f\|_\infty$ y $\|f\|_{-\infty} = \|f\|_1 = \|f\|_\infty$.

La segunda posibilidad implica que $\nu(\{x : f(x) > \|f\|_1\}) > 0$ y que $\nu(\{x : f(x) < \|f\|_1\}) > 0$, i.e.: $\|f\|_1 \notin S_f$ y $\|f\|_1 \notin I_f$ y por la propiedad 1.10 (3) $\|f\|_{-\infty} < \|f\|_1 < \|f\|_\infty$.

CASO B. $(r > 0)$

Por la propiedad 1.10 (5) $\|f^r\|_{-\infty} = \|f\|^r_{-\infty}$ y $\|f^r\|_\infty = \|f\|^r_\infty$, y dado que $\int f^r\, d\nu = \|f^r\|_1$ entonces por el caso anterior $\|f^r\|_{-\infty} \leq \int f^r\, d\nu \leq \|f^r\|_\infty$ o lo que es lo mismo $\|f\|^r_{-\infty} \leq \int f^r\, d\nu \leq \|f\|^r_\infty$ de donde $\|f\|_{-\infty} \leq \|f\|_r \leq \|f\|^r_\infty$, y la igualdad ocurre ssi $f^r \equiv \int f^r\, d\nu$ ssi $f \equiv \|f\|_r$.

CASO C. $(r < 0)$

Por la propiedad 1.10 (5) $\|f^r\|_{-\infty} = \|f\|_\infty^r$ y $\|f^r\|_\infty = \|f\|_{-\infty}^r$, y dado que $\int f^r\,d\nu = \|f^r\|_1$ entonces por el caso (a) $\|f^r\|_{-\infty} \leq \int f^r\,d\nu \leq \|f^r\|_\infty$ o lo que es lo mismo $\|f\|_\infty^r \leq \int f^r\,d\nu \leq \|f\|_{-\infty}^r$ de donde $\|f\|_\infty \geq \|f\|_r \geq \|f\|_{-\infty}^r$, y la igualdad ocurre ssi $f^r \equiv \int f^r\,d\nu$ ssi $f \equiv \|f\|_r$. $\square$

La siguiente definición es una generalización del concepto de la media geométrica.

1.12 DEFINICIÓN (MEDIA GEOMÉTRICA). Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad y $f \in \mathrm{M}^+(X, S)$ dados. Se define la **media geométrica** de f, denotada por $\|f\|_0$ como sigue:

$$\|f\|_0 = \exp\left[\int \log f\,d\nu\right].$$

Con la convención de que $\log(0) = -\infty$ y que $\exp(-\infty) = 0$.

Y se define

$$\mathcal{L}_0^+(X, S, \nu) = \{f \in \mathrm{M}^+ : \|f\|_0 < +\infty\}.$$

En un teorema que se probará en el capítulo siguiente quedará plenamente justificado el uso de la notación $\|f\|_0$ para la media geométrica de f, por lo pronto veamos un caso particular importante.

1.13 EJEMPLO. Sean $n \in \mathrm{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ tales que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, Sea $X = \{1, \ldots, n\}$, $S = \mathcal{P}(X)$ y $\nu(\{i\}) = \frac{1}{n}$ y $f : X \to \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$ dada por $f(i) = a_i$. Entonces

$$\|f\|_0 = \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i}.$$

Lo cual pone en evidencia porque se dice que la definición anterior es una generalización de la media geométrica usual.

Ya hemos definido $\mathcal{L}_p$ y $\| \ \|_p$ para todo real extendido p. A continuación presentaremos algunos casos particulares que sirven para ilustrar el comportamiento de los conjuntos $\mathcal{L}_p$, cuando $p = 0, \pm\infty$.

1.14 EJEMPLOS. Sea $X = (0, 1)$, con la medida y la σ-álgebra de Lebesgue. Entonces:

(a) $e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \in \mathcal{L}_0 - L_p \; \forall p > 0$

(b) $x^{-1} \in \mathcal{L}_{-p} - L_0 \; \forall p > 0$.

(c) Sea $a_0 = 0$, $a_n = a_{n-1} + 1/2^n \; \forall n > 0$. Defínase $I_n = (a_{n-1}, a_n] \; \forall n > 0$. Y Sea

$$f(x) = \sum_{i=n}^{\infty} n\chi_{I_n}.$$

Se afirma que $f \in \mathcal{L}_p - (\mathcal{L}_{-\infty} \cup \mathcal{L}_\infty)$.

DEMOSTRACIÓN.

(a) Sea $f(t) = \exp(1/\sqrt{t})$.

(i) $\int_0^1 \log f(t)\, dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = [2\sqrt{t}]_0^1 = 2$.

(ii) $\int_0^1 f^p(t)\, dt = \int_0^1 e^{\frac{p}{\sqrt{t}}}\, dt$, haciendo el cambio de variable $u = p/\sqrt{t}$ resulta que: $\int_0^a f^p(t)\, dt = 2p^2 \int_p^\infty u^{-3} e^u\, du = +\infty$.

(b) Sea $f(t) = t^{-1}$.

(i) $\int_0^1 f^{-p}(t)\, dt = \int_0^1 t^p\, dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$.

(ii) $\int_0^1 \log f(t)\, dt = \int_0^1 -\log t\, dt$ y haciendo el cambio de variable $u = \log t$ $\int_0^1 \log f(t)\, dt = \int_0^\infty ue^u\, du = +\infty$.

(c) Sea $f(x) = \sum_{i=n}^\infty n\chi_{I_n}$.

(i) Dado que $0 < \sum_{n=1}^\infty n^p/2^n < +\infty \; \forall p \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, entonces $f \in \mathcal{L}_p$ $\forall p \in (-\infty, +\infty)$.

(ii) Además $\forall M, \varepsilon > 0$ siempre existirán E_M y F_ε en S de medida positiva tales que $f(x) > M \; \forall x \in E_M$ y $f(x) < \varepsilon \; \forall x \in F_\varepsilon$. De donde se deduce que $f \notin (\mathcal{L}_{-\infty} \cup \mathcal{L}_\infty)$. $\square$

Algunas propiedades de la media geométrica son las siguientes:

1.15 PROPIEDADES.

(1) $\log \|f\|_0 = \|\log f\|_1$.

(2) Si $\exists r > 0$ tal que $\|f\|_r < +\infty$ entonces $\|f\|_0 < +\infty$.

(3) Si $0 < \|f\|_0 < +\infty$ entonces $\|1/f\|_0 = \frac{1}{\|f\|_0}$.

(4) $\|f^r\|_0 = \|f\|_0^r$.

DEMOSTRACIÓN. Las propiedades (1), (3) y (4) se siguen inmediatamente de la definición. Para la propiedad (2) se tiene que $\log f < \frac{f^r}{r}$, entonces $\int \log f\, d\nu < \frac{1}{r}\int f^r\, d\nu < +\infty$ de donde $\|f\|_0 = \exp\left[\int \log f\, d\nu\right] < +\infty$. □

1.2 La Desigualdad de Hölder

A continuación se establecerán los resultados necesarios para demostrar la desigualdad de Hölder. dicha desigualdad resulta ser rica en aplicaciones. En esta sección sólo se han de considerar consecuencias inmediatas de ella.

El teorema que se da a continuación (para el caso $r = 1$) es una generalización del hecho bien conocido, el cual afirma que la media geométrica nunca excede a la media aritmética y estas coinciden sólo cuando los números que se están promediando son todos iguales.

1.16 TEOREMA. Supóngase que $f \in M^+(X, S)$ y que existe $r \neq 0$ tal que $\|f\|_r < +\infty$. Entonces:

$$\|f\|_0 \leq \|f\|_r \qquad \text{(si } r > 0\text{)}$$

$$\|f\|_0 \geq \|f\|_r \qquad \text{(si } r < 0\text{)}$$

y en ambos casos ocurre la igualdad ssi $f \equiv \|f\|_r$.

DEMOSTRACIÓN.

CASO A. $(r = 1)$

Si $\int f\, d\nu = 0$ entonces $f \equiv 0$ y $\|f\|_0 = 0 \leq \|f\|_r$. Supongamos que $\int f\, d\nu > 0$. Como $\log x \leq x - 1$ con igualdad ssi $x = 1$, entonces

$$\log f - \log \|f\|_1 = \log\left(\frac{f}{\|f\|_1}\right) \leq \frac{f}{\|f\|_1} - 1$$

e integrando

$$\int (\log f - \log \|f\|_1)\, d\nu \leq \int \left(\frac{f}{\|f\|_1} - 1 \right) d\nu = \frac{\|f\|_1}{\|f\|_1} - 1 = 0.$$

Por lo tanto $\int \log f \, d\nu \leq \log \|f\|_1$, es decir $\|f\|_0 \leq \|f\|_1$ y la igualdad ocurre ssi $\int \log f \, d\nu = \log \|f\|_1$ ssi $\int (\log f - \log \|f\|_1) d\nu = 0$ ssi $0 = \int \log \left(\frac{f}{\|f\|_1}\right) d\nu = \int \left(\log \left(\frac{f}{\|f\|_1}\right) - \left(\frac{f}{\|f\|_1} - 1\right)\right) d\nu$ ssi $\log \left(\frac{f}{\|f\|_1}\right) \equiv \frac{f}{\|f\|_1} - 1$ (pues $\log x \leq x - 1$) ssi $\frac{f}{\|f\|_1} \equiv 1$ ssi $f \equiv \|f\|_1$.

CASO B. $(r > 0)$

Por la propiedad 1.15 (4) y el caso anterior $\|f\|_0^r = \|f^r\|_0 \leq \|f^r\|_1$. Es decir $\|f\|_0 \leq \left(\int f^r \, d\nu\right)^{1/r} = \|f\|_r$ y la igualdad ocurre ssi $f^r \equiv \|f^r\|_1$ ssi $f \equiv \|f\|_r$.

CASO C. $(r < 0)$

Se demuestra de manera análoga al caso $r > 0$. □

1.17 COROLARIO. Sean $a_i, \alpha_i > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ entonces

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i^r \right)^{1/r} \qquad (\forall r > 0)$$

ó

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i^r \right)^{1/r} \qquad (\forall r < 0)$$

con igualdad ssi $a_1 = \cdots = a_n$.

DEMOSTRACIÓN.

Sean $X = \{1, \ldots, n\}$, $\nu(\{i\}) = \alpha_i$, $S = \mathcal{P}(X)$ y $f : X \to \mathbb{R}$ con $f(i) = a_i$. □

Otro corolario importante que se puede extraer del teorema anterior afirma que la suma de las medias geométricas nunca excede a la media geométrica de la suma, su enunciado preciso es el siguiente:

1.18 COROLARIO. Sean (X,S,ν) un espacio de probabilidad y $f,g \in$ $\mathrm{M}^+(X,S)$. Si $0 < \|f+g\|_0 < +\infty$ entonces:

$$\|f\|_0 + \|g\|_0 \leq \|f+g\|_0$$

y la igualdad ocurre ssi $\exists k_1, k_2 \in \mathrm{R}$ no ambas nulas tal que $k_1 f \equiv k_2 g$ (i.e. f y g son esencialmente proporcionales) o bien cuando $\|f+g\|_0 = 0$.

DEMOSTRACIÓN.

Nótese que si $\|f\|_0 < +\infty$ y $\|g\|_0 < +\infty$, entonces $\|fg\|_0 < +\infty$, de hecho $\|fg\|_0 = \|f\|_0\|g\|_0$, en particular

$$\|f+g\|_0 \left\| \frac{f}{f+g} \right\|_0 = \|f\|_0,$$

o bien:

$$\left\| \frac{f}{f+g} \right\|_0 = \frac{\|f\|_0}{\|f+g\|_0}.$$

Y por el teorema anterior $\left\| \frac{f}{f+g} \right\|_0 \leq \left\| \frac{f}{f+g} \right\|_1$, de donde:

$$\left\| \frac{f}{f+g} \right\|_0 + \left\| \frac{g}{f+g} \right\|_0 \leq \left\| \frac{f}{f+g} \right\|_1 + \left\| \frac{g}{f+g} \right\|_1 = 1.$$

Con lo cual $\|f\|_0 + \|g\|_0 \leq \|f+g\|_0$. La igualdad ocurre ssi $\frac{f}{f+g} \equiv \left\| \frac{f}{f+g} \right\|_1$ y $\frac{g}{f+g} \equiv \left\| \frac{g}{f+g} \right\|_1$ ssi $f \equiv (f+g) \left\| \frac{f}{f+g} \right\|_1$ y $g \equiv (f+g) \left\| \frac{g}{f+g} \right\|_1$ ssi $\left(1 - \left\| \frac{f}{f+g} \right\|_1\right) f \equiv g \left\| \frac{f}{f+g} \right\|_1$ y $\left(1 - \left\| \frac{g}{f+g} \right\|_1\right) g \equiv f \left\| \frac{g}{f+g} \right\|_1$ ssi $\left\| \frac{g}{f+g} \right\|_1 f \equiv g \left\| \frac{f}{f+g} \right\|_1$. $\square$

El corolario anterior puede extenderse para el caso en el que se consideren n sumandos $(n \geq 2)$. Es decir $\|f_1\|_0 + \cdots + \|f_n\|_0 \leq \|f_1 + \cdots + f_n\|_0$ con igualdad ssi f_j es esencialmente un múltiplo de la suma de las otras funciones. Esto se puede demostrar usando el cociente $f_j/(f_1 + \cdots + f_n)$.

Una desigualdad que resulta ser muy útil es la llamada **desigualdad de Hölder** que relaciona el producto de las "normas" con la "norma" del producto, la cual se muestra a continuación.

1.19 TEOREMA (DESIGUALDAD DE HÖLDER). Sean $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ tales que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ y $f_i \in \mathcal{L}^+_{\alpha_i}(X, S, \nu)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Entonces $f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n} \in \mathcal{L}_1(X, S, \nu)$ y

$$\int f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n}\, d\nu \leq \left(\int f_1\, d\nu\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\int f_n\, d\nu\right)^{\alpha_n}.$$

Y la igualdad ocurre ssi $f_1, \ldots, f_n$ son esencialmente proporcionales.

DEMOSTRACIÓN.

Si $\exists i$ tal que $\int f_i\, d\nu = 0$, la igualdad se satisface. Supóngase que $\int f_i\, d\nu > 0$ $\forall i$. Por el corolario 1.17

$$\begin{aligned}
\frac{\int f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n}\, d\nu}{(\int f_1\, d\nu)^{\alpha_1} \cdots (\int f_n\, d\nu)^{\alpha_n}} &= \int \left(\frac{f_1}{\int f_1\, d\nu}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{f_n}{\int f_n\, d\nu}\right)^{\alpha_n} d\nu \leq \\
&\leq \int \left[\alpha_1 \left(\frac{f_1}{\int f_1\, d\nu}\right) + \cdots + \alpha_n \left(\frac{f_n}{\int f_n\, d\nu}\right)\right] d\nu \\
&= \int (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\, d\nu = 1.
\end{aligned}$$

Es decir $\int f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n}\, d\nu \leq (\int f_1\, d\nu)^{\alpha_1} \cdots (\int f_n\, d\nu)^{\alpha_n}$, con igualdad ssi

$$\frac{f_1}{\|f\|_1} \equiv \cdots \equiv \frac{f_n}{\|f\|_n}. \qquad \square$$

Si en el teorema anterior se hace $p_i = \frac{1}{\alpha_i}$ y $g_i = f_i^{\alpha_i}$, resulta la siguiente caracterización de la desigualdad de Hölder que es como frecuentemente aparece en la literatura:

$$\|g_1 \cdots g_n\|_1 \leq \|g_1\|_{p_1} \cdots \|g_n\|_{p_n}.$$

El corolario que se enuncia a continuación es la forma más conocida, y más usual, de la desigualdad de Hölder (teorema 1.19).

1.20 OBSERVACIÓN. En el corolario anterior el caso $p < 0$ se reduce al caso (b) intercambiando los papeles de p y q. Nótese que las hipótesis en cada caso cambian un poco.

1.21 COROLARIO (DE LA DESIGUALDAD DE HÖLDER). Sea (X,S,ν) un espacio de probabilidad, $p,q \in \mathbb{R}-\{0\}$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, si:

(a) $p>1$, $f \in \mathcal{L}_p^+(X,S,\nu)$ y $g \in \mathcal{L}_q^+(X,S,\nu)$, entonces:

$$\int fg\,d\nu \leq \left(\int f^p\,d\nu\right)^{1/p}\left(\int g^q\,d\nu\right)^{1/q},$$

con igualdad ssi f^p y g^q son esencialmente proporcionales.

(b) $0<p<1$, $fg \in \mathcal{L}_1^+(X,S,\nu)$ y $0<\int g^q\,d\nu<+\infty$, entonces:

$$\int fg\,d\nu \geq \left(\int f^p\,d\nu\right)^{1/p}\left(\int g^q\,d\nu\right)^{1/q},$$

con igualdad ssi f^p y g^q son esencialmente proporcionales.

DEMOSTRACIÓN.

(a) Se demuestra aplicando la desigualdad de Hölder (teorema 1.19), con $n=2$; $\alpha_1=1/p$, $\alpha_2=1/q$ y $f_1^{\alpha_1}=f$, $f_2^{\alpha_2}=g$. Es claro que $\alpha_1+\alpha_2=1$; $\alpha_1,\alpha_2>0$ y que $f_1,f_2\in\mathcal{L}_1$.

(b) Supóngase que $0<p<1$. Sea $p_1=\frac{1}{p}$, entonces $p_1>1$. Sean

$$u=(fg)^p \qquad \text{y} \qquad v=g^{-p},$$

entonces: $u^{p_1}=(fg)^{pp_1}=fg\in\mathcal{L}_1$ y como $q_1=\frac{1}{1-p}$ entonces: $-pq_1=q$, de donde $v^{q_1}=g^{-pq_1}=g^q\in\mathcal{L}_1$ y $uv=f^p$. Aplicando la parte (a) a u y v obtenemos:

$$\int uv\,d\nu \leq \left(\int u^{p_1}\,d\nu\right)^{1/p_1}\left(\int v^{q_1}\,d\nu\right)^{1/q_1}$$

o lo que es lo mismo

$$\int f^p\,d\nu \leq \left(\int fg\,d\nu\right)^{p}\left(\int g^q\,d\nu\right)^{1-p}$$

y elevando a la $\frac{1}{p}$

$$\left(\int f^p\,d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int fg\,d\nu\right)\left(\int g^q\,d\nu\right)^{\frac{1}{p}-1}.$$

Por hipótesis $0 < \int g^q \, d\nu < +\infty$, por lo tanto:

$$\left(\int g^q \, d\nu\right)^{1/q} \left(\int f^p \, d\nu\right)^{1/p} \leq \int fg \, d\nu.$$

La igualdad ocurre ssi u^{p_1} es esencialmente proporcional a v^{q_1}, que es equivalente a que f^p sea esencialmente proporcional a g^q. $\square$

1.22 TEOREMA (DESIGUALDAD DE HÖLDER, $p = 1$, $q = \pm\infty$). Sea (X, S, ν) un espacio de probabilidad.

(a) Si $p = 1$, $q = +\infty$, $f \in \mathcal{L}_p^+(X, S, \nu)$ y $g \in \mathcal{L}_q^+(X, S, \nu)$, entonces $fg \in \mathcal{L}_1^+(X, S, \nu)$ y:

$$\int fg \, d\nu \leq \|g\|_\infty \int f \, d\nu.$$

Con igualdad ssi $g = \|g\|_\infty$ (c.d. rel. ν) en $E = \{x : f(x) > 0\}$.

(b) Si $p = 1$, $q = -\infty$, $f \in \mathcal{L}_p^+(X, S, \nu)$ y $g \in \mathcal{L}_q^+(X, S, \nu)$, entonces $fg \in \mathcal{L}_1^+(X, S, \nu)$ y:

$$\int fg \, d\nu \geq \|g\|_{-\infty} \int f \, d\nu.$$

Con igualdad ssi $g = \|g\|_{-\infty}$ (c.d. rel. ν) en $E = \{x : f(x) > 0\}$.

DEMOSTRACIÓN. (a) Sea $F = \{x : g(x) > \|g\|_\infty\}$, por la propiedad 1.10 (1) $\nu(F) = 0$, entonces $\int fg \, d\nu = \int_E fg \, d\nu \leq \int_E f\|g\|_\infty \, d\nu = \|g\|_\infty \int f \, d\nu$.

$\int fg \, d\nu = \|g\|_\infty \int f \, d\nu$ ssi $\int f(\|g\|_\infty - g) \, d\nu = 0$, ssi $f(\|g\|_\infty - g) = 0$ (c.d. rel. ν) (pues $f(\|g\|_\infty - g) \geq 0$ c.d. rel. ν), ssi $\|g\|_\infty = g$ (c.d. rel. ν) en $E = \{x : f(x) > 0\}$.

(b) Análogo al anterior. $\square$

1.23 OBSERVACIÓN. No hay desigualdad de Hölder con $p = 0$, pues no tiene sentido hablar del exponente conjugado de 0. No obstante en este caso podemos encontrar una relación interesante que involucra la norma cero aplicada al producto de dos funciones y es la siguiente:

$$\|fg\|_0 = \|f\|_0 \|g\|_0.$$

Para dos funciones $f, g \in \mathcal{L}_0^+(X, S, \nu)$.

A continuación probaremos un teorema que da las condiciones necesarias y suficientes para saber cuando una función es integrable y está acotada por cierta constante fija. Este teorema resulta particularmente útil en la demostración de los teoremas 2.11 y 2.17. Dicho teorema es un corolario sencillo de la desigualdad de Hölder.

1.24 TEOREMA (F. RIESZ). Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad, $f \in \mathrm{M}^+(X, S)$ y $A, B > 0$

(a) Si $p > 1$ entonces:

$$\int f^p \, d\nu \leq A \quad \text{ssi} \quad \int fg \, d\nu \leq A^{1/p} B^{1/q}$$

$\forall g \in \mathcal{L}_q^+(X, S, \nu)$ tal que $\int g^q \, d\nu = B$.

(b) Si $0 < p < 1$

$$\int f^p \, d\nu \geq A \quad \text{ssi} \quad \int fg \, d\nu \geq A^{1/p} B^{1/q}$$

$\forall g$ tal que $g^q \in \mathcal{L}_1^+(X, S, \nu)$ y $\int g^q \, d\nu = B$.

(c) Si $p < 0$ y $f \geq 0$ tal que $0 < \int f^p \, d\nu < +\infty$, entonces

$$\int f^p \, d\nu \leq A \quad \text{ssi} \quad \int fg \, d\nu \geq A^{1/p} B^{1/q}$$

$\forall g$ tal que $\int g^q \, d\nu = B$.

La igualdad ocurre ssi $\exists g$ con $\int g^q \, d\nu = B$ y tal que $\int fg \, d\nu = A^{1/p} B^{1/q}$.

DEMOSTRACIÓN.

CASO A. $(p > 1)$

$(\Rightarrow)$ Supóngase que $\int f^p \, d\nu \leq A$ y sea $g \in \mathcal{L}_q^+(X, S, \nu)$ tal que $\int g^q \, d\nu = B$, por la desigualdad de Hölder (corolario 1.25)

$$\int fg \, d\nu \leq \left(\int f^p \, d\nu \right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\nu \right)^{1/q} \leq A^{1/p} B^{1/q}.$$

($\Leftarrow$) Supóngase que $\int f^p\,d\nu > A$. Sea $f_n = (f \wedge n)$, como $f_n \uparrow f$ por el T.C.M.[3] existe m tal que $\int f_m^p\,d\nu > A$. Sea

$$g = \frac{B^{1/q} \cdot f_m^{p-1}}{(\int f_m^p\,d\nu)^{1/q}},$$

entonces $\int g^q\,d\nu = \frac{B}{\int f_m^p\,d\nu}\int f_m^p\,d\nu = B$ y por lo tanto:

$$\int fg\,d\nu \geq \int f_m g\,d\nu = \frac{B^{1/q}}{(\int f_m^p\,d\nu)^{1/q}}\int f_m^p\,d\nu = B^{1/q}\left(\int f_m^p\,d\nu\right)^{1/p} > B^{1/q}A^{1/p}$$

Falta considerar el caso en el que se da la igualdad. Para este caso, puede probarse de manera análoga que: $\int f\,d\nu < A$ ssi $\int fg\,d\nu < A^{1/p}B^{1/q}$ $\forall g$ tal que $\int g^q\,d\nu = B$. Por lo tanto $\int f\,d\nu = A$ ssi $\exists g_0$ con $\int g_0^q\,d\nu = B$ tal que $\int fg_0\,d\nu = A^{1/p}B^{1/q}$.

CASO B. $(0 < p < 1)$

($\Rightarrow$) Supóngase que $\int f^p\,d\nu \geq A$, sea g tal que $g^q \in \mathcal{L}_1^+(X,S,\nu)$ y $\int g^q\,d\nu = B$.

(i) Si $\int fg\,d\nu = +\infty$ trivialmente se cumple que:

$$\int fg\,d\nu \geq A^{1/p}B^{1/q}.$$

(ii) Si $\int fg\,d\nu < +\infty$ por la desigualdad de Hölder (corolario 1.21)

$$\int fg\,d\nu \geq \left(\int f^p\,d\nu\right)^{1/p}\left(\int g^q\,d\nu\right)^{1/q} \geq A^{1/p}B^{1/q}.$$

($\Leftarrow$) Supóngase que $0 < \int f^p\,d\nu < A$. Sea

$$g = \frac{B^{1/q} \cdot f^{p-1}}{(\int f^p\,d\nu)^{1/q}},$$

[3] Ver [Ba1].

entonces $\int g^q\,d\nu = \frac{B}{\int f^p\,d\nu}\int f^p\,d\nu = B$ y por lo tanto:

$$\int fg\,d\nu = \frac{B^{1/q}}{(\int f^p\,d\nu)^{1/q}}\int f^p\,d\nu = B^{1/q}\left(\int f^p\,d\nu\right)^{1/p} < B^{1/q}A^{1/p}.$$

En caso de que $\int f^p\,d\nu = 0$ entonces sea $g = B$, $g^q \in \mathcal{L}_1(X,S,\nu)$, $\int g^q\,d\nu = B$ y $\int fg\,d\nu = 0 < A^{1/p}B^{1/q}$.

El caso de igualdad se prueba de manera similar al caso (a).

CASO C. $(p<0$ y $f \geq 0$ tal que $0 < \int f^p\,d\nu < +\infty)$

($\Rightarrow$) Supóngase que $\int f^p\,d\nu \leq A$, sea g tal que $g^q \in \mathcal{L}_1^+(X,S,\nu)$ y $\int g^q\,d\nu = B$.

(i) Si $\int fg\,d\nu = +\infty$ trivialmente se cumple que:

$$\int fg\,d\nu \geq A^{1/p}B^{1/q}.$$

(ii) Si $\int fg\,d\nu < +\infty$ por la desigualdad de Hölder (corolario 1.21)

$$\int fg\,d\nu \geq \left(\int f^p\,d\nu\right)^{1/p}\left(\int g^q\,d\nu\right)^{1/q} \geq A^{1/p}B^{1/q}.$$

($\Leftarrow$) Supóngase que $\int f^p\,d\nu > A$. Sea

$$g = \frac{B^{1/q}\,.\,f^{p-1}}{(\int f^p\,d\nu)^{1/q}},$$

entonces $\int g^q\,d\nu = \frac{B}{\int f^p\,d\nu}\int f^p\,d\nu = B$ y por lo tanto:

$$\int fg\,d\nu = \frac{B^{1/q}}{(\int f^p\,d\nu)^{1/q}}\int f^p\,d\nu = B^{1/q}\left(\int f^p\,d\nu\right)^{1/p} < B^{1/q}A^{1/p}.$$

El caso de igualdad se prueba de manera similar al caso (a). $\square$

1.25 TEOREMA (F. RIESZ $p = 1, q = \pm\infty$). Sean (X, S, μ) un espacio de medida y $f \in \mathcal{L}_1$.

(a) Entonces $\int f\, d\mu \leq F$ ssi $\int fg\, d\mu \leq F$ $\forall g \in \mathcal{L}_\infty$ tal que $\|g\|_\infty = 1$. Con igualdad ssi $\exists g$ tal que $\|g\|_\infty = 1$ y $\int fg\, d\mu = F$.

(b) Entonces $\int f\, d\mu \geq F$ ssi $\int fg\, d\mu \geq F$ $\forall g \in \mathcal{L}_{-\infty}$ tal que $\|g\|_{-\infty} = 1$. Con igualdad ssi $\exists g$ tal que $\|g\|_{-\infty} = 1$ y $\int fg\, d\mu = F$.

DEMOSTRACIÓN.

(a) Sea $E = \{x : g(x) > \|g\|_\infty\}$, por la propiedad 1.10 (1) $\mu(E) = 0$.

($\Rightarrow$) Entonces $\int fg\, d\mu = \int_{X-E} fg\, d\mu \leq \|g\|_\infty \int_{X-E} f\, d\mu = \|g\|_\infty \int f\, d\mu$.

($\Leftarrow$) Supóngase que $\int f\, d\mu > F$. Sea $g = 1$, entonces $\|g\|_\infty = 1$ y $\int fg\, d\mu = \int f\, d\mu > F$.

Falta considerar el caso de la igualdad. De modo similar puede probarse que:

$\int f\, d\mu < F$ ssi $\int fg\, d\mu < F$ $\forall g \in \mathcal{L}_\infty$ con $\|g\|_\infty = 1$. Con igualdad ssi $\exists g$ tal que $\|g\|_\infty = 1$ tal que $\int fg\, d\mu = F$.

Por lo tanto $\int f\, d\mu = F$ ssi $\exists g \in \mathcal{L}_\infty$ con $\|g\|_\infty = 1$ tal que $\int fg\, d\mu = F$.

(b) Este caso se demuestra de manera análoga al anterior. □

1.3 Continuidad y diferenciabilidad de $\| \|_r$

En esta sección se establecerán las condiciones para que $\| \|_r$ sea una función continua o diferenciable, al considerar r como su argumento.

El teorema que viene a continuación dice que las normas r constituyen una red de funciones crecientes en r y resulta ser de utilidad para demostrar la continuidad de $\| \|_r$.

1.26 TEOREMA. Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad y $r < s$ un par de números reales extendidos y $f \in \mathcal{L}_p^+$, entonces

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s$$

con igualdad ssi $f \equiv C$.

DEMOSTRACIÓN.

CASO A. $(0 < r < s < +\infty)$

Entonces $\exists \alpha \in (0,1)$ tal que $r = s\alpha$. Aplicando la desigualdad de Hölder (corolario 1.21)

$$\int f^r \, d\nu = \int (f^s)^\alpha 1^{1-\alpha} \, d\nu \leq \left(\int f^s \, d\nu\right)^\alpha \left(\int 1 \, d\nu\right)^{1-\alpha} = \left(\int f^s \, d\nu\right)^\alpha,$$

entonces $(\int f^r \, d\nu)^{1/r} \leq (\int f^s \, d\nu)^{\alpha/r}$, pero $\frac{\alpha}{r} = \frac{1}{s}$ con igualdad ssi $\exists C > 0$ tal que $f^s \equiv C$ i.e. $f \equiv C^{1/s}$.

CASO B. $(0 < r < s = +\infty)$

Es claro que $\|f\|_r \leq \|f\|_\infty$. Basta tan sólo ver cuando se da la igualdad. Sea $M = \|f\|_\infty$, y supóngase que $(\int f^r \, d\nu)^{1/r} = M$. Sea $E_- = \{x \in X : f(x) < M\}$, $E_0 = \{x \in X : f(x) = M\}$ y $E_+ = \{x \in X : f(x) > M\}$. Por la propiedad 1.10 (1) sabemos que $\nu(E_+) = 0$, por lo que basta demostrar que $\nu(E_-) = 0$. Como f es no negativa, es suficiente con demostrar el caso en que $M > 0$. Supóngase que $\nu(E_-) > 0$, entonces:

$$\begin{aligned} M^r = \int_X f^r \, d\nu = \int_{E_-} f^r \, d\nu + \int_{E_0} f^r \, d\nu = \int_{E_-} f^r \, d\nu + M^r \cdot \nu(E_0) \\ < M^r \cdot \nu(E_-) + M^r \cdot \nu(E_0) = M^r(\nu(E_-) + \nu(E_0)) \leq M^r \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción. Inversamente si $f \equiv C$, claramente $\|f\|_r = C = \|f\|_\infty$.

CASO C. $(0 = r < s \leq +\infty)$

Ya se probó el caso en el que $0 = r < s < +\infty$, teorema 1.16, inclusive analizando el caso en que se da la igualdad. Para el caso en el que $s = +\infty$ considérese $t \in (0, +\infty)$. Ya sabemos que $\|f\|_0 \leq \|f\|_t$ con igualdad ssi $f \equiv C_1$. Por el caso (b) $\|f\|_t \leq \|f\|_\infty$ con igualdad ssi $f \equiv C_2$ de donde $\|f\|_0 \leq \|f\|_\infty$ con igualdad ssi $f \equiv C$.

CASO D. $(s \leq 0)$

Se demuestra aplicando el caso $s \geq 0$ a $s \geq 0$, $1/f$, $-s < -r$ y usando las propiedades 1.7 (1), 1.10 (4) y 1.15 (3).

CASO E. $(r < 0 < s)$

Por el teorema 1.16 $\|f\|_r \leq \|f\|_0 \leq \|f\|_s$, con igualdad ssi $f \equiv C$. □

Del teorema anterior se sigue que: si $r < p$, entonces $\mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}_r$. Puede verse que inclusive:

$$\mathcal{L}_r \subsetneq \bigcap_{r>p>-\infty} \mathcal{L}_p \qquad \text{y} \qquad \bigcup_{+\infty>p>r} \mathcal{L}_p \subsetneq \mathcal{L}_r$$

con $r \in \overline{\mathbb{R}}$. Para $0 < r < +\infty$ consúltense los ejemplos 1.5 (a) y (b). Para $-\infty < r < 0$, tómese $1/f$ con f la de los ejemplos 1.5 (a) o (b). Si $r = 0$ consúltense los ejemplos 1.14 (a) y (b). Y para $r = \pm\infty$ consúltese el ejemplo 1.14 (c). Nótese que en este caso tan solo:

$$\mathcal{L}_\infty \subsetneq \bigcap_{p<\infty} \mathcal{L}_p \qquad \text{y} \qquad \bigcup_{-\infty<p} \mathcal{L}_p \subsetneq \mathcal{L}_{-\infty}$$

tienen sentido.

El teorema siguiente justifica el uso de la notación $\| \ \|_\infty$ y $\| \ \|_{-\infty}$ para los números de la definición 1.8, que uniformiza la notación.

1.27 TEOREMA. Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad y $f \in \mathcal{L}_r^+(X, S, \nu)$ $\forall r$ dados, entonces:

(a) $\lim\limits_{r\to\infty} \|f\|_r = \|f\|_\infty$.

(Obsérvese que no se excluye la posibilidad de que el límite resulte ser el real extendido $+\infty$.)

(b) $\lim\limits_{r\to-\infty} \|f\|_r = \|f\|_{-\infty}$.

DEMOSTRACIÓN.

(a) Supóngase que $M = \|f\|_\infty < +\infty$, entonces es claro que $\|f\|_r \leq M$ $\forall r$. Si $M > 0$, $\varepsilon \in (0, M)$ y $E = \{x : f(x) > M - \varepsilon\}$ entonces $\nu(E) > 0$. Así pues:

$$\|f\|_r = \left(\int f^r \, d\nu\right)^{1/r} \geq \left(\int_E f^r \, d\nu\right)^{1/r} > (M - \varepsilon)\{\nu(E)\}^{1/r},$$

de donde $M - \varepsilon \leq \varliminf_{r\to\infty} \|f\|_r \leq \varlimsup_{r\to\infty} \|f\|_r \leq M$. Como $\varepsilon \in (0, M)$ es arbitraria entonces $\lim_{r\to\infty} \|f\|_r = M$.

Si $\|f\|_\infty = +\infty$, por un argumento análogo, $\nu(E_N) > 0\ \forall N > 0$, donde $E_N = \{x : f(x) > N\}$. Por lo tanto:

$$\|f\|_r = \left(\int f^r\, d\nu\right)^{1/r} \geq \left(\int_{E_N} f^r\, d\nu\right)^{1/r} > N\{\nu(E_N)\}^{1/r}$$

y $\varliminf_{r\to\infty} \|f\|_r \geq N\ \forall N > 0$ por lo tanto $\lim_{r\to\infty} \|f\|_r = \infty$ así que $\lim_{r\to\infty} \|f\|_r = +\infty = \|f\|_\infty$

(b) Si $0 < \|f\|_{-\infty} < +\infty$ de la propiedad 1.6 (1) y la parte (a)

$$\lim_{r\to-\infty} \|f\|_r = \lim_{s\to\infty} \|f\|_{-s} = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{\|1/f\|_s} = \frac{1}{\|1/f\|_\infty} = \|f\|_{-\infty}. \qquad \square$$

1.28 Observación. El límite en (a) es creciente y el límite en (b) es decreciente, en virtud del teorema 1.26. Más aún, si en el teorema anterior se adopta la convención de que $\frac{1}{+\infty} = 0$ y que $\frac{1}{0} = +\infty$, el resultado es válido inclusive en caso de que $\|f\|_{-\infty} \in \{0, +\infty\}$.

El siguiente teorema nos da una característica interesante de las normas $\|\ \|_r$, y es que si consideramos las normas como una función de r entonces siempre resulta ser una función continua por la izquierda de r para toda $r > 0$. Más aún, si para alguna $s > 0$ la norma s es finita, entonces es una función continua en r para r menor que s.

1.29 Teorema. Sean $0 < r < s < +\infty$, entonces $\lim_{t\uparrow s^-} \|f\|_t = \|f\|_s$. Si además $\|f\|_s < +\infty$ entonces $\lim_{t\to r} \|f\|_t = \|f\|_r\ \forall 0 < r < s$.

Demostración.

Caso A. $(\|f\|_s < +\infty)$

Como $f^t \leq (1 \vee f^s) \in \mathcal{L}_1^+(X, S, \nu)\ \forall t \in (0, s)$, se sigue del T.C.D.L.[4]:

[4] Ver [Bal]

(i) La continuidad por la izquierda de s.

$$\lim_{t\uparrow s^-}\|f\|_t = \lim_{t\uparrow s^-}\left(\int f^t\,d\nu\right)^{1/t} = \lim_{t\uparrow s^-}\exp\left[\frac{1}{t}\log\int f^t\,d\nu\right]$$
$$= \exp\left[\frac{1}{s}\lim_{t\uparrow s^-}\log\int f^t\,d\nu\right] = \exp\left[\frac{1}{s}\log\int f^s\,d\nu\right]$$
$$= \left(\int f^s\,d\nu\right)^{1/s}$$

(ii) La continuidad en r para $r \in (0,s)$.

$$\lim_{t\to r}\|f\|_t = \lim_{t\to r}\left(\int f^t\,d\nu\right)^{1/t} = \lim_{t\to r}\exp\left[\frac{1}{t}\log\int f^t\,d\nu\right]$$
$$= \exp\left[\frac{1}{r}\lim_{t\to r}\log\int f^t\,d\nu\right] = \exp\left[\frac{1}{r}\log\int f^r\,d\nu\right]$$
$$= \left(\int f^r\,d\nu\right)^{1/r}$$

CASO B. $\quad (\|f\|_s = +\infty$ y $\|f\|_t < +\infty\ \forall t \in (0,s))$

Entonces $\forall N > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\int (f^s \wedge n)\,d\nu > N$. Como $(f^t \wedge n) \to (f^s \wedge n)$ $(t \to s)$ y dado que $(f^t \wedge n) \le (1 \vee (f^s \wedge n)) \in \mathcal{L}_1(X,S,\nu)$, se sigue del T.C.D.L. que: $\int (f^t \wedge n)\,d\nu \to \int (f^s \wedge n)\,d\nu$ $(t \to s)$. Entonces $\exists t_0$ tal que $\int (f^t \wedge n)\,d\nu > N$ $\forall t \in (t_0,s)$ y así que $\int f^t\,d\nu \ge \int (f^t \wedge n)\,d\nu > N$. Y ésto es válido $\forall N > 0$, por lo que $\lim_{t\uparrow s^-}\|f\|_t = +\infty = \|f\|_s$.

Nótese que basta comprobar estos dos casos, pues si $\exists 0 < t_0 < s$ tal que $\|f\|_{t_0} = +\infty$, entonces inmediatamente se sigue que $\lim_{t\to s^-}\|f\|_t = +\infty = \|f\|_s$, pues f^t crece con t. $\square$

1.30 LEMA. $\quad$ Sea $0 < r < s$ y $a_i \ge 0$, entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^s\right)^{1/s} \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^r\right)^{1/r},$$

con igualdad ssi a lo más una de las a_i es no nula.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $\sum_{i=1}^{n} a_i^r > 0$ y considérese

$$b_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/r}}.$$

Es claro que $b_i \leq 1$, con lo cual $b_i^s \leq b_i^r$ y entonces: $\sum_{i=1}^{n} b_i^s \leq \sum_{i=1}^{n} b_i^r = 1$. Por lo tanto $\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^s\right)^{1/s} \leq 1$, de donde $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right)^{1/s} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/r}$.

Ahora se analizará en que casos ocurre la igualdad. ($\Rightarrow$) Si existe más de una de las a_i tal que $a_i > 0$, entonces $b_i < 1$ y así que la desigualdad es estricta.

($\Leftarrow$) Si a lo más una de las a_i es no nula, entonces se tiene la igualdad. $\square$

1.31 OBSERVACIÓN. Nótese que existe una aparente contradicción entre el lema 2.5 y el hecho general para espacios de medida, teorema 1.26, el cual afirma que la sucesión de normas crece cuando el exponente crece, la cual se resuelve observando que a la desigualdad del lema 2.4 le corresponde un espacio de medida discreto con medida total igual a n.

Ha llegado el momento de justificar el uso de la notación $\| \ \|_0$ para la media geométrica. La razón es porque $\| \ \|_0$ es el límite de las medias $\| \ \|_r$ cuando r tiende a cero. Para este fin requerimos los dos resultados siguientes.

1.32 LEMA. Sea $y > 0$ $y \neq 0$ fija, entonces $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = \frac{y^t - 1}{t}$ decrece con t, i.e:

$$\frac{y^s - 1}{s} < \frac{y^r - 1}{r}. \qquad (\text{si } 0 < s < r)$$

DEMOSTRACIÓN. Por el corolario 1.17 con $n = 2$ obtenemos:

$$(1 + rt)^{\frac{s}{r}} 1^{1 - \frac{s}{r}} < \frac{s}{r}(1 + rt) + (1 - \frac{s}{r}) \cdot 1 = 1 + st,$$

a menos de que $1 + rt = 1$ ssi $t = 0$. Sea $y = (1 + rt)^{1/r}$, entonces: $t = \frac{1}{r}(y^r - 1)$, de donde: $y^s < 1 + \frac{s}{r}(y^r - 1)$ (a menos de que $y = 1$), Es decir $\forall y \neq 1$

$$\frac{y^s - 1}{s} < \frac{y^r - 1}{r} \qquad \square$$

El teorema que a continuación se enuncia es una útil extensión del T.C.M. en el que no se requiere que la sucesión de funciones conste de funciones no-negativas.

1.33 LEMA (EXTENSIÓN DEL T.C.M.). Sean (X, S, μ) un espacio de medida y (f_n) una sucesión de funciones medibles tales que $f_n \leq f_{n+1} \uparrow f$. Si $\int f_1^- \, d\mu < +\infty$ entonces $\int f_n \, d\mu \uparrow \int f \, d\mu \; (\leq +\infty)$.

DEMOSTRACIÓN.

Como $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \uparrow f$, entonces $0 \leq f_1 + f_1^- \leq f_2 + f_1^- \leq \cdots \leq f_n + f_1^- \uparrow f + f_1^-$. Por el T.C.M. usual (en $M^+(X, S)$) obtenemos que: $\int (f_n + f_1^-) \, d\mu \uparrow \int (f + f_1^-) \, d\mu (\leq +\infty)$, restando $\int f_1^- \, d\mu$ ($< +\infty$ por hipótesis) se obtiene que:

$$\int f_n \, d\mu \uparrow \int f \, d\mu \qquad (\leq +\infty). \qquad \square$$

Con el siguiente teorema se justifica el uso de la notación $\| \|_0$. Y nos muestra que $\| \|_r$ es continua en 0.

1.34 TEOREMA. Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad, $f \in M^+(X, S)$. Entonces:

(a) Si $\exists r_0 > 0$ tal que $\|f\|_{r_0} < +\infty$, entonces $\|f\|_r \to \|f\|_0$ $(r \to 0^+)$.

(b) Si $\exists r_0 < 0$ tal que $0 < \|f\|_{r_0} < +\infty$, entonces $\|f\|_r \to \|f\|_0$ $(r \to 0^-)$.

DEMOSTRACIÓN.

CASO A. $(r > 0)$

$\log \|f\|_0 \leq \log \|f\|_r = \frac{1}{r} \log \|f^r\|_1 \leq \frac{1}{r}(\|f^r\|_1 - 1) = \int \frac{f^r - 1}{r} \, d\nu$.

Sea $\varphi(r) = t^r$ entonces $\varphi'(0) = t^r \cdot \log t|_{r=0}$ por lo que $\varphi'(0) = \lim\limits_{r \to 0^+} \frac{\varphi(r) - \varphi(0)}{r} = \lim\limits_{r \to 0^+} \frac{t^r - 1}{r} = \log t$.

Considere $f_r = \frac{1 - f^r}{r}$, entonces $f_r \uparrow -\log f$ $(r \to 0^+)$. Por hipótesis $\exists r_0 > 0$ tal que $\|f\|_{r_0} < +\infty$, entonces $f_{r_0}^- = \frac{f^{r_0} - 1}{r_0} \chi_{\{|f| \geq 1\}} \in \mathcal{L}_1(X, S, \nu)$. Y por el lema

1.33:

$$\lim_{r_0 > r \uparrow 0^+} \int f_r \, d\nu = -\int \log f \, d\nu, \qquad (\leq +\infty)$$

o bien:

$$\lim_{r_0 > r \downarrow 0^+} \int \frac{f^r - 1}{r} \, d\nu = \int \log f \, d\nu, \qquad (\geq -\infty).$$

CASO B. $(r < 0)$

De las hipótesis $\|1/f\|_{-r_0} = \frac{1}{\|f\|_{r_0}} < +\infty$ con $-r_0 > 0$. Por el caso anterior:

$$\begin{aligned}\lim_{r \to 0^-} \|f\|_r = \lim_{r \to 0^-} \frac{1}{\|1/f\|_{-r}} &= \lim_{s \to 0^+} \frac{1}{\|1/f\|_s} \\ &= \frac{1}{\|1/f\|_0} = \|f\|_0.\end{aligned}$$ □

El teorema que se da a continuación resume todos los teoremas que se dieron anteriormente, relativos a la continuidad de la función $\varphi_f(r) = \|f\|_r$. Para su enunciado es conveniente introducir la siguiente notación.

1.35 NOTACIÓN. Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad y $r \in \mathbb{R}$. Si $r \neq 0$ entonces se establece la siguiente notación: $\|f\|_{r+0} = \lim\limits_{s \downarrow r^+} \|f\|_s$, $\|f\|_{r-0} = \lim\limits_{s \uparrow r^-} \|f\|_s$. Cuando $r = 0$ simplemente escribiremos: $\|f\|_{+0}$ y $\|f\|_{-0}$ en lugar de $\|f\|_{0+0}$ y de $\|f\|_{0-0}$ respectivamente.

1.36 TEOREMA (RESUMEN).

(a) Si $r > 0$, entonces: $\|f\|_{r-0} = \|f\|_r = \|f\|_{r+0}$, excepto cuando $0 < \|f\|_r < +\infty$ y $\|f\|_t = +\infty$ $\forall t > r$.

(b) Si $r < 0$, entonces: $\|f\|_{r-0} = \|f\|_r = \|f\|_{r+0}$, excepto cuando $0 < \|f\|_r < +\infty$ y $\|f\|_t = 0$ $\forall t > r$.

(c) Si $r = 0$, entonces: $0 < \|f\|_{-0} < +\infty$ ssi $0 < \|f\|_{+0} < +\infty$ en cuyo caso $\|f\|_{-0} = \|f\|_0 = \|f\|_{+0}$.

DEMOSTRACIÓN.

CASO A. $(r > 0)$

El caso en que $\exists r_0 > r$ tal que $\|f\|_{r_0} < +\infty$ ya se demostró en el teorema 1.29.

Si $\|f\|_r = +\infty$ entonces claramente se cumple que $\|f\|_r = \|f\|_{r+0}$. Por otro lado, $\forall N > 0$ $\exists n$ tal que $\int (f^r \wedge n)\, d\nu > N$, como $(f^t \wedge n) \uparrow (f^r \wedge n)$ $(t \to r^-)$, entonces por el T.C.M. $\int (f^t \wedge n)\, d\nu \uparrow d\nu(f^r \wedge n)\, d\nu$, por lo que $\exists t < r$ tal que $\int (f^t \wedge n)\, d\nu > N$. De donde se concluye que: $\|f\|_{r-0} = \|f\|_r$

Sólo falta examinar el caso en el que $0 < \|f\|_r < +\infty$ y $\|f\|_t = +\infty$ $\forall t > r$. En este caso por el T.C.M. $\|f\|_{r-0} = \|f\|_r$, en efecto $\lim\limits_{t \to r^-} \left(\int f^t\, d\nu\right)^{1/t} = \left(\lim\limits_{t \to r^-} \int f^t\, d\nu\right)^{1/r} = \left(\int \lim\limits_{t \to r^-} f^t\, d\nu\right)^{1/r} = \left(\int f^r\, d\nu\right)^{1/r}$. Pero obviamente $\|f\|_r < \|f\|_{r+0} = +\infty$, para completar este estudio falta proporcionar algún ejemplo en el que efectivamente se verifique este último caso, dicho ejemplo lo proporciona 1.5 (b)

CASO B. $(r < 0)$

Se hace un análisis similar al del caso anterior.

CASO C. $(r = 0)$

El ssi se deduce de la propiedad 1.7 (1) que establece la siguiente igualdad $\|f\|_{-r} = \frac{1}{\|1/f\|_r}$ (en caso de que ambos miembros de la igualdad sean finitos y positivos). Además en el teorema 1.29 se demuestra la igualdad $\|f\|_0 = \|f\|_{r+0}$, la otra igualdad se deduce de la propiedad anteriormente mencionada. $\square$

Además de que la función $\varphi_f(r)$ es continua, considerando a r como su argumento, resulta ser diferenciable, como lo aclara el siguiente teorema.

1.37 TEOREMA (DIFERENCIABILIDAD DE $\| \|_r$). Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad y $\varphi_f(p) = \|f\|_p$.

(a) Sean $r > 0$ y $f \in \mathcal{L}_r$ fijas, con $\|f\|_r > 0$. Entonces $\varphi_p'(p)$ existe $\forall p \in (0, r)$

(b) Sean $r < 0$ y $f \in \mathcal{L}_r$ fijas, con $\|f\|_r < +\infty$. Entonces $\varphi_p'(p)$ existe $\forall p \in (r, 0)$

DEMOSTRACIÓN. Sea:

$$\psi_f(p) = (\varphi_f(p))^p,$$

i.e. $\varphi_f(p) = (\psi_f(p))^{1/p}$ $\left(= \exp\left(\frac{1}{p}\log\psi_f(p)\right)\right)$. Basta probar que $\psi_f'(p)$ existe.

(a) Sea $p \in (0,r)$ y $\delta > 0$ tal que $(p-2\delta, p+2\delta) \subset (0,r)$. Sea h tal que $|h| < \delta$, entonces:

$$\frac{\psi_f(p+h)-\psi_f(p)}{h} = \int \frac{|f(x)|^{p+h}-|f(x)|^p}{h}\,d\mu.$$

Definimos $F : X \times (p-\delta, p+\delta) \to \mathbb{R}$ como $F(x,t) = |f(x)|^t$, entonces:

(1) $x \to F(x,t)$ es integrable $\forall t \in (p-\delta, p+\delta)$ fija, y

(2) $\left|\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right| = |f(x)|^t \left|\log|f(x)|\right| \leq g(x) \in \mathcal{L}_1^+(\nu)$. con

$$g(x) = \frac{1}{\delta}\max\{|f(x)|^{p-2\delta}, |f(x)|^{p+2\delta}\}. \qquad \text{(ver [1])}$$

Por lo tanto $\psi_f'(p)$ existe (ver [Ba2]) y es igual a $\int (|f(x)|^p \log|f(x)|)\,d\nu$ por el T.C.D.L.

[1] Sea $t \in (p-\delta, p+\delta)$ fija. Como $\log w \leq \frac{w^\delta}{\delta}$ $\forall w$, entoces:

$$\begin{aligned} |f|^t \left|\log|f|\right| &= |f|^t \log\frac{1}{|f|}\chi_{\{|f|<1\}} + |f|^t \log|f|\chi_{\{|f|>1\}} \\ &\leq |f|^{p-\delta}\frac{|f|^{-\delta}}{\delta}\chi_{\{|f|<1\}} + |f|^{p+\delta}\frac{|f|^\delta}{\delta}\chi_{\{|f|>1\}} \\ &\leq \frac{1}{\delta}\max\{|f|^{p-2\delta}, |f|^{p+2\delta}\} \in \mathcal{L}_1. \end{aligned}$$

(b) Para el caso $r < 0$, por la propiedad 1.7 $\varphi_f(p) = \frac{1}{\varphi_f(-p)}$ y la diferenciabilidad se obtiene del caso (a). $\square$

Los siguientes dos resultados van encaminados a probar el hecho de que

$$\log\|f\|_r^r = r\log\|f\|_r$$

es una función convexa de r.

1.38 TEOREMA. Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad, $0 < r < s < t$ y $f \in \mathcal{L}_t^+(X, S, \nu)$, entonces:

$$\|f\|_s^s \leq \left(\|f\|_r^r\right)^{\frac{t-s}{t-r}} \left(\|f\|_t^t\right)^{\frac{s-r}{t-r}}$$

con igualdad ssi existen $E \in S$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que $f \equiv 0$ en E y $f \equiv c$ en $X - E$.

DEMOSTRACIÓN. Como $s \in (r,t)$, $\exists \alpha \in (0,1)$ tal que $s = \alpha r + (1-\alpha)t$. Aplicando la desigualdad de Hölder a los exponentes conjugados:

$$\alpha = \frac{t-s}{t-r} \qquad \text{y} \qquad 1-\alpha = \frac{s-r}{t-r}$$

resulta que:

$$\int f^s \, d\nu = \int (f^r)^\alpha (f^t)^{1-\alpha} \, d\nu \leq \left(\int f^r \, d\nu\right)^\alpha \left(\int f^t \, d\nu\right)^{1-\alpha}$$

por lo tanto

$$\|f\|_s^s \leq (\|f\|_r^r)^{\frac{t-s}{t-r}} (\|f\|_t^t)^{\frac{s-r}{t-r}}$$

con igualdad ssi $\exists A, B \in \mathbb{R}$ no ambas nulas tales que $Af^r \equiv Bf^t$. Supóngase para fijar ideas que $B \neq 0$ y sea $E = \{x : f(x) > 0\}$, entonces $f^{t-r} \equiv \frac{A}{B} = K$ (en E), entonces $f \equiv K^{\frac{1}{t-r}}$. □

1.39 TEOREMA. Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad, $0 < r < t$ y $f \in \mathcal{L}_t^+(X, S, \nu)$ y $\varphi(u) = \log \|f\|_u^u = u \log \|f\|_u$ $\forall u \in (0,t)$, $\forall \alpha \in (0,1)$. Entonces:

$$\varphi((1-\alpha)r + \alpha t) \leq (1-\alpha)\varphi(r) + \alpha\varphi(t).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\alpha \in (0,1)$ y sea $s = r + (t-r)\alpha$ entonces $s \in (r,t)$ y por el teorema 1.38

$$s \log \|f\|_s \leq \frac{t-s}{t-r} \log \|f\|_r^r + \frac{s-r}{t-r} \log \|f\|_t^t$$

o bien:

$$\varphi(s) \leq \frac{t-s}{t-r}\varphi(r) + \frac{s-r}{t-r}\varphi(t)$$

o lo que es lo mismo:

$$\varphi((1-\alpha)r + \alpha t) \leq (1-\alpha)\varphi(r) + \alpha\varphi(t).$$ □

Lo anterior muestra que φ es lo que se llama una **función convexa del logaritmo.**

CAPITULO II

La Desigualdad de Minkowski

En este capítulo se obtedrán algunas consecuencias de la desigualdad de Hölder. En particular se establecerá la desigualdad de Minkowski y su compañera. La mayoría de las desigualdades se generalizarán a los casos en los que el número de sumandos es infinito o en los que p es un real extendido. Por último se estudiarán algunas desigualdades de funciones de dos variables.

2.1 Caso finito de la Desigualdad de Minkowski

En esta sección se analizará la desigualdad de Minkowski y su compañera. Cada una de ellas nos proporciona una cota (superior e inferior respectivamente) de la norma p de una suma finita de funciones.

2.1 TEOREMA (DESIGUALDAD DE MINKOWSKI). Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad y $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}_p^+$.

(a) Si $p > 1$, entonces:

$$\|f_1 + \cdots + f_n\|_p \leq \|f_1\|_p + \cdots + \|f_n\|_p.$$

(b) Si $0 < p < 1$, entonces:

$$\|f_1 + \cdots + f_n\|_p \geq \|f_1\|_p + \cdots + \|f_n\|_p.$$

(c) Si $p < 0$, y $0 < \|f_i\|_p < +\infty$ $\forall i$, entonces:

$$\|f_1 + \cdots + f_n\|_p \leq \|f_1\|_p + \cdots + \|f_n\|_p.$$

En los tres casos la igualdad ocurre ssi $f_1, \ldots, f_n$ son esencialmente proporcionales.

DEMOSTRACIÓN.

Primero mostraremos que $f_1 + \cdots + f_n \in \mathcal{L}_p^+$. Como $f_i \in \mathcal{L}_p^+$, entonces:

$$\int (f_1^p + \cdots + f_n^p)\, d\nu = \|f_1\|_p^p + \cdots + \|f_n\|_p^p < +\infty.$$

Sea $R = f_1 + \cdots + f_n$. Dado que:

$$\begin{aligned}(f_1 + \cdots + f_n)^p &\le n^p \begin{cases} \max\{f_1, \ldots, f_n\}^p, & \text{si } p > 0 \\ \min\{f_1, \ldots, f_n\}^p, & \text{si } p < 0 \end{cases} \\ &= n^p \cdot \max\{f_1^p, \ldots, f_n^p\} \le n^p(f_1^p + \cdots + f_n^p),\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}\int R^p\, d\nu &= \int (f_1 + \cdots + f_n)^p\, d\nu \\ &\le n^p(\|f_1\|_p^p + \cdots + \|f_n\|_p^p) < +\infty. \qquad (2.1)\end{aligned}$$

CASO A. $(p > 1)$

Desarrollando R^p y aplicando la desigualdad de Hölder al caso $p > 1$, resulta que:

$$\begin{aligned}\int R^p\, d\nu &= \int (f_1 R^{p-1} + \cdots + f_n R^{p-1})\, d\nu \\ &\le \left(\int f_1^p\, d\nu\right)^{1/p} \left(\int R^{(p-1)q}\, d\nu\right)^{1/q} + \cdots + \left(\int f_n^p\, d\nu\right)^{1/p} \left(\int R^{(p-1)q}\, d\nu\right)^{1/q}\end{aligned}$$

pero $q(p-1) = p$, y así:

$$\begin{aligned}\int R^p\, d\nu &\le \left(\int f_1^p\, d\nu\right)^{1/p} \left(\int R^p\, d\nu\right)^{1/q} + \cdots + \left(\int f_n^p\, d\nu\right)^{1/p} \left(\int R^p\, d\nu\right)^{1/q}. \\ &= \left(\int R^p\, d\nu\right)^{1/q} [\|f_1\|_p + \cdots + \|f_n\|_p].\end{aligned}$$

Además si $\int R^p\, d\nu = 0$, entonces $R \equiv 0$ y por lo tanto $f_i \equiv 0$ $\forall i = 1, \ldots, n$, por lo que la igualdad se verifica y f_i^p es esencialmente proporcional a R^p $\forall i$. Si

$\int R^p \, d\nu > 0$, entonces:

$$\left(\int R^p \, d\nu\right)^{1/p} = \left(\int R^p \, d\nu\right)^{1-1/q} \leq \|f_1\|_p + \cdots \|f_n\|_p.$$

Con igualdad ssi f_i y R^{p-1} son esencialmente proporcionales $\forall i = 1, \ldots, n$, i.e. siempre que todos los f_i sean esencialmente proporcionales.

CASO B. $(0 < p < 1)$

Si $\int R^p \, d\nu = 0$, entonces $R \equiv 0$ y por lo tanto $f_i \equiv 0 \; \forall i = 1, \ldots, n$, por lo que la igualdad se verifica y los f_i resultan ser esencialmente proporcionales. Supóngase que $\int R^p \, d\nu > 0$ de manera análoga al caso anterior, aplicando la correspondiente desigualdad de Hölder (corolario 1.21, pues $\forall i \int f_i R^{p-1} \, d\nu \leq \int R^p \, d\nu < +\infty$ y $0 < \int R^{(p-1)q} \, d\nu = \int R^p \, d\nu < +\infty$ por (2.1)) se llega a que:

$$\int R^p \, d\nu \geq \left(\int R^p \, d\nu\right)^{1/q} [\|f_i\|_p + \cdots + \|f_n\|_p].$$

De donde $\|f_1 + \cdots + f_n\|_p \geq \|f_1\|_p + \cdots + \|f_n\|_p$, con igualdad ssi todos los $\|f_i\|_p$ son esencialmente proporcionales.

CASO C. $(p < 0)$

De manera análoga al caso anterior, aplicando la correspondiente desigualdad de Hölder (corolario 1.21 pues $\forall i \; 0 < \int f_i R^{p-1} \, d\nu \leq \int R^p \, d\nu < +\infty$ por (2.1) y $0 < \int f_i^p \, d\nu < +\infty$ por hipótesis) se llega a que:

$$\int R^p \, d\nu \geq \left(\int R^p \, d\nu\right)^{1/q} \left(\int f_1^p \, d\nu\right)^{1/p} + \cdots + \left(\int R^p \, d\nu\right)^{1/q} \left(\int f_n^p \, d\nu\right)^{1/p}.$$

Por hipótesis $0 < \int R^p \, d\nu$, entonces $\|f_1 + \cdots + f_n\|_p \geq \|f_1\|_p + \cdots \|f_n\|_p$, con igualdad ssi los f_i son esencialmente proporcionales. $\square$

2.2 TEOREMA (DESIGUALDAD DE MINKOWSKI, $p = 1$). Sean (X, S, μ) un espacio de medida, $p = 1$, $n \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}_1$, entonces:

$$\|f_1 + \cdots + f_n\|_1 \leq \|f_1\|_1 + \cdots + \|f_n\|_1,$$

con igualdad ssi $\forall i, j \; f_i f_j \geq 0$ (c.d. rel. μ).

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad se deduce de la desigualdad del triángulo y de la linealidad de la integral.

Para la igualdad. $\|f_1+\cdots+f_n\|_1 = \|f_1\|_1+\cdots+\|f_n\|_1$, ssi $|f_1,\ldots,f_n| \equiv |f_1|+\cdots+|f_n|$ ssi $\forall i,j$ $f_if_j \geq 0$ (c.d. rel. μ). $\square$

2.3 TEOREMA (DESIGUALDAD DE MINKOWSKI, $p=\pm\infty$). Sean (X,S,ν) un espacio de medida, $p=1$, $n\in\mathbb{N}$.

(a) Si $f_1,\ldots,f_n\in\mathcal{L}_\infty$, entonces $f_1+\cdots+f_n\in\mathcal{L}_\infty$ y además:

$$\|f_1+\cdots+f_n\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty+\cdots+\|f_n\|_\infty,$$

con igualdad ssi $\forall\varepsilon>0$ $\exists E_\varepsilon\in S$, tal que $\nu(E_\varepsilon)>0$ y $f_1(x)+\cdots+f_n(x) > \|f_1\|_\infty+\cdots+\|f_n\|_\infty-\varepsilon$ $\forall x\in E_\varepsilon$.

(b) Si $f_1+\cdots+f_n\in\mathcal{L}_{-\infty}$, entonces $f_1,\ldots,f_n\in\mathcal{L}_{-\infty}$ y además:

$$\|f_1+\cdots+f_n\|_{-\infty} \geq \|f_1\|_{-\infty}+\cdots+\|f_n\|_{-\infty},$$

con igualdad ssi $\forall\varepsilon>0$ $\exists E_\varepsilon\in S$, tal que $\nu(E_\varepsilon)>0$ y $f_1(x)+\cdots+f_n(x) < \|f_1\|_{-\infty}+\cdots+\|f_n\|_{-\infty}+\varepsilon$ $\forall x\in E_\varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN.

(a) Si $E(f)=\{A:\mu(x:f(x)>A)=0\}$, entonces $\|f\|_\infty=\inf E(f)$. Sea $F=\{x:f_1(x)+\cdots+f_n(x)>\|f_1\|_\infty+\cdots+\|f_n\|_\infty\}$. Claramente $F\subset\{x:f_1(x)>\|f_1\|_\infty\}\cup\cdots\cup\{x:f_1(x)>\|f_n\|_\infty\}$, entonces $\mu(F)=0$. Por lo tanto $\|f_1+\cdots+f_n\|_\infty\leq\|f_1\|_\infty+\cdots+\|f_n\|_\infty$

Analicemos el caso de igualdad[1]: $(\Rightarrow)$ Supongamos que se verifica la igualdad. Sea $\varepsilon>0$, entonces $\|f_1\|_\infty+\cdots+\|f_n\|_\infty-\varepsilon$ no es ínfimo de $E(f_1+\cdots+f_n)$. Sea $E_\varepsilon=\{x:f_1(x)+\cdots+f_n(x)>\|f_1\|_\infty+\cdots+\|f_n\|_\infty-\varepsilon\}$, entonces $\mu(E_\varepsilon)>0$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $\forall\varepsilon>0$ $\exists E_\varepsilon$ tal que $\mu(E_\varepsilon)>0$ y $f_1(x)+\cdots+f_n(x)>\|f_1\|_\infty+\cdots+\|f_n\|_\infty-\varepsilon$ $\forall x\in E_\varepsilon$. Entonces $\|f_1\|_\infty+\cdots+\|f_n\|_\infty\geq\|f_1+\cdots+f_n\|_\infty\geq f_1(x)+\cdots+f_n(x)>\|f_1\|_\infty+\cdots+\|f_n\|_\infty-\varepsilon$. Es decir, $\forall\varepsilon>0$ $\|f_1\|_\infty+\cdots+\|f_n\|_\infty\geq\|f_1+\cdots+f_n\|_\infty>\|f_1\|_\infty+\cdots+\|f_n\|_\infty-\varepsilon$. Por lo tanto $\|f_1\|_\infty+\cdots+\|f_n\|_\infty=\|f_1+\cdots+f_n\|_\infty$.

[1] puede asumirse que $f\leq\|f\|_\infty$.

(b) Si $E(f) = \{A : \mu(x : f(x) < A) = 0\}$, entonces $\|f\|_{-\infty} = \sup E(f)$. Sea $F = \{x : f_1(x) + \cdots + f_n(x) < \|f_1\|_{-\infty} + \cdots + \|f_n\|_{-\infty}\}$. Claramente $F \subset \{x : f_1(x) < \|f_1\|_{-\infty}\} \cup \cdots \cup \{x : f_1(x) < \|f_n\|_{-\infty}\}$, entonces $\mu(F) = 0$. Por lo tanto $\|f_1 + \cdots + f_n\|_{-\infty} \geq \|f_1\|_{-\infty} + \cdots + \|f_n\|_{-\infty}$

Analicemos el caso de igualdad[2]: ($\Rightarrow$) Supongamos que se verifica la igualdad. Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\|f_1\|_{-\infty} + \cdots + \|f_n\|_{-\infty} - \varepsilon$ no es supremo de $E(f_1 + \cdots + f_n)$. Sea $E_\varepsilon = \{x : f_1(x) + \cdots + f_n(x) < \|f_1\|_{-\infty} + \cdots + \|f_n\|_{-\infty} + \varepsilon\}$, entonces $\mu(E_\varepsilon) > 0$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\forall \varepsilon > 0 \; \exists E_\varepsilon$ tal que $\mu(E_\varepsilon) > 0$ y $f_1(x) + \cdots + f_n(x) < \|f_1\|_{-\infty} + \cdots + \|f_n\|_{-\infty} + \varepsilon \; \forall x \in E_\varepsilon$. Entonces $\|f_1\|_{-\infty} + \cdots + \|f_n\|_{-\infty} + \varepsilon > f_1(x) + \cdots + f_n(x) \geq \|f_1 + \cdots + f_n\|_{-\infty} \geq \|f_1\|_{-\infty} + \cdots + \|f_n\|_{-\infty} - \varepsilon$. Por lo tanto $\|f_1\|_{-\infty} + \cdots + \|f_n\|_{-\infty} = \|f_1 + \cdots + f_n\|_{-\infty}$. $\square$

El caso de la desigualdad de Minkowski con $p = 0$ es el corolario 1.18 . Existe una desigualdad que tiene mucho que ver con la desigualdad de Minkowski (teorema 2.5) pues acota a $\|f_1 + \cdots + f_n\|_p$ por el lado que no lo hace la desigualdad de Mikowski. Los dos lemas que siguen son preparativos para la demostración de dicha desigualdad, como se podrá apreciar más adelante.

2.4 LEMA. Sean $p < 0$, $n \geq 1$ y $a_i > 0 \; \forall i = 1, \ldots, n$ dadas, entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p < \sum_{i=1}^{n} a_i^p.$$

DEMOSTRACIÓN.

CASO A. $(p = -1)$

Debemos mostrar que:

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

Considérese

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{a_i},$$

[2] s.p.g. puede asumirse que $f \geq \|f\|_{-\infty}$).

pero $\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{a_i} > \frac{a_i}{a_i} = 1$, de donde $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{a_i}\right) > n$ por lo que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) > n.$$

O bien:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{-1} < n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{-1} < \sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}.$$

(Note que la prueba es bastante más general)

CASO B. $(p < -1)$

Por el lema 1.30 con $r = 1$ y $s = -p$: $\sum_{i=1}^{n} a_i^{-p} < (\sum_{i=1}^{n} a_i)^{-p}$, entonces aplicando el caso anterior, resulta que: $\sum_{i=1}^{n} < \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-p}} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^{-p}} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^{-p}} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{p}$.

CASO C. $(-1 < p < 0)$

Sea $b_i = a_i^p$ y como $\frac{1}{p} < -1$ por el caso anterior: $(\sum_{i=1}^{n} b_i)^{1/p} < \sum_{i=1}^{n} b_i^{1/p}$, elevando a la p queda: $\sum_{i=1}^{n} b_i > \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{1/p}\right)^p$, es decir: $\sum_{i=1}^{n} a_i^p > (\sum_{i=1}^{n} a_i)^p$.

$\square$

2.5 TEOREMA (COMPAÑERA DE LA DESIGUALDAD DE MINKOWSKI). Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}_p^+$.

(a) Sea $p > 1$, entonces:

$$\left(\|f_1\|_p^p + \cdots + \|f_n\|_p^p\right)^{1/p} \leq \|f_1 + \cdots + f_n\|_p.$$

Con igualdad ssi para casi toda x a lo más alguna f_i no se anula en x.

(b) Sea $0 < p < 1$, entonces:

$$\left(\|f_1\|_p^p + \cdots + \|f_n\|_p^p\right)^{1/p} \geq \|f_1 + \cdots + f_n\|_p.$$

Con igualdad ssi para casi toda x a lo más alguna f_i no se anula en x.

(c) Sea $p < 0$ y $f_i(x) > 0$ (c.d. rel. ν), entonces:

$$\left(\|f_1\|_p^p + \cdots + \|f_n\|_p^p\right)^{1/p} \leq \|f_1 + \cdots + f_n\|_p.$$

DEMOSTRACIÓN.

CASO A. $(p > 1)$

Por el lema 1.30: $\forall x \in X$ $(f_1(x)+\cdots+f_n(x))^p \geq f_1^p(x)+\cdots+f_n^p(x)$. Entonces: $\int (f_1(x)+\cdots+f_n(x))^p \, d\nu \geq \int f_1^p(x)\, d\nu + \cdots + \int f_n^p(x)\, d\nu$. Y la igualdad ocurre ssi $(f_1+\cdots+f_n)^p \equiv f_1^p+\cdots+f_n^p$ y esto sucede ssi para casi toda x a lo más alguna f_i no se anula en x.

CASO B. $(0 < p < 1)$

Se demuestra por un argumento análogo al del caso anterior.

CASO C. $(p < 0)$

Sea $E = \{x : f_i(x) > 0\}$, entonces $\nu(X - E) = 0$. Y por el lema 2.4: $(f_i(x)+\cdots+f_n(x))^p < f_1(x)+\cdots+f_n^p(x)$ $\forall x \in E$. De donde: $\int f_1^p(x)\, d\nu+\cdots+\int f_n(x))\, d\nu$.
□

2.2 Caso infinito de la Desigualdad de Minkowski

Ahora se generalizarán las desigualdades de Minkowski y su compañera al caso en el que el número de sumandos es infinito. En general las pruebas de dichas desigualdades no se basan en los casos finitos, salvo el de la compañera de la desigualdad de Minkowski, que resulta ser una sencilla generalización de su respectiva desigualdad en el caso finito. En realidad las pruebas se basan en dos teoremas debidos a Riesz, uno para el caso de integrales y otro para el caso de sumas, respectivamente. El teorema de Riesz para integrales ya fue enunciado en la sección 1.2. La versión de dicho teorema expresado para series requiere tener a su vez una versión de la desigualdad de Hölder para series. Dicha versión de la desigualdad de Hölder y del teorema de Riesz la damos a continuación.

2.6 LEMA (DESIGUALDAD DE HÖLDER PARA SUCESIONES).

(a) Si $p > 1$ y (a_n), (b_n) son sucesiones de números no negativos tales que: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < +\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q < +\infty$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{1/q},$$

(b) Si $0 < p < 1$ y (a_n), (b_n) son sucesiones de números reales no negativos tales que: $b_n > 0\ \forall n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^q < +\infty$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{1/q}.$$

En ambos casos la igualdad ocurre ssi $\exists A, B$ no ambas nulas tales que $Aa_n^p = Bb_n^q\ \forall n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $X = \mathbb{N}$, $S = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\nu(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$, $f(n) = a_n \cdot 2^{n/p}$ y $g(n) = b_n \cdot 2^{n/q}$. Entonces $\nu(X) = 1$, $\int fg\, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, $\int f^p\, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ y $\int g^q\, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^q$, Entonces el resultado se sigue inmediatamente del corolario 1.21 $\square$

2.7 OBSERVACIÓN. En el corolario anterior el caso $p < 0$ se reduce al caso (b) intercambiando los papeles de p y q. Nótese que las hipótesis en cada caso cambian un poco.

2.8 LEMA (CORRESPONDIENTE AL TEOREMA DE F. RIESZ PARA SUCESIONES). Sean (a_n) una sucesión de números reales no negativos, $A, B > 0$:

(a) Si $p > 0$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \leq A \quad \text{ssi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq A^{1/p} B^{1/q}$$

$\forall (b_n)$ sucesión de números reales no negativos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = B$.

(b) Si $0 < p < 1$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \geq A \quad \text{ssi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \geq A^{1/p} B^{1/q}$$

$\forall (b_n)$ sucesión de números reales positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = B$.

(c) Si $p < 0$ y $a_n > 0$ $\forall n$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \leq A \quad \text{ssi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \geq A^{1/p} B^{1/q}$$

$\forall (b_n)$ sucesión de números reales no negativos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = B$.

En los tres casos la igualdad ocurre ssi existe una sucesión (b_n) con $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = A^{1/p} B^{1/q}$.

DEMOSTRACIÓN.

CASO A. $(p > 1)$

$(\Rightarrow)$ Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \leq A$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = B$, entonces por el lema 2.6 se sigue que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq A^{1/p} B^{1/q}.$$

$(\Leftarrow)$ Supóngase que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p > A$, entonces $\exists m$ tal que $\sum_{n=1}^{m} a_n^p > A$. Sean $b_i = \frac{B^{1/q} a_i^{p-1}}{\left(\sum_{n=1}^{m} a_n^p\right)^{1/q}}$ $\forall i \leq m$ y $b_i = 0$ si $i > m$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = \frac{B}{\sum_{n=1}^{m} a_n^p} \sum_{n=1}^{m} a_n^{q(p-1)} = B,$$

y por otro lado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{m} a_n b_n = \frac{B^{1/q}}{\left(\sum_{n=1}^{m} a_n^p\right)^{1/q}} \sum_{n=1}^{m} a_n^p$$
$$= B^{1/q} \left(\sum_{n=1}^{m} a_n^p\right)^{1/p} > B^{1/q} A^{1/p}.$$

Falta considerar el caso en el que se da la igualdad. De modo similar puede probarse que: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < A$ ssi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < A^{1/p} B^{1/q}$ $\forall b_n$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = B$. Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ ssi existe una sucesión (b_n) con $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = B$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = A^{1/p} B^{1/q}$.

CASO B. $(0 < p < 1)$

($\Rightarrow$) Sea (b_n) una sucesión de números reales positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = B$. El resultado se concluye del lema 2.6[3]. ($\Leftarrow$) Asumiendo que $0 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < A$ y considerando

$$b_i = \frac{B^{1/q} a_i^{p-1}}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/q}}$$

se concluye que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < B^{1/q} A^{1/p}$ con $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = B$. Faltando de considerar para el recíproco tan sólo el caso en el que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p = 0$. Dicho caso se puede tratar directamente, pues implica que $a_n = 0 \; \forall n$. Y haciendo $b_n = \frac{B^{1/q}}{2^{n/q}} \; \forall n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = B$ y $\sum a_n b_n = 0 < A^{1/p} B^{1/q}$.

La igualdad se prueba de manera análoga al caso (a).

CASO C. $(p < 0)$

($\Rightarrow$) Sean (b_n) una sucesión de números reales no negativos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = B$. Puede asumirse que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < +\infty$, como $0 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \leq A < +\infty$, entonces por el lema 2.6 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{1/q} \geq A^{1/p} B^{1/q}$. ($\Leftarrow$) Supóngase que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > A$, sean m tal que $\sum_{n=1}^{m} a_n^p > A$ y $b_i = \frac{B^{1/q} a_i^{p-1}}{\left(\sum_{n=1}^{m} a_n^p\right)^{1/q}}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = B$ y $\sum_{n=1}^{m} a_n b_n = B^{1/q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p} < B^{1/q} A^{1/p}$.

La igualdad se prueba de manera análoga al caso (a). $\square$

2.9 TEOREMA (GENERALIZACIÓN DE LA DESIGUALDAD DE MINKOWSKI). Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad y (f_n) una sucesión de funciones en $\mathcal{L}_p^+$.

(a) Si $p > 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty$, entonces:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p,$$

(b) Si $0 < p < 1$ y $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_p < +\infty$ entonces:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_p \geq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p,$$

[3] Puede asumirse que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < +\infty$, pues de otro modo la conclusión es inmediata.

(c) Si $p < 0$, $f_n > 0$ $\forall n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty$, entonces:

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p,$$

En los tres casos la igualdad ocurre ssi existe una función $\phi \in \mathcal{L}_p^+$ y para cada n una constante c_n tales que $f_n \equiv c_n\phi$.

DEMOSTRACIÓN.

CASO A. $(p > 1)$

Sea $J = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, por el teorema de Riesz (teorema 1.24) para el caso $p > 1$, resulta que: $\int J^p \, d\nu \leq M^p$ ssi $\int Jg \, d\nu \leq M$ $\forall g$ tal que $\int g^q \, d\nu = 1$. Por el T.C.M. y la desigualdad de Hölder (corolario 1.21) $\int Jg \, d\nu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n g \, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n g \, d\nu\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p \, d\nu\right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\nu\right)^{1/q} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p \, d\nu\right)^{1/p}$.

Nótese que: $\left(\int f_m^p \, d\nu\right)^{1/p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p \, d\nu\right)^{1/p} < +\infty$ $\forall m \in \mathbb{N}$, por lo que es válido aplicar la desigualdad de Hölder (corolario 1.21) si $p > 1$.

Sea $M = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p \, d\nu\right)^{1/p}$, entonces:

$$\int \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right]^p d\nu \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p \, d\nu\right)^{1/p}\right]^p,$$

y la igualdad ocurre ssi $\exists g \in \mathcal{L}_q^+$ con $\int g^q \, d\nu = 1$, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n g \, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p \, d\nu\right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\nu\right)^{1/q},$$

i.e. ssi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int f_n^p \, d\nu\right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\nu\right)^{1/q} - \int f_n g \, d\nu\right] = 0.$$

Pero la serie consiste de términos no negativos, por lo tanto deben ser idénticamente nulos, es decir: $\int f_n g \, d\nu = \left(\int f_n^p \, d\nu\right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\nu\right)^{1/q}$ $\forall n$, pero esto sucede ssi f_n^p es esencialmente proporcional a g^q $\forall n$, i.e. $\exists c_n$ tal que $f_n \equiv c_n\phi$ con $\phi = g^{q/p} \in \mathcal{L}_p^+$.

CASO B. $(0 < p < 1)$

Sea $J = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, por el teorema de Riesz (teorema 1.24) al caso $0 < p < 1$, resulta que: $\int J^p \, d\nu \geq M$ ssi $\int Jg \, d\nu \geq M^{1/p}$ $\forall g$ tal que $\int g^q \, d\nu = 1$.

Puede suponerse que $+\infty > \int Jg \, d\nu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n g$. Y por el T.C.M.

$$\begin{aligned} \int Jg \, d\nu &= \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n g \, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n g \, d\nu \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p \, d\nu \right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\nu \right)^{1/q} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p \, d\nu \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Nótese que: $\int Jg \, d\nu < +\infty$ y $0 < \int g^q \, d\nu < +\infty$ por lo que es válido aplicar la desigualdad de Hölder (corolario 1.21) con $0 < p < 1$.

Sea $M = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p \, d\nu \right)^{1/p}$, entonces:

$$\int \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right]^p d\nu \geq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p \, d\nu \right)^{1/p} \right]^p,$$

y la igualdad ocurre ssi $\exists g \in \mathcal{L}_q^+$ con $\int g^q \, d\nu = 1$, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n g \, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p \, d\nu \right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\nu \right)^{1/q},$$

i.e. ssi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int f_n g \, d\nu - \left(\int f_n^p \, d\nu \right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\nu \right)^{1/q} \right] = 0.$$

Pero la serie consiste de términos no negativos, por lo tanto deben ser idénticamente nulos, es decir: $\int f_n g \, d\nu = \left(\int f_n^p \, d\nu \right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\nu \right)^{1/q}$ $\forall n$, pero esto sucede ssi f_n^p es esencialmente proporcional a g^q $\forall n$, i.e. $\exists c_n$ tal que $f_n \equiv c_n \phi$ con $\phi = g^{q/p} \in \mathcal{L}_p^+$.

CASO C. $(p < 0)$

Supóngase que $(0 <) \int (\sum_{n=1}^{\infty} f_n)^p \, d\nu < +\infty$. Sea $J = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. por el teorema de Riesz (teorema 1.24) para el caso $p < 0$, resulta que: $\int J^p \, d\nu \leq M^p$ ssi $\int Jg \, d\nu \geq M$ $\forall g$ tal que $\int g^q \, d\nu = 1$. Por el T.C.M. y la desigualdad de Hölder (corolario 1.21)

Puede suponerse que $+\infty > \int Jg \, d\nu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n g$.

$$\begin{aligned}
\int Jg \, d\nu &= \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n g \, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n g \, d\nu \right) \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p \, d\nu \right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\nu \right)^{1/q} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p \, d\nu \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Nótese que: $\left(\int f_m^p \, d\nu\right)^{1/p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p d\nu\right)^{1/p} < +\infty$ $\forall m \in \mathbb{N}$, por lo que es válido aplicar la desigualdad de Hölder (corolario 1.21) si $p > 1$.

Sea $M = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p \, d\nu\right)^{1/p}$, entonces:

$$\int \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right]^p d\nu \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p \, d\nu \right)^{1/p} \right]^p,$$

y la igualdad ocurre ssi $\exists g \in \mathcal{L}_q^+$ con $\int g^q \, d\nu = 1$, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n g \, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n^p \, d\nu \right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\nu \right)^{1/q},$$

i.e. ssi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int f_n^p \, d\nu \right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\nu \right)^{1/q} - \int f_n g \, d\nu \right] = 0.$$

Pero la serie consiste de términos no negativos, por lo tanto deben ser idénticamente nulos, es decir: $\int f_n g \, d\nu = \left(\int f_n^p \, d\nu\right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\nu\right)^{1/q}$ $\forall n$, pero esto sucede ssi f_n^p es esencialmente proporcional a g^q $\forall n$, i.e. $\exists c_n$ tal que $f_n \equiv c_n \phi$ con $\phi = g^{q/p} \in \mathcal{L}_p^+$.

□

2.10 TEOREMA (DESIGUALDAD DE MINKOWSKI, $p=1$). Sean (X,S,ν) un espacio de medida, $p=1$, $n\in\mathbb{N}$ y $f_n\in\mathcal{L}_1$ $\forall n\in\mathbb{N}$, entonces:

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\|_1 \leq \sum_{i=1}^{\infty}\|f_n\|_1,$$

con igualdad ssi $\forall i,j$ $f_i f_j \geq 0$ (c.d. rel. μ).

DEMOSTRACIÓN. Sea $J=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, por el teorema de Riesz (teorema 1.24) para el caso $p=1$, resulta que: $\int J\,d\mu \leq M$ ssi $\int Jg\,d\mu \leq M$ $\forall g$ tal que $\|g\|_\infty = 1$. Por el T.C.M. y la desigualdad de Hölder (corolario 1.21)

$$\begin{aligned}\int Jg\,d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|g\,d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int |f_n|g\,d\mu\right)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\|g\|_\infty \int |f_n|\,d\mu\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int |f_n|\,d\mu\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_1.\end{aligned}$$

Sea $M=\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_1$, entonces:

$$\left|\int J\,d\mu\right| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_1.$$

La igualdad ocurre ssi $\int|\sum_{n=1}^{\infty} f_n|\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int|f_n|\,d\mu = \int\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\,d\mu$ (Por el T.C.M.) ssi $\int(|\sum_{n=1}^{\infty} f_n| - \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|)\,d\mu = 0$ ssi $|\sum_{n=1}^{\infty} f_n| \equiv \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$, ssi $f_n f_m \geq 0$ $\forall n,m$ (c.d. rel. ν). $\square$

2.11 TEOREMA (DESIGUALDAD DE MINKOWSKI, $p=0$). Sean (X,S,ν) un espacio de medida, $p=1$, $f_i\in\mathcal{L}_0^+$ y $\|\sum_{i=1}^{\infty} f_i\|_0 < +\infty$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_0 \leq \|\sum_{i=1}^{\infty} f_i\|_0,$$

con igualdad ssi $\forall i$ f_i es proporcional a la suma de las otras (c.d. rel. μ).

DEMOSTRACIÓN. Como $\exp\int\log(\sum_{i=1}^{\infty} f_i)\,d\nu < +\infty$, entonces

$$\int \log(\sum_{i=1}^{\infty} f_i)\,d\nu < +\infty.$$

Supóngase que $\|\sum_{i=1}^{\infty} f_i\|_0 > 0$, entonces $0 < \sum_{i=1}^{\infty} f_i < +\infty$ (c.d. rel. ν). Sea $g_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^{\infty} f_i}$. De donde

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|g_i\|_0 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|g_i\|_1 = 1, \tag{2.2}$$

pero:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|g_i\|_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \left\| \frac{g_i}{\sum_{i=1}^{\infty} g_i} \right\|_0 = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \|g_i\|_0}{\|\sum_{i=1}^{\infty} g_i\|_0} \leq 1.$$

Entonces $\sum_{i=1}^{\infty} \|g_i\|_0 \leq \|\sum_{i=1}^{\infty} g_i\|_0$. Con igualdad ssi la igualdad se da en (2.2), pero como $\forall i\ 0 \leq \|g_i\|_0 \leq \|g_i\|_1$, así pues la igualdad debe verificarse término a término, entonces la igualdad se da ssi $\|g_i\|_0 = \|g_i\|_1\ \forall i$, esto se da (teorema 1.16) ssi $g_i = \|g_i\|_1$ (c.d. rel. ν) ssi $f_i \equiv \left\| \frac{f_i}{\sum_i^{\infty} f_i} \right\|_1 \sum_{i=1}^{\infty} f_i$. $\square$

2.12 TEOREMA (DESIGUALDAD DE MINKOWSKI, $p = \pm\infty$). Sean (X, S, ν) un espacio de medida:

(a) Si $f_i \in \mathcal{L}_\infty\ \forall i$, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \in \mathcal{L}_\infty$ y además:

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} f_i \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_\infty,$$

con igualdad ssi $\forall \varepsilon > 0\ \exists E_\varepsilon \in S$, tal que $\nu(E_\varepsilon) > 0$ y $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) > \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_\infty - \varepsilon$ $\forall x \in E_\varepsilon$.

(b) Si $f_i \geq 0$ y $\|\sum_{i=1}^{\infty} f_i\|_{-\infty} < +\infty$, entonces:

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} f_i \right\|_{-\infty} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{-\infty},$$

con igualdad ssi $\forall \varepsilon > 0\ \exists E_\varepsilon \in S$, tal que $\nu(E_\varepsilon) > 0$ y $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) < \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{-\infty} + \varepsilon$ $\forall x \in E_\varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN.

(a) $\|\sum_{i=1}^{n} f_i\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_\infty$ $\forall n$. Entonces:

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_\infty.$$

La igualdad se demuestra de manera análoga al caso finito.

(b) $\|\sum_{i=1}^{\infty} f_i\|_{-\infty} \geq \|\sum_{i=1}^{n} f_i\|_{-\infty} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{-\infty}$ $\forall n$. Entonces:

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right\|_{-\infty} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{-\infty}.$$

La igualdad se demuestra de manera análoga al caso finito. □

2.13 LEMA. Sea $0 < r < s$ y $a_i \geq 0$, tal que $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^r\right)^{1/r} < +\infty$, entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^s\right)^{1/s} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^r\right)^{1/r},$$

con igualdad ssi a lo más una de las a_i es no nula.

DEMOSTRACIÓN. Como en el caso finito. (Ver 1.30) □

2.14 TEOREMA (COMPAÑERA DE LA DESIGUALDAD DE MINKOWSKI). Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad, $f_i \in \mathcal{L}_p^+$ $\forall i$.

(a) Sea $p > 1$, entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_p^p\right)^{1/p} \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right\|_p,$$

con igualdad ssi para casi toda x, a lo más alguna f_i no se anula en x.

(b) Sea $0 < p < 1$, entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_p^p\right)^{1/p} \geq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right\|_p,$$

con igualdad ssi para casi toda x, a lo más alguna f_i no se anula en x.

(c) Sea $p < 0$ y $f_i(x) > 0$ (c.d. rel. ν), entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_p^p\right)^{1/p} \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right\|_p.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es completamente análoga al caso finito. □

Vale la pena observar que en el caso $p = 1$, la compañera de la desigualdad de Minkowski coincide con la misma desigualdad de Minkowski. Y que no hay versión de la compañera de la desigualdad de Minkowski en los casos $p = 0, \pm\infty$.

Para la siguiente desigualdad debe considerarse $\| \ \|_p$ como la norma p en ℓ_p, es decir $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p)^{1/p}$. Nótese que dicha desigualdad tiene cierto parecido con la desigualdad de Minkowski, si se intercambian los papeles de suma e integral.

2.15 TEOREMA. Sean (X, S, ν) un espacio de probabilidad y (f_n) una sucesión de funciones en $\mathcal{L}_p^+$.

(a) Si $p > 1$ y $\int \|(f_n)\|_p \, d\nu < +\infty$, entonces:

$$\left\|\left(\int f_n \, d\nu\right)\right\|_p \leq \int \|(f_n)\|_p \, d\nu.$$

(b) Si $0 < p < 1$ y $\|(\int f_n \, d\mu)\|_p < +\infty$, entonces:

$$\left\|\left(\int f_n \, d\nu\right)\right\|_p \geq \int \|(f_n)\|_p \, d\nu.$$

(c) Si $p < 0$, $f_n(x) > 0$ (c.d. rel. ν) $\forall n$ y $\int \|(f_n)\|_p \, d\nu < +\infty$, entonces:

$$\left\|\left(\int f_n \, d\nu\right)\right\|_p \leq \int \|(f_n)\|_p \, d\nu.$$

En los tres casos la igualdad ocurre ssi existen una función $\phi \in \mathcal{L}_p^+$ y para cada n existe una constante c_n tales que $f_n \equiv c_n \phi$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN.

CASO A. $(p > 1)$

Sea $J_n = \int f_n \, d\nu \leq \int [\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p]^{1/p} \, d\nu < +\infty$. Como $\int [\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p]^{1/p} \, d\nu < +\infty$ y $f_n \geq 0$, entonces existe $E \subset S$, $\nu(X - E) = 0$, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p(x) < +\infty$ $\forall x \in E$.

Por el lema 2.8 aplicado al caso $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} J_n^p =\leq M^p$ ssi $\sum_{n=1}^{\infty} J_n b_n \leq M$ $\forall (b_n)$ sucesión de números reales negativos tal que $\sum_{n=1} b_n^q = 1$, pero por el T.C.M. y por el lema 2.6

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} b_n J_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_E f_n \, d\nu &= \int_E \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n \, d\nu \\
&\leq \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{1/q} \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p \right)^{1/p} d\nu \\
&= \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p \right)^{1/p} d\nu.
\end{aligned}$$

Sea $M = \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p\right)^{1/p} d\nu$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} J_n^p \leq M^p$, i.e:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int f_n \, d\nu \right]^p \leq \left[\int \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p \right]^{1/p} d\nu \right]^p ,$$

o bien:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int f_n \, d\nu \right]^p \right]^{1/p} \leq \int \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p \right]^{1/p} d\nu.$$

La igualdad ocurre ssi $\exists (b_n)$ con $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = 1$ tal que

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n \, d\nu = \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{1/q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p \right)^{1/p} d\nu,$$

i.e. ssi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n \equiv (\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q)^{1/q} (\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p)^{1/p}$.

Y por el lema 2.6 esto sucede ssi las sucesiones (b_n) y $(f_n(x))$ son proporcionales (c.d. rel. ν), i.e. ssi existe una constante que depende de x, llámese $\phi(x)$, tal que $\phi(x)b_n = f_n(x)$ (c.d. rel. ν).

CASO B. $\quad (0 < p < 1)$

Sean $J_n = \int f_n \, d\nu \leq [\sum_{n=1}^{\infty} [\int f_n \, d\nu]^p]^{1/p} < +\infty$. Por el lema [2.8] aplicado al caso $0 < p < 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} J_n^p \geq M \; \forall b_n)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = 1$, pero por el T.C.M. y por el lema 2.6[4]:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} b_n J_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int f_n \, d\nu &= \int \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n \, d\nu \\
&\geq \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{1/q} \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p \right)^{1/p} d\nu \\
&= \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p \right)^{1/p} d\nu.
\end{aligned}$$

Sea $M = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p\right)^{1/p} d\nu$, entonces:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int f_n \, d\nu \right]^p \right]^{1/p} \geq \int \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p \right]^{1/p} d\nu.$$

La igualdad ocurre ssi $\exists (b_n)$ con $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = 1$ tal que

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n \, d\nu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{1/q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p \right)^{1/p} d\nu,$$

y por el lema 2.6 esto sucede ssi las sucesiones (b_n) y $(f_n(x))$ son proporcionales (c.d. rel. ν), i.e. ssi existe una constante que depende de x, llámese $\phi(x)$, tal que $\phi(x)b_n = f_n(x)$ (c.d. rel. ν).

CASO C. $\quad (p < 0)$

---

[4] Puede asumirse que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n J_n < +\infty$ pues de otro modo la conclusión es inmediata.

Sea $J_n = \int f_n \, d\nu < +\infty$ (pues $f_n \in \mathcal{L}_1^+$). Como $\int [\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p]^{1/p} \, d\nu < +\infty$ y $f_n \geq 0 \ \forall n$, entonces existe $E \subset S$, $\nu(X - E) = 0$, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p(x) < +\infty$ $\forall x \in E$.

Por el lema 2.8 aplicado al caso $p < 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} J_n^p \leq M^p$ ssi $\sum_{n=1}^{\infty} J_n b_n \geq M$ $\forall (b_n)$ sucesión de números reales negativos tal que $\sum_{n=1} b_n^q = 1$, pero por el T.C.M. y por el lema 2.6[5]:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} b_n J_n &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_E f_n \, d\nu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n \, d\nu \\
&\geq \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{1/q} \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p \right)^{1/p} d\nu \\
&= \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p \right)^{1/p} d\nu.
\end{aligned}$$

Sea $M = \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p\right)^{1/p} d\nu$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} J_n^p \leq M^p$, i.e:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int f_n \, d\nu \right]^p \leq \left[\int \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p \right]^{1/p} d\nu \right]^p,$$

o bien:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int f_n \, d\nu \right]^p \right]^{1/p} \leq \int \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p \right]^{1/p} d\nu.$$

La igualdad ocurre ssi $\exists (b_n)$ con $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = 1$ tal que

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n \, d\nu = \int_E (\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q)^{1/q} (\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p)^{1/p} \, d\nu,$$

i.e. ssi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n \equiv (\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q)^{1/q} (\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p)^{1/p}$.

Y por el lema 2.6 esto sucede ssi las sucesiones (b_n) y $(f_n(x))$ son proporcionales (c.d. rel. ν), i.e. ssi existe una constante que depende de x, llámese $\phi(x)$, tal que $\phi(x) b_n = f_n(x)$ (c.d. rel. ν). $\square$

---

[5] Puede asumirse que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n J_n < +\infty$ pues de otro modo la conclusión es inmediata.

2.3 Funciones de dos Variables

Ahora se considerarán aplicaciones de la desigualdad de Hölder a las funciones de dos varibales. Los dos siguientes teoremas requieren, además de algunos resultados anteriormente enunciados, del teorema de Tonelli[6]. El primero de estos teoremas se puede ver como la *versión integral* de la desigualdad de Minkowski en la que $\sum$ se reemplaza con $\int$ en la segunda variable (i.e. respecto de ν_2).

2.16 TEOREMA. Sean (X, S_1, ν_1) y (Y, S_2, ν_2) dos espacios de probabilidad y $f : X \times Y \to \mathbb{R}^+$:

(a) Si $p > 1$ y f es tal que $\int (\int f^p(x,y)\, d\nu_1)^{1/p}\, d\nu_2 < +\infty$, entonces:

$$\left(\int \left(\int f(x,y)\, d\nu_2\right)^p d\nu_1\right)^{1/p} \leq \int \left(\int f^p(x,y)\, d\nu_1\right)^{1/p} d\nu_2.$$

(b) Si $0 < p < 1$ y f es tal que $\int (\int f(x,y)\, d\nu_2)^p\, d\nu_1 < +\infty$, entonces:

$$\left(\int \left(\int f(x,y)\, d\nu_2\right)^p d\nu_1\right)^{1/p} \geq \int \left(\int f^p(x,y)\, d\nu_1\right)^{1/p} d\nu_2.$$

(c) Si $p < 0$ y f es tal que $\int (\int f^p(x,y)\, d\nu_1)^{1/p}\, d\nu_2 < +\infty$, entonces:

$$\left(\int \left(\int f(x,y)\, d\nu_2\right)^p d\nu_1\right)^{1/p} \leq \int \left(\int f^p(x,y)\, d\nu_1\right)^{1/p} d\nu_2.$$

En los tres casos la igualdad ocurre ssi $\exists \phi, \psi$ tales que $f(x,y) = \phi(x)\psi(y)$, i.e. ssi $f(x,y)$ es de variables separadas.

DEMOSTRACIÓN.

CASO A. $(p > 1)$

Sea $J(x) = \int f(x,y)\, d\nu_2$, entonces $\int J^p\, d\nu_1 \leq M^p$ ssi $\int Jg\, d\nu_1 \leq M$ $\forall g \geq 0$ tal que $\int g^q\, d\nu_1 = 1$. Como $\int(\int f^p(x,y)\, d\nu_1)^{1/p}\, d\nu_2 < +\infty$, entonces $\exists E$ con

[6] Ver [Bal]

$\nu(X-E)=0$ tal que $(\int f^p(x,y)\,d\nu_1)^{1/p}<+\infty\ \forall y\in E$. Por el teorema de Tonelli y la desigualdad de Hölder (corolario 1.21):

$$\begin{aligned}
\int Jg\,d\nu_1 &= \int\left(g(x)\int f(x,y)\,d\nu_2\right)d\nu_1\\
&= \int\int_E g(x)f(x,y)\,d\nu_2\,d\nu_1 = \int_E\int g(x)f(x,y)\,d\nu_1\,d\nu_2\\
&\le \int_E\left(\int f^p(x,y)\,d\nu_1\right)^{1/p}\left(\int g^q(x)\,d\nu_1\right)^{1/q}d\nu_2\\
&= \int\left(\int f^p(x,y)\,d\nu_1\right)^{1/p}d\nu_2.
\end{aligned}$$

Sea $M=\int(\int f^p(x,y)\,d\nu_1)^{1/p}\,d\nu_2$, entonces:

$$\left(\int\left(\int f(x,y)\,d\nu_1\right)^p d\nu_2\right)^{1/p}\le\int\left(\int f^p(x,y)\,d\nu_1\right)^{1/p}d\nu_2,$$

y por hipótesis es finito el segundo miembro de la desigualdad. La igualdad se da ssi $\exists g$ con $\int g^q\,d\nu=1$, tal que:

$$\int\int f(x,y)g(x)\,d\nu_2\,d\nu_1=\int\left(\int f^p(x,y)\,d\nu_1\right)^{1/p}\left(\int g(x)^q\,d\nu_1\right)^{1/q}d\nu_2,$$

lo cual sucede ssi:

$$\int f(x,y)g(x)\,d\nu_1\equiv_{\nu_2}\left(\int f^p(x,y)\,d\nu_1\right)^{1/p}\left(\int g^q(x)\,d\nu_1\right)^{1/q},$$

y esto último a su vez sucede ssi f^p es esencialmente proporcional a g^q (c.d. rel. ν_2), o lo que es lo mismo, si para casi toda y existen un par de constantes $\rho(y)$ y $\sigma(y)$ no ambas nulas, tales que $\rho(y)f^p(x,y)=\sigma(y)g^q(x)$ para casi toda x. Si $\rho(y)=0$ para alguna y para la cual la igualdad anterior se cumple, entonces g sería nula, lo cual es falso. Por lo tanto $\rho(y)>0$ para tales y, y así $f(x,y)=\phi(x)\psi(y)$, con $\phi=g^{q/p}\in\mathcal{L}_p^+$ y $\psi=(\sigma/\rho)^{1/p}$ para casi toda y.

CASO B. $(0<p<1)$

Sea $J(x)=\int f(x,y)\,d\nu_2$, entonces $\int J^p\,d\nu_1\ge M^p$ ssi $\int Jg\,d\nu_1\ge M\ \forall g\ge 0$ tal que $\int g^q\,d\nu_1=1$.

Puede suponerse que $\int Jg\,d\nu_1 < +\infty$. Por el teorema de Tonelli y la desigualdad de Hölder (corolario 1.21):

$$\begin{aligned}\int Jg\,d\nu_1 &= \int \left(g(x)\int f(x,y)\,d\nu_2\right) d\nu_1 \\ &= \int\int g(x)f(x,y)\,d\nu_2\,d\nu_1 = \int\int g(x)f(x,y)\,d\nu_1\,d\nu_2 \\ &\geq \int \left(\int f^p(x,y)\,d\nu_1\right)^{1/p}\left(\int g^q(x)\,d\nu_1\right)^{1/q} d\nu_2 \\ &= \int \left(\int f^p(x,y)\,d\nu_1\right)^{1/p} d\nu_2.\end{aligned}$$

Sea $M = \int(\int f^p(x,y)\,d\nu_1)^{1/p}\,d\nu_2$, entonces:

$$\left(\int\left(\int f(x,y)\,d\nu_1\right)^p d\nu_2\right)^{1/p} \geq \int\left(\int f^p(x,y)\,d\nu_1\right)^{1/p} d\nu_2,$$

y por hipótesis es finito el primer miembro de la desigualdad. La igualdad se da ssi $\exists g$ con $\int g^q\,d\nu = 1$, tal que:

$$\int\int f(x,y)g(x)\,d\nu_1\,d\nu_2 = \int\left(\int f^p(x,y)\,d\nu_1\right)^{1/p}\left(\int g(x)^q\,d\nu_1\right)^{1/q} d\nu_2,$$

lo cual sucede ssi:

$$\int f(x,y)g(x)\,d\nu_1 \equiv_{\nu_2} \left(\int f^p(x,y)\,d\nu_1\right)^{1/p}\left(\int g^q(x)\,d\nu_1\right)^{1/q},$$

y esto último a su vez sucede ssi f^p es esencialmente proporcional a g^q (c.d. rel. ν_2), o lo que es lo mismo, si para casi toda y existen un par de constantes $\rho(y)$ y $\sigma(y)$ no ambas nulas, tales que $\rho(y)f^p(x,y) = \sigma(y)g^q(x)$ para casi toda x. Si $\rho(y) = 0$ para alguna y para la cual la igualdad anterior se cumple, entonces g sería nula, lo cual es falso. Por lo tanto $\rho(y) > 0$ para tales y, y así $f(x,y) = \phi(x)\psi(y)$, con $\phi = g^{q/p} \in \mathcal{L}_p^+$ y $\psi = (\sigma/\rho)^{1/p}$ para casi toda y.

CASO C. $(p < 1)$

Sea $J(x) = \int f(x,y)\,d\nu_2$. Como $\int(\int f^p(x,y)\,d\nu_1)^{1/p}\,d\nu_2 < +\infty$, entonces: $\exists E \subset Y$ con $\nu(Y - E) = 0$ tal que $(\int f^p(x,y)\,d\nu_1)^{1/q} < +\infty$ $\forall y \in E$.

Por otro lado, $\int J^p \, d\nu_1 \leq M^p$ ssi $\int Jg \, d\nu_1 \geq M$ $\forall g \geq 0$ tal que $\int g^q \, d\nu_1 = 1$. Puede suponerse que $\int Jg \, d\nu_1 < +\infty$. Por el teorema de Tonelli y la desigualdad de Hölder (corolario 1.21):

$$\begin{aligned}\int Jg \, d\nu_1 &= \int \left(g(x) \int f(x,y) \, d\nu_2 \right) d\nu_1 \\ &= \int \int_E g(x) f(x,y) \, d\nu_2 \, d\nu_1 = \int_E \int g(x) f(x,y) \, d\nu_1 \, d\nu_2 \\ &\geq \int_E \left(\int f^p(x,y) \, d\nu_1 \right)^{1/p} \left(\int g^q(x) \, d\nu_1 \right)^{1/q} d\nu_2 \\ &= \int \left(\int f^p(x,y) \, d\nu_1 \right)^{1/p} d\nu_2.\end{aligned}$$

Sea $M = \int (\int f^p(x,y) \, d\nu_1)^{1/p} \, d\nu_2$, entonces:

$$\left(\int \left(\int f(x,y) \, d\nu_1 \right)^p d\nu_2 \right)^{1/p} \leq \int \left(\int f^p(x,y) \, d\nu_1 \right)^{1/p} d\nu_2,$$

y por hipótesis es finito el segundo miembro de la desigualdad. La igualdad se da ssi $\exists g$ con $\int g^q \, d\nu = 1$, tal que:

$$\int \int f(x,y) g(x) \, d\nu_1 \, d\nu_2 = \int \left(\int f^p(x,y) \, d\nu_1 \right)^{1/p} \left(\int g(x)^q \, d\nu_1 \right)^{1/q} d\nu_2,$$

lo cual sucede ssi:

$$\int f(x,y) g(x) \, d\nu_1 \equiv_{\nu_2} \left(\int f^p(x,y) \, d\nu_1 \right)^{1/p} \left(\int g^q(x) \, d\nu_1 \right)^{1/q},$$

y esto último a su vez sucede ssi f^p es esencialmente proporcional a g^q (c.d. rel. ν_2), o lo que es lo mismo, si para casi toda y existen un par de constantes $\rho(y)$ y $\sigma(y)$ no ambas nulas, tales que $\rho(y) f^p(x,y) = \sigma(y) g^q(x)$ para casi toda x. Si $\rho(y) = 0$ para alguna y para la cual la igualdad anterior se cumple, entonces g sería nula, lo cual es falso. Por lo tanto $\rho(y) > 0$ para tales y, y así $f(x,y) = \phi(x)\psi(y)$, con $\phi = g^{q/p} \in \mathcal{L}_p^+$ y $\psi = (\sigma/\rho)^{1/p}$ para casi toda y. □

2.17 COROLARIO. Sean (X, S_1, ν_1) y (Y, S_2, ν_2) dos espacios de probabilidad y $f : X \times Y \to \mathbb{R}^+$, $r, s \in \mathbb{R}$.

(a) Si $0 < r < s$ y $\int(\int f^s(x,y)\,d\nu_1)^{r/s}\,d\nu_2 < +\infty$, entonces:

$$\left(\int\left(\int f^r(x,y)\,d\nu_2\right)^{s/r} d\nu_1\right)^{1/s} \leq \left(\int\left(\int f^s(x,y)\,d\nu_1\right)^{r/s} d\nu_2\right)^{1/r}.$$

(b) Si $r < s < 0$ y $\int(\int f^s(x,y)\,d\nu_1)^{r/s}\,d\nu_2 < +\infty$, entonces:

$$\left(\int\left(\int f^r(x,y)\,d\nu_2\right)^{s/r} d\nu_1\right)^{1/s} \geq \left(\int\left(\int f^s(x,y)\,d\nu_1\right)^{r/s} d\nu_2\right)^{1/r}.$$

(c) Si $r < 0 < s$ y $0 < \int(\int f^r(x,y)\,d\nu_1)^{s/r}\,d\nu_1 < +\infty$, entonces:

$$\left(\int\left(\int f^r(x,y)\,d\nu_2\right)^{s/r} d\nu_1\right)^{1/s} \leq \left(\int\left(\int f^s(x,y)\,d\nu_1\right)^{r/s} d\nu_2\right)^{1/r}.$$

En los tres casos la igualdad ocurre ssi $\exists\phi,\psi$ tales que $f(x,y) = \phi(x)\psi(y)$, i.e. ssi $f(x,y)$ es de variables separadas.

DEMOSTRACIÓN. Aplicar el teorema 2.16 a $s/r = p$ y $F(x,y) = f^r(x,y)$. $\square$

CAPITULO III

Convexidad

En este capítulo se introduce de manera formal el concepto de convexidad, aunque ya nos lo habíamos encontrado en la sección 1.3 algunas de sus propiedades. También se ha de estudiar el concepto de función convexa de punto medio.

3.1 Convexidad

Del estudio de las funciones convexas pueden obtenerse resultados interesantes y evidentemente, bastante útiles. Por ejemplo, como se verá más adelante, mediante una simple aplicación de la desigualdad de Jensen se puede concluir que $\|f\|_0 \leq \|f\|_1$, y también se pueden dar las condiciones para la igualdad.

Esta sección está dedicada al estudio de las propiedades de las funciones convexas, como lo son su continuidad, diferenciabilidad, etc. También se proporcionarán dos versiones de la desigualdad de Jensen.

Comencemos por definir este importante concepto.

3.1 DEFINICIÓN (CONVEXIDAD). Sean I un intervalo abierto de $\mathbf{R}$ y $\varphi : I \to \mathbf{R}$ una función. Se dice que φ es **convexa en** I si $\forall a < b$ en I, el segmento de recta que une el punto $(a, \varphi(a))$ con el punto $(b, \varphi(b))$ nunca queda por debajo de la gráfica de la función en el intervalo (a, b).

Otras caracterizaciones de este hecho son:

(a)
$$\varphi(tb + (1-t)a) \leq t\varphi(b) + (1-t)\varphi(a), \tag{3.1}$$
$\forall t \in (0,1)$.

(b) Como $L(x) = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a) = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}(x-b) + \varphi(b)$ es la ecuación de la recta que pasa por $(a, \varphi(a))$ y $(b, \varphi(b))$, entonces la definición dice que: $L(x) \geq \varphi(x)\ \forall x \in (a,b)$. Es decir que $\forall x \in (a,b)$:

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} \geq \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} \tag{3.2}$$

o bien:

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} \leq \frac{\varphi(x)-\varphi(b)}{x-b} \tag{3.3}$$

(c) Resumiendo los casos anteriores, resulta la siguiente caracterización: φ es convexa en I ssi $\forall a < x < b$ en I, se tiene:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} \leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} \leq \frac{\varphi(b)-\varphi(x)}{b-x}. \tag{3.4}$$

Y este hecho se ilustra en la figura 3.1.

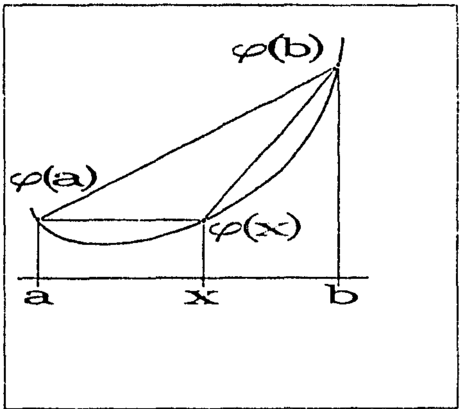

Figura 3.1 Ilustración del comportamiento de las secantes a una curva que representa una función convexa.

3.2 OBSERVACIÓN. Sea $x \in I$, entonces si $x_0 < x < x_1 < x_2$, por la caracterización (c) se deduce que si φ es convexa, entonces

$$\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{x_0-x} \leq \frac{\varphi(x_1)-\varphi(x)}{x_1-x} \leq \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x)}{x_2-x},$$

por lo cual $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ decrece cuando h decrece y además esta acotada inferiormente por $\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{x_0-x}$. Por lo que el siguiente límite existe $\forall x \in I$ y es decreciente:

$$\lim_{h\downarrow 0^+} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h},$$

a dicho límite se le llama la **derivada por la derecha de φ en x** y lo denotaremos por $D^+\varphi(x)$.

Análogamente se define la **derivada por la izquierda de φ en x**, denotada por $D^-\varphi(x)$, como el siguiente límite creciente:

$$\lim_{h\uparrow 0^+} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}.$$

Obsérvese que: $D^+\varphi(x) = \inf\limits_{x<z} \left\{\frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x}\right\}$ y $D^-\varphi(x) = \sup\limits_{y<x} \left\{\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\right\}$ por ser límites decreciente y creciente respectivamente.

Sea $z > x$, entonces por la desigualdad (3.4) $\forall y < x$,

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x},$$

de donde

$$D^-\varphi(x) \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x},$$

y esto $\forall z > x$, por lo que:

$$D^-\varphi(x) \leq D^+\varphi(x). \tag{3.5}$$

Más aún, $D^-\varphi$ y $D^+\varphi$ son funciones no decrecientes. Veamos por ejemplo que $D^+\varphi$ es no decreciente. Sea $x < y$, entonces:

$$D^+\varphi(x) = \inf_{x<z} \left\{\frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x}\right\} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(w)}{y-w}, (\forall w > y)$$

entonces:

$$D^+\varphi(x) \leq \inf_{w>y} \left\{\frac{\varphi(y)-\varphi(w)}{y-w}\right\} = D^+\varphi(y).$$

Análogamente se prueba que $D^-\varphi$ es no decreciente.

Como $D^+\varphi$ y $D^-\varphi$ son no decrecientes, entonces son continuas salvo a lo más en un conjunto numerable de puntos. Sea x un punto de continuidad de $D^-\varphi$ y $z > x$, entonces si $x < w < z$:

$$D^+\varphi \leq \frac{\varphi(w)-\varphi(x)}{w-x} \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(w)}{z-w} \leq D^-\varphi(z).$$

Como x es un punto de continuidad de $D^-\varphi$, entonces $D^-\varphi(x) \leq D^+\varphi(x) \leq \lim_{z\downarrow x^+} D^-\varphi(z) = D^-\varphi(x)$. Entonces, $D^-\varphi(x) = D^+\varphi(x)$ y por lo tanto φ' existe (c.d. rel. λ).

Para concluir con el estudio de la diferenciabilidad de las funciones convexas se establecerán las definiciones de la primera y segunda derivada simétrica. Por otro lado la segunda derivada simétrica proporciona condiciones necesarias y suficientes para que una función sea continua, como se verá más adelante. (corolario 3.15).

3.3 DEFINICIÓN (PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA SIMÉTRICA). Sea $\varphi : I \to \mathbb{R}$, I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $x \in I$, se definen la **primera derivada simétrica superior** e **inferior**, como el límite superior e inferior de:

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x-h)}{2h}$$

cuando $h \to 0^+$. Denotadas $\overline{D}_1\varphi(x)$ y $\underline{D}_1\varphi(x)$ respectivamente.

Y se define la **segunda derivada simétrica superior** e **inferior** como el límite superior e inferior de:

$$\frac{\varphi(x+h)+\varphi(x-h)-2\varphi(x)}{h^2}$$

cuando $h \to 0^+$ denotadas $\overline{D}_2\varphi(x)$ y $\underline{D}_2\varphi(x)$ respectivamente.

3.4 OBSERVACIÓN. Es evidente que si $\varphi'(x)$ existe, entonces $\overline{D}_1\varphi(x) = \underline{D}_1\varphi(x)$. Supóngase que $\varphi''(x)$ existe. Sean $f(t) = \varphi(x+t)+\varphi(x-t)$, $g(t) = t^2$, $a = 0$ y $b = h$. De donde $f(b)-f(a) = \varphi(x+h)+\varphi(x-h)-2\varphi(x)$, $g(b)-g(a) = h^2$ $f'(t) = \varphi'(x+t)-\varphi'(x-t)$ y $g'(t) = 2t$. Por el teorema del valor medio de Cauchy[1] existe $k \in (0,h)$ tal que:

$$\frac{\varphi(x+h)+\varphi(x-h)-2\varphi(x)}{h^2} = \frac{\varphi'(x+k)-\varphi'(x-k)}{2k}$$

[1] Sean $f,g \in C^1(a,b)$ entonces $\exists x \in (a,b)$ tal que $(f(b)-f(a))g'(x) = (g(b)-g(a))f'(x)$.

El cual tiende a $\varphi''(x)$ cuando $k \to 0$. Así que si $\varphi''(x)$ existe entonces, $\overline{D}_2\varphi(x) = \underline{D}_2\varphi(x) = \varphi''(x)$. Análogamente con $\frac{[\varphi(x)-\varphi(x-h)]}{h^2}$.

3.5 LEMA. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa, entonces φ es continua.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo. Basta probar que $\exists M = M(x_0)$ y $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq M|x - x_0|$.

Sea $M_1 = M_1(x_0) = \max\{|D^+\varphi(x_0)|, |D^-\varphi(x_0)|\}$. Como

$$D^+\varphi(x_0) = \lim_{h\downarrow 0^+} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}$$

y

$$D^-\varphi(x_0) = \lim_{h\uparrow 0^-} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}.$$

a) Así pues $\exists\delta_1 > 0$ tal que si $0 \leq x_0 - x < \delta_1$, entonces:

$$\left| D^-\varphi(x_0) - \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{x_0 - x} \right| < M_1,$$

por lo que:

$$\left| \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{x_0 - x} \right| - |D^-\varphi(x_0)| < M_1,$$

lo cual implica que:

$$\left| \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{x_0 - x} \right| < 2M_1.$$

b) Y también $\exists\delta_2 > 0$ tal que si $0 \leq x - x_0 < \delta_2$, entonces:

$$\left| D^+\varphi(x_0) - \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \right| < M_1,$$

por lo que:

$$\left| \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{x_0 - x} \right| - |D^-\varphi(x_0)| < M_1,$$

lo cual implica que:

$$\left|\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{x_0-x}\right| < 2M_1.$$

Sea $M = 2M_1$ y $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. $\square$

Observese que se ha probado que φ satisface una condición de Lipchitz de orden 1 en intervalos cerrados propios.

3.6 LEMA. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa no constante, entonces existen $m, n \in \mathbb{R}$ tales que $\varphi(x) \geq mx + n$ $\forall x \in \mathbb{R}$ con $m \neq 0$. (La recta con ecuación $y = mx + n$, se llama una **recta soporte** para φ).

DEMOSTRACIÓN. Como φ no es constante, entonces $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

CASO A. $(\varphi(a) < \varphi(b))$

Entonces:

$$0 < \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} \leq D^-\varphi(b) \leq D^+\varphi(b).$$

Además

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(b)}{x-b} \geq D^+\varphi(b) \qquad (\forall x > b)$$

y

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(b)}{x-b} \leq D^-\varphi(b) \leq D^+\varphi(b). \qquad (\forall x < b)$$

En ambos casos $\varphi(x) \geq D^+\varphi(b)(x-b)+\varphi(b)$. En este caso elíjase $m = D^+\varphi(b) > 0$ y $n = \varphi(b) - b \cdot D^+\varphi(b)$.

CASO B. $(\varphi(a) < \varphi(b))$

Entonces:

$$0 > \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} \geq D^+\varphi(a) \geq D^-\varphi(a).$$

Además

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} \leq D^-\varphi(a) \qquad (\forall x < a)$$

y

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} \geq D^+\varphi(a) \geq D^-\varphi(a). \qquad (\forall x > a)$$

En ambos casos $\varphi(x) \geq D^-\varphi(a)(x-a)+\varphi(a)$. En este caso elíjase $m = D^-\varphi(a) < 0$ y $n = \varphi(a) - a \cdot D^-\varphi(a)$. $\square$

3.7 LEMA. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa, entonces $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que: $\forall x > M$, φ es no decreciente o φ es no creciente (i.e. φ es monótona).

DEMOSTRACIÓN.

CASO A. $(\nexists x > 0$ tal que $\varphi(0) \leq \varphi(x))$

Se afirma que φ es no creciente para $x > 0$. En efecto, supóngase que $\exists x_1 < x_2$ mayores que cero tales que $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$. Sea $x > x_2 > 0$, entonces por convexidad de φ:

$$\varphi(x) \geq \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_2)+\varphi(x_2)$$

y para

$$x \geq \frac{\varphi(0)-\varphi(x_2)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}(x_2-x_1)+x_2 \geq x_2$$

$\varphi(x) \geq \varphi(0)$, lo que contradice nuestra hipótesis. De donde debe tenerse necesariamente que $\varphi(x_2) \leq \varphi(x_1)$.

CASO B. $(\exists x_0 > 0$ tal que $\varphi(0) \leq \varphi(x_0))$

Afirmación φ es no decreciente para $x \geq x_0$. En efecto, sean $x_0 \leq x_1 \leq x_2$ entonces por convexidad de φ:

$$\frac{\varphi(x_1)-\varphi(0)}{x_1} \leq \frac{\varphi(x_2)-\varphi(0)}{x_2},$$

entonces:

$$\varphi(x_1)-\varphi(0) \leq \frac{x_1}{x_2}(\varphi(x_2)-\varphi(0)) \leq \varphi(x_2)-\varphi(0),$$

pues $\frac{x_1}{x_2} \leq 1$, de donde $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$. $\square$

3.8 LEMA (ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONVEXAS).

(a) Sea $\{\varphi_\alpha\}$ una colección de funciones convexas $(\varphi_\alpha : (a,b) \to \mathbb{R})$, entonces $\sup \varphi_\alpha = \varphi$ es convexa.

(b) Sean $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones convexas y $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$, entonces φ es convexa.

(c) Sean φ convexa en (a,b). ψ convexa, no decreciente y cuyo dominio está contenido en el rango de φ, entonces $\psi \circ \varphi$ es convexa en (a,b).

(d) Sea $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ positiva. Si $\log \varphi$ es convexa, entonces φ es convexa.

(e) Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $\varphi : I \to \mathbb{R}$ una función convexa, entonces $\varphi \in \mathrm{Lip}_1([a,b])$, para todo subintervalo cerrado $[a,b]$ de I.

DEMOSTRACIÓN.

(a) Sean $c, d \in (a,b)$ y $t \in (0,1)$. Hay que demostrar que $\varphi(tc + (1-t)d) \leq t\varphi(c) + (1-t)\varphi(d)$. Como $\forall\alpha$ φ_α es convexa, entonces:

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(tc + (1-t)d) &\leq t\varphi_\alpha(c) + (1-t)\varphi_\alpha(d)\\ &\leq t\varphi(c) + (1-t)\varphi(d) \qquad (\forall\alpha)\end{aligned}$$

entonces:

$$\varphi(tc + (1-t)d) \leq t\varphi(c) + (1-t)\varphi(d)$$

(b) Sean $c, d \in (a,b)$ y $t \in (0,1)$ entonces

$$\varphi_n(tc + (1-t)d) \leq t\varphi_n(c) + (1-t)\varphi_n(d) \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

entonces:

$$\begin{aligned}\varphi(tc + (1-t)d) &= \lim_{n\to\infty} \varphi_n(tc + (1-t)d)\\ &\leq \lim_{n\to\infty} (t\varphi_n(c) + (1-t)\varphi_n(d))\\ &= \lim_{n\to\infty} t\varphi_n(c) + (1-t) \lim_{n\to\infty} \varphi_n(d))\\ &= t\varphi(c) + (1-t)\varphi(d)\end{aligned}$$

(c) Como φ es convexa $\varphi(tc + (1-t)d) \leq t\varphi(c) + (1-t)\varphi(d)$. Como ψ es no decreciente:

$$\psi(\varphi(tc + (1-t)d)) \leq \psi(t\varphi(c) + (1-t)\varphi(d))$$

y como ψ es convexa:

$$\psi \circ \varphi(tc + (1-t)d) \leq t\psi \circ \varphi(c) + (1-t)\psi \circ \varphi(d)$$

(d) Sean $c, d \in (a, b)$, $t \in (0, 1)$ y φ tales que $\log \varphi$ es convexa en (a, b), entonces:

$$\log \varphi(tc + (1-t)d) \leq t \log \varphi(c) + (1-t) \log \varphi(d)$$

entonces:

$$\begin{aligned}\varphi(tc + (1-t)d) &\leq \exp[t \log \varphi(c) + (1-t) \log \varphi(d)] \\ &= [\varphi(c)]^t [\varphi(d)]^{(1-t)}.\end{aligned}$$

Y como la media geométrica es menor que la media aritmética, $[\varphi(c)]^t[\varphi(d)]^{(1-t)} \leq t\varphi(c) + (1-t)\varphi(d)$, de donde:

$$\varphi(tc + (1-t)d) \leq t\varphi(c) + (1-t)\varphi(d).$$

(e) Como $D^+\varphi(a) \leq \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \frac{\varphi(b)-\varphi(y)}{b-y} \leq D^-\varphi(b)$ $\forall a < x < y < b$. Sea $M = \max\{|D^+\varphi(a)|, |D^-\varphi(b)|\}$. Entonces: $-M \leq -|D^+\varphi(a)| \leq D^+\varphi(a) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq D^-\varphi(b) \leq |D^-(b)| \leq M$. $\forall a < x < y < b$. Por lo que: $\left|\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}\right| \leq M$. Entonces: $\varphi \in \mathrm{Lip}_1([a, b])$. □

3.9 Observación.

(a) En el caso (c) del lema 3.8, no basta con que ψ sea convexa, debe ser además no decreciente, v.gr. si $\psi(x) = -x$ y $\varphi(x) = x^2$, $\psi \circ \varphi(x) = -x^2$ on es convexa, aún cuando ψ y $\varphi(x)$ lo son, pues ψ es decreciente.

(b) Para ver que el recíproco del caso (d) del lema 3.8 considérese $\varphi(x) = x^2$, la cual es convexa y sin embargo $\log \varphi(x) = 2\log(x)$ no lo es.

A continuación se proporcionarán dos pruebas de la desigualdad de Jensen. La primera apela al teorema de Taylor y requiere que la función convexa posea segunda derivada positiva. La segunda prueba no requiere más que el hecho de que la función en cuestión se convexa. A pesar de que la segunda prueba es más general, no da condiciones exactas para la igualdad, cosa que la primera si, por eso resulta ser útil.

3.10 Teorema (Desigualdad de Jensen, primera versión). Sean $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, (X, S, ν) un espacio de probabilidad, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\alpha < f(x) < \beta$

(c.d. rel. ν) y $\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi''(t) > 0\ \forall t \in (\alpha, \beta)$ y $\int \varphi \circ f\, d\nu < +\infty$. Entonces

$$\varphi\left(\int f\, d\nu\right) \leq \int \varphi(f)\, d\nu$$

con igualdad ssi $f \equiv C$ ($C \in \mathbb{R}$).

DEMOSTRACIÓN. Nótese que $\int \varphi(f)\, d\nu$ tiene sentido pues φ es continua (entonces es Borel-medible) y f es medible.

CASO A. $(\int f\, d\nu < +\infty)$

En tal caso $f(x) < +\infty$ (c.d. rel. ν).

Sea $J = \int f\, d\nu < +\infty$, entonces $\alpha < J < \beta$. Sea $x \in X$ tal que $f(x) < +\infty$. Aplicando el desarrollo de Taylor, hasta el segundo término, a φ alrededor de J. se tiene que:

$$\varphi(f(x)) = \varphi(J) + (f(x) - J)\varphi'(J) + \frac{1}{2}(f(x) - J)^2\varphi''(\mu)$$

con μ entre $f(x)$ y J y por lo tanto $\alpha < \mu < \beta$. Integrando ambos lados resulta:

$$\int \varphi(f) = \varphi\left(\int f\, d\nu\right) + \frac{1}{2}\varphi''(\mu) \int (f(x) - J)^2\, d\nu$$

y así que $\int \varphi(f)\, d\nu \geq \varphi(\int f\, d\nu)$ con igualdad ssi $\varphi''(\mu) \int (f(x) - J)^2\, d\nu = 0$, pero $\varphi''(\mu) > 0$ pues $\mu \in (\alpha, \beta)$. Por lo tanto la igualdad ocurre ssi $f \equiv J$.

CASO B. $(\int f\, d\nu = +\infty)$

Sea $f_n = f \wedge n$, entonces por el caso anterior

$$\varphi\left(\int f_n\, d\nu\right) \leq \int \varphi(f_n)\, d\nu. \tag{3.6}$$

Por el Lema 3.7 φ es monótona en una vecindad de $+\infty$ por lo tanto a partir de una $N \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ entonces $F_n = \varphi(f_n)$ es una sucesión monótona. Si es monótona creciente por el T.C.M.:

$$\lim_{n\to\infty} \int F_n\, d\nu = \int \lim_{n\to\infty} F_n\, d\nu.$$

Si es monótona decreciente, como $\varphi(f) \leq F_n \leq F_N$ y $\varphi(f), F_N \in \mathcal{L}_1$, se sigue del T.C.D.L. que:

$$\lim_{n\to\infty} \int F_n \, d\nu = \int \lim_{n\to\infty} F_n \, d\nu,$$

i.e

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi(f_n) \, d\nu = \int \lim_{n\to\infty} \varphi(f_n) \, d\nu = \int \varphi(f) \, d\nu < +\infty.$$

Por el T.C.M. y que φ es finalmente monótona $\varphi(+\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)$ existe siendo o no finito. Pasando al límite en (3.6) resulta que:

$$\varphi(+\infty) = \varphi\left(\int f \, d\nu\right) \leq \int \varphi(f) < +\infty.$$

Ahora se demostrará el caso de la igualdad.

($\Leftarrow$) Supóngase que $f \equiv C$. Entonces $\exists E \in S$ con $\nu(X - E) = 0$ tal que $f(x) = C \ \forall x \in E$, entonces: $\varphi\left(\int f \, d\nu\right) = \varphi\left(\int_E f \, d\nu\right) = \varphi(c) = \int_E \varphi(f) \, d\nu$.

($\Rightarrow$) Suóngase que

$$\varphi(+\infty) = \varphi\left(\int f \, d\nu\right) = \int \varphi(f) \, d\nu,$$

por lo que $\int (\varphi(+\infty) - \varphi(f)) \, d\nu = 0$ como φ es finalmente monótona, entonces $\varphi(+\infty) - \varphi(f)$ es no negativa o no positiva $\forall x \in X$, con lo cual $\varphi(+\infty) \equiv \varphi(f)$.

CASO C. $\quad \left(\int f \, d\nu = -\infty\right)$

Se demuestra de manera análoga al caso anterior. $\square$

3.11 DISCUSIÓN. En el teorema anterior no es posible que $\int f \, d\nu$ no exista y que $\int \varphi(f) \, d\nu < +\infty$. En efecto, supongamos que $\int \varphi(f) \, d\nu < +\infty$ y que $\int f \, d\nu$ no existe. Esto último implica que $\int f^+ \, d\nu = +\infty$, entonces:

$$\int_A \varphi(f) \, d\nu < +\infty \qquad \forall A \in S. \tag{3.7}$$

Por el lema 3.6 $\exists m \neq 0, n \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) \geq mx + n$. Supóngase que $m > 0$, entonces:

$$\begin{aligned}\int_{\{f(x)>0\}} \varphi(f)\,d\nu &= \int_{\{f^+(x)>0\}} \varphi(f^+)\,d\nu \\ &\geq m \int_{\{f^+(x)>0\}} f^+\,d\nu + n \cdot \nu(\{f^+(x) > 0\}).\end{aligned}$$

Pero $\int_{\{f^+(x)>0\}} f^+\,d\nu = +\infty$. $\therefore$ $\int_{\{f(x)>0\}} \varphi(f)\,d\nu = +\infty$, lo que contradice a (3.7). Análogamente si $m < 0$. $\square$

Si tomamos $\varphi(t) = -\log t$ entonces $\exp\left(\int \log f\right) \leq \int f\,d\nu$, i.e. $\|f\|_0 \leq \|f\|_1$ y para $\varphi(t) = t\log t$ ($\varphi''(t) > 0\ \forall t > 0$) resulta que $\forall f \geq 0$

$$\int f\,d\nu \leq \exp\left[\frac{\int f \log f\,d\nu}{\int f\,d\nu}\right] \tag{3.8}$$

con igualdad ssi $f \equiv C$.

3.12 TEOREMA (DESIGUALDAD DE JENSEN, SEGUNDA VERSIÓN). Sean φ convexa (X, S, ν) un espacio de probabilidad y $f \in \mathcal{L}_1(\nu)$, entonces:

$$\int \varphi(f)\,d\nu \geq \varphi\left(\int f\,d\nu\right)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea x_0 fija, sea $\lambda \in [D^-\varphi(x_0), D^+\varphi(x_0)]$ entonces $\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \lambda(x - x_0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Si $M = \int f\,d\nu$ y $\lambda \in [D^-\varphi(M), D^+\varphi(M)]$ tenemos: $\varphi(f) \geq \varphi(\int f\,d\nu) + \lambda(f - \int f\,d\nu)$ e integrando se obtiene que $\int \varphi(f) \geq \varphi(\int f\,d\nu)$. $\square$

Para la desigualdad de Jensen en su forma general no hay condiciones para la igualdad, como lo ilustra el siguiente ejemplo:

3.13 EJEMPLO. Sean $X = \mathbb{R}$, $S = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\nu = \lambda$ (la medida de Lebesgue) y $\varphi(x) = |x|$. Sea $f \in M^+(X, S)$, entonces $\int f\,d\lambda \geq 0$, entonces: $\varphi(\int f\,d\lambda) = \int f\,d\lambda = \int \varphi(f)\,d\lambda$ y sin embargo f puede bien no ser una función constante (c.d. rel. λ).

A continuación estableceremos condiciones necesarias y suficientes para que una función sea convexa.

3.14 LEMA. Sea $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$, continua. Entonces φ es convexa ssi no existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\varphi(x) + \alpha x + \beta$ tenga un máximo relativo propio[2] en el interior de (a,b).

DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$) Supóngase que φ convexa, como la suma de convexas es convexa, entonces $\psi(x,\alpha,\beta) = \varphi(x) + \alpha x + \beta$ es convexa $\forall \alpha, \beta$ fijas. Supongamos que $\exists \alpha, \beta$ tales que $\psi(x,\alpha,\beta)$ tiene un máximo relativo propio en el interior de (a,b), entonces $\exists a < a' < b' < b$ y $x_0 \in (a',b')$, tal que $\psi(x_0) > \psi(x)$ $\forall x \in [a',b'] - \{x_0\}$. Por lo que

$$\frac{\psi(x_0) - \psi(a')}{x_0 - a'} > \frac{\psi(b') - \psi(a')}{b' - a'}.$$

Lo que contradice la convexidad de ψ.

($\Leftarrow$) Supóngase que φ no es convexa, entonces $\exists x_0$ y $a \leq a' < b' \leq b$ tal que $\varphi(x_0) > \ell(x_0)$, con ℓ la ecuación de la recta que une $(a', \varphi(a'))$ con $(b', \varphi(b'))$. Por continuidad $\exists (a_1, b_1) \subset (a', b')$ tal que $x_0 \in (a_1, b_1)$, $(\varphi - \ell)(x) > 0$ $\forall x \in (a_1, b_1)$ y tal que $\varphi(a_1) = \varphi(b_1) = 0$. Como $\varphi - \ell$ es continua, entonces alcanza su máximo en $[a_1, b_1]$ y como $\varphi - \ell > 0$ en (a_1, b_1) y $\varphi(a_1) = \varphi(b_1) = 0$, entonces $\varphi - \ell$ alcanza su máximo en (a_1, b_1). $\square$

La condición de que φ sea continua es necesaria como se verá posteriormente en la observación 3.24.

3.15 COROLARIO. Una condición necesaria y suficiente para que una función $\varphi(x)$ continua sea convexa en (a,b) es que $\overline{D}_2\varphi(x) \geq 0$ en dicho intervalo.

DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$) Sean $x \in (a,b)$ y $h > 0$ tal que $(x-h, x+h) \subset (a,b)$. Entonces $\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x) = \{\varphi(x+h) - \varphi(x)\} - \{\varphi(x) - \varphi(x-h)\} \geq 0$, pues φ es convexa. Entonces $\overline{D}_2\varphi(x) > 0$.

($\Leftarrow$)

CASO A. ($\overline{D}_2\varphi > 0$ en (a,b))

Si φ no es convexa, entonces $\psi(x) = \varphi(x) + \alpha_0 x + \beta_0$ tiene un máximo relativo propio en $x_0 \in (a,b)$, para ciertas α_0, β_0. Por lo que:

$$\psi(x_0 + h) + \psi(x_0 - h) - 2\psi(x_0) = \varphi(x_0 + h) + \varphi(x_0 - h) - 2\varphi(x_0) < 0$$

---

[2] Se entiende por máximo relativo propio de φ, un punto x_0 tal que $\exists V(x_0) \subset (a,b)$ tal que $\varphi(x_0) > \varphi(x)$ $\forall x \in V(x_0) - \{x_0\}$.

de donde:

$$\overline{D}_2\varphi(x_0) \leq 0.$$

Lo que contradice las hipótesis.

CASO B. $(\overline{D}_2 \geq 0$ en (a,b)

Considérense a las funciones $\varphi_n(x) = \varphi(x) + \frac{x^2}{n}$. Entonces $\overline{D}_2\varphi_n(x) = \overline{D}_2\varphi(x) + \frac{2}{n} > 0$. Por el caso (1) φ_n es convexa, entonces $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ es convexa. □

3.16 TEOREMA (CARACTERIZACIÓN INTEGRAL PARA LAS FUNCIONES CONVEXAS). Una condición necesaria y suficiente para que φ sea convexa en (a,b) es que:

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \varphi(t)\,dt \tag{3.8}$$

siempre que $a \leq x - h < x < x + h \leq b$.

($\Rightarrow$) Supóngase que φ es convexa, entonces $\varphi(x) \leq \frac{\varphi(x+h)+\varphi(x-h)}{2}$, por lo que:

$$\begin{aligned}
2h\varphi(x) = 2h\int_{-h}^{h} \varphi(x)\,dt &\leq \frac{1}{2}\int_{-h}^{h} \varphi(x+t) + \varphi(x-t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-h}^{h} \varphi(x+t)\,dt + \int_{-h}^{h} \varphi(x-t)\,dt\right] \\
&\frac{1}{2}\left[\int_{x-h}^{x+h} \varphi(u)\,du - \int_{x+h}^{x-h} \varphi(u)\,du\right] \\
&= \int_{x-h}^{x+h} \varphi(u)\,du.
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Supóngase que φ satisface (3.8), sea $\psi(x) = \varphi(x) + \alpha x + \beta$ y supóngase que x_0 es un máximo relativo propio de ψ. Note que ψ también satisface (3.8) en x_0, de donde $\exists h$ suficientemente pequeña tal que $\psi(x_0) > \psi(x)$ $\forall 0 < |x - x_0| < h$. Por lo que $\int_{x_0-h}^{x_0+h} \psi(t)\,dt < 2h\psi(x_0)$, lo cual contradice el hecho de que ψ también satisfaga (3.8). Por lo tanto no existen α, β tales que $\psi(x)$ tenga un máximo relativo propio, por lo que φ es convexa. □

3.17 TEOREMA (REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE LAS FUNCIONES CONVEXAS). Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función. f es convexa ssi es la integral de una función no decreciente.

DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$) Si f es convexa, entonces por el teorema 3.8 inciso (e): $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ está uniformemente acotado para $x, x+h \in [a', b'] \subsetneq (a,b)$, de donde f es absolutamente continua en $[a', b']$. Por lo que $f(x) = f(a') + \int_{a'}^{x} f'(t)\,dt$ en $[a', b']$ [3].Sea $a_n = a + 1/n$ y $x \in [a,b]$ fija, entonces $\exists N > 0$ tal que si $n \geq N$, entonces $x > a_n$.. Si $I_n = [a_n, x]$, entonces $f(x) = f(a_n) + \int_{a_n}^{x} f'(t)\,dt$. Pasando al límite, puesto que f es continua $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$.

($\Leftarrow$) Sean φ una función no decreciente en (a,b) y $c \in (a,b)$ y $f(x) = f(c) + \int_c^x \varphi(t)\,dt$. Sea (a', b') un subintervalo de (a,b). Sea $x \in (a', b')$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\int_x^{b'} \varphi(t)\,dt}{b'-x} &\geq \frac{\int_x^{b'} \varphi(x)\,dt}{b'-x} \\ &= \varphi(x) = \frac{\int_{a'}^{x} \varphi(x)\,dt}{x-a'} \geq \frac{\int_{a'}^{x} \varphi(t)\,dt}{x-a'}\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\left(\int_x^{b'} \varphi(t)\,dt + \int_{a'}^{x} \varphi(t)\,dt\right)(x-a') \geq \left(\int_{a'}^{x} \varphi(t)\,dt\right)[(x-a') + (b'-x)].$$

O bien:

$$\frac{1}{b'-a'}\int_{a'}^{b'} \varphi(t)\,dt \geq \frac{1}{x-a'}\int_{a'}^{x} \varphi(t)\,dt$$

i.e.:

$$\frac{f(b')-f(a')}{b'-a'} \geq \frac{f(x)-f(a')}{x-a'},$$

es decir f es convexa. $\square$

---

[3] Ver [Ro].

3.2 Convexidad de Punto Medio

En esta sección se estudiarán brevemente una clase más general de funciones que la clase de las funciones convexas, y son las llamadas funciones convexas de punto medio. Desde la definición puede apreciarse que dicha clase de funciones está relacionada con las funciones convexas. No obstante dada una base de Hamel de $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ (i.e. asumiendo el axioma de elección), puede construirse una función que sea convexa de punto medio pero no convexa. Sin embargo basta que una función convexa de punto medio sea continua o acotada en algún intervalo o aún acotada en algún conjunto de medida positiva o que sea Lebesgue-medible para que sea convexa.

Por lo pronto se establece la siguiente definición:

3.18 DEFINICIÓN. Sea $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$, se dice que φ es **convexa de punto medio** si $\forall x, y \in (a,b)$:

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}.$$

3.19 TEOREMA. Sea $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función convexa de punto medio y continua en (a,b), entonces φ es convexa.

DEMOSTRACIÓN. Si $n = 2^m$ $(m \in \mathbb{N})$, puede mostrarse por inducción que

$$\varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)}{n}. \tag{3.9}$$

Para el caso en que n no es potencia de dos sean $M = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, m el mínimo entero de la forma 2^k tal que $n \leq m$. Definimos y_i, con $i = 1,\ldots,m$ como sigue $y_i = x_i$ con $\forall i \leq n$ y $y_i = M$ $\forall i > n$, entonces por la desigualdad (3.9):

$$\begin{aligned}
\varphi(M) &= \varphi\left(\frac{nM+(m-n)M}{m}\right) = \varphi\left(\frac{y_i+\cdots+y_m}{m}\right) \\
&\leq \frac{\varphi(y_1)+\cdots+\varphi(y_m)}{m} \\
&= \frac{\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)+(m-n)\varphi(M)}{m}
\end{aligned}$$

y despejando a $\varphi(M)$:

$$\varphi(M) \leq \frac{\varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_n)}{n} \tag{3.10}$$

Sean $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}^+$ tales que $q_1 + q_2 = 1$, supóngase que $q_1 = \frac{m_1}{n}$ y $q_2 = \frac{m_2}{n}$. con $m_1, m_2, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \neq 0$, entonces $m_1 + m_2 = n$ por la desigualdad anterior:

$$\begin{aligned} \varphi(q_1x_1 + q_2x_2) &= \varphi\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{n}\right) \\ &\leq \frac{m_1\varphi(x_1) + m_2\varphi(x_2)}{n} \\ &= q_1\varphi(x_1) + q_2\varphi(x_2) \end{aligned}$$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tales que $\alpha + \beta = 1$ y $(a_n), (b_n)$ tales que $a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$ $(n \to \infty)$, $a_n, b_n \in \mathbb{Q}^+$, entonces $\varphi(a_nx_1 + b_nx_2) \leq a_n\varphi(x_1) + b_n\varphi(x_2)$. Por continuidad:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{n\to\infty} \varphi(a_nx + b_nx_2) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (a_n\varphi(x_1) + b_n\varphi(x_2)) \\ &= \alpha\varphi(x_2) + \beta\varphi(x_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto φ es convexa. □

3.20 Observación. Si $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$, se puede ver del teorema anterior que basta con el hecho de que φ sea convexa de punto medio, para que satisfaga la siguiente desigualdad:

$$\varphi(px_1 + qx_2) \leq p\varphi(x_1) + q\varphi(x_2)$$

con $p, q \in \mathbb{Q}^+$ tales que $p + q = 1$ y $x_1, x_2 \in (a, b)$.

3.21 Lema. Sea $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ convexa de punto medio y acotada en algún intervalo $I \subseteq (a, b)$. Entonces φ es continua en todo el intervalo (a, b).

Demostración.

Primera Parte (φ es acotada en todo intervalo abierto interior de (a, b).

Supóngase que $I = (c,d)$ y que M es una cota para φ en I. Sea $a < a_1 < c$. Se demostrará que φ es acotada en (a_1, c).

Sea $x \in (a_1, c)$, por la propiedad Arquimediana $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que

$$x - a_1 < m(d-c), \tag{3.11}$$

y por la misma razón $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1\left(\frac{x-a_1}{m}\right) > c - a_1$. Sea n el mínimo de tales n_1. Por construcción

$$\frac{n}{m}(x-a_1) > c - a_1, \tag{3.12}$$

Obviamente $n > m$ pues: $x - a_1 < c - a_1$, además por ser n el primer natural con tal propiedad entonces $\frac{n-1}{m}(x-a_1) \leq c - a_1$ y por (3.11)

$$\frac{n}{m}(x-a_1) = \frac{1}{m}(x-a_1) + \frac{n-1}{m}(x-a_1) < (d-c) + (c-a_1) = d - a_1. \tag{3.13}$$

Por (3.12) y (3.13) $c < a_1 + \frac{n}{m}(x-a_1) < d$. Sea $\xi = a_1 + \frac{n}{m}(x-a_1) \in I$, entonces:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi\left(\frac{m\xi + (n-m)a_1}{n}\right)\\ &\leq \frac{m}{n}\varphi(\xi) + \frac{n-m}{n}\varphi(a_1) \leq \frac{m}{n}M + \frac{n-m}{n}\varphi(a_1)\\ &\leq \max\{M, \varphi(a_1)\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto φ es acotada en (a_1, c) $\forall a_1 \in (a,c)$. Análogamente se demuestra que φ es acotada en (c, b_1) $\forall b_1 \in (d,b)$. Lo cual implica que φ es acotada en todo subintervalo abierto **interior** de (a,b).

Segunda Parte (φ es continua en (a,b)).

Sea $x \in (a,b)$, entonces existe un intervalo I interior a (a,b) tal que $x \in I$, por la Primera Parte $\exists M > 0$ cota de φ en I. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ $n > m$ y $\varphi \neq 0$ con $|\delta|$ lo suficientemente pequeño para que $x + n\delta \in I$. Entonces:

$$\begin{aligned}\varphi(x+m\delta) &= \varphi\left(\frac{m(x+n\delta) + (n-m)x}{n}\right)\\ &\leq \frac{m}{n}\varphi(x+n\delta) + \frac{n-m}{n}\varphi(x)\end{aligned}$$

o bien

$$\frac{\varphi(x+n\delta) - \varphi(x)}{n} \geq \frac{\varphi(x+m\delta) - \varphi(x)}{m} \tag{3.14}$$

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

reemplazando δ por $-\delta$ en (3.14) y multiplicando por -1:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x-m\delta)}{m} \geq \frac{\varphi(x)-\varphi(x-n\delta)}{n} \tag{3.15}$$

además por convexidad de φ:

$$\frac{\varphi(x+m\delta)-\varphi(x)}{m\delta} \geq \frac{\varphi(x)-\varphi(x-m\delta)}{m\delta} \tag{3.16}$$

por (3.14), (3.15) y (3.16) con $m = 1$ resulta que:

$$\frac{\varphi(x+n\delta)-\varphi(x)}{n} \geq \varphi(x+\delta)-\varphi(x) \geq \varphi(x)-\varphi(x-\delta) \geq \frac{\varphi(x)-\varphi(x-n\delta)}{n},$$

y dado que $\varphi(y) \leq M\ \forall y \in I$, entonces:

$$\frac{M-\varphi(x)}{n} \geq \varphi(x+\delta)-\varphi(x) \geq \varphi(x)-\varphi(x-\delta) \geq \frac{\varphi(x)-M}{n}.$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{M-\varphi(x)}{n} < \varepsilon$ y $\exists \rho > 0$ tal que si $|\delta| < \rho$, entonces $x \pm n\delta \in I$. De donde $|\varphi(x+\delta)-\varphi(x)| < \frac{M-\varphi(x)}{n} < \varepsilon$. Por lo tanto ε es continua en x. $\square$

3.22 OBSERVACIÓN. Si una función $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ es convexa de punto medio y es discontinua, entonces es no acotada en todo subintervalo de (a,b). Más aún ni siquiera es acotada en algún conjunto de medida positiva contenido en (a,b). Pues de lo contrario lo sería en algún conjunto abierto de medida positiva, en virtud del teorema de Steinhauss.

3.23 TEOREMA. Sea $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ convexa de punto medio y Lebesgue-medible, entonces φ es convexa (y por lo tanto continua)

DEMOSTRACIÓN. Sean $A > 0$, $T : (-A,A) \to (a,b)$ una transformación afín. $g = f \circ T : (-A,A) \to \mathbb{R}$, es convexa de punto medio, pues si $T(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\forall x, y \in (-A,A)$:

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\alpha\left(\frac{x+y}{2}\right)+\beta\right) = f\left(\frac{\alpha x+\beta+\alpha y+\beta}{2}\right)$$
$$\leq \frac{f(\alpha x+\beta)+f(\alpha y+\beta)}{2} = \frac{g(x)+g(y)}{2}.$$

Además g es Lebesgue-medible, pues la σ-álgebra de Lebesgue-medibles es invariante bajo transformaciones afines. Por lo que $\exists E$ medible contenido en $(-A, A)$ con $\nu(E) > 0$, $E = -E$ (simétrico) y tal que g es acotada en E. (v.gr.: Sea $F_n = \{x \in (-A, A) : |g(x)| \leq n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, entonces $\exists n_1$ tal que $\nu(F_{n_1}) > 0$. Como $-F_{n_1} = \{-x : x \in F_{n_1}\}$, tiene medida positiva $\exists n_2$ tal que $\{x \in (-F_{n_1}) : |g(x)| \leq n_2\} = E_1$ tiene medida positiva. Entonces $E = (E_1) \cup (-E_1)$ satisface los requisitos y $|g(x)| \leq \max\{n_1, n_2\}$ en E).

Por el teorema de H. Steinhauss (ver [GG] (77)) $\exists \delta > 0$ tal que $(-2\delta, 2\delta) \subset E - E = E + E$.

Sea $t \in (-\delta, \delta)$ arbitraria, entonces $\exists e, e' \in E$ tales que $t = \frac{2t}{2} = \frac{e+e'}{2}$. Así pues por la convexidad de punto medio tenemos:

$$|g(t)| = \left| g\left(\frac{2t}{2}\right) \right| \leq \frac{|g(e)| + |g(e')|}{2} \leq \max\{n_1, n_2\}$$

y por el lema anterior g es continua en $(-A, A)$, por lo tanto g es convexa en $(-A, A)$ y φ es convexa en (a, b). $\square$

Los teoremas anteriores prueban que una función convexa de punto medio que no sea convexa (continua) es extremadamente irregular. Otras demostraciones de este hecho vienen en [Bl], [Si1] y [Si2].

Para construir algunos ejemplos apelamos a la existencia de una base de Hamel $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ (i.e. asumimos el lema de Zorn). Como $\mathbb{B}$ es no-numerable, $\mathbb{B}$ tiene al menos un punto de acumulación x_0. Sea (b_n) una sucesión de elementos en $\mathbb{B}$ tales que $b_n \to x_0$. Definimos $f : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ poniendo:

$$f(b) = \begin{cases} n, & \text{si } b = b_n; \\ 1, & \text{si } b \neq b_n. \end{cases}$$

y extendemos linealmente a f sobre todo $\mathbb{R}$. La función así obtenida resulta ser aditiva y en consecuencia convexa de punto medio, pero obviamente es discontinua en x_0.

3.24 OBSERVACIÓN. En el lema 3.14 es necesario que φ sea continua, pues bien puede tenerse que $\nexists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\varphi(x) + \alpha x + \beta$ tenga un máximo relativo propio, y sin embargo no sea convexa. Tómese por ejemplo, como φ la f que se acaba de construir con la base de Hamel de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$. Claramente para dicha función no existen α, β tales que $\varphi(x) + \alpha x + \beta$ tiene un máximo relativo propio, pero φ no es continua y por tanto no es convexa.

CAPITULO IV

Espacios de Birnbaum-Orlicz

A continuación se estudiará una generalización de los espacios $\mathcal{L}_p$, que son los llamados espacios de Birnbaum-Orlicz $\mathcal{L}_\Phi$. Se definirá una norma en tales espacios y se generalizarán algunas desigualdades importantes (como es el caso de la desigualdad de Hölder).

La mayoría de los resultados que se enuncian en este capítulo dependen de la desigualdad de Young, así es que a continuación proporcionamos una demostración de tal desigualdad.

4.1 DEFINICIÓN (COMPLEMENTARIAS EN EL SENTIDO DE YOUNG). Sea $\varphi : [0, a] \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente tal que $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = +\infty$ y $\varphi(0) = 0$. Sea ψ su inversa. Las funciones Φ, Ψ definidas por $\Phi(u) = \int_0^u \varphi(t)\, dt$ y $\Psi(u) = \int_0^u \psi(t)\, dt$ se llaman **complementarias en el sentido de Young**.

Necesitaremos el siguiente resultado cuya prueba bien conocida omitiremos[1].

4.2 LEMA. Sea $\varphi : [0, a] \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente. $\psi = \varphi^{-1}$. Sean

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y) : y > \varphi(x)\} \\ E_2 &= \{(x, y) : \psi(y) < x\} \\ E_3 &= \{(x, y) : \varphi(x) = y\}. \end{aligned}$$

Entonces E_i es Lebesgue-medible $i = 1, 2, 3$, $\lambda(E_3) = 0$ y $[0, a] \times [0, \varphi(a)] = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ (unión ajena).

---

[1] Ver [Za].

El teorema que viene a continuación demuestra la desigualdad de Young, indispensable para el estudio de los espacios de Birnbaum-Orlicz y que tiene una interpretación geométrica muy clara, la cual se ilustra en la figura 4.1.

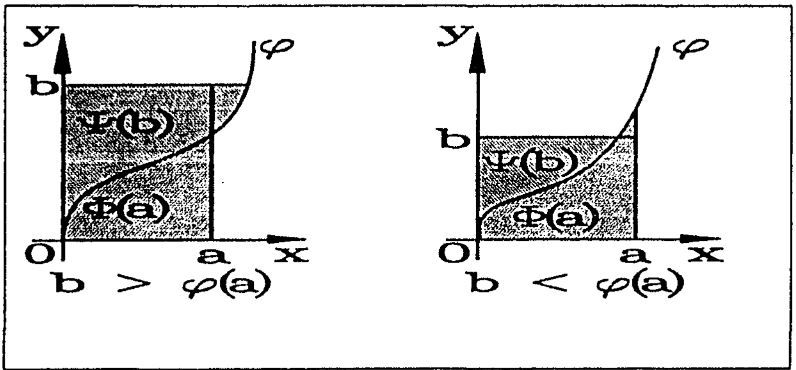

Figura 4.1 Ilustración de la Desigualdad de Young $ab \leq \Phi(a) + \Psi(b)$. Nótese que la misma figura muestra la necesidad de que $b = \varphi(a)$ para que se de la igualdad.

4.3 TEOREMA (DESIGUALDAD DE YOUNG). Sean $\Phi(u)$, $\Psi(u)$ complementarias en el sentido de Young, entonces:

$$ab \leq \Phi(a) + \Psi(b).$$

$\forall a, b \geq 0$, con igualdad ssi $b = \varphi(a)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $D = [0, a] \times [0, b]$, por el lema anterior (lema 4.2): $ab = \lambda(D \cap E_1) + \lambda(D \cap E_2) = \int_D f(u,v)\,du\,dv + \int_D g(u,v)\,du\,dv$, con $f(u,v) = \chi_{E_1}(u,v)$ y $g(u,v) = \chi_{E_2}(u,v)$, por el teorema de Fubini[2]:

$$\int_D f(u,v)\,du\,dv = \int_0^a \int_0^{m(u)} du\,dv,$$

con $m(u) = \min\{b, \varphi(u)\}$. Entonces

$$\int_D f(u,v)\,du\,dv \leq \int_0^a \int_0^{\varphi(u)} du\,dv = \int_0^a \varphi(u)\,du = \varphi(a),$$

[2] Ver [Bal]

con igualdad ssi $b \geq \varphi(a)$.

De la misma manera:

$$\int_D g(u,v)\,du\,dv \leq \psi(b),$$

con igualdad ssi $\psi(b) \leq a$.

Entonces:

$$ab \leq \Phi(a) + \Psi(b),$$

con igualdad ssi $b = \varphi(a)$. □

4.4 DEFINICIÓN. Sea Φ, Ψ complementarias en el sentido de Young. Sea (X, S, μ) un espacio de medida σ-finito y sea

$$\mathcal{L}_{\Phi}^{\dagger} = \{f \in \mathrm{M}^{+}(X,S) : \Phi \circ f \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)\}.$$

Vale la pena hacer notar que $\mathcal{L}_{\Phi}^{\dagger}$ no es un espacio vectorial, pues bien puede tenerse que $f \in \mathcal{L}_{\Phi}^{\dagger}$ y sin embargo $2f \notin \mathcal{L}_{\Phi}^{\dagger}$ debido a que Φ aumente muy rápido. Para esto veamos el siguiente:

4.5 EJEMPLO. Sean $X = (0,1)$, $\varphi(u) = e^{u} - 1$ y $f(t) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

(i) $f \in \mathcal{L}_{\Phi}^{\dagger}$. $\Phi(x) = \int_0^x (e^u - 1)du = e^x - x - 1$, entonces $\int_0^1 \Phi \circ f(t)dt = \frac{1}{2}$

(ii) $2f \notin \mathcal{L}_{\Phi}^{\dagger}$. $2f = \log\left(\frac{1}{t}\right)$, $\Phi \circ f(t) = \frac{1}{t} + \log t - 1 \notin \mathcal{L}_1(0,1)$.

4.6 DEFINICIÓN. Sean Φ, Ψ complementarias en el sentido de Young y sea $\mathcal{L}_{\Phi}$ el conjunto de las funciones $f : X \to \mathbb{R}$, S-medibles tales que:

$$\|f\|_{\Phi} = \sup\{\|fg\|_1 : g \in \mathcal{L}_{\Psi}^{\dagger}, \int_X \Psi \circ g\, d\mu \leq 1\}$$

es finito

$\mathcal{L}_\Phi$ es la generalización de los espacios $\mathcal{L}_p$ que anunciamos. Y como en el caso clásico, funciones medibles que sean esencialmente iguales se considerarán como idénticas.

El siguiente teorema prueba que $\mathcal{L}_\Phi^\dagger \subset \mathcal{L}_\Phi$, y que $\mathcal{L}_\Phi$ es un espacio vectorial normado, cuya norma es $\| \ \|_\Phi$ de la definición 4.6. A dichos espacios se les conoce con el nombre de **espacios de Birnbaum-Orlicz**.

4.7 TEOREMA. Sean (X, S, ν) un espacio de medida σ-finito; Φ, Ψ complementarias en el sentido de Young y $\mathcal{L}_\Phi^\dagger$ como en la definición 4.4. y $\mathcal{L}_\Phi$ como en 4.6. Entonces:

(a) $\mathcal{L}_\Phi^\dagger \subset \mathcal{L}_\Phi$.

(b) $\mathcal{L}_\Phi$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

(c) $\| \ \|_\Phi$ es una norma, en $\mathcal{L}_\Phi$, (identificando f con g si $f \equiv g$)

(d) $(\mathcal{L}_\Phi, \| \ \|_\Phi)$ es de Banach

DEMOSTRACIÓN.

(a) Sea $f \in \mathcal{L}_\Phi^\dagger$, entonces $\int \Phi \circ f \, d\mu < +\infty$. Por la desigualdad de Young:

$$fg \leq \Phi \circ f + \Psi \circ g,$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &\leq \int \Phi \circ f \, d\mu + \int \Psi \circ g \, d\mu \\ &\leq \int \Phi \circ f \, d\mu + 1 < +\infty \end{aligned}$$

$\forall g \in \mathcal{L}_\Psi^\dagger$ tal que $\int \Psi \circ g \, d\mu \leq 1$. Por lo tanto:

$$\|f\|_\Phi \leq \int \Phi \circ f \, d\mu + 1 < +\infty.$$

(b) Para ver que $\mathcal{L}_\Phi$ es un espacio vectorial, basta probar que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ y $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}_\Phi$ se tiene que $f_1 + \alpha f_2 \in \mathcal{L}_\Phi$. En efecto:

$$\begin{aligned} \|(f_1 + \alpha f_2) g\|_1 &\leq \|f_1 g\|_1 + |\alpha| \|f_2 g\|_1 \\ &\leq \|f_1\|_\Phi + |\alpha| \|f_2\|_\Phi < +\infty \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|f_1 + \alpha f_2\|_\Phi \leq \|f_1\|_\Phi + |\alpha|\|f_2\|_\Phi < +\infty.$$

(c) $\| \ \|_\Phi$ es una norma.

(i) $\|f\|_\Phi \geq 0$ y $\|f\|_\Phi = 0$, si $f \equiv 0$ son consecuencias inmediatas de la definición de $\| \ \|_\Phi$.

Supóngase que $\mu(X) < +\infty$ y que $\|f\|_\Phi = 0$. Como Ψ es continua y monótona creciente, $\exists c \in (0, +\infty)$ tal que $\Psi(c) \leq \frac{1}{\mu(X)}$. Sea $g(x) = c$ $\forall x \in X$, entonces $\int_X \Psi \circ g \, d\mu = \int_X \Psi(c) \, d\mu \leq 1$, de donde $g \in \mathcal{L}_\Psi^\dagger$. Como $\|f\|_\Phi = 0$, entonces $0 \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_\Phi = 0$, por lo que $fg \equiv 0$. Por lo que se concluye que $f \equiv 0$.

(ii) Para el caso general, sea $X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$, con $\mu(X_i) < +\infty$. Por el caso finito aplicado a $f_i = f \cdot \chi_{X_i}$ se concluye que $f_i \equiv 0$ $\forall i$, por lo que $f \equiv 0$.

(iii) $\|\alpha f\|_\Phi = |\alpha|\|f\|_\Phi$ es inmediato.

(iv) Falta por comprobar la desigualdad del triángulo.

$$\begin{aligned}
\|f_1 + f_2\|_\Phi &= \sup\{\|(f_1 + f_2)g\|_1 : \int_X \Psi \circ g \, d\mu \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|f_1 g\|_1 + \|f_2 g\|_1 : \int_X \Psi \circ g \, d\mu \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|f_1 g\|_1 : \int_X \Psi \circ g \, d\mu \leq 1\} + \sup\{\|f_2 g\|_1 : \int_X \Psi \circ g \, d\mu \leq 1\} \\
&= \|f_1\|_\Phi + \|f_2\|_\Phi
\end{aligned}$$

(d) Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}_\Phi$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\exists N = N(\varepsilon) > 0$ tal que si $n, m > N$, entonces $\|f_m - f_n\|_\Phi < \varepsilon$. De donde

$$\int_X |f_m - f_n||g| \, d\mu < \varepsilon$$

$\forall g$ tal que $\rho_g \leq 1$ y $m, n > N$ (con $\rho_g(X) = \int_X \Psi \circ g \, d\mu$).

Afirmación: Existe una subsucesión (f_{n_k}) y f tales que $f_{n_k} \to f$ (c.d. rel. μ).

Como μ es σ-finita, escribimos $X = \cup_{k=1}^{\infty} X_k$ (unión ajena), con $\mu(X_k) < +\infty$ $\forall k$.

A continuación hallamos $c_k \in (0,+\infty)$ tal que $c_k\mu(X_k) \leq 1$. Sea $g_k = c_k\chi_{X_k}$, entonces $\int \Psi \circ |g_k|\, d\mu \leq 1$. Si $k = 1$ tenemos:

$$\|(f_n - f_m)\chi_{X_1}\|_1 \leq \frac{1}{c_1}\|f_n - f_m\|_\Phi,$$

entonces $(f_n\chi_{X_1})_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathcal{L}_1(\mu)$ y por la completez de $\mathcal{L}_1(\mu)$ y el teorema de Riesz[3] existe una subsucesión $(f_n^{(1)})$ de $(f_n\chi_{X_1})$ y $f^{(1)} \in \mathcal{L}_1$ con $f^{(1)}(x) = 0$ $\forall x \notin X_1$ tal que $f_n^{(1)}\chi_{X_1} \to f^{(1)}$ (c.d. rel. μ) y en $\mathcal{L}_1$.

Como $\|(f_n^{(1)} - f_m^{(1)})\chi_{X_2}\|_1 \leq \frac{1}{c_2}\|f_n^{(1)} - f_m^{(1)}\|_\Phi$, entonces $(f_n^{(1)}\chi_{X_2})_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathcal{L}_1$ existe una subsucesión $(f_n^{(2)})$ y $f^{(2)} \in \mathcal{L}_2$ y $f^{(2)}(x) = 0$ $\forall x \notin X_2$ tal que $f_n^{(2)}\chi_{X_2} \to f^{(2)}$ (c.d. rel. μ) y en $\mathcal{L}_1$.

Procediendo de este modo y usando el método diagonal de Cantor $(f_n^{(n)})$ es una subsucesión de (f_n) tal que $f_n^{(k)}\chi_{X_k} \to f^{(k)}$ (c.d. rel. μ) y en $\mathcal{L}_1$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Sea $f = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}$. entonces $\forall n > m$ suficientemente grande se tendrá: $\frac{\varepsilon}{2} > \int |f_n^{(n)} - f_m^{(m)}||g|\, d\mu$ $\forall g$ con $\int \Psi \circ |g|\, d\mu \leq 1$. Y por el lema de Fatou (ver [Ba2]) $\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} \geq \int |f - f_m^{(m)}||g|\, d\mu$. Así $\|f - f_m\|_\Phi < \varepsilon$, si m es suficientemente grande. Por lo tanto $f_n \xrightarrow{\|\ \|_\Phi} f$. $\square$

El siguiente resultado aclara la relación entre $\mathcal{L}_\Phi^\dagger$ y $\mathcal{L}_\Phi$.

4.8 TEOREMA. $f \in \mathcal{L}_\Phi$ ssi $\exists\alpha > 0$ tal que $\alpha f \in \mathcal{L}_\Phi^\dagger$

DEMOSTRACIÓN.

($\Leftarrow$) Supóngase que $\exists\alpha > 0$ tal que $\alpha f \in \mathcal{L}_\Phi^\dagger$, entonces por el teorema 4.7 (a) $\alpha f \in \mathcal{L}_\Phi$. Como $\mathcal{L}_\Phi$ es un espacio vectorial, entonces $f \in \mathcal{L}_\Phi$ y $\|f\|_\Phi = \frac{1}{\alpha}\|\alpha f\|_\Phi < +\infty$.

($\Rightarrow$) Supóngase que $f \in \mathcal{L}_\Phi$.

(i) Si $\|f\|_\Phi = 0$, entonces $f \equiv 0$, entonces $f \in \mathcal{L}_\Phi^\dagger$ $(\Phi(0) = 0)$.

(ii) Si $\|f\|_\Phi \neq 0$, sea $\alpha = \frac{1}{\|f\|_\Phi}$. P.D. $\int \Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_\Phi}\right) d\mu \leq 1$.

[3] Teorema de Riess-Weyl, ver [Ba1].

Primero estableceremos las siguientes relaciones:

$$\left|\int fg\,d\mu\right| \leq \|f\|_\Phi \max\{1, \rho_g(X)\}. \tag{4.1}$$

(con $\rho_g(X) = \int_X \Psi \circ |g|\,d\mu$). La primera desigualdad se sigue de la definición de $\|\ \|_\Phi$. Supóngase que $\rho_g > 1$, como Ψ es convexa, por ser la integral de una función creciente, ver 3.17 y $\Psi(0) = 0$, entonces $\Psi(|g|/\rho_g) \leq \Psi(|g|)/\rho_g$. De donde:

$$\int \Psi\left(\frac{|g|}{\rho_g}\right) d\mu \leq \int \frac{\Psi(|g|)}{\rho_g}\,d\mu = 1,$$

por la primera desigualdad. De donde:

$$\left|\int f\frac{g}{\rho_g}\,d\mu\right| \leq \|f\|_\Phi.$$

Entonces $\left|\int fg\,d\mu\right| \leq \|f\|_\Phi \rho_g$.

CASO A. (f está acotada y $\mu(X) < +\infty$)

Sea $g = \varphi(|f|/\|f\|_\Phi)$. Como f es acotada y φ es creciente, entonces g es acotada y dado que $\mu(X) < +\infty$, entonces $0 < \rho_g < +\infty$. Por la desigualdad (4.1) y el caso de la igualdad en la desigualdad de Young (teorema 4.3)

$$\begin{aligned} +\infty > \rho'_g &\geq \left|\int \frac{f}{\|f\|_\Phi} g\,d\mu\right| \\ &= \int \Phi\left[\frac{|f|}{\|f\|_\Phi}\right] d\mu + \rho_g \\ &> \max\left\{\int \Phi\left[\frac{|f|}{\|f\|_\Phi}\right] d\mu, \rho_g\right\} \end{aligned}$$

con $\rho'_g = \max\{\rho_g, 1\}$, entonces $\rho_g < \rho'_g$, por lo que $\rho'_g = 1$. De donde

$$\int \Phi\left[\frac{|f|}{\|f\|_\Phi}\right] d\mu \leq 1.$$

CASO B. (Caso general)

Sea

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \text{ (unión creciente)},$$

con $\mu(X_n) < +\infty$ y $f_n = ((f \wedge n) \vee -n)\chi_{X_n}$. Entonces por el caso (1)

$$\int \Phi(|f_n|/\|f_n\|_\Phi)\, d\mu \leq 1,$$

como $\|f_n\|_\Phi \leq \|f\|_\Phi$ y Φ es creciente, se tiene:

$$\int \Phi(|f_n|/\|f\|_\Phi)\, d\mu \leq \int \Phi(|f_n|/\|f_n\|_\Phi)\, d\mu \leq 1.$$

Usando el T.C.M. y dado que Φ es continua se concluye que:

$$\int \Phi(|f|/\|f\|_\Phi)\, d\mu \leq 1. \qquad \square$$

Si se imponen restricciones a la velocidad de crecimiento de Φ, se obtienen resultados como el siguiente:

4.9 TEOREMA. Si $\exists M > 0$ tal que $\Phi(2u) \leq M\Phi(u)$ para $u \geq 0$, entonces $\mathcal{L}_\Phi^\dagger = \mathcal{L}_\Phi$. Lo mismo sucede si tan sólo $\exists u_0 > 0$ tal que $\Phi(2u) \leq M\Phi(u)$ $\forall u \geq u_0 > 0$ y $\mu(X) < +\infty$.

DEMOSTRACIÓN.

CASO A. $(\Phi(2u) \leq M\Phi(u))$

Entonces $\Phi(2^2u) \leq M\Phi(2u) \leq M^2\Phi(u)$, y de manera inductiva $\Phi(2^pu) \leq M^p\Phi(u)$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

Y como $\mathcal{L}_\Phi^\dagger \subseteq \mathcal{L}_\Phi$ (teorema 4.7), basta probar que $\mathcal{L}_\Phi \subseteq \mathcal{L}_\Phi^\dagger$. Sea $f \in \mathcal{L}_\Phi$ arbitraria, si $\|f\|_\Phi = 0$, entonces $f \equiv 0$ y $f \in \mathcal{L}_\Phi^\dagger$. Supóngase que $\|f\|_\Phi > 0$, entonces $f/\|f\|_\Phi \in \mathcal{L}_\Phi^\dagger$ (teorema 4.8). Sea $p \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\|f\|_\Phi \leq 2^p$. Como Φ es creciente $\Phi(|f|) \leq \Phi\left(\frac{2^p|f|}{\|f\|_\Phi}\right) \leq M^p\Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_\Phi}\right)$. Entonces: $\int \Phi \circ |f|\, d\mu \leq M^p \int \Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_\Phi}\right) d\mu < +\infty$.

CASO B. $(\Phi(2u) \leq M\Phi(u)\ \forall u \geq u_0 > 0$ y $\mu(X) < +\infty)$

Sean $E = \{x : |f(x)|/\|f\|_\Phi < u_0\}$ y sean $p \in \mathbb{N}$ tal que $\|f\|_\Phi \leq 2^p$, entonces:

$$\int_X \Phi(|f|)\, d\mu \leq \int_X \Phi\left(\frac{2^p f}{\|f\|_\Phi}\right) d\mu = \int_E \Phi\left(\frac{2^p f}{\|f\|_\Phi}\right) d\mu + \int_{X-E} \Phi\left(\frac{2^p f}{\|f\|_\Phi}\right) d\mu$$
$$\leq \Phi(2^p u_0)\mu(E) + M^p < +\infty.$$

Pues $\Phi\left(\frac{2^p f}{\|f\|_\Phi}\right) \leq M^p \Phi\left(\frac{f}{\|f\|_\Phi}\right)$, entonces:

$$\int_{X-E} \Phi\left(\frac{2^p f}{\|f\|_\Phi}\right) d\mu \leq M^p \int_X \Phi\left(\frac{f}{\|f\|_\Phi}\right) d\mu \leq M^p.$$

Por lo tanto $f \in \mathcal{L}_\Phi^\dagger$. $\square$

4.10 OBSERVACIÓN. Obsérvese que en el teorema anterior puede usarse cualquier $\alpha > 1$ fijo en lugar de la constante 2, i.e. basta con que $\Phi(\alpha u) \leq M\Phi(u)$ para $\alpha > 1$ y $M > 0$. O bien, $\forall u \geq 0$ $\Phi(\alpha u) \leq M\Phi(u)$ para $\alpha > 1$, $M > 0$ y $\forall u \geq u_0 > 0$ si $\mu(X) < +\infty$.

4.11 DEFINICIÓN. Sea (X, S, μ) un espacio de medida. Se dice que S es **μ-separable** si existe una subcolección S_1 de elementos de S ($S_1 \subset S$) tales que:

(a) S_1 es numerable.

(b) $\forall F \in S$ con $\mu(F) < +\infty$ y $\forall \varepsilon > 0$ $\exists E \in S_1$ tal que $\mu(E \triangle F) < \varepsilon$.

4.12 EJEMPLO. Sean $X = \mathbb{R}$, S = Lebesgue-medibles y μ = medida de Lebesgue, S_1 = { uniones finitas de intervalos abiertos con extremos racionales } satisface los requisitos.

4.13 LEMA. Sean (X, S, μ) un espacio de medida y Φ, Ψ complementarias en el sentido de Young. Si $\exists M > 0$ tal que $\Phi(2u) \leq M\Phi(u)$ $\forall u \geq 0$ (de modo tal que $\mathcal{L}_\Phi^\dagger = \mathcal{L}_\Phi$), entonces dada $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $\rho(f) < \delta$, entonces $\|f\|_\Phi < \varepsilon$ (con $\rho(f) = \int \Phi \circ |f|\, d\mu$). Más precisamente si $\exists p \geq 0$ $p \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(f) \leq \frac{1}{M^p}$, entonces $\|f\|_\Phi \leq 2^{1-p}$. En particular si $f_n \in \mathcal{L}_\Phi$ y $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n) = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\Phi = 0$.

DEMOSTRACIÓN.

Si $\rho(f) \leq \frac{1}{M^p}$ para $p \in \mathbb{N}$, entonces $\int \Phi(2^p|f|)\,d\mu \leq M^p \int \Phi \circ |f|\,d\mu = M^p \rho(f) \leq 1$. Si $\int \Psi \circ |g|\,d\mu \leq 1$ por Young se tiene que $\int 2^p|fg|\,d\mu \leq \int \Phi(2^p|f|)\,d\mu + \int \Psi \circ |g|\,d\mu \leq 2$, entonces $\|f\|_\Phi \leq 2^{1-p}$. $\square$

4.14 TEOREMA. Sean (X, S, μ) un espacio de medida σ-finito y μ-separable y $M > 0$ tal que $\Phi(2u) \leq M\Phi(u)$ $\forall u \geq 0$, entonces $\mathcal{L}_\Phi(X,\mu)$ es **separable**, i.e. $\exists \mathcal{F}$ una familia numerable de funciones en $\mathcal{L}_\Phi$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall f \in \mathcal{L}_\Phi$ $\exists f' = f'(\varepsilon) \in \mathcal{F}$ tal que $\|f - f'\|_\Phi < \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \mathcal{L}_\Phi$ y $\varepsilon > 0$ dadas. Existe una sucesión de funciones S-simples con coeficientes **racionales** (s_n) tales que $|s_n| \leq |f|$ ($\therefore s_n \in \mathcal{L}_\Phi$) y $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ $\forall x \in X$. En particular $|s_n - f| \leq 2|f|$ y $\Phi(|s_n - f|) \leq \Phi(2|f|) \leq M\Phi(|f|) \in \mathcal{L}_1$, entonces por el T.C.D.L. $\int \Phi(|s_n - f|)\,d\mu \to \int \Phi(0)\,d\mu = 0$. Es decir $\rho(|s_n - f|) \to 0$, entonces por el lema 4.13 $\|s_n - f\|_\Phi \to 0$, de donde $\exists N = N(\varepsilon)$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\|s_n - f\|_\Phi < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fijamos $n_0 \geq N$. Si $s_{n_0} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{E_i}$, entonces $\mu(E_i) < +\infty$ si $\alpha_i \neq 0$ (ya que $\int \Phi(s_{n_0})\,d\mu = \int \sum_{i=1}^k \Phi(|\alpha_i|)\chi_{E_i} = \sum_{i=1}^k \Phi(|\alpha_i|)\mu(E_i) < +\infty$).

Sea S_1 de la separabilidad de μ. Hallamos $(D_i^{(m)}) \subset S_1$ tal que $\mu(E_i \triangle D_i^{(m)}) \to 0$ $(m \to +\infty)$, y definimos $f'_m = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{D_i^{(m)}}$. Sea $\mathcal{F}$ la familia de funciones S_1-simples con coeficientes racionales, entonces $f'_m \in \mathcal{F}$ y $|s_{n_0} - f'_m| = \left|\sum_{i=1}^k \alpha_i(\chi_{E_i} - \chi_{D_i^{(m)}})\right| \leq \sum_{i=1}^k |\alpha_i||\chi_{E_i} - \chi_{D_i^{(m)}}| = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|\chi_{E_i \triangle D_i^{(m)}}$.

Entonces:

$$\begin{aligned}\int \Phi(|s_{n_0} - f'_m|)\,d\mu &\leq \int \sum_{i=1}^k \Phi(|\alpha_i|)\chi_{E_i \triangle D_i^{(m)}}\,d\mu \\ &= \sum_{i=1}^k \Phi(|\alpha_i|)\mu(E_i \triangle D_i^{(m)}) \to 0 \qquad (m \to \infty).\end{aligned}$$

Y por el lema 4.13

$$\|s_{n_0} - f'_m\|_\Phi < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto $\|f - f'_m\|_\Phi < \varepsilon$. $\square$

4.15 LEMA. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente, $\varphi(0) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = l < +\infty$. Sean ψ, Φ, Ψ como en la definición 4.1. Entonces $\forall g \in \mathcal{L}_\Psi$, $\frac{g}{\|g\|_\Psi} \leq l$ (c.d. rel. μ)

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $|g(x)| > l\|g\|_\Psi$ en $E \in S$, $\mu(E) > 0$ (s.p.g. puede asumirse que $\mu(E) < +\infty$) y sea $f = \frac{\chi_E}{l\mu(E)}$. Como $\Phi(u) \leq lu$, entonces

$$\int \Phi \circ |f|\, d\mu = \mu(E)\Phi\left(\frac{1}{l\mu(E)}\right) d\mu \leq 1$$

y $\int |fg|\, d\mu = \int_E \frac{|g|}{l\mu(E)}\, d\mu > \|g\|_\Psi$ por hipótesis, lo cual es imposible pues $\|g\|_\Psi$ es el supremo de tales integrales. $\square$

4.16 TEOREMA. Si $\mu(X) < +\infty$ y φ es como en el lema anterior, entonces: $\mathcal{L}_\Phi = \mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_\Psi = \mathcal{L}_\infty$

DEMOSTRACIÓN. (a) Veamos que $\mathcal{L}_\Psi = \mathcal{L}_\infty$.

($\subseteq$) Sea $g \in \mathcal{L}_\Psi$, por el lema 4.15 $\frac{|g|}{\|g\|_\Psi} \leq l$ (c.d. rel. μ), entonces: $g \in \mathcal{L}_\infty$.

($\supseteq$) Inversamente si $g \in \mathcal{L}_\infty$ entonces $\exists p > 0$ tal que $p|g(x)| < \frac{l}{2}$ (c.d. rel. μ). Por lo tanto $\int \Psi \circ |pg|\, d\mu \leq \int \Psi(l/2)\, d\mu \leq \mu(X)\Psi(l/2) < +\infty$, entonces $pg \in \mathcal{L}^\dagger_\Psi \subset \mathcal{L}_\Psi$.

(b) Veamos ahora que $\mathcal{L}_\Phi = \mathcal{L}_1$.

($\subseteq$) Sea $f \in \mathcal{L}_\Phi$, si $g \in \mathcal{L}_\Psi$, entonces por el lema 4.8) $\exists \alpha, \beta > 0$ tales que $\int \Phi \circ |\alpha f|\, d\mu < +\infty$ y $\int \Psi \circ |\beta g|\, d\mu < +\infty$. Y por la desigualdad de Young (teorema 4.3):

$$\alpha\beta \int |fg|\, d\mu \leq \int \Phi \circ |\alpha f|\, d\mu + \int \Psi \circ |\beta g|\, d\mu < +\infty,$$

entonces $\int |fg|\, d\mu < +\infty$. En particular si $g(x) = \frac{l}{2}\ \forall x \in X$, entonces $g \in \mathcal{L}^\dagger_\Psi$ pues $\int \Psi(g)\, d\nu = \mu(x) \cdot \Psi(l/2) < +\infty$, por lo que $f \in \mathcal{L}_1$.

($\supseteq$) Inversamente si $f \in \mathcal{L}_1$, entonces $\int \Phi|f|\,d\mu \leq l \int |f|\,d\mu < +\infty$, entonces $f \in L_\Phi^\dagger \subset \mathcal{L}_\Phi$. $\square$

4.17 OBSERVACIÓN. En la demostración anterior no se usó el hecho de que $\mu(X) < +\infty$ para probar que $\mathcal{L}_\Psi \subset \mathcal{L}_\infty$ ni para probar que $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_\Phi$. Por lo que valen en general.

El teorema que se enuncia a continuación es una útil aplicación del teorema de Banach–Steinhauss a los espacios $\mathcal{L}_\Phi$.

4.18 TEOREMA. Sea (X, S, ν) un espacio de medida σ-finito $g, g_n : X \to \mathbb{R}$ funciones S-medibles. Sean Φ, Ψ complementarias en el sentido de Young, entonces:

(a) Si $\int fg\,d\mu < +\infty$ $\forall f \in \mathcal{L}_\Phi$ entonces $g \in \mathcal{L}_\Psi$.

(b) Si $u_n(f) = \int fg_n\,d\mu$ es acotada $\forall f \in \mathcal{L}_\Phi$, entonces $\|g_n\|_\Psi = O(1)$.

(c) Si $u_n(f)$ es acotada $\forall f \in \mathcal{L}_\Phi^\dagger$, entonces $\exists \theta > 0$ tal que $\int \Psi(\theta|g_n|)\,dt = O(1)$.

DEMOSTRACIÓN. Como X es σ-finito $X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$ con $X_i \subset X_{i+1}$ y $\mu(X_i) < +\infty$.

(a) Sea $g_n = [(g \wedge n) \vee -n] \cdot \chi_{X_n}$, consideramos la integral $u_n(f) = \int fg_n\,d\mu$, como cada g_n es acotada y $\mu(X_n) < +\infty$, entonces $g_n \in \mathcal{L}_\Psi^\dagger$ y por el teorema 4.8 $|u_n(f)| = \left|\int fg_n\,d\mu\right| \leq \|f\|_\Phi \rho'(g_n)$ con $\rho'(g_n) = \max\{1, \int \Psi(|g_n|)\,d\mu\}$. De donde $u_n(f)$ es una funcional lineal acotada en $\mathcal{L}_\Phi$, por hipótesis $|fg_n| \leq |fg| \in \mathcal{L}_1$. Se sigue del T.C.D.L. que $(u_n(f))$ converge $\forall f \in \mathcal{L}_\Phi$, entonces para cada f la sucesión numérica $(u_n(f))$ está acotada $\forall f \in \mathcal{L}_\Phi$ (que es de Banach). Por el teorema de Banach-Steinhauss[4] $\{u_n(f)\}$ está **uniformemente acotada** i.e. $\exists M > 0$ tal que $|u_n(f)| \leq M\|f\|_\Phi$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sea f tal que $\int \Phi(|f|)\,d\mu \leq 1$, entonces $f \in \mathcal{L}_\Phi$ y por la desigualdad de Young $\|f\|_\Phi \leq 2$ y dado que la desigualdad $\left|\int fg_n\,d\mu\right| \leq 2M$ es válida $\forall f$ tal que $\int \Phi \circ |f|\,d\mu \leq 1$, entonces $\|g_n\|_\Psi \leq 2M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sea $f \in \mathcal{L}_\Phi^\dagger$ tal que $\int \Phi(|f|)\,d\mu \leq 1$ arbitraria. Entonces $\int |fg_n|\,d\mu \leq 2M$ $\forall n$.

[4] Ver [Ru].

Usando el lema de Fatou tenemos que: $\int |fg|\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int |fg_n|\,d\mu \leq 2M$. Por lo que $\|g\|_\Phi \leq 2M$ también.

(b) Como $u_n(f) = \int fg_n\,d\mu$ está acotada $\forall f \in \mathcal{L}_\Phi$, entonces por (i), $g_n \in \mathcal{L}_\Psi$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sea $\lambda_n > 0$ tal que $\lambda_n g_n \in \mathcal{L}_\Psi^\dagger$ (existe por el teorema 4.8). Se sigue de la desigualdad:

$$\lambda_n |u_n(f)| \leq \|f\|_\Phi \rho'(\lambda_n g_n)$$

que $u_n(f)$ es una funcional lineal acotada en $\mathcal{L}_\Phi$ (de Banach). Como $u_n(f)$ está acotada $\forall f$. Por el teorema de Banach-Steinhauss $\exists M > 0$ tal que $\|u_n(f)\| \leq M\|f\|_\Phi$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sea f tal que $\int \Phi \circ |f|\,d\mu \leq 1$ por la desigualdad de Young (teorema 4.3) $\|f\|_\Phi \leq 2$, entonces $|u_n(f)| = \left|\int fg_n\,d\mu\right| \leq 2M$ $\forall n \in \mathbb{N}$, de donde $\|g_n\|_\Psi \leq 2M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Sea $f \in \mathcal{L}_\Phi$, entonces por el teorema 4.8 $f/\|f\|_\Phi \in \mathcal{L}_\Phi^\dagger$ y por hipótesis $u_n(f)/\|f\|_\Phi$ está acotada $\forall f \in \mathcal{L}_\Phi$. Por (b) $\exists N > 0$ tal que $\|g_n\|_\Psi \leq N$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sea $\theta = 1/N$, entonces $\forall n$

$$\int \Psi(\theta|g_n|)\,d\mu \leq \int \Psi\left(\frac{|g_n|}{\|g_n\|_\Psi}\right)d\mu \leq 1. \qquad \square$$

En la definición de $\mathcal{L}_\Phi$ se dijo que $f \in \mathcal{L}_\Phi$ si

$$\|f\|_\Phi = \sup\{\|fg\|_1 : \int \Psi \circ g\,d\mu < 1\} < +\infty.$$

A priori es posible que exista una $f \in \mathcal{L}_\Phi$ para la cual $\|fg\|_1 < +\infty$ $\forall g$ tal que $\int \Psi \circ g\,d\mu < 1$ y sin embargo el supremo de tales $\|fg\|_1$ sea infinito. En realidad esto no es posible que ocurra, como lo aclara el siguiente teorema.

4.19 TEOREMA. Si $\int fg\,d\mu < +\infty$ $\forall g$ tal que $\int \Psi \circ |g|\,d\mu < +\infty$, entonces $\|f\|_\Phi < +\infty$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f_n = (f \wedge n) \vee -n$. Sea $g \in \mathcal{L}_\Psi$ por el T.C.D.L. $v_n(g) = \int f_n g\,d\mu$ converge $\forall g \in \mathcal{L}_\Psi$. De donde $v_n(g)$ es acotada. Sea g tal que $\int \Psi \circ |g|\,d\mu \leq 1$. Como $\|f_n\|_\Phi \leq M$ $\forall n$, entonces $v_n(g) = \int f_n g\,d\mu \leq \|f_n\|_\Phi \leq M$. Como $v_n(g) \to \int fg\,d\mu$, entonces $\int fg\,d\mu \leq M$ $\forall g$ tal que $\int \Psi \circ |g|\,d\mu \leq 1$, entonces $\|f\|_\Phi \leq M < +\infty$. $\square$

4.20 TEOREMA (DESIGUALDAD DE HÖLDER). Sean $f \in \mathcal{L}_\Phi$, $g \in \mathcal{L}_\Psi$; Φ, Ψ complementarias en el sentido de Young. Entonces

$$\int |fg|\, d\mu \leq \|f\|_\Phi \|g\|_\Psi.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\|g\|_\Psi = 0$, es evidente pues se tiene la igualdad. Si $\|g\|_\Psi \neq 0$, entonces $\int |fg|\, d\mu = \|g\|_\Psi \int \left| f \frac{g}{\|g\|_\Psi} \right| d\mu$, como $\int \Psi\left(\frac{g}{\|g\|_\Psi}\right) d\mu \leq 1$ (teorema 4.8), por la definición de $\|f\|_\Phi$, $\int |fg|\, d\mu \leq \|g\|_\Psi \|f\|_\Phi$. □

4.21 EJEMPLO (CASO PARTICULAR). Sean $p \in (1, +\infty)$ y $q \in (1, +\infty)$ exponentes conjugados. Si $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$, $\Psi(x) = \frac{x^q}{q}$, entonces $\mathcal{L}_\Phi = \mathcal{L}_p$ (pues $f \in \mathcal{L}_\Phi$ ssi $\exists \theta > 0$ tal que $\int \frac{\theta^p |f|^p}{p}\, d\mu < +\infty$, i.e. ssi $f \in \mathcal{L}_p$). Sin embargo $\|f\|_\Phi \neq \|f\|_p$, de hecho $\|f\|_\Phi = \|f\|_p q^{1/q}$. En efecto $\|f\|_\Phi = \sup\left\{\int |fg|\, d\mu : \int \frac{|g|^q}{q}\, d\mu \leq 1\right\}$. Por la desigualdad de Hölder (teorema 1.21) $\int |fg|\, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \leq \|f\|_p q^{1/q}$ $\forall g$ tal que $\int \frac{|g|^q}{q}\, d\mu \leq 1$, i.e. $\|f\|_p q^{1/q}$ es una cota superior. Sea $g = \frac{|f|^{p-1} q^{1/q}}{\|f\|_p^{p/q}}$, entonces $\int \frac{|g|^q}{q}\, d\mu = \int \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} \cdot \frac{q}{q}\, d\mu = 1$ y $\int fg\, d\mu = \frac{q^{1/q}}{\|f\|_p^{p/q}} \int |f|^p\, d\mu = \frac{q^{1/q}\|f\|_p^p}{\|f\|_p^{p/q}} = \|f\|_p q^{1/q}$. Por lo tanto la cota se alcanza y así $\|f\|_\Phi = \|f\|_p^{1/q} q^{1/q}$.

Por lo que a continuación ha de definirse una norma equivalente a la norma $\| \ \|_\Phi$ a la que denotaremos N_Φ la cual coincide con $\| \ \|_p$.

Sean Φ, Ψ complementarias en el sentido de Young. Se puede normalizar la Φ de tal modo que:

$$\Phi(1) + \Psi(1) = 1. \tag{4.2}$$

Esto por ejemplo puede hacerse reemplazando $\varphi(u)$ por $\varphi(ku)$, con $k > 0$, tal que $\varphi(k) = 1$. Dicha k existe pues φ es continua, $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(+\infty) = +\infty$.

Sea entonces $\varphi_1(u) = \varphi(ku)$, con lo que $\psi_1(u) = k^{-1}\psi(u)$ y así:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(u) + \Psi_1(u) &= \int_0^1 \varphi(ku)\, du + \frac{1}{k}\int_0^1 \psi(u)\, du \\
&= \frac{1}{k}\int_0^k \varphi(v)\, dv + \frac{1}{k}\int_0^1 \psi(u)\, du = \frac{1}{k}[\Phi(k) + \Psi(1)] \\
&= \frac{1}{k}[k \cdot 1] = 1,
\end{aligned}$$

Pues $\varphi(k) = 1$ (caso de la igualdad en la desigualdad de Young). Además por el teorema 4.8 $f \in \mathcal{L}_\Phi$ ssi $\exists\theta > 0$ tal que $\theta f \in \mathcal{L}_\Phi^\dagger$, entonces $\mathcal{L}_\Phi$ no se altera, por lo que $\forall f \in \mathcal{L}_\Phi$ $\exists\lambda > 0$ suficientemente grande tal que $\int \Phi(\lambda^{-1}|f|)\,d\mu \leq \Phi(1)$.

4.22 DEFINICIÓN (LA NORMA N_Φ). Sean Φ, Ψ complementarias en el sentido de Young y normalizadas. Sean $f \in \mathcal{L}_\Phi$ y $N_\Phi(f) = \inf\{\lambda > 0 : \int \Phi(\lambda^{-1}|f|)\,d\mu \leq \Phi(1)\}$, ($f \in \mathcal{L}_\Phi$). A $N_\Phi(f)$ se llama la **norma** N_Φ de f.

4.23 OBSERVACIÓN. $N_\Phi(f)$ es una norma.

(a) Evidentemente $N_\Phi(f) \geq 0$ $\forall f$. Si $f \equiv 0$, entonces $N_\Phi(f) = 0$. Si $f \not\equiv 0$, sea $E_n = \{x : |f(x)| > \frac{1}{n}\}$ y si $E = \{x : |f(x)| > 0\}$, entonces $E = \cup_{n=0}^{\infty} E_n$, entonces $\exists n_0$ tal que $\mu(E_{n_0}) > 0$. Como $\Phi(+\infty) = +\infty$, entonces $\exists M > 0$ tal que $\Phi(M) > \frac{\Phi(1)}{\mu(E_{n_0})}$. Sea $\lambda = \frac{1}{Mn_0} > 0$, entonces $\int \Phi(\lambda^{-1}|f|)\,d\mu \geq \int_{E_{n_0}} \Phi(\lambda^{-1}|f|)\,d\mu > \Phi\left(\frac{Mn_0}{n_0}\right)\mu(E_{n_0}) = \varphi(M)\mu(E_0) > \varphi(1)$, y como Φ es creciente entonces $N_\Phi(f) > \lambda > 0$.

(b) Sea $\alpha = 0$, entonces $\alpha f \equiv 0$ y $N_\Phi(\alpha f) = 0 = \alpha N_\Phi(f)$. Si $\alpha \neq 0$, entonces $N_\Phi(f) = \inf\{\lambda : \int \Phi(\lambda^{-1}|\alpha f|)\,d\mu \leq \Phi(1)\}$. Sea $\nu = |\alpha|^{-1}\lambda$, entonces $\lambda = |\alpha|\nu$ y:

$$\begin{aligned} N_\Phi(\alpha f) &= \inf\{|\alpha|\nu : \int \Phi(\lambda^{-1}|\alpha f|)\,d\mu \leq \Phi(1)\} \\ &= |\alpha| \inf\{\nu : \int \Phi(\nu^{-1}|f|)\,d\mu \leq \Phi(1)\} \\ &= |\alpha| N_\Phi(f). \end{aligned}$$

(c) Sean $f, g \in \mathcal{L}_\Phi$ y $\lambda > N_\Phi(f)$, $\nu > N_\Phi(g)$, como Φ es convexa y $|f+g| \leq |f| + |g|$, $\int \Phi\left(\frac{|f+g|}{\lambda+\nu}\right) d\mu \leq \frac{\lambda}{\lambda+\nu} \int \Phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu + \frac{\nu}{\lambda+\nu} \int \Phi\left(\frac{|g|}{\nu}\right) d\mu \leq \frac{\lambda}{\lambda+\nu}\Phi(1) + \frac{\nu}{\lambda+\nu}\Phi(1) = \Phi(1)$. De donde $N_\Phi(f+g) \leq \lambda + \nu$ $\forall\lambda > N_\Phi(f)$ y $\nu > N_\Phi(g)$. Entonces $N_\Phi(f+g) \leq N_\Phi(f) + N_\Phi(g)$ (haciendo $\lambda \to N_\Phi(f)$ y $\nu \to N_\Phi(g)$). $\square$

4.24 EJEMPLO (CASO PARTICULAR). Sea $\Phi(u) = \frac{u^p}{p}$, entonces $N_\Phi(f) = \inf\{\lambda > 0 : \int \frac{|f|^p}{p\lambda^p}\,d\mu \leq \frac{1}{p}\} = \inf\{\lambda > 0 : \int |f|^p\,d\mu \leq \lambda^p\} = \inf\{\lambda > 0 : \left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \leq \lambda\}$. Obviamente $N_\Phi(f) = \|f\|_p$.

4.25 TEOREMA. Sean Φ, Ψ complementarias en el sentido de Young y normalizadas, entonces N_Φ y $\| \; \|_\Phi$ son equivalentes.

DEMOSTRACIÓN. Sean $f \in \mathcal{L}_\Phi$ y $\nu = \Phi(1)$, Entonces $0 < \nu < 1$. Por la convexidad de Φ y el teorema 4.8 $\int \Phi\left(\frac{\nu f}{\|f\|_\Phi}\right) d\mu \leq \nu \int \Phi\left(\frac{f}{\|f\|_\Phi}\right) d\mu \leq \nu = \Phi(1)$. Por lo tanto $N_\Phi(f) \leq \frac{\|f\|_\Phi}{\nu} = \frac{\|f\|_\Phi}{\Phi(1)}$.

Sea g tal que $\int \Psi(|g|)\, d\mu \leq 1$ y $\lambda > N_\Phi(f)$, entonces

$$\int |fg|\, d\mu = \lambda \int \left|\frac{f}{\lambda} g\right| d\mu$$

y por la desigualdad de Young

$$\leq \lambda \left[\int \Phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu + \int \Psi(|g|)\, d\mu\right] \leq \lambda[\Phi(1) + 1] < 2\lambda$$

De donde $\|f\|_\Phi < 2\lambda$ (pues $\|f\|_\Phi$ es un supremo) y haciendo $\lambda \to N_\Phi(f)$ entonces $\|f\|_\Phi \leq 2N_\Phi(f)$. Por lo tanto $\Phi(1)N_\Phi(f) \leq \|f\|_\Phi \leq 2N_\Phi(f)$ y como $(\mathcal{L}_\Phi, \| \; \|_\Phi)$ es un espacio vectorial completo, entonces $(\mathcal{L}_\Phi, N_\Phi(\;))$ es completo también. □

4.26 TEOREMA (GENERALIZACIÓN DE LA DESIGUALDAD DE HÖLDER). Sean Φ, Ψ complementarias en el sentido de Young. Sea $f \in \mathcal{L}_\Phi$ y $g \in \mathcal{L}_\Psi$, entonces:

$$\int fg\, d\mu \leq N_\Phi(f) N_\Psi(g).$$

Para la igualdad supóngase que Φ es tal que $\exists M > 0$ para la cual $\Phi(2u) \leq M\Phi(u)$ $\forall u \geq 0$, entonces la igualdad se da ssi:

Ya sea que $N_\Phi(f) = 0$ o $N_\Psi(f) = 0$ o bien si:

(a) $(fg)(x) \leq 0$ o $(fg)(x) \geq 0$ (c.d. rel. μ)).

(b) $\frac{g}{N_\Psi(g)} \equiv_\mu \varphi\left(\frac{f}{N_\Phi(f)}\right)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lambda > N_\Phi(f)$, $\nu > N_\Psi(g)$, Por la desigualdad de Young:

$$\left|\int \frac{fg}{N_\Phi(f) N_\Psi(g)}\, d\mu\right| \leq \int \left|\frac{f}{N_\Phi(f)}\right| \left|\frac{g}{N_\Psi(g)}\right| d\mu$$

$$\leq \int \Phi\left(\frac{|f|}{N_\Phi(f)}\right) d\mu + \int \Psi\left(\frac{|g|}{N_\Psi(g)}\right) d\mu$$
$$\leq \Phi(1) + \Psi(1) = 1, \tag{4.3}$$

Pues $N_\Phi(f) = \inf\left\{\lambda > 0 : \int \Phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu \leq \Phi(1)\right\}$ así que por el T.C.M.:

$$\int \Phi\left(\frac{|f|}{N_\Phi(f)}\right) d\mu \leq \Phi(1),$$

análogamente $\int \Psi\left(\frac{|g|}{N_\Psi(g)}\right) d\mu \leq \Psi(1)$.

Para la igualdad. Basta suponer que $N_\Phi(f)N_\Psi(g) > 0$.

($\Rightarrow$) Supóngase que se satisface la igualdad, entonces se satisfacen todas las igualdades de (4.3). La primera de tales igualdades implica (a). Y la segunda igualdad, por el caso de igualdad en la desigualdad de Young, implica (b).

($\Leftarrow$) Supóngase que se satisfacen (a) y (b) entonces la primera y la segunda igualdad de (4.3) se satisfacen. Falta ver que

$$\int \Phi\left(\frac{|f|}{N_\Phi(f)}\right) d\mu + \int \Psi\left(\frac{|g|}{N_\Psi(g)}\right) d\mu = \Phi(1) + \Psi(1),$$

Como $\int \Phi \circ \left|\frac{f}{N_\Phi(f)}\right| d\mu \leq \Phi(1)$ y $\int \Psi \circ \left|\frac{g}{N_\Psi(g)}\right| d\mu \leq \Psi(1)$, debe satisfacerse la igualdad término a término. En efecto: Sea $0 < \lambda < N_\Phi(f)$, entonces: $\int \Phi \circ \left|\frac{f}{\lambda}\right| d\mu > \Phi(1)$ por definición de $N_\Phi(f)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\lambda} < 2^n$, entonces $\int \Phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu \leq \int \Phi(2^n|f|)\, d\mu \leq M^n \int \Phi(|f|)\, d\mu$, esto último se sigue de la hipótesis y del hecho de que en este caso $\mathcal{L}_\Phi^\dagger = \mathcal{L}_\Phi$. Por lo que $\Phi(1) < \int \Phi \circ \left|\frac{f}{\lambda}\right| d\mu \leq M^n \int \Phi(|f|)\, d\mu < +\infty$. Y por el Teorema 1.33, si $\lambda \uparrow N_\Phi(f)$, entonces $\Phi(1) \geq \int \Phi \circ \left|\frac{f}{N_\Phi(f)}\right| d\mu \geq \Phi(1)$, por lo tanto $\int \Phi \circ \left|\frac{f}{N_\Phi}\right| d\mu = \Phi(1)$. Análogamente se demuestra: $\int \Psi \circ \left|\frac{g}{N_\Psi(g)}\right| d\mu = \Psi(1)$.
□

CAPITULO V

Aplicaciones

En este capítulo se establecerán dos desigualdades importantes, que son la desigualdad de Beurling y la de Clarkson. Se estudiará los conceptos de convexidad uniforme y la convexidad localmente uniforme.

5.1 Desigualdad de Beurling y de Clarkson

En esta sección se establecerán desigualdades de Beurling y de Clarkson para los espacios $\mathcal{L}_p$, que como se verá más adelante, se convierte en la identidad del paralelogramo cuando $p = 2$. Y por último veremos que dado un subconjunto convexo existe un único elemento de norma mínima. Primero mostraremos la desigualdad de Beurling. Su prueba es larga y requiere de varios artificios, pero una vez obtenida se deduce de ella inmediatamente la desigualdad de Clarkson.

5.1 TEOREMA (DESIGUALDAD DE BEURLING). Sean (X, S, μ) un espacio de medida y $f, g \in \mathcal{L}_p$.

(a) Si $1 < p < 2$, entonces:

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p .$$

(b) Si $p > 2$, entonces:

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p .$$

(c) Si $0 < p < 1$, entonces:

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p .$$

(d) Si $p < 0$, entonces:

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p.$$

En todos los casos la igualdad ocurre ssi f y g son esencialmente proporcionales.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $h(x) = (1 + x^{1/p})^p + |1 - x^{1/p}|^p$, $x > 0$.

$h'(x) = (x^{-1/p}+1)^{p-1} + \operatorname{sgn}(x-1)|x^{-1/p}-1|^{p-1}$ y es continua. $h''(x) = -\frac{p-1}{p}x^{-\frac{1}{p}-1}[(x^{-1/p}+1)^{p-2} - |x^{-1/p}-1|^{p-2}]$. para $x \neq 1$. Como $x^{-1/p}+1 = |x^{-1/p}| + |-1| > |x^{-1/p}-1|$ para $x > 0$, entonces $h''(x)$ es positiva si $1 < p < 2$ o bien si $p < 0$ y es negativa si $0 < p < 1$ o si $p > 2$. Por lo tanto, si $p \in (-\infty, 0) \cup (1,2)$ h es convexa y para $p \in (0,1) \cup (2, +\infty)$ es cóncava. O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned}
h(x) &\geq h(\xi) + h'(\xi)(x-\xi) && (p < 0)\\
h(x) &\leq h(\xi) + h'(\xi)(x-\xi) && (0 < p < 1)\\
h(x) &\geq h(\xi) + h'(\xi)(x-\xi) && (1 < p < 2)\\
h(x) &\leq h(\xi) + h'(\xi)(x-\xi) && (p > 2)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

con $x, \xi \in (0, +\infty)$ y como no existe ningún tramo en el que $h(x)$ sea lineal, la igualdad se da ssi

$$x = \xi. \tag{5.2}$$

Sea $H(x,y) = xh\left(\frac{y}{x}\right)$ con $x, y > 0$, entonces

$$\frac{\partial H}{\partial x}(\xi,\eta) = -\frac{\eta}{\xi}h'\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + h\left(\frac{\eta}{\xi}\right) \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}(\xi,\eta) = h'\left(\frac{\eta}{\xi}\right). \tag{5.4}$$

Sea $\frac{\eta}{\xi} = \rho$, entonces

$$\frac{\partial H}{\partial x}(\xi,\eta) = -\rho h'(\rho) + h(\rho) \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}(\xi,\eta) = h'(\rho). \tag{5.6}$$

Y además
$$H(x,y) = (x^{1/p} + y^{1/p}) + |x^{1/p} + y^{1/p}|^p \tag{5.7}$$
Por (5.1) $h\left(\frac{y}{x}\right) \geq h(\rho) + h'(\rho)\left(\frac{y}{x} - \rho\right)$ para $1 < p < 2$. Sustituyendo (5.5) y (5.6) en el resultado de multiplicar x a esta última desigualdad, (pues $x > 0$), se obtiene que:

$$H(x,y) = xh\left(\frac{y}{x}\right) \geq y\frac{\partial H}{\partial y}(\xi,\eta) + x\frac{\partial H}{\partial x}(\xi,\eta) \qquad (2 > p > 1) \tag{5.8}$$

Análogamente:
$$H(x,y) = xh\left(\frac{y}{x}\right) \leq y\frac{\partial H}{\partial y}(\xi,\eta) + x\frac{\partial H}{\partial x}(\xi,\eta) \qquad (2 < p)$$

y por (5.8) la igualdad se verifica ssi $y = \frac{\eta}{\xi}x$.

(a) Sean $f, g > 0$, $x = f^p$, $y = g^p$, $\xi = \|f\|_p^p$ y $\eta = \|g\|_p^p$, por (5.7) y (5.8) e integrando:

$$\int |f+g|^p\, d\mu + \int |f-g|^p\, d\mu \geq \frac{\partial H}{\partial x}(\xi,\eta)\int |f|^p\, d\mu +$$

(por definición de ξ, η)
$$\frac{\partial H}{\partial y}(\xi,\eta)\int |g|^p\, d\mu$$
$$= \frac{\partial H}{\partial x}(\xi,\eta)\xi + \frac{\partial H}{\partial y}(\xi,\eta)\eta$$

(por (5.3) y (5.4))
$$= \xi h\left(\frac{\eta}{\xi}\right) - \eta h'\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + \eta h'\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$$
$$= \xi h\left(\frac{\eta}{\xi}\right) = (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p.$$

Entonces $\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p$ para $(1 < p < 2)$.

La igualdad ocurre ssi $g^p \equiv \frac{\|g\|_p^p}{\|f\|_p^p} f^p$, i.e. ssi f es esencialmente proporcional a g.

Análogamente se prueba para los demás casos. Nótese que el sentido en el que se da la igualdad (mayor que o menor que) depende crucialmente del signo de $h''(x)$, el cual es positivo para $p \in (-\infty, 0) \cup (1,2)$ y es negativo para $p \in (1,2) \cup (2,+\infty)$.

(b) Caso general. Sean f, g dos funciones no necesariamente positivas.

Sean $E_1 = \{x \in X : f(x) \geq 0, g(x) \geq 0\}$, $E_2 = \{x \in X : f(x) < 0, g(x) < 0\}$, $E_3 = \{x \in X : f(x) \geq 0, g(x) < 0\}$, $E_4 = \{x \in X : f(x) < 0, g(x) \geq 0\}$. Y sean $f_i = f\chi_{E_i}$ $g_i = g\chi_{E_i}$, con $i = 1, 2, 3, 4$. Entonces del caso anterior (para $1 < p < 2$):

$$\|f_i + g_i\|_p^p + \|f_i - g_i\|_p^p \geq (\|f_i\|_p + \|g_i\|_p)^p + |\|f_i\|_p - \|g_i\|_p|^p .$$

Además como los conjuntos E_i son ajenos:

$$\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p = \sum_{i=1}^{4} (\|f_i + g_i\|_p^p) + \sum_{i=1}^{4} (\|f_i - g_i\|_p^p) .$$

Por lo que:

$$\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p \geq \sum_{i=1}^{4} (\|f_i\|_p + \|g_i\|_p)^p + \sum_{i=1}^{4} |\|f_i\|_p - \|g_i\|_p|^p . \tag{5.9}$$

Considerando al espacio discreto $\{1, 2, 3, 4\}$ y a las funciones no negativas $\varphi, \psi : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$ definidas como sigue:

$$\varphi(i) = \|f_i\|_p, \ \psi(i) = \|g_i\|_p$$

Se sigue de la desigualdad de Beurling aplicada a φ y ψ que:

$$\|\varphi + \psi\|_p^p + \|\varphi - \psi\|_p^p \geq (\|\varphi\|_p + \|\psi\|_p)^p + |\|\varphi\|_p - \|\psi\|_p|^p .$$

es decir:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{4} (\|f_i\|_p + \|g_i\|_p)^p\right) &+ \left(\sum_{i=1}^{4} |\|f_i\|_p - \|g_i\|_p|^p\right) \\
&\geq \left(\left(\sum_{i=1}^{4} \|f_i\|_p^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{4} \|g_i\|_p^p\right)^{1/p}\right)^{1/p} \\
&+ \left|\left(\sum_{i=1}^{4} \|f_i\|_p^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{i=1}^{4} \|g_i\|_p^p\right)^{1/p}\right|^{1/p} .
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Pero nuevamente por ser los E_i ajenos tenemos:

$$\sum_{i=1}^{4} \|f_i\|_p^p = \|f\|_p^p \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{4} \|g_i\|_p^p = \|g\|_p^p \tag{5.11}$$

y por (5.9), (5.10) y (5.11):

$$\|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p \geq (\|f\|_p+\|g\|_p)^p+|\|f\|_p-\|g\|_p|^p .$$

De manera enteramente análoga se demuestran los otros casos.

La igualdad ocurre en (5.9) ssi f_i es esencialmente proporcional a g_i y la igualdad ocurre en (5.10) ssi φ es proporcional a ψ. De donde la igualdad ocurre ssi f es esencialmente proporcional a g. □

5.2 TEOREMA (DESIGUALDAD DE CLARKSON). Sean (X, S, μ) un espacio de medida, $f, g \in \mathcal{L}_p$

(a) Si $1 < p < 2$, entonces:

$$2\|f\|_p^p+2\|g\|_p^p \geq \|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p.$$

(b) Si $p > 2$, entonces:

$$2\|f\|_p^p+2\|g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p.$$

(c) Si $0 < p < 1$, entonces:

$$2\|f\|_p^p+2\|g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p.$$

(d) Si $p < 0$, entonces:

$$2\|f\|_p^p+2\|g\|_p^p \geq \|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\varphi, \psi : \{1,2\} \to \mathbf{R}$, $\varphi(1) = \|f\|_p$, $\varphi(2) = \|g\|_p$, $\psi(1) = \|g\|_p$, $\psi(2) = -\|f\|_p$. Por la desigualdad de Beurling (teorema 5.1) con $p \in (1,2)$ obtenemos:

$$\|\varphi+\psi\|_p^p+\|\varphi-\psi\|_p^p \geq (\|\varphi\|_p+\|\psi\|_p)^p+|\|\varphi\|_p-\|\psi\|_p|^p$$

y como $\|\varphi-\psi\|_p^p = \|\varphi+\psi\|_p^p$, $\|\varphi\|_p = (\|f\|_p^p+\|g\|_p^p)^{1/p}$, $\|\psi\|_p = \|\varphi\|_p$. Entonces:

$$2(\|f\|_p+\|g\|_p)^p+2|\|f\|_p-\|g\|_p|^p \geq 2^p(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p)+0$$

y dividiendo entre 2

$$(\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p \geq 2^{p-1}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

Y por la desigualdad original de Beurling obtenemos:

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geq 2^{p-1}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p). \tag{5.12}$$

o bien que:

$$2\|f+g\|_p^p + 2\|f-g\|_p^p \geq \|2f\|_p^p + \|2g\|_p^p$$

y haciendo $f_1 = f+g$, $g_1 = f-g$ resulta que:

$$2\|f_1\|_p^p + 2\|g_1\|_p^p \geq \|f_1+g_1\|_p^p + \|f_1-g_1\|_p^p. \tag{5.13}$$

El caso $p > 2$ se demuestra de manera análoga. □

5.3 COROLARIO. En la prueba de la desigualdad de Clarkson se obtuvo la desigualdad (5.12) que junto con la desigualdad de Clarkson dice que:

$$2^{p-1}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \leq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \qquad (1 < p < 2)$$

Análogamente:

$$2(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \leq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \qquad (2 < p)$$

En particular si $f, g \in \mathcal{L}_{2-h} \cap \mathcal{L}_{2+h}$, entonces si $p \to 0$

$$\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)$$

que no es más que la identidad del paralelogramo.

5.4 TEOREMA (DESIGUALDAD DE CLARKSON). Sean (X, S, ν) un espacio de medida, $f, g \in \mathcal{L}_p(X, S, \mu)$ $(p \in (1,2))$, entonces:

$$\|f+g\|_p^{\frac{p}{p-1}} + \|f-g\|_p^{\frac{p}{p-1}} \leq 2\left[\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

DEMOSTRACIÓN. (Ver [H-S].) □

Usando las desigualdades recién probadas, e imitando algunos resutados de los espacios de Hilbert obtenemos:

5.5 TEOREMA. Sean (X, S, μ) un espacio de medida, F una funcional lineal continua no nula en $\mathcal{L}_p(X, S, \mu)$ $(1 < p < +\infty)$. Entonces $\exists\, h$ de mínima norma en el hiperplano:

$$H = \{f \in \mathcal{L}_p : F(f) = \|F\|^q\}$$

y si h_0 es otro elemento de H de mínima norma, entonces $h \equiv h_0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f_n \in H$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| = A$ con $A = \inf\{\|f\| : f \in H\}$. Obsérvese que $A > 0$, pues si $A = 0$ entonces $0 \in H$ por continuidad de F, entonces $F = 0$.

EXISTENCIA

CASO A. $(1 < p < 2)$

De la desigualdad de Clarkson para $p \in (1,2)$ (teorema 5.4) aplicado a f_n, f_m:

$$\|f_n - f_m\|_p^{\frac{p}{p-1}} \leq 2(\|f_n\|_p^p + \|f_m\|_p^p)^{\frac{1}{p-1}} - \|f_n + f_m\|_p^{\frac{p}{p-1}},$$

como $\frac{f_n+f_m}{2} \in H$, entonces: $\left\|\frac{f_n+f_m}{2}\right\|_p \geq A$, entonces $\|f_n + f_m\|_p^{\frac{p}{p-1}} \geq (2A)^{\frac{p}{p-1}}$. De donde:

$$\|f_n - f_m\|_p^{\frac{p}{p-1}} \leq 2(\|f_n\|_p^p + \|f_m\|_p^p)^{\frac{1}{p-1}} - 2^{\frac{p}{p-1}} A^{\frac{p}{p-1}}.$$

Así que $0 \leq \lim\limits_{m,n\to\infty} \|f_n - f_m\|_p^{\frac{p}{p-1}} \leq 2(2A^p)^{\frac{1}{p-1}} - 2^{\frac{p}{p-1}} A^{\frac{p}{p-1}} = 0$. Entonces f_n es $\|\ \|_p$-Cauchy.

CASO B. $(p > 2)$

De la desigualdad de Beurling $p \in (2, +\infty)$ (teorema 5.1) aplicado a f_n y f_m, resulta que: $\|f_n - f_m\|_p^p \leq (\|f_n\|_p + \|f_m\|_p)^p + |\|f_n\|_p - \|f_m\|_p|^p - \|f_n + f_m\|_p^p$. Como $\frac{f_n+f_m}{2} \in H$, entonces $\|f_n + f_m\|_p^p \geq 2^p A^p$, por lo que

$$\|f_n - f_m\|_p^p \leq (\|f_n\|_p + \|f_m\|_p)^p + |\|f_n\|_p - \|f_m\|_p|^p - 2^p A^p.$$

Así que $0 \leq \lim\limits_{m,n\to\infty} \|f_n - f_m\|_p^p \leq (2A)^p + 0 - 2^p A^p = 0$, entonces f_n es $\|\ \|$-Cauchy.

Por lo tanto en ambos casos f_n es $\| \ \|$-Cauchy, de donde $\exists h \in \mathcal{L}_p$ tal que $f_n \to h$ (c.d. rel. μ y en $\mathcal{L}_p$), y como F es cotinua, entonces $F(h) = \lim_{n\to\infty} F(f_n) = \|F\|^q$, por lo que $h \in H$. Además $\|h\|_p = \| \lim_{n\to\infty} f_n\|_p = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = A$. Por lo tanto h tiene norma mínima.

CASO C. $(p = 2)$

Para este caso el hecho es bien conocido así que su demostración se omite. También se omite la demostración de la unicidad.

UNICIDAD

Sea $h_0 \in H$ de norma mínima.

CASO A. $(1 < p < 2)$

De la desigualdad de Clarkson para $p \in (1,2)$ (teorema 5.4):

$$0 \leq \|h - h_0\|_p^{\frac{p}{p-1}} \leq 2(\|h\|_p^p + \|h_0\|_p^p)^{\frac{1}{p-1}} - \|h + h_0\|_p^{\frac{p}{p-1}}$$
$$\leq 2(2A^p)^{\frac{1}{p-1}} - (2A)^{\frac{p}{p-1}} = 0.$$

Entonces $\|h - h_0\|^{\frac{p}{p-1}} = 0$, entonces $h_0 \equiv h$.

CASO B. $(p > 2)$

De la desigualdad de Beurling $p \in (2, +\infty)$ (teorema 5.1):

$$0 \leq \|h - h_0\|_p^p \leq (\|h\|_p + \|h_0\|_p)^p + |\|h\|_p - \|h_0\|_p|^p - \|h + h_0\|_p^p$$
$$\leq (2A)^p + 0 - (2A)^p = 0.$$

Entonces $\|h - h_0\|_p^p = 0$, entonces $h_0 \equiv h$. □

5.6 OBSERVACIÓN. Nótese que en el teorema anterior tan sólo se usó el hecho de que H fuera convexo no vacío y cerrado.

El siguiente teorema aclara quien es el elemento de norma mínima.

5.7 TEOREMA. Sean (X, S, μ) un espacio de medida σ-finito, F una funcional lineal no nula y continua en $\mathcal{L}_p(X, S, \mu)$, $p > 1$ y $g \in \mathcal{L}_q$ la g de la representación de de Riesz de F, i.e. $F(f) = \int fg\,d\mu$ $\forall f \in \mathcal{L}_p$. Entonces

$$h = |g|^{q/p} \operatorname{sgn} g$$

es el elemento de mínima norma en el hiperplano:

$$H = \{f : F(f) = \|F\|^q\}.$$

DEMOSTRACIÓN. $\|h\|_p^p = \int |g|^q \, d\mu = \|g\|_q^q$, entonces $\|h\|_p = \|g\|_q^{q/p} = \|g\|_q^{q-1}$. Del teorema de representación de Riesz[1] sabemos que $\|g\|_q = \|F\|$. Sea $f \in H$, entonces $\|g\|_q^q = \|F\|^q = F(f) = \int fg \, d\mu$, que por la desigualdad de Hölder para $p > 1$ (teorema 1.21), resulta que: $\|g\|_q^q \leq \|f\|_p \|g\|_q$, entonces $\|h\|_p = \|g\|_q^{q-1} \leq \|f\|_p \; \forall f \in H$. Además $F(h) = \int g|g|^{q/p} \operatorname{sgn} g \, d\mu = \int |g|^q \, d\mu = \|g\|_q^q = \|F\|^q$. Por lo tanto $h \in H$ es el elemento de norma mínima en el hiperplano. $\square$

5.8 TEOREMA. Sea (X, S, μ) un espacio de medida y E un subconjunto convexo cerrado no vacío de L_p $(p > 1)$ y $f_0 \in \mathcal{L}_p$ fijo, entonces $\exists e_0 \in E$ único tal que $\|e_0 - f_0\|_p \leq \|e - f_0\|_p \; \forall e \in E$.

DEMOSTRACIÓN. $E - f_0$ es cerrado, convexo y no vacío. Por la observación 5.5 $\exists g \in E - f_0$ única de norma mínima. Sea $e_0 = g + f_0$, entonces $\|e_0 - f_0\|_p \leq \|e - f_0\|_p \; \forall e \in E$. $\square$

[1] Ver [Ru].

5.2 Convexidad Uniforme

En esta sección se definirán los conceptos de convexidad uniforme y convexidad localmente uniforme. Como una aplicación de la desigualdad de Clarkson se mostrará que $\mathcal{L}_p$ es uniformemente convexo. A continuación se presentan tres definiciones de convexidad uniforme, así como su equivalencia.

5.9 DEFINICIÓN. Sea $(V, \| \ \|)$ un espacio vectorial normado.

(i) Se dice que es **uniformemente convexo** si $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall x, y \in V$ tal que $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x - y\| > \varepsilon$, entonces $\|\frac{1}{2}(x+y)\| < (1-\delta)$ para alguna $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que $0 < \delta < 1$.

Otra definición es:

(ii) Se dice que es **uniformemente convexo** si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ para la cual si $x, y \in V$ son tales que $\|x\| = 1 = \|y\|$ y $\|\frac{1}{2}(x+y)\| > 1 - \delta$, entonces $\|x - y\| < \varepsilon$.

Otra definición debida a Clarkson de uniformemente convexo (ver [Cl], [D-S]) es la siguiente:

(iii) Se dice que es **uniformemente convexo** ssi $\forall \|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ y $\|x_n + y_n\| \to 2$ entonces $\|x_n - y_n\| \to 0$. [Nótese que si (x_n) y (y_n) son tales que $\|x_n\| \leq 1$ y $\|y_n\| \leq 1$ y $\|x_n + y_n\| \to 2$, entonces forzosamente $\|x_n\| \to 1$ y $\|y_n\| \to 1$. Pues $2 \leftarrow \|x_n + y_n\| \leq \|x_n\| + \|y_n\| \leq 2$, por lo tanto $\|x_n\| + \|y_n\| \to 2$, y de donde $\|x_n\| \to 1$ y $\|y_n\| \to 1$.]

5.10 OBSERVACIÓN. Las tres definiciones de convexidad uniforme son equivalentes. En efecto:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \delta(\varepsilon/2)$ de (i). Sean $x, y \in V$ tales que $\|x\| = \|y\| = 1$ y

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| > 1 - \delta. \tag{5.14}$$

Supongamos que $\|x - y\| > \frac{\varepsilon}{2}$, por (i) $\|\frac{1}{2}(x+y)\| < 1 - \delta$ lo que contradice (5.14), entonces $\|x - y\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sean (x_n), (y_n) como en (ii). Sea $\alpha_n = \|x_n\|$, $\beta_n = \|y_n\|$, $x'_n = \frac{x_n}{\alpha_n}$ y $y'_n = \frac{y_n}{\beta_n}$, entonces $\|x'_n\| = \|y'_n\| = 1$ y como $\|x_n + y_n\| \to 2$, entonces también $\|x'_n + y'_n\| \to 2$ (ver [1]), i.e. $\|\frac{1}{2}(x'_n + y'_n)\| \to 1$. Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \delta(\varepsilon)$ de (ii), entonces $\exists N > 0$ tal que si $n \geq N$, entonces $\|\frac{1}{2}(x'_n + y'_n)\| > 1 - \delta$, por (ii) $\|x'_n - y'_n\| < \varepsilon$, i.e. $\|x'_n - y'_n\| \to 0$. Por lo tanto $\|x_n - y_n\| \to 0$ (se prueba con un método similar al usado en [1]).

[1] Sea $\alpha_n = \|x_n\|$, entonces si $x'_n = \frac{x_n}{\alpha_n}$, $\|x_n - x'_n\| = \left\|x_n - \frac{x_n}{\alpha_n}\right\| = \left\|\frac{\alpha_n x_n - x_n}{\alpha_n}\right\| = \|x_n\| \frac{|\alpha_n - 1|}{\alpha_n} = |\alpha_n - 1| = 1 - \alpha_n$.

Análogamente si $\beta_n = \|y_n\|$, entonces $\|y_n - y'_n\| = \left\|y_n - \frac{y_n}{\beta_n}\right\| = 1 - \beta_n$.

Así pues por la desigualdad del triángulo: $|\|x'_n + y'_n\| - \|x_n + y_n\|| \leq \|x_n - x'_n\| + \|y_n - y'_n\| \leq (1 - \|x_n\|) + (1 - \|y_n\|)$. Y como $1 - \|x_n\| \to 0 \leftarrow 1 - \|y_n\|$, resulta que $\|x'_n + y'_n\|$ y $\|x_n + y_n\|$ convergen o divergen simultáneamente, pero por hipótesis sabemos que $\|x_n + y_n\| \to 2$, de donde $\|x'_n + y'_n\| \to 2$ también.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Supóngase que (i) es falso, entonces $\exists \varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ $\exists x_\delta, y_\delta$ con $\|x_\delta\| = 1 = \|y_\delta\|$, con $\frac{1}{2}\|x_\delta - y_\delta\| \geq 1 - \delta$. Considerando $\delta = \frac{1}{n}$ obtenemos sucesiones (x_n), (y_n) con $\|x_n\| = 1 = \|y_n\|$ y tal que $\frac{1}{2}\|x_\delta - y_\delta\| \geq 1 - \frac{1}{n}$, entonces $\frac{1}{2}\|x_n + y_n\| \to 1$, por lo que $\|x_n + y_n\| \to 2$. Así pues por (ii) $\|x_n - y_n\| \to 0$ pues $\|x_n - y_n\| > \varepsilon_0$ $\forall n$ por hipótesis lo cual es una contradicción. $\square$

5.11 TEOREMA. $(\mathcal{L}_p, \|\ \|_p)$ es uniformemente convexo ($p \in (1, +\infty)$).

DEMOSTRACIÓN.

Supóngase que $f, g \in \mathcal{L}_p$ tal que $\|f\|_p = 1 = \|g\|_p$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < \|f - g\|_p$. Nótese que $\varepsilon < \|f - g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \leq 2$.

CASO A. (si $p \geq 2$)

por la desigualdad de Clarkson (teorema 5.2).

$$\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) = 1.$$

Por lo tanto: $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$.

CASO B. (si $p \in (1,2)$)

por la desigualdad de Clarkson (teorema 5.4).

$$\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q \leq \left[\frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)\right]^{\frac{1}{p-1}} = 1.$$

Por lo tanto: $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p \leq 1 - (\frac{\varepsilon}{2})^p$.

Sea $\delta = (\frac{\varepsilon}{2})^p$, $\delta \in (0,1)$. □

5.12 TEOREMA (MILMAN-PETTIS 1938). Un espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.

DEMOSTRACIÓN. Ver [Pe]. □

Un sencillo corolario del teorema anterior es que $\mathcal{L}_p$ es reflexivo $\forall p > 1$.

Existen espacios reflexivos que no son equivalentes a espacios uniformemente convexos[2].

5.13 DEFINICIÓN. Un espacio vectorial normado, $(V, \|\ \|)$ es **localmente uniformemente convexo** ssi $\forall (x_n) \subset V$, $x \in V$ con $\|x_n\| = \|x\| = 1$ tal que $\left\|\frac{x_n+x}{2}\right\| \to 1$, entonces $\|x_n - x\| \to 0$.

5.14 LEMA (RADON-RIESZ). Sea $(V, \|\ \|)$ localmente uniformemente convexo, $(y_n) \subset V$ y $y \in V$ tal que $\|y_n\| \to \|y\|$ y (y_n) converge débilmente a y, entonces $\|y_n - y\| \to 0$. (Note que en un espacio de Hilbert, el lema es elemental en virtud el teorema de F. Riesz)

DEMOSTRACIÓN.

(a) Si $\|y\| = 0$, entonces $y = 0$ y como $\|y_n\| \to \|y\|$, entonces $\|y_n - y\| \to 0$.

(b) Si $\|y\| > 0$, sea $x_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$ y $x = \frac{y}{\|y\|}$, entonces $\|x_n\| \to \|x\|$ y (x_n) converge débilmente a x.

---

[2] Ver [Dy].

P.D. $\|x_n - x\| \to 0$. Supóngase lo contrario. De la convexidad localmente uniforme se deduce que $\exists (x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, tal que $\left\|\frac{x_{n_k}+x}{2}\right\| < \alpha < 1$.

Por una de las consecuencias del teorema de Hahn-Banach[3] $\exists f \in V^*$, $\|f\| = 1$ y $f(x) = \|x\| = 1$. Para tal f tenemos que: $\frac{1}{2}|f(x_{n_k})+1| = \left|f\left(\frac{x_{n_k}+x}{2}\right)\right| \leq \left\|\frac{x_{n_k}+x}{2}\right\| < \alpha < 1$.

Por lo tanto $2 \leq |f(x_{n_k}) + 1| + |1 - f(x_{n_k})|$, por lo que: $1 - \frac{1}{2}|f(x_{n_k}) + 1| \leq \frac{1}{2}|1 - f(x_{n_k})|$, de donde: $0 < 1 - \alpha < 1 - \frac{1}{2}|f(x_{n_k}) + 1| \leq \frac{1}{2}|1 - f(x_{n_k})|$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto $f(x_{n_k}) \overset{\|\ \|}{\not\longrightarrow} f(x)$, i.e. x_n no converge débilmente a x, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto $\|x_n - x\| \to 0$. $\square$

5.15 Lema. Si $(V, \|\ \|)$ es uniformemente convexo, entonces es localmente uniformemente convexo.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $(x_n) \in V$, $x \in V$ con $\|x_n\| = \|x\| = 1$ y $\left\|\frac{x_n+x}{2}\right\| \to 1$. Supóngase que $\|x_n - x\| \not\to 0$, sea $\varepsilon > 0$, entonces $\exists (x_{n_k})$ una subsucesión de (x_n) tal que $\|x_{n_k} - x\| > \varepsilon$ y por ser $(V, \|\ \|)$ uniformemente convexo, entonces $\exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0,1)$ tal que $\left\|\frac{x_{n_k}+x}{2}\right\| \leq 1 - \delta$ lo cual contradice la hipótesis, por lo tanto $\|x_n - x\| \to 0$. $\square$

El teorema 5.11 dice que si $p > 1$, entonces $(\mathcal{L}_p, \|\ \|_p)$ es uniformemente convexo. Con los resultados probados hasta el momento estamos en posibilidad de analizar que sucede con $\mathcal{L}_1$ respecto de su convexidad uniforme. De esto se encarga el siguiente teorema:

5.16 Teorema. $\mathcal{L}_1([0, 2\pi], \mathcal{B}_{[0,2\pi]}, \lambda)$ no es localmente uniformemente convexo. (y por lo tanto no es uniformemente convexo).

DEMOSTRACIÓN. Sea $f_n(x) = 1 + \operatorname{sen}(nx)$, $f(x) = 1$. $f, f_n \in \mathcal{L}_1$, de hecho $\|f\|_1 = \|f_n\|_1 = 2\pi$, de donde $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$.

Sea $G \in \mathcal{L}_1^*$, entonces $\exists g \in \mathcal{L}_\infty$ tal que $G(h) = \int_{[0,2\pi]} hg\, d\lambda$.

---

[3] Ver [Ru].

P.D. $\lim_{n\to\infty} G(f_n) = G(f)$.

Pero $G(f_n) = \int_{[0,2\pi]} f_n g\, d\lambda = \int_{[0,2\pi]} g\, d\lambda + \int_{[0,2\pi]} (\operatorname{sen} nx) g\, d\lambda$ y por el lema de Riemann-Lebesgue[4]:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,2\pi]} f_n g\, d\lambda = \int_{[0,2\pi]} g\, d\lambda + \lim_{n\to\infty} \int_{[0,2\pi]} (\operatorname{sen} nx) g\, d\lambda$$
$$= \int_{[0,2\pi]} g\, d\lambda = G(f). \qquad \forall G \in \mathcal{L}_1^*$$

Por lo tanto f_n converge débilmente a f pero $\|f_n - f\|_1 = 4\ \forall n$.

Por lo que $\|f_n - f\|_1 \not\to 0$, y por el lema 5.14 $\mathcal{L}_1$ no es localmente uniformemente convexo. $\square$

5.17 TEOREMA. Es posible probar que $(C[a,b], \|\ \|_\infty)$ tampoco es localmente uniformemente convexo.

[4] Ver [Zy].

Referencias

[A-B] Asplund, E. y Bungart, L., *A First Course in Integration*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[Ba1] Bartle, R. G., *The Elements of Integration*, John Wiley & Sons, New York, 1966.

[Ba2] Bartle, R. G., *Introducción al Análisis Matemático*, Limusa, México, 1982.

[Bl] Blumberg, H., On convex functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **20**, 40–44, 1919.

[Cl] Clarkson, J. A., Uniformly Convex Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **40**, 396–414, 1936.

[Dy] Day, M. M., Reflexive Banach Spaces not Isomorphic to Uniformly Convex Spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **40**, 313–317, 1941.

[D-S] Dunford, N. y Schwartz, J., *Linear Operators*, **Vol. 1**, Wiley & Sons, 1958.

[GG] Grabinsky, G. S., *Ejercicios de Teoría de la Medida e Integración de Lebesgue*, Vínculos Matemáticos **166**, Facultad de Ciencias, UNAM, 1987.

[H-L-P] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. y Pólya, G., *Inequalities*, Cambridge at the University Press, London, 1934.

[H-S] Hewitt, E. y Stromberg, K., *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1969.

[Pe] Pettis, B. J., A Proof that Every Uniformly Convexe Space is Reflexive, *Duke Math. J.* bftit 5, 249–253, 1939.

[Ro] Royden, H. L., *Real Analysis*, Macmillan, New York, 1968.

[Ru] Rudin, W., *Functional Analysis*, Mc Graw Hill, New York, 1973.

[Si1] Sierpiński, W., Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$, *Fundamenta Math.* 1, 116–122, 1920.

[Si2] Sierpiński, W., Sur les fonctions convexes mesurables, *Fundamenta Math.* 1, 125–129, 1920.

[Za] Zaanen, A.C., *Linear Analysis*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1953.

[Zy] Zygmund, A., *Trigonometric Series*, Vol. 1, Cambridge at the University Press, London, 1959.