UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA D MEXICO.

FACULTAD DE CIENCIAS

"DERIVA ELECTROMAGNETICA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A

FRANCISCO JAVIER CRISTERNA DELGADO.

MEXICO, D. F. 1988.

Contenido:

Introducción:

Capitulo I
teoría especial de la relatividad y elementos del análisis tensorial

1.1 Antecedentes 1
1.2 tensores covariantes y contravariantes 8
1.3 transformación de Lorentz 12
1.4 Intervalo 18
1.5 tiempo propio 20
1.6 Dinámica relativista 21

Capitulo II
Formulación covariante de la electrodinámica clásica

2.1 Ecs. de Maxwell (generalidades) 25
2.2 Ec. de Continuidad 41
2.3 Campos dependientes del tiempo 43
2.4 Las ecs. de Maxwell 46
2.5 formulación tensorial de las ecs. de Maxwell 50
2.6 Principio de Hamiltón, teorema de Noether 60
2.7 transformación de la densidad Lagrangeana 64
2.8 Ecs. de movimiento de una partícula en un C.E.M. 67

Capitulo III
Deriva electromagnética.

3.1 Tensor de energía-momento 71
3.2 tensor de energía-momento del C.E.M. 74
3.3 Invariantes 75
3.4 Velocidad de deriva 78
Concluciones 95
Referencias 97

Introducción:

Uno de los grandes personajes contemporeneos de nuestro siglo fué sin duda Albert Einstein quien gracias a su genial intelecto revoluciono la física de tal manera que con su contribución aun se siguen obteniendo resultados que nos permiten conocer mas intimamente los secretos de la naturaleza, lo que a su vez da lugar a una reinterpretación mas objetiva de la esencia del universo.

El presente trabajo consta de tres capitulos y de inicio con un repaso de los conceptos fundamentales de la teoría especial de la relatividad junto con las consecuencias principales que de ella se deducen, lo anterior, no sin antes esbozar brevemente las propiedades básicas de los tensores tetradimensionales, los cuales son la herramienta adecuada para la física en cuatro dimensiones.

En el capitulo dos se empieza por revizar la formulación de la electrodinámica clásica debida a Maxwell. Para despues formularla en el lenguaje covariante o tensorial en el espacio-Tiempo que es en donde en realidad transcurren todos los fenómenos físicos.

Finalmente en el capitulo tres se considera en forma general el tensor de energía-momento para despues particularizarlo al caso del campo electromagnético que junto con los invariantes de dicho campo, nos conducen a determinar un sistema de referencia inercial elegido apropiadamente en el que el movimiento de una partícula o grupo de partículas cargadas que se mueven en un campo electromagnético se reduce a su forma mas sencilla.

Capitulo I

Teoría especial de la relatividad y elementos de Análisis tensorial

1.1 Antecedentes.

En nuestra vida cotidiana, muchos de los fenómenos que ocurren a nuestro alrededor, son regidos por la mecánica clásica formulada por Newton. Conforme el hombre ha penetrado en los secretos de la naturaleza, ha reformulado numerosas Teorías con la finalidad de que describan cada vez mas objetivamente el mundo que nos rodea.

A finales del siglo pasado y principios de este hubo que reformular la mecánica de Newton, debido a que numerosos experimentos llevados a cabo con la intención de detectar el movimiento absoluto de un sistema (la tierra), arrojaron resultados negativos de acuerdo a la teoría vigente en esa época; uno de tales experimentos es el famoso experimento de Michelson-Morley que puso en evidencia las siguientes cuestiones:

1.- La velocidad de la luz en la dirección del movimiento de la tierra es igual que en sentido contrario a dicho movimiento, o en otras palabras; La velocidad de la luz no depende de la dirección de su propagación, lo cual se encuentra en contradiccion con la ley de suma de velocidades deducida a partir de las transformaciones de Galileo.

2.- El carácter límite de la velocidad de la luz, $c \approx 300{,}000\ \mathrm{km/s}$, indica que la velocidad de propagación de las interacciones no es infinita como se contempla en la mecánica Newtoniana.

3.- El tiempo no es absoluto, ya que depende del sistema de referencia inercial con respecto al cual se está considerando. La simul-

-taneidad tambien pierde su carácter absoluto, ya que hablar de simulta-neidad solo tiene sentido si se refiere a algún sistema de referencia inercial dado.

Entre los físicos interesados en éste problema, destaca Albert Einstein, quien a principios de siglo motivado por lo anterior, inició una minuciosa revisión de los conceptos iniciales de la física Newtoniana, principalmente de las propiedades del espacio y el tiempo que en aquella época tenian el caracter de entes absolutos e independientes, y que con la nueva interpretación forman un ente unificado que constituye el espacio-tiempo ó espacio de Minkowski, donde además de las tres coordenadas espaciales, se adiciona la coordenada temporal y en el cual transcurren todos los fenómenos físicos. Por lo tanto, un punto evento en éste espacio tetradimensional queda definido por el punto del espacio y el instante en que suceda y a su evolución se le denomina línea del universo de dicho punto, como se verá mas adelante.

A. Einstein como resultado de su análisis de los hechos experimentales relacionados con el problema anterior deduce dos postulados que lo conducen a formular la teoría especial de la relatividad, que mas que ser una ley de la naturaleza, es una ley sobre como deben ser las leyes de la naturaleza al ser descritas en los diferentes sistemas de referencia inerciales.

1er postulado

todos los fenómenos físicos transcurren de igual manera en todos los sistemas de referencia inerciales; Todas las leyes de la naturaleza y las ecuaciones que las describen, son invariantes, es decir, no varian durante el paso de un sistema de referencia inercial a otro.

2do Postulado

La velocidad de la luz en el vacio no depende de las condiciones de movimiento entre la fuente y el observador y es igual en todas las direcciones, es decir, la velocidad de la luz es igual en todos los sistemas de referencia inerciales.

En concordancia con el primer postulado, la teoría de la relatividad requiere que las leyes de la física sean invariantes ante transformaciones entre sistemas de referencia inerciales este requerimiento es satisfecho por la transformación de Lorentz, la cual es un caso particular de las transformaciones llamadas pseudo ortogonales; Además podemos hacer uso del análisis Tensorial que maneja entes y propiedades que son indiferentes al sistema de referencia elegido y por lo tanto es una herramienta matemática útil, compacta y elegante para expresar adecuadamente las leyes de la naturaleza.

Antes de entrar en materia repasemos brevemente las transformaciones ortogonales y algunos elementos del análisis tensorial.

Primero consideremos las propiedades de transformación de los vectores de cuatro dimensiones. Consideremos un continuo tetradimensional y sean x_0, x_1, x_2, x_3 las coordenadas de un punto Q referidas a un sistema de referencia Σ, en ese continuo la localización del punto Q con respecto al origen esté determinado por el vector

$$\vec{r} = x_0\hat{e}_0 + x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$$

donde $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_k = \delta_{ik}$; es decir son ortogonales, por lo tanto las coordenadas de Q son

$$x_k = \sum_{k=0}^{3} \vec{r}\cdot\hat{e}_k$$

Supongamos ahora que $\hat{e}_0'$, $\hat{e}_1'$, $\hat{e}_2'$, $\hat{e}_3'$ son los vectores base de un segundo sistema de coordenadas $\bar{X}'$ cuyo origen O' coincide con O y el cual difiere del primer sistema por una rotación de sus ejes coordenados, en este :

$$\vec{r} = x_0'\hat{e}_0' + x_1'\hat{e}_1' + x_2'\hat{e}_2' + x_3'\hat{e}_3'$$

las coordenadas de Q con respecto a $\bar{X}'$ son:

$$x_j' = \vec{r}\cdot\hat{e}_j' = x_0\hat{e}_0\hat{e}_j' + x_1\hat{e}_1\hat{e}_j' + x_2\hat{e}_2\hat{e}_j' + x_3\hat{e}_3\hat{e}_j'$$

cada coordenada de Q en $\bar{X}'$ es una función lineal de sus coordenadas en $\bar{X}$, por lo tanto los coeficientes

$$e_{jk} = \hat{e}_j'\hat{e}_k$$

son los cosenos directores de los ejes de coordenadas de $\bar{X}'$ con respecto a los de $\bar{X}$.

De aquí en adelante, adoptaremos el convenio de suma de Einstein, por lo tanto, omitiremos los signos de suma entendiendo que ésta debe realizarse para los subíndices que aparecen dos veces.

Con lo anterior, las coordenadas de un punto con respecto a la rotación del sistema de coordenadas pueden ser representadas por la transformación lineal.

$$x_j = e_{jk} x_k \qquad j,k = 0,1,2,3 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

con respecto a la distancia del vector tenemos:

$$(x_j')^2 = (x_j')(x_j') = (e_{jk} x_k)(e_{jl} x_l) = x_k x_l (e_{jk} e_{jl}) = (x_i)^2 \quad . \quad (2)$$

de donde se sigue que

$$e_{jk} e_{jl} = \delta_{kl} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ésta es la llamada condición de ortogonalidad entre los ejes coordenados de ambos sistemas.

La ecuación (1) sujeta a la condición de ortogonalidad (3), recibe el nombre de transformación ortogonal.

De la ecuación (2) se ve que el determinante

$$|e_{jk} e_{jl}| = |e_{jk}||e_{jl}| = |e_{jk}|^2 = 1$$

de donde

$$|e_{jk}| = \pm 1.$$

El caso en que $|e_{jk}| = 1$ corresponde a una rotación de ejes, y el caso en que $|e_{jk}| = -1$ corresponde a una reflexión de los ejes de coordenadas. Nos limitaremos a considerar solo el primer caso, es decir, solo el caso en que la transformación corresponde a una rotación de los ejes coordenados.

La característica principal de este tipo de transformaciones es que dejan invariante la suma de cuadrados de las coordenadas como se puede ver en la ecuación (2)

Ahora podemos definir un vector en cuatro dimensiones ó tetra-vector de la manera siguiente:

Un tetravector es un conjunto de cuatro escalares variables A_i, $i = 0,1,2,3$ los cuales se transforman en una rotación del sistema de coordenadas como las coordenadas de un punto, esto es:

$$A_j' = e_{jk} A_k \qquad y \qquad A_k = e_{jk} A_j' \qquad j,k = 0,1,2,3$$

Sea un tetravector A cuyas componentes son funciones lineales de las componentes de un vector B, es decir,

$$A_0 = K_{00} B_0 + K_{01} B_1 + K_{02} B_2 + K_{03} B_3$$

$$A_1 = K_{10} B_0 + K_{11} B_1 + K_{12} B_2 + K_{13} B_3$$

$$A_2 = K_{20} B_0 + K_{21} B_1 + K_{22} B_2 + K_{23} B_3$$

$$A_3 = K_{30} B_0 + K_{31} B_1 + K_{32} B_2 + K_{33} B_3$$

ó brevemente

$$A_j = K_{jm} B_m \qquad j,m = 0,1,2,3 \quad \ldots (4)$$

los 16 coeficientes K_{jm} son las componentes del tensor de la trans-formación lineal anterior.

Si (4) es invariante con respecto a la transformación lineal defi-nida por $X_j^{\prime} = e_{jm} X_m$, entonces K_{jm} debe transformarse en $K^{\prime}_{il}$ tal que:

$$A^{\prime}_i = K^{\prime}_{il} B^{\prime}_l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

multiplicando (4) por e_{ij}:

$$e_{ij} A_j = e_{ij} K_{jm} B_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

por otro lado

$$A^{\prime}_i = e_{ij} A_j \quad ; \quad B_m = e_{lm} B^{\prime}_l$$

sustituyendo en (6)

$$A^{\prime}_i = e_{ij} e_{lm} K_{jm} B^{\prime}_l$$

comparando con (5) se deduce que las componentes de un ten-sor de rango 2 se transforma de acuerdo con la ley

$$K^{\prime}_{il} = e_{ij} e_{lm} K_{jm} \qquad i,j,l = 0,1,2,3 \quad \ldots (7)$$

En general, en un sistema de n dimensiones, se pueden defi-nir tensores de mayor rango, el rango del tensor queda deter-

-minado por el número de subíndices, asi K_{ij} es un Tensor de rango 2, K_{ijm} de rango 3, etc.

1.2 Tensores covariantes y contravariantes.

Un Tensor A, puede ser descrito en un sistema de referencia $\bar{X}$ con respecto a su base $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$, ..., pero también puede ser descrito en términos de los vectores base $\hat{e}^1$, $\hat{e}^2$, $\hat{e}^3$ ... de otro sistema de referencia $\bar{Y}$. Estos vectores base son inversos ó recíprocos mutuamente y el sistema formado por los $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ ..., se llama recíproco del sistema formado por los $\hat{e}^1$, $\hat{e}^2$, $\hat{e}^3$, ..., es decir,

$$e_i = \frac{1}{e^i} \quad ; \qquad e^i e_i = 1 \qquad y \qquad e^i e_j = 0$$

ó lo que es lo mismo

$$e^i e_j = \delta^i_j$$

Sea un tensor $A_{a_1 a_2 a_3 \ldots}$, referido a un sistema de referencia $\bar{X}$, si este Tensor se transforma en un Tensor $B_{b_1 b_2 b_3 \ldots}$, referido a un sistema de referencia $\bar{Y}$, de acuerdo con la ley

$$B_{b_1 b_2 b_3 \ldots} = \frac{\partial x^{a_1}}{\partial y^{b_1}} \frac{\partial x^{a_2}}{\partial y^{b_2}} \frac{\partial x^{a_3}}{\partial y^{b_3}} \cdots A_{a_1 a_2 a_3 \ldots}$$

entonces $A_{a_1 a_2 a_3 \ldots}$ es un Tensor covariante, pero si se Transforma de acuerdo a la ley

$$B^{b_1 b_2 b_3 \ldots} = \frac{\partial y^{b_1}}{\partial x^{a_1}} \frac{\partial y^{b_2}}{\partial x^{a_2}} \frac{\partial y^{b_3}}{\partial x^{a_3}} \cdots A^{a_1 a_2 a_3 \ldots}$$

es un tensor contravariante. Los tensores covariantes se identifican tradicionalmente con subíndices y los contravariantes con superíndices. también existen tensores mixtos, es decir, con ambos caracteres, covariantes y contravariantes, el carácter queda señalado por la posición de uno u otro índice, por ejemplo:

$$A^{a_1 a_2 a_3 \ldots a_r}_{b_1 b_2 b_3 \ldots b_s}$$

el cual representa un tensor s veces covariante y r veces contravariante.

Al igual que los tensores de rango superior, las componentes de un tetratensor se pueden representar en tres formas, a saber:

covariantes	A_{ij}
contravariantes	A^{ij}
mixtos	A^{j}_{i} ó A^{i}_{j}

Un tetratensor de de primer rango es considerado como un vector tetradimensional ó tetravector.

Ahora consideremos cuatro magnitudes A_0, A_1, A_2, A_3 definidas en el sistema tetradimensional $\underline{X}$, sea otro sistema tetradimensional $\underline{X}'$ en el cual estan definidas otras cuatro magnitudes A'_0, A'_1, A'_2, A'_3. Estas magnitudes se encuentran relacionadas en ambos sistemas por la ecuacion:

$$A'_i = e_{ik} A_k \qquad i,k = 0,1,2,3$$

que como ya se ha mencionado antes, define un tetravector, éste puede ser representado en dos formas, como un vector covariante A_i ó contra-variante A^i.

Se puede formar el producto escalar de dos tetravectores A y B

$$A_i B^i = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3$$

que como resultado nos da un escalar y se considera como un tetraten-sor de rango cero.

Analicemos algunas de las propiedades mas importantes de éstos entes matemáticos.

1.- Consideremos dos tensores del mismo rango, al sumarlos ó restarlos obtenemos un tensor de idéntico rango.

$$A_{a_1 a_2 a_3 \ldots} \pm B_{a_1 a_2 a_3 \ldots} = C_{a_1 a_2 a_3 \ldots}$$

2.- Al multiplicar un tensor de rango r por otro tensor de rango s, se obtiene un tensor cuyo rango es la suma de los rangos de los ten-sores involucrados :

$$(A_{a_1 a_2 \ldots a_r})(B_{b_1 b_2 \ldots b_s}) = C_{a_1 a_2 \ldots a_r b_1 b_2 \ldots b_s}$$

3.- Si tenemos un tensor de rango r, de éste se puede obtener otro de rango r-2 igualando un índice superior con otro inferior y sumando sobre éste índice. La operación anterior recibe el nombre de contracción.

4.- Un tensor se llama simétrico, si al intercambiar dos de sus índices su signo no cambia $\qquad A_{a_1 a_2 a_3 \ldots} = A_{a_2 a_1 a_3 \ldots}$

o antisimétrico si $\qquad A_{a_1 a_2 a_3 \ldots} = -A_{a_2 a_1 a_3 \ldots}$

la simetría o antisimetría de un tensor es invariante bajo el cambio de coordenadas.

1.3 Transformación de Lorentz.

Lorentz demostró que las ecuaciones teóricas estan de acuerdo con la imposibilidad de detectar el movimiento absoluto, si se admite que los cuerpos que estan en movimiento se acortan, y si además, se toma una medida del tiempo local en el sistema de referencia inercial que se encuentra en reposo diferente a la del sistema de referencia inercial que esta en movimiento.

Lo anterior fue expresado en lenguaje matemático por Lorentz en forma de una transformación que permite relacionar las coordenadas espaciales y temporales de ambos sistemas que recíprocamente se encuentran en movimiento rectilineo y uniforme.

Consideremos dos sistemas de referencia inerciales $\underline{X}$ y $\underline{X}'$, el segundo se mueve con respecto al primero con una velocidad constante $\vec{v}$ en la dirección del eje x positivo. Consideremos un desplazamiento infinitesimal de una señal luminosa emitida en el primer sistema, ésta cumple la relación:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0 \qquad \ldots\ldots\ (8)$$

la misma señal, pero vista desde $\underline{X}'$, también satisface el principio de la constancia de la velocidad de la luz, es decir:

$$ds'^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \qquad \ldots\ldots\ (9)$$

representemos las ecuaciones anteriores en el espacio-tiempo de Minkowski, para lo cual usaremos la siguiente notación:

$$dx^0 = c\,dt\,, \quad dx^1 = dx\,, \quad dx^2 = dy\,, \quad dx^3 = dz$$

con esto las ecuaciones (8) y (9) toman la forma siguiente :

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = 0 \quad y$$

$$ds'^2 = dx_0'^2 - dx_1'^2 - dx_2'^2 - dx_3'^2 = 0$$

La expresión (8) recibe el nombre de intervalo entre dos sucesos y representa la distancia entre dos puntos o eventos en éste espacio de cuatro dimensiones. De acuerdo al segundo postulado se debe tener que

$$ds^2 = K(v)\,ds'^2$$

donde $K(v)$ es una función que depende solo del valor absoluto de la velo--cidad entre ambos sistemas de referencia inerciales. Esto es una con--secuencia de la uniformidad del espacio y el Tiempo. La teoría de la relatividad requiere que esta función sea constante. Cuando ambos sis--temas se encuentran en reposo se debe tener la Transformación iden--tidad, por lo tanto $K(v) = 1$; es decir

$$ds^2 = ds'^2$$

o en el caso de intervalos finitos

$$S = S' \quad \text{.} \ \text{.} \ \text{.} \ \text{.} \ \text{.} \ \text{.} \ \text{.} \ \text{.} \ \text{.} \ \text{.} \ \text{.} \ \text{.} \ \text{.} \ \text{.} \quad (10)$$

Esta igualdad define la transformación de Lorentz, que es análoga a una transformación ortogonal de las coordenadas y geometricamen-

-te corresponde a un giro del sistema de referencia y cuya principal característica es la de conservar invariante la suma del cuadrado de las coordenadas

De los giros que se pueden efectuar del sistema de referencia tetradimensional, consideremos el que corresponde al giro entre un plano coordenado espacial y el plano coordenado temporal (x–t , y–t , z–t), ya que los que corresponden a planos coordenados espaciales únicamente (x–y , y–z, x–z) solo transforman las coordenadas espaciales.

Por ejemplo, trataremos el giro en el plano t–x considerando y y z sin variación; Esto corresponde a hacer deslizar el eje x' del sistema primado sobre el eje x del sistema sin primas; como se muestra en la figura 1.

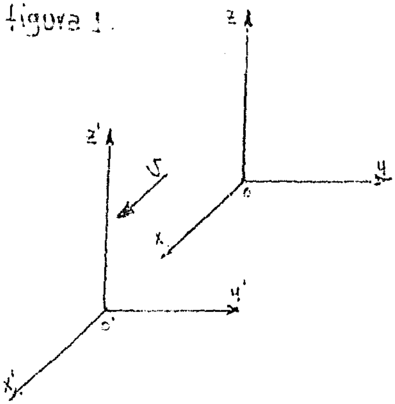


Fig. 1

De acuerdo a la notación anteriormente expuesta, y considerando un observador en el sistema primado, la transformación se puede expresar de la siguiente manera:

$$X'^{0} = aX^{0} + bX^{1}$$

$$X'^{1} = cX^{0} + dX^{1}$$

$$X'^{2} = X^{2}$$

$$X'^{3} = X^{3}$$

De acuerdo con la homogeneidad del espacio y el tiempo, podemos asegurar que la expresión que relaciona las coordenadas que sí se transforman, es lineal, es decir :

$$x'^0 = ax^0 + bx^1$$
$$x'^1 = cx^0 + dx^1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(11)}$$

o en forma matricial se tiene que :

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

considerando (10) se debe cumplir que :

$$(x'^0)^2 - (x'^1)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2$$

sustituyendo (11) en la ecuación anterior y elevando al cuadrado:

$$a^2x^{0^2} + 2ab\,x^1x^0 + b^2x^{1^2} - c^2x^{0^2} - 2cd\,x^0x^1 - d^2x^{1^2} = x^{0^2} - x^{1^2}$$

factorizando :

$$(a^2-c^2)x^{0^2} + (b^2-d^2)x^{1^2} + 2(ab-cd)x^0x^1 = x^{0^2} - x^{1^2}$$

identificando coeficientes:

$$a^2 - c^2 = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(12)}$$
$$b^2 - d^2 = -1 \implies d^2 - b^2 = 1 \qquad \ldots\ldots \text{(13)}$$
$$ab - cd = 0 \implies ab = cd; \quad b = \frac{cd}{a} \qquad \ldots \text{(14)}$$

sustituyendo el valor de b en (13) :

$$d^2 - \frac{c^2d^2}{a^2} = 1 \quad ; \quad d^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = 1 \quad ;$$

$$d^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right) = 1 \quad \text{considerando (12)} \quad \frac{d^2}{a^2} = 1 \implies d^2 = a^2$$

de donde $$|d| = |a| \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

de nuevo (12)

$$a^2 - c^2 = 1$$

pero recordando que $\cosh^2\alpha - \operatorname{senh}^2\alpha = 1$ y comparando se ve que

$$a^2 = \cosh^2\alpha \qquad y \qquad c^2 = \operatorname{senh}^2\alpha$$

como $\cosh\alpha > 0$, entonces

$$d = a = \cosh\alpha \qquad y \qquad b = c = \pm \operatorname{senh}\alpha$$

sustituyendo en la matriz :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \pm\operatorname{senh}\alpha \\ \pm\operatorname{senh}\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} x'^0 &= \cosh\alpha\, x^0 \pm \operatorname{senh}\alpha\, x^1 \\ x'^1 &= \pm\operatorname{senh}\alpha\, x^0 + \cosh\alpha\, x^1 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (16)$$

si consideramos el origen del sistema primado en el sistema sin pri- -ma se tiene

$$0 = \pm\operatorname{senh}\alpha\, x^0 + \cosh\alpha\, x^1 \implies$$

$$\mp\operatorname{senh}\alpha\, x^0 = \cosh\alpha\, x^1 \implies \mp\tanh\alpha = \frac{x^1}{x^0} = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c} = \beta$$

se define α tal que $$\tanh\alpha = \frac{v}{c} = \beta$$

con lo anterior en cuenta la matriz de transformación es

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\operatorname{senh}\alpha \\ -\operatorname{senh}\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

además como

$$\cosh^2\alpha - \operatorname{senh}^2\alpha = 1 \quad ; \quad 1 - \tanh^2\alpha = \frac{1}{\cosh^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\cosh^2\alpha = \frac{1}{1-\tanh^2\alpha} = \frac{1}{1-v/c} \quad ; \quad \cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

con lo que finalmente las ecuaciones de transformación son:

$$x'^0 = \frac{x^0 - v/c\, x^1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad y \quad x'^1 = \frac{-v/c\, x^0 + x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

o en términos de las antiguas coordenadas se tiene:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \; ; \quad t' = \frac{t - v/c^2\, x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad y' = y \quad z' = z \quad \ldots\ldots (17)$$

pero si consideramos el movimiento desde el sistema no primado se tiene que:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \; ; \quad t = \frac{t' + v/c^2\, x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad y = y' \quad z = z' \quad \ldots\ldots (18)$$

por lo que dependiendo de que el observador se encuentre en el sistema $\bar{x}$ ó $\bar{x}'$, la transformación diferirá únicamente en el signo de v (ó de α). Para giros en el plano t-y y t-z se cumplen fórmulas análogas.

La fórmula de transformación (16) corresponde a una rotación hiperbólica de coordenadas en analogía con la transformación correspondiente a una rotación en el espacio ordinario, la cual es expresada en términos de funciones circulares. Lo anterior es debido esencialmente al signo negativo entre la coordenada temporal y las coordenadas espaciales en el intervalo (8)

1.4 Intervalo.

Otra de las diferencias entre el espacio ordinario y el espacio-tiempo radica en que en el primero la métrica es siempre positiva ó cero únicamente cuando los dos puntos coinciden, y en el segundo puede ser positiva, negativa ó nula, como veremos en seguida:

Según la formula (8) el intervalo entre dos eventos es:

$$S^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

que en términos de componentes covariantes y contravariantes respectivamente, toma la forma siguiente :

$$S^2 = \eta^{\mu\nu} X_\mu X_\nu = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \quad ; \quad \mu,\nu = 0,1,2,3$$

en donde $\eta_{\mu\nu}$ y $\eta^{\mu\nu}$ son los llamados tensores métricos, cuyas componentes son :

$$|\eta_{\mu\nu}| = |\eta^{\mu\nu}| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y además

$$\eta_{\mu\delta}\,\eta^{\nu\delta} = \delta^{\nu}_{\mu} = \begin{matrix} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{matrix}$$

las componentes covariantes y contravariantes se relacionan median-te las fórmulas siguientes:

$$X_\mu = \eta_{\mu\nu} X^\nu \qquad \text{y} \qquad X^\nu = \eta^{\mu\nu} X_\mu$$

ó explicitamente

$$X_0 = X^0; \quad X_1 = -X^1; \quad X_2 = -X^2; \quad X_3 = -X^3$$

con lo anterior

$$(X^\mu) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$$

$$(X_\mu) = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\vec{r})$$

esto permite expresar el intervalo de la siguiente manera:

$$S^2 = X^\mu X_\mu = X_\mu X^\mu = c^2 t^2 - r^2$$

como ya fue mencionado, el intervalo puede ser de tres ti-pos dependiendo de la relación entre las coordenadas espacial-es y la temporal, a saber:

Si $S^2=0$ el intervalo se denomina nulo, e indica que ambos eventos pueden ser unidos mediante una señal que se propague con velocidad c. A su vez $S^2=0$ define una superficie llamada cono de luz como se muestra en la figura 2, esta superficie divide el espacio-tiempo en 3 regiones: 1.- futuro absoluto 2.- Pasado absoluto y 3.- alejada en absoluto.

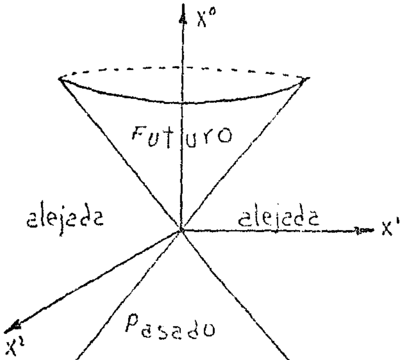


Fig. 2.

Cuando $S^2>0$ el intervalo es tipo temporal, ambos eventos se encuentran dentro del cono de luz y pueden ser unidos mediante una señal luminosa que se propague con una velocidad inferior a c. Se puede encontrar un sistema de referencia en el cual ambos eventos ocurran en el mismo lugar a tiempos diferentes.

El caso en que $S^2<0$ el intervalo es tipo espacial, y se caracteriza por el hecho de que un evento se encuentra dentro del cono de luz y el otro fuera de él, en este caso, los eventos no pueden ser unidos por una señal luminosa, ya que ésta no puede propagarse con una velocidad mayor que c; pero sin embargo se puede encontrar un sistema de referencia en el que los dos eventos suceden al mismo tiempo pero en lugares separados.

1.5 tiempo propio.

Consideremos de nuevo los dos sistemas de referencia inerciales $\bar{X}$ y $\bar{X}''$, los cuales se encuentran como antes, en movimiento relativo con velocidad

v. si en el sistema primado se encuentra momentáneamente en reposo una partícula, el intervalo en el sistema no primado será:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt^2 - d\vec{r}^2$$

mientras que en el sistema que viaja con la partícula, $d\vec{r}' = 0$ por lo tanto:

$$ds'^2 = c^2 dt'^2$$

pero como el intervalo es un invariante

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{r}^2 = c^2dt'^2 \quad ; \quad dt' = \sqrt{\frac{ds^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{c^2dt^2 - d\vec{r}^2}{c^2}} \Rightarrow$$

$$dt' = dt\sqrt{1 - v^2/c^2} = dt\sqrt{1-\beta^2}$$

Esta expresión recibe el nombre de tiempo propio y representa el tiempo medido por un veloj que se mueve con la partícula, y se denota por $d\tau$;

$$d\tau = (1-\beta^2)^{1/2}dt$$

cuando $v \ll c$ se tiene que $d\tau \approx dt$, esto es, corresponde al invariante dt de la física pre-relativista como es de esperarse.

1.6 Dinámica relativista

En el espacio tetradimensional, la velocidad relativista se define como:

$$U^\mu = \frac{d}{d\tau} X^\mu = \frac{d}{d\tau}(ct, \vec{r})$$

análogamente se define la aceleración tetradimensional.

$$A^\mu = \frac{d^2}{d\tau^2} U^\mu = \frac{d^2}{d\tau^2}(ct, \vec{r})$$

con lo que podemos definir el momentum en éste espacio, es decir,

$$(P^\mu) = (m_0 U^\mu) = m_0 \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right)$$

ó en forma covariante :

$$(P_\mu) = (m_0 U_\mu) = m_0 \left(c\frac{dt}{d\tau}, -\frac{d\vec{r}}{d\tau} \right)$$

consideremos por partes la ecuación anterior ; Primero la parte temporal ;

$$P_0 = m_0 c \frac{dt}{d\tau} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{c}\left[\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] = E/c$$

la última igualdad es a consecuencia de que el término entre paréntesis tiene dimensiones de energía . La componente espacial es

$$\vec{P} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

donde $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ es la llamada masa relativista , la cual coincide con la masa en reposo cuando $v <<< c$, en conjunto el vector tetradimensional de momentum es :

$$(P_\mu) = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p} \right)$$

ahora calculemos su magnitud :

$$\eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = P_\nu P^\nu = (P^0)^2 - |\vec{P}|^2 = m_0^2 U_\mu U^\mu = m_0^2 \left(\frac{dx_\mu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} \right)$$

$$= m_0^2 \left(\frac{dx_\mu dx^\mu}{ds^2/c^2} \right) = m_0^2 \left(c^2 \frac{ds^2}{ds^2} \right) = m_0^2 c^2$$

con ésto se llega a la importante relación:

$$(P^0)^2 - |\vec{P}|^2 = m_0^2 c^2 \quad ; \quad \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = m_0^2 c^2$$

donde $\vec{p}^2 = |\vec{p}|^2$. La energía es:

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m_0 c^4$$

Ecuación que nos permite relacionar la energía con el momentum y la masa en reposo. Dado que $m^2 c^4 \geq 0$, de la ecuación anterior se ve que:

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \geq 0 \implies E^2 \geq \vec{p}^2 c^2$$

lo que significa que el vector de energía momentum es tipo temporal.

Es interesante ver que si $m_0 = 0$, la ecuación de energía-momentum se reduce a:

$$E = \tilde{p} c \qquad \text{donde} \qquad \tilde{p} = |\vec{p}|$$

fórmula que se verifica experimentalmente con fotones, los cuales sabemos tienen masa en reposo igual a cero.

En la mecánica clásica pre-relativista, la fuerza se define de la siguiente manera:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0 \vec{v}) = m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} . \qquad \text{si } m_0 = \text{cte.}$$

En el espacio-tiempo, el análogo de la fuerza, puede construirse partiendo del vector de momentum correspondiente, es decir:

$$(F^\nu) = \left(\frac{d}{d\tau}P^\nu\right) = m_0\left(\frac{d^2x^0}{d\tau^2}, \frac{d^2x^i}{d\tau^2}\right) = \gamma m_0\left(\frac{d}{dt}\gamma c, \frac{d}{dt}\gamma v^i\right)$$

$$= \left(\gamma\frac{dP^0}{dt}, \gamma\frac{d\vec{P}}{dt}\right) \qquad i,j = 1,2,3$$

$$\therefore \quad F^\nu = (\gamma F^0, \gamma\vec{F}).$$

Además como

$$U^\mu U_\mu = \text{cte.} \implies A^\mu U_\mu = 0 \implies F^\mu P_\mu = 0$$

pero $P_\mu = (P^0, -\vec{P}) = (\gamma m_0, \gamma m_0\vec{v})$ por lo que

$$\gamma m_0 \frac{dm}{dt} - \gamma m_0 \vec{F}\cdot\vec{v} = 0 \implies \frac{dm}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

integrando se tiene que

$$m_f - m_i = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv \text{trabajo realizado por } \vec{F}$$

Por esta razón $m \equiv P^0$ representa la energía de la partícula.

Capitulo II

-Formulación covariante de la electrodinámica clásica

2.1 Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell forman un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales que constituyen la base del electromagnetismo, en ellas se sintetizan todas las leyes fundamentales de la electricidad y el magne-tismo, unificandolas en una sola teoría.

En esta sección deduciremos cada una de ellas, a partir de leyes es-tablecidas de hechos experimentales y los cuales son los siguientes:

1.- ley de Coulomb.

2.- ley de Biot-savat

3.- ley de inducción de faraday

4.- ley de Maxwell.

Estableceremos primero las ecuaciones diferenciales correspondientes a los campos eléctricos y magnéticos estáticos que se deducen de las leyes 1 y 2. Después estableceremos la ecuación de continuidad, que se deduce de la ley de conservación de la carga, y finalmente, obten-dremos las ecuaciones para los campos electromagnéticos variables con el tiempo usando las leyes 3 y 4.

En orden histórico, la ley de Coulomb (1785) es la primera de las ecuaciones de Maxwell, esta ley propone la expresión para la fuerza entre dos cuerpos cargados eléctricamente, en reposo el uno con res-pecto al otro y separados por una cierta distancia, grande en compa-

-ración con las dimensiones de los cuerpos. Las observaciones hechas por Coulomb, son las siguientes:

1.- varía directamente con la magnitud de la carga.

2.- varía inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las cargas.

3.- está dirigida a lo largo de la línea que une las cargas.

4.- es atractiva para cargas de distinto signo y repulsiva para cargas de igual signo.

La expresión matemática que resume éstas observaciones es

$$\vec{F}_1 = k\,\frac{q_1 q_2}{R^3}\,\vec{R}$$

donde $\vec{F}_1$ representa la fuerza entre las cargas; $\vec{R} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ es el vector dirigido de la carga 1 a la carga 2 y $R = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ es la distancia entre las cargas ($\vec{R}/R$ es el vector unitario dirigido de la carga 1 a la 2, así $\vec{F}_1$ representa la fuerza que actúa sobre la carga 1. debido a la presencia de la carga 2; Por la tercera ley de Newton, $\vec{F}_2$, la fuerza sobre la carga 2 debido a la carga 1; es $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$) ver figura 1

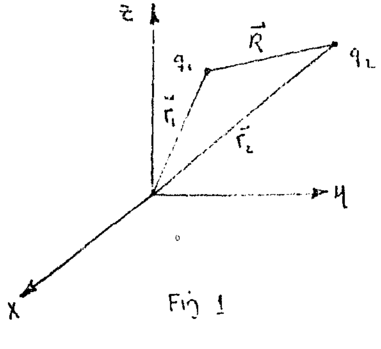


Fig 1

El principio de superposición para las fuerzas se cumple y establece que si se tienen n cargas, entonces sobre una carga Q colocada en el punto de coordenadas $\vec{r}(x,y,z)$ actúa la fuerza eléctrica:

$$F = Q \sum_{k=1}^{n} K \frac{q_k \vec{R}_k}{R_k^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

donde $\vec{R}_k = r - r_k$

Un gran paso en el desarrollo de la teoría se dió con la introducción del concepto de campo eléctrico. Si colocamos una partícula de prueba Q en el punto $\vec{r} = (x, y, z)$, entonces el campo eléctrico se define como la fuerza eléctrica por unidad de carga que actúa sobre dicha partícula, es decir,

$$\vec{F} = Q\,\vec{E}(\vec{r})$$

comparando esta expresión con la ecuación (1) vemos que

$$\vec{E}(r) = \sum_{k=1}^{n} K \frac{q_k \vec{R}_k}{R_k^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

es el campo eléctrico producido por la distribución de n cargas en el punto de observación $\vec{r}$. La constante K depende del sistema de unidades adoptado. En el sistema internacional, $K = 1/4\pi\epsilon_0$, el cual por ser el mas común, usaremos de aquí en adelante.

El flujo de $\vec{E}$ a través de un elemento vectorial de área $d\vec{s}$, se define por la cantidad

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Para una carga puntual se tiene que:

$$d\phi = \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\vec{R}\cdot d\vec{S}}{R^3} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{d\vec{S}\cos\theta}{R^2}$$

donde $q = e$, θ es el ángulo que forman el vector $d\vec{S}$ y el vector $\vec{R}$, con $\vec{R}$ desde la carga e hasta el elemento de superficie $d\vec{S}$.

El producto $d\vec{S}\cos\theta$ numéricamente es igual a la proyección del área $d\vec{S}$ sobre la superficie perpendicular a $\vec{R}$, así mismo este producto es positivo, si desde e se ve el lado interior del área $d\vec{S}$ (el ángulo θ es agudo), y negativo si se ve su lado exterior (el ángulo θ es obtuso):

$$d\vec{S}\cos\theta = \pm\, ds'$$

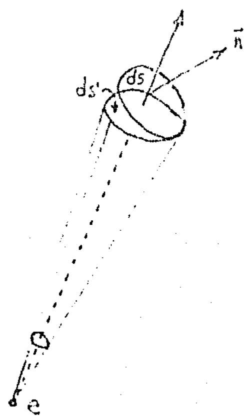


Fig. 2

donde ds' es la magnitud absoluta de la proyección del área perpendicular a $\vec{R}$. El área ds' coincide con el elemento de superficie esférica de radio R con centro en la carga e. Si designamos por $d\Omega$ el ángulo sólido, bajo el cual el área ds' se ve desde e, en tal caso, por definición de ángulo sólido:

$$d\Omega = \frac{ds'}{R^2} = \frac{\pm ds\cos\theta}{R^2}$$

y por consiguiente

$$d\phi = \pm\,\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\,d\Omega$$

el área ds se verá evidentemente desde la carga e bajo el mismo ángulo sólido $d\Omega$. Pero si se conviene atribuir a este án-

-gulo $d\Omega$ el signo positivo cuando desde e se ve el lado interior de ds, y el signo negativo, cuando se ve el lado exterior, entonces puede escribirse en la forma siguiente:

$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\, d\Omega .$$

el flujo ϕ del vector $\vec{E}$ a través de una superficie finita S es:

$$\phi = \int_S d\phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\int d\Omega = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\Omega$$

donde Ω es el ángulo sólido positivo o negativo, bajo el cual se ve desde la carga e toda la superficie S, es decir, el ángulo sólido formado por los radio vectores trazados desde e, a la línea que bordea esta superficie. Cuando la superficie S es cerrada, este ángulo puede tener solamente uno de los dos valores 4π y 0.

En efecto, la carga puntual puede estar situada dentro de la superficie o bien fuera de ella. Si la carga se encuentra dentro de la superficie cerrada S, esta superficie rodea por todos lados y, por consiguiente, se ve desde ella bajo el ángulo sólido $\Omega = 4\pi$, por lo cual en este caso

$$\phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = e/\epsilon_0$$

Si la carga e se encuentra en el exterior de la superficie cerrada S, desde la carga e puede trazarse a S un haz de tangentes. El conjunto de estas tangentes forma un cono

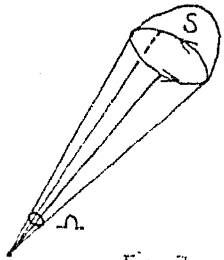


Fig. 3

adyacente a S a lo largo de cierta línea cerrada L, que divide a la superficie en dos partes S_1 y S_2.

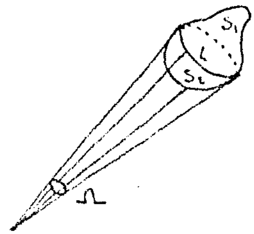


Fig. 4

Ambas partes de la superficie se veran desde la carga e bajo un mismo ángulo sólido correspondiente a la abertura del cono tangencial, además, una de estas partes se verá desde su lado interior y la otra desde el exterior. Por lo tanto a las partes de las superficies S_1 y S_2 corresponderan los ángulos Ω_1 y Ω_2, de iguales magnitudes pero de signos opuestos y su suma da cero, así pues para este caso tenemos:

$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\oint_S d\Omega = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left(\oint_{S_1} d\Omega + \oint_{S_2} d\Omega\right) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}(\Omega_1 + \Omega_2) = 0$$

Si ahora, en lugar de una carga e consideramos una distribución de N cargas, por superposición.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

donde $\vec{E}_i$ es el campo eléctrico de la carga q_i. Por consiguiente:

$$\phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{N} \int_S \vec{E}_i \cdot d\vec{s}_i = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \quad \ldots\ldots (2)$$

donde la última suma se extiende solo a aquellas cargas que estan situadas dentro de la superficie S. La expresión (2) se conoce co-mo ley de Gauss.

En el caso de una distribución continua de carga, la densidad volu-métrica de dicha carga en un punto dado se define como el límite de la relación entre la carga Δq contenida dentro del volumen Δv que rodea a ese punto, y la magnitud de este volumen, esto es:

$$\rho = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv}$$

luego, la carga dq del volumen dv es igual a:

$$dq = \rho\, dv$$

y la carga total que se encuentra en el volumen finito v, es igual a

$$\sum_v dq = \int_v \rho\, dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

si v representa el volumen encerrado por la superficie S, entonces sustituyendo la expresión (3) en la (2) se obtiene:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_v \rho\, dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

la integral del lado izquierdo de (4) se puede transformar en una integral sobre el volumen v, usando el teorema de Gauss:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_v \nabla\cdot\vec{E}\,dv$$

combinando esta expresión con (4) tenemos

$$\int_v \nabla\cdot\vec{E}\,dv = \int_v \frac{1}{\epsilon_0}\rho\,dv$$

como esta expresión se cumple para cualquier volumen v, podemos escribir

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

la anterior es la primera de las ecuaciones de Maxwell, es una consecuencia directa de la ley de Coulomb, y nos proporciona una expresión diferencial para el campo eléctrico.

La expresión para el campo eléctrico en un punto $\vec{r}$ debido a una distribu--ción volumétrica de carga se obtiene sustituyendo la ecuación (3) en (1') de donde se obtiene:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(r)\vec{R}}{R^3}\,dv' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

la integración se realiza sobre las coordenadas $\vec{r}'$ donde se evalua la densi--dad de carga ρ.

Es fácil demostrar que:

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|r-r'|^3} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

donde el operador ∇ actúa solo sobre la variable $\vec{r}$. Usando este resultado en (6) y tomando en cuenta que ∇ no opera sobre la variable de integración $\vec{r}'$ (lo que permite cambiar la derivación e integración) la expresión (6) se puede escribir como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(r) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

donde

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dv' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

como el rotacional de un gradiente es identicamente nulo, de (7) se deduce que

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

para campos electrostaticos. finalmente sustituyendo (7) en la ecuación (5) se deduce que la función $\phi(\vec{r}')$ es solución de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Además se demuestra matemáticamente que (8) es la única solución de la ecuación de Poisson que satisface las condiciones límites siguientes: En el infinito ϕ tiende a cero no mas lentamente que $1/r$, y su gradiente no mas lentamente que $1/r^2$. Este resultado nos será muy útil mas adelante.

Ahora deduciremos dos ecuaciones mas, ambas conciernen a fenómenos de campos magnéticos que no dependen del tiempo.

La idea de campos magnéticos estuvo en un principio relacionado solo con la interacción de campos de imanes permanentes.

Hans Christian Oersted (1820) mostró que una corriente eléctrica hacia girar un dipolo magnético, en base a estas observaciones fue posible dar una definición precisa de campo magnético: Un solenoide produce un campo magnético a su alrededor semejante al de los imanes permanentes cuando en él circula una corriente eléctrica. Actualmente las propiedades magnéticas de los imanes permanentes se explica atribuyendoles a éstos, una corriente equivalente a la de un solenoide que produce el mismo campo que el imán.

La corriente eléctrica I a través de un alambre conductor en un punto se define como la cantidad de carga eléctrica que atravieza en un segundo por ese punto, se mide en coulomb sobre segundo: Ampere.

Si el área transversal del alambre conductor es lo suficientemente grande para que a través de ésta se pueden medir distintos valores de la corriente eléctrica, entonces definimos una densidad de corriente $\vec{J}(r)$ como:

$$J(\vec{r}) \equiv |\vec{J}(\vec{r})| = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta a} = \frac{dI}{da}$$

donde Δa es un elemento de área transversal del conductor, conteniendo al punto $\vec{r}$ y ΔI es la corriente eléctrica que atravieza este elemento. La dirección de $\vec{J}(\vec{r})$ es la de la corriente eléctrica I, sus unidades son, Ampere/m^2.

Como ya se mencionó anteriormente, las fuentes de campo magnético $\vec{B}$ (inducción magnética) son atribuídas a corrientes eléctricas. A su vez las corrientes interaccionan con los campos magnéticos; todo esto se refleja en el resultado experimental de que cuando dos circuitos que están separados y circula una corriente eléctrica en ellos, éstos ejercen fuerzas entre sí. Para definir el campo $\vec{B}$ en términos de las corrientes vamos a establecer una ley de fuerzas, análoga a la ley de Coulomb. entre dos elementos $d\vec{l}_1$ y $d\vec{l}_2$ de los circuitos en base a los resultados experimentales. De esta manera se llega precisamente a la ley de Biot y Savart. Dicha ley expresa que el elemento de fuerza ejercido sobre el elemento $d\vec{l}_2$ por el elemento $d\vec{l}_1$ y recorrida por corrientes I_1 e I_2 cumple las siguientes condiciones :

1.- Está en el plano que contiene tanto a $d\vec{l}_1$ como al vector de posición $\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, desde el segmento conductor $d\vec{l}_2$ hasta $d\vec{l}_1$ y es también perpendicular al segmento vectorial $d\vec{l}_2$.

2.- Es proporcional al producto de las longitudes $d\vec{l}_1$ y $d\vec{l}_2$ de los segmentos y al producto de las corrientes que conducen I_1 e I_2.

3.- Es inversamente proporcional en magnitud al cuadrado de la distancia R entre los elementos de corriente.

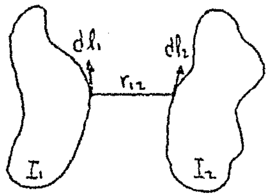
4.- Es proporcional al seno del ángulo θ_1 entre los vectores $d\vec{l}_1$ y $\vec{R}$, además, proporcional al seno del ángulo θ_2 entre el vector $d\vec{l}_2$ y el vector ortogonal a $d\vec{l}_1$, esto es, a $(d\vec{l}_1 \times \vec{R})$.

En lenguaje matemático, sería lo mismo que :

$$d\vec{F} = \frac{K I_1 I_2 \, d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{R})}{R^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

la constante K depende del sistema de unidades usado. En el sistema internacional

$$K = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\ Wb/m^2$$



la fuerza que el circuito con corriente I_2 experimenta debido a la presencia del otro, se obtiene de (11) sumando para todos los elementos de longitud de ambos circuitos, es decir :

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi}\ I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{R})}{R^3} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Para definir el campo $\vec{B}$ producido por el circuito con corriente I_1, escribamos (12) como

$$\vec{F} = I_2 \oint_{C_2} d\vec{l}_2 \times \vec{B}(\vec{r}_2)$$

en la cual

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\ I \oint \frac{d\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

donde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ y además se han suprimido los índices. La expresión anterior es el valor en el punto de observación $\vec{r}$ del campo de inducción magnética $\vec{B}$ producido por un circuito C' recorrido por la corriente eléctrica I.

Si en lugar de la corriente I tenemos una distribución de corriente. En términos de la densidad $\vec{J}(\vec{r}')$ se tiene :

$$I\,d\vec{l}' = \int_{s'} \vec{J}(\vec{r}')\,dl'da'$$

donde s' es una superficie contenida en el conductor. El producto dl' por da' es el elemento de volumen dv' del conductor $\vec{r}'$, sustituyendo estas expresiones en (13) obtenemos:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')\times\vec{R}}{R^3}\,dv' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Ahora vamos a establecer las dos ecuaciones diferenciales que determinan el campo $\vec{B}$, las cuales son

$$\nabla\cdot\vec{B} \quad y \quad \nabla\times\vec{B}$$

Para simplificar los calculos vamos a escribir (14) de otra forma. Como se recordará

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = -\nabla\left(\frac{1}{R}\right)$$

de modo que el integrando de (14) se puede escribir como:

$$-\vec{J}(\vec{r}')\times\nabla(1/R);$$

usando la identidad vectorial $\nabla\times(\phi\vec{A}) = \phi\,\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\times\nabla\phi$, por lo tanto la expresión anterior es:

$$-\vec{J}(\vec{r}')\times\nabla(1/R) = -(1/R)\,\nabla\times\vec{J}(\vec{r}') + \nabla\times\left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\right);$$

como $\vec{J}$ es función solamente de $\vec{r}'$ y el operador ∇ actúa sobre $\vec{r}$ entonces

$$\nabla \times \vec{J}(\vec{r}') = 0$$

introduciendo este resultado en la ecuación (14) e intercambiando las operaciones de derivación e integración escribimos.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

donde

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\, dv' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

$\vec{A}$ es el potencial vectorial del campo de inducción magnética $\vec{B}$. Una consecuencia inmediata de (15) es que, en todas partes:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Esta ecuación puede interpretarse como el resultado matemático del hecho físico de que no existen polos aislados

Ahora, en un sistema de coordenadas cartesiano la ecuación (16) puede escribirse del modo siguiente:

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{J_x(\vec{r}')dv'}{R}, \qquad A_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{J_y(\vec{r}')\,dv'}{R}, \qquad A_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{J_z(\vec{r}')dv'}{R} \quad \ldots (18)$$

cada una de estas componentes es de forma idéntica a la expresión (8) para el potencial eléctrico ϕ, el cual, como se mencionó es la solución de la ecuación de Poisson (10). Por lo tanto, la relación (18) para las componentes de $\vec{A}$ son también soluciones de las siguientes ecs. de Poisson:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \,, \qquad \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \,, \qquad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

y con la notación $\nabla^2 \vec{A} = (\nabla^2 A_x, \nabla^2 A_y, \nabla^2 A_z)$ las ecuaciones escalares son equivalentes a una ecuación vectorial

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Ahora, necesitamos saber cuanto vale $\nabla\cdot\vec{A}$. De (16) también podemos encontrar este valor:

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \nabla\cdot(\vec{J}/R)\,dv' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

usando la identidad vectorial

$$\nabla(\phi\vec{a}) = \phi\nabla\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\nabla\phi \qquad \ldots\ldots\ldots (*)$$

Tenemos:

$$\nabla\cdot(\vec{J}/R) = \frac{1}{R}\nabla\cdot\vec{J} + \vec{J}\cdot\nabla(1/R) = \vec{J}\cdot\nabla(1/R)$$

ya que $\vec{J}$ depende solo de r' y por lo tanto $\nabla\cdot\vec{J}=0$. Además $\nabla(1/R) = -\nabla'(1/R)$ donde ∇' significa tomar el gradiente respecto a las coordenadas $\vec{r}'$. Usando la identidad (*) tenemos:

$$\nabla\cdot(\vec{J}/R) = -J\cdot\nabla'(1/R) = -\nabla'(1/R) + (1/R)\nabla'\cdot\vec{J}$$

sustituyendo en (20) obtenemos:

$$\nabla\cdot\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla'\cdot(\vec{J}/R)\,dv' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\vec{J}}{R}\,dv'$$

Usando el teorema de Gauss:

$$\int_{V'}\nabla'\cdot(\vec{J}/R)\,dv' = \oint_{S'}\frac{\vec{J}\cdot d\vec{S}}{R}$$

esta integral se anula por que la integración se realiza sobre las superficies frontera entre los conductores y los aislantes, y, ahí $\vec{J}\cdot d\vec{S} = 0$, por lo tanto

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'}\frac{\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}')}{R}\,dv'$$

En el caso estacionario $\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}')=0$ como se verá mas adelante de la ecuación de continuidad. Así, entonces

$$\nabla\cdot\vec{A} = 0$$

ya podemos calcular $\nabla\times\vec{B}$; en efecto, usando la identidad vectorial

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \quad \ldots\ldots\ldots (**)$$

de la ecuación (15) Tenemos :

$$\nabla\times\vec{B} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \quad \ldots\ldots\ldots (***)$$

sustituyendo en esta ecuación los valores encontrados para los términos del lado derecho, se llega a que :

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

esta es la segunda ecuación diferencial del campo magnético para campos estáticos (caso de $\vec{J}$ estacionaria)

Calculemos ahora la integral de línea del campo de inducción magnética $\vec{B}$ sobre la curva arbitraria C. En virtud del teorema de Stokes y la ecuación (22) podemos escribir

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{B})\cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

Además las integrales de superficie pueden extenderse a cualquiera de las superficies que se apoyan en el contorno C. Como las corrientes son cerradas el valor de estas integrales solo depende del contorno C de las superficies de integración, entonces:

$$\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \sum_C I$$

donde $\sum_C I$ significa la suma algebráica de las intensidades de las corrientes que penetran al contorno C. Asi pues

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

este teorema se conoce como ley de Ampere, y uno de los mas importantes de la teoría del campo magnético.

2.2 Ecuación de continuidad

El principio de conservación de la carga eléctrica conduce a una ecuación que se denomina ecuación de continuidad.

Consideremos un volumen v, y asociemos a este volumen una densidad de carga ρ. Entonces:

$$q = \int_v \rho \, dv \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

es la carga contenida dentro de V. Si s es una superficie cerrada que limita al volumen V, la cantidad de carga neta que fluye a través de esta superficie por unidad de tiempo es:

$$\oint_s \vec{J}\cdot d\vec{s} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

el principio de conservación de la carga demanda, que si esta integral es positiva, esto debe corresponder a una disminución en la carga por unidad de tiempo dentro del volumen V y recíprocamente, entonces:

$$\oint_s \vec{J}\cdot d\vec{s} = -\frac{dq}{dt} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

ó bien, según las ecuaciones (24), (25) y (26)

$$\oint_s \vec{J}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_v \rho \, dv$$

aplicando el teorema de Gauss e intercambiando los símbolos de derivación e integración tenemos

$$\int_v \nabla\cdot\vec{J} \, dv = -\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv$$

como esta ecuación es válida para cualquier V, equivale a

$$\nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

esta es la ecuación de continuidad. En el caso estacionario :

$$\nabla\cdot\vec{J} = 0 .$$

2.3 Campos dependientes del tiempo

Ley de inducción de Faraday

Faraday encontró experimentalmente que campos eléctricos no-con-servativos ($\nabla\times\vec{E} \neq 0$) se inducen en un circuito cerrado cuando el flujo a través del mismo se hace variar. Los cambios en el flujo de cam-po magnético a través del circuito pueden deberse a : movimiento del circuito a través de campos magnéticos , cambios en la forma del circuito, o bién variando el campo magnético. El que una corriente eléctrica se genere a través del circuito, nos conduce a que la integral de línea del campo eléctrico no sea cero. La integral de línea del cam-po eléctrico se conoce como fuerza electromotriz, la cual común-mente se designa por $\mathcal{E}$.

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

El flujo del campo magnético designado por Φ_B a través de una superficie, se define por:

$$\phi_B = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Las observaciones de Faraday en forma matemática se escriben de la siguiente manera:

$$\mathcal{E} = -K\,\frac{d\phi_B}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

donde K es una constante de proporcionalidad, el signo es dado por la ley de Lenz, la cual propone que la corriente inducida en el circuito se mueve en un sentido, tal que el campo asociado a esta se opone a cualquier cambio en el flujo a través del circuito. La constante K en el sistema internacional es $K=1$. La integral (30) en términos de las integrales (28) y (29) es:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

donde s es una superficie apoyada en el circuito C. Experimentalmente establecio Faraday que la $\mathcal{E}$ inducida depende solo de la razón de cambio del flujo magnético a través del circuito y no de la manera de como éste se produzca. Por eso, sin pérdida de generalidad podemos suponer que C es fijo.

Además, el flujo magnético a través de C depende solo de C

Además, el flujo magnético a través de C depende solo de C, y no de la superficie particular elegida como superficie de apoyo de C; Esta es una conclución obtenida del experimento de Faraday. Estos argu- -mentos nos permiten concluir que: la integral del lado derecho de (31) se puede extender sobre cualquier superficie cerrada fija que se apoye en C; y, que la integral sobre cualquier superficie cerrada es cero. por lo tanto la ecuación (31) se puede escribir como:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

y además, por la segunda conclución anterior, que:

$$\oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

aplicando el teorema de Stokes a la primera integral de (32) y el Teo- -rema de Gauss a la integral (33) se obtiene:

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)\cdot ds = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

y que

$$\int_v \nabla\cdot\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) dv = \int \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{B}) \quad = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

las expresiones (34) y (35) conducen a

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

y

$$\frac{d}{dt}(\nabla \cdot \vec{B}) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

la ecuación (36) es una de las ecuaciones fundamentales de los campos eléctricos arbitrarios. La ecuación (37) nos dice que $\nabla \cdot \vec{B} =$ cte. en cada punto del espacio, es decir, que no puede alterarse en ningún proce-so físico. Basta suponer que sin corrientes ni imanes, la inducción magnética $\vec{B}$ (y por consiguiente, también $\nabla \cdot \vec{B}$) en todo el espacio se hace cero, para obtener a su vez de la ecuación (37) que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, no solo para campos magnéticos estáticos sino también para campos de-pendientes del tiempo.

2.4 Las ecuaciones de Maxwell.

De las cuatro ecuaciones para los campos eléctricos y magnéticos, dos de ellas (9) y (17) se han podido extender a campos dependientes del tiempo, mediante los resultados de Faraday. Es natural ahora intentar completar la teoría generalizando las ecuaciones estáticas (5) y (22) restantes. Esto fue realizado por Maxwell, en base no a resultados ex-perimentales sino, mas bien a razonamientos teóricos que nos lleva a una formulación autoconsistente. Subsecuentemente, toda experiencia con fenómenos electromagnéticos han confirmado la validez de las ecs.

de Maxwell. La esencia de los argumentos es la siguiente:

Es evidente que (22) (forma diferencial de la ley de Ampere para corrientes estacionarias) no puede cumplirse, pues exige que se cumpla $\nabla\cdot\vec{J}=0$ (porque $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})\equiv 0$) válido solo para corrientes estacionarias. Mientras que la ecuación (22) requiere que

$$\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Sin embargo, si (5) se acepta como tal para campos arbitrarios, (27) se puede escribir como

$$\nabla\cdot\left(J+\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

y la inconsistencia en (22) se puede mover remplazando a $\vec{J}$ en el lado derecho por $\vec{J}+\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

Así pues, se puede conjeturar que las ecuaciones que generalizan a las (5) y (22) para el caso de dependencia en el tiempo son:

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

y

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

(la ecuación (40) no es la misma que (5) porque ρ depende explícitamente del tiempo). La ecuación (39) es la otra ecuación fundamental de Maxwell de la teoría electromagnética. Su aceptación implica a (38), junto con la (27) a su vez implica que la derivada tempo-

-ral de (40) se satisface. La ecuación (40) se puede obtener de (39) y la ec. de continuidad (22) si se toma la divergencia de (39), con lo cual

$$0 = \mu_0 \nabla\cdot\vec{J} + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{E} \quad ; \quad \text{pero de (22)} \quad \nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \;;$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{E} - \rho/\epsilon_0\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0 + \text{cte.}$$

la constante se puede hacer cero suponiendo que en un tiempo pasado los campos eran estáticos.

Se puede argumentar que la inconsistencia en (22) radica en el hecho de que para obtenerla se supuso que $\nabla'\cdot\vec{J} = 0$, lo que a su vez implicaba que $\nabla\cdot\vec{A} = 0$. Supongamos que en la ecuación (***) sustituímos las ecuaciones (21) y (19) sin suponer que $\nabla'\cdot\vec{J} = 0$, entonces:

$$\nabla\cdot\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\int_{v'}\frac{\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}')}{R}\,dv'$$

de la ecuación de continuidad $\qquad \nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}') = -\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}')$

entonces

$$\nabla\cdot\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{v'}\frac{\rho(\vec{r}')\,dv'}{R}\right)\right]$$

o sea, de acuerdo con (7) y (8)

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots (41)$$

sin embargo al hacer

$$\vec{E}' = -\nabla \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')\,dv'}{R} \right)$$

estamos suponiendo que $\nabla \times \vec{E}' = 0$ que es inconsistente con (36) pues E' no puede ser estático.

La diferencia fundamental entre (41) y (39) es que mientras la $\vec{E}'$ de (41) es la que satisface las ecuaciones estáticas (17) y (22), la $\vec{E}$ de (39) es la que satisface las ecuaciones generalizadas (39) y (40).

En efecto, aplicando el operador $\nabla \times$ a (36) y (39) con $\vec{J} = 0$ e invocando a la identidad vectorial (**) obtenemos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}).$$

y

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E})$$

de las ecuaciones (40); (39); (17) y (36) con $\rho = 0$ y $\vec{J} = 0$ concluímos que

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad y \qquad \nabla^2 \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

que significa que tanto $\vec{E}$ como $\vec{B}$ se propagan como ondas con velocidad

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

si en lugar de usar (39) se emplea (41) se obtiene:

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}') = 0$$

lo cual significa que no podrían existir las ondas electromagnéticas. Sin embargo las ondas electromagnéticas fueron descubiertas por Hertz, hecho que significó la confirmación experimental de la conjetura de Maxwell.

2.5 Formulación Tensorial de las ecuaciones de Maxwell.

tensor de campo electromagnético.

Las ecuaciones de Maxwell son

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \ldots (42) \qquad \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad \ldots (44)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \ldots (43) \qquad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \ldots (45)$$

con $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ y $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

recordando que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0$, es decir; que la divergencia de un rotacional es cero, con éste resultado y la ecuación (43), se tiene

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \implies \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \ldots (46)$$

$\vec{A}$ recibe el nombre de potencial vectorial. Sustituyendo en (42) $\vec{B}$ en términos del potencial vectorial

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

como el rotacional de la cantidad entre paréntesis es nula, ésta se puede expresar como menos el gradiente de una función escalar, es decir,

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad . \ . \ . \ . \quad (47)$$

ϕ es el llamado potencial escalar. Ahora podemos expresar (44) en términos de ambos potenciales

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{A}) - \frac{\partial}{\partial t}\epsilon_0\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi\right) = \vec{J}$$

dividiendo por ϵ_0 :

$$\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}(\nabla \times \nabla \times \vec{A}) + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \phi) = \vec{J}/\epsilon_0$$

recordando que $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ y sustituyendo en la ecuación anterior

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}(\nabla \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}) + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \phi) = \vec{J}/\epsilon_0$$

pero $1/\epsilon_0 \mu_0 = c^2 \Rightarrow$

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \mu_0 \vec{J}$$

para desacoplar la ecuación anterior se requiere que :

$$\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

esta relación recibe el nombre de condición de Lorentz, y la cual no determina unívocamente a $\vec{A}$ y ϕ, es decir, $\vec{A}$ y ϕ son susceptibles de ser transformados *. Desacoplando tenemos:

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

considerando (45) teniendo en cuenta (46) y (47)

$$\nabla\cdot\vec{D} = \nabla\cdot\epsilon_0\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi\right) = \rho \quad ; \quad \nabla^2\phi + \nabla\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\rho/\epsilon_0 \quad \ldots\ (50)$$

derivando (48) con respecto al tiempo

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

sustituyendo en (50)

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0 \qquad \ldots\ldots\ldots (51)$$

* En la definición de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$, solamente aparecen las derivadas de los potenciales $\vec{A}$ y ϕ, motivo por el cual, el potencial vectorial puede ser determinado con exactitud de hasta el gradiente de una función arbitraria, mientras que el potencial escalar hasta la derivada temporal de dicha función, esto es, $A' = A + \nabla G(\vec{r},t)$ y $\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial G(\vec{r},t)}{\partial t}$ donde $G(\vec{r},t)$ es una función arbitraria. Sustituyendo A' y ϕ' en (45) y (47) vemos que no se produce ningún cambio en los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Por lo tanto son invariantes ante la transformación de los potenciales. Con lo anterior podemos ver que los potenciales no tienen un solo valor para un campo dado, lo que permite cierta flexibilidad para elegirlos.

Por otro lado expresemos (46) y (47) explícitamente:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_x\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right]$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\phi + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\phi + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\phi\right] - \left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial t}A_x + \hat{j}\frac{\partial}{\partial t}A_y + \hat{k}\frac{\partial}{\partial t}A_z\right].$$

en términos de componentes:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y \quad ; \qquad & E_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_x \\ B_y &= \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z \quad ; \qquad & E_y &= -\frac{\partial}{\partial y}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_y \qquad \ldots\ldots (52) \\ B_z &= \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x \quad ; \qquad & E_z &= -\frac{\partial}{\partial z}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_z \end{aligned}$$

De ahora en adelante y de acuerdo con la notación tetradimensional, abreviaremos las expresiones de las derivadas con respecto a las coordenadas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = \partial_0 \ ; \qquad \frac{\partial}{\partial x_1} = \partial_1 \ ; \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = \partial_2 \ ; \qquad \frac{\partial}{\partial x_3} = \partial_3$$

con lo cual

$$(\partial^\mu) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\nabla\right) ; \quad (\partial_\mu) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla\right)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \Box = \frac{\partial^2}{\partial x^{0\,2}} - \nabla^2 \qquad \ldots\ldots (53)$$

Consideremos las componentes del potencial vectorial y el potencial escalar como las componentes de un potencial tetradimensional ó tetrapotencial, esto es

$$\phi_0 = \frac{\phi}{c} \ ; \qquad \phi_1 = -A_x \ ; \qquad \phi_2 = -A_y \ ; \qquad \phi_3 = -A_z$$

o en términos de las componentes Temporal y espaciales

$$(\phi^\mu) = (\phi_0, \phi_i) \quad ; \quad (\phi_\mu) = (\phi_0, -\phi_i) \qquad i = 1,2,3$$

con estas observaciones, las ecuaciones (52) se pueden escribir como:

$$B_1 = \partial_3\phi_2 - \partial_2\phi_3 \quad ; \quad E_1/c = \partial_0\phi_1 - \partial_1\phi_0$$

$$B_2 = \partial_1\phi_3 - \partial_3\phi_1 \quad ; \quad E_2/c = \partial_0\phi_2 - \partial_2\phi_0$$

$$B_3 = \partial_2\phi_1 - \partial_1\phi_2 \quad ; \quad E_3/c = \partial_0\phi_3 - \partial_3\phi_0$$

mas brevemente:

$$B_i = \partial_i\phi_k - \partial_k\phi_i \qquad E_j/c = \partial_0\phi_j - \partial_j\phi_0$$

$i, j, k = 1,2,3$

lo anterior significa que las seis componentes de $\vec{B}$ y $\vec{E}$ están dadas por seis componentes covariantes o contravariantes, si identificamos cada componente de la siguiente manera:

$$B_1 = F_{32}, \qquad B_2 = F_{13}, \qquad B_3 = F_{21}$$

$$E_1/c = F_{01}, \qquad E_2/c = F_{02}, \qquad E_3/c = F_{03}$$

y

$$B^1 = F^{32}, \qquad B^2 = F^{13}, \qquad B^3 = F^{21}$$

$$-E^1/c = F^{01}, \qquad -E^2/c = F^{02} \qquad -E^3/c = F^{03}$$

respectivamente.

Ahora podemos resumir las ecuaciones (52) en una sola:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu \quad , \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3 \qquad . \ . \ (54)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético. Este tensor es anti--simétrico, es decir

$$F_{\mu\nu} = - F_{\nu\mu}$$

y explícitamente es

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

o contravariantemente

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, del análisis tensorial sabemos que todo tensor de segundo rango puede ser expresado en términos de su parte simétrica y antisimétrica:

$$C_{\lambda\eta} = \frac{1}{2}\left[C_{\lambda\eta} + C_{\eta\lambda} \right] + \frac{1}{2}\left[C_{\lambda\eta} - C_{\eta\lambda} \right]$$

En nuestro caso particular, el tensor $F_{\mu\nu}$ es antisimétrico, por lo tanto la igualdad anterior es :

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[F_{\mu\nu} - F_{\nu\mu} \right]$$

Además, a un tensor completamente antisimétrico de orden $p \leq n$ se le puede asociar intrínsicamente otro tensor antisimétrico de orden $n-p$ llamado su dual o su adjunto, de acuerdo a esta aclaración y sabiendo que todo tensor de segundo rango se puede expresar de la manera siguiente:

$$F^{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\alpha}\, \delta^{\nu}_{\beta}\, F^{\alpha\beta} \qquad \text{y} \qquad F_{\mu\nu} = \delta^{\alpha}_{\mu}\, \delta^{\beta}_{\nu}\, F_{\alpha\beta}$$

sustituyendo en la expresión anterior:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\delta^{\alpha}_{\mu} \delta^{\beta}_{\nu} F_{\alpha\beta} - \delta^{\alpha}_{\nu} \delta^{\beta}_{\mu} F_{\alpha\beta} \right] = \frac{1}{2}\left[\delta^{\alpha}_{\mu} \delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu} \delta^{\beta}_{\mu} \right] F_{\alpha\beta} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \delta^{\alpha}_{\mu} & \delta^{\beta}_{\mu} \\ \delta^{\alpha}_{\nu} & \delta^{\beta}_{\nu} \end{vmatrix} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, \delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}$$

donde $\delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ es la delta de Kronequer generalizada y

$$\delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \delta^{\alpha\beta\sigma\tau}_{\mu\nu\sigma\tau} = \frac{1}{2}\, \delta^{\alpha\beta\sigma\tau}_{0123}\, \delta^{0123}_{\mu\nu\sigma\tau}$$

o en términos del tensor de Levi-Civita

$$\epsilon^{\alpha\beta\sigma\tau} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\alpha,\beta,\sigma,\tau) \text{ es permutación par de } (0,1,2,3) \\ -1 & \text{si } (\alpha,\beta,\sigma,\tau) \text{ es permutación impar de } (0,1,2,3) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

pero

$$\delta^{\alpha\beta\sigma\tau}_{0123} = \epsilon^{\alpha\beta\sigma\tau} \qquad \text{y} \qquad \delta^{0123}_{\mu\nu\sigma\tau} = \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$$

con lo cual

$$\delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\, \epsilon^{\alpha\beta\sigma\tau}$$

con lo anterior en cuenta, el tensor de campo electromagnetico es

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\,\epsilon^{\alpha\beta\sigma\tau}\right]F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\,{}^{*}F^{\sigma\tau}$$

donde

$${}^{*}F^{\sigma\tau} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\sigma\tau}F_{\alpha\beta}$$

como se mencionó antes ${}^{*}F^{\sigma\tau}$ es el denominado tensor dual o adjunto de $F_{\mu\nu}$, explícitamente.

$$[{}^{*}F^{\sigma\tau}] = \left[\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\sigma\tau}F_{\alpha\beta}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

con el propósito de escribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante desarrollemos las ecuaciones (42) y (43)

$$\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \; ; \qquad \nabla\times\vec{E}/c + \frac{\partial\vec{B}}{\partial x_0} = 0 \qquad y$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

o explícitamente teniendo en cuenta (53)

$$\partial_0 B_1 + \partial_2 E_3/c - \partial_3 E_2/c = 0$$

$$\partial_0 B_2 - \partial_1 E_3/c + \partial_3 E_1/c = 0$$

$$\partial_0 B_3 + \partial_1 E_2/c - \partial_2 E_1/c = 0$$

$$\partial_0 B_4 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = 0$$

en términos del tensor de campo electromagnético.

$$\partial_0 F_{32} + \partial_2 F_{03} + \partial_3 F_{20} = 0$$
$$\partial_0 F_{13} + \partial_1 F_{30} + \partial_3 F_{01} = 0$$
$$\partial_0 F_{21} + \partial_1 F_{02} + \partial_2 F_{10} = 0$$
$$\partial_0 F_{32} + \partial_2 F_{13} + \partial_3 F_{21} = 0$$

todavía mas brevemente

$$\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (56)$$

donde σ, μ, ν toman valores de alguno de los enteros $0, 1, 2, 3$. En la ecuación anterior se resumen las ecuaciones de Maxwell (42) y (43)

Para escribir las restantes ecuaciones de Maxwell en forma tensorial; consideremos primero la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

en términos de sus componentes y considerando (53)

$$\partial_0 (c\rho) + \partial_1 J_x + \partial_2 J_y + \partial_3 J_z = 0$$

se puede ver que la densidad de corriente y la densidad de carga no son entes independientes, y que en forma natural forman un tetravector. Para escribir en forma mas comoda la ecuacion de continuidad identifiquemos sus componentes como a continuación se indica:

$$J_0 = c\rho\ , \qquad J_1 = J_x\ , \qquad J_2 = J_y\ , \qquad J_3 = J_z$$

y

$$(J^\mu) = (c\rho\, ,\, J_i)\ ; \quad (J_\mu) = (c\rho\, ,\, -J_i) \qquad i = 1,2,3$$

y por lo tanto, la ecuación de continuidad:

$$\partial^\mu J_\mu = \partial_\mu J^\mu = \partial_0 (c\rho) + \nabla\cdot\vec{J} = 0 \quad \cdots\cdots \quad (57)$$

con lo anterior las ecuaciones de onda inhomogéneas (49) y (51) para el potencial escalar y vectorial se pueden reunir en una sola ecuación:

$$\Box\, \phi^\nu = \partial^\mu \partial_\mu \phi^\nu = \mu_0 J^\nu \quad \cdots\cdots\cdots \quad (58)$$

y la relación de Lorentz (48)

$$\partial_\mu \phi^\mu = \partial^\mu \phi_\mu = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (59)$$

finalmente tomemos la divergencia del tensor de campo electromagnético:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial^\mu \partial_\mu \phi^\nu - \partial^\nu \partial_\mu \phi^\mu$$

ahora teniendo en cuenta (58) y (59)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad \cdots\cdots\cdots \quad (60)$$

desarrollando esta ecuación para $\nu = 0,1,2,3$ podemos darnos cuenta que en ella se encuentran incluídas las ecuaciones de Maxwell (44) y (45).

2.6 Principio de Hamilton. teorema de Noether.

Consideremos un conjunto de campos $\varphi_i(x)$ $i=1,2,3\ldots n$. En teoría de campos, un sistema esta caracterizado por una densidad Lagrangeana (o simplemente Lagrangeano) $\mathbb{L}(x)$, $x \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$, cuya densidad sobre el elemento de volumen Tetradimensional d^4x constituye la acción S del sistema

$$S = \int_R \mathbb{L}(x) d^4x$$

Las condiciones que en general se imponen sobre el Lagrangeano $\mathbb{L}$ son:

a) que sea real

b) que sea función de los campos y sus primeras derivadas

c) ser escalar o invariante de forma ante Transformaciones (inhomogéneas) de Lorentz.

d) ser local.

b) implica que las ecuaciones (diferenciales) de movimiento son (a lo más) de segundo orden; c) implica que no existe dependencia explicita en x^μ (sólo consideramos sistemas "cerrados"); d) significa que $\mathbb{L}$ depende sólo de $\varphi_i(x)$ y $\partial_\mu \varphi_i(x)$ en un mismo punto del espacio-tiempo.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen de un principio de acción estacionario (principio de Hamilton) donde las $\delta\varphi_i(x)$ son arbitrarias, excepto por que se anulan en la superficie Σ que rodea el volumen de integración R.

$$S = \int_R \mathbb{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i) d^4x$$

y $\delta S = 0$ con $\delta\varphi_i|_\Sigma = 0$. La cual es la expresión matemática del principio de Hamilton. Calculemos la variación de S :

$$\delta S = \int_R [\mathbb{L}(\varphi_i + \delta\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i + \delta\partial_\mu\varphi_i) - \mathbb{L}(\varphi_i, \partial_\mu\varphi_i)] d^4x$$

$$= \int_R [\mathbb{L}(\varphi_i, \partial_\mu\varphi_i) + \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \varphi_i}\delta\varphi_i + \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial(\varphi_{i,\mu})}\delta\varphi_{i,\mu} - \mathbb{L}(\varphi_i, \partial_\mu\varphi_i)] d^4x$$

$$= \int_R [\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \varphi_i}\delta\varphi_i + \frac{\partial}{\partial \varphi_{i,\mu}}\delta\varphi_{i,\mu}] d^4x$$

pero $\delta\varphi_{i,\mu} = \partial_\mu \delta\varphi_i$ por que $\delta\varphi_i$ es solo función de x, por lo tanto :

$$\delta S = \int_R [\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \varphi_i}\delta\varphi_i + \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \varphi_{i,\mu}}) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \varphi_{i,\mu}})\delta\varphi_i] d^4x$$

Usando el teorema de Gauss

$$\delta S = \int_\Sigma (\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \varphi_{i,\mu}}\partial\sigma^\mu) d\varphi_i + \int_R [(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \varphi_{i,\mu}})\delta\varphi_i] d^4x$$

el primer término se anula por que $\delta\varphi_i|_\Sigma = 0$; debido a la arbitrariedad de $\delta\varphi_i$ en R obtenemos de la segunda integral y teniendo en cuenta que $\delta S = 0$

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \varphi_{i,\mu}}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Las cuales son las ecuaciones de Euler-Lagrange para Teoría de campos.

Mediante la ecuación (1) podemos encontrar las ecuaciones de movi-

-miento que deben satisfacer los campos $\varphi_i(x)$, después de haber sustituído el lagrangiano $\mathbb{L}(x) = \mathbb{L}[\varphi_i(x), \varphi_{i,\mu}(x)]$ que caracterice el campo que deseamos tratar.

En teoría de campos el propósito de encontrar el lagrangeano del sistema no es tanto el de poder encontrar las ecuaciones de movimiento vía el principio de Hamilton, pues inclusive muchas veces se encuentra $\mathbb{L}(x)$ proponiendo una función $\mathbb{L}(x) = \mathbb{L}(\varphi_i(x), \varphi_{i,\mu}(x))$ tal que al ser sustituída en (1) se obtengan las ecuaciones de movimiento ya conocidas a priori. El lagrangeano tiene otras utilidades; como por ejemplo, conocida $\mathbb{L}$ podemos hallar la Hamiltoniana del sistema, los momentos canónicos conjugados, podemos cuantizar los campos, etc. En particular, una utilidad importante de $\mathbb{L}$ es la que se enuncia en el siguiente teorema, conocido como teorema de Noether:

A cada transformación continua de simetría de un sistema físico (descrito por un lagrangeano) corresponde una cantidad conservada.

Para probar este teorema vamos algunas definiciones que nos facilitarán su demostración.

variables independientes

$$x^\mu \qquad \mu = 0,1,2,3.$$

variables dependientes (campos)

$$\varphi_i(x), \quad i = 1,2 \ldots n \quad ; \qquad \varphi_{i,\mu} \equiv \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^\mu} \quad ; \qquad \varphi_{i,\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

acción S

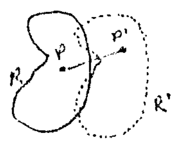
$$S = \int_R \mathbb{L}(x^\mu, \varphi_i\, \varphi_{i,\mu})\, d^4x$$

$\mathbb{L}$: densidad Lagrangeana (ó Lagrangeano)

$$[\mathbb{L}]_i = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \varphi_{i,\mu}}$$

Transformación infinitesimal

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \; ; \qquad \delta x^\mu = \delta X_\mu(x)$$



$$\varphi_i' = \varphi_i(x) + \delta\varphi_i(x) \; ; \qquad \varphi_{i,\mu}(x') = \varphi_{i,\mu}(x) + \delta\varphi_{i,\mu}(x) \; ;$$

$\delta\varphi_i(x)$: variación total

$$\delta S = \int_{R'} \mathbb{L}(x', \varphi_i', \varphi_{i,\mu}')\, d^4x' - \int_R \mathbb{L}(x, \varphi_i, \varphi_{i,\mu})\, d^4x$$

ahora bien, tenemos :

$$\varphi'_{i,\mu}(x') \equiv \frac{\partial \varphi_i'(x)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial(\varphi_i(x) + \delta\varphi_i(x'))}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x^\nu}\frac{\partial(\delta x^\nu)}{\partial x^\mu} +$$

$$+ \frac{\partial(\delta\varphi_i(x))}{\partial x^\mu} = \varphi_{i,\mu}(x) - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^\nu}\frac{\partial(\delta x^\nu)}{\partial x^\mu} + \frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial x^\mu}$$

notese que $\delta\varphi_{i,\mu} \neq (\delta\varphi_i)_{,\mu}$

Definamos la variación local $\bar{\delta}\varphi_i(x)$:

$$\bar{\delta}\varphi_i(x) = \varphi_i'(x) - \varphi_i(x) \quad ; \quad \bar{\delta}\varphi_{i,\mu}(x) = \varphi'_{i,\mu} - \varphi_{i,\mu}(x)$$

y aquí si se tiene $\quad \bar{\delta}\varphi_{i,\mu}(x) = (\bar{\delta}\varphi_i(x))_{,\mu}$ con lo cual

$$\delta\varphi_i = \bar{\delta}\varphi_i + \varphi_{i,\mu}\,\delta x^\mu \qquad y \qquad \delta\varphi_{i,\mu} = \bar{\delta}\varphi_{i,\mu} + \varphi_{i,\mu\nu}\,\delta x^\nu$$

2.7 Transformación de la densidad Lagrangeana.

Para que el valor numérico de la acción no varie definimos $\mathbb{L}'$ por

$$\mathbb{L}'(x', \varphi_i', \varphi'_{i,\mu})\, d^4x' = \mathbb{L}(x, \varphi_i, \varphi_{i,\mu})\, d^4x \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

para cualquier transformación $\quad x' = x'(x)\,; \qquad \varphi_i' = \varphi_i'(\varphi, x)$

Ahora, definimos transformaciones de simetría como aquellas que dejan las ecuaciones de movimiento invariantes de forma. Aplicadas a cualquier solución de las ecuaciones de movimiento, las transforman en otra solución de dichas ecuaciones y quedan definidas por:

$$\mathbb{L}'(x', \varphi_i', \varphi'_{i,\mu}) = \mathbb{L}(x', \varphi_i', \varphi'_{i,\mu}) + \frac{\partial\,\delta\Omega^\mu(x', \varphi_i')}{\partial x^\mu} \quad . \; . \; . \; (3)$$

las ecuaciones (2) y (3) implican que:

$$\mathbb{L}(x, \varphi_i, \varphi_{i,\mu})\, d^4x = \mathbb{L}(x+\delta x, \varphi_i+\delta\varphi_i, \varphi_{i,\mu}+\delta\varphi_{i,\mu})\, d^4x' + \frac{\partial(\delta\Omega^\mu)}{\partial x^\mu}\, d^4x' \,. \,. (4)$$

pero

$$d^4x = \left(1 - \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu}\right) d^4x'$$

Teniendo lo anterior en consideración :

$$\mathbb{L}(x+\delta x,\ \varphi_i+\delta\varphi_i,\ \varphi_{i,\mu}+\delta\varphi_{i,\mu}) = \left(\mathbb{L}(x,\varphi_i,\varphi_{i,\mu}) - \frac{\partial(\delta\Omega^\mu)}{\partial x^\mu}\right)\left(1-\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu}\right)$$

de donde Tenemos

$$\left[\delta x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \delta\varphi_i\frac{\partial}{\partial\varphi_i} + \delta\varphi_{i,\mu}\frac{\partial}{\partial\varphi_{i,\mu}} + \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu}\right]\mathbb{L} = -\frac{\partial(\delta\Omega^\mu)}{\partial x^\mu}$$

que es la condición para que una transformación sea de simetría.

La ecuación (4) se puede escribir como

$$\delta S + \int \frac{\partial(\delta\Omega^\mu)}{\partial x^\mu}\, d^4x = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ahora calculemos δS :

$$\delta S = \int_R \Big\{\Big[\mathbb{L}(x^\mu,\varphi_i,\varphi_{i,\mu}) + \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\varphi_i}(\bar\delta\varphi_i + \varphi_{i,\mu}\delta x^\mu) +$$

$$+\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\varphi_{i,\mu}}(\delta\varphi_{i,\nu} + \varphi_{i,\mu\nu}\delta x^\mu)\Big]\Big[1+\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu}\Big] - \mathbb{L}\Big\}\, d^4x =$$

$$=\int_R\Big\{\mathbb{L}\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu} + \Big(\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\varphi_i} + \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\varphi_{i,\nu}}\varphi_{i,\nu\mu}\Big)\delta x^\mu + \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\varphi_i}\bar\delta\varphi_i + \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\varphi_{i,\mu}}\bar\delta\varphi_{i,\mu}\Big\}\, d^4x$$

pero

$$\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\varphi_{i,\mu}}\bar\delta\varphi_{i,\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\varphi_{i,\mu}}\bar\delta\varphi_i\right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\varphi_{i,\mu}}\right)\bar\delta\varphi_i$$

por lo Tanto

$$\delta S = \int_R\Big\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big[\mathbb{L}\,\delta x^\mu + \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\varphi_{i,\mu}}\bar\delta\varphi_i\Big] + [\mathbb{L}]_i\,\bar\delta\varphi_i\Big\}\, d^4x$$

Para las soluciones de las ecuaciones de movimiento se tiene $[\mathbb{L}]_i = 0$

Sustituyendo en la ecuación (5) y tomando en cuenta que R es arbitraria, se deduce finalmente que

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[\left(\mathbb{L}\,\delta^{\mu}_{\nu} - \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \varphi_{i,\mu}} \varphi_{i,\nu} \right) \delta x^{\nu} + \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \varphi_{i,\mu}} \delta \varphi_i + \delta \Omega^{\mu} \right] \equiv \frac{\partial J^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad ..(6)$$

esta ecuación prueba el teorema, puesto que si integramos sobre una región R y aplicando el teorema de Gauss tenemos:

$$\int_R \frac{\partial J^{\mu}}{\partial x^{\mu}} d^4x = \oint_{\Sigma} J^{\mu} d^3\sigma_{\mu} = 0$$

donde Σ es la frontera de R. Supongamos que la región R está acotada entre dos hipersuperficies espacialoides que no intersecan σ_1 y σ_2. Entonces, si J^{μ} se localiza en una región finita del espacio; las únicas contribuciones a la integral de superficie proviene de las dos hiper-superficies σ_1 y σ_2. En consecuencia:

$$\int_{\sigma_2} J^{\mu} d^3\sigma_{\mu} - \int_{\sigma_1} J^{\mu} d^3\sigma_{\mu} = 0$$

puesto que las dos hipersuperficies espacialoides σ_1 y σ_2 son arbitrarias se sigue que

$$G(\sigma) \equiv \int_{\sigma} J^{\mu} d^3\sigma_{\mu}$$

es independiente de la hipersuperficie usada para evaluar la integral. Eligiendo como σ a la hipersuperficie $x^0 = \text{cte.}$ tenemos que

$$Q = \int J^0 d^3x$$

es la cantidad conservada :

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

(es decir la ecuación (6) es una ecuación de continuidad $\frac{\partial J^0}{\partial t} + \nabla\cdot J = 0$)

2.8 Ecuaciones de movimiento de una partícula en un campo electromagnético.

Como sabemos las ecuaciones básicas de la dinámica pueden ser expresadas mediante las ecuaciones de Lagrange, que se deducen a partir del principio de Hamilton, y que se expresan por la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

donde la función L es conocida como función lagrangiana del sistema de partículas en consideración, y es la diferencia entre la energía cinética y potencial de dicho sistema, esto es :

$$L = T - V$$

como en el caso que tratamos, la partícula se mueve con una velocidad cercana a la de la luz dentro de un campo electromagnético, la lagrangiana correspondiente es

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} + q\,\vec{A}\cdot\vec{v} - q\phi \quad . . . . (7)$$

donde $-mc^2\sqrt{1-\beta^2}$ es la energía cinética de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad relativista y $U = q(\phi - \vec{A}\cdot\vec{v})$ es el potencial generalizado (donde como ya sabemos, ϕ es el potencial escalar y $\vec{A}$ es el potencial vectorial) de una partícula cargada que se mueve en presencia de un campo electromagnético y precisamente define la interacción entre ésta y el campo.

si $v <<< c$ y desarrollando en serie de potencias se tiene:

$$T = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \cdots$$

y la lagrangeana se reduce a

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + q\vec{A}\cdot\vec{v} - q\phi$$

que es la ecuación correcta para el caso no relativista comprobando así que (7) comprende este caso.

Por otro lado, sustituyendo (7) en las ecuaciones de Lagrange tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(-mc^2\sqrt{1-\beta^2} + q\vec{A}\cdot\vec{v} - q\phi\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(-mc^2\sqrt{1-\beta^2} + q\vec{A}\cdot\vec{v} - q\phi\right) = 0$$

consideremos el primer término de la ecuación anterior:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(-mc^2\sqrt{1-\beta^2} + q\vec{A}\cdot\vec{v} - q\phi\right)\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + q\vec{A}\right]$$

pero como sabemos

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + q\vec{A} \implies \vec{P} = \vec{p} + q\vec{A} \quad \cdots \quad (8)$$

ahora el segundo término:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \nabla L = q\nabla(\vec{A}\cdot\vec{v}) - q\nabla\phi$$

de acuerdo con el análisis vectorial

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\nabla)b + (b\cdot\nabla)\vec{a} + \vec{b}\times\nabla\times\vec{a} + \vec{a}\times\nabla\times\vec{b}$$

con lo que

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \nabla L = q\left[(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{v}) + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})\right] - q\nabla\phi \quad \ldots\ldots (9)$$

si $v = cte$ (9) se reduce a lo siguiente:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = q\left[\vec{v}\cdot\nabla\vec{A} + \vec{v}\times\nabla\times\vec{A}\right] - q\nabla\phi \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

pero

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}.$$

el primer término representa el cambio del vector potencial con respecto al tiempo en un punto fijo del espacio, el segundo, el cambio con respecto al tiempo de la posición entre dos puntos del espacio separados por una distancia dr, por lo tanto, sustituyendo en (10) se obtiene:

$$\frac{d\dot{P}}{dt} = -q\frac{\partial\dot{A}}{\partial t} + q(\vec{v}\times\nabla\times\vec{A}) - q\nabla\phi.$$

la cual es la ecuación que rige el movimiento de una partícula cargada que se encuentra en un campo electromagnético.

recordando que

$$\vec{E} = -\frac{\partial\dot{A}}{\partial t} - \nabla\phi \qquad y \qquad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

con lo que la ecuación de movimiento queda como:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = q\vec{E} + q(\vec{V}\times\vec{B}) \quad \ldots \quad (11)$$

la expresión del lado derecho es la llamada fuerza de Lorentz.

En el caso mas general, cuando además de hallar las ecuaciones de movimiento de la partícula que se encuentra en presencia de un campo electromagnetico, se desea encontrar las ecuaciones que caracterizan el campo, entonces, es necesario adicionar un término más a la función lagrangeana (7) que incluya la información referente únicamente al campo en cuestión, este término debe cumplir los requisitos siguientes:

-Debe ser un escalar relativista ya que la acción es escalar.

-Debe ser a lo mas cuadrático respecto al campo, requerimiento que es necesario para que se cumpla el principio de superposición

-Además ser función del tensor de campo electromagnético ya que es la caracteristica mas relevante que lo describe. El único escalar que cumple las condiciones anteriores es el producto siguiente:

$$k F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

donde k = cte que depende del sistema de unidades utilizado, en este caso $k = -\frac{1}{4}$

Con lo anterior, la función lagrangeana completa para este caso es

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} + q\vec{A}\cdot\vec{V} - q\phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \ldots \quad (12)$$

Capitulo III   Deriva electromagnética

3.1 Tensor de energía-momento

De acuerdo con el Teorema de Noether

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\left(\mathbb{L}\,\delta^\mu_\nu - \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\varphi_{i,\mu}}\varphi_{i,\nu}\right)\delta x^\nu + \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\varphi_{i,\mu}}\delta\varphi_i + d\Omega^\mu\right] = \frac{\partial}{\partial x^\mu}J^\mu = 0$$

como $\mathbb{L}$ es invariante

$$\mathbb{L}'(x',\varphi_i',\varphi'_{i,\mu})\,d^4x' = \mathbb{L}(x,\varphi_i,\varphi_{i,\mu})\,d^4x$$

con lo que la ecuación anterior se reduce a la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\mathbb{L}\,\delta^\nu_\mu\,\delta x^\nu + \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\varphi_{i,\mu}}\left(\delta\varphi_i - \varphi_{i,\nu}\,\delta x^\nu\right)\right] = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\varphi_{i,\mu}}\delta\varphi_i - \left(\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\varphi_{i,\mu}}\varphi_{i,\nu} - \mathbb{L}\,\delta^\mu_\nu\right)\delta x^\nu\right] = 0$$

sea

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\varphi_{i,\mu}}\varphi_{i,\nu} - \mathbb{L}\,\delta^\mu_\nu \qquad \ldots\ldots (13)$$

con lo cual

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(T^\mu_\nu\right) = 0 \qquad \ldots\ldots (14)$$

como la divergencia de (14) es cero implica que

$$\text{de} \int T^{\mu\nu}\, d^3S_\nu \qquad \ldots\ldots\ldots (15)$$

se conserva. Este vector se puede identificar como el tetravector de momentum ; sea pues que

$$p^{\mu} = \text{cte} \int T^{\mu\nu} d^3 S_\nu \qquad \ldots\ldots\ (15)$$

con la finalidad inmediata de encontrar la relación entre las componen- -tes temporales y espaciales, separando (14) en estas partes respectiva- -mente:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \qquad \ldots\ldots\ (16)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \qquad \ldots\ldots\ (17)$$

integrando ambas sobre un volumen tridimensional V tenemos de (16)

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{00} dV + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\int_V T^{0\nu} dV = 0 \implies \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{00} dV = -\frac{\partial}{\partial x^\nu}\int T^{0\nu} dV$$

y de (17)

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{\mu 0} dV + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\int_V T^{\mu\nu} dV = 0 \implies \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{\mu 0} dV = -\frac{\partial}{\partial x^\nu}\int T^{\mu\nu} dV$$

aplicando el teorema de Gauss al segundo miembro de las ecuaciones ante- -riores:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{00} dV = -c\oint_S T^{0\nu} dS_\nu \qquad \ldots\ldots\ (18)$$

y

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{\mu 0} dV = -\oint_S T^{\mu\nu} dS_\nu \qquad \ldots\ldots\ (19)$$

además sabemos que

$$(p^{\mu}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

para que (15) sea consistente se elige la cte $= \frac{1}{c}$, con esto:

$$p^{\mu} = \frac{1}{c} \int_{s} T^{\mu\nu} dS_{\nu}$$

poniendo $T^{\mu\nu}$ explicitamente

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01}/c & T^{02}/c & T^{03}/c \\ T^{10}/c & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20}/c & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30}/c & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$$

podemos identificar las componentes de $T^{\mu\nu}$ de la siguiente manera:

T^{00} es la energía total del sistema

T^{i0}/c es la densidad de momentum.

T^{0i}/c la densidad de energía, y por último.

T^{ij} es el tensor de densidad de flujo tridimensional de momentum ó tensor de esfuerzos.

Con lo anterior podemos darnos cuenta que la ecuación (18) indica que el cambio con respecto al tiempo de la energía contenida en el volumen V, es igual a menos el cambio de energía transferida a través de la superficie que limita a V, la ecuación (19) indica que el cambio con el tiempo del momentum del sistema en el volumen V, es igual a menos el momentum que emerge a través de dicha superficie.

3.2 Tensor de energía-momentum del campo electromagnético

Para encontrar el tensor de energía-momentum del campo electromagnético puro, primero consideremos el lagrangeano que lo caracteriza:

$$\mathbb{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \ldots\ldots (20)$$

consideremos ahora la definición del tensor de energía-momentum:

$$T^{\mu}_{\lambda} = \partial_\lambda \phi_n \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \partial_\mu \phi_n} - \delta^{\mu}_{\lambda} \mathbb{L} \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

efectuando una variación en el lagrangeano:

$$\delta \mathbb{L} = -\frac{1}{4}\left[\delta F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}\right] = -\frac{1}{4}\left[2 F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}\right] = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu)$$

pero sabemos que $\quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \implies \partial_\mu \phi_\nu = -\partial_\nu \phi_\mu$

con lo cual

$$\delta \mathbb{L} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu}\, 2\,(\delta \partial_\nu \phi_\mu) \implies$$

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \partial_\nu \phi_\mu} = -F^{\mu\nu}$$

sustituyendo en (21) tenemos:

$$T^{\mu}_{\nu} = -F^{\mu\alpha}\partial_\nu \phi_\alpha + \frac{1}{4}\delta^{\mu}_{\nu} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

ó lo que es lo mismo

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu}_{\alpha}\partial^{\nu}\phi^{\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\nu\mu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

como este tensor no es simétrico, para simetrizarlo adicionemosle el término siguiente $F^{\mu}_{\alpha}\partial^{\alpha}\phi^{\nu}$; esto es:

$$T^{\mu\nu} = -F^{\nu\alpha}F^{\mu}_{\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\nu\mu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F^{\mu}_{\alpha}\partial^{\alpha}\phi^{\nu}$$

pero

$$\partial^{\beta}(F^{\mu}_{\alpha}\partial^{\alpha}\phi^{\nu}) = \partial^{\beta}\partial^{\alpha}(F^{\mu}_{\alpha}\partial^{\alpha}\phi^{\nu}) - \partial^{\beta}(\partial^{\alpha}F^{\mu}_{\alpha}\phi^{\nu})$$

el primer término desaparece por que $\partial^{\beta}\partial^{\alpha}$ es simétrico mientras que F^{μ}_{α} es antisimétrico ; El segundo desaparece, ya que en el espacio libre $\partial^{\alpha}F^{\mu}_{\alpha} = 0$ en ausencia de cargas. Por lo tanto el tensor de energía-momentum para el campo electromagnético es:

$$T^{\nu\mu} = -F^{\nu\alpha}F^{\mu}_{\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\nu\mu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

3.3 Invariantes.

Como una consecuencia de la constancia de la velocidad de la luz, anteriormente dedujimos que el intervalo entre dos sucesos es invariante ante una transformación de un sistema inercial a otro. Hay otros invariantes en el continuo espacio-tiempo como son los tetra vectores de densidad de corriente, potencial, tiempo-propio, etc...

En particular, en el caso del campo electromagnético, se pueden formar los siguientes escalares invariantes

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \text{inv.} \quad ; \quad F_{\mu\nu}{}^{*}F_{\mu\nu} = \text{inv.}$$

ó de acuerdo a la definición del Tensor electromagnético en términos tridimensionales se tiene:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\,(\vec{B}^2 - \vec{E}^2/c) = \text{inv.} \qquad \ldots\ldots (23)$$

$$F_{\mu\nu}{}^{*}F_{\mu\nu} = -\,4/c\;\vec{B}\cdot\vec{E} = \text{inv} \qquad \ldots\ldots (24)$$

Del análisis vectorial se sabe que se puede formar el producto de dos vectores, ya sea, ambos axiales, ambos polares ó una combinación de ellos produciendo como consecuencia un escalar verdadero en los dos primeros casos y un seudoescalar en el último caso.

Por el hecho de que $\vec{E}$ es un vector polar, mientras que $\vec{B}$ es axial, se deduce que (23) es un escalar verdadero y (24) un seudo escalar, cuya principal diferencia radica en que el primero no se altera al hacer una inversión en las coordenadas espaciales, mientras que el segundo sí lo hace cambiando de signo, pero este último puede convertirse en un escalar verdadero si se toma el producto consigo mismo.

La invariancia de (23) y (24) nos conduce a una serie de deducciones de gran utilidad, ya que nos permite sintetizar el movi-

-miento de una partícula que se mueve en campos uniformes independientes del tiempo con velocidades cercanas a la velocidad límite, a uno de los siguientes casos*:

- a un campo eléctrico uniforme.
- a un campo magnético uniforme.
- a un campo magnético paralelo a un campo eléctrico.
- finalmente al caso cuando ambos campos son perpendiculares.

Por lo tanto de acuerdo con lo dicho, si en un sistema de referencia en el cual $\vec{E}=\vec{E}_0$ y $\vec{B}=\vec{B}_0$, $\vec{E}\cdot\vec{B}\neq 0$, lo seguirá siendo en cualquier otro sistema de referencia inercial, esto implica que siempre se puede hallar un sistema de referencia inercial en el que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ sean paralelos y además se cumple que

$$\vec{E}\cdot\vec{B}=\vec{E}_0\vec{B}_0 \qquad y \qquad \vec{E}^2-c^2\vec{B}^2=E_0^2-c^2B_0^2$$

por otro lado si $\vec{E}_0\cdot\vec{B}_0=0$ implica que $\vec{E}_0$ y $\vec{B}_0$ son perpendiculares y además se cumple que $\vec{E}_0^2-c^2\vec{B}_0^2>0$, podemos encontrar un sistema de referencia inercial en el que $\vec{B}$ es nulo. En caso contrario, es decir, cuando $\vec{E}_0\cdot\vec{B}_0=0$ y $E_0^2-c^2B^2<0$ se puede encontrar un sistema de referencia inercial en el que E_0 es nulo.

Por último, si se cumple que $\vec{E}_0\cdot\vec{B}_0=0$ y $E_0^2-c^2\vec{B}_0^2=0$ se encuentra que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares en cualquier sistema de referencia inercial y no es posible encontrar un sistema de referencia inercial en el que alguno o ambos vectores $\vec{E}$ o $\vec{B}$ se anulen.

* Siempre y cuando se describa el movimiento en consideración con respecto a un sistema de referencia inercial elegido apropiadamente.

3.4 Velocidad de deriva

En una región del espacio-tiempo ocupada por un campo electro-magnético, se define un tensor simétrico $T^{\mu\nu}(x)$ correspondiente al tensor de energía-momentum (22).

$$T^{\mu\nu}(x) = -F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

donde $F^{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético y $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ = diagonal $\| 1,-1,-1,-1 \|$. Si esta región es ocupada solo por un campo electromagné-tico (libre de fuentes), entonces $T^{\mu\nu}(x)$ satisface la ecuación de con-tinuidad:

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

En el caso en que la región sea ocupada además por un campo de fuerzas y/ó fuentes del campo electromagnético, entonces, definien-do $\mathbb{T}^{\mu\nu}$ como el tensor de energía-momentum del campo de fuerzas y/ó las fuentes, se tiene que $T^{\mu\nu}$ y $\mathbb{T}^{\mu\nu}$ satisfacen:

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} + \mathbb{T}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

De acuerdo con la Teoría especial de la relatividad, todas las formas de energía tienen una masa equivalente, además todos los sistemas tienen masa en reposo, aunque en algunos de estos casos puede ser nula.

Por medio del tensor de energía-momentum $T^{\mu\nu}(x)$ se define el tetravector de momentum en algún sistema de referencia $\overline{X}$ en la forma

$$p^{\mu}(x) = \int T^{\mu\nu} d^3\sigma_{\nu} \qquad \ldots\ldots\ldots (27)$$

donde $d^3\sigma_{\nu}$ son las componentes del elemento infinitesimal de un hiper--plano Tridimensional espacialoide.

En el espacio-Tiempo ó de Minkowski $V_{(0)}$ es el volumen de una región del hiperplano tridimensional $t = cte.$. Este tiene una normal unitaria que es un vector temporaloide con componentes $\eta^{\mu}_{(0)} = (1, \vec{0})$ por lo cual:

$$\eta^{\mu}_{(0)} \eta_{(0)\mu} = 1$$

En general, un hiperplano espacial con vector normal η tal que $\eta^{\mu}\eta_{\mu} = 1$ tiene el elemento infinitesimal

$$d^3\sigma^{\mu} = \eta^{\mu} d^3\sigma \qquad \ldots\ldots\ldots (28)$$

donde $d^3\sigma = \eta_{\mu} d^3\sigma^{\mu}$ el cual es un invariante. Este elemento se trans--forma como un tetravector. En $\underline{X}_{(0)}$ (sistema donde se anulan las componentes espaciales del tetravector η).

$$d^3\sigma_0^{\mu} = \eta^{\mu}_{(0)} d^3\sigma_{(0)} = (dV_{(0)}, \vec{0})$$

así que $d^3\sigma = dV_{(0)}$. Finalmente, como $d^3\sigma_{\nu}$ es un vector, p^{ν} debe ser un vector., el cual puede escribirse como:

$$\mathcal{P}^{\mu} = \int p^{\mu}(x)\, d^3\sigma \qquad \ldots\ldots\ldots (29)$$

donde

$$p^{\mu}(x) = T^{\mu\nu}(x)\, \eta_{\nu} \qquad \ldots\ldots\ldots (30)$$

con lo anterior se llega a la formula (27) y representa el tetra--vector de momentum en un sistema de referencia $\underline{X}$. En $\underline{X}_0$ éste se reduce a

$$\vec{P}_{(0)}(X) \qquad y \qquad P^{0}_{(0)} = E_{(0)}(X) = U_0(x)$$

En algún sistema $\overline{X} \neq \underline{X}_0$, la componente de energía $P^{0}(x)$ del tetra--vector de densidad de momentum no es $T^{00}(x)$ si no $T^{0\nu}(x)\eta_{\nu}$ y en general η_{ν} no tiene componentes espaciales nulas.

Se define la masa en reposo de un sistema (éste puede ser cualquie--ra, no necesariamente electromagnetico) como la energía de éste en el sistema de referencia donde el trivector de momentum $\vec{P}$ es nulo. (éste sistema de referencia se denota por $\underline{X}_{(0)}$). Esto es $M = P^{0}_{(0)}$, $\vec{P}_{(0)} = 0$.

Dado que $P^{\mu}P_{\mu}$ es un invariante, es claro entonces que

$$M^2 = P^{\mu} P_{\mu} \qquad \ldots\ldots\ldots (31)$$

la existencia de $\overline{X}_{(0)}$ esta garantizada por el hecho de que P^{μ} es Temporaloide.

Una transformación de Lorentz sobre el vector unitario normal $\eta^{\mu}_{(0)}$ del hiperplano t = cte. en $\underline{X}_{(0)}$ muestra que en un sistema $\underline{X}$ que se mueve con velocidad $\vec{v}$ relativa a $\overline{X}_0$ en términos de sus componentes

$$\eta^{\mu} = (c\gamma\ ,\ \vec{v}\gamma) = v^{\mu} \quad \ldots\ldots\ldots (32)$$

donde $\gamma = [1 - v^2/c^2]^{-1/2}$. Asi (29) se puede escribir como

$$P^{\mu} = M^{\mu\nu} V_{\nu} \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

con

$$M^{\mu\nu} = \int T^{\mu\nu}(x)\, d^3\sigma \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

Consideremos el tensor de energía-momentum dividido entre $c^2=1$, lo llamaremos el Tensor de masa. En el sistema $\bar{X}_0$ Tenemos:

$$M = P^{0}_{(0)} = V_{(0)\mu} P^{\mu}_{(0)} = V_{(0)\mu} M^{\mu\nu} V_{(0)\nu} = M^{00}_{(0)} \quad \ldots\ldots (35)$$

y por lo tanto en algún sistema $\bar{X}$

$$M = V_{\gamma} P^{\nu} = V_{\mu} M^{\mu\nu} V_{\nu} \quad \ldots\ldots (36)$$

como requisito físico, el tensor de masa debe ser simétrico.

Dado el tensor simétrico de masa $M^{\mu\nu}$ podemos definir el sistema en reposo como el sistema en el cual

$$M^{k0}_{(0)} = 0 \qquad k = 1,2,3 \quad \ldots\ldots (37)$$

concluimos entonces que para algún sistema $\bar{X}$

$$P^{\mu} = M\, V^{\mu}$$

con M dado por (36) o bien por (31) $M = +\sqrt{P^{\mu}P_{\mu}}$

Definimos un campo de velocidades sobre una región del espacio ocupado por un campo electromagnético en un sistema de referencia $\underline{\overline{X}}$, como la velocidad que debe tener un sistema de referencia $\underline{\overline{X}}_0$ respecto a $\underline{\overline{X}}$ para que las componentes tridimensionales respecto a $\overline{X}_{(0)}$ de P^{μ} se anulen, además se requiere que $T^{\mu\nu}$ sea diagonalizable (esto se cumple para el campo electromagnético siempre y cuando los invariantes de campo B^2-E^2 y $\vec{E}\cdot\vec{B}$ no sean ambos cero), esto es, $\vec{P}_{(0)}=0$, y cuya dirección y sentido coincide con la de P en $\overline{X}$. Este campo de velocidades está bien definido tanto para una región ocupada por un campo electromagnético como para una ocupada por materia o algún otro tipo de campo. Solo es necesario tener definido un tensor de energía-momento del sistema.

Consideremos una región ocupada por un campo electromagnético, sin fuentes, ni tampoco fuentes no-electromagnéticas. Entonces, de acuerdo con (22), (27) y (32) tenemos:

$$P^0 = \gamma\int(U-\vec{v}\cdot\vec{S}) = \gamma\int\left[\tfrac{1}{2}(E^2+B^2)-\vec{v}\cdot\vec{E}\times\vec{B}\right]d^3\sigma \quad \ldots\ldots\ldots (38)$$

$$\vec{P} = \gamma\int(\vec{S}+\vec{v}\overleftrightarrow{T}) = \gamma\int\left[\vec{E}\times\vec{B}+\vec{v}(\vec{E}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{B})-\tfrac{1}{2}\vec{v}(E^2+B^2)\right]d^3\sigma \,.\; (39)$$

de estas ecuaciones y la relación (29) tenemos

$$P^0_{(x)}=\gamma\left[U(x)-\vec{v}\cdot\vec{S}(x)\right] \quad ; \quad \vec{P}(x)=\gamma\left[\vec{S}(x)-\vec{v}\cdot\overleftrightarrow{T}\right] \quad \ldots (40)$$

ahora utilizando las ecuaciones (31), (38) y (39) se tiene que:

$$M = \frac{1}{4}\int \left[\left(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}\right)^2 \right]^{1/2} d^3\sigma \quad \ldots \quad (41)$$

o bien sustituyendo

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 2\,(B^2-E^2) \qquad y \qquad \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta} = 4\,(\vec{E}\cdot\vec{B})$$

se tiene que:

$$M = \frac{1}{2}\int \sqrt{(B^2-E^2)^2 + 4(\vec{E}\cdot\vec{B})}\; d^3\sigma \quad \ldots \quad (42)$$

la densidad de masa es

$$m(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(B^2-E^2)^2 + 4(\vec{E}\cdot\vec{B})^2} \quad \ldots \quad (43)$$

Usando la regla de transformación de los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ bajo una transformación de Lorentz:

$$\vec{E}' = \gamma\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) \qquad y \qquad \vec{B}' = \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E}\right)$$

encontraremos la velocidad del sistema de referencia $\underline{X}_0$ (desde el cual $\vec{P}=0$) respecto al sistema de partida, es decir, un sistema de referencia con una velocidad $\vec{v}$ que es perpendicular a $\vec{E}$ y $\vec{B}$ o sea paralela a $\vec{E}\times\vec{B}$ y tal que $\vec{E}'\times\vec{B}' = 0$ lo que indica que los campos son paralelos en éste sistema.

tomando el producto vectorial de $\vec{E}'$ con B' e igualando a cero tenemos:

$$0 = \vec{E}\times\vec{B} - \vec{E}\times\left(\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E}\right) - \vec{B}\times\left(\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) - \left(\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)\times\left(\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E}\right) \quad ;$$

$$0 = \vec{E}\times\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c}\left(E^2+B^2\right) - \frac{\vec{v}}{c}\left(\frac{\vec{v}}{c}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{E}\right)\right) \qquad \text{ya que}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{A}\times\vec{C}) = [\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})]\,\vec{A} \quad \text{y} \quad \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

y además $\quad \frac{\vec{v}}{c} = \frac{v}{c}\,\frac{E\times B}{|\vec{E}\times\vec{B}|} \quad$ con lo cual tenemos

$$0 = \vec{E}\times\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c}\left(E^2+B^2\right) + \frac{v^2}{c^2}\,\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{|\vec{E}\times\vec{B}|}\,\vec{E}\times\vec{B}\,) \qquad \Rightarrow$$

$$0 = \vec{E}\times\vec{B}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{\vec{v}}{c}\left(E^2+B^2\right) \qquad \text{de donde}$$

$$\frac{\vec{v}/c}{1+v^2/c^2} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{E^2+B^2}$$

pero $\quad |\vec{E}\times\vec{B}| = EB\,\mathrm{sen}\,\theta = EB\sqrt{1-\frac{(\vec{E}\cdot\vec{B})^2}{E^2B^2}} \quad$ donde $\quad \cos\theta = \frac{\vec{E}\cdot\vec{B}}{EB}$

con lo anterior $\quad \frac{v/c}{1+v^2/c^2} = \frac{\sqrt{E^2B^2-(E\cdot B)^2}}{E^2+B^2} \quad ;$

$$\frac{v^2}{c^2} - \frac{v}{c}\,\frac{E^2+B^2}{\sqrt{E^2B^2-(\vec{E}\cdot\vec{B})^2}} + 1 = 0 \qquad \text{resolviendo tenemos:}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{\dfrac{E^2+B^2}{\sqrt{E^2B^2-(E\cdot B)^2}} \pm \sqrt{\dfrac{(E^2+B^2)^2}{E^2B^2-(E\cdot B)^2}-4}}{2} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{v}{c} = \frac{E^2+B^2 \pm \sqrt{(E^2+B^2)^2 - 4(E^2B^2-(\vec{E}\cdot\vec{B})^2]}}{2\sqrt{E^2B^2-(E\cdot B)^2}}$$

desarrollando la expresión subradical del numerador:

$$(E^2+B^2)^2 - 4E^2B^2 + 4(\vec{E}\cdot\vec{B})^2 = E^4+2E^2B^2+B^4-4E^2B^2+4(\vec{E}\cdot\vec{B})^2 =$$

$= (B^2-E^2)^2 + 4(\vec{E}\cdot\vec{B})^2$; sustituyendo en la expresión anterior

$$\frac{\vec{v}}{c} = \frac{E^2+B^2 \pm \sqrt{(B^2-E^2)^2+4(\vec{E}\cdot\vec{B})}}{2\sqrt{E^2B^2-(\vec{E}\cdot\vec{B})^2}}\,\hat{S}(x)$$

donde $\hat{S}(x)$ es un vector unitario en la dirección del vector de poynting. La expresión anterior representa la velocidad del sistema de referencia $\bar{X}_0$ y la denotaremos por V_0:

$$\vec{V}_0(x) = c\,\frac{E^2+B^2 \pm \sqrt{(B^2-E^2)^2+4(\vec{E}\cdot\vec{B})}}{2\sqrt{E^2B^2-(\vec{E}\cdot\vec{B})^2}}\,\hat{S}(x) \quad \ldots\ldots\ldots (44)$$

pero $U = \frac{1}{2}(E^2+B^2)$ y $|\vec{E}\times\vec{B}| = \sqrt{E^2B^2-(\vec{E}\cdot\vec{B})^2} = p$ con lo cual (44) toma la forma siguiente:

$$(*)\ldots\ \vec{V}_0(x) = c\,\frac{2U \pm 2m}{2p}\,\hat{S}(x) = c\,\frac{U \pm m}{p}\,\hat{S}(x) \quad \text{donde } m = \frac{1}{2}\sqrt{E^2B^2-(\vec{E}\cdot\vec{B})^2}$$

ahora calculemos $U^2 - p^2$:

$$U^2 - p^2 = \frac{1}{4}(E^2+B^2)^2 - E^2B^2 - (\vec{E}\cdot\vec{B})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(U^2-p^2) = E^4+2E^2B^2+B^4-4E^2B^2-4(\vec{E}\cdot\vec{B})^2$$

$$\Longrightarrow \quad U^2 - p^2 = \frac{1}{4}\left(B^2 - E^2\right)^2 - 4\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)^2$$

como $B^2 - E^2$ y $(\vec{E}\cdot\vec{B})^2$ son invariantes, entonces $U^2 - p^2$ tiene el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales. En particular en el sistema $\underline{X}_0$ donde $\vec{p} = 0$ se tiene:

$$U_0^2 \equiv m^2 = \frac{1}{4}\left[\left(B^2 - E^2\right)^2 + 4\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)^2\right]$$

y representa la densidad de energía en el sistema $\underline{X}_0$, a la cual le llamamos densidad de masa.

De la expresión $U^2 - p^2 = m^2$ se sigue que

$$P = \sqrt{U^2 - m^2}$$

que al sustituirse en $(*)$ se obtiene

$$\vec{v}(x) = c\,\frac{U \pm m}{\sqrt{U^2 - m^2}}\,\hat{s} = c\sqrt{\frac{U \mp m}{U \pm m}}\;\hat{s} \,. \quad \ldots\ldots (45)$$

nótese que si multiplicamos la ecuación anterior por $U \pm m$ se llega a que

$$(U \pm m)\,\vec{v} = \sqrt{U^2 - m^2}\;\hat{s} \equiv \vec{P} \quad ! \quad \ldots\ldots (46)$$

es claro que $v < c$ si se elige el signo "menos", así tenemos que

$$\vec{v}(x) = c\sqrt{\frac{U - m}{U + m}}\;\hat{s}(x) \quad \ldots\ldots\ldots (47)$$

Consideremos un campo electromagnético uniforme y supongamos que tenemos partículas cargadas en él, éstas partículas adquieren una velocidad media igual a $\vec{V}_{(0)}$. Llamemos a esta velocidad media, la velocidad de deriva de las partículas en cuestión:

De acuerdo con (43) y (47)

$$\vec{V}_D = \sqrt{\frac{U-M}{U+M}}\,\hat{S} = \sqrt{\frac{U-m}{U+m}}\,\hat{S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

si el campo no es uniforme, se define la velocidad de deriva como la velocidad media de todo el sistema de partículas y el valor de esta es:

$$\vec{V}_D = \frac{1}{B}\int \frac{(U-m)}{\sqrt{U^2-m^2}}\,\hat{S}\,d^3\sigma + \text{una deriva de inercia} \quad \ldots\ldots (49)$$

Si existen las partículas supraluminales cargadas y estas son capaces de interaccionar con el campo electromagnético, entonces se puede demostrar que la velocidad media que estas adquieren en el campo (velocidad de deriva) es:

$$\vec{V}_D = \sqrt{\frac{U+M}{U-M}}\,\hat{S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

si el campo es uniforme, o bien

$$\vec{V}_D = \frac{\int (U+m)\,d^3\sigma}{\int \sqrt{U^2-m^2}\,d^3\sigma}\int \vec{P}(x)\,d^3\sigma + \text{una deriva de inercia} \ldots (51)$$

si el campo no es uniforme.

Ahora en el caso en que

$$\vec{E}\cdot\vec{B}=0 \qquad y \qquad B^2-E^2>0$$

el movimiento de una partícula en un campo electromagnético uniforme se reduce a considerar el movimiento en un sistema de referencia inercial elegido apropiadamente en el cual solo se encuentra presente un campo eléctrico uniforme.

Para elegir apropiadamente el sistema de referencia en el cual se cumpla lo anterior encontraremos la velocidad con la que este se mueve respecto al sistema de referencia inercial original. Considerando que los campos se transforman de acuerdo a la transformación de Lorentz, se tiene:

$$\vec{E}'=\gamma\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right) \qquad y \qquad \vec{B}'=\gamma\left(\vec{B}-\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{E}\right)$$

como en el sistema de referencia inercial de interes solo hay campo eléctrico presente, se tiene que $\vec{B}'=0$, se sigue que:

$$\vec{B}-\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{E}=0$$

multiplicando vectorialmente la ecuación anterior por $\vec{E}$:

$$\vec{E}\times\vec{B}-\frac{1}{c}(\vec{E}\times\vec{v}\times\vec{E})=0 \implies \vec{E}\times\vec{B}-\frac{1}{c}\left(E^2\vec{v}-\cancel{(\vec{E}\cdot\vec{v})}^{\,0}\vec{E}\right)=0$$

$$\implies \vec{E}\times\vec{B}-\frac{1}{c}E^2\vec{v}=0 \qquad \text{despejando} \qquad \vec{v}=c\,\frac{\vec{B}\times\vec{E}}{E^2}$$

pero $\vec{B}$ es perpendicular, por lo que

$$v = c\,\frac{\vec{B}\times\vec{E}}{E^2} = c\,\frac{BE}{E^2} \Rightarrow v = c\,\frac{B}{E}$$

como puede verse el valor de la velocidad con la cual se debe mover el sistema de referencia inercial solo depende de la razon entre el campo magnético y eléctrico y es independiente de la carga y la energía de las partículas involucradas.

Para encontrar el valor del campo eléctrico sustituyamos el valor de la velocidad encontrado en la expresión de Transformación del campo magnético:

$$\vec{E}' = \gamma\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right) = \gamma'\left(\vec{E} + \frac{1}{\cancel{c}}\cancel{c}\,\frac{(\vec{B}\times\vec{E}\times\vec{B})}{E^2}\right) = \gamma'\left(\vec{E} + \frac{1}{E^2}(\vec{B}\times\vec{E}\times\vec{B}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}' = \gamma'\left(\vec{E} + \frac{1}{E^2}\left[\cancel{(\vec{E}\cdot\vec{B})}^{\,0}\vec{B} - B^2E\right]\right) = \gamma'\left(E - \frac{B^2E}{E^2}\right)$$

pero

$$\gamma' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{\cancel{c^2}\,B^2/E^2}{\cancel{c^2}}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{B^2}{E^2}\right)^{-1/2}$$

sustituyendo en la expresión para $\vec{E}'$:

$$\vec{E}' = \left(1 - \frac{B^2}{E^2}\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{B^2}{E^2}\right)\vec{E} = \left(\frac{E^2 - B^2}{E^2}\right)^{1/2} E$$

$$\therefore\quad \vec{E}' = \left(\frac{E^2 - B^2}{E^2}\right)^{1/2}\vec{E}$$

esta ecuación representa el valor del campo eléctrico en el sistema de referencia inercial que se mueve con la velocidad

$V = c\, B/E$ respecto al sistema original.

Cuando $\quad E \cdot B = 0 \quad$ y $\quad B^2 - E^2 < 0$

el analisis del movimiento se reduce a considerar un sistema de referencia inercial en el cual la intensidad del campo eléctrico se reduce a cero y solo se encuentra presente un campo mag-nético.

Haciendo un calculo análogo al del caso anterior o efectuando las consideraciones pertinentes en la expresión para la velocidad de deriva (48) se encuentra que:

$$\vec{V} = c\,\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad \Rightarrow \quad V = c\,\frac{E}{B} \qquad / \; \vec{E} \perp \vec{B}$$

igual que en el caso anterior la velocidad depende unicamente de la razón entre los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Con este valor de la veloci-dad del sistema de referencia inercial sustituido en la expresión de transformación del campo magnético se encuentra su valor en este sistema:

$$\vec{B}' = \left(\frac{B^2 - E^2}{B^2} \right) \vec{B}$$

El siguiente caso que analizaremos es cuando

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = EB\cos\theta \neq 0 \qquad y \qquad B^2 - E^2 = 0 \implies B^2 = E^2$$

usando la relación

$$v_D = c\sqrt{\frac{U-m}{U+m}}\,\hat{S}$$

calculando U y m se tiene:

$$U = \frac{1}{2}(E^2 + B^2) = E^2 \quad ; \quad m = \frac{1}{2}\sqrt{(B^2-E^2)^2 + 4(\vec{E}\cdot\vec{B})} = \frac{1}{2}E^2|\cos\theta|$$

con lo que la expresión de la velocidad de deriva toma el valor si-guiente:

$$v_D = c\sqrt{\frac{E^2 - \frac{1}{2}E^2|\cos\theta|}{E^2 + \frac{1}{2}E^2|\cos\theta|}}\,\hat{S} = c\left[\frac{1 - \frac{1}{2}|\cos\theta|}{1 + \frac{1}{2}|\cos\theta|}\right]^{1/2}\hat{S}$$

En el caso en que

$$B^2 - E^2 = 0 \qquad y \qquad \vec{E}\cdot\vec{B} = 0$$

el tensor de energía-momento no es diagonalizable y como con-secuencia no existe velocidad de deriva, ya que se encuentra que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares en cualquier sistema de refe-rencia inercial y no es posible encontrar uno en el que alguno o ambos vectores de campo $\vec{E}$ y/o $\vec{B}$ se anulen. Sin embargo las partículas son constantemente aceleradas en la dirección per-pendicular al plano determinado por los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ de tal forma que la velocidad de estas tiende a c (velocidad de la luz) en un tiempo infinito.

En un medio transparente con $\epsilon > 1$ y con

$$\vec{B} = \epsilon \vec{E} \qquad y \qquad \vec{E}\cdot\vec{B} = 0$$

podemos calcular la velocidad de deriva, calculando previamente los valores de m y U respectivamente:

$$m = \frac{1}{2}\left[(B^2-E^2)^2 + 4(\vec{E}\cdot\vec{B})^2\right]^{1/2} = \frac{1}{2}\left[(\epsilon^2E^2 - E^2)^2\right]^{1/2} = \frac{1}{2}E^2(\epsilon^2-1)$$

$$U = \frac{1}{2}(E^2+B^2) = \frac{1}{2}(E^2+\epsilon^2E^2) = \frac{1}{2}E^2(1+\epsilon^2)$$

sustituyendo en la expresión de la velocidad de deriva:

$$V_D = c\left[\frac{\frac{1}{2}E^2(1+\epsilon^2) - \frac{1}{2}E^2(\epsilon^2-1)}{\frac{1}{2}E^2(1+\epsilon^2) + \frac{1}{2}E^2(\epsilon^2-1)}\right]^{1/2} = c\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)^{1/2} = \frac{c}{\epsilon}$$

de óptica sabemos que el indice de refracción se determina por la formula siguiente:

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}$$

y además que practicamente para todos los dielectricos trans--parentes se puede considerar que aproximadamente $\mu = 1$ por lo que $n = \sqrt{\epsilon}$ ó $n^2 = \epsilon$; por lo tanto

$$V_D = \frac{c}{n^2}$$

Finalmente, consideremos un campo magnético uniforme super-puesto perpendicularmente a un campo de fuerzas uniforme, en este caso tambien se produce una velocidad de deriva dada por la siguiente expresión:

$$V_D = \frac{(q\vec{B})^2 + \vec{F}^2 - \sqrt{[(qB)^2 - F^2]^2 + 4q^2(\vec{F}\cdot\vec{B})^2}}{2q\sqrt{B^2F^2 - (\vec{B}\cdot\vec{F})^2}}\,\hat{S}$$

en donde $\hat{S} = \dfrac{\vec{F}\times\vec{B}}{|\vec{F}\times\vec{B}|}$

Pero si el campo de fuerzas es no-uniforme, entonces:

$$V_D = \frac{1}{\mathcal{O}}\int \frac{[(q(x)B]^2 + (F(x))^2 - \sqrt{[(q(x)B)^2 - (F(x))^2]^2 + 4q^2(x)[\vec{B}\cdot\vec{F}(x)]^2}}{2q(x)\sqrt{(BF(x))^2 - (\vec{B}\cdot\vec{F}(x))^2}}\,\hat{S}\,d^3\mathcal{O}$$

si adicionalmente a que $\vec{B}$ y $\vec{F}$ son uniformes y se cumple que $\vec{F}\cdot\vec{B}=0$ entonces

$$V_D = c\frac{\vec{F}\times\vec{B}}{qB^2} \qquad \text{si } \vec{F}<B$$

y

$$V_D = c\frac{\vec{F}\times\vec{B}}{qF^2} \qquad \text{si } \vec{B}<\vec{F}$$

como puede verse, aqui la velocidad de deriva depende del valor y signo de la carga, produciendo este último deriva en diferentes direcciones.

Si es preciso conocer la trayectoria de las partículas en el sis-tema de referencia original (del laboratorio), es decir, en el sistema en el cual $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son diferentes de cero, basta sustituir el valor de la velocidad de deriva obtenido en el caso de interes, en las ecuaciones de transformación de Lorentz.

$$x = \gamma\left(x'(t') + v_0 t'\right) \quad ; \quad y = y'(t') \quad ; \quad z = z'(t')$$

$$t = \gamma\left(t' + {}^{v_0}/_{c^2}\, x'(t')\right) \quad y \quad \gamma = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Concluciones :

Resulta interesante ver como en base a las propiedades del tensor de energía-momento y de los invariantes del campo electromagnético podemos encontrar un sistema de referencia inercial en el cual los campos eléctrico y magnético sean paralelos en un punto dado, o en el caso mas particular, cuando los campos son perpendiculares en el sistema de referencia inercial original, se puede encontrar un sistema de referencia inercial en el cual solamente existe campo eléctrico o magnético.

Por otro lado, el hecho de que la expresión para el momento en el caso electromagnético dado por la ecuación (III.46) donde se ve que la diferencia de cuadrados entre la densidad de energía y la "masa electromagnética" difiere de la expresión clásica del momento.

Además, si existen las partículas supraluminales cargadas y pueden interaccionar con los campos, entonces la ecuación (III.50) expresa la velocidad de deriva que estas adquieren.

Por lo que respecta a las aplicaciones de la velocidad de deriva electromagnética podemos mencionar las siguientes:

1) Dado que la velocidad de deriva depende unicamente de la razón entre los campos sin importar su masa y su carga, permite seleccionar un flujo de partículas cargadas de acuerdo

con su velocidad, lo anterior tiene una gran variedad de usos experimentales.

Un caso de gran interes en la física de Plasmas es cuando el movimiento de las partículas cargadas se reduce a considerarlo en un sistema de referencia inercial en el cual la intensidad del campo eléctrico se reduce a cero, mientras que el campo magnético es independiente del Tiempo pero dependiente de la posicion (lentamente convergente). El tipo de campo anterior obliga a la partícula o grupo de partículas, según sea el caso, a seguir una trayectoria helicoidal que se va cerrando, hasta que esta se refleje por las lineas del campo convergentes, lo anterior recibe el nombre de espejo magnético debido a la reflexión que produce en las partículas cargadas involucradas. Si se utilizan dos o mas espejos magnéticos es posible confinar un plasma con fines de producción de energía termonuclear, o cualquier otro propósito.

Tambien Tiene una amplia aplicación en el estudio de la interacción de partículas cargadas con el campo magnètico de la Tierra, los planetas o el sol.

Bibliografía :

1.- Arfken, G., Mathematical Methods for physics. Academic Pres. (1970)

2.- Bredov, M., Rumiantsev, V., toptiguin, I., Electrodinámica clásica Mir (1986)

3.- Einstein, A., El significado de la relatividad Editorial Artemisa (1985)

4.- Eyges., the classical electromagnetic field. Addison-Wesley (1950)

5.- Goldstein, H., Classical Mechanics Addison-wesley (1950)

6.- Jackson J. D. Classical electrodinamics Jhon Willey & Sons Inc. (1962)

7.- Kipp, A. F., Fundamentals of electricity and Magnetism Mc Graw Hill (1962)

8.- Landau, L. D., Lifshits, E. M., teoría clásica de campos Mir (1980)

9.- Phillips, H. B., Vector Analysis Willey (1933)

10.- Rohrlich, Am. J. Phys. 28, 639 (1960)

11.- Sokolnikoff, Análisis tensorial index-prial Madrid.

12.- Stratton J. A., Electromagnetic theory Mc Graw Hill (1941)

13.- Walter, H. Introducción a los principios de mecánica UTEHA (1969).