6 2 ej.

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

NOTAS MATEMATICAS PARA UN PRIMER CURSO DE BACHILLERATO.

T E S I S

Que para Obtener el Título de:

LICENCIADO EN MATEMATICAS

P R E S E N T A :

Raúl Espinosa de los Monteros Zaragoza

México, D. F. 1988.

I N D I C E

****

**

*

Introducción.

Tengo catorce años dando clases en la Universidad Nacional Autónoma de México, Colegio de Ciencias y Humanidades, C.C.H. en ese tiempo he puesto en práctica diversos materiales bibliográficos, en mi quehacer pedagógico. En los últimos años, el material que había usado, en ciclos anteriores, no me fué posible utilizarlo, porque; las ediciones tienen un tiraje con demasiados ejemplares mal impresos, o bien porque ya no los editan, o el enfoque se centra demasiado en la parte operativa, o porque el enfoque no le concede ninguna importancia. Con sus contrapartidas, poca teoría o demasiada teoría, los hacen no deseables en la actualidad, y aún el nivel y los conocimientos que presuponen en el alumno no son los que corresponden a la realidad.

Dado que los libros extranjeros y traducidos traen ejemplos con situaciones que no son muy frecuentes en nuestro país, por lo que representan dificultades adicionales para nuestros alumnos, los de autores mexicanos adecuados al nivel inicial, son difíciles de conseguir, por ser muy limitadas las ediciones de la U.N.A.M., o de las instituciones que los editan, me decidí a escribir estas breves notas, las cuales están basadas en la experiencia de las aulas del C.C.H., en mis conocimientos de los hábitos de estudio de mis alumnos, del ambiente escolar, hogareño y laboral en que se desenvuelven, así mismo en los cursos pedagógicos y metodológicos a los que he asistido en el C.C.H.

He procurado ceñirme a los programas de estudio editados como documentos de trabajo, con algunos temas añadidos que los alumnos requieren para cursar de manera satisfactoria las asignaturas que llevan paralelamente y las que en lo sucesivo cursaran.

El propósito que he perseguido en mi práctica docente ha sido el de lograr que el alumno:

1º Deje de rechazar las matemáticas.

2º Que realmente aprenda matemáticas.

3º Que le gusten a tal grado que procure adquirir el conocimiento matemático por sí mismo, valiendose de los textos y de su propio razonamiento.

Modelos Matemáticos.

En la ciudad de Juneau, Alaska viven cuatro hermanos, el mayor de nombre Daniel de dieciséis años tiene una motocicleta con dos plazas, en la que transporta diariamente a sus tres hermanitos a la escuela; Bonifaz, de nueve años, se pelea mucho con su hermano menor; Claudio, de ocho años y lo golpea cuando están solos; Ana, de diez años, molesta porque Bonifaz le pega a Claudio, le jala el pelo cuando están juntos sin Daniel.

El papá, Illía, hombre fuerte, sale a pescar en un gran barco, (en el cual su esposa Austra-Bertha es cocinera), le ha encomendado a Daniel que procure evitar que sus hermanos menores se peleen.

Daniel, que también va a la escuela, tiene que llevar a sus hermanos antes de que la abran, por lo que esperan un rato afuera, mientras, el transporta a los demás. ¿Como hará Daniel para evitar que sus hermanos se maltraten entre sí ?

Haz una maqueta, que represente la escuela, la casa, los hermanos y la motocicleta, de tal manera, que puedas mover los objetos que representen a los hermanos y su motocicleta. Juneau es un ciudad muy fría, donde hay mucha nieve, hielo, viento y las personas pueden morir si estan mucho tiempo a la intemperie. Por eso la escuela tiene un Portal grande y con paredes a los lados.

Prueba con tu maqueta las posibles soluciones.

Tu maqueta representa la realidad del problema, pero no fielmente, pues los objetos que representan a los hermanos no son ellos, no están vivos, no se pelean realmente, no sienten el frío de esas regiones, no saben construir refugios con hielo, en fin son sólo modelos que representan la realidad, además la motocicleta representada, tal vez no sea como las que se usan en Juneau, que probablemente tenga en vez de llanta trasera, una tracto-oruga doble, en fin que tu maqueta es **un modelo de la realidad,** que haz elaborado procurando representar los aspectos más importantes y esenciales de la realidad, para el problema que deseamos resolver.

Una representación escrita del problema, se logra simbolizando;

A = Ana,

B = Bonifaz,

C = Claudio,

D = Daniel, y la motocicleta,

El lado izquierdo de una raya / representará la casa, y el lado derecho la escuela, la raya misma será el signo de la distancia entre la casa de Daniel y la escuela.

Nuestra solución debe ser tal que no queden solos; A con B, ni B con C, Escribe dos listas; con las posiciones permitidas y prohibidas, la solución requerirá el menor número de viajes, dado el rigor climático.

Escribe tu solución, ¿se la mandarias a Daniel, para que la aplicara?

Una solución es:

ABCD/

AC/BD

ACD/B

A/BCD

ABD/C

B/ACD

BD/AC

/ABCD

Esta solución tiene siete pasos y ocho posiciones, ¿crees que haya otra solución con menos pasos? deberá pasar de una posición permitida a otra también permitida.

Tal vez Daniel no entienda tu solución simbólica, sería conveniente que le mandaras una explicación de los símbolos usados.

Una solución distinta de la ya dada es:

ABCD/

AC/DB

ACD/B

C/ABD

DBC/A

B/ACD

BD/AC

/ABCD

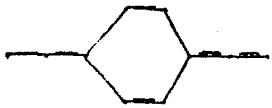
También tiene siete pasos y ocho posiciones.

Si tomamos la posición ABCD/ como punto de partida podemos representar gráficamente las dos soluciones así:

```
                          A/BCD——ABD/C
                         /            \
ABCD/——AC/BD——ACD/B                    B/ACD——BD/AC——/ABCD
                         \            /
                          C/ABD——BCD/A
```

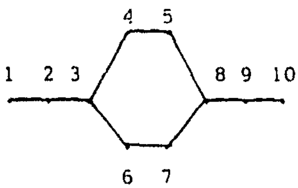
Esta es una gráfica con ocho posiciones, dos de ellas son opcionales con otras dos, lo que hace un total de diez posiciones.

Para vizualizar mejor, sustituiremos las posiciones por puntos marcados:



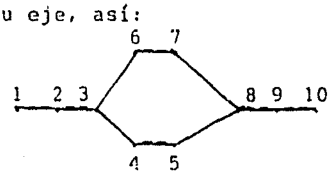
A los puntos marcados los llamaremos vértices y el segmento de recta que los une lo llamaremos arista.

Numeremos los puntos:

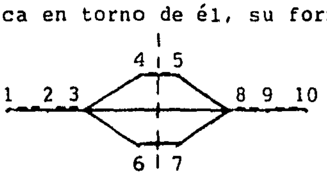


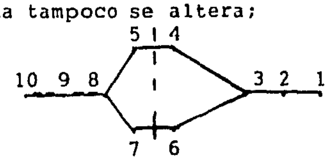
Resolver el problema se reduce ahora, a recorrer la gráfica de uno a diez, pasando, ya sea por cuatro y cinco o por seis y siete.

La forma de la gráfica no se altera si le damos vuelta en torno de su eje, así:



A esta propiedad la llamamos simetría, observamos también que si trazamos un eje equidistante de los puntos cuatro y cinco y de los puntos seis y siete, y a continuación giramos la gráfica en torno de él, su forma tampoco se altera;





De los puntos uno y diez, sale una sola arista, de los puntos dos, cuatro, cinco, seis siete y nueve, salen dos aristas. y de los puntos tres y ocho, salen tres aristas.

En la gráfica se puede pasar del punto tres al cuatro, cinco, ocho, siete, seis y regresar al punto tres, sin pasar dos veces por veces por una arista, ni despegar el lápiz del papel.

Se puede relacionar la suma de las aristas que salen de los puntos que componen la gráfica con la posibilidad de realizar tales paseos eulerianos, si te interesa el tema puedes consultar el folleto; **Gráficas**, del Doctor Santiago López de Medrano, © 1972, ANUIES.

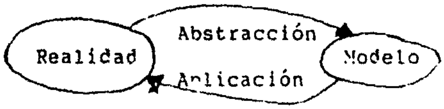
Ejercicio uno, ¿cómo le explicarías la solución de este problema a un niño de nueve años? ¿Qué modelos se te ocurren para explicarselo?

Ejercicio dos; Si en lugar de Daniel, Ana, Bonifaz, Claudio y la motocicleta en la ciudad de Juneau, se tuviera un viejo que desea pasar sus pertenencias consistentes en; un perro de siete kilos, una gallinota de seis kilos y una canastita con seis kilos de maíz, al otro lado del río sumacinta, en una canoa de remos, en que sólo cabe él y una de sus pertenencias, sabiendo que si deja sola a la gallina con el maíz, aquella se comerá a éste. Y si dejará solo al perro con la gallina, al regresar ya no tendría gallina, sino a un perro más gordo. ¿Cual sería la solución? ¿tendría la misma representación gráfica que el problema anterior?

Ejercicio tres; inventa otros problemas que tengan una solución cuya gráfica sea igual a la de los anteriores.

Dado el problema de Daniel en Juneau, hemos resuelto su problema por un pequeño proceso de abstracción se construyo un modelo del problema, la maqueta, luego de resuelto el problema, en el modelo, pasaríamos a aplicar la solución en la realidad.

Lo anterior podemos representarlo con un esquema:



Al considerar más modelos, desarrollamos teorías que nos permiten entenderlos y manejarlos mejor. Así se construyen las ciencias, podemos representar lo dicho por el nuevo esquema:

Muchas veces nos hemos preguntado, ¿Qué sentido tiene proponer el ejemplo de un padre que con su motocicleta de dos asientos transporta a sus hijos A, B, C, a la escuela donde los tres estudian, con las condiciones de que no deben quedarse solos, sin el padre, A con B,ni B con C? O el problema, equivalente de un viejo que desea transportar a su perro, su gallina y su canasta de maíz al otro lado del río cuando en su canoa sólo cabe él y una de las tres pertenencias con la condición de que no deben quedar en una orilla sólos el perro y la gallina, ni la gallina y el maíz.

1) Este problema es fácil de comprender por el alumno.

2) A sus maestros nos permite hacerles sentir la necesidad de representar el problema con símbolos y un modelo adecuado, que conserve lo esencial del problema.

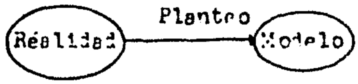
3) Al simplificar el módelo logrado, hacemos observar al alumno que puede aplicarlo a otros problemas similares.

4) Al hacer la representación gráfica, se puede introducir al alumno en el concepto de simetría y conmutatividad.

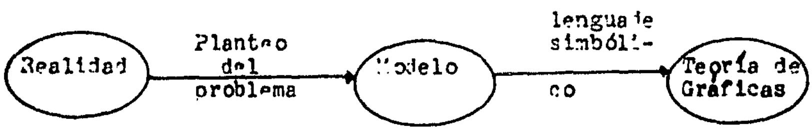
5) Desde el punto de vista de la teoría de gráficas le podemos señalar que cada posición tiene dos o tres alternativas y conoce la posibilidad de efectuar un paseo Euleriano, - un trazo continuo que recorre toda la gráfica, sin pasar por ninguna arista más de una vez,-

6) Reflexiones

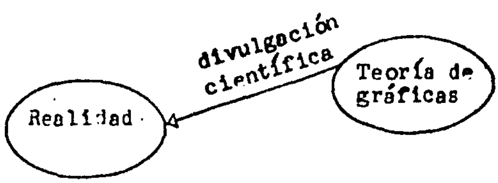
a) El curso de nuestros pensamientos va de la realidad observable al planteamiento del problema y la construcción del modelo que conserva lo esencial del problema:



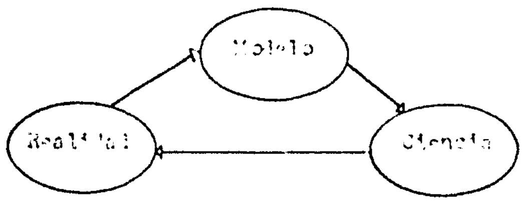
b) Propiciamos que el alumno se dé cuenta concientemente que al usar el lenguaje simbólico, éste nos permite optimizar nuestras soluciones y encontrar otra solución equivalente que, al conjuntarlas en un mismo diagrama, nos lleva a la teoría de gráficas.



Esta teoria de gráficas ya es parte del Aparato Teórico Matemático (A.T.M.) que a su vez nos de resultados que podemos traducir a la realidad, como aplicaciones a travér de la divulgación científica.



Reiniciando otra vez el ciclo así:

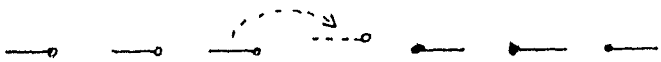


Lenguaje Simbólico

El problema de los Cerillos

Se colocan seis cerillos de la siguiente manera:

Hay siete lugares, seis ocupados por los cerillos y uno libre, el objeto del juego es pasar los cerillos del lado derecho al izquierdo y viceversa, para lo cual se moverán los cerillos alternando de uno y de otro lado, uno a la vez, ya sea ocupando el espacio vació, ejemplo:



no se permite voltear los cerillos, ni saltar a un cerillo que vaya en la misma dirección, ni saltar dos o más cerillos.

Sugerencia para que no se les rueden, doblenlos un poco o aplastenlos en el extremo opuesto del fósforo.

Si has llegado a esta posición, y ya no se te ocurre como continuar:

Relee el enunciado y recuerda que hay siete lugares; otra sugerencia: marca los límites de los siete lugares.

Cuando lo resuelvas repitelo frente al instructor*, sugerencia; para no olvidar su solución, representenla graficamente.

a) Representen cada paso, pegando los cerillos al papel.

b) Escriban la solución con una representación gráfica, más sencilla.

Ejemplo:

* Es muy frecuente que violen las reglas, saltando cerillos de un lado, o regresandolos, o volteando las cabezas; para evitarlo, dar diferentes colores a cada bando de cerillos y, si es posible, numerarlos.

A B C □ 1 2 3
A B □ C 1 2 3
A B 1 C □ 2 3*
A B 1 C 2 □ 3
A B 1 □ 2 C 3
A □ 1 B 2 C 3
□ A 1 B 2 C 3*
1 A □ B 2 C 3
1 A 2 B □ C 3
1 A 2 B 3 C □

1 A 2 B 3 □ C
1 A 2 □ 3 B C
1 □ 2 A 3 B C
1 2 □ A 3 B C
1 2 3 A □ B C
1 2 3 □ A B C

En total 15 pasos.

Nótese que el orden alfabético y numérico no cambia, lo que es el equivalente a la regla que impide saltar un cerillo del mismo bando. Además los siete lugares quedan bien señalados, destacándose en cada posición, el espacio vació.

Cuenten los pasos en que se resolvió el problema, y anotenlos.

Resuelvan el problema para cuatro cerillos y cinco lugares, escriban la solución, hela aqui:

A B □ 1 2
A □ B 1 2
A 1 B □ 2
A 1 B 2 □
A 1 □ 2 B
□ 1 A 2 B
1 □ A 2 B
1 2 A □ B
1 2 □ A B   8 pasos

Ahora por favor resuelvan el problema para dos cerillos, tres lugares y escriban la solución:

A □ 1
□ A 1
1 A □
1 □ A   3 pasos

¿cuántos pasos se requieren en una solución para ocho cerillos y nueve lugares?

En efecto se requieren veinticuatro pasos.

Escribamos la lista:

Número de cerillos n	Número de pasos
2	3
4	8
6	15
8	24
10	

¿cuántos pasos seguirán para 10 cerillos? y ¿Para n cerillos? Si no pueden hallar la fórmula, reordenemos y completemos la tabla:

Número de cerillos n	Número de cerillos por lado n/2	Número de pasos
2	1	3
4	2	4
6	3	15
8	4	24
10	5	
- - -	- - -	- - -
n	n/2	

La linea discontinua representa los renglones que se omiten hasta llegar a n-1.

Cuándo encuentren la fórmula, completen la siguiente tabla:

Número de cerillos	Número de cerillos por lado n/2	Número de cerillos por lado más dos $\frac{n}{2} + 2$	Número de pasos
2	1	3	3
4	2	4	8
6	3	5	15
8	4	6	24
10	5	7	35
- - -	- - -	- - -	- - -
n	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2} + 2$	$\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} + 2\right)$

Este problema hace sentir al alumno la necesidad de contar con un lenguaje simbólico, que le permita reproducir la solución del problema, y además, al hacer depender el número de pasos de una solución, del número de cerillos involucrados en el problema, lo introducimos al razonamiento inductivo.

Lógica.

Entendemos por Término una palabra o conjunto de palabras que afirman o niegan algo de un sujeto (alguien).

Ejemplo: El amor es tierno.

Decimos que una Proposición es un término del cual tiene sentido preguntarse si es falso o verdadero;
ejemplos:

Las suaves jacarandas nos evocan primaveras que fueron o vendrán.

La luna refulge en el cielo.

Los conectivos lógicos son expresiones que afectan y relacionan a las proposiciones, por ejemplo:

No es cierto que Elsa recoge jazmines.

El conectivo es la negación "no es cierto que".

Ire a comer y el viento arrastra los insectos.

El conectivo es la conjunción "y"

Soy de viento o soy de tierra; el conectivo es la disyunción "o".

Si te gusta el sonido de la lluvia, entonces tu alma percibe la belleza. El conectivo lógico es el condicional "si ... entonces..."

Clasificamos las proposiciones en simples y compuestas; Las proposiciones simples tienen un sujeto y un predicado y carecen de conectivos lógicos, ejemplos:

Los jóvenes gustan de cantar ,

Juan disfruta el sonido de la lluvia, Te alegra ver la yerba en las montañas.

Las proposiciones compuestas tienen uno o más conectivos lógicos que afectan a una o más proposiciones, ejemplos:

No es cierto que vivir es indoloro;

Los peces sonríen y los flamingos son belleza en libertad.

El claro de la luna es apacible o las plumas del marabú son suaves y sedosas.

Si Eros es un dios, entonces Eros es un dios del Olimpo.

A quien amamos nos ama si y solo si disfrutamos del paraíso.

Los conectivos lógicos están subrayados en los ejemplos anteriores, ahora escribamos las proposiciones dejando un espacio en las proposiciones afectadas.

No es cierto que ....

..........................o..................................

si...................entonces.............................

o.........................o..................................

.......................si y solo si.......................

La proposición: "Las jacarandas evocan primaveras", la podemos representar con la letra "J", que llamaremos letra proposicional, cada vez que veamos "J", recordaremos la proposición, "Las jacarandas evocan primaveras", por esto a "J" la llamaremos letra proposicional constante.

Una letra proposicional es un símbolo que representa a una proposición.

"La luna refulge en el cielo", es una proposición que representaremos con la letra "T", "Son cálidas las playas nuestras", con la letra "N".

"A Elsa le gusta el sonido de la lluvia", con la letra "G". Tendremos así las proposiciones L, J, T, N , G; simbolizaremos a cualquiera de ellas con la letra minúscula "p", - también simbolizará cualquier otra proposición-. Las letras proposicionales mayúsculas L, J, T, N , G, son <u>constantes</u> porque representan una sola proposición específica, la letra minuscula "p" es variable porque representa a cualquiera de ellas, si quisieramos representar dos proposiciones cualquiera, diferentes entre sí, hariamos uso de dos letras proposicionales minúsculas diferentes; como "p" y "q", o "p" con el subíndice "1" y "2", quedandonos "p_1" y "p_2"; para representar tres proposiciones cualquiera diferentes, usariamos "p_1" , "p_2" "p_3", o "p", "q", "r". Para representar cualquier número n, de letras proposicionales diferentes, usariamos "p_1", "p_2", "p_3", ..., "p_n", donde n es un número entero y positivo cualquiera, -natural-, los puntos suspensivos "..." representan las letras proposicionales que faltan para llegar de 3 a n.

Si la proposición "La luna refulge en el cielo", es cierta, decimos que "L" es verdadera. En caso de que estuviera cayendo una tormenta, las nubes taparían la luna y la proposición "La luna refulge en el cielo", sería falsa; diríamos, entonces, que "L" es falsa, representando con v el valor verdadero y con f falso. Podemos hacer una tabla para la proposición "L", que sería así;

L
V
F

fuera de la tabla, ponemos la letra "L" que simboliza a la proposición "La luna refulge en el cielo", en el primer renglón de la tabla, propiamente dicha, está el símbolo del valor verdadero "v", en el segundo renglón está el símbolo del valor falso, "f"; nuestra tabla sólo tiene una columna que está directamente abajo de la letra proposicional "L". De igual manera podemos hacer la tabla del valor de verdad de las letras proposicionales "J","T", "N" y "G", y nos quedarían así;

J
v
f

T
v
f

N
v
f

G
v
f

Como se puede observar, la tabla, propiamente dicha, es igual para las cinco proposiciones representadas con la letras; "L", "J", "T","N", "G", por lo que podemos sustituirlas con la letra proposicional variable, p, y hacer la tabla de verdad

p
V
f

la cual es válida para cualquier proposición .

Negación.

Sí a la proposición " A los alumnos les gusta la lógica", la representamos por la letra proposicional G_1 podremos negar la escribiendo "no es cierto que a los alumnos les gusta la lógica", y la simbolizamos "no es cierto que "G_1", si ahora simbolizamos la negación "no es cierto que ", con "$\sim$" se representará "$\sim G_1$" a la negación de "G_1". Así el conectivo lógico <u>negación</u>, quedaría representado por el símbolo "$\sim$".

La proposición "me alegra ver la yerba en la montaña", quedará representada por la letra proposicional "A" y su negación: " no es cierto que me alegra ver la yerba en la montaña", por "$\sim$ A".

Estas proposiciones G_1 y "A " que son negadas son simples, pero aun cuando la proposición negada fuera compuesta, la negación actuaría sobre ella como si fuera una sola proposición, motivo por el cual a la negación se le considera unaria.

Si Es cierto que me alegra ver la yerba en la montaña, entonces la proposición "A" será verdadera, y su negación: "$\sim$A" será falsa.

Pero si no me alegra ver la yerba en la montaña*, la propo-

*Por ejemplo ; antes había un bodque de abedules, que se quemó y la yerba que lo sustituye me entristece.

sición "A" será falsa y su negación "$\sim$ A" será verdadera.

La tabla de verdad de la negación de "A" quedará así

A	$\sim$ A
v	f
f	v

observe que hay una columna para la letra proposicional "A" otra para la negación "$\sim$ A" en el primer renglón, "A" es verdadera y la negación falsa, en el segundo renglón "A" es falsa y la negación cierta.

Si es verdad que a los alumnos les gusta la lógica, entonces la negación "$\sim G_1$" es falsa. Y si es falso que a los alumnos les guste la lógica, la negación "$\sim G_1$" es verdadera.

Su tabla de verdad será

G_1	$\sim G_2$
v	f
f	v

hay una columna para la letra proposicional "G_1" y otra para su negación "$\sim G_1$". En el primer renglón "G_1" es verdadera y su negación falsa. en el segundo renglón "G_1" es falsa y su negación verdadera.

Escribamos las dos tablas juntas

A	$\sim$ A
v	f
f	v

G_1	$\sim G_1$
v	f
f	v

las tablas propiamente dichas son iguales para las dos proposiciones "A" y "G_1", luego si las sustituimos por una letra proposicional variable como la "p" y hacemos la tabla de verdad quedará

p	$\sim p$
v	f
f	v

la cual es válide para la negación de cualquier proposición.

Sean las proposiciones:

" Los niños enternecen nuestra vida" que representaremos como; "N", y la proposición "las piñatas dan color de infancia", representada por "I". Si las relacionamos así;

"Los niños enternecen nuestra vida y las piñatas dan color de infancia", formaremos una proposición compuesta que representaremos; "N y I". Cuando son verdaderas ambas proposiciones componentes, la proposición compuesta "N y I", es verdadera; si "N" es verdadera pero I es falso, entonces "N y I" es falsa; si "N" es falsa pero "I" es verdadera "N y I" es falsa y si ambas son falsas; entonces "N y I" es falsa.

Esto lo podemos escribir en la tabla;

N	I	N y I
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

representando la conjunción "y" por el símbolo "$\wedge$" quedaría así:

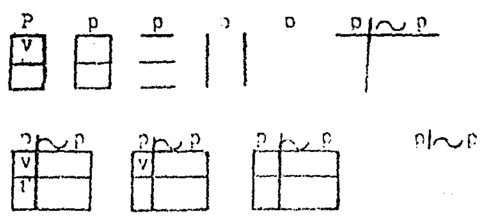
N	I	N $\wedge$ I
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

En los dos primeros renglones la proposición N es verdadera, en el primer renglón I es verdadera y la proposición compuesta es verdadera, en el segundo I es falsa y la proposición compuesta es falsa, en el tercero y cuarto renglones N es falsa, en el tercero I es verdadera y la proposición compuesta es falsa. en el cuarto renglón I es falsa y la proposición compuesta también es falsa, a modo de ayuda mnemotécnica decimos que "la conjunción es cierta cuando sus dos componentes son ciertas", y en los demás casos es falsa. Al observar la tabla, contamos cuatro renglones, que equivalen a las combinaciones de valores de verdad de las dos letras proposicionales <u>diferentes</u> N e I. Podemos hacer la tabla de verdad de la conjunción para dos letras proposicionales cualesquiera diferentes, p,q, así:

p	q	$p \wedge q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

la tabla tiene una columna debajo de cada letra proposicional p y q , y de la proposición con el conectivo lógico conjunción $\wedge$.

Ejercicio, completa, las siguientes tablas:



p	q	p∧q
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	

p	q	p∧q
v	v	v
v	f	
f	v	
f	f	

p	q	p∧q
v	v	
v	f	
f	v	
f	f	

p	q	p∧q
v		
v		
f		
f		

p	q	p∧q

p q p∧q

De los cuatro renglones que tiene la tabla, la "p" es verdadera en la mitad, - dos-, y falsa con la otra mitad, - dos-, como se ve más claramente en la primera columna.

p
v
v
f
f

En la de la q, la mitad de la mitad,-l-, es verdadero y la otra mitad de la mitad es falso,-l-, alternándose a continuación, como se observa:

q
v
f
v
f

copiando la columna primera y segunda veremos que cada ren--- glón es diferente de los demás y agotan las posibilidades de

p	q
v	v
v	f
f	v
f	f

nuevas combinaciones de verdadero y falso para "p" y "q"; así, en el primer renglón tenemos:

p	q
v	v

, en el segundo

p	q
v	f

,

en el tercero

p	q
f	v

, en el cuarto

p	q
f	f

, ¿crees que exista otra posible combinación de verdadero y falso para p y para q, diferentes de las que ya escribimos? escríbela;

p	q
v	v
v	f
f	v
f	f

ejercicio; completa las tablas;

p
v

q

p

p

p	q

p	~p
v	
f	

p	~p
v	
f	

p	~p
v	

p	~p

p	~p

p	~p

p	q	p ∧ q
v	v	v
v	f	
f	v	
f	f	

p	q	p ∧ q
v	v	
v	f	
f	v	
f	f	

p	q	p ∧ q
v		
v		
f		
f		

p	q	p ∧ q

Si ahora hacemos que "q" sea igual a "p", por ejemplo,

"Los nenes son tiernos y los niños son tiernos", se tendrá la proposición compuesta "N y N". Cuya tabla de verdad es:

N	N	N ∧ N
v	v	v
v	v	v
f	f	f
f	f	f

, los renglones primero y segundo son iguales,

¿ será posible que N sea verdadera y falsa al mismo tiempo? , ¡ no! por eso el segundo renglón puede ser

N	N
v	F

, pues eso significaría que N es falsa y verdadera al mismo tiempo. Luego, si en una proposición compuesta se repite una letra proposicional, tendrá que tener el mismo valor en cada renglón, aunque haya diferentes columnas con la misma letra proposicional.

Como los dos primeros renglones son iguales y también los dos últimos

P	P	P∧P
v	v	v
v	v	v
f	f	f
f	f	f

, bastará con escribirlos una sola vez;

p	p	p∧p
v	v	v
f	f	f

; así, si las letras proposicionales son iguales, entonces la tabla de la conjunción tendrá dos renglones.

Luego, el número de renglones depende del número de letras proposicionales diferentes.

Sean ahora las proposiciones:

"La luna refulge en el cielo", representada por "L" y nuestras playas son cálidas", representada por "N". Formamos con ellas la proposición compuesta "la luna refulge en el cielo o nuestras playas son cálidas", simbolizada "L o N", si "L" es verdadera y "N" también es verdadera, entonces "L o N" es verdadera, si "L" es verdadera pero "N" es falsa "L o N" es verdadera, Si "L" es falsa y "N" es verdadera "L o N" es verdadera . Finalmente , si "L" y "N " son falsas, "L o M" es falsa, lo cual se escribe en la tabla así

L	M	L o M
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Cambiando las letras proposicionales "L","M", por letras proposicionales variables y cambiando el conectivo lógico disyunción "o" por el símbolo "V" tendremos

p	q	p V q
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

. Para poder recordar esta tabla, decimos que[4] la disyunción es falsa, sólo cuando sus dos componentes lo son ", en los demás casos es verdadera.

La tabla de verdad de la disyunción tiene cuatro renglones, si las proposiciones componentes son distintas, ¿Cuántos renglones tendrá la tabla si las proposiciones componentes son iguales ? complete la siguiente tabla:

p p pVp

ejercicio completa las tablas;

p	q	p V q
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	

p	q	p V q
v	v	
v	f	
f	v	
f	f	

p	q	p V q
v		
v		
f		
f		

p	q	p V q
	v	
	f	
	v	
	f	

p	q	p∨q
		v
		v
		v
		f

p	q	p∨q

completa el renglón señalado:

	p	q	p q
→	v	f	
→	f	v	

	p	q	p q
→	v		
→	f		

	p	q	p q
→		f	
→		v	

La proposición compuesta; " si llueve entonces está nublado ", tiene por componentes; "llueve" que representaremos por "Ll" y "está nublado" simbolizado por "E".

Si"llueve"es verdadera y"está nublado" es verdadera. la proposición compuesta "si Ll entonces E" es verdadera, si "llueve" es verdadera pero "está nublado" es falsa, la proposición "si Ll entonces E", es falsa; (no puede ser que llueva y no este nublado); si "llueve" es falsa y "esta nublado", es verdadera, la proposición "si Ll entonces E" es verdadera; si "llueve" es falsa, "esta nublado", es falsa, la proposición "si Ll entonces E", es verdadera. Para representar el conectivo si.. entonces ....., llamado condicional, usaremos el símbolo "⟶", la proposición "si llueve entonces está nublado " quedaría: "Ll ⟶ E", su tabla de verdad es;

Ll	E	Ll→
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

. La proposición que va entre"sí" y "entonces", es el antecedente, en el ejemplo, el antecedente es"llueve". La proposición que sigue al conectivo si . . . . entonces.

es el consecuente, en nuestro ejemplo, es la proposición, "está nublado"

¿Como se llama la proposición que va entre "si" y "entonces? -----------------------------------.

La proposición que va después de "entonces" se llama ------------------------------------ - ------.

Las proposiciones componentes de la condicional se llaman ------------------------y ---------------------.

Tomando la proposición variable "p", como antecedente y la proposición variable "q", como consecuente, la tabla de verdad será:

será:

p	q	p→q
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

En la proposición condicional "p→q", ¿cuál es el antecedente? -------------

¿cuál es el consecuente? ------------

Para recordar la tabla, decimos que "la condicional sólo es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso"; esto es, el segundo renglón de la tabla y en los demás casos será verdadera.

p	q	p→q
v	f	f

ejercicio completar las tablas:

p	q	p→q
v	v	v
v	f	
f	v	v
f	f	v

p	q	p→q
v	v	
v	f	f
f	v	
f	f	

p	q	p→q
v		
v		
f		
f		

p	q	p→q
	v	
	f	
	v	
	f	

p	q	p→q
		v
		f
		v
		v

p	q	p→q

Repite el primer renglón:

p	q	p→q
v		v

p	q	p→q
v		

p	q	p→q
		v

Recuerda que si el antecedente es verdadero y el condicional es verdadero el consecuente será verdadero.

Si el antecedente y el condicional son verdaderos el consecuente será -------------.

Con símbolos, si "p" es verdadero y "p $\rightarrow$ q" también, entonces "q" es ----------.

Repite el cuarto renglón.

p	q	p→q
	f	v

p	q	p→q
	f	

p	q	p→q

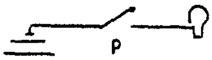
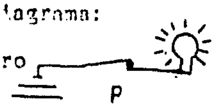
Recuerda: Si el consecuente es falso y el condicional es verdadero, entonces el antecedente es falso.

Si el consecuente es falso y el condicional es verdadero entonces el antecedente será ---------------.

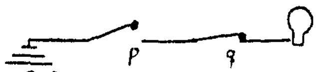
Con símbolos; si "q" es falso y "p $\rightarrow$ q" es verdadero "p" será --------------.

Los circuitos eléctricos ayudan a visualizar las tablas de verdad.

Si convenimos que un foco prendido significa que la proposición compuesta es verdadera, y falsa si el foco está apagado ; las proposiciones componentes están simbolizadas por switchs,- o apagadores, o interruptores,- que consideramos verdaderas cuando dejen pasar la corriente y falsas cuando no . La fuente de energía se simboliza , ya sea batería, -pilas, acumulador -, o contacto de corriente alterna.

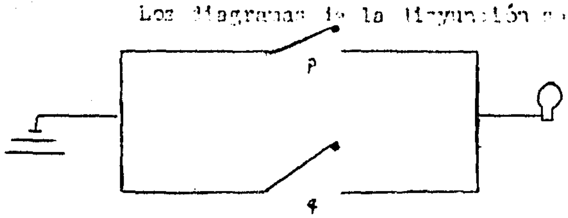
La proposición más sencilla "p" tendrá este diagrama:  cuando es falso y tendrá este otro  cuando es verdadero.

Los diagramas de la conjunción serán:  cuando "p", "q", sean falsos, "p∧q" será también falsa, - foco apagado-.  donde "p" es verdadero, "q" es falso, "p∧q" es falso.

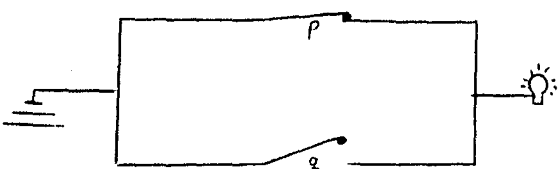
 con "p" falso "q" verdadero, "p∧q" falso.

 con "p" verdadero, "q" verdadero, "p∧q" verdadero.

Los diagramas de la disyunción serán:



con "p" falso "q" falso y "p∨q" falso.



con "p" verdadero, "q" falso, y "p∨q" verdadero.

Ejercicio: Dibuja los otros dos circuitos que completan la tabla de la disyunción.

Ejercicio: Construye los circuitos correspondientes a la conjunción y a la disyunción.

Las tablas de verdad que hemos escrito son:

p
v
f

p	$\sim p$
v	f
f	v

p	q	$p \wedge q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

p	q	$p \vee q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

p	q	$p \rightarrow q$.
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Los pasos que se sigue para hacer una proposición compuesta son:

1.- Contar el número, - n - , de letras proposicionales <u>diferentes</u> que tienen la proposición, para determinar el número de renglones, usar la formula 2^n, - los renglones se duplican con cada nueva letra proposicional, porque cada letra admite dos valores de verdad. falso y verdadero-.

Así, una proposición con una letra proposicional, n=1, tendrá dos renglones en la tabla, $2^1 = 2$, por ejemplo;

p	$p \wedge p$.
v	v
f	f

2.-Trazar las columnas, una por cada letra proposicional y una por cada conectivo.

Escribir los valores de verdad de las letras proposicionales; para la primera letra proposicional, la mitad de los primeros renglones serán verdaderos, la segunda mitad de los renglones serán falsos. Para la segunda letra proposicional la mitad de la mitad de los primeros renglones será verdadera, y la mitad de la mitad falsos, alternandose hasta agotar los renglones.

Para la tercera letra proposicional, la mitad de la mitad de la mitad de los primeros renglones serán verdaderos, a continuación el mismo número de renglones será falso, y se alternaran, hasta agotar los renglones.

Se continúa el proceso, asignandole a cada letra la mitad de renglones verdaderos que le asignamos inicialmente a su predecesora y, seguidamente, el mismo número de renglones falsos, y alternando hasta agotar los renglones, y las letras ejemplo,

$\frac{2^3}{2}$

p	q	r
v	v	v
v	v	f
v	f	v
v	f	f
f	v	v
f	v	f
f	f	v
f	f	f

3.- Se completan las columnas de los conectivos, comparándolas según las tablas de verdad que ya vimos;

p
v
f

p	$\sim p$
v	f
f	v

p	q	$p \wedge q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

p	q	$p \vee q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

p	q	$p \rightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Para ello nos ayudaremos con las reglas de la memoria siguientes, "si una proposición es verdadera, su negación será falsa, y si una proposición es falsa, su negación es verdadera". "La conjunción es verdadera sólo cuando sus componentes son verdaderas". "La disyunción será falsa sólo cuando sus co componentes sean falsas".

"La condicional es falsa sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso".

4.- En caso de que la proposición tenga paréntesis, se resolverán primero los conectivos que ésten en los paréntesis más interiores.

5.- Por facilidad de escrituta, al conectivo lógico negación se le suprimen los paréntesis, cuando afecta a una letra proposicional, esto es, no se escribe $\sim(p)$ sino $\sim p$; en los demás casos sí se escriben los paréntesis: ejemplo; $(P \wedge (\sim q \longrightarrow r))$. Las negaciones que afectan a una letra, se resuelven primero que los demás conectivos.

6.- Al empezar a resolver la columna del conectivo del paréntesis más interior, hacer la comparación con las columnas de las proposiciones componentes. Después de la comparación se considera que el valor de lo que está dentro del paréntesis lo dará la columna resultante.

7.- Repetir el sexto paso, considerando cuál es el nuevo paréntesis más interno, y continuar hasta agotar la última comparacion.

8.- El valor de verdad de la proposición compuesta es el de la última columna obtenida, por lo que se le llama resultante o resultado.

9.- Si la columna resultante contiene sólo valores verdaderos será una tautolología, esto es, será verdadera para cualquier valor de sus componentes.

Si la columna resultante tiene solamente valores falsos, la proposición se llamará <u>contradicción</u>, y será falsa para cualquier valor de sus componentes.

Si hubiera valores falsos y verdaderos en la resultante, será una proposición indeterminada, sin importar cuántos valores verdaderos haya.

Ejemplo 1: $\sim p \wedge q$ lleva cuatro renglones porque son dos letras proposicionales diferentes, esto es, $n=2$, y sustituyendo en la fórmula 2^n, queda $2^2 = 4$,

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$

: Continuamos con los valores de las letras proposicionales:

p	q	p	p q
v	v		
v	f		
f	v		
f	f		

, seguidamente obtenemos los valores de de la negación de "p":

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
v	v	f	
v	f	f	
f	v	v	
f	f	v	

Comparamos ahora las columnas restantes, bajo el conectivo conjunción, recuerda, "La conjunción sólo es cierta cuando sus componentes son verdaderas":

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
v	v	f	f
v	f	f	f
f	v	v	v
f	f	v	f

. Para facilitar el exámen de la proposición señalamos con una flecha la columna resultante:

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
v	v	f	f
v	f	f	f
f	v	v	v
f	f	v	[illegible]

. En este caso se trata de una indeterminación.

ejemplo 2: $p \vee \sim q$, ¿Por qué la tabla llevará cuatro renglones?

¿Porqué la negación de q no lleva paréntesis en la letra q?

A continuación escribimos los valores de verdad de las letras proposicionales:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
v	v		
v	f		
f	v		
f	f		

; seguimos con la columna de la negación

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
v	v	f	
v	f	v	
f	v	f	
f	f	v	

, termina la tabla de verdad, no olvides señalar la columna resultante con una pequeña flecha, en su parte inferior, dirigida hacia arriba.

¿Es tautología? ----------
si/no

¿Es contradicción? ----------
si/no

¿Es indeterminación? ----------
si/no

¿Porqué?

Ejemplo 3: $p \longrightarrow (q \longrightarrow p)$ tendrá cuatro renglones por tener sólo dos letras proposicionales distintas.

p	q	$(q \rightarrow p)$	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
v	v		
v	f		
f	v		
f	f		

. A continuación resolveremos la columna del segundo condicional, por estar dentro del paréntesis:

p	q	$(q \rightarrow p)$	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
v	v	v	
v	f	v	
f	v	f	
f	f	v	

. En seguida se resuelve la columna del primer condicional, tomando como antecedente la "p" y como consecuente la columna resultante del paréntesis "$(q \rightarrow p)$";

p	q	$(q \rightarrow p)$	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
v	v	v	v
v	f	v	v
f	v	f	v
f	f	v	v
			↑

. La flecha que señala la columna resultante, indica que la proposición es cierta para cualquier valor de las componentes, por lo que es una tautología.

Ejemplo 4: $P \rightarrow ((q \wedge \sim q) \rightarrow r)$ llevará ocho renglones por tener tres letras proposicionales distintas; p,q,r, . Los valores de las letras proposicionales son :

p	q	r	$\sim q$	$(q \wedge \sim q)$	$((q \wedge \sim q) \to r$	$p \to ((q \wedge \sim q) \to r$
v	v	v				
v	v	f				
v	f	v				
v	f	f				
f	v	v				
f	v	f				
f	f	v				
f	f	f				

Resolvamos la columna de la negación de "q".

p	q	r	$\sim q$	$(q \wedge \sim q)$	$((q \wedge \sim q) \to r)$	$p \to ((q \wedge \sim q) \to r$
v	v	v	f			
v	v	f	f			
v	f	v	v			
v	f	f	v			
f	v	v	f			
f	v	f	f			
f	f	v	v			
f	f	f	v			

En seguida resolveremos la conjución por ser el paréntesis más interno:

p	q	r	$\sim q$	$(q \wedge \sim q)$	$((q \wedge \sim q \to r)$	$p \to ((q \wedge \sim q) \to r)$
v	v	v	f	f		
v	v	f	f	f		
v	f	v	v	f		
v	f	f	v	f		
f	v	v	f	f		
f	v	f	f	f		
f	f	v	v	f		
f	f	f	v	f		

Tomamos el paréntesis "$(q \wedge \sim q)$" como una sola proposición antecedente y la comparamos con el consecuente "r"

p	q	r	$\sim q$	$(q \wedge \sim q)$	$((q \wedge \sim q \to r)$	$p \to ((q \wedge \sim q) \to r)$.
v	v	f	[illegible]	f	[illegible]	
v	v	v	[illegible]	f	v	
v	f	f	v	f	[illegible]	
v	f	v	v	f	[illegible]	
f	v	f	f	f	[illegible]	
f	v	v	f	f	v	
f	f	f	v	[illegible]	v	
f	[illegible]	v	v	[illegible]	[illegible]	

El condicional que queda tiene como antecedente la letra "p" y como consecuente el resultado de " $((q \wedge \sim q) \rightarrow r)$";

p	q	r	$\sim q$	$(q \wedge \sim q)$	$((q \wedge \sim q) \rightarrow r)$	$p \rightarrow ((q \wedge \sim q) \rightarrow r)$
v	v	v	f	f	v	v
v	v	f	f	f	v	v
v	f	v	v	f	v	v
v	f	f	v	f	v	v
f	v	v	f	f	v	v
f	v	f	f	f	v	v
f	f	v	v	f	v	v
f	f	f	v	f	v	v

↑

La flecha nos indica que la proposición es una tautología, pues en la columna resultante solo tiene valores verdaderos:

Ejemplo 5. $(p \vee \sim p) \rightarrow ((q \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r))$.

Tendrá ocho renglones, pues el número de letras proposicionales diferentes, n, es tres, "p", "q", "r"; al sustituir en la fórmula 2^n, obtenemos $2^n = 2^3 = 8$.

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$(p \vee \sim p)$	$(q \vee \sim q)$	$(r \wedge \sim r)$	$((q \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r))$	$(p \vee \sim p) \rightarrow ((q \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r))$
v	v	v								
v	v	f								
v	f	v								
v	f	f								
f	v	v								
f	v	f								
f	f	v								
f	f	f								

A continuación resolveremos las columnas que niegan una sola letra proposicional.

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$(p \vee \sim p)$	$(q \vee \sim q)$	$(r \wedge \sim r)$	$(q \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r)$	$(p \vee \sim p) \rightarrow ((q \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r))$
v	v	v	f	[illegible]	f					
v	v	f	f	f	v					
v	f	v	f	v	f					
v	f	f	f	v	v					
f	v	v	v	f	f					
f	v	f	v	f	v					
f	f	v	v	v	f					
f	f	f	v	v	v					

Como los paréntesis "$(q \vee \sim q)$" y "$(r \wedge \sim r)$" tienen la misma interioridad, se resuelven independientemente de orden:

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$(p \vee \sim p)$	$(q \vee \sim q)$	$(r \wedge \sim r)$	$(q \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r)$	$(p \vee \sim p) \rightarrow (q \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r)$
v	v	v	f	f	f		v	f		
v	v	f	f	f	v		v	f		
v	f	v	f	v	f		v	f		
v	f	f	f	v	v		v	f		
f	v	v	v	f	f		v	f		
f	v	f	v	f	v		v	f		
f	f	v	v	v	f		v	f		
f	f	f	v	v	v		v	f		

Ahora tomamos como antecedente "$(q \vee \sim q)$" y como consecuente "$(r \wedge \sim r)$" y los comparamos bajo el condicional. Además, por tener tener la misma interioridad, el paréntesis $(p \vee \sim p)$, se resuelve también en este paso.

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$(p \vee \sim p)$	$(q \vee \sim q)$	$(r \wedge \sim r)$	$(q \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r)$	$(p \vee \sim p) \rightarrow (q \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r)$
v	v	v	f	f	f	v	v	f	f	
v	v	f	f	f	v	v	v	f	f	
v	f	v	f	v	f	v	v	f	f	
v	f	f	f	v	v	v	v	f	f	
f	v	v	v	f	f	v	v	f	f	
f	v	f	v	f	v	v	v	f	f	
f	f	v	v	v	f	v	v	f	f	
f	f	f	v	v	v	v	v	f	f	

El paréntesis "$(p \vee \sim p)$" se constituyo en el antecedente, y "$((q \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r))$" en el consecuente del último condicional.

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$(p\vee\sim p)$	$(q\vee\sim q)$	$(r\wedge\sim r)$	$((q\vee\sim q)\rightarrow(p\vee\sim r)$	$(p\vee\sim p)\rightarrow((q\vee\sim q)\rightarrow(r\wedge\sim r))$
V	V	V	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	V	[illegible]	[illegible]	[illegible]
V	V	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
V	[illegible]	V	[illegible]	V	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
V	[illegible]	[illegible]	[illegible]	V	V	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	V	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	V	V	V	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	V	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Al tener sólo valores falsos en la columna resultante, la proposición es una contradicción.

Ejercicio : Escribe la tabla de verdad de:

$(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$, $\quad(\sim q\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow\sim p$,

$((p\vee q)\wedge\sim p)\longrightarrow q$, $\quad(p\wedge q)\longrightarrow p$, $\quad(p\wedge q)\longrightarrow q$,

$((p\vee q)\wedge\sim q)\longrightarrow p$, $\quad(p\wedge(q\vee r))\rightarrow((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$

$(p\vee(q\wedge r))\rightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))$, $\quad(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$.

Hasta ahora hemos estudiado las tablas de verdad de los conectivos:conjunción "$\wedge$", disyunción"V". condicional "$\rightarrow$" negación "$\sim$", y algunas de sus combinaciones.

Estudiemos ahora el conectivo lógico "$\leftrightarrow$" llamado bicondicional, su tabla de verdad es :

p	q	$p\leftrightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

la regla mnemotécnica,- de ayuda a la memoria-, será: "el bicondicional es cierto si los valores de sus componentes son iguales".

El conectivo lógico bicondicional "$\leftrightarrow$" se lee "si y sólo si"; así, la proposición "$p\leftrightarrow q$" se lee "p si y sólo si q", ejemplo: El amor es triste si y sólo si la tristeza es una manifestación del amor.

Cuando un bicondicional es una tautología, decimos que sus componentes son equivalentes y, en ese caso, escribimos el símbolo "$\equiv$" en el lugar de "$\leftrightarrow$", por ejemplo:

$((p\wedge q)\rightarrow r)\leftrightarrow(p\rightarrow(q\rightarrow r))$ calculemos su tabla de verdad:

p	q	r	$(p\wedge q)$	$(q\rightarrow r)$	$((p\wedge q)\rightarrow r)$	$p\rightarrow(q\rightarrow r))$	$((p\wedge q)\rightarrow r)\leftrightarrow(p\rightarrow(q\rightarrow r))$
v	v	v	v	v	v	v	v
v	v	f	v	f	f	f	v
v	f	v	f	v	v	v	v
v	f	f	f	f	v	v	v
f	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	v	v	v	v	v
f	f	v	f	v	v	v	v
f	f	f	f	f	v	v	v

Como la columna resultante sólo tiene valores verdaderos, el bicondicional es una tautología y " $((p\wedge q)\rightarrow r)$" es equivalente a "$((p\rightarrow(q\rightarrow r))$, lo cual escribimos: :

$((p\wedge q)\rightarrow r)\equiv(p\rightarrow(q\rightarrow r))$. Si dos proposiciones son equivalentes y una de ellas aparece en otra proposición, puede ser sustituida por su equivalente; ejemplo; $((p\wedge q)\rightarrow r)\vee a$ podemos escribirla como $(p\rightarrow(q\rightarrow r))\vee a$.

Ejercicio: Hacer la tabla de la verdad de las siguientes proposiciones y decir si son equivalencias: $(\sim p\vee q)\leftrightarrow(p\rightarrow q)$,

$(p\rightarrow(q\rightarrow r))\leftrightarrow((q\wedge p)\rightarrow r)$, $(\sim q\wedge p)\leftrightarrow(p\rightarrow q)$,

$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim p\vee q)$, $\sim(p\wedge\sim q)\leftrightarrow(p\leftrightarrow q)$,

$(q\rightarrow p)\leftrightarrow(\sim p\vee q)$. $(p\wedge q)\leftrightarrow(q\wedge p)$,

$(p\vee q)\leftrightarrow(q\vee p)$, $(\sim(\sim p))\leftrightarrow p$,

$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(q\rightarrow p)$, $\sim(p\vee q)\leftrightarrow(\sim p\wedge\sim q)$,

$\sim(p\wedge q)\leftrightarrow(\sim p\vee\sim q)$, $(\sim p\vee\sim q)\leftrightarrow\sim(p\vee q)$

$(\sim p\vee\sim q)\leftrightarrow\sim(p\wedge q)$, $(p\wedge(q\wedge r))\leftrightarrow((p\wedge q)\wedge r)$,

$(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$, $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$,
$(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$.

Cuantificadores.

Muchos enunciados científicos, filosóficos, cotidianos, son del tipo: "Todo p es q". Donde "p" y "q" son proposiciones. Por ejemplo: Todo santo es reconocido por la iglesia. También podemos escribirlo: Todo x que es santo es reconocido por la iglesia. De otro modo "Para todo x si es santo, entonces es reconocido por la iglesia".

Simbolizaremos la cualidad de ser ser santo por "S" y la cualidad de ser reconocido por la iglesia con la letra "R", entonces la proposición quedará simbolizada, "Para todo x $(Sx \rightarrow Rx)$, donde "Sx" significa "x" es santo" y "Rx" significa "x es reconocido por la iglesia".

Otro ejemplo: "Todo hombre justo tratará a los demás como desea ser tratado", que podemos escribir: "Para todo x si es un hombre justoentonces trate a los demás como desea ser tratado". Simbolizaremos la cualidad de ser "un hombre justo" con "J"y la de "tratar a los demás como desea ser tratado" con "T", la proposición resultará; "Para todo $x(Jx \rightarrow Tx)$, donde "Jx" significa "x es un hombre justo" y "Tx" será "x trata a los demás como desea ser tratado".

Tendremos la proposición: "Para todo x $(Sx \rightarrow Rx)$"y la otra proposición: "Para todo $x(Jx \rightarrow Tx)$.

Simbolicemos con $\forall$ el cuantificador; "Para todo" y las proposiciones quedarán; $\forall x (Sx \rightarrow Rx)$ y $\forall x (Jx \rightarrow Tx)$, que leeremos; "$(\forall x (Sx \rightarrow Rx)$", "Para todo x si x es S entonces x es R. Y "$(\forall x (Jx \rightarrow Tx)$" "Para todo x si x es J entonces x es T.

La negación de la proposición "$\forall x (Sx \rightarrow Rx)$" será; "No es cierto que para todo x, si x es S entonces x es "R" simbolizado ; "$\sim\forall x\ (Sx \rightarrow Rx)$, esto es lo mismo que decir; "existe algún x que es S y no es R", simbolizado por, "existe algún x ($Sx \wedge \sim R$), usando "$\exists x$"en lugar de "existe algún x", la proposición quedará: "$\exists x(Sx \wedge \sim Rx)$" que leeremos; "Existe x tal que x es S y no es R. Usando la notación para proposiciones equivalentes tendremos que: $\sim \forall x\ (Sx \rightarrow Rx) \equiv \exists x(Sx \wedge \sim Rx)$.

El cuantificador "$\forall$" se le llama universal y el cuantificador "$\exists$" se le llama cuantificador existencial.

Otra proposición existencial es, "Algunos peces son anabántidos*", que tambien podemos escribir; "Existen peces anabántidos", simbolizando el ser pez con "px" y el ser anabántido con"Ax" la proposición se escribe ; "$\exists x\ (Px \wedge Ax)$". Si ahora negamos esta proposición obtendremos; "$\sim\exists x\ (Px \wedge Ax)$" que se lee; "No es cierto que existe x que sea pez y anabántido", que equivale a decir; ningún pez es anabántido, de otro modo, "para todo x si es pez entonces no es anabántido", simbolizado; "$\forall x\ (Px \rightarrow \sim Ax)$, así pues, tendremos;

$$\sim \exists x\ (Px \wedge Ax) \equiv \forall x\ (Px \rightarrow \sim Ax).$$

Ejercicio: escribe tres proposiciones cuantificadas existencialmente y tres universales.

Simboliza tus proposiciones, usando los símbolos"$\forall$" y

* Anabántido, que absorben aire de la atmósfera para resoirar, ejemplos: los betas, los paraíso, los gouramies.

"$\exists$", recuerda que serán de la forma; "$\forall x\ (Px \rightarrow qx)$" y "$\exists x\ (px \wedge qx)$".

Niega las proposiciones y encuentra sus equivalencias, recuerda: "$\sim \forall x\ (px \rightarrow qx) \equiv \exists x\ (Px \wedge \sim qx)$" y "$\sim \exists x (px \wedge qx) \equiv \forall x\ (px \rightarrow \sim qx)$".

Conjunto

El concepto de conjunto es intuitivo; todo mundo sabe lo que es, podemos decir que es un concepto básico y fundamental que no se define; recuerde que los indefinibles son conceptos comunes, que cualquier definición de ellos incluiría lo que se va a definir lo cual es un círculo vicioso.

Lo que pedimos de un conjunto es que sus elementos sean distinguibles .

Se puede describir un conjunto enumerando sus elementos y encerrándolos entre llaves $\{\ \}$, o enunciando sus caracterizticas, también entre llaves. En este caso, la descripción es por comprensión.

Ejemplos;

Por enumeración: $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $Q=\{2,3,4\}$
$R=\{1,3,5,7,9\}$, $S=\{7,8,9\}$.

Por comprensión:

$T=\{x$ tal que x es un número natural y menor que $10\}$,

$I=\{x$ tal que x es un número impar y menor que $10\}$.

Simbolizaremos la expresión "tal que" con cualquiera de estos tres símbolos "$\ni$", ":" o "$|$".

Si usamos la simbología de la lógica tendremos que :

$T=\{x$ tal que x es un número natural y menor que $10\}$.

Se ha convenido en usar letras mayúsculas para referirnos a conjuntod, y minúsculas para sus elementos; además , la letra "$\in$", . . . para designar la pertenencia; así, en el caso del conjunto $S=\{7,8,9\}$, la expresión "$7\in S$" se lee, "el elemento 7 está en el conjunto S" o más brevemente, "7 está en S". Con esta notación y utilizando "N" para simbolizar al conjunto de números naturales tendremos; $T = \{x : x \in N \wedge x < 10\}$ que se lee, "el conjunto S, es el conjunto de todas las x, tales que x es un número natural y menor que 10.

Subconjuntos.

Un conjunto G, es un subconjunto de otro H, si y sólo si todos sus elementos son también elementos de otro conjunto. La propiedad de ser subconjunto de otro, la simbolizamos "$\subset$", así, $G \subset H$ se lee, G es subconjunto de H.

La definición de ser subconjunto será; $G \subset H$ $\longleftrightarrow \forall x \, (x \in G \rightarrow x \in H)$.

Que se lee, G es subconjunto de H, si y sólo si, para todo x, si x está en G, entonces, x está en H.

Ejemplo: $Q \subset U$, $S \subset N$

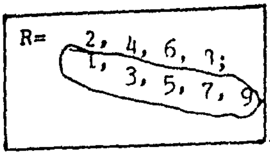
Diagramas de Venn-. Euler.

Para representar gráficamente un conjunto se usa una figura cerrada, ya sea alargada o aproximadamente circular.

Ejemplo U= $\boxed{\begin{array}{l} 2,4,6,8 \\ 1,3,5,7,9 \end{array}}$ R= 1,3,5,7,9

estos diagramas llevan el nombre de Venn y de Euler, por los matemáticos * que primero propusieron su uso. Nos ayudan a visualizar mejor los conjuntos, sus elementos, y las relaciones que guardan entre ellos;

* John Venn, matemático y lógico inglés. Leonard Euler, matemático suizo, muy notables.

ejemplo; U= 

en el diagrama se ve que todos los elementos del conjunto R, en la figura curva alargada también son elementos del conjunto P.

Podemos ver en el diagrama que algunos elementos de U no son elementos de R, usaremos el símbolo "$\notin$" para la no pertenencia y leeremos $2 \notin R$, como "2 no pertenece a R", $4 \notin R$, " 4 no pertenece a R",..., el conjunto $S=\{7,8,9\}$ tiene un elemento, el 8, que no está en R, $8 \notin R$, luego el conjunto S no es subconjunto de R, simbolizado por "$\not\subset$", así leeremos $S \not\subset R$, como S no es subconjunto de R. Dicho de otra manera, un conjunto S no es subconjunto de otro R, si y sólo si, existe cuando menos un elemento de S que no está en R.

Recordemos que un conjunto G es subconjunto de otro H cuando "todos los elementos de G están en H", esto equivale a decir "no hay elemento de G que no esté en H", ejemplos: Dado el conjunto $R=\{1,3,5,7,9\}$, el conjunto $G=\{3,5,7\}$ es subconjunto de R pues no tiene elementos $x \ .\ni.\ x \notin R$.

Otro subconjunto de R es $I=\{3,5\}$ ya que no tiene elementos que no pertenezcan a R pues $3 \in R \wedge 5 \in R$.

El conjunto $J=\{3,7\}$ también es subconjunto de R, pues no tiene elementos que pertenezcan a R.

Dado el conjunto $K=\{5\}$, $K \subset R$ pues no existe $x \in K \ .\ni.\ x \notin R$.

Sea el conjunto L= $\{5,7\}$ tenemos que $L \subset R$, pues $\sim \exists x(x \in L \wedge x \notin R)$.

¿Será el conjunto M= $\{3\}$ subconjunto de C ? -----------
si/no

¿Porqué? ---- --------- --- - - - -- ---- -- - -

-- --- -- --- - -- -- - ----

¿ Yel conjunto N= 7 también es subconjunto de C? ----------
si/no

¿Porqué? --

Sea $\emptyset$ $=\{\ \}$ un conjunto sin elementos - La letra $\emptyset$

y no tiene elementos que no e

esten en R, luego entonces es subconjunto de R.

Al conjunto de esposas que tiene un sultan se le llama harén; Alí tiene un harén compuesto de; Fátima, Zoraida y Jezabel.* De no tenemos el harén de Alí por H_A, luego entonces H_A = {Fátima, Zoraida, Jezabel}, Si una de ellas huye con un artista de Hollywood, el conjunto de dos elementos que queda sería subconjunto del haren de Alí y le llamaremos H_{A2} .

Si del conjunto restante, (H_A 2), una de ellas huyera a México con su hijo, para salvarlo de la ira de la otra, el conjunto de un elemento que quedara, sería también subconjunto de H_A . Si la última esposa se muriera** del coraje que le dio que se salvara el hijo de su rival, el conjunto restante

* Realmente son pocas esposas para un sultán, peró el bajo precio del petróleo no le permite tener más.

** Ella no podía tener hijos, había engordado mucho y se había vuelto biliosa.

sería subconjunto del harén original, aunque ahora ya no tiene elementos y sea el conjunto vacío.

Dado un conjunto cualquiera X, el conjunto vacío no tiene elementos que no estén en X, luego **el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto.**

¿De cuántas maneras diferentes podemos ordenar los elementos de un conjunto, sin repetirlos?*. Al conjunto sin elementos $\emptyset$, sólo podremos escribirlo de una forma: $\emptyset = \{ \quad \}$.

Designaremos el número de elementos de un conjunto Y por el símbolo $\circ Y$, también llamado cardinalidad de Y; así $\circ\emptyset = 0$; (en su origen el matemático Giuseppe Peano concibió el símbolo $\emptyset$ como un cero cruzado). Simbolizaremos por n! el número de formas diferentes en que podemos escribir un conjunto de n elementos, así $0! = 1$, ya que al conjunto sin elementos $\emptyset$ lo podemos escribir de una sola manera.

Un conjunto con un solo elemento, por ejemplo: $\{1\}$, podemos escribirlo de una sola manera; $\{1\}$, tendremos $1! = 1$. El símbolo "!" se lee factorial, 3! se lee; tres factorial.

Un conjunto cualquiera con dos elementos, por ejemplo $\{1,2\}$, lo podemos escribir de dos maneras; $\{1,2\}$, $\{2,1\}$, obtenemos; $2! = 2$.

Un conjunto cualquiera con tres elementos por ejemplo $\{1,2,3\}$, podemos escribirlo como; $\{1,2,3\}$, $\{1,3,2\}$, $\{2,1,3\}$, $\{2,3,1\}$, $\{3,1,2\}$, $\{3,2,1\}$, de

* Si repitiéramos elementos, éstos no se toman en cuenta, ya que como conjuntos son iguales. Por ejemplo $\{a,a,a,a,b,b\} = \{a,b\}$, pues los elementos repetidos se toman como uno solo.

seis maneras diferentes, entonces $3! = 6 = (3)(2)(1)$

Un conjunto cualquiera de cuatro elementos, por ejemplo $\{1,2,3,4,\}$, podrá ser escrito de todas estas maneras diferentes:

$\{1,2,3,4\}$	$\{2,1,3,4\}$	$\{3,1,2,4\}$	$\{4,1,2,3\}$
$\{1,2,4,3\}$	$\{2,1,4,3\}$	$\{3,1,4,2\}$	$\{4,1,3,2\}$
$\{1,3,2,4\}$	$\{2,3,1,4\}$	$\{3,2,1,4\}$	$\{4,2,1,3\}$
$\{1,3,4,2\}$	$\{2,3,4,1\}$	$\{3,2,4,1\}$	$\{4,2,3,1\}$
$\{1,4,2,3\}$	$\{2,4,1,3\}$	$\{3,4,1,2\}$	$\{4,3,1,2\}$
$\{1,4,3,2\}$	$\{2,4,3,1\}$	$\{3,4,2,1\}$	$\{4,3,2,1\}$

en total 24 veces, $4! = 24 = (4)(3)(2)(1) = (4)(6)$, si hacemos una lista:

Número de elementos del conjunto n	Maneras diferentes en que se escribe el conjunto. n!
0	$0! = 1$
1	$1! = 1$
2	$2! = (2).(1)$
3	$3! = 6 = (3)(2)(1)$
4	$4! = 24 = (4)(3)(2)(1) = (4)\ (3!)$
5	$5! =$

Siguiendo la lista dada, $5! = (5)(4)(3)(2)(1)$, esto es $5! = (5)(4!)$ habiendo observado que $2!$ es el producto de 2 por uno, el factorial anterior, también vemos que $3!$ es el producto de 3 por el factorial anterior esto es 3×2; de la misma manera $4!$ es el producto de 4 por el factorial anterior $4 \times 6 = 4 \times 3!$ luego podemos pensar que, dado un conjunto de n elementos, se podrá escribir n por el factorial anterior $(n-1)!$ veces diferentes, esto es, $n! = n\,(n-1)!$; de otra manera, $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$; así aplicando lo anterior a 12 tendremos $12! = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ también se tiene $12! = 12 \times 11!$ volviendo al problema de 5 elementos, en efecto habrá 24 maneras diferentes por cada uno de los cinco elementos $\{1,2,3,4,5\}$

así 5!=(5)(24)= 120. Al número de maneras diferentes de escribir un conjunto de n elementos, se le llama factorial y su fórmula será:

n! = n(n-1) (n-2) ....3.2.1; así el 6!

6!= 6 (6-1)(6-2). 3.2.1= 6 (5)(4). 3.2.1, Escribe : 7! =

8! =

9! =

Por el gran tamaño de los números que ya has obtenido, sabrás porqué se representa con un signo de admiración. En efecto 10!= 3628800 el factorial n ! crece muy rápido cuando crece n.

Detengamonos a examinar el 11!= $11.10.9.\underbrace{8.7.6.5.4.3.2.1}_{8!}$, lo podemos escribir 11!= 11.10.9.8!, ya que 8!= 8.7.6.5.4.3.2.1. que son los factores que representamos por 8!, también tenemos;

* 11!= 11.10 .... (i+1) i! donde i! es un número que puede ir desde 1 hasta 11. Este razonamiento podemos repetirlo para cualquier número "n", no sólo el 11, y así podemos escribir

n!= n(n-1)....(i+1)(i!) pues i! complementaria así:

n!= n(n-1)...(i+1) (i) (i-1)...3.2.1. Ejemplos:

sea n= 13, i=9 entonces:

n!= n (n-1)...(i+1) (i!) quedará así:

13! = 13 (12)(11)(10)(9!) ya que 9! completa así

13! = 13 (12)(11)(10) (9.8.7.6.5.4.3.2.1)

Sea n=17, i= 15 entonces 17! = 17.16.15!

Sea n=19, i=13 luego 19! = 19.18.17.16.15.14.13!

Sea n=13. i= 5 tenemos 13.12.11.10.9.8.7.6.5!

* 11!= 11.10 ... (i + 1) i!

Escribe la fórmula

Para; $n=$[illegible], $i=5$

$n=10,\ i=9$

Tenemos que $\frac{5}{5}=1$, $\frac{3}{3}=1$

así también $\frac{1}{1}=\frac{0!}{0!}=1$, $\frac{1}{1}=\frac{1!}{1!}=1$,

$\frac{2}{2}=\frac{2!}{2!}=1$, $\frac{6}{6}=\frac{3!}{3!}=1$, $\frac{24}{24}=\frac{4!}{4!}=1$,

tendremos también que $\frac{n!}{n!}=1.$

Además, se tiene que $\frac{6.5}{5}=6$,

$\frac{3.7}{7}=3$, $\frac{5.4!}{4!}=5.$ $\frac{11.10.9!}{9!}=11.10$,

$\frac{13.12.11.10.9.8.7!}{7!}=13.12.11.10.9.8$, si "i" es menor que

n;

$\frac{n.(n-1)\ldots(i+1)\,i!}{i!}=n.(n-1)\ldots(i+1)$, igualmente;

$\frac{n!}{i!}=n.\,(n-1)\ldots(i+1)$, así, si $n=8,\ i=3$

se tendrá $\frac{8!}{3!}=8.7.6.5.4$, si $n=23,\ i=17$

tenemos; $\frac{23!}{17!}=23.22.21.20.19.18$, si $n=6,\ i=3$

será; $\frac{6!}{3!}=6.5.4.$ si $n=8.\ i=6$ escribiremos ; $\frac{8!}{5!}=8.7.$

escribir la fórmula correspondiente a

$n=7$, $i=5$, -----=

$n=8$, $i=4$, -----=

$n=8$, $i=5$, -----=

$n=8$ $i=2$, -----=

$n=8$ $i=7$, -----=

$n=8$ $i=1$, -----=

¿Que pasará si $i=0$, veamos, para $n=8$, $i=0$, obtenemos;

$\frac{8!}{0!}$, como $0!=1$ se tiene $\frac{8!}{0!}=\frac{8!}{1}=8!$, si $n=17$, $i=0$,

$\frac{17!}{0!}=\frac{17!}{1}=17!$, en general quedará;

$\frac{n!}{0!}=\frac{n!}{1}=n!$, si $n=12$, $i=0$. se escribirá; $\frac{12!}{0!}=12!$, si $n=6$,

$i=0$,

$\frac{6!}{0!}=6!$, ¿ a qué corresponderá $n=5$, $i=0$?

-----= , $n=7$, $i=0$, -------=

¿Que ocurrirá si $i=n$, por ejemplo, $n=8$, $i=8$, en ese caso $\frac{8!}{8!}=1$,

Si $n=5$, $i=5$, se tiene $\frac{5!}{5!}=1$, si

$n=14$, $i=14$, será $\frac{14!}{14!}=1$. ¿cuanto será? $n=7$, $i=7$ ----= . y si

$n=10$, $i=10$, ------= , hemos obtenido para $n=8$; $i=0$, $i=1$, $i=2$, $i=3$, $i=4$, $i=5$, $i=6$, $i=7$, $i=8$, que:

$$\frac{8!}{0!} = 8.7.6.5.4.3.2.1.$$

n=8, i=1 $\quad \frac{8!}{1!} = 8.7.6.5.4.3.2$

n=8, i=2 $\quad \frac{8!}{2!} = 8.7.6.5.4.3$

n=8, i=3 $\quad \frac{8!}{3!} = 8.7.6.5.4.$

n=8, i=4 $\quad \frac{8!}{4!} = 8.7.6.5$

n=8, i=5 $\quad \frac{8!}{5!} = 8.7.6.$

n=8, i=6 $\quad \frac{8!}{6!} = 8.7$

n=8, i=7 $\quad \frac{8!}{7!} = 8$

n=8, i=8 $\quad \frac{8!}{8!} = 1.$

Con este ejemplo vemos que i, puede variar desde o hasta n.

Si $n = 13$, $i = 7$, $n-i$ será igual a $13-7$ que es $13-7 = 6$, si $n = 23$, $i = 17$, $n-i = 23 - 17$, y entonces $23 - 17 = 6$ si $n = 8$, $i = 5$, se tiene $8-5 = 3$, ¿cuánto será $n-i$?, si $n = 15$, $i = 11$, $-$, si $n = 9$, $i = 7$, $- =$, si $n=5$, $i=4$, $=$, si $n=5$, $i = 3$, $=$, si $n = 5$, $i = 2$, $=$, si $n = 5$ $i = 1$, $=$, en el caso de que $n = 5$ $i = 0$, será $5-0 = 5$, y si $n = 5$, $i = 5$, quedará $5-5=0$.

Si $n = 13$, $i = 7$, $(n-i)!$ va a ser $(13-7)! = 6$, si $n = 23$, $i = 17$, $(n-i)! = (23 - 17)!$ y queda $(23-17)! = 6!$ si $n = 8$, $i = 5$, se tiene; $(8-5)! = 3!$, si $n = 15$, $i = 11$, obtenemos; $(15-11)! = 4!$, ¿cuánto será? si $n=9$, $i = 7$, $(\ -\ )! = \ !$ si $n = 5$, $i=3$,

¿Cuantos subconjuntos tiene un conjunto de n- elementos? Veamos primero el conjunto de cero- elementos, su único sub-- conjunto es el mismo, ya que no tiene elementos que no estén en $\emptyset$. Luego el número de subconjuntos del conjunto de cero - elementos es uno.

Un conjunto cualquiera de un elemento, $\{1\}$. tendrá como subconjunto a $\emptyset$ y a el mismo, $\{1\}$, luego el número de subconjuntos de un conjunto de un elemento es dos.

Un conjunto cualquiera de dos elementos $\{1,2\}$, tendré como subconjuntos a ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$, esto es, cuatro subconjuntos.

Un conjunto cualquiera de tres elementos $\{1,2,3\}$, tendrá como subconjuntos, el de cero elementos ϕ , los de un elemento $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, los de dos elementos $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, y el de tres elementos $\{1,2,3\}$; en total , ocho elementos.

Un conjunto cualquiera de cuatro elementos $\{1,2,3,4\}$, tendrá por subconjuntos el de cero elementos ϕ, los de un elemento $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$, , los de dos elementos $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, los de tres elementos $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, y el de cuatro elementos $\{1,2,3,4\}$, es decir, dieciséis subconjuntos en total.

Si hacemos una lista que contenga la información obtenida, será:

número de elementos del conjunto	número de subconjuntos del conjunto.
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

viendo la lista, nos damos cuenta de que, de un renglón al otro de la columna del número de subconjuntos, se va duplicando, con esto podemos ver, que la fórmula que nos da el número de subconjuntos que tiene un conjunto de n elementos será 2^n. Reescribimos la lista agregándole una tercera columna, para la fórmula aplicada al valor de n, recuerda que $2^n = \overbrace{2\times2\times2\times2\ldots\times2}^{n\text{-veces}}$

esto significa multiplicar 2 por si mismo n- veces y $n^0 = 1$, $\forall\, n \neq 0$

Número de elementos del del conjunto	número de subconjuntos del conjunto	fórmula
n		2^n
0	1	2^0
1	2	2^1
2	4	2^2
3	8	2^3
4	16	2^4

¿Podrías completar la tabla?

Dado un conjunto de n elementos ¿cuántos subconjuntos tendrá de i - elementos ?, la respuesta está dada por la fórmula:

$C_i^n \quad \frac{n!}{(n-i)!\, i!}$, en donde C_i^n , es el número de de subconjuntos de i - elementos que tiene un conjunto de n- elementos. Esta fórmula no se demuestra en este curso, sino hasta estadística I o II, en el último año de Bachillerato.

Si $n = 5$, $i = 3$, se tendrá;

$C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!\,3!}$ de aquí ; $\frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5!}{2!\;3!}$,desarrollando los factoriales $\frac{5!}{2!\;3!} = \frac{5\times4\times3!}{2\times1\times3!}$, como

$\frac{3!}{3!} = 1$, se tiene, $\frac{5\times4\times3!}{2\times1\times3!} = \frac{5\times4}{2}$, lo que nos da,

$\frac{5\times4}{2} = 10$, en efecto, el número de subconjuntos de 3 elementos que tiene un conjunto de 5 elementos $\{1,2,3,4,5\}$ es 10 :

$\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,4,5\}$,
$\{2,3,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{3,4,5\}$.

Si $n=6$, $i = 0$, $C_0^6 = \frac{6!}{(6-0)!\;0!} = \frac{6!}{(6-0)!}$

como $\frac{6!}{6!} = 1$ y $0! = 1$ $C_0^6 = 1$, en efecto, el único subconjunto de cero elementos que tiene un conjunto de 6 - elementos es ϕ.

Si $n = 6$, $i = 6$, $C_6^6 = \frac{6!}{(6-6)!\ 6!}$ o sea que

$C_6^6 = \frac{6!}{0!\ 6!}$ y esto es 1, $C_6^6 = 1$, el único subconjunto de seis elementos que tiene un conjunto de seis elementos es el mismo.

Como el número total de subconjuntos de un conjunto de n- elementos es 2^n, resulta que si sumamos $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n$, comprobémoslo cuando $n=5$.

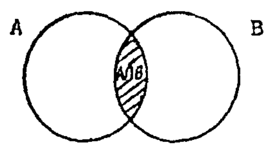
$C_0^5 = 1$, $C_1^5 = 5$, $C_2^5 = 10$, $C_3^5 = 10$, $C_4^5 = 5$, $C_5^5 = 1$

sumemoslo $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$ y además $2^5 = 32$,

luego $C_0^5 + C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + C_5^5 = 2^5$.

los números C_i^n, también se llaman combinaciones de n elementos tomados de i en i. Se aplican en probabilidad y como coeficiente del binomio de Newton, tema que se verá en el segundo semestre de matemáticas.

Dados dos conjuntos decimos que su intersección es otro conjunto, el formado por sus elementos comunes, simbólicamente, sean A, B conjuntos cualesquiera, su intersección simbolizada $A \cap B$, es el conjunto, tal que $x \in A \cap B$ si y sólo si $x \in A$ y $x \in B$, esto es, $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, en diagramas de Venn - Euler;

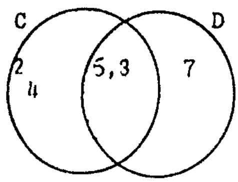


la parte con achurado es el conjunto $A \cap B$.

ejemplo, sean los conjuntos

$C = \{2,4,6,8\}$, $D = \{6,7,8\}$, entonces $C \cap D = \{6,8\}$,

en diagramas

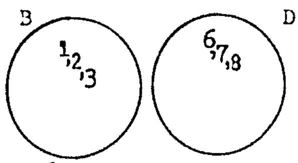


Otro ejemplo; dados $Q = \{2,3,4\}$ y $R = \{1,3,5,7,9\}$, la intersección $Q \cap R$ es el conjunto $Q \cap R = \{3\}$,

Si los conjuntos no tienen elementos comunes, la intersección es el conjunto vacío, y decimos que los conjuntos son ajenos o disjuntos, ejemplo 1; $Q = \{2,3,4\}$ y $R = \{7,8,9\}$, la intersección $Q \cap R$ es el conjunto vacío ϕ, esto es, $Q \cap R = \phi$.

Ejemplo 2; si $B = \{1,2,3\}$, $D = \{6,7,8\}$, entonces $B \cap D = \phi$.

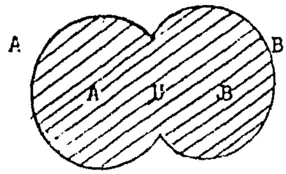
El diagrama sería:



Un ejemplo más; sean $B = \{1,2,3\}$, $E = \{1,2,3,6\}$, entonces $B \cap E = B$, en efecto si $B \subset E$, entonces $B \cap E = B$

Así $\phi \cap A = \phi$

Si tenemos dos conjuntos cualesquiera A,B, su unión es otro conjunto formado por los elementos que están en A o están en B o en A y B, esto es, la unión de A; B simbolizada $A \cup B$, es el conjunto de los elementos x tales que $x \in A$ V $x \in B$, de otro modo $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$, en el diagrama de Venn - Euler;



El conjunto achurado es $A \cup B$,

Ejemplo 1; sea el conjunto $R=\{1,3,5,7,9\}$, $Q=\{2,3,4\}$, su unión es el conjunto $R \cup Q = \{1,2,3,4,5,7,9\}$.

Ejemplo 2; sea el conjunto $B=\{1,2,3\}$ $F=\{1,2,3,4,5\}$, entonces, $B \cup F= \{1,2,3,4,5\} = F$; tenemos que $B \subset F$ si y sólo si $B \cup F = F$ luego, para cualquier conjunto X, $X \cup \phi = X$

ejercicio: Escribe el conjunto unión y el conjunto intersección de los siguientes pares de conjuntos.

$C = \{2,4,6,8\}$, $D=\{6,7,8\}$ $C \cap D = \{\quad , \quad\}$,

$C \cup D = \{\ , \ , \ , \ , \ \}$,

$Q= \{2,3,4\}$, $R= \{1,3,5,7,9\}$ $Q \cap R = \{\ \}$,

$Q \cup R = \{\qquad\qquad\}$

$B= \{1,2,3\}$, $D = \{6,7,8\}$ $B \cap D=$

$B \cup D = \{\qquad\qquad\}$

$B= \{1,2,3\}$, $E=\{1,2,3,6\}$ $B \cap E=$

$B \cup E =$

$G= \{6,7,8,9\}$, $H=\{5,6,7,8,9\}$, $G \cap H =$

$G \cup H =$

$Q= \{2,3,4\}$ $S=\{7,8,9\}$ $Q \cap S=$

$Q \cup S=$

$R = \{1,3,5,7,9\}$, $S= \{7,8,9\}$ $R \cap S =$

$R \cup S=$

Dados los conjuntos $I=\{3,5\}$ y $R=\{1,3,5,7,9\}$ el conjunto diferencia de I en R será simbolizado por R-I, es el conjunto de los elementos que están en R y no pertenecen a I; esto es,
$R-I=\{1,7,9\}$

Sean $L=\{5,7\}$, $R=\{1,3,5,7,9\}$ entonces $R-L=\{1,3,9\}$.

En general, dados dos conjuntos A,B, el conjunto diferencia A-B, está formado por los elementos de A que no están en B, esto es: $A-B=\{x: x\in A \land x\notin B\}$.

ejemplo; sean $R=\{1,3,5,7,9\}$ y $S=\{7,8,9\}$, entonces, $R-S=\{1,3,5\}$

Escribe los conjuntos diferencia de $Q=\{2,3,4\}$,
$S=\{7,8,9\}$, $Q-S=\{\qquad\}$ y de $Q-R=\{\quad , \quad\}$

Dados los conjuntos $\emptyset$, $Q=\{2,3,4\}$
$R=\{1,3,5,7,9\}$, $S=\{7,8,9\}$, $B=\{1,2,3\}$ $I=\{3,5\}$
$J=\{3,7\}$, $L=\{5,7\}$, $K=\{5\}$, $M=\{3\}$, $N=\{7\}$
$C=\{2,4,6,8\}$, $D=\{6,7,8\}$, $E=\{1,2,3,6\}$, $G=\{3,5,7\}$,
$H=\{1,2,3,4,5,6,7,\}$
$F=\{1,2,3,4,5\}$ Observamos que todos ellos son subconjuntos de $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, en este caso, el conjunto U que contiene a todos los conjuntos del discurso se llama universo, de ahí la letra U.

Definimos el complemento de un conjunto A, como el conjunto A^c formado por todos los elementos que no están en A, pero que si están en el universo, esto es, $A^c=\{x : x\notin A \land x\in U\}$ en ocasiones se simboliza el complemento de un conjunto A por $-A$, o A' .

ejemplo; Dado el universo $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, y $L=\{5,7\}$ su complemento es $L^c=\{1,2,3,4,6,8,9\}$,

ejemplo 2; Sea $D=\{6,7,8\}$, $E=\{1,2,3,6\}$

Su unión es $D \cup E=\{1,2,3,6,7,8\}$ y su complemento es $(D \cup E)^c = \{4,5,9\}$; la intersección es $D \cap E = \{6\}$ y su complemento es $(D \cap E)^c = \{1,2,3,4,5,7,8,9\}$;

Una de sus diferencias es $D-E =\{7,8\}$ y su complemento es $(D-E)^c = \{1,2,3,4,5,6,9\}$;

Su otra diferencia es $E-D= \{1,2,3\}$ y su complemento es $(E-D)^c =\{4,5,6,7,8,9\}$; el complemento de D es $D^c=\{1,2,3,4,5,9\}$ y el de E es $E^c=\{4,5,7,8,9\}$ la intersección de los complementos es $D^c \cap E^c = \{4,5,9\}$ y la unión de ellos es: $D^c \cup E^c = \{1,2,3,4,5,7,8,9\}$; una de sus diferencias es $D^c - E^c = \{1,2,3\}$ la otra es $E^c - D^c = \{7,8\}$

escribe los conjuntos que se piden:

$D- E^c=$

$E- D^c=$

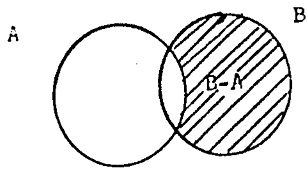
$D \cap E^c =$

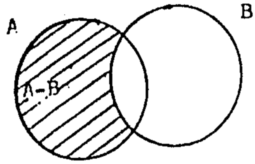
$E \cap D^c=$

$D \cup E^c=$

$D^c \cup E=$

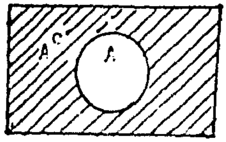
Los diagramas de Venn correspondientes a la diferencia de dos conjuntos es:





el complemento de un conjunto

U



Dados los conjuntos $S=\{7,8,9\}$ y $T=\{1,2,3,4,5,6\}$, la unión de ellos es $T \cup S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y su complemento es $(T \cup S)^c = \phi$, ya que no hay elementos en U que no estén en $T \cup S$, esto es, $U^c = \phi$. Así mismo, $\phi^c = U$ pues cualquier elemento está en el complemento del conjunto vacío.

Escribe los conjuntos que se piden:

$U-\emptyset=$

$\emptyset-U=$

$U\cap\emptyset=$

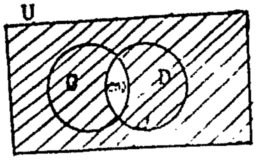
$\emptyset\cup U=$

$U^c=$

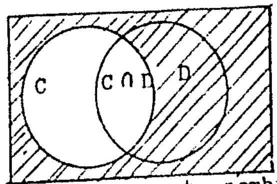
$\emptyset^c=$

Sean los conjuntos $C=\{2,4,6,8\}$, $D=\{6,7,8\}$ la intersección de ellos $C\cap D = \{6,8\}$, su complemento es $(C \cup D)^c=$ $\{1,2,3,4,5,7,9\}$, sus complementos son: $C^c= \{1,3,5,7,9\}$, y $D^c= \{1,2,3,4,5,9\}$, su unión es $C^c \cup D^c= \{1,2,3,4,5,7,9\}$; observamos que $(C \cap D)^c= \{1,2,3,4,5,7,9\}$ y también que $C^c \cup D^c=$ $\{1,2,3,4,5,7,9\}$; esto es, los conjuntos $(C \cap D)^c$ y $C^c \cup D^c$ tienen los mismos elementos; en este caso, decimos que los conjuntos son iguales así $(C\cap D)^c= C^c \cup D^c$ esta igualdad es conocida como una de las leyes al igual $(C \cup D)^c = C^c \cap D^c$

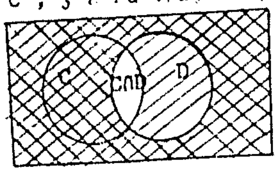
En efecto, $C \cup D = \{2,4,6,7,8\}$, entonces $(C \cup D)^c=$ $\{1,3,5,9\}$, y $C^c \cap D^c= \{1,3,5,9\}$. Los respectivos diagramas de Venn- Euler son:



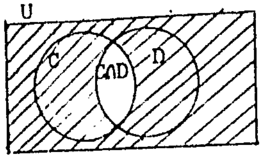
la parte achurada es $(C \cap D)^c$ también:



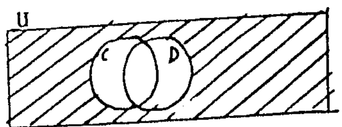
la parte sombreada es C^c, y a su vez; la parte sombreada



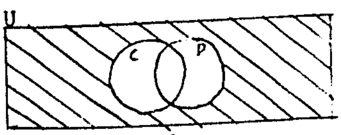
es D^c; finalmente,



la parte sombreada es $C^c \cup D^c$ y, como se ve comparando los diagramas, es la misma parte sombreada; de igual manera, el diagrama de $(C \cup D)^c$ y de $C^c \cap D^c$ serán,



$(C \cup D)^c$



$C^c \cap D^c$

En el primer diagrama la parte sombreada es $(C \cup D)^c$, en el segundo, la parte con achurado es $C^c \cap D^c$ y se ve que son iguales.

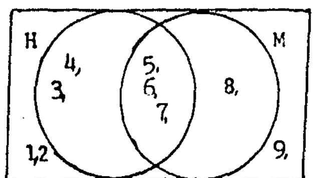
Dados los conjuntos A,B, enuncia las leyes de Morgan para ellos;

Dados los conjuntos $H=\{3.4,5,6,7\}$ y $M=\{5,6.7.8\}$, $oH=5$, $oM=4$, la unión es $M \cup H=\{3.4,5,6.7,8\}$ y su cardinalidad es $o(M \cup H)=6$, su intersección es $M \cap H=\{5.6,7\}$ y su cardinalidad es $o(M \cap H)=3$, la diferencia $M-H=\{8\}$ tiene de cardinalidad $o(M-H)=1$ y la otra diferencia $H-M=\{3,4\}$ con cardinalidad $o(H-M)=2$. Como el universo U tiene $oU=9$ y la cardinalidad del complemento de la unión es $(M \cup H)^c=\{1.2.9\}$, su cardinalidad $o(M \cup H)^c=3$; así, se tiene que $oU-o(M \cup H) = o(M \cup H)^c$, pues sus valores son, $9-6=3$; además, se tiene que $o(H \cup M)= oH+oM-o(H \cap M)$* pues sustituyendo ;

$6=5+4-3.$

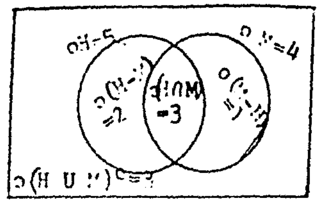
Por otra parte, $o(M-H)+o(H-M)+o(M \cap H)=o(H \cup M)$, escribiendo sus valores, $1+2+3=6.$

Un par de diagramas de Venn- Euler aclararán la situación, U



* A esta formula $o(H \cup M)= oH+oM-o(H \cap M)$ se le llama de Bayes y se aplica en probabilidad.

y sus cardinalidades serán, o U=9



Generalizando, para dos conjuntos cualesquiera H, M, se tiene:

fórmula de Bayes o (H U M)= o H + o M + o(H∩M); además
o U - o(M U H)= o (M U H)^c y también o (M-H)+ o (H-M) + ---
o (M∩H) = o (H U M).

De la fórmula de Bayes y la última fórmula se tiene;

oH + o M+ o (H∩M)= o (M-H)+ o (H-M) + o(H∩M)

estas ecuaciones dan surgimiento a problemas muy comunes en los exámenes.

ejemplo 1: En una combi viajan doce personas, cinco de ellas traen pantalones vaqueros, seis traen tenis, y cinco no traen ni tenis ni pantalones vaqueros, ¿ cuántos traen tenis y pantalones vaqueros?, hacer un diagrama de Venn Euler que explique la situación;

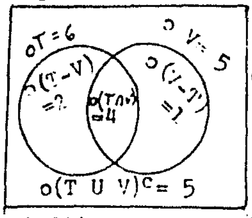
Respuesta: En la combi viajen 12 personas luego o U= 12 cinco traen pantalones vaqueros, representamos por V el conjunto de personas que traen pantalones vaqueros. oV=5, seis traen tenis, designaremos el conjunto de personas que traen tenis con T, así oT=6, los que no traen tenis ni pantalones vaqueros también son cinco, esto es, o (T U V)^c= 5; luego, como o U - o(TUV)= o (T U V)^c se tiene 12 - o(T U V)= 5, de donde resulta que o(T U V)= 7 y por la fórmula de Bayes o (T U V)= o T + oV- o (T∩V), obtenemos 7= 6+5 - o (T∩V), de aquí 7= 11- o(T∩V), luego o (T∩V)= 4, como

$o(T-V) = oT - o(T \cap V)$ y $o(V-T) = oV - o(T \cap V)$ se tiene

$o(T-V) = 6 - 4$ y $o(V-T) = 5 - 4$ así $o(T-V) = 2$ y $o(V-T) = 1$

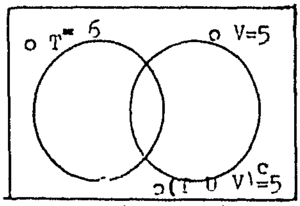
luego el diagrama de Venn - Euler será:

o U= 12



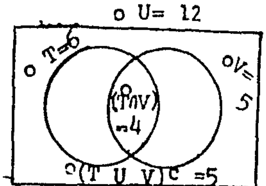
, otra manera algo más intuitiva para resolver el problema es dibujar el diagrama:

o U=12



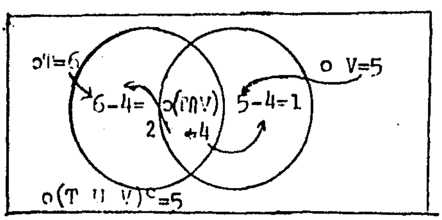
. luego como $o(T \cup V) = oU - o(T \cup V)^c$ se tendrá $o(T \cup V) = 12 - 5$, esto es, $o(T \cup V) = 7$, de aquí, por la fórmula de Bayes, $o(T \cup V) = oT + oV - o(T \cap V)$, se tiene $7 = 6 + 5 - o(T \cap V)$, luego $7 = 11 - o(T \cap V)$, luego $o(T \cap V) = 4$, se completa el diagrama con este dato

o U= 12



completamos ahora los demás datos

o U = 12.



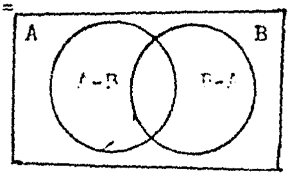
Resuelve el problema siguiente :

En un salón de [illegible] alumnos, 2[illegible] traen pantalones [illegible], 3[illegible] visten sudaderas, 22 llevan pantalones [illegible] y sudadera,

¿ Cuántos no traen ninguna de las dos prendas de vestir ?

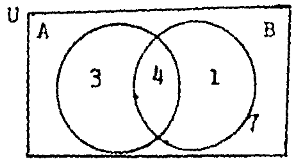
Haz el diagrama de Venn- Euler

Estos problemas se entienden mejor si sabemos cómo pro ponerlos: Se empieza haciendo el diagrama

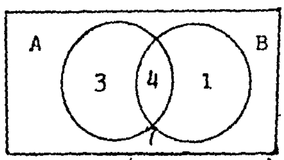
o U= 

después

se asignan arbitrariamente números a $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ y $(A-B)^c$, por ejemplo:



la cardinalidad de A se obtienen sumando todos los números del conjunto A, en este caso 3+4, se repite el proceso para B, 4+1, la suma de los números dentro de A U B nos da; 3+4+1 = 8, que es su cardinalidad; finalmente, a esta cantidad se suma el número restante y el resultado es la cardinalidad de U, en el caso 8 + 7 = 15, o U= 15



, se decide qué es lo que va a preguntar, - puede ser o $(A \cap B)$, o o $(A \cup B)^c$, o cualquier cardinal involucrado. Y se listan los demás datos, para dictarlos: elabora dos problemas de este tipo, para que los dictes a tus compañeros de equipo, y ellos a su vez, te dictarán los que hayan elaborado, para resolverlos, que se diviertan.

Dados dos conjuntos $Q=\{2,3,4\}$, $R=\{1,3,5,7,9\}$, su "producto cartesiano" $Q\times R$, es un conjunto cuyos elementos son parejas (q,r) donde el primer miembro es un elemento de Q y el segundo es de R, esto es:

$Q\times R=\{(q, r) \mid q\subset Q \wedge r\in R\}$, así:

$$Q \times R=\{ (2,1)\ (2,3)\ (2,5)\ (2,7)\ (2,9)$$
$$(3,1)\ (3,3)\ (3,5)\ (3,7)\ (3,9)$$
$$(4,1)\ (4,3)\ (4,5)\ (4,7)\ (4,9)\}.$$

Observamos que $o(Q \times R) = (oQ)(oR)$, esto es, el número de elementos del producto cartesiano es igual al producto del número de elementos de los conjuntos originales.

Escribe el producto cartesiano de $R=\{1,3,5,7,9\}$ y $S=\{7,8,9\}$.

El producto cartesiano $Q \times R$ es diferente de $R \times Q$, ya que sus elementos son distintos, en efecto, para que dos parejas; (q_1,r_1), (q_2,r_2), sean iguales; se requiere que $q_1 = q_2$ y que $r_1 = r_2$. Luego $Q \times R = R \times Q$, sólo cuando $Q = R$., solo cuando Q y R no son vacios.

Sistemas de numeración.

Existen varios sistemas de numeración, el de los romanos, egipcios, mayas,..., el que usamos es de origen indo-arábigo, toma como base para contar, todos los dedos de las manos de un ser humano normal, por eso sus símbolos se llaman dígitos y son: 1,2,3,4,5,6,7,8,9 y el símbolo que se usa para indicar ningún dedo, el cero 0. Este símbolo en combinación con el uno, 10 indica todos los dedos de las manos de un hombre; si agregamos un dedo más tendremos 10 + 1, que se escribe 11, seguirán; 12, 13, 14,..., 19, este último simboliza; una vez todos los dedos de las manos más nueve, esto es; 19 = 10 + 9, si ahora agregamos una unidad mas tendremos; 10 + 9 + 1 = 10 + 10, esto es, dos veces todos los dedos de las manos de un hombre, lo cual se escribe 20, si agregamos otra unidad se tendrá 2x10 + 1, que escribimos 21; agregando unidades llegaremos a 29, al sumar uno más tendremos 29 + 1 = 2x10 + 9 + 1, lo cual es 2x10 + 10, esto es, 3x10 tres veces los dedos de las manos, que escribimos 30, si continuamos el proceso de sumar unidades llegaremos a 99; esto es, 9x10 + 9, y al agregar uno nos da; 9x10 + 9 + 1 = 9x10 + 10, que es igual a diez veces diez, que escribimos 100, continuando llegaremos a cien veces cien, esto es, diez mil, que se escribe 10000. Así, cuando escribimos 23583, estamos refiriéndonos a dos veces diez mil, más tres veces mil, más cinco veces cien, más ocho veces diez, más tres. Otra manera de escribirlo es: 2x10000 + 3x1000 + 5x100 + 8x10 + 3; si hacemos las multiplicaciones indicadas, obtenemos; 20000 + 3000 + 500 + 80 + 3 y al efectuar las sumas;

$$\begin{array}{rr} & 20000 \\ + & 3000 \\ + & 500 \\ + & 80 \\ + & 3 \\ \hline & 23583 \end{array}$$

, Tendremos el número original.

Escribir 23583 así 2x10000 + 3x1000 - 5x100 + 8x10 + 3 es escribirlo en notación desarrollada.

Ejercicio; escribe en notación desarrollada los siguientes números; 53, 27, 14, 234, 526, 2348, 2228,

La notación desarrollada puede escribirse también de otro modo, veamos; el número 53268=5x10000 + 3x1000 + 2x100 + 6x10 + 8, el primer número de la derecha tiene tán sólo el valor que indica como dígito, en este caso ocho; El seis se múltiplica por 10; El dos se multiplica por 100, que es el resultado de multiplicar a diez por sí mismo, esto es, tomar a 10 como factor dos veces, 10x10, lo cual lo indicamos con la notación exponencial; con un diez y un dos en el ángulo superior izquierdo del diez, así; 10^2, luego; 100 = 10x10 y también 10x10 = 10^2, por lo que, 100 = 10^2. Para 3000 = 3x1000, vemos que mil es el resultado de tomar a diez como factor tres veces; 10x10x10 = 1000, luego escrito como potencia tendremos; 10^3 = 10x10x10 y de aquí 10^3 = 1000. Igual que lo anterior 10000 = 10^4. y reescribiendo el número 53268, con la notación exponencial;
$53268 = 5x10^4 + 3x10^3 - 2x10^2 + 6x10 + 8$, recordando que la base de nuestro sistema de numeración es el diez, advertimos que la notación desarrollada es una suma de múltiplos de potencias de diez.

Sistema pental.

Si para contar se toma como base el número de dedos de una mano, se tendrán cinco símbolos, 1,2,3,4 y el 0, que significa ausencia de dedos, se contará; 1, 2, 3, 4, 10, donde el 10, significará; una vez todos los dedos de una mano. Para no confundirnos con los números en notación decimal, escribiremos los números en otra base con un subíndice que especifique de que base se trata, así 342_5 es el número 342 con base cinco. Para la base decimal no usaremos subíndices. Según esta convención el 10 pental lo escribiremos 10_5. Los dígitos sin valor posicional, los escribiremos sin subíndices. Luego la numeración pental será, 1, 2, 3, 4, 10_5, 11_5, 12_5, 13_5, ... En efecto, al agregarle uno al 10_5 tendremos $10_5 + 1 = 11_5$, que significa, en la notación decimal, 5 = 1, los siguientes números serán, 12_5, 13_5, 14_5, al que , si agregamos 1, tendremos 14_5, $+ 1 = 10_5 + 4 + 1$, y dado que $4 + 1 = 10_5$, obtendremos $14_5 + 1 = 10_5 + 10_5$, Esto es; dos veces los dedos de una mano $10_5 + 10_5 = 20_5$, si seguimos agregando, nuestra numeración pental será; 1, 2, 3, 4, 10_5, 11_5, 12_5, 13_5, 14_5, 20_5, 21_5, 22_5, 23_5, 24_5, 30_5, 31_5, 32_5, 33_5, 34_5, 40_5, 41_5, 42_5, 43_5, 44_5, y $44_5 + 1 = 4x10_5 + 4 + 1$. Esto es; $44_5 + 1 = 4x10_5 + 10_5$, de aquí que $44_5 + 1 = 10_5x10_5$, luego; $44_5 + 1 = 100_5$ y como $100_5 = 10_5x10_5$, escribiendo con notación de potencias; $10_5x10_5 = 10_5^2$, que es $10_5x10_5 = 5x5$, en nuestra notación decimal*, de donde $10_5^2 = 25$. Continuando la numeración llegaremos a $444_5 + 1$ que es $4x10_5^2 + 10_5x10_5$, y; $4x10_5^2 + 10_5^2 = 10_5x10_5$, lo que nos da; $10_5x10_5 = 10_5^3$ o $10_5^3 = 1000_5$, recordemos que; $10_5x10_5x10_5 = 5x5x5$, y que esto es; $5x5x5 = 125$, entonces $10_5^3=125$, también; $10_5^4 = 5x5x5x5$, por lo que $10_5^4 = 625$; luego un número como 32401_5, en notación desarrollada es; $3x10_5^4 + 2x10_5^3 + 4x10_5^2 + 1$, que es; $3x5^4 + 2x5^3 + 4x5^2 + 1$, en sistema decimal, esto es;

* Como 5 no es un símbolo en notación pental, (dígito), se entiende que cuando usemos el símbolo 5 nos referimos a la notación decimal.

$3x5^2 + 2x5^3 + 4x5^2 + 1 = 3x625 + 2x125 + 4x25 + 1$, que resulta; $1875 + 250 + 100 + 1 = 2226$, tenemos así que $32401_5 = 2226$.

Ejercicio; escribir de 1 a 300 en sistema decimal y de 1 a 2200_5 en el sistema pental, (base cinco).

Sistema octal.

Si los pulpos hubieran desarrollado la inteligencia suficiente para contar, emplearían un sistema con base en ocho y tendrían ocho simbolos para representar lo que estuvieran contando; 1,2,3,4,5,6,7, y la ausencia de tentáculos que sería el 0, en su mundo sumergido, donde la luz tamizada por las aguas da una tonalidad azul-verdosa, su numeración sería; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10_8,..., donde 10_8 significa; una vez todos los tentáculos de un pulpo; esto es, $7 + 1 + 10_8$, continuaría, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10_8, 11_8, 12_8, 13_8, 14_8, 15_8, 16_8, 17_8, 20_8, este último número significa dos veces todos los tentáculos de un pulpo; continuaríamos hasta 77_8 y al agregarle uno obtendríamos el 100_8, como; $100_8 = 10_8 x 10_8$ y $10_8 = 8$, se tiene; $100_8 = 8x8$*; esto es, $100_8=64$, en notación de potencias $10_8^2 = 8^2$, también $10_8^3 = 8^3$,... Así, un número tal como $76054_8 = 7x8^4 + 6x8^3 + 5x8 + 4$, de aquí, obteniendo las potencias; $7x8^4 + 6x8^3 + 5x8 + 4 = 7x4096 + 6x512 + 5x8 + 4$, multiplicando, y sumando; $28672 + 3072 + 40 + 4=31788$; lo que nos dice que, $76054_8 = 31788$.

Ejercicio: Escribe del 1 al 454_8.

* 8x8, escrito en notación decimal, en general, cuándo usemos el símbolo 8, (no como subíndice), se sobrentiende que estamos refiriendonos al símbolo decimal.

Para escribir un número decimal en base ocho, desarrollaremos un ejemplo:

Sea 19477 el número decimal, 1º Trazamos una raya vertical a la derecha del número, 19477 , dividimos entre ocho, escribiendo el cociente abajo de 19477, y el residuo a la derecha de la raya; 19477 5
2434
. Al nuevo cociente lo dividimos entre ocho, y al nuevo residuo lo escribimos a la derecha de la línea vertical, abajo del residuo anterior: 19477 5
2434 2
308
: Se repite el 2º paso hasta que el cociente sea igual al residuo. Cuando esto ocurra, se tomará el número compuesto por los residuos, siendo el primer residuo, la primer cifra de la izquierda, el segundo residuo, la segunda cifra, ... el último residuo será la última cifra del número octal, así; $19477 = 52464_8$.

Veamos otro ejemplo, 6789, con el proceso anterior será:

6789	5 ,	6789	5 ,	6789	5 ,	6789	5	, de este modo se
848		848	0	848	0	848	0	
		106		106	2	106	2	
				13		13	5	
						1	1	

tiene que; $6789 = 15205_8$.

Ejercicio: Escribe un número en sistema decimal, de cuatro cifras, y otro de cinco cifras, dictaselos a tus compañeros de equipo: Que ellos te dicten los suyos, encuentren sus expresiones octales, al terminar comparenlas entre sí, pregunten sus dudas al maestro: Discutan el procedimiento para expresar en base cinco un número decimal.

Sistema binario.

Las computadoras trabajan sus circuitos con unidades de memoria que, por ser eléctricas, sólo pueden estar cargadas o descargadas. Esto significa tener dos símbolos para contar; el uno y el cero; así, la numeración binaria será, 1, 10_2, 11_2, 100_2, 101_2, 110_2, 111_2, 1000_2, 1001_2. 1010_2, 1011_2, 1111_2, ... pués $1 + 1 = 10_2$ y un número binario tal como 10110_2 en notación desarrollada se escribe como $1 \times 10000_2 + 0 \times 1000_2 + 1 \times 100_2 + 1 \times 10_2 + 0$, que en notación de potencia decimal es $10000_2 + 100_2 + 10_2 = 10_2^4 + 10_2^2 + 10_2 = 2^4 + 2^2 + 2$

efectuando las operaciones de potencias,

$2^4 + 2^2 + 2 + 16 + 4 + 2$, sumando $16 + 4 + 2 = 22$ lo que nos dice que $10110_2 = 22$.

Ejercicio : Escribir del 1 al 100101100_2

Para escribir un número decimal en sistema binario: 1º se escribe el número decimal y a la derecha una recta vertical, por ejemplo; 57 , a continuación dividimos 57 entre dos, anotamos el cociente abajo del número decimal, y el residuo a la derecha de la raya vertical; $\begin{array}{r|l} 57 & 1 \\ 28 & \end{array}$, 2º dividimos entre dos el nuevo cociente, anotamos el nuevo abajo del anterior y el residuo a la derecha de la raya vertical y abajo del residuo que le antecede; continuamos con el 2º paso hasta que el residuo sea igual al cociente.

Este último residuo será la última cifra de derecha a izquierda del número binario, siendo la primera cifra el primer residuo, así: $\begin{array}{r|l} 57 & 1 \\ 28 & 0 \\ 14 & 0 \\ 7 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}$ **, esto es; $57 = 111001_2$**

Sistema Hexagésimal

Dado que los numeros binarios, por su gran tamaño, son difícil difíciles de operar, se acostumbra encontrar su equivalente al sistema hexagésimal, que tiene como base 16, sus símbolos son : 1,2,3,4,5,6,7,8,9, A,B,C,D,E y F, del cual sigue F +1=10_{16} después 11_{16}, 12_{16}, 13_{16}, 14_{16}, 15_{16}, 16_{16}, 17_{16}, 18_{16}, 19_{16}, $1A_{16}$, $1\ B_{16}$, $1\ C_{16}$, $1\ D_{16}$, $1\ E_{16}$, $1\ F_{16}$, y agregando 1 se tiene : $1\ F_{16}$ +1 = 10_{16}+ 1; esto es, 10_{16}+ F + 1 = 10_{16}+ 10_{16}, que nos da 10_{16}+10_{16}= 20_{16} y continuamos con 20_{16}, 21_{16}, 22_{16}, $23_{16}24_{16}$, 25_{16}, 26_{16}, 27_{16}, 28_{16}, 29_{16}, $2A_{16}$, $2B_{16}$, $2C_{16}$, $2D_{16}$, $2E_{16}$, $2F_{16}$, 30_{16}, 31_{16}, 32_{16}, 33_{16}, 34_{16}, 35_{16}, 36_{16}, 37_{16}, 38_{16}, 39_{16}, $3A_{16}$, $3B_{16}$, $3C_{16}$, $3D_{16}$, $3E_{16}$, $3F_{16}$, 40_{16}, 41_{16}, 42_{16}, 43_{16}, 44_{16}, 45_{16}, 46_{16}, 47_{16}, 48_{16}, 49_{16}, $4A_{16}$, $4B_{16}$, $4C_{16}$, $4D_{16}$, $4E_{16}$, $4F_{16}$, 50_{16},.. hasta llegar a 99_{16}, $9A_{16}$. $9B_{16}$, $9C_{16}$, $9D_{16}$. $9E_{16}$, $9F_{16}$, $A0_{16}$, $A1_{16}$, $A2_{16}$, $A3_{16}$, $A4_{16}$, $A5_{16}$, $A6_{16}$, $A7_{16}$, $A\ 8_{16}$, $A9_{16}$, AA_{16}, AB_{16}, AC_{16}. AD_{16}, $AE_{16}AF_{16}$, $B0_{16}$, $B1_{16}$. $B2_{16}$, $B3_{16}$, $B4_{16}$, $B5_{16}$ $B6_{16}$, $B7_{16}$, $B8_{16}$, $B9_{16}$, BA_{16}, BB_{16}, BC_{16}, BD_{16}, BE_{16}, BF_{16}, BC_{16},.... sucesivamente llegamos a $E9_{16}EA_{16}$, EB_{16}, EC_{16}, ED_{16}, EE_{16}, EF_{16}, FA_{16}, FB_{16}, FC_{16}, FD_{16}, FE_{16}, FF_{16}; al agregar uno obtenemos FF_{16} + 1 = $F0_{16}$+ F + 1, que es $F0_{16}$ + F + 1 = $F0_{16}$ + 10_{16}= 100_{16}, continuando con 100_{16}, 101_{16}, ... Así, un número tal como $20F9D_{16}$, en notación de potencias desarrolladas, se escribirá $2 \times 10_{16}^4 + 0 \times 10_{16}^3 + F \times 10_{16}^2 + 9 \times 10_{16} + D$ y como $10_{16} = 16$, F= 15 y D= 13 tenemos; $210_{16}^4 + F \times 10_{16}^2 + 9 \times 10_{16} + D = 2 \times 16^2$ $+ 15 \times 16^2 + 9 \times 16 + 13$ efectuando las potencias,

$2 \times 16^4 + 15 \times 16^2 + 9 \times 16 + 13 = 2 \times 65536 + 15 \times 256 + 9 \times 16 + 13$

multiplicando,

$2 \times 65536 + 15 \times 256 + 9 \times 16 + 13 = 131072 + 3840 + 144 + 13$

sumando, $131072 + 3840 + 144 + 13 = 135969$.

Expresaremos el número decimal 9837, en sistema hexagesimal, 1º Escribimos una recta vertical a la derecha del número decimal; 9837 , dividimos entre dieciseis, escribimos el residuo a la derecha de la raya vertical, expresandolo en símbolos hexagesimales; según la tabla; 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,
1,2,3,4,5,6,7,8,9, A, B, C, D, E, F.

```
así; 9837 13=D, esto es; 9837 = 266D, veamos otro ejemplo; sea
      614 6
       38 6
        2 2
```

```
49311, en decimal, procesemoslo; 49311 15=F , luego; 49311=C09F16.
                                  3081 9
                                   192 0
                                    12 12=C
```

Ejercicio: Escribe dos números en base diez, con cuatro y cinco cifras, cada uno, dictaselos a tus compañeros, encuentren las expresiones hexagesimales de tales números, comparen sus resultados y corriganse.

ejercicio : escribe del 1 a $12C_{16}$

Ventajas de los Sistemas.

El número 111100101100_2 se transforma en hexagesimal, rápidamente, de la siguiente manera: se agrupan las cifras de cuatro en cuatro, de derecha a izquierda, así $1111,0010,1100_2$ en caso de que el grupo de izquierda a derecha no tenga cuatrto cifras, se completan con ceros a su izquierda. Ejemplo : 11010010111000 se agruparía : 0011,0100,1011,1000, también 10010001101, se agruparía : 0100,1000,1101. continuando con la conversión de $1111,0010,1100_2$, cada cuatro cifras binarias equivalen a una hexagesimal según lo siguiente: 0000_2, 0001_2,
0 1

0010_2, 0011_2, 0100_2, 0101_2, 0110_2, 0111_2, 1000_2, 1001_2, 1010_2,
2 3 4 5 6 7 8 9 A

1011_2, 1100_2, 1101_2, 1110_2, 1111_2; luega nuestro número,
B C D E F

$1111,0010,1100_2$, equivale a $F2C_{16}$, el cual es más fácil de recor-
F 2 C

dar y manejar, por tener tres cifras, que el número de doce en binario. Ejercicio: Escribe los números hexagesimales que equivalen a 1010000_2, 11101000001111000_2, 1110111_2, 100101100_2, 10000001_2, la escritura en el sistema octal, de números en binario, se efectúa agrupando las cifras binarias de tres en tres, y según la siguiente equivalencía 000_2 001_2. 010_2, 011_2, 100_2,
0 1 2 3 4

101_2, 110_2, 111_2; ejemplo; 100101100_2, se agrupan las cifras de tres en tres; 100, 101, 100_2, se encuentra su equivalencia

$$\underset{4}{100},\ \underset{5}{101},\ \underset{4}{100_2}$$, luego, $100101100_2 = 454_8$.

Ejercicio: Escribe, en sistema octal, los números en binario, siguientes: 1000011001_2, 1100001000111_2, 111000010_2.

Operaciones en otros sistemas.

Para sumar en otros sistemas de numeración empezamos haciendo una tabla de sumar en binario

+	0	1
0	0	1
1	1	10

, es conveniente aumentar la tabla

+	0	1	10	11
0	0	1	10	11
1	1	10	11	100
10	10	11	100	101
11	11	100	101	110

, ejemplos:

$$\begin{array}{r} 110110 \\ +\ \underline{11101} \\ 1010011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101110 \\ +\ \underline{11101} \\ 1001011 \end{array}$$

para multiplicar dos números en binario se elabora la tabla siguiente:

x	0	1
0	0	0
1	0	1

, y se procede así:

$$\begin{array}{r} 101101101 \\ \times\ \underline{\qquad\qquad 11} \\ 101101101 \\ \underline{101101101} \\ 10001000111 \end{array}$$

, como se ve, la multiplicación binaria es sumamente sencilla:

Ejercicio 1: efectuar las multiplicaciones;

$$\begin{array}{r} 1110111 \\ \times\ \underline{\qquad 10} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{r} 101 \\ \underline{\times\ 11} \end{array} \quad ,$$

Ejercicio 2: discutir, en Philips 6.6, la operación de resta de números binarios.

Ejercicio 3: discutir, en grupo, la división de números binarios. En esta discusión el maestro sólo debe actuar como moderador, sin pretender proporcionar ideas, ni forzar la orientación de la discusión.

Nota : Si deseas ampliar más tus conocimientos sobre el tema, Consulta los siguientes textos :<u>¿Que es la matemática?</u> de

Richard Courant y Herbert Robbins. Editorial Aguilar México 1967, pp 8 a 17.

<u>Matemáticas Contemporáneas,</u> Jack R. Britton e Ignacio Bello. Editorial Harla. México, 1982, pp. 184 a 190

<u>Aritmética</u> , J.E. Thompson, Editorial Uteha, México, 1967, México, pp. 278 a 301

Ejercicio 4 : Discusíon sobre las operaciones en algún otro sistema, sus ventajas y desventajas, así mismo preguntar ¿qué sistema será el preferible ?

Ejercicion 5 : Escribir las tablas de sumar y multiplicar del sistema decimal, y pedir a cada uno de los alumnos escriba , en su cuaderno, un ejercicio de cada operación, y las dicte a sus otros tres compañeros de equipo, y que, a su vez resuelva los que le dicten a ellos. Al terminar, comparen sus respuestas, procurando ayudarse a corregir errores.

Cuando todo el grupo termine, de dioscutir, ya sea en mesa redonda o en forma de simposium el tema: Cómo comprobar si están correctas las operaciones .

División

Para dividir números binarios se sugiere hacerlo sin abreviar pasos. Ejemplo :

```
         11110
110 | 10110110,
      -110
       1010
      - 110
        1001
      -  110
         111
      -  110
          10
```

Al encontrar cada cifra del cociente, nos hemos limitado a escribir su producto con el divisor, pasando después a restar del residuo anterior, en vez de proceder a efectuar la resta mentalmente, es conveniente hacer conciencia en los alumnos de la facilidad que, para encontrar cada cifra del cociente brinda este sistema.

Ejercicio 1 : Pedir a cada alumno que escriba una división binaria en su cuaderno, a continuación que la dicte a sus compañeros de equipo y resuelva cada uno de los miembros del equipo las divisiones, y al final que comparen sus respuestas ayudandosé a corregir errores en el procedimie nto de la división binaria.

Ejercicio 2 : Pedir que realizen los mismos pasos anteriores, pero con la división decimal y sin abreviar pasos, por ejemplo :

```
        12551
825  10354862
     -825
      2104
     -1650
       4548
      -4125
        4236
       -4125
         1112
        - 825
          287
```

Números Naturales.

Consideramos los números naturales como ya dados; con su expresión decimal, su orden natural y las operaciones de suma, + y producto, x; usaremos la letra **N** para designar la tríada que ellos forman, esto es, $\mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots, n-1, n, n+1,\ldots\}$, usaremos también la letra $\mathbf{N}^{-}$ para el conjunto $\{0\} \cup \mathbf{N}^{+} = \{0, 1, 2,\ldots\}$

Una caracteríztica que observamos es que, dado un número natural n, tiene un sucesor que es n + 1; y excepto el 1, todos los naturales tienen un antecesor que es n - 1. Otra caracteríztica de los naturales es la existencia de un elemento idéntico, bajo la operación de multiplicación, que es el uno. En efecto 3x1 = 3, 5x1 = 5, y en general dado cualquier $n \in \mathbf{N}$, nx1 = n.

También observamos la conmutatividad de la suma y de la multiplicación: 3 + 5 = 5 + 3, 6 + 7 = 7 + 6; y también, 3x5 = 5x3, 6x7 = 7x6. En general, dados n, m **N**, n + m = m + n y nxm = mxn.

Los naturales tienen también la propiedad asociativa, expresada así; 5 + (3 + 6) = (5 + 3) + 6, y 5x(3x6) = (5x3)x6. Generalizando, dados $l,n,m \in \mathbf{N}$, se tiene l + (n + m) = (l + n) + m, y lx(nxm) = (lxn)xm. También se tiene la propiedad distributiva: 3x(5 + 4) = 3x5 + 3x4, 8x(3 + 2) = 8x3 + 8x2. Generalizando, dados $l,n,m \in \mathbf{N}$, lx(n + m) = lxn + lxm.

Dos caracterízticas más, son la cancelación aditiva, que consiste en: si 7 + 8 = (3 + 4) + 8, entonces 7 = (3 + 4); esto es, si l,n,m **N**, y l + n = m + n, entonces l = m, y la cancelación multiplicativa, ejemplificada por; si (3 + 2)x 5 = (1 + 4)x5, entonces (3 + 2) = (1 + 4). Generalizando, si l,n,m **N**, y lxn = mxn, entonces l = m.

Ejercicio; Escribe dos ejemplos numéricos, de cada una de las propiedades enunciadas y dictaselas a tus compañeros de equipo, para que las identifiquen

Los números naturales tienen también las propiedades de orden siguientes; (en lo que sigue el orden se denotará "$<$" que se lee "menor que"):

La **tricotomía**, Si $n, m \in N$, entonces $n < m$ o $m < n$ o $n = m$.

Ejemplos; sean 3, 5, entonces $3 < 5$; sean 6, 2, entonces $2 < 6$; sean 4, 4, dicho de otro modo, dados dos números naturales, uno es menor que el otro, o son iguales.

La **transitividad**, sean tres números naturales l, n, m, si $l < n$ y $n < m$, entonces, $l < m$.

Ejemplo: $3 < 5$, $5 < 8$, entonces se tiene $3 < 8$.

Sean l, n, m, números naturales, si $l < n$, entonces $l+m < n+m$; ejemplo: $6 < 9$, luego, $6 + 3 < 9 + 3$.

Sean l, n, m, números naturales, si $l < n$ y $0 < m$, entonces, $3x4 < 5x4$.

Ejercicio: Discutir la operación de resta en los números naturales, con las restricciones que deben tener; el número que se va a restar, (llamado sustraendo), en relación con el número del cual se va a restar, (llamado minuendo).

Potencias y raíces de números naturales

En el curso de nuestra vida es muy frecuente que se presenten multiplicaciones de un número por sí mismo; por ejemplo, las flores se venden al mayoreo por gruesa, que son doce docenas, esto es 12x12; En matemáticas 12x12 se escribe 12^2, el dos significa que 12 se va a tomar como factor dos veces.

Cuando escribimos 12^2, decimos que elevamos 12 a la segunda potencia o al cuadrado, pues el área de un cuadrado de lado doce es 12x12. En general, si l, n, son números naturales, entonces $l^n = \overbrace{l x l x \ldots x l}^{n\text{-veces}}$, y decimos que l esta elevado a la n-sima potencia, y n es el exponente al cual debemos elevar l. En el ejemplo 12^2, la base es 12 y el exponente es dos.

Si un número tiene como exponente tres, como en 5^3, decimos que esta elevado al cubo, pues el volumen de un cubo se obtiene multiplicando la longitud de uno de sus lados o aristas por si misma tres veces, si la arista tiene longitud cinco, el volumen del cubo será precisamente 5^3.

Escribamos más ejemplos de potencias: $6^4 = 6x6x6x6$, $8^5 = 8x8x8x8x8$, $5^9 = 5x5x5x5x5x5x5x5x5$, $16^3 = 16x16x16$, $9^2 = 9x9$, $6^2 = 6x6$. Para el caso de que un número se escriba sin exponente, se supone escrito el exponente uno, esto es, $3 = 3^1$. En general, si m es un número natural, entonces $m^1 = 1$, y $m^{n+1}=m^n xm$, siendo n un número natural, de esta manera si $n = 1$, $m^{n+1}=m^1 xm$, si $n = 2$, $m^{2+1} = m^2 xm$, si $n = 3$, $m^{3+1} = m^3 xm, \ldots$

Como ayuda didáctica, escribiremos los cuadrados de los primeros veinte números naturales: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$, $10^2 = 100$. $11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$, $16^2 = 256$, $17^2 = 289$, $18^2 = 324$, $19^2 = 361$, $20^2 = 400$.

Podemos representar gráficamente a los números naturales en una recta. Para ello, marcamos un punto cualquiera de la recta y le asignamos el valor cero,

A continuación, con una abertura cómoda del compas, marcamos a la derecha otro punto, al que le asignamos el valor uno,

transladando la misma distancia a partir de uno localizaremos el punto correspondiente al dos.

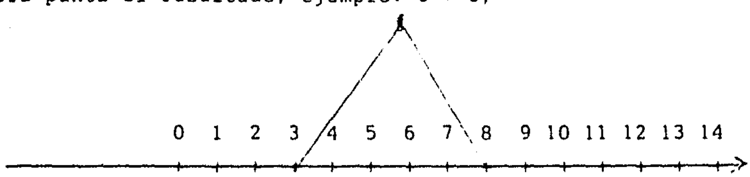
y continuando el translado de la misma distancia a la derecha, podremos localizar los demás números naturales,

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

Se acostumbra poner una punta de flecha en la recta, hacia el lado donde aumentan de valor los números naturales, para indicar que la recta continúa y que lleva marcados los correspondientes puntos, con los números naturales asignados:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

La representación de la suma, se hará, tomando con un compas la medida de uno de los números que se van a sumar y colocando una de sus puntas en el punto que corresponde al otro número, se lleva la distancia del compas a la derecha, hasta encontrar con la otra punta el resultado; ejemplo: 3 + 5,



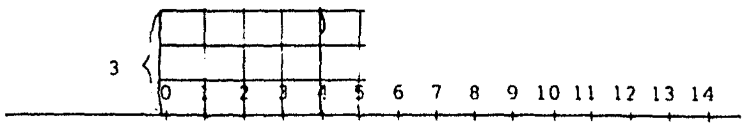
como se ve en el dibujo, la otra punta del compás llega hasta 8.

Definimos gráficamente un cuadrado de lado uno así:

$\underbrace{\boxed{1}}_{1}$ 1, el área doble la obtenemos con dos cuadrados unitarios, uno junto al otro. Podemos formar así un rectángulo de lados; dos y uno, de área dos, $\underbrace{\boxed{\ \ 2\ \ }}_{2}$ 1 , esto es, el área se obtiene multiplicando uno de los lados del rectángulo por el otro.

Lo anterior nos da la idea de cómo representar gráficamente la multiplicación de dos números naturales. Tomaremos uno de ellos como lado de un rectángulo, y la longitud del otro como el lado perpendicular al anterior, el área de éste será el producto.

Ejemplo: Sea la multiplicación de 5x3;

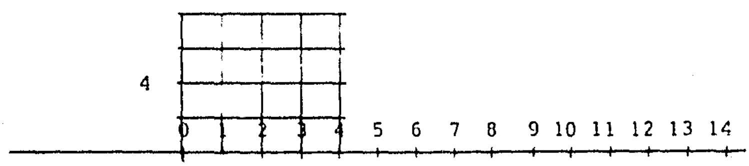


el área encerrada en el rectángulo de lados tres y cinco es de quince, como se puede verificar, contando los cuadrados unitarios del rectángulo, (los cuadrados unitarios, son los que tienen lado uno).

Ejercicio; Gráfica el producto 6x2.

El cuadrado de un número , quedará representado gráficamente por el área de un cuadrado de lado igual al número de que se trate,

Ejemplo; Representaremos gráficamente el cuadrado de cuatro, esto es, 4^2:



el área del cuadrado de lado cuatro, es 16, cómo se verifica contando los cuadrados unitarios, $4^2 = 16$.

Ejercicio; Representa gráficamente el cuadrado de tres, 3^2.

Si elevar al cuadrado equivale a obtener el área de un cuadrado de lado igual al número que se elevó, ¿cómo conoceremos el lado de un cuadrado cuya área se conoce?

Resolver el problema anterior, es obtener la raíz cuadrada del número que representa el área en cuestión. Para representar tal raíz cuadrada, escribiremos el número dentro de un símbolo que llamaremos radical; $\sqrt{}$.

Para resolver este problema, veamos más de cerca el proceso de elevar al cuadrado; sea el número 47, lo podemos escribir como 40+7, al elevarlo al cuadrado;

$$\begin{array}{r} 40+7 \\ \underline{\times\ 40+7} \\ 280+49 \\ \underline{1600+280} \\ 1600+560+49 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 47 \\ \underline{\times\ 47} \\ 329 \\ \underline{188} \\ 2209 \end{array}$$

Dado que 1600+560+49 = 2209, es lo mismo que;
$(40)^2+2x(40x3)+(3)^2$.

También;

$$(26)^2=(20)^2+2x(20x6)+(6)^2.$$

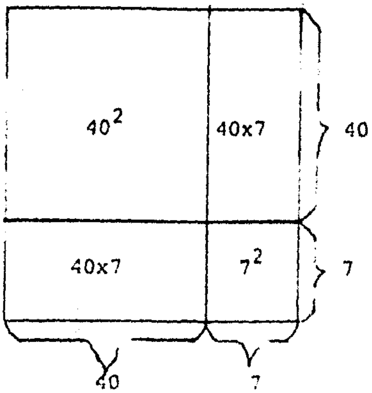
$$(74)^2=(70)^2+2x(70x4)+(4)^2....$$

Lo anterior nos dice que; la suma de dos números, elevada al cuadrado es igual a la suma del primer número, más dos por el producto de los dos números en cuestión, más el cuadrado del segundo número.

Si ahora invertimos el proceso, obtenemos;

$$\sqrt{(40)^2+2x(40x7)+(7)^2} = \sqrt{2209} = 40 + 7 = 47$$

podemos representar gráficamente la situación así:



El área del cuadrado grande es de $40^2+2(40x7)+7^2 + 2209$, luego su raíz cuadrada será la suma de 40 y de 7, esto es 47.

De lo anterior podemos dar un algoritmo para obtener la raíz cuadrada de un número con cierta aproximación;

1º Escribimos el número de marras dentro del símbolo radical; $\sqrt{2209}$.

2º Se divide al número en períodos de dos cifras de derecha a izquierda; $\sqrt{22,09}$, como puede verse, la división en períodos se marca con comas.

3º A continuación se obtiene la raíz cuadrada; exacta o menor del primer período, en este caso 4. Se escribe esta primera cifra en una raya horizontal trazada al lado derecho del radical; $\sqrt{22,09}\big|\,\underline{4\quad}$

4º Se eleva al cuadrado esa cifra y se coloca bajo el primer período para restarselo; $\begin{array}{r|l} \sqrt{22,09} & \underline{4\quad} \\ -\underline{16} & \\ 6 & \end{array}$.

5º se baja el siguiente período, y se multiplica por dos la cifra de la raíz, y se escribe en otra línea horizontal, afuera y abajo de la línea ya trazada; $\begin{array}{r|l} \sqrt{22,09} & \underline{4\quad} \\ -\underline{16} & \\ 6\ 09 & \underline{8\quad} \end{array}$.

6º Se le suma a ésta cifra un número que al multiplicarlo por la suma obtenida, nos de algo cercano y menor al residuo dentro del radical. Para acercarnos a ese número, se sugiere dividir el número compuesto por las dos primeras cifras del residuo dentro del radical, por la cifra afuera y abajo del radical, en este caso; $\frac{60}{8} = 7$, al sumarlo se tiene;

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{22,09} & \underline{4\ \ } \ . \\ \underline{-16} & \\ 6\ 09 & \underline{87\ } \end{array}$$

7º Se multiplica la suma por el número encontrado;

$$\begin{array}{r} 87 \\ \underline{\times\ 7} \\ 609 \end{array}$$

, y el resultado se resta del residuo dentro del radical:

$$\begin{array}{rl} \sqrt{\overline{22,09}} & \underline{4\ \ } \ . \\ \underline{-16} & \\ 6\ 09 & 87 \\ \underline{-6\ 09} & \\ -- & \end{array}$$

8º En el caso de que haya podido restarse propiamente, (esto es, que el sustraendo sea menor que el minuendo), se sube la cifra que previamente se sumó. Al número de la derecha del radical, 7, a la primera línea horizontal;

$$\begin{array}{rl} \sqrt{\overline{22,09}} & \underline{47\ } \\ \underline{-16} & \\ 6\ 09 & \underline{87\ } \\ \underline{-6\ 09} & \\ -- & \end{array}$$

, en caso de que el sustraendo sea mayor, se deberá disminuir la cifra sumada a la derecha y repetir el proceso desde el paso 7º.

9º Si aún hubiere períodos, se bajará el siguiente para componer un nuevo residuo dentro del radical, se multiplicará por dos el número del **primer renglón**, y se escribirá en una nueva línea horizontal, afuera del radical a la derecha y abajo de la anterior, procediendose como antes, a partir del paso sexto, hasta que se acaben los períodos.

Criterios de Divisibilidad.

Decimos que un número natural es divisible entre otro, si al efectuar la división el residuo es cero. Otra manera de decirlo es que un número $n \in N$ es divisible entre otro número $q \in N$, si y sólo si existe un tercer número $r \in N$ tal que n es el resultado de multiplicar q por r, esto es $n= qr$, ejemplos; 39 es divisible entre 13, pues 39= 13x3. 63 es divisible entre 9 porque 63= 9x7.

Los dígitos pares son 0, 2,4,6,8, los numeros que terminan en cero son multiplos de 10, un numero natural de i cifras se escribe; $d_i \times 10^{i-1} + d_{i-1} \times 10^{i-2} + \ldots + d_3 \times 10^2 + d_2 \times 10 + d_1$ donde $d_1, d_2, \ldots, d_i$ son dígitos es decir 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0.

Un número es divisible entre dos si termina en par.

Todo número natural n, que termina en cero o cinco es múltiplo de cinco, pues supongamos que n termina en cero, $n= d_i \times 10^{i-1} + \ldots + d_2 \times 10$ de aquí $n=10(d_i \times 10^{i-2} + \ldots + d_2)$, y $n= 5 \cdot 2(d_i \times 10^{i-2} + \ldots + d_2)$ luego n es múltiplo de cinco. Si n termina en 5 entonces; $n= d_i \times 10^{i-1} + \ldots + d_2 \times 10+5$, por esto; $n= 10(d_i \times 10^{i-2} + \ldots + d_2)+5$ de lo cual, $n=5(2(d_i \times 10^{i-2} + \ldots + d_2)+1)$, y también en este caso n será múltiplo de cinco.

Un número es divisible entre cinco si termina en cero o cinco

Como 10= 9+1 cualquier número d_2 de decenas $d_2 \times 10$ es el mismo número de novenas $d_2 \times 9$ más el mismo número de unidades, $d_2 \times 10= d_2 \times 9 + d_2$, ejemplo cinco decenas es 5x9+5, o 50= 5x9+5, como 100= 99+1, cualquier número d_3 de centenas, $d_3 \times 100$ es el mismo número d_3 múltiplicado por 99, (esto es $d_3 \times 99$ más el número en cuestión), d_3, así 600= 6x99+6, 700= 7x99+7, de manera análoga 3000= 3x999+3, lo mismo ocurre con las decenas de millar, centenas de millar, etcétera, como 9,99, 999 son múltiplos de nueve, un número cualquiera es igual a un número múltiplo de 9 más la suma de sus cifras; luego; un número es divisible entre nueve si la suma de sus cifras es divisible por nueve.

De manera similar como todo número es igual a un múltiplo de tres másla suma de sus digitos, un número natural es divisible entre tres si la suma de sus dígitos lo es, ejemplos; 7362, es divisible entre tres pues 7+3+6+2 = 18, y 18 es divisible entre tres, 7362= 3x 2454, 24584 es divisible entre tres, pues 2+4+6+3+4=24, y 24 es divisible entre tres.

En efecto; 40 = 4x(3x3) + 4, 80 = 8x(3x3) + 8, así cualquier número "d_2" de decenas, es ese número de veces (3x3), mas el número en cuestión también, como 100 = 1x(3x3)x10 + (3x3) + 1, cualquier número d_3 de centenas es ese número de veces (3x3)x10 + (3x3) + d_3, como (3x3)x10 + (3x3), es múltiplo de tres; de manera semejante, también se puede ver que los millares son una expresión parecida, se tendrá en efecto la regla anterior.

Ejercicios; escribir dos números divisibles entre tres, de cuatro cifras, y dictarselos a tus compañeros de equipo, cuatro, para que apliquen el criterio respectivo. Este ejercicio es básico para que comprendas la aplicación de los criterios, por eso te recomendamos que hagas lo mismo con todos los demás criterios, ya que si te equivocas al aplicarlos, tus compañeros te corregirán y tu a ellos.

Números Primos.

Un número $p \neq 1$, es primo si solamente es divisible por si mismo y por uno, los primeros números primos son; 2,3,5,7,11, 13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97.

Para saber si un número es primo, se divide entre los números primos menores que él, si no es divisible entre ninguno de ellos, entonces es primo.

El procedimiento anterior se puede acortar si sólo se divide el número entre los números primos menores que su raíz cuadrada, la prueba de que este procedimiento es correcto se deja para el álgebra, en el segundo curso, ejemplo: ¿será primo el número 187?como la raíz cuadrada de 187 es un número mayor que 13 y menor que 14, pues $13^2 = 169$ y $14^2 = 196$, los números primos por los que debemos dividir 187 son: 13,11,7,5,3,2, pero $187 = 13 \times 14 + 5$, y $187 = 11 \times 17$, no es primo, pues es divisible entre 11 si un número no es primo se dice que es compuesto.

Ejercicio; hacer la lista de los números pares de 2 a 1024 marcar con un circulo los que sean cuadrados de números enteros y escribirlos aparte, ¿sus raíces cuadradas son pares?

Una proposición que consideremos válida la llamaremos axioma. Si a partir de un conjunto de axiomas deducimos por medio de las reglas de inferencia, otra proposición, esta proposición se llama teorema y el procedimiento de deducción lo llamaremos demostración.

El llamado teorema fundamental de la aritmética dice que todo número natural puede escribirse como múltiplo de potencias de números primos y que dicha expresión es única, este teorema no será probado en estas notas, pero nos basaremos en él para lo que sigue:

Para encontrar los número primos que multiplicados nos dan un número natural dado, usamos un procedimiento para descomponer el número en sus factores primos, ejemplo, descompondremos 5880 en sus factores primos; para ello trazaremos una recta vertical a la derecha del número; 5880 | , después

Paso 1) dividimos el número entre el número primo más pequeño que lo divida, colocando el primo a la derecha de la línea trazada, y el cociente abajo del número de marras;

5880	2
2940	

, repetimos el procedimiento desde el paso 1 sustituyendo el número por el cociente, hasta que quede como cociente el número uno

5880	2
2940	2
1470	2
735	3
245	5
49	7
7	7
1	

de tal manera que $5880 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2$

Otros ejemplos;

18900	2
9450	2
4725	3
1575	3
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

$18900 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7.$

26411	7 ,	$26411 = 7^4 \times 11.$	87846	2,	$87846 = 2\times3\times11^4.$
3773	7		43923	3	
539	7		14641	11	
77	7		1331	11	
11	11		121	11	
			11	11	
			1		

Dados dos números naturales cualquiera $n, m, \in \mathbb{N}$, los números que sean múltiplos de n y de m, se llaman múltiplos comunes, - de n y de m.- algunos de ellos son; nm, 2nm, 3nm,..., por ejemplo; 42, 28, tienen por multiplos comunes, entre otros, a ; 42x28= 1176, 2x42x28= 2352 3x42x28= 3528, 4x42x28= 4704,...., de todos estos múltiplos comunes, hay algunos más pequeños que los demás por ejemplo, 588 es menor que 1176 y es múltiplo común de 42 y 28, pues 588= 42x14, y 588= 28x21, al menor de estos múltiplos comunes se le llama mínimo comun múltiplo y se abrevia m.c.m., el procedimiento para obtenerlo será;* encontramos los factores primos de ambos números,

42	2		28	2
21	3		14	2
7	7		7	7
1			1	

escribimos ambos números en forma de múltiplos se potencias de primos; $42= 2\times3\times7$, $28= 2^2\times7$, seleccionaremos la potencia mayor de dada primo, en caso de que un número primo no aparezca como factor en ambos, se tomará la que aparece en el otro.

Así la mayor de las potencias de 2 es 2 ya que en 28 aparece 2^2, y en 42 esta 2, tres no aparece como factor en 28, pero si en 42, y finalmente siete está a la misma potencia en ambos productos, luego el m.c.m. de 42 y 28 será $2^2\times3\times7= 84$, de la observación de la multiplicación de primos se ve que en efecto es multiplo de ambos; $\frac{84}{42} = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 7}$, el, cociente

* En el apéndice uno se puede ver una demostración de que este procedimiento permite obtener el mínimo común múltiplo.

es dos, y $\frac{82}{28} = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2^2 \times 7}$, el cociente es tres. Obtengamos el m.c.m de 315 y 675; sus factores primos serán:

$$\begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 675 & 3 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

esto es, $315 = 3^2 \times 5 \times 7$ y $675 = 3^3 \times 5^2$, luego su m.c.m. será $3^3 \times 5^2 \times 7 = 4725$, en efecto $\frac{4725}{315} = \frac{3^3 \times 5^2 \times 7}{3^2 \times 5 \times 7}$ el cociente es 3×5, o $4725 = 315 \times 15$, por otra parte; $\frac{4725}{675} = \frac{3^3 \times 5^2 \times 7}{3^3 \times 5^2}$, este cociente es 7, luego $4725 = 675 \times 7$, más ejemplos; 1715, 6125, su factorización será:

$$\begin{array}{r|l} 1715 & 5 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6125 & 5 \\ 1225 & 5 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

luego $1715 = 5 \times 7^3$ y $6125 = 5^3 \times 7^2$, el m.c.m. de 1715 y 6125 será; $5^3 \times 7^3 = 42875$. La pareja 1936, 5324;

$$\begin{array}{r|l} 1936 & 2 \\ 968 & 2 \\ 484 & 2 \\ 242 & 2 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5324 & 2 \\ 2662 & 2 \\ 1331 & 11 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

, esto es,

$1936 = 2^4 \times 11^2$, $5324 = 2^2 \times 11^3$, luego el m.c.m. de 1936 y 5324 es; $2^4 \times 11^3 = 21296$.

ejercicio; escribe dos números de a los más tres cifras, - hasta centenas-, y dictaselos a tus compañeros de equipo, y que ellos te dicten dos números cada quien, obtengan los m.c.m., compáren los después, recuerden que un numero es primo si no es divisible entre los primos menores que su raíz cuadrada.

Dado dos números naturales existiran otros números que los dividan a ambos. De entre ellos uno será el mayor, a este número le llamaremos; máximo común divisor, abreviando m.c.d. para obtenerlo, se obtienen los factores primos, y se eligen sus menores potencias, y se multiplican para obtener el m.c.d.

Ejemplo; obtendremos el m.c.d., de: 42 y 28, recordemos que $42 = 2\times3\times7$, $28 = 2^2\times7$, luego su m.c.d., será $2\times7 = 14$, así $\frac{42}{14} = \frac{2\times3\times7}{2\times7}$, el cociente será 3, luego $42 = 14\times3$; $\frac{28}{14} = \frac{2^2\times7}{2\times7}$ su cociente es 2, por lo tanto $28 = 14\times2$. Otro ejemplo; el m.c.d. de 315 y 675, como $315 = 3^2\times 5 \times 7$ y $675 = 3^3\times 5^2$, entonces su m.c.d. sera $3^2\times5=45$, así; $\frac{315}{45} = \frac{3^2\times 5 \times 7}{3^2\times 5}$ el cociente es siete, luego $315 = 45\times7$. y $\frac{675}{45} = \frac{3^3\times 5^2}{3^2\times 5}$ el cociente es $3\times5=15$, de donde; $675 = 45\times15$. Obtengamos el m.c.d., de 1715, 6125, se tiene; $1715 = 5 \times 7^3$, $6125 = 5^3\times 7^2$, su m.c.d. será $5\times7^2=245$.

De 1936, 5324, su factorización es; $1936 = 2^4\times11^2$ y $5324 = 2^2\times11^3$ su m.c.d. es ; $2^2 \times 11^2 = 484$ Un ejemplo más; sean 57122 y 26624, su factorización será

57122	2
28561	13
2197	13
169	13
13	13
1	

26624	2
13312	2
6656	2
3328	2
1664	2
832	2
416	2
208	2
104	2
52	2
26	2
13	13
1	

luego; $57122 = 2\times13^4$ y $26624 = 2^{11}\times 13$. su m.c.d. será $2\times13=26$.

Un resultado interesante, es que el m.c.m. por el m.c.d.

es el producto de los dos números así $315 \times 675 = 4725 \times 45$, en efecto $315 \times 675 = 212625$, y $4725 \times 45 = 212625$.

Ejercicio: Escribe en tu cuaderno los números de tres cifras y díctaselos a tus compañeros de equipo, escribe las parejas de números que te dicten y obtengan los m.c.d. de cada pareja de números.

Efectua un análisis en tu equipo de la afirmación de que el m.c.d. por el m.c.m. de los números es igual al producto de ellos, escriban los números del ejemplo como producto de potencias de primos y escriban su producto. Hagan lo mismo con el producto del m.c.d. y del m.c.m. como producto de potencias de primos, ¿ Deducen algo de esto ?, una discusión más formal se verá en - álgebra.

Números Enteros.

Los números enteros son los enteros positivos, el cero y los enteros negativos; se usa Z, para designar el conjunto de los enteros, esto es $\mathbb{Z} = \{\ldots,-n-1,-n,-n+1,\ldots,\ \ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$, si n es un número entero positivo, su simétrico será -n, y se caracteriza porque $n+(-n)=0$, el simétrico de 6, es -6, porque $6+(-6)=0$, el simétrico de -8 será $-(-8)$ y como $-8+(-(-8))=0$, entonces $-(-8)$ deberá ser 8, así $-8+(-(-8))=-8+8$, en general, $-(-n)=n$.

En un edificio de la ciudad de México se lee en el indica dor del elevador: E2 E 1, PB, 1^er^Piso, 2o Piso, donde E2 significa segundo estacionamiento, esto lo podríamos escribir como -2,-1,0,1,2.

En países muy fríos el termómetro registra, frecuentemente, temperaturas menores que el cero; -40°, -39°,... ,

En el calendario juliano, el nuestro, se fija el año cero aquel en que nació Jesucristo; luego las fechas anteriores serán negativas. Sócrates nació en el año- 470 y murió en -399.

. Cuando se mide la altura de una montaña, se le relaciona con el nivel del mar, el Popocatépetl está a más de 5000 metros sobre el el nivel del mar, y las profundidades se miden bajo el nivel del mar, luego, son negativas; la plataforma continental llega hasta -1500 metros.

Podremos representar los números enteros en una recta de manera parecida, así como lo hicimos con los naturales, agregaremos los enteros negativos, llevando la distancia unitaria hacia la izquierda del punto que representa el cero.

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

El orden de los números enteros , es :

$\ldots < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots$ Todo número positivo es mayor que cualquier negativo, el cero es mayor que cualquier número negativo, dados dos números enteros, o son iguales o uno es mayor que otro, a esto se le llama tricotomía, pues si $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces $n<m$, o $n=m$, o $m<n$.

Si $l, n, m \in \mathbb{Z}$, y $l<n$, $n<m$, entonces $l<m$.

Ejercicio 1 : escribe, en orden de menor a mayor, los números 3, 0, 2, -1, -10, 5, -20.

Ejercicio 2 : escribe adelante de cada expresión si es falsa o verdadera

$0<1$
$-1<0$
$-7<-8$
$-5<-3$
$-3<5$
$5<-6$

Ejercicio 3: en una cartulina dibuja la escala de temperaturas Celsius, ¿ que condiciones físicas se tomaron para determinar el cero en la escala?.

Valor absoluto.

Definimos el valor absoluto de un entero como la magnitud del mismo sin el signo. esto es, el valor absoluto de m, simbólizado Será m, si m es positivo y -m si es negativo; así ,

$|5| = 5$, $|3| = 3$, $|0| = 0$, $|-1| = 1$, $|-10| = 10$, $|-17| = 17$. Escribe más ejemplos de valor absoluto y discutelo con tus compañeros.

Para sumar enteros, si son positivos, se suman como los naturales y el total será positivo.

Si son positivos y negativos, se suman los positivos y aparte los negativos, luego se resta la suma menor de la mayor y el resultado llevará el signo de la cantidad mayor, si todos son negativos, se suman y la suma será negativa, Ejemplos:

-13, 15,2,-3,-8,4, se suman aparte

$$\begin{array}{r} -13 \\ -3 \\ -8 \\ \hline -24 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ 2 \\ 4 \\ \hline 21 \end{array}$$

se restan los totales,

$$\begin{array}{r} -24 \\ 21 \\ \hline -3 \end{array}$$

la diferencia resultante lleva el signo del mayor.

15,1000, 123,

$$\begin{array}{r} 15 \\ 1000 \\ 123 \\ \hline 1138 \end{array}$$

-7, -8, -9, - 1002, - 143,

$$\begin{array}{r} -7 \\ -8 \\ -9 \\ -1002 \\ -143 \\ \hline -1169 \end{array}$$

Propiedades de la suma de enteros; es asociativa pues $5+(-3-2) = (5+(-3))-2$. En efecto, $5+(-5) = 2-2$; en general, si $l, n, m \in \mathbb{Z}$, $l+(n+m)=(l+n)+m$.

Es conmutativa; $-3+(-5) = -5+(-3)$, $0+(-3)= -3+0$. $6+0= 0+6$; generalizando, si $l, n \in \mathbb{Z}$, entonces, $l+n= n+l$.

Tiene un idéntico, que es el cero:

$5+0=5$, $-3+0=-3$.

Cada entero tiene simétrico; esto es, un elemento que, sumados, dan el idéntico; el simétrico de -7 es 7 pues $-7+7=0$, el de 15 es -15, ya que $15+(-15)=0$.

En general, si $n \in \mathbb{Z}$, existe $-n$, tal que $n+(-n)=0$.

Además si $l, n, m \in \mathbb{Z}$, y $l+n= l+m$, entonces $n=m$, y también si $l+n= m+n$, entonces $l=m$.

Para multiplicar números enteros se multiplican sus valores, el signo que llevarán corresponde a las siguientes reglas; más por más da más, más por menos da menos, menos por más da menos, y menos por menos da más;* esto lo podemos visualizar con una tabla:

$$\begin{aligned} (+)(+) &= + \\ (+)(-) &= - \\ (-)(+) &= - \\ (-)(-) &= + \end{aligned}$$

Ejemplos: $(3)(5) = 15$, $(8)(-7)= -56$, $(-9)(6)= -54$, $(-5)(-2)=10$.

La multiplicación de enteros es conmutativa, $(3)(5)=(5)(3)$, $(8)(-7)=(-7)(8)$, $(-9)(6)=(6)(-9)$, $(-5)(-2)=(-2)(-5)$ y, en general, si $l, n \in \mathbb{Z}$, entonces, $(l)(n)=(n)(l)$.

El producto de enteros es asociativo, ya que $3x(6x9)= (3x6)x9$. En efecto, $3x(54)=(18)x9$, $8x(7x(-6))=(8x7)x(-6)$, ya que $8x(-42)= 56x(-6)$, $(-5)x((-2))x(-3))=((-5)x(-2))x(-3)$; generalizando, si $l, n, m \in \mathbb{Z}$, $l \times (n \times m)=(l \times n) \times m$.

* Para una explicación de la regla de los signos, ver el apéndice tres.

Existe el idéntico multiplicativo que es el uno: $1 \times 7 = 7$, $1 \times (-8) = -8$, y si $n \in Z$, $1 \times n = n$.

En los enteros vale la propiedad distributiva; $3 \times (-5+6) = 3(-5) + 3(6)$, $(-8) \times (-7-9) = (-8)(-7) + (-8)(-9)$; en general, si $l, n, m \in Z$, $l \times (n+m) = l \times n + l \times m$.

Si $l, m \in Z$ con $l \neq 0$ y $l \times n = l \times m$, entonces, $n = m$; igual que si $n \times l = m \times l$, entonces $n = m$.

Además $0 \times n = 0$, para todo entero n.

Escribe dos ejemplos de cada propiedad para los enteros:

conmutatividad de la adición;

conmutatividad de la multiplicación;

asociatividad de la adición;

asociatividad de la multiplicación;

existencia del idéntico aditivo:

existencia del idéntico multiplicativo:

existencia del simétrico aditivo:

distributividad :

¿Será cierto que $0 \times (-3) = (-3) \times 0$? ____________

SI/NO

¿Porqué? ____.

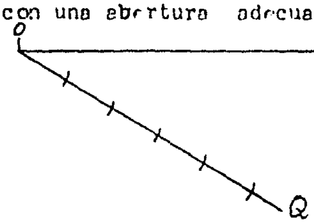
Números Racionales.

Los números racionales se pueden escribir como quebrados, $\frac{p}{q}$ con p, entero, q natural y q diferente de cero. O como decimales, ejemplos; [illegible], .. 66.6666..., 15.333....

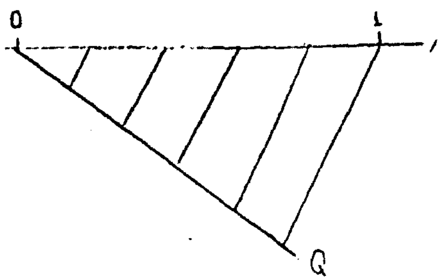
Denotaremos por Q el conjunto de los números racionales, luego; $Q=\left\{\frac{p}{q} \text{ con } p\in Z, q\in N, q\neq 0\right\}$ el entero que escribimos sobre la raya de quebrado se llama, numerador, p, el de abajo de la raya se llama denominador, q.

Para saber cuando es menor un quebrado que otro, si tienen el mismo denominador, se comparan sus numeradores, por ejemplo $\frac{1}{3} < \frac{2}{3}$, $\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$, esto es si los denominadores son iguales un quebrado es menor que otro si su numerador es menor, más ejemplos; $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$, $\frac{2}{7} < \frac{9}{7}$.

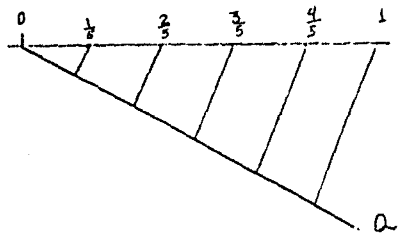
Para representar geométricamente un quebrado en la recta numérica; dividimos el segmento que representa la unidad,- el segmento que va del punto que representa al cero al punto que representa al uno-, en q partes iguales, supondremos que q=5, para ello trazaremos una recta auxiliar $\overline{OQ}$ como se ve en el diagrama a partir de cero trazamos en ella q partes iguales, en este caso cinco, con una abertura adecuada del compas,



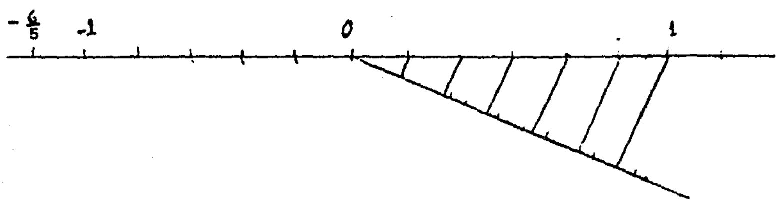
unimos el ultimo punto trazado con el compas con el punto uno, y trazamos paralelas a esta recta que unan los puntos localizados con el compas y la recta numérica:



Los puntos en que corten las paralelas a la recta numérica representan respectivamente y de izquierda a derecha; $\frac{1}{q}$, $\frac{2}{q}$, $\frac{3}{q}$, ..., en este ejemplo $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, y el 1, que sería $\frac{5}{5}$,



Claro que una vez obtenida la longitud del segmento $\frac{1}{q}$, podemos localizar el punto correspondiente a $\frac{p}{q}$, transladando al segmento $\frac{1}{q}$, p veces a partir del punto cero, ejemplo; sea $\frac{p}{q} = -\frac{6}{5}$, entonces, luego de obtener el segmento $\frac{1}{5}$, lo llevaremos a la <u>izquierda</u> con el compas seis veces, pues es negativo.



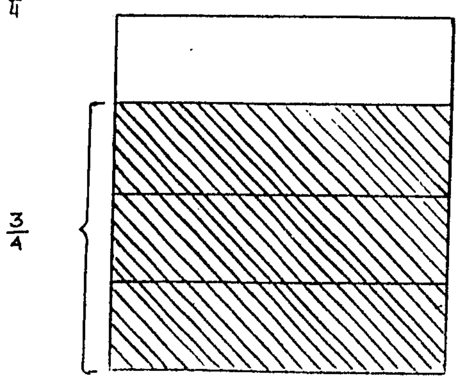
Los enteros se pueden considerar como los racionales con un denominador igual a uno, así $\frac{0}{1} = 0$, $\frac{1}{1} = 1$, $-\frac{1}{1} = -1$,

$\frac{2}{1} = 2$, $-\frac{2}{1} = -2$, $\frac{3}{1} = 3$, ...

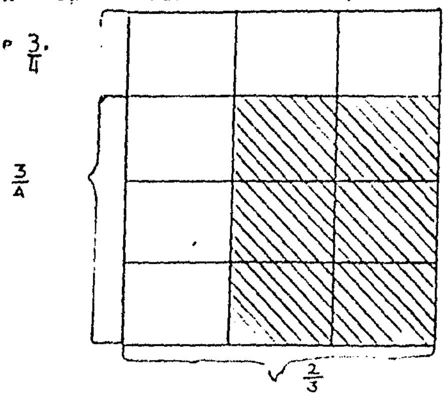
Ejercicio; dividir un cuadrado de carton de doce centímetros por lado, en tres rectángulos iguales y recortarlo. Hacer lo mismo con cuadrados de carton para obtener; dos rectángulos iguales, cinco rectángulos iguales, siete rectángulos iguales.

Dividir cuadrados de cartulina de 12 cms., por lado y uno de 11 rectángulos iguales, otro en 13 rectángulos iguales.

Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplica; numerador por numerador y el producto es el númerador, del resultado, denominador por denominador y el producto es el denominador del resultado, ejemplo; $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{4 \times 3}$, $\frac{3 \times 2}{4 \times 3} = \frac{6}{12}$. gráficamente si tenemos un cuadrado unitario, - de lado uno,- uno de sus lados se divide entre cuatro, al trazar perpendiculares a ese lado en los puntos que los dividen, quedan cuatro rectangulos de área $\frac{1}{4}$, sombreando tres rectángulos juntos queda un área sombreada de $\frac{3}{4}$.



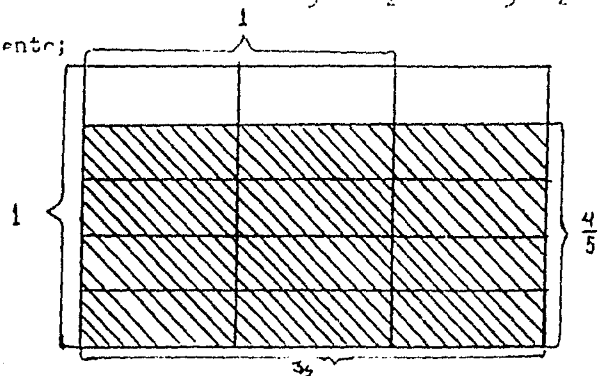
el lado perpendicular al que se dividió en cuatro, se divide en tres y se trazan perpendiculares al mismo, se restringe el area sombreada a $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$.



El área sombreada ilustra la multiplicación de $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$ que es $\frac{6}{12}$.

Más ejemplos multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{2}$, será $\frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{10}$,

graficamente;



el area sombreada tiene en efecto doce rectángulos que son $\frac{1}{10}$ de la unidad original.

Ejercicio, escribe dos multiplicaciones de quebrados en tu cuaderno y díctaselas a tus compañeros de equipo, que ellos te dicten sus multiplicaciones y resuélvanlas, al terminar comparen sus resultados y corríjanse.

El número uno se puede escribir como $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{5}$, ..., al igual que en los enteros cuando multiplicamos un quebrado $\frac{n}{o}$ por uno, obtenemos otra vez dicho quebrado y como uno lo podemos escribir como un quebrado con el numerador igual a su denominador, resulta que al multiplicar por uno un quebrado $\frac{n}{o}$ multiplicamos numerador y denominador por el mismo número, así $\frac{5}{5} \times \frac{n}{o} = \frac{5n}{5o}$ y el quebrado obtenido $\frac{5n}{5o}$ tiene el mismo valor que el original $\frac{n}{o}$. Dicho de otro modo; cuando multiplicamos el numerador y el denominador por el mismo número, el quebrado obtenido tiene igual valor que el original, ejemplos: $\frac{3}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{6}{10}$, $\frac{7}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{21}{12}$, de lo cual $\frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{3}{5}$, $\frac{3 \times 7}{3 \times 4} = \frac{7}{4}$, el quebrado $\frac{18}{27}$ puede escribirse como $\frac{6 \times 3}{9 \times 3}$, luego $\frac{6 \times 3}{9 \times 3} = \frac{6}{9} \times \frac{3}{3}$ y como $\frac{3}{3} = 1$, se tiene $\frac{6}{9} \times \frac{3}{3} = \frac{6}{9}$, esto es, si dividimos el numerador y el denominador entre el mismo número; el quebrado resultante tiene el mismo valor que el original, ejemplo: $\frac{21}{14} = \frac{\frac{21}{7}}{\frac{14}{7}}$, luego $\frac{21}{14} = \frac{3}{2}$,

Ilustra gráficamente esta afirmación.

Para que un quebrado $\frac{n}{o}$, tenga un denominador r, dividimos r entre o y multiplicamos n y o por el cociente; ejemplos; sea el quebrado $\frac{3}{8}$, si queremos que tenga un denominador 40, dividimos 40 entre 8, el cociente 5 lo multiplicamos por el numerador y por el denominador del quebrado; $\frac{3\times5}{8\times5} = \frac{15}{40}$, el quebrado $\frac{15}{40}$ tiene el mismo valor que $\frac{3}{8}$.

Otro ejemplo; sea el quebrado $\frac{5}{2}$, para que tenga denominador 18, dividimos 18 entre 2, el cociente 9 lo multiplicamos por el numerador y por el denominador, $\frac{5\times9}{2\times9} = \frac{45}{18}$.

Una manera de encontrar un denominador común que resulte el más pequeño, es obtener el mínimo común múltiplo de los denominadores; ejemplo: cambiemos a un denominador común, $\frac{7}{15}$ y $\frac{2}{10}$, $15=3\times5$, $10=2\times5$, el m.c.m. de los denominadores es $2\times3\times5=30$, transformemos los quebrados al denominador 30, $15\overline{)30}$, $\frac{7}{15} = \frac{14}{30}$, $10\overline{)30}$, $\frac{2}{10} = \frac{6}{30}$, y los quebrados equivalentes son: $\frac{14}{30}$ y $\frac{6}{30}$ y ambos tienen común denominador.

Si queremos saber que quebrado es más grande, cuando tienen diferentes numeradores y denominadores, los transformaremos en sus quebrados con denominador común.

Para sumar quebrados, los cambiamos a un denominador común, se suman los numeradores, tomando en cuenta su signo. Ejemplo, $\frac{7}{20} + \frac{4}{50}$, como $20=2^2\times5$ y $50=2\times5^2$, el m.c.m. es $2^2 \times 5^2 = 100$, luego por el i-ésimo paso $20\overline{)100}^{\,5}$ $\frac{7\times5}{20\times5} + \frac{4\times2}{50\times2}$ pues $50\overline{)100}^{\,2}$, de lo cual $\frac{35}{100} + \frac{8}{100} = \frac{43}{100}$, otro

* Siempre que el m.c.d. de q y r no sea uno. Si lo es, se dice que q y r son primos relativos. En lo que sigue, se supone que no lo son.

ejemplo; $\frac{2}{26} + \frac{-5}{39}$. Ya que: $26=2\times13$ y $39=3\times13$, el m.c.m. de 26 y 39 es $2\times3\times13=78$. Se convierten los quebrados al denominador 78; $26\overline{)78}$, $\frac{2\times3}{26\times3} - \frac{5\times2}{39\times2}$, pues $39\overline{)78}$, de esto, $\frac{6-10}{78} = -\frac{4}{78}$.

Ejercicio: realice dos sumas de quebrados en tu cuaderno, díctaselas a tus compañeros de equipo y que ellos a su vez te dicten las que escribieron resuélvanlas todos y comparen sus respuestas, ayúdense a evitar errores.

Ejercicio: discutir el procedimiento para restar quebrados, escribirlo y escribir dos ejemplos. Se discuten en grupo los procedimientos, una vez que se hayan escrito en el pizarrón se decidirá que procedimiento es más apropiado para el grupo.

Ejercicio: en la notación usual encontramos expresiones como: $4\frac{2}{3}$ que quieren decir $\frac{4}{1} + \frac{2}{3}$, o se mezclan enteros con quebrados en distintas operaciones, por ejemplo: $5 - \frac{2}{3}$, $3\frac{7}{[illegible]} \times 2$, $5 \times \frac{2}{7}$, $\frac{3}{4} \times \frac{1}{5}$.

¿Podrían encontrar ejemplos de otras combinaciones? ¿Qué reglas darían para cada caso? escribanlas.

Se define el recíproco de un quebrado como el quebrado que al multiplicarse por el primero nos produce la unidad, tal quebrado es el que resulta al intercambiar el numerador por el denominador*, ejemplo; el recíproco de $\frac{3}{5}$ es $\frac{5}{3}$, ya que $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{3\times5}{5\times3}$ $\frac{3\times5}{5\times3} = \frac{15}{15} = 1$, más ejemplos; el recíproco de 5 es $\frac{1}{5}$, el recíproco de $-\frac{3}{2}$ es $-\frac{2}{3}$

* **Si el numerador tiene signo negativo entonces el numerador del recíproco también lo tendrá, siendo su denominador un número natural.**

pues $\frac{-3}{2} \times -\frac{2}{3} = \frac{6}{6}$ y como $\frac{6}{6} = 1$, se deduce que en efecto $-\frac{2}{3}$ es el recíproco de $-\frac{3}{2}$. En general, dado un quebrado $\frac{p}{q}$, su recíproco es $\frac{q}{p}$.

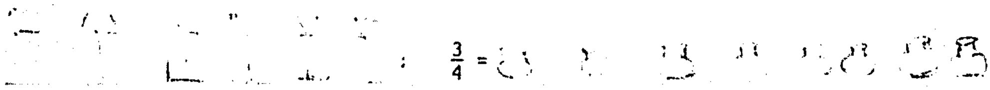
Para dividir un quebrado $\frac{p}{q}$ entre otro $\frac{r}{s}$, bastará multiplicar el primero por el recíproco del segundo.

En efecto un quebrado indica una división, en que el numerador es el dividendo y el denominador es el divisor. Si multiplicamos seis por el recíproco de tres, $\frac{1}{3}$, obtenemos lo mismo que si hubieramos dividido seis entre tres, pues $6\times\frac{1}{3} = \frac{6}{3}$ y seis entre tres es dos. Al multiplicar diez por el recíproco de cinco se obtiene $10\times\frac{1}{5} = \frac{10}{5}$, cuyo cociente es dos, este cociente es el mismo resultado que hubiéramos obtenido dividiendo diez entre cinco, más ejemplos pueden citarse, pero con estos bastan para darnos cuenta de que al multiplicar un número r, racional, por el recíproco de otro s, se obtiene el mismo resultado que al dividir r entre s, en símbolos $r(\frac{1}{s}) = \frac{r}{s}$.

De lo anterior se tiene; $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \times \frac{s}{r}$, donde el símbolo : significa división, y se lee; "entre". O expresado con una egla equivalente, multiplicamos en cruz, esto es, el numerador del dividendo por el denominador del divisor, el producto es el numerador del cociente. El denominador del dividendo por el numerador del divisor, este producto es el denominador del cociente; $\frac{p}{q} \quad \frac{r}{s} \quad \frac{ps}{qr}$. Ejemplo; $\frac{5}{3} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{5\times 7}{3\times 2}$ o bien; $\frac{5}{3} : \frac{2}{7} = \frac{5}{3} \times \frac{7}{2}$ y así $\frac{5}{3} : \frac{2}{7} = \frac{35}{6}$.

Una ilustración física de la división entre quebrados es: dividir seis litros de crema en frascos de tres cuartos de de litro , ¿ Cuantos frascos se necesitan ? la división en cruz nos dice que $\frac{6}{1} : \frac{3}{4} = \frac{24}{3} = 8$

esto es, ocho frascos; el cociente es más grande que el dividendo, pues el divisor tres cuartos es menor que la unidad (cuatro cuartos),en efecto el cociente ocho se refiere a a los frascos de crema .



Ejercicio: Discute con tus compañeros de equipo (cuatro), ¿cómo se harían las operaciones siguientes?

$$3:\frac{2}{9},\ \frac{3}{5}:4,\ 1:\frac{3}{11},\ 1:\frac{2}{7},\ 1:(\frac{-3}{4}),\ \frac{-3}{7}:\frac{2}{5}.$$

Escribe las reglas correspondientes a cada caso, compáralas con las de tus compañeros.

Potencia

Al efectuar las divisiones $\frac{1}{1} \div \frac{2}{7}$, $\frac{1}{1} \div \frac{3}{11}$, $\frac{1}{1} \div \left(\frac{-3}{4}\right)$ $\frac{1}{1} \div \frac{2}{1}$, $\frac{1}{1} \div \frac{1}{2}$, nos damos cuenta que lo que resulta es el recíproco del divisor, y como $\frac{1}{1} = 1$, inferimos que $\frac{1}{\frac{n}{c}}$ es igual al recíproco del quebrado denominador. Definimos $\left(\frac{n}{c}\right)^{-1}$ como $\frac{1}{\frac{n}{c}}$ con $n \neq 0$ y $c \neq 0$, o lo que es lo mismo $\left(\frac{n}{c}\right)^{-1} = \frac{c}{n}$, ejemplo; $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{2}$, $\left(\frac{3}{11}\right)^{-1} = \frac{11}{3}$

$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1} = -\frac{4}{3}$, $(3)^{-1} = \frac{1}{3}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $(-1)^{-1} = -1$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} = -\frac{3}{2}$.

Las multiplicaciones $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2\times2\times2\times2}{5\times5\times5\times5}$ se pueden escribirse como $\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4}$ esto es, la n-potencia de un quebrado es el numerador a la n-potencia entre el denominador a la misma n-potencia, en general $\left(\frac{r}{s}\right)^n = \frac{r^n}{s^n}$, ejemplos; $\left(\frac{2}{7}\right)^8 = \frac{2^8}{7^8}$, $\left(-\frac{5}{7}\right)^9 = \frac{5^9}{7^9}$, $\left(-\frac{3}{2}\right)^6 = \frac{3^6}{2^6}$, en el último ejemplo el signo negativo desaparece porque la potencia es par. Dado lo anterior resultará que si tenemos un quebrado cuyo numerador y denominador estén elevados a la misma potencia, n, entonces lo podemos escribir como el quebrado a la misma n-sima potencia, esto es, $\frac{r^n}{s^n} = \left(\frac{r}{s}\right)^n$, ejemplos; -- $\frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$, $\frac{625}{81} = \left(\frac{5}{3}\right)^4$.

Como $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$ y esto resulta $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3^2}{2^2}$, por lo anterior $\frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, pero esto es $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{(-1)\times2}$ multiplicando los exponentes $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1\times2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, dicho de otro modo; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$, de manera parecida $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}$ y en general $\left(\frac{r}{s}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{r}{s}\right)^n}$.

Los números enteros tienen una expresión desarrollada como suma de múltiplos de potencias de diez, los números que se encuentran entre un entero y su sucesor tendrán también una expresión como suma de múltiplos de potencias de diez, por ejemplo 58.374, su parte entera, a la izquierda del punto decimal es 58 y se escribe $5\times10+8$, su parte menor que un entero es .374 y se desarrolla así, $3\times10^{-1} + 7\times10^{-2} + 4\times10^{-3}$, si recordamos que $10^{-1} = \frac{1}{10}$,

$10^{-2} = \frac{1}{10}$ y $10^{-3} = \frac{1}{1000}$, se tiene que $.374 = \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{4}{1000}$, esto es, tres décimas más siete centésimas más cuatro milésimas partes de un entero, esto último sugiere un procedimiento para convertir números decimales a quebrados. - Escríbelo y discútelo en tu equipo.

El procedimiento de convertir quebrados a decimales, consiste en dividir el numerador entre el denominador escribiendo un punto decimal a la derecha de la cifra en que termina ese numerador y agregándole tantos ceros a la derecha de ese punto como se necesiten para lograr la aproximación deseada, ejemplo $\frac{373}{24}$, hasta diezmilésimas,

```
     15.5416
24 | 373.0000
     133
      130
       100
         40
        160
         16
```

el punto decimal se coloca en el cociente directamente arriba del lugar que ocupa en el dividendo.

Para sumar decimales se alinean uno bajo otro quedando unidades en una columna, decenas en otra, el punto decimal debe ocupar una columna, ejemplo; sumar - 437.28, 28932.2234, 523762, 1.0834, se colocan uno bajo el otro y se suman;

```
      437.28
+   28932.2234
   523762.
        1.0834
   -----------
   553152.5968
```

Para restar decimales se coloca el sustraendo bajo el minuendo alineando los puntos decimales en columna, ejemplo;

$$\begin{array}{r} 2348.27 \\ -\underline{537.22} \\ 1811.05 \end{array}$$

Para multiplicar decimales, se multiplican como si fueran naturales, se cuentan las cifras significativas a la derecha del punto decimal de los factores y se suman, esta suma será el número de cifras significativas que debe llevar el producto a la derecha de su punto decimal, si no alcanzaran se completarán con ceros a la izquierda, ejemplos; 53.7 x 28.01.

$$\begin{array}{r} 28.01 \\ \times\ \underline{53.7} \\ 19607 \\ 8403 \\ \underline{14005} \\ 1504137 \end{array}$$

como a la derecha del punto decimal hay dos cifras significativas en el primer factor y una en el segundo, el producto llevará dos más una cifras significativas a la derecha del punto decimal; 1504.137.

Para dividir decimales,* si el divisor tiene cifras significativas a la derecha del punto decimal se correrá el punto decimal del dividendo a la derecha el mismo número de cifras en ambos, y si hubiera cifras significativas a la derecha del punto decimal del dividendo, después de esto, se colocará en el cociente, antes de bajar la primer cifra de los décimos, ejemplo; $22.3\,\overline{)327.834}$ se corre el punto decimal una cifra en el dividendo y en el divisor; $223\,\overline{)3278.34}$, se divide.

* Una explicación del algoritmo de la división, se encuentra en el apéndice dos.

```
       14
223 | 3278.34
     -223
      1048
     -892
       156
```

antes de bajar la cifra correspondiente a los décimos, en este caso el tres, se coloca el punto decimal en el cociente,

```
       14.
223 | 3278.34
     -223
      1048
     -892
       156
```

se continúa con el proceso quedando las demás cifras del cociente a la derecha del punto decimal,

```
       14.25
223 | 3278.34
     -223
      1048
     -892
       156 3
      -44 6
       11 74
      -11 15
          59
```

si se deseare mayor aproximación se agregan tantos ceros al dividendo como cifras significativas se quiera, por ejemplo, si en el caso anterior queremos aproximar hasta diezmilésimos, agregamos dos ceros al dividendo y continuamos el proceso.

```
         14.2526
223 | 3273.3400
     -223
      1046
     - [illegible]
      ----
       [illegible]
      -[illegible]
        11 74
       -11 15
          596
         -[illegible]
          1440
         -1338
           102
```

Para obtener la raíz cuadrada de un número decimal, se divide en períodos de dos cifras, del punto decimal a la izquierda y del punto decimal a la derecha, si el último período de la derecha fuera de una cifra se agregará un cero a la derecha para completarlo, se procede como en el procedimiento de los naturales, pero antes de bajar el primer período a la derecha del punto decimal, escribimos el punto a la derecha de la última cifra encontrada de la raíz, ejemplo: $\sqrt{538.223}$, se divide en períodos $\sqrt{5,38.22,3}$, al último período de la derecha se le completa con un cero; $\sqrt{5,38.22,30}$ se procede,

```
√5,38.22,30 | 23
 -4         |----
  1 38      | 43
 -1 29      |----
     9      |
```

Antes de bajar el período 22, escribimos el punto decimal en el cociente

```
√5,38.22,30 | 23.
 -4         |----
  1 38      | 43
 -1 29      |----
     9      |
```

después de lo cual --

seguimos;
```
 _________________
√5,38.22,30 |23.19
 -4         |______
  1 38      |43
 -1 29      |______
     9 22   |461
   -4 61    |______
    4 61 30 |4629
  -4 16 61  |______
     44 69  |
```

si se deseara mayor aproximación, se agregarán tantos periodos de ceros al radicando como cifras significativas queramos en la raíz, por ejemplo, si deseáramos milésimos en el caso anterior:
```
 ___________________
√5, 38.22,30,00,|23.199.
 -4             |______
  1  38         |43
 -1  29         |______
      9 22      |461
    -4 61       |______
     4 61 30    |4629
   -4 16 61     |______
       44 69 00 |46389
     -41 75 01  |______
        2 93 99 |
```

Los racionales tienen las siguientes propiedades; su suma es conmutativa, asociativa, tiene idéntico aditivo, el cero, y tiene simétrico para cada racional. Su multiplicación es conmutativa, asociativa, tiene idéntico multiplicativo, el uno, y cada racional distinto de cero tiene un recíproco. Además tienen la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.

Ejercicio escribe un ejemplo de racionales que ilustren cada una de las propiedades anteriores, discute con tus compañeros de equipo sus ejemplos.

Números Irracionales.

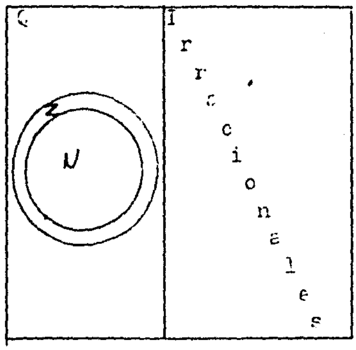
Los números que no pueden escribirse en la forma $\frac{p}{q}$, con $q \neq 0$, $p, q \in Z$, se llaman números irracionales, por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, π, π^2, 3π, $\frac{\pi}{5}$, $5+\pi$, $2\pi^4-3$, en cálculo conocerá otro número que se acostumbra llamar "e", y es la base de los logaritmos llamados naturales o neperianos, en honor a su descubridor.

La demostración de que $\sqrt{2}$ no puede escribirse como $\frac{p}{q}$, es como sigue; supongamos que p, q son enteros a los cuales les hemos quitado los factores comunes, -por ejemplo dividiéndolos entre el m.c.d. de p y de q-, nos quedó entonces una fracción propia, tal que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Multipliquemos ambos miembros de la igualdad por q, $\frac{p}{q}q = q\sqrt{2}$, simplificando, $p = q\sqrt{2}$. Elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad $p^2 = (q\sqrt{2})^2$, como $(q\sqrt{2})^2 = (q\sqrt{2})(q\sqrt{2})$, $q\,q\sqrt{2}\sqrt{2} = q^2\sqrt{2}$ luego $p^2 = q^2\,2$, esto es, p^2 es par y por tanto también p es par, luego existe un número r tal que $p = 2r$, de aquí; $p^2 = 4r^2$, y $4r = 2q^2$, dividiendo entre 2 y simplificando, $2r^2 = q^2$, esto es q^2 es par y por ende q es par, entonces existe un número entero s tal que $q = 2s$, como $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, se tiene $\frac{2r}{2s} = \sqrt{2}$, luego 2 era factor común de p y q, esto contradice que p, q, no tenían factores comunes, luego no existen tales p, q.

Una manera de localizar en la recta numérica el punto que corresponde a $\sqrt{2}$, es con un triángulo rectángulo cuyos catetos tengan medida uno, -valgan uno-, la medida de la hipotenusa es $\sqrt{2}$.

También son irracionales $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$,

$4\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}+3$, $3\sqrt{2}-5$, . . . Dado que; los números naturales son un subconjunto de los números enteros, que los números enteros a su vez son un subconjunto de los números racionales y que los irracionales no son racionales, podemos representar esto gráficamente así;



La unión de los números racionales con los números irracionales se le llama <u>números reales.</u>

<u>Conclusiones</u>

El escrito anterior es un instrumento didáctico, adecuado para el primer curso de matemáticas del autor, si a alguien más le es útil nos sentiremos muy honrados, junto con los que colaboraron para hacerlo con sus sugerencias, correcciones y ayudas. Para la primera parte de modelos matemáticos, sería conveniente conseguir la fotografía de algún pueblito o ciudad pequeña, como Taxco, y otra fotografía de alguna ciudad muy fría, nevada como, Juneau, para evitar que los alumnos se circunscriban en la solución del motociclista y sus tres hermanos, a su medio, que piensen en otras posibilidades para aplicar las matemáticas. Para el problema de los cerillos sería conveniente hacer los seis cerillos de 35 cm. de largo con palos de escoba y pelotas de esponja, impintados, para ejemplificar en el pizarrón el juego, siguiendo a Piaget, sería muy conveniente estimular los intercambios de puntos de vista e información entre los alumnos.

En el tema de lógica, es necesario vencer cierta inercia que se ha observado en los alumnos, se han vuelto reacios a discutir, a exponer sus puntos de vista, algunos ejemplos de deducción e inferencia del tipo;

Cuando llueve se moja la tierra y se abona con los nitritos suspendidos en la atmósfera, si se moja la tierra con la lluvia entonces los árboles dan más frutos y más grandes, luego el precio se abate y las personas pueden comprar y comer mejor. Entonces cuando llueve mejora la alimentación.

Es al alumno a quien corresponde, descubrir y aplicar las reglas de la lógica en discusiones por equipos; que defiendan unos un punto de vista y otros el opuesto, organizados por el maestro, el cual pedirá las reglas del debate a los participantes y velará por su aplicación, nombrará secretarios que tomen nota de los argumentos y al final el grupo analizará los argumentos lógicos, el desarrollo del debate y las conclusiones que obtuvieron los participantes y determinará si concuerdan con la lógica.

Respecto a los conjuntos, se enfocó la participación en la elaboración de problemas, para que sean dictados a sus compañeros de equipo, de ese modo el maestro puede detectar las dificultades que tienen los alumnos.

Apéndice uno.

Dados los números naturales; n,m, decimos que n divide a m, si existe un tercer número natural, k, tal que; m = km.

Sea el número natural p, definiremos p^0 como uno, esto es, el número natural p elevado a la potencia cero es igual a uno; dicho de otro modo, tomar un número natural cero veces como factor, nos da la unidad, (en general, la potencia cero de cualquier número distinto de cero la definimos como la unidad, y consideramos indefinido 0^0).

Si dividimos 100000 entre 100 obtenemos 1000, esto escrito con notación exponencial nos da: $10^2 \overline{)10^5}$ con cociente 10^3, esto es; 10^5 entre 10^2 es igual a 10^{5-2}, también si tenemos 15625 entre 25 nos da; 625, lo cual escrito con notación exponencial es: $5^2 \overline{)5^6}$ con cociente 5^4, o bien; al dividir 5^6 entre 5^2, resulta; 5^{6-2}.

luego para números naturales cualesquiera, n, m, k, con n m, se tiene; k^n entre k^m, es igual a k^{n-m}, de lo anterior se deduce, "naturalmente", que si p es un número natural, y m es menor que n, entonces p^m es divisor de p^n, pues p^m entre p^n, da un cociente; p^{n-m} y n-m es un número natural.

Mínimo Común Múltiplo.

Sean a_1, a_2, números naturales, con $a_1 = P_1^{e_{11}} P_2^{e_{21}} \dots P_j^{e_{j1}} \dots P_k^{e_{k1}}$, y $a_2 = P_1^{e_{12}} P_2^{e_{22}} \dots P_j^{e_{j2}} \dots P_k^{e_{k2}}$, con e_{j1} y e_{j2} mayores o iguales a cero para $j=1,2,\dots,j,\dots,k$. Entonces el mínimo común múltiplo de a_1 y a_2, es igual a $P_1^{g_1} P_2^{g_2} \dots P_j^{g_j} \dots P_k^{g_k}$, donde g_j es el más grande de los números e_{j1}, e_{j2}.

Demostración: Notemos primero que; g_j es el máximo de e_{j1} y e_{j2}, para toda j, entonces $P_1^{g_1} P_2^{g_2} \dots P_j^{g_j} \dots P_k^{g_k}$, es múltiplo

múltiplo de a_1 y de a_2, (pues $P_j^{g_j}$ es divisible por $P_j^{e_{j1}}$ y por $P_j^{e_{j2}}$ siendo sus cocientes $P_j^{g_j - e_{j1}}$ y uno).

Además; un número que sea múltiplo de a_1 y a_2, debe ser de la forma $P_1^{h_1} P_2^{h_2} \ldots P_j^{h_j} \ldots P_k^{h_k}$, donde h_j es mayor o igual a e_{j1} y e_{j2}; para toda j, entonces h_j es mayor o igual que el más grande de e_{j1} y e_{j2}, que es g_j, así $P_1^{g_1} P_2^{g_2} \ldots P_j^{g_j} \ldots P_k^{g_k}$ divide a todo múltiplo común de a_1 y a_2, por lo que es el mínimo común múltiplo de a_1 y de a_2.

De manera semejante se demuestra que el máximo común divisor de a_1 y a_2, es $P_1^{f_1} P_2^{f_2} \ldots P_j^{f_j} \ldots P_k^{f_k}$, donde f_j es el más pequeño de los números e_{j1} y e_{j2}.

Ver la página 157 del libro; The Fundamental Theorem of Arithmetic, de Ross A. Beaumont and Richard S. Pierce, editorial Addison-Wesley. © 1963, U. S. A.

Apéndice dos.

Algoritmo de la división.

Dados dos enteros cualesquiera a, b, con a mayor que cero, existen los enteros q y r, tales que b = qa +r, con 0 menor o igual que r, y r menor que a; si a no divide a b, entonces r satisface las desigualdades; cero menor que r y r menor que q.
La demostración de esta propocición no se verá en este trabajo, en la bibliografía de este apéndice se encontrarán los libros en que puede consultarse. Daremos unos ejemplos; Sea dividir 37 entre ocho, restando el divisor al dividendo obtenemos;
37 - 8 = 29, a esta diferencia le restamos el divisor 29-8 = 21, a esta última le restamos el divisor; 21 - 8 = 13, y a 13 le restamos una vez más el divisor; 13 - 8 = 5, en este punto nos detenemos y advertimos que hemos restado el divisor cuatro veces antes de que ya no pudiera restarse de la última diferencia, que fué cinco.

Es claro que en vez de restar cuatro veces ocho, podemos restar al dividendo el producto 4x8 =8x4, para obtener el residuo, así; 37-8x4 = 5, esto es; 37 = 8x4 - 5.
(dividendo = divisor x cociente + residuo).
En la práctica, para dividir 37 entre 8, hacemos el cálculo mentalmente así; de la tabla de multiplicar recordamos los productos 8x1 = 8, 8x2 = 16, 8x3 = 24, 8 x 4 = 32, 8x5 = 40, donde el primer factor es siempre el divisor. Observamos que 37, (el dividendo), queda comprendido entre los productos 8x4 (=32) y 8x5 (=40), lo que nos dice que el cociente debe ser cuatro. Restamos el producto 8x4 (=32), del divisor por el cociente, y la diferencia (=5), es el residuo.

Lo mismo tendremos para el caso 1878 entre 144. En este caso a 1878 le podemos restar 13 veces el divisor 144, y cómo

1878 - 13x144 = 6, se tiene; 1878 = 144x13 + 6.

La bibliografía apropiada para consultar este tema es:

The Algebraic Foundactions of mathematics, Beaumont and Pierce, edit. Addison Wesley; Págs. 135.

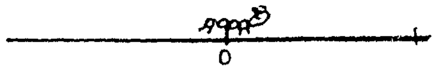
Teoría de los números, de Niven y Zuckerman, edit. limusa, c 1985, México, segunda reimpresión 1985. Págs. 15 a 18.

¿Qué es la matemática? de; Richard Courant y Herbert Robbins, c Aguilar, España 1967. Págs. 50 y 51.

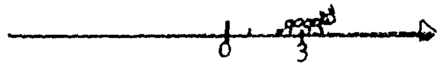
Aritmética Razonada, del maestro; Francisco Zubieta Russi y Sanchez, México 1960, ediciones del autor.

Apéndice Tres

Una manera de explicar la regla de los signos, consiste en considerar la recta numérica como una regla de madera, los enteros : como la distancia recorrida por una hormiga, que se desplaza desde el origen, o punto cero.

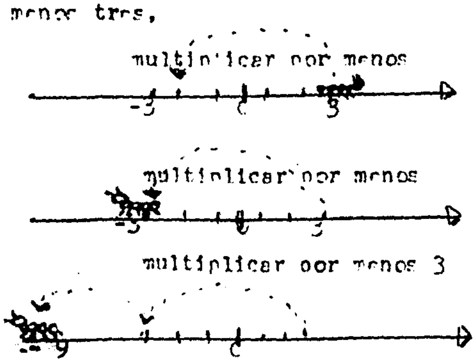


supongamos que la distancia es tres. multiplicar por un número positivo

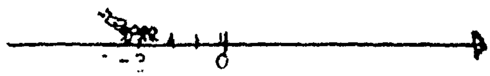


simplemente significará tomar tantas veces la distancia tres como indique el multiplicador y trasladar ahí a la hormiga, así tres por dos será seis;

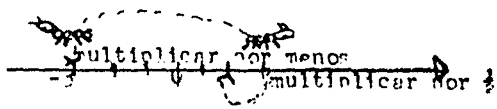
multiplicar por un número negativo equivale a: hacer girar ciento ochenta grados la distancia recorrida por la hormiga alrededor del origen, y trasladar a la hormiga al punto que corresponde a tomar tantas veces la distancia tres como indique el multiplicador, por ejemplo; tres por menos tres,



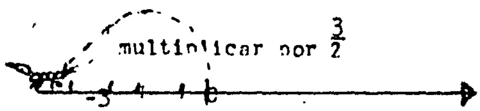
Si la hormiga en lugar de caminar a la derecha, hubiera caminado a la izquierda, se hubiera desplazado hasta el punto - 3 .



Si ahora se multiplicara por - $\frac{1}{2}$; el signo menos equivale a girar la distancia recorrida por la hormiga 180° alrededor del origen, tomar un medio de tres y trasladar ahí a la hormiga;



Por último multiplicar -3 por un número positivo, por ejemplo $\frac{3}{2}$, equivale a tomar la distancia -3, una y media veces, a la izquierda:



Bibliografía.

Básica para el alumno

Modelos matemáticos, Santiago López de Medrano, México © 1972, edit. ANUIES.

Lenguajes Simbólicos, Santiago López de Medrano, México, © 1972, edit. ANUIES.

Gráficas, Santiago López de Medrano, México, © 1972, edit. ANUIES.

Lógica elemental, Gonzalo Zubieta Russi, México © 1973, edit. ANUIES.

Los números Racionales, Francisco Tomas, México © 1972, editorial ANUIES.

Los números Enteros, Alejandro Odgers López, México © 1975, editorial ANUIES.

Los números Reales, Francisco Tomás, México © 1973, edit. ANUIES.

Aritmética, J. E. Thompson, México, © 1967, reimpresión 1975, edit. UTEHA.

Algebra Volumen I, El anillo de los números enteros. Volumen II, El campo de los números racionales. Volumen III, el campo de los números reales. Humberto Cárdenas, Emilio Lluis, Francisco Raggi, Francisco Tomás, México, 1971, edit. Unam.

Teoría de conjuntos, y temas afines, Seymour Lipschutz, México, © 1970, edit. Mc Graw Hill.

Matemáticas contemporáneas, Jack R. Britton e Ignacio Bello, México © 1972, edit. Harla.

Álgebra superior; Hall and Knight, México © 1948, reimpresión 1964, edit. UTEHA. Págs. 67-79, 137-148, 408-411.

Aritmética razonada, Francisco Zubieta Russi y Sanchez, México 1960, ediciones del autor.

De consulta para el alumno.

Aritmética recreativa, Yakov I. Perelman, México, 1975. Ediciónes de Cultura Popular, S.A.,

¿Qué es la Matemática?, Richard Courant y Herbert Robbins, España © 1967, quinta edición, México, 1967, edit. Aguilar.

El abc de la cibernética?, V. Kasatkin, Madrid 1971, edit. Paraninfo.

De consulta para el maestro.

The Algebraic Foundations of Mathematics, Ross A. Beaumont and Richard S. Pierce, U.S.A. © 1963 Edit. Addison Wesley.

Teoría de los números, (introducción a la ...), Niven y Zuckerman, México, © 1985, segunda reimpresión 1985, edit. Limusa.

Recomendada y muy importante para el maestro.

The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren, V. A. Krutetskii, 1976, USA. by the University of Chicago, ©. Páginas; 181-350: "An analysis of the structure of Schoolchildren´s Mathematical Abilities".

Una Didáctica Fundada en la Psicología de Jean Piaget, Hans Aebli, © 1958, Argentina, edit. Kapeluz, octava impresión, noviembre 1973.

La enseñanza de las Matemáticas, Jean Piaget. © Aguilar, España 1971, edit. Aguilar.

El fracaso de la Matemática Moderna, Morris Kline, © 1973, St. Martin´s Press, Nueva York, España 1976, siglo XXI editores, S.A.

Dinámica de Grupos en educación, María Andueza, 1975, México, edit. ANUIES.