



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

MODELACION DE TRANSPORTE DE
CONTAMINANTES EN DOS
DIMENSIONES

TESIS PROFESIONAL
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A :
MA. DE LOS ANGELES DAVILA JAIME



México, D. F.

1988



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

MODELACION DE TRANSPORTE DE CONTAMINANTES EN DOS DIMENSIONES

C O N T E N I D O

1. INTRODUCCION.	1
1.1 DESCRIPCION DEL FENOMENO.	3
1.2 TRANSPORTE.	4
1.3 OBJETIVO.	4
2. METODOS PARA INTERPOLACION EN DOS DIMENSIONES.	5
2.1 INTERPOLACION DE HERMITE EN UNA DIMENSION.	6
2.1.1 ORDEN CERO (LINEAL)	7
2.1.2 PRIMER ORDEN.	8
2.1.3 EJEMPLO. INTERPOLACION DE HERMITE EN UNA DIMENSION.	10
2.2 INTERPOLACION DE HERMITE EN DOS DIMENSIONES.	11
2.2.1 HERMITE DE ORDEN CERO	11
2.2.2 HERMITE DE PRIMER ORDEN	11
2.2.3 EJEMPLO. INTERPOLACION DE HERMITE DE PRIMER ORDEN EN DOS DIMENSIONES.	13
2.3 OBTENCION DE LA DERIVADA CON LA INTERPOLACION DE HERMITE.	16
2.3.1 EJEMPLO. OBTENCION DE LA DERIVADA	21
2.3.2 EJEMPLO. OBTENCION DE LA DERIVADA EN DOS DIMENSIONES.	22

3. DESARROLLO DEL MODELO.	32
3.1 ECUACION EN FORMA CARACTERISTICAS.	32
3.2 PLANTEAMIENTO DEL METODO.	33
3.3 CONDICIONES DE FRONTERA PARA CONVECCION.	34
4. PRUEBAS DEL MODELO.	40
4.1 DIFERENCIAS FINITAS EN UNA DIMENSION.	40
4.2 MODELO PARA COMPARAR EN UNA DIMENSION.	43
4.3 GAUSSIANA EN DOS DIMENSIONES.	44
5. APLICACION.	56
5.1 DESCRIPCION DEL PROBLEMA.	56
5.2 ANALISIS DE DATOS.	
5.3 HIDRODINAMICA.	57
5.4 CALCULO DEL CAMPO DE TEMPERATURAS.	58
5.5 DISCUSION DE RESULTADOS.	58
6. CONCLUSIONES.	65
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	66

1. INTRODUCCION

Para los fines de esta tesis, se entiende por el fenómeno de convección a la propagación de calor de un lugar a otro por el movimiento del líquido que se propaga. Son ejemplos de convección cuando la sustancia caliente es obligada a moverse por un ventilador o una bomba, otro ejemplo es la estufa de aire caliente y el sistema de calefacción por agua caliente.

Asociado al fenómeno de la convección está el de la difusión. En este, la propagación de calor o contaminante no se debe al movimiento sino al mezclado principalmente por turbulencia. Para fines de esta tesis, interesa estudiar el fenómeno de convección de agua caliente descargada por una termoeléctrica en zonas costeras. Este análisis se hará fuera de la zona del chorro y en dos dimensiones en planta.

La llamada ecuación general de convección y difusión (ref 5) en dos dimensiones es

$$\frac{\partial}{\partial t} (hC) + \frac{\partial}{\partial x} (hUC) + \frac{\partial}{\partial y} (hVC) = \frac{\partial}{\partial x} \left[hK_{11} \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[hK_{12} \frac{\partial C}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[hK_{12} \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[hK_{22} \frac{\partial C}{\partial y} \right] \quad (1.1)$$

donde

x,y coordenadas cartesianas
t tiempo
h(x,y,t) profundidad del agua
C(x,y,t) concentración (Por ejemplo de contaminantes)
 promediada en la profundidad de alguna especie (en
 unidad de masa de especie por unidad de volumen)
U(x,y,t) velocidad de corriente en dirección x, integrada en
 la vertical
V(x,y,t) velocidad de corriente en dirección y, integrada en
 la vertical
k₁₁, k₁₂, k₂₂ componentes del tensor K de difusión

Como puede verse en la ecuación 1.1, para poder calcular la evolución y difusión de la concentración de cualquier especie es necesario conocer las profundidades y velocidades en la zona en estudio. Esto se hace con la hidrodinámica. Las ecuaciones de la Hidrodinámica son la de continuidad y de cantidad de movimiento. La ecuación de continuidad en su forma bidimensional se expresa como

$$\frac{\partial (Uh)}{\partial x} + \frac{\partial (Vh)}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

La ecuación de cantidad de movimiento en dirección x es

$$\frac{\partial (Uh)}{\partial t} + \frac{\partial (U^2 h)}{\partial x} + \frac{\partial (UVh)}{\partial y} = hg_x - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - ghS_{fx}$$

y en dirección y

$$\frac{\partial (Vh)}{\partial t} + \frac{\partial (V^2 h)}{\partial y} + \frac{\partial (UVh)}{\partial x} = hg_y - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - ghS_{fy}$$

donde

g_x, g_y componentes de la aceleración gravitatoria en las
 direcciones x y y respectivamente
ρ densidad básica de un sistema fluido
p presión
S_{fx}, S_{fy} pendientes de fricción en dirección x y y
 respectivamente
g aceleración gravitatoria

La solución de estas ecuaciones es muy compleja y sale del objetivo de este trabajo. Aquí se utiliza un método de diferencias finitas desarrollado en el Instituto de Ingeniería.

1.2 TRANSPORTE

Al hablar de transporte nos referiremos al transporte de algún contaminante. En el caso del ejemplo del capítulo cinco el contaminante es agua caliente. Para poder entender mejor este proceso se hace el análisis que se presenta a continuación.

Si se asume que U, V y h satisfacen la ecuación de continuidad, la ecuación de transporte se simplifica obteniendo

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[hK_{11} \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left[hK_{12} \frac{\partial C}{\partial y} \right] + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial y} \left[hK_{12} \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial y} \left[hK_{22} \frac{\partial C}{\partial y} \right] \quad (1.2)$$

Se han desarrollado gran variedad de métodos numéricos para obtener una solución de la ecuación 1.1. Sin embargo, aún no se ha encontrado un método que se considere totalmente satisfactorio u óptimo.

Una de las dificultades que se presentan para encontrar la solución es debido a la naturaleza hiperbólica de la parte convectiva de la ecuación y parabólica para la difusiva. Se ha tenido dificultad para encontrar un método numérico el cual trate ambos aspectos del problema en forma totalmente satisfactoria.

Para resolver la ecuación 1.2 se han usado varios métodos como son el de elemento finito, por aproximaciones simétricas de convección-difusión, por difusión de corriente y deformación de elementos finitos, por medio de diferencias finitas, entre otros. En particular la solución de la ecuación 1.2 en un pequeño intervalo de tiempo consiste en dos distintas fases: convección (método de características) y difusión (método de diferencias finitas). El interés de este trabajo es el estudio de la convección, por ello la ecuación 1.2 se iguala a cero.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

1.3 OBJETIVO

El principal objetivo de este estudio es calcular en forma precisa la convección o transporte de un contaminante (que en este caso es una concentración de agua caliente). Dentro de este objetivo se desarrolla un modelo para calcular convección; este modelo debe de ser eficiente, rápido, preciso y aproximado.

En el capítulo dos se discute ampliamente el tema de interpolación de Hermite, en una y dos dimensiones, para poder tener una mejor visión sobre el tema. En el capítulo tres se plantea y desarrolla el modelo que emplea interpolación de Hermite en dos dimensiones. En el capítulo cuatro se presentan pruebas sencillas al modelo hechas por medio de un programa de computadora. En el capítulo cinco se describe la aplicación del modelo a la descarga de una termoeléctrica. Finalmente en el capítulo seis se dan las conclusiones del trabajo.

2. METODOS PARA INTERPOLACION EN DOS DIMENSIONES.

El modelo matemático que se describe en esta tesis requiere obtener valores de la variable de interés (como por ejemplo la concentración de un contaminante) en un punto cualquiera de un plano x, y . Estos valores se obtienen por interpolación entre puntos de una malla en los que se conocen los valores de la función y de sus derivadas.

Existen varios métodos para hacer interpolación, entre los que destacan los de Lagrange, Taylor, Newton, etc. El lector interesado puede ver por ejemplo las ref 2. Aquí se describe la interpolación de Hermite (ref 4) que tiene como ventajas que obtiene el polinomio de grado más alto con un mínimo de puntos del dominio y da una función suave y continua, con derivadas continuas en todo el dominio. Para ello se requiere no solo conocer la función en la que se desea interpolar, sino sus derivadas espaciales en los puntos de la malla.

En lo que sigue se plantea siempre la interpolación de Hermite para únicamente dos puntos del dominio y se desea interpolar entre dichos puntos.

2.1 INTERPOLACION DE HERMITE EN UNA DIMENSION.

La expresión general para la interpolación de Hermite en una dimensión está dada (ref 4) por

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^N H_{ki}(x) \phi_i^{(k)} = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^N H_{ki}^{(i)}(x) \frac{d^k \phi}{dx^k}(x) \quad (2.1)$$

donde

- k índice de derivada
- i índice por puntos del espacio
- ϕ_i^k valores de la función

Para encontrar los polinomios $H_{01}^{(N)}(x)$ y $H_{02}^{(N)}(x)$, se usan las siguientes propiedades

$$\frac{d^r H_{ki}^{(N)}}{dx^r}(x_p) = \delta_{ip} \delta_{kr} \quad (2.2)$$

donde

- N número de derivadas a usar en la interpolación
- δ_{mn} Delta de Kronecker

para

$$i, p = 1, 2$$

$$y \quad k, r = 0, 1, 2, \dots, N$$

con la propiedad

$$\delta_{mn} = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

$$\delta_{mn} = 1 \quad \text{si } m = n$$

2.1.1 ORDEN CERO (LINEAL)

La interpolación de Hermite de orden cero es la interpolación que se conoce con el nombre de interpolación lineal entre dos puntos. Para encontrar los coeficientes H_{ki} por ser de orden cero, se hace en la ec. 2.2, $N = 0$, esto es

$$\frac{d^{(0)} H_{O_1}^{(0)}(x_p)}{dx^{(0)}} = \delta_{1p} \delta_{00} = \delta_{1p} = H_{O_1}^{(0)}(x_p)$$

para $x_p = x_1$ resulta

$$H_{O_1}^{(0)}(x_1) = 1$$

y para $x_p = x_2$ se obtiene

$$H_{O_1}^{(0)}(x_2) = 0 \quad (2.3)$$

Supóngase que $H_{O_i}(x)$ es de la forma

$$H_{O_1}^{(0)}(x) = a_1 + a_2 x$$

con las ecs. 2.3 con $x_1 = 0$ y $x_2 = L$

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_2 = -1/L$$

Por lo tanto

$$H_{O_1}^{(0)}(x) = 1 - x/L$$

Así mismo, si se define el polinomio $H_{O_2}^{(0)}(x)$ con la misma forma del $H_{O_1}^{(0)}$ y utilizando la ec. 2.2 se obtiene

$$H_{O_2}^{(0)}(x_1) = 0 \quad \text{y} \quad H_{O_2}^{(0)}(x_2) = 1 \quad (2.4)$$

$$H_{O_2}^{(0)}(x) = x/L$$

En resumen, la ecuación para la interpolación de Hermite de orden cero es

$$\phi(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \phi(0) + \frac{x}{L} \phi(L)$$

2.1.2 PRIMER ORDEN

La función para la interpolación de Hermite de primer orden es

$$\begin{aligned} \phi(x) = & H_{01}^{(1)}(x) \phi(0) + H_{02}^{(1)}(x) \phi(L) + H_{11}^{(1)}(x) \frac{d\phi}{dx}(0) + \\ & H_{12}^{(1)}(x) \frac{d\phi}{dx}(L) \end{aligned} \quad (2.5)$$

La interpolación de primer orden está dada por la ecuación 2.1 cuando $N = 1$.

Para encontrar $H_{01}^{(1)}(x)$, $H_{02}^{(1)}(x)$, $H_{11}^{(1)}(x)$ y $H_{12}^{(1)}(x)$, se utilizan las propiedades antes mencionadas, para encontrar $H_{01}^{(1)}$ se tiene según la ec. 2.2 que

$$H_{01}^{(1)}(x_1) = 1 \quad (2.6a)$$

$$H_{01}^{(1)}(x_2) = 0 \quad (2.6b)$$

$$\frac{dH_{01}^{(1)}}{dx}(x_1) = 0 \quad (2.6c)$$

$$\frac{dH_{01}^{(1)}}{dx}(x_2) = 0 \quad (2.6d)$$

Se supone el polinomio de Hermite de grado tres

$$H_{01}^{(1)}(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (2.7)$$

Usando las ecs. 2.6a y 2.6b se encuentran las constantes

$$H_{01}^{(1)}(x_1) = a_1 + 0 = 1 \quad \text{de donde} \quad a_1 = 1$$

$$H_{01}^{(1)}(x_2) = 0 = 1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3 \quad (2.8)$$

Usando las ecs. 2.6c y 2.6d se tiene

$$\frac{dH_{01}^{(4)}}{dx}(x_1) = 0 = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2$$

$$\frac{dH_{01}^{(4)}}{dx}(x_1) = 0 = a_2 + 2a_3 x_1 + 3a_4 x_1^2$$

con $x_1 = 0$ de donde $a_2 = 0$

$$\frac{dH_{01}^{(4)}}{dx}(x_2) = 0 = 2a_3 L + 3a_4 L^2 \quad (2.9)$$

Resolviendo el sistema de ecs. 2.8 y 2.9

$$a_3 = -3/L^2 \quad \text{y} \quad a_4 = 2/L^3$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 2.7 se tiene, finalmente

$$H_{01}^{(4)}(x) = (2x^3 - 3Lx^2 + L^3)/L^3 \quad (2.10)$$

de manera semejante

$$H_{02}^{(4)}(x) = -(2x^3 - 3Lx^2)/L^3 \quad (2.11)$$

$$H_{11}^{(4)}(x) = (x^3 - 2Lx^2 + L^2x)/L^2 \quad (2.12)$$

$$H_{12}^{(4)}(x) = (x^3 - Lx^2)/L^2 \quad (2.13)$$

En las figs. 2.1 y 2.2 puede verse las funciones del polinomio.

Para facilitar el manejo de las ecuaciones conviene expresar las funciones de Hermite en forma relativa; para ello se define

$$\alpha = x/L$$

donde $L = x_2 - x_1$; $x_1 \leq x \leq x_2$; $0 \leq \alpha \leq 1$ y las funciones del polinomio resultan

$$H_{01} = 1 - H_{02}$$

$$H_{02} = \alpha^2 (3 - 2\alpha)$$

$$H_{11} = \alpha L (\alpha - 1)^2$$

$$H_{1z} = \alpha^2 L (\alpha - 1)$$

En la expresión 2.5 ahora se utiliza α en lugar de x .

Nótese que $H_{01}^{(0)}(x) + H_{02}^{(0)}(x) = 1.0$

2.1.3. EJEMPLO. Interpolación de Hermite en una dimensión.

Sea la función $\phi = \ln x^2$; su derivada es $\phi' = 2/x$

Se desea calcular los valores de ϕ en el rango $20 \leq x \leq 40$ dada la función y su primera derivada en $x_1 = 20$ y $x_2 = 40$ para la interpolación de orden cero y de orden uno.

x	ϕ	ϕ'	Hermite de orden 0	error (%)	Hermite de orden 1	error (%)		
20	5.991	1×10^{-1}	5.991	0.000	5.991	0.000		
22			6.130	0.814	6.183	0.016		
24			6.268	1.365	6.359	0.047		
26			6.407	1.673	6.522	0.092		
28			6.546	1.771	6.671	0.105		
30			6.685	1.720	6.810	0.118		
32			6.823	1.558	6.938	0.101		
34			6.962	1.290	7.057	0.057		
36			7.101	0.921	7.170	0.042		
38			7.239	0.495	7.276	0.014		
40			7.378	5×10^{-2}	7.378	0.000	7.378	0.000

Para Hermite de orden cero se utiliza la siguiente ecuación

$$\phi = (1 - \alpha) + \alpha \phi_1$$

Para Hermite de orden uno se utiliza la ec. 2.5.

El error se obtiene con la siguiente expresión

$$\text{error} = e = \frac{|f_c - f_v|}{f_v} \times 100$$

donde

fv función calculada

fc función verdadera, obtenida con $\phi = \ln x^2$

Notése que en la interpolación de orden cero el error máximo en este ejemplo es 1.771% y en la de orden uno es de 0.118%. En la tabla se muestran los resultados obtenidos.

2.2 INTERPOLACION DE HERMITE EN DOS DIMENSIONES.

2.2.1 HERMITE DE ORDEN CERO

Esta interpolación se conoce como interpolación bilineal; y si se definen

$$\alpha = (X1 - X0)/LX$$

$$\beta = (Y1 - Y0)/LY$$

si se conocen ϕ , en los 4 nudos de un elemento rectangular en dos dimensiones, fig 2.3, se tiene

$$\phi(x,y) = (1-\beta) \left[(1-\alpha) \phi_{11} + \alpha \phi_{12} \right] + \beta \left[(1-\alpha) \phi_{21} + \alpha \phi_{22} \right]$$

en la que se interpola linealmente primero en dirección x y luego en y. Puede escribirse una ecuación semejante interpolando primero en y y luego en x.

2.2.2 HERMITE DE PRIMER ORDEN

Puede demostrarse (ref 4) que la interpolación de Hermite de primer orden en dos dimensiones puede efectuarse con la combinación lineal de interpolación de primer orden en una dimensión. Si se conocen ϕ , $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$ y $\partial^2\phi/\partial x\partial y$ en los 4 nudos de un elemento rectangular en dos dimensiones, fig.2.3, se tiene (ref 4).

$$\phi(x,y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[H_{0i}^{(1)}(x) H_{0j}^{(1)}(y) \phi_{ij} + H_{1i}^{(1)}(x) H_{0j}^{(1)}(y) (\partial\phi/\partial x)_{ij} + H_{0i}^{(1)}(x) H_{1j}^{(1)}(y) (\partial\phi/\partial y)_{ij} + H_{1i}^{(1)}(x) H_{1j}^{(1)}(y) (\partial^2\phi/\partial x\partial y)_{ij} \right]$$

Desarrollando las sumatorias se obtiene la ecuación 2.14

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}(x, y) = & H_{01}(x) H_{01}(y) \hat{\phi}_{11} + H_{02}(x) H_{01}(y) \hat{\phi}_{21} \\
 & + H_{01}(x) H_{02}(y) \hat{\phi}_{12} + H_{02}(x) H_{02}(y) \hat{\phi}_{22} \\
 & + H_{11}(x) H_{01}(y) (\partial \hat{\phi} / \partial x)_{11} + H_{12}(x) H_{01}(y) (\partial \hat{\phi} / \partial x)_{21} \\
 & + H_{11}(x) H_{02}(y) (\partial \hat{\phi} / \partial x)_{12} + H_{12}(x) H_{02}(y) (\partial \hat{\phi} / \partial x)_{22} \\
 & + H_{01}(x) H_{11}(y) (\partial \hat{\phi} / \partial y)_{11} + H_{02}(x) H_{11}(y) (\partial \hat{\phi} / \partial y)_{21} \\
 & + H_{01}(x) H_{12}(y) (\partial \hat{\phi} / \partial y)_{12} + H_{02}(x) H_{12}(y) (\partial \hat{\phi} / \partial y)_{22} \\
 & + H_{11}(x) H_{11}(y) (\partial^2 \hat{\phi} / \partial x \partial y)_{11} + H_{12}(x) H_{11}(y) (\partial^2 \hat{\phi} / \partial x \partial y)_{21} \\
 & + H_{11}(x) H_{12}(y) (\partial^2 \hat{\phi} / \partial x \partial y)_{12} + H_{12}(x) H_{12}(y) (\partial^2 \hat{\phi} / \partial x \partial y)_{22} \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

En la tabla siguiente se dan los valores de las funciones H_{kj} obtenidos con la ec. 2.2, como en el caso de la interpolación de Hermite en una dimensión se suponen los polinomios

$$H_{ki}(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

$$H_{kj}(y) = b_1 + b_2 y + b_3 y^2 + b_4 y^3$$

Los polinomios $H_{ki}(x)$ en la línea 1 y 3 y 2 y 4 de la figura 2.3 son idénticos; están definidos por las ecuaciones 2.10 y 2.11.

$$H_{01}(x) = 1 - H_{02}(x)$$

$$H_{02}(x) = \alpha^2 (3 - 2\alpha)$$

$$H_{11}(x) = \alpha L(\alpha - 1)^2$$

$$H_{12}(x) = \alpha^2 L(\alpha - 1)$$

$$H_{01}(y) = 1 - H_{02}(y)$$

$$H_{02}(y) = \beta^2 (3 - 2\beta)$$

$$H_{11}(y) = \beta L(\beta - 1)^2$$

$$H_{12}(y) = \beta^2 L(\beta - 1)$$

H	k	i	p	r	δ_{ip}	δ_{kr}	
$H_{01}(x)$	0	1	1	0	1	1	1
$H_{12}(x)$	0	2	1	0	0	1	0
$H_{01}(y)$	0	1	1	0	1	1	1
$H_{02}(y)$	0	2	1	0	0	1	0
$H_{11}(x)$	1	1	1	0	1	0	1
$H_{12}(x)$	1	2	1	0	0	0	0
$H_{11}(y)$	1	1	1	0	1	0	1
$H_{12}(y)$	1	2	1	0	0	0	0
$H'_{01}(x)$	0	1	1	1	1	0	1
$H'_{02}(x)$	0	2	1	1	0	0	0
$H'_{01}(y)$	0	1	1	1	1	0	1
$H'_{02}(y)$	0	2	1	1	0	0	0
$H'_{11}(x)$	1	1	1	1	1	1	1
$H'_{12}(x)$	1	2	1	1	0	1	0
$H'_{11}(y)$	1	1	1	1	1	1	1
$H'_{12}(y)$	1	2	1	1	0	1	0

2.2.3 EJEMPLO. Interpolación de Hermite de primer orden en dos dimensiones.

Supóngase la siguiente función (fig. 2.4)

$$\phi = e^{y/2} \text{Ln } x^2 \quad (2.15)$$

Se desea obtener el valor de la función en el punto (30,0.7) dados los valores $20 < x < 40$ y $0 < y < 1.0$. Con las expresiones paramétricas, se obtiene

$$\alpha = 0.5$$

$$\beta = 0.7$$

$$H_{01}(x) = 0.5$$

$$H_{01}(y) = 0.216$$

$$H_{02}(x) = 0.5$$

$$H_{02}(y) = 0.784$$

$$H_{11}(x) = 2.5$$

$$H_{11}(y) = 0.063$$

$$H_{12}(x) = -2.5$$

$$H_{12}(y) = -0.147$$

Las derivadas de la función de la ecuación 2.15 son

$$\phi_x = \frac{d\phi}{dx} = \frac{2}{x} e^{y/2} \quad (2.16)$$

$$\phi_y = \frac{d\phi}{dy} = \frac{e^{y/2}}{2} \ln x^2 \quad (2.17)$$

$$\phi_{xy} = \frac{d^2\phi}{dx dy} = \frac{e^{y/2}}{x} \quad (2.18)$$

Sustituyendo valores en las ecuaciones 2.15, 2.16, 2.17 y 2.18 para los nudos se obtienen los valores de la tabla siguiente

Coordenadas	ϕ	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_{xy}
(20,0)	5.9914645	0.1000000	2.9957323	0.0500000
(40,0)	7.3777589	0.0500000	3.6888795	0.0250000
(20,1)	9.8782550	0.1648721	4.9391275	0.0824361
(40,1)	12.1638680	0.0824361	6.0819340	0.0412180

En la fig. 2.5 se muestra el valor de la función exacta. En la fig. 2.6 se muestran las isolineas de la función exacta.

La ec. 2.14 puede escribirse como

$$\begin{aligned} \phi(x,y) = & H_{01}(y)[H_{01}(x)\phi_{11} + H_{02}(x)\phi_{12} + H_{11}(x)\phi_{x11} + H_{12}(x)\phi_{x12}] \\ & + H_{02}(y)[H_{01}(x)\phi_{21} + H_{02}(x)\phi_{22} + H_{11}(x)\phi_{x21} + H_{12}(x)\phi_{x22}] \\ & + H_{11}(y)[H_{01}(x)\phi_{y11} + H_{02}(x)\phi_{y12} + H_{11}(x)\phi_{xy11} + H_{12}(x)\phi_{xy12}] \\ & + H_{12}(y)[H_{01}(x)\phi_{y21} + H_{02}(x)\phi_{y22} + H_{11}(x)\phi_{xy21} + H_{12}(x)\phi_{xy22}] \end{aligned}$$

En esta ecuación se ha factorizado de forma tal que el primer término entre paréntesis es la interpolación en dirección x en la línea 1; el segundo término entre paréntesis es la interpolación en dirección x en la línea 3. Los términos 3 y 4 entre paréntesis son para el punto x a lo largo de las líneas 1 y 3 (fig 2.3) la interpolación de la derivada ϕ_y de la función. Resumiendo, los cuatro términos entre paréntesis definen los valores de la función y de la derivada en y para líneas 2 y 4. Con estos valores se efectúa una interpolación en dirección y al multiplicarlo por los términos fuera del paréntesis.

Sustituyendo valores

$$\begin{aligned} \phi(x,y) = & 0.216[0.5(5.991)+0.5(7.378)+2.5(0.1)+(-2.5)(0.05)] \\ & + 0.784[0.5(9.878)+0.5(12.164)+2.5(0.165)+(-2.5)(0.082)] \\ & + 0.063[0.5(2.996)+0.5(3.688)+2.5(0.05)+(-2.5)(0.025)] \\ & + (-0.147)[0.5(4.939)+0.5(6.082)+2.5(0.082)+(-2.5)(0.041)] \end{aligned}$$

$$\phi(x,y) = 9.663$$

A partir de la ec. 2.14 puede obtenerse también una expresión en que se haga primero la interpolación en y (términos entre paréntesis) a lo largo de las líneas 2 y 4 de la figura 2.3, y luego en dirección x.

$$\begin{aligned} \phi(x,y) = & H_{01}(x)[H_{01}(y)\phi_{11} + H_{02}(y)\phi_{12} + H_{11}(y)\phi_{y11} + H_{12}(y)\phi_{y12}] \\ & + H_{02}(x)[H_{01}(y)\phi_{21} + H_{02}(y)\phi_{22} + H_{11}(y)\phi_{y21} + H_{12}(y)\phi_{y22}] \\ & + H_{11}(x)[H_{01}(y)\phi_{x11} + H_{02}(y)\phi_{x12} + H_{11}(y)\phi_{xy11} + H_{12}(y)\phi_{xy12}] \\ & + H_{12}(x)[H_{01}(y)\phi_{x21} + H_{02}(y)\phi_{x22} + H_{11}(y)\phi_{xy21} + H_{12}(y)\phi_{xy22}] \end{aligned}$$

Sustituyendo valores se obtiene; el mismo resultado $\phi(x,y) = 9.663$

En la figura 2.7 se muestran las isolineas calculadas con la interpolación de Hermite, que pueden ser comparadas con la figura 2.6. En las figuras 2.8 y 2.9 pueden verse los errores obtenidos con este método.

En la figura 2.10 puede verse las isolineas calculadas con una interpolación bilineal y en las figuras 2.11 y 2.12 se observan los errores. Se compararon la formulación aquí planteada con los métodos propuestos en la ref 5.

Los resultados obtenidos con el método que usa interpolación con Spline dan resultados idénticos que los de la interpolación Bilineal, debido a que se utilizan muy pocos valores para definir el polinomio.

La interpolación Bicúbica que se presenta en la ref 5, da resultados idénticos a la interpolación de Hermite que aquí se describe. No es fácil comprender el algoritmo del libro pero parecería que es un método de Hermite. En las figuras 2.13 y 2.14 muestran los errores obtenidos con la interpolación bicúbica y la interpolación de Hermite.

2.3 OBTENCION DE LA DERIVADA CON LA INTERPOLACION DE HERMITE

Para el procedimiento de cálculo que se describe en los capítulos siguientes se requiere obtener por interpolación, además del valor de la función en un punto (x,y) dado, el valor de la derivada de la función en dicho punto.

Podría utilizarse una ecuación del tipo 2.1, es decir en una dimensión

$$\hat{\psi}_x(x) = H_{11} \hat{\psi}_{x1} + H_{12} \hat{\psi}_{x2} + H_{21} \hat{\psi}_{xx1} + H_{22} \hat{\psi}_{xx2}$$

pero esto implica tener información de la segunda derivada de la función. Además de que la obtención de la segunda derivada puede resultar compleja, y en general en las aplicaciones no se dispone de dicha información, se requiere almacenar en memoria de computo un vector más para el caso de una dimensión; y tres para dos dimensiones. Aunque no tan preciso puede plantearse un polinomio de interpolación en una dimensión con la forma

$$\phi_x(x) = G_{01} \phi_1 + G_{02} \phi_2 + G_{01} \phi_{x1} + G_{02} \phi_{x2} \quad (2.19)$$

que utiliza los valores de la función y la primera derivada.

Suponiendo un polinomio de Hermite de grado tres

$$H_{O_1}(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$$

considerando la fórmula 2.2 se tiene

$$H_{O_1}(x_1) = a_1 + 0 = 1 \quad \text{donde} \quad a_1 = 1$$

$$H_{O_1}(x_2) = 0 = 1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (2.20)$$

$$\frac{dH_{O_1}^{(1)}(x_1)}{dx} = 0 = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2$$

con $x = 0$ resulta $a_2 = 0$

$$\frac{dH_{O_1}^{(1)}(x_2)}{dx} = 0 = 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (2.21)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 2.20 y 2.21

$$a_3 = 2/L^3 \quad a_4 = -3/L^2$$

Reemplazando se tiene

$$\frac{dH_{O_1}^{(1)}(x)}{dx} = 2 \left[-\frac{3}{L^2} \right] x + 3 \left[\frac{2}{L^2} \right] x^2$$

Con el mismo procedimiento suponiendo un polinomio

$$H_{O_1}(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$$

con la fórmula 2.2

$$\frac{dH_{O_1}^{(1)}(x_1)}{dx} = 0$$

$$\frac{dH_{O_1}^{(1)}(x_2)}{dx} = 0$$

con $a_1 = 0$

$$\frac{dH_{O_2}^{(1)}(x_1)}{dx} = 0 = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2$$

con $x = 0 \rightarrow a_2 = 0$

$$H_{O_2}(L) = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 \quad (2.22)$$

$$\frac{dH_{O_2}^{(4)}(L)}{dx} = 2a_3 L + 3a_4 L^2 \quad (2.23)$$

Resolviendo el sistema de ecs. 2.22 y 2.23

$$a_3 = 3/L^2 \quad a_4 = -2/L^3$$

sustituyendo en 2.23

$$\frac{dH_{O_2}^{(4)}(x)}{dx} = 2 \left[\frac{3}{L^2} \right] x + 3 \left[-\frac{2}{L^3} \right] x^2$$

Para encontrar $G_{11}(x)$ se supone

$$H_{11}(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

$$H_{11}(x_1) = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

$$\frac{dH_{11}^{(4)}(x_1)}{dx} = 1 = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2$$

con $x = 0 \rightarrow a_2 = 1$

$$H_{11}(L) = L + a_3 L^2 + a_4 L^3 \quad (2.24)$$

$$\frac{dH_{11}^{(4)}(L)}{dx} = 1 + 2a_3 L + 3a_4 L^2 \quad (2.25)$$

Resolviendo el sistema de ecs. 2.24 y 2.25

$$a_3 = -2/L \quad a_4 = 1/L^2$$

sustituyendo en 2.25

$$\frac{dH_{11}^{(4)}(x)}{dx} = 1 + 2 \left[-\frac{2}{L} \right] x + 3 \left[\frac{1}{L^2} \right] x^2$$

Para $G_{12}(x)$ se tiene

$$H_{12}(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

$$\frac{dH_{12}^{(4)}(x)}{dx} = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2$$

$$H_{12}(x_1) = 0 = a_1$$

$$H_{12}(L) = a_2 L^2 + a_4 L^3 \quad (2.26)$$

$$\frac{dH_{12}^{(4)}(L)}{dx} = 1 = 2a_3 L + 3a_4 L^2 \quad (2.27)$$

Resolviendo el sistema de ecs. 2.26 y 2.27

$$a_2 = -1/L \quad a_4 = 1/L^2$$

sustituyendo en la ec. 2.27

$$\frac{dH_{12}^{(4)}(x)}{dx} = 2 \left[-\frac{1}{L} \right] x + 3 \left[\frac{1}{L^2} \right] x^2$$

Si $x/L = \alpha$ se resume que

$$G_{01}(x) = \frac{dH_{01}^{(4)}(x)}{dx} = \frac{6\alpha}{L} (\alpha-1)$$

$$G_{02}(x) = \frac{dH_{02}^{(4)}(x)}{dx} = \frac{6\alpha}{L} (1-\alpha)$$

$$G_{11}(x) = \frac{dH_{11}^{(4)}(x)}{dx} = (1-\alpha) (1-3\alpha)$$

$$G_{f2}(x) = \frac{dH_{f2}^{(4)}(x)}{dx} = \alpha (3\alpha-2)$$

Finalmente, la ecuación para obtener la derivada

$$\phi' = \frac{6\alpha}{L}(1-\alpha)\phi_a + \frac{6\alpha}{L}(1-\alpha)\phi_b + (1-\alpha)(1-3\alpha)\phi_{M4} + \alpha(3\alpha-2)\phi_{N6} \quad (2.28)$$

Para el caso de dos dimensiones, se presenta el siguiente grupo de ecuaciones. Ecuación 2.29:

$$\begin{aligned} \Phi(x,y) = & H_{O_1}(y)[G_{O_1}(x)\phi_{11} + G_{O_2}(x)\phi_{21} + G_{11}(x)\phi_{x11} + G_{12}(x)\phi_{x21}] \\ & + H_{O_2}(y)[G_{O_1}(x)\phi_{12} + G_{O_2}(x)\phi_{22} + G_{11}(x)\phi_{x12} + G_{12}(x)\phi_{x22}] \\ & + H_{11}(y)[G_{O_1}(x)\phi_{y11} + G_{O_2}(x)\phi_{y21} + G_{11}(x)\phi_{xy11} + G_{12}(x)\phi_{xy21}] \\ & + H_{12}(y)[G_{O_1}(x)\phi_{y12} + G_{O_2}(x)\phi_{y22} + G_{11}(x)\phi_{xy12} + G_{12}(x)\phi_{xy22}] \end{aligned}$$

Ecuación 2.30 (equivalente a la ec 2.29):

$$\begin{aligned} \phi_x(x,y) = & G_{O_1}(y)[H_{O_1}(x)\phi_{11} + H_{O_2}(x)\phi_{21} + H_{11}(x)\phi_{x11} + H_{12}(x)\phi_{x21}] \\ & + G_{O_2}(y)[H_{O_1}(x)\phi_{12} + H_{O_2}(x)\phi_{22} + H_{11}(x)\phi_{x12} + H_{12}(x)\phi_{x22}] \\ & + G_{11}(y)[H_{O_1}(x)\phi_{y11} + H_{O_2}(x)\phi_{y21} + H_{11}(x)\phi_{xy11} + H_{12}(x)\phi_{xy21}] \\ & + G_{12}(y)[H_{O_1}(x)\phi_{y12} + H_{O_2}(x)\phi_{y22} + H_{11}(x)\phi_{xy12} + H_{12}(x)\phi_{xy22}] \end{aligned}$$

Ecuación 2.31:

$$\begin{aligned} \phi_y(x,y) = & H_{O_1}(x)[G_{O_1}(y)\phi_{11} + G_{O_2}(y)\phi_{12} + G_{11}(y)\phi_{y11} + G_{12}(y)\phi_{y12}] \\ & + H_{O_2}(x)[G_{O_1}(y)\phi_{21} + G_{O_2}(y)\phi_{22} + G_{11}(y)\phi_{y21} + G_{12}(y)\phi_{y22}] \\ & + H_{11}(x)[G_{O_1}(y)\phi_{x11} + G_{O_2}(y)\phi_{x12} + G_{11}(y)\phi_{xy11} + G_{12}(y)\phi_{xy12}] \\ & + H_{12}(x)[G_{O_1}(y)\phi_{x21} + G_{O_2}(y)\phi_{x22} + G_{11}(y)\phi_{xy21} + G_{12}(y)\phi_{xy22}] \end{aligned}$$

Ecuación 2.32 (equivalente a la ec 2.31)

$$\begin{aligned} \phi_x(x,y) = & G_{O_1}(x)[H_{O_1}(y)\phi_{11} + H_{O_2}(y)\phi_{12} + H_{11}(y)\phi_{y11} + H_{12}(y)\phi_{y12}] \\ & + G_{O_2}(x)[H_{O_1}(y)\phi_{21} + H_{O_2}(y)\phi_{22} + H_{11}(y)\phi_{y21} + H_{12}(y)\phi_{y22}] \\ & + G_{11}(x)[H_{O_1}(y)\phi_{x11} + H_{O_2}(y)\phi_{x12} + H_{11}(y)\phi_{xy11} + H_{12}(y)\phi_{xy12}] \\ & + G_{12}(x)[H_{O_1}(y)\phi_{x21} + H_{O_2}(y)\phi_{x22} + H_{11}(y)\phi_{xy21} + H_{12}(y)\phi_{xy22}] \end{aligned}$$

Ecuación 2.33:

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(x,y) = & G_{01}(x)[G_{01}(y)\phi_{11} + G_{02}(y)\phi_{12} + G_{11}(y)\phi_{y11} + G_{12}(y)\phi_{y12}] \\ & + G_{02}(x)[G_{01}(y)\phi_{21} + G_{02}(y)\phi_{22} + G_{11}(y)\phi_{y21} + G_{12}(y)\phi_{y22}] \\ & + G_{11}(x)[G_{01}(y)\phi_{x11} + G_{02}(y)\phi_{x12} + G_{11}(y)\phi_{xy11} + G_{12}(y)\phi_{xy12}] \\ & + G_{12}(x)[G_{01}(y)\phi_{x21} + G_{02}(y)\phi_{x22} + G_{11}(y)\phi_{xy21} + G_{12}(y)\phi_{xy22}] \end{aligned}$$

Ecuación 2.34 (equivalente a la ec 2.33):

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(x,y) = & G_{01}(y)[G_{01}(x)\phi_{11} + G_{02}(x)\phi_{21} + G_{11}(x)\phi_{x11} + G_{12}(x)\phi_{x21}] \\ & + G_{02}(y)[G_{01}(x)\phi_{12} + G_{02}(x)\phi_{22} + G_{11}(x)\phi_{x12} + G_{12}(x)\phi_{x22}] \\ & + G_{11}(y)[G_{01}(x)\phi_{y11} + G_{02}(x)\phi_{y21} + G_{11}(x)\phi_{xy11} + G_{12}(x)\phi_{xy21}] \\ & + G_{12}(y)[G_{01}(x)\phi_{y12} + G_{02}(x)\phi_{y22} + G_{11}(x)\phi_{xy12} + G_{12}(x)\phi_{xy22}] \end{aligned}$$

2.3.1 EJEMPLO. Obtención de la derivada.

Para este ejemplo se utilizan los datos del inciso 2.2.3, tiene la ecuación de la derivada.

Usando la ec. 2.28 se obtienen los valores de la tabla siguiente

x	ϕ'	ϕ' Calculado	error (%)
20	1.000×10^{-4}	1.000×10^{-4}	0.000
22	9.091×10^{-2}	9.195×10^{-2}	1.131
24	8.330×10^{-2}	8.458×10^{-2}	1.478
26	7.692×10^{-2}	7.788×10^{-2}	1.230
28	7.143×10^{-2}	7.186×10^{-2}	0.598
30	6.667×10^{-2}	6.653×10^{-2}	0.210
32	6.250×10^{-2}	6.186×10^{-2}	1.035
34	5.882×10^{-2}	5.788×10^{-2}	1.624
36	5.556×10^{-2}	5.458×10^{-2}	1.796
38	5.263×10^{-2}	5.195×10^{-2}	1.309
40	5.000×10^{-2}	5.000×10^{-2}	0.000

Nótese que en la interpolación de orden uno el error máximo en este ejemplo es de 1.796%.

La ϕ' se obtuvo con la derivada dada en el inciso 2.1.3.

2.3.2 EJEMPLO. Obtención de la derivada en dos dimensiones.

Para la función y tablas del inciso 2.2.3 y para el mismo punto (30,0.7) con $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.7$ se obtuvieron las ecuaciones siguientes, en el caso de la dirección x.

$$G_{01}(y) = \frac{6\beta}{L} (\beta-1) = - 1.126$$

$$G_{02}(y) = \frac{6\beta}{L} (1-\beta) = 1.126$$

$$G_{11}(y) = (1-\beta) (1-3\beta) = - 0.330$$

$$G_{12}(y) = \beta (3\beta-2) = 0.070$$

Sustituyendo valores en la ec. 2.29 se obtiene

$$\begin{aligned} \phi_x(x,y) = & 0.216[-0.075(5.991)+0.075(7.378)-(0.25)0.1-(0.25)0.05] \\ & + 0.784[-0.075(9.878)+0.075(12.164)-(0.25)0.165-(0.25)0.082] \\ & + 0.063[-0.075(2.996)+0.075(3.688)-(0.25)0.05-(0.25)0.025] \\ & - 0.147[-0.075(4.939)+0.75(6.082)-(0.25)0.082-(0.25)0.041] \end{aligned}$$

$$\phi_x(x,y) = 0.095$$

Sustituyendo valores en la ecuación 2.30

$$\begin{aligned} \phi_x(x,y) = & -1.26[0.5(5.991)+0.5(7.378)+2.5(0.1)+(-2.5)(0.05)] \\ & + 1.26[0.5(9.878)+0.5(12.164)+2.5(0.165)+(-2.5)(0.082)] \\ & - 0.33[0.5(2.996)+0.5(3.688)+2.5(0.05)+(-2.5)(0.025)] \\ & + 0.07[0.5(4.939)+0.5(6.082)+2.5(0.082)+(-2.5)(0.041)] \end{aligned}$$

$$\phi_x(x,y) = 4.838$$

Sustituyendo valores en la ecuación 2.31 se obtiene

$$\begin{aligned}\phi_y(x,y) &= 0.5[-1.26(5.991)+1.26(9.878)+(-0.33)2.996+0.07(4.939)] \\ &+ 0.5[-1.26(7.378)+1.26(12.164)+(-0.33)3.688+0.07(6.082)] \\ &+ 2.5[-1.26(0.1)+1.26(0.165)+(-0.33)0.05+0.07(0.082)] \\ &- 2.5[-1.26(0.05)+1.26(0.082)+(-0.33)0.025+0.07(0.041)]\end{aligned}$$

$$\phi_y(x,y) = 4.842$$

Sustituyendo valores en la ecuación 2.32 se obtiene

$$\begin{aligned}\phi_y(x,y) &= -0.075[0.216(5.991)+0.784(9.978)+0.063(2.996)-(0.147)4.939] \\ &+ 0.075[0.216(7.378)+0.784(12.164)+0.063(3.688)-(0.147)6.082] \\ &- 0.25[0.216(0.1)+0.784(0.165)+0.063(0.05)-(0.147)0.082] + \\ &- 0.25[0.216(0.05)+0.784(0.082)+0.063(0.025)-(0.147)0.041]\end{aligned}$$

$$\phi_y(x,y) = 0.094$$

Ecuación 2.33:

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(x,y) &= -1.26[-0.075(5.991)+0.075(7.378)-(0.25)0.1-(0.25)0.05] \\ &+ 1.26[-0.075(9.878)+0.075(12.164)-(0.25)0.165-(0.25)0.082] \\ &- 0.33[-0.075(2.996)+0.075(3.688)-(0.25)0.05-(0.25)0.025] \\ &+ 0.07[0.075(4.939)+0.075(6.082)-(0.25)0.082-(0.25)0.041]\end{aligned}$$

$$\phi_{xy}(x,y) = 0.047$$

Con la ec 2.34 se tiene el mismo resultado

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(x,y) &= -0.05[-1.26(5.991)+1.26(9.878)-(0.33)2.996+0.07(4.939)] \\ &+ 0.07[-1.26(7.378)+1.26(12.164)-(0.33)3.688+0.07(6.082)] \\ &- 0.2[-1.26(0.1)+1.26(0.165)-(0.33)0.05+0.07(0.082)] \\ &- 0.2[-1.26(0.05)+1.26(0.082)-(0.33)0.025+0.07(0.041)]\end{aligned}$$

$$\phi_{xy}(x,y) = 0.048$$

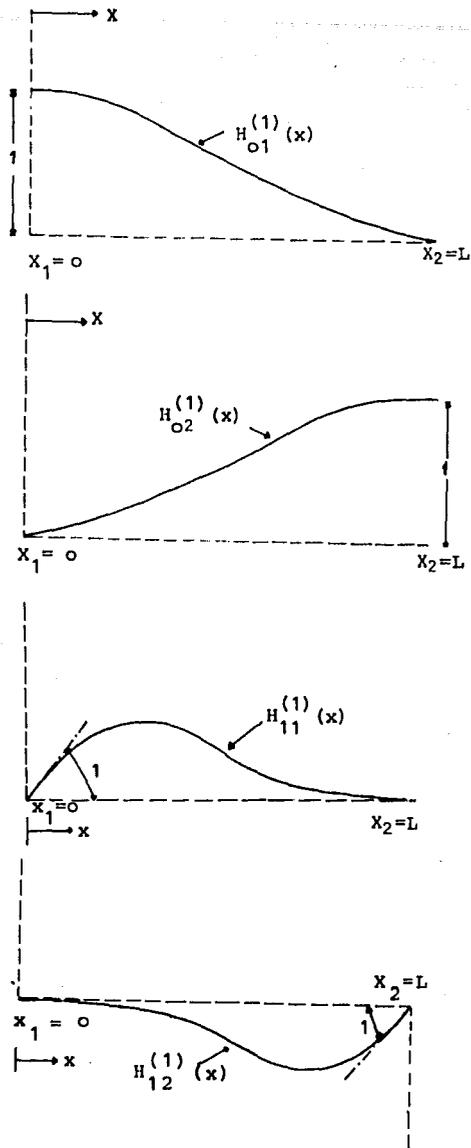


FIGURA 2.1. VARIACION DE PRIMER ORDEN DEL POLINOMIO DE HERMITE ENTRE DOS ESTACIONES.

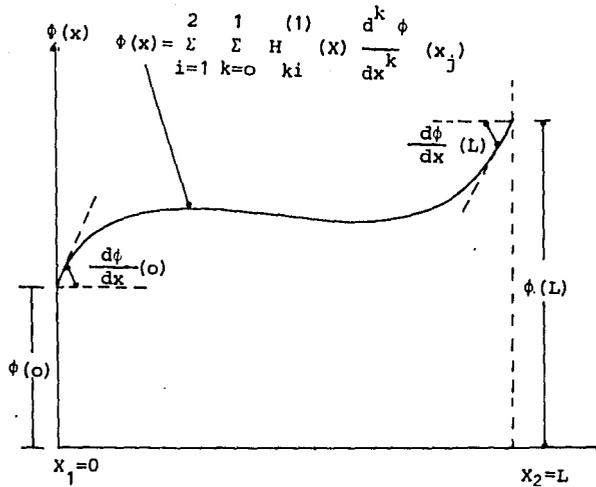


FIGURA 2.2. VARIACION DE $\phi(x)$ DADA POR LA ECUACION (2.13) ENTRE LAS DOS ESTACIONES.

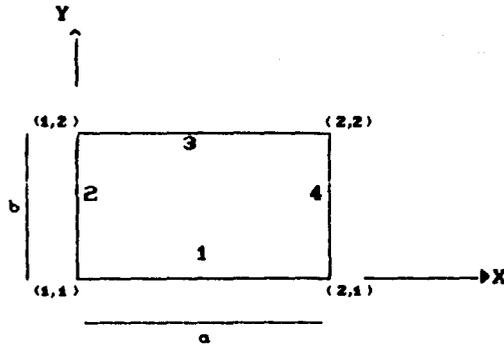


FIG. 3

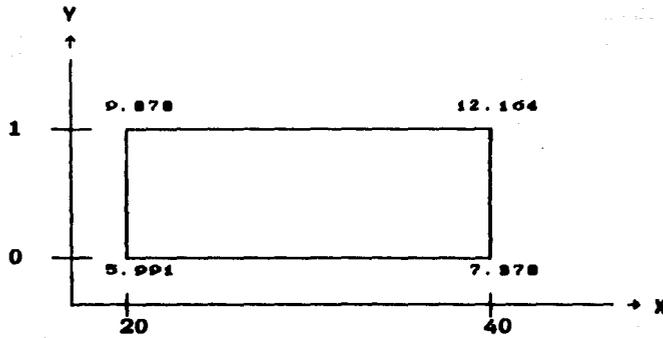


FIG. 2.4

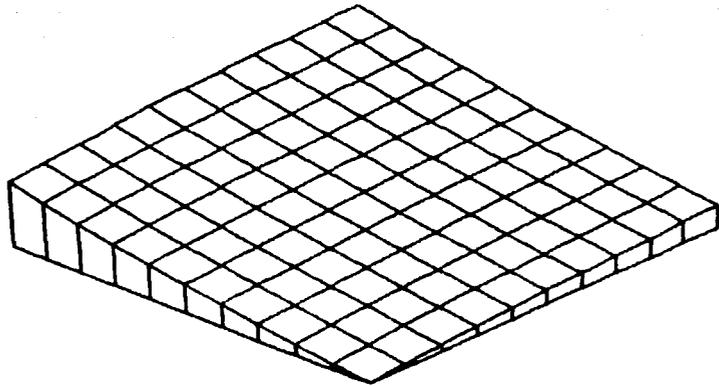


Fig 2,5 . FUNCION EXACTA

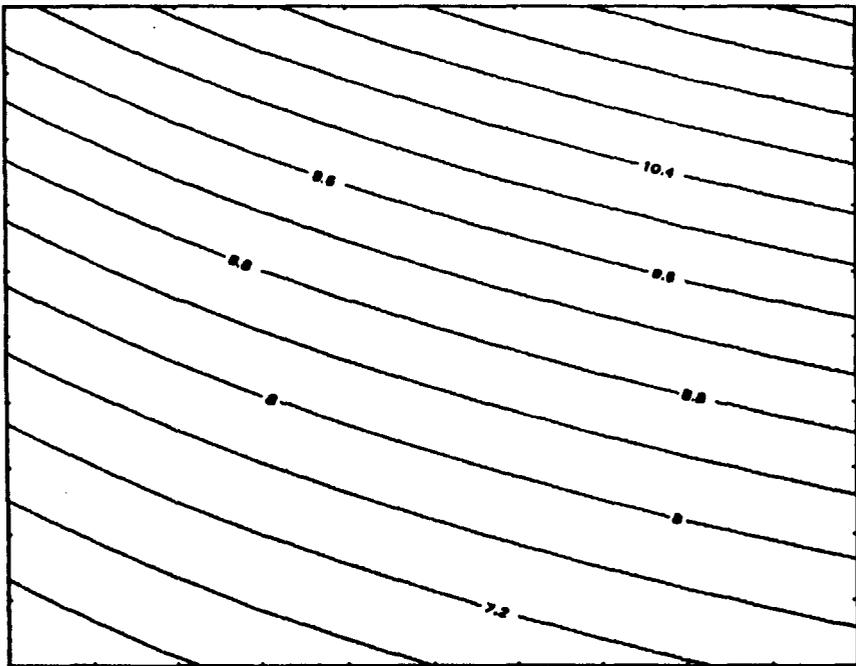


Fig2.6 ISOLINEAS DE LA FUNCION EXACTA

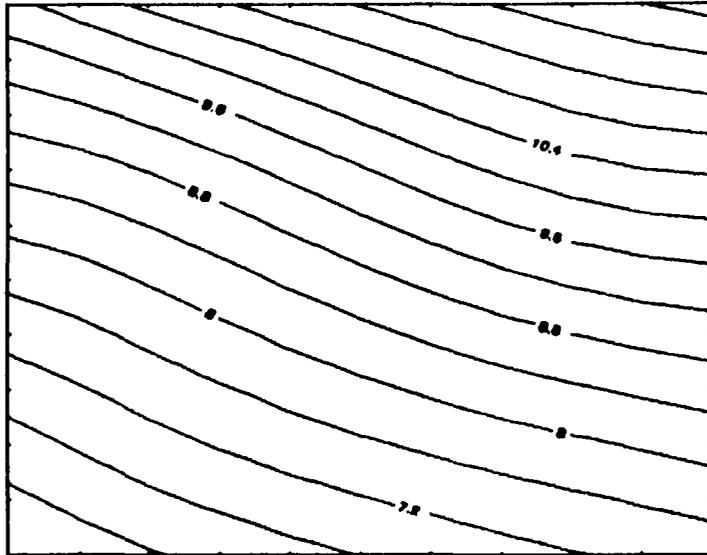


Fig 2,7 . ISOLINEAS; INTERPOLACION DE HERMITE

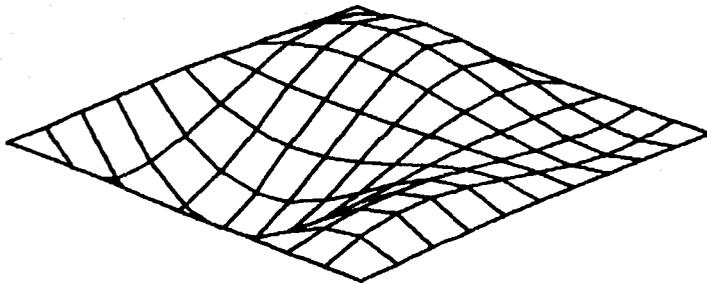


FIG 2,8 . ERROR (en %); INTERPOLACION DE HERMITE

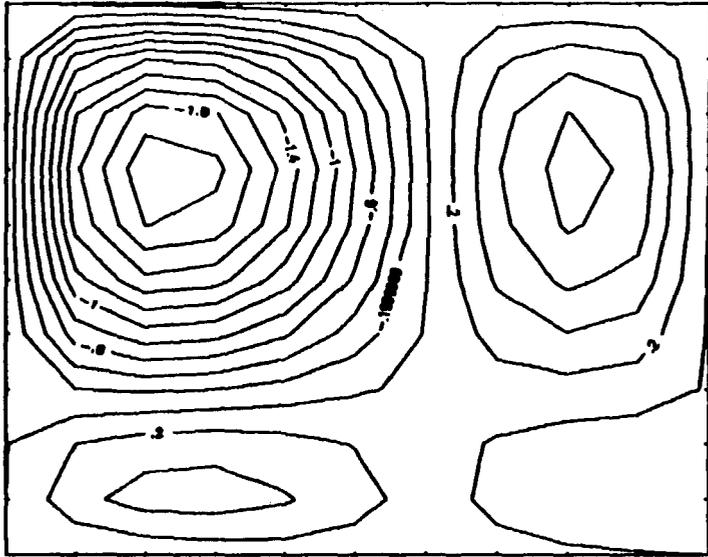


Fig 2.9 . ERROR (en %); INTERPOLACION DE HERMITE

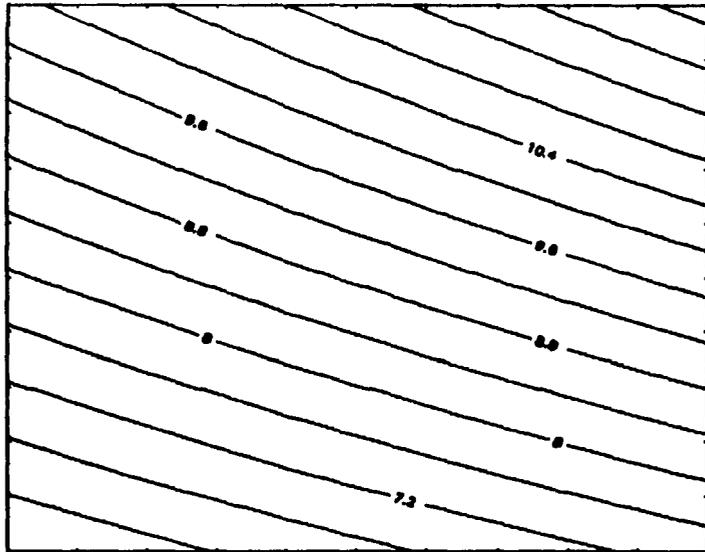


Fig 2.10 ISOLINEAS; INTERPOLACION BILINEAL

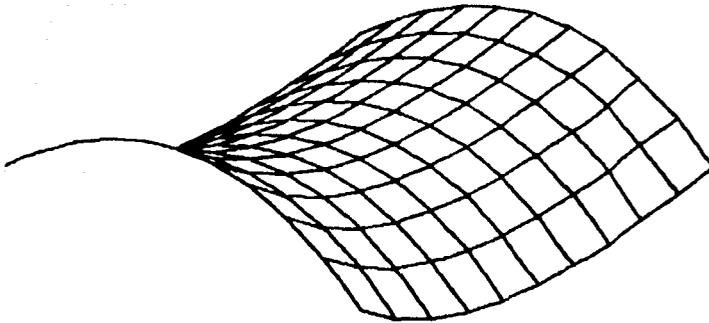


FIG 2.11 ERROR (en ϵ); INTERPOLACION BILINEAL

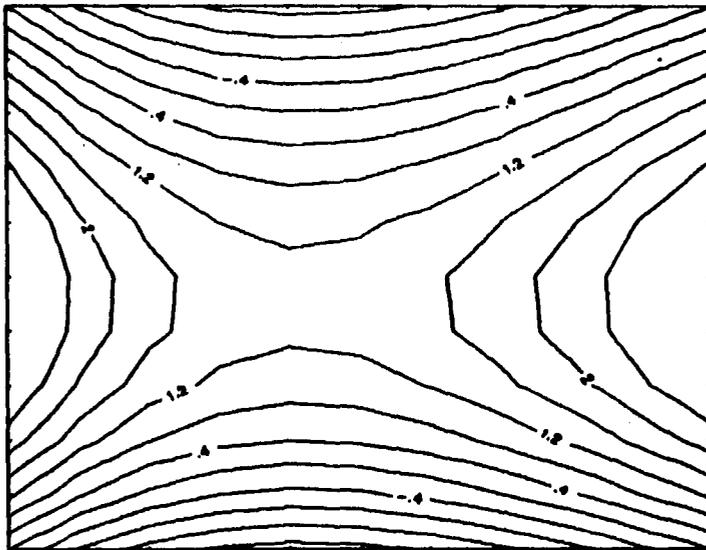


Fig 2.12 . ERROR (en ϵ); INTERPOLACION BILINEAL

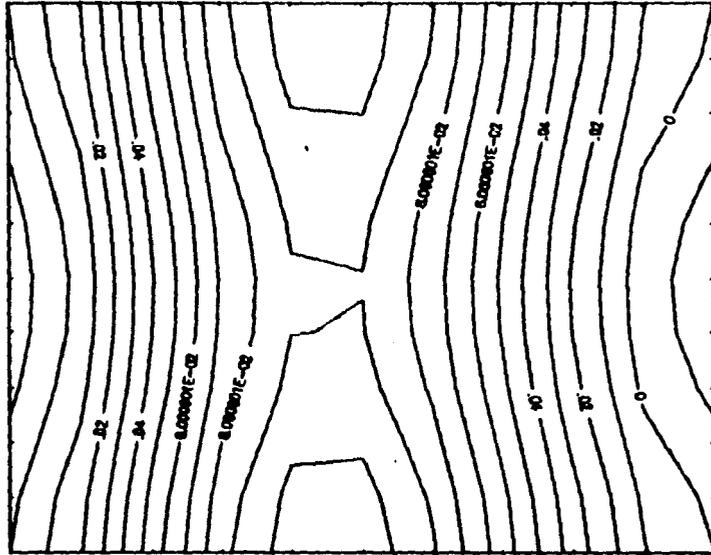


FIG 2.13. ERROR (en $\%$); INTERPOLACION DE HERMITE

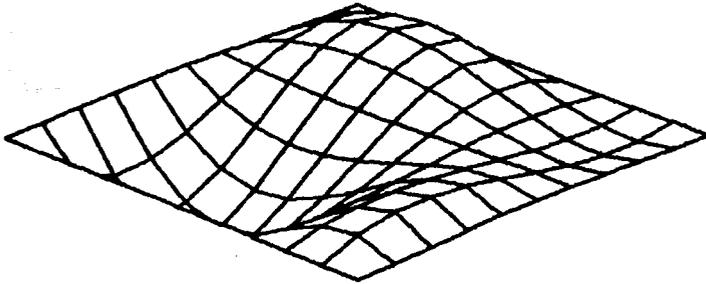


Fig 2.14. ERROR (en $\%$); INTERPOLACION BICUBICA

3. DESARROLLO DEL MODELO.

La idea de este capítulo es describir el modelo para el cálculo de evolución de concentraciones en un dominio en dos dimensiones.

3.1 ECUACION EN FORMA DE CARACTERISTICAS.

En este trabajo se estudia únicamente el concepto de transporte; para ello, se iguala el lado izquierdo de la ec 1.2 a cero, lo que equivale a suponer que el tensor de difusión $k_{ij}=0$. Se obtiene que

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

Utilizando el concepto de derivada total, la ec 3.1 queda

$$\frac{DC}{Dt} = 0 \quad (3.2)$$

siempre y cuando

$$\frac{dx}{dt} = U \qquad \frac{dy}{dt} = V \qquad (3.3)$$

en donde U es la velocidad en dirección x y V es la velocidad en dirección y. En la figura 3.1 se muestra la trayectoria de una partícula caminando en el tiempo. En la figura 3.2 se muestra proyectada en un plano la trayectoria de dicha partícula mostrando el cambio en dichas velocidades del tiempo t_0 a t_1 .

3.2 PLANTEAMIENTO DEL METODO.

Si la trayectoria entre un punto de partida d y un punto de llegada a es determinado por la integración de las ecuaciones 3.3, la ec 3.2 implica

$$C_a = C_d \qquad (3.4)$$

que significa que la concentración es constante a lo largo de la trayectoria de la partícula.

Este principio básico de convección o transporte se puede aplicar haciendo cálculos en puntos nodales de una malla cartesiana como se muestra en la figura 3.3.

El propósito del cálculo de convección es encontrar la nueva concentración C_{ij}^{n+1} al tiempo $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$ en todos los nudos

indicados por i en dirección x y j en dirección y. La trayectoria mostrada en la figura 3.3 es la trayectoria de una partícula que está en el punto d en el tiempo t y llega al nudo (i,j) al tiempo t^{n+1} . Así, la ecuación 3.4 se escribe

$$C_{ij}^{n+1} = C_d^n \qquad (3.5)$$

La figura 3.4 muestra la trayectoria de una partícula que cambia de planos x,y ya que se mueve en el tiempo.

Así, en lugar de resolver la ec 3.1 aproximando las derivadas por diferencias finitas, se reemplaza por el problema de, primero integrar las ecuaciones 3.3 para encontrar las coordenadas del punto d , y después estimar la concentración C_d^n conocidas las concentraciones en los nudos alrededor. En general el punto d no coincide con ningún nudo.

Se sabe que la estimación de C_d^n por interpolación bilineal simple de valores de la concentración en los cuatro nudos adyacentes da una fuerte atenuación numérica que puede resultar incluso mayor que la difusión física dada por el lado derecho de la ec 1.2.

La atenuación puede eliminarse en forma notable usando una interpolación cúbica, pero esto requiere el uso de información en otros nudos cercanos a d . Holly y Preissman han sugerido usar la interpolación bicúbica de Hermite, en la cual no sólo la concentración, sino también sus primeras derivadas y la derivada cruzada para cada nudo se utiliza para construir un polinomio de interpolación para C_d^n (en el capítulo 2 pueden verse distintos tipos de interpolación en dos dimensiones y algunos ejemplos). En el modelo aquí empleado se utiliza la interpolación de Hermite.

Una vez que se ha determinado el valor de la concentración C_d^{n+1} en todos los nudos del dominio, queda por determinar el nuevo valor de las derivadas C_x^{n+1} y C_y^{n+1} y C_{xy}^{n+1} antes de cualquier paso subsecuente. Esto se hace por diferenciación de la ecuación 3.1, con respecto a x y y ; simplificando se obtiene

$$\frac{DC}{Dt}^x = - U_x C_x - V_x C_y \quad (3.6)$$

$$\frac{DC}{Dt}^y = - U_y C_x - V_y C_y \quad (3.7)$$

donde $U_x = \partial U / \partial x$; $U_y = \partial U / \partial y$; $V_x = \partial V / \partial x$ y $V_y = \partial V / \partial y$. Las derivadas C_x y C_y satisfacen ecuaciones lineales ordinarias diferenciales similares a la ec 3.1 a lo largo de la trayectoria, pero con términos no homogéneos, representando una deformación por cortante que los acepta.

Los valores U_x , U_y , V_x , V_y se pueden deducir conociendo el campo de velocidades, por lo que el sistema de ecs 3.6 y 3.7 puede integrarse desde el comienzo de la trayectoria (punto d), donde C_x y C_y se estiman a lo largo de C con la interpolación bicúbica.

Así, integrando la ec 3.6 se tiene

$$\int_d^c dC_x = \int_d^c \left[- U_x C_x - V_x C_y \right] dt$$

Al hacer las simulaciones descritas en los capítulos siguientes, se encontró que el término en el lado derecho de la ecuación anterior es muy pequeño por lo que, la intergral puede aproximarse como

$$C_{xa} \cong C_{xd} - (U_{xa} C_{xd} + V_{xa} C_{yd}) \Delta t$$

de la misma forma, para la ec 3.7

$$C_{ya} \cong C_{yd} - (U_{ya} C_{xd} + V_{ya} C_{yd}) \Delta t$$

Resta por obtener C_{xy}^{n+1} . Al hacer la diferenciación cruzada de la ecuación 3.1 se llega a

$$\frac{DC_{xy}}{Dt} \cong - U_y C_{xx} - V_x C_{yy} - U_{xy} C_x - V_{xy} C_y - (U_x + V_y) C_{xy} \quad (3.8)$$

La solución de esta ecuación diferencial ordinaria requiere no sólo las derivadas cruzadas U_{xy} y V_{xy} , sino también las segundas derivadas C_{xx} y C_{yy} , y las derivadas cruzadas C_{xy} y C_{yx} para la interpolación en el punto d . Para este trabajo se hace

$$C_{xya} \cong C_{xyd} - (U_{xya} C_{xd} + V_{xya} C_{yd} + (U_{xa} + V_{ya}) C_{xyd}) \Delta t$$

Esta aproximación es admisible porque se ha comprobado que para el cálculo en una dimensión, la exactitud del cálculo de convección es insensible a la exactitud en las derivadas C_x y C_y .

3.3 CONDICIONES DE FRONTERA PARA CONVECCION.

El principio general es que, si una trayectoria inversa intersecta una frontera, los valores de C , C_x y C_y deben obtenerse de las condiciones de frontera. Cuando el flujo sale, la trayectoria inversa se extiende al interior del dominio y por tanto no se requieren condiciones de frontera.

En fronteras cerradas donde la velocidad es cero, el punto d siempre debe caer dentro de la celda, por lo que tampoco se requieren condiciones de frontera.

En fronteras donde entra el flujo la información proporcionada por el ingeniero es generalmente la concentración como una función del tiempo y la posición. Sea por ejemplo que el flujo entra por el eje y para $x = 0$ (una línea vertical); la condición de frontera entonces en esa línea es $C(y, t)$. Una vez calculado el

punto d en la frontera y el tiempo de intersección, a partir del cálculo de la trayectoria, C_d se obtiene directamente de $C(y,t)$, también se requiere información de C_x y C_y en el punto d ; una de ellas es la derivada tangencial que se obtiene directamente de la condición de frontera, para el caso aquí descrito sería $C_y = \partial C(y,t)/\partial y$. La otra derivada se obtiene haciendo que la ec 3.1 se satisfaga en la frontera. Para este caso

$$\frac{\partial C(y,t)}{\partial t} + v \frac{\partial C(y,t)}{\partial y} + u \frac{\partial C(y,t)}{\partial x} = 0 \quad (3.9)$$

dado que las dos primeras parciales se obtienen de la función $C(y,t)$, la parcial restante se obtiene despejando de la ec anterior. En este procedimiento se requiere que la función de la condición de frontera $C(y,t)$ sea diferenciable en y y t ; no se permiten discontinuidades. Este mismo procedimiento se aplica en cualquier otra línea de frontera por donde entre el flujo.

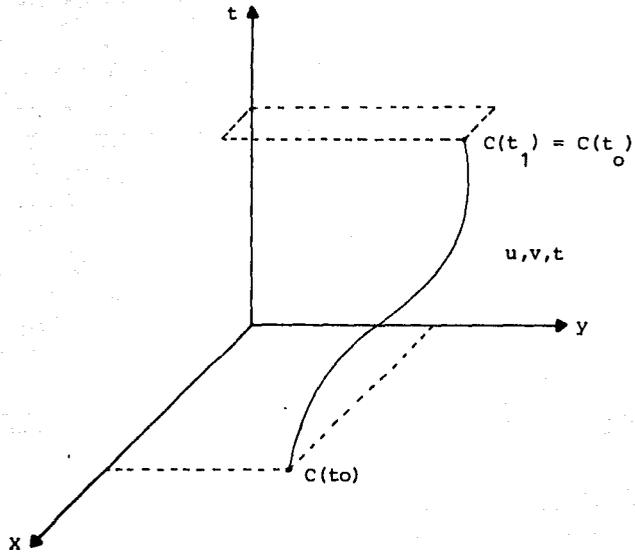


FIGURA 3.1 TRAYECTORIA DE UNA PARTICULA EN EL TIEMPO.

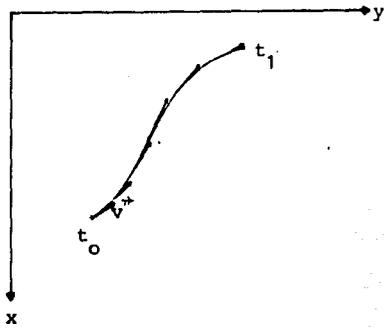


FIGURA 3.2 TRAYECTORIA DE UNA PARTICULA PROYECTADA EN UN PLANO.

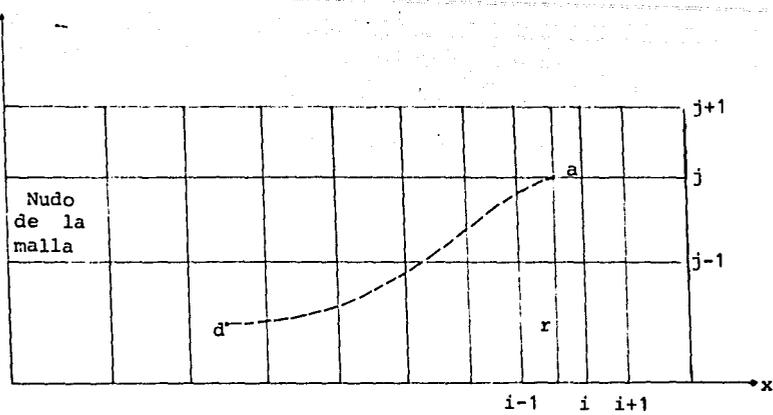


FIGURA 3.3 TRAYECTORIA DE UNA PARTICULA EN UNA MALLA NO UNIFORME.

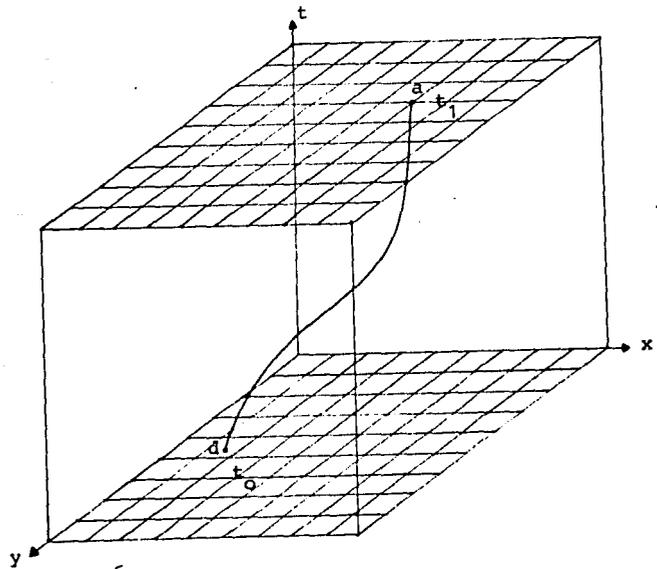


FIGURA 3.4 TRAYECTORIA DE UNA PARTICULA ATRAVES DE DOS PLANOS.

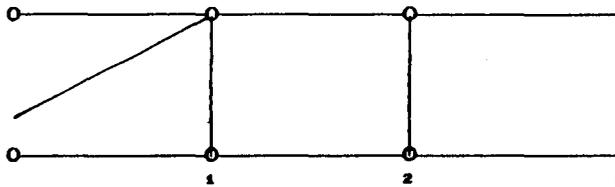


Fig. 3.5 Frontera de entrada.

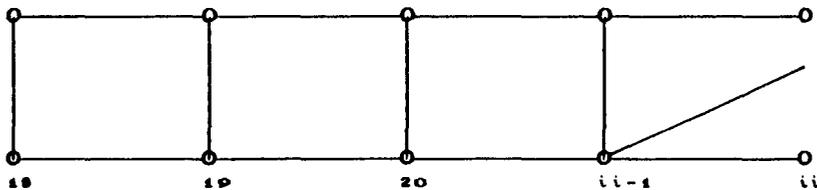


Fig. 3.6 Frontera de salida.

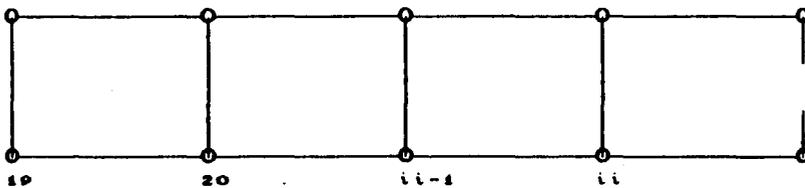


Fig. 3.7 Frontera impermeable.

4. PRUEBAS AL MODELO.

En una primera etapa se hacen pruebas al modelo en una dimensión. Se compara el modelo desarrollado en este trabajo con un esquema en diferencias finitas. Para la prueba en dos dimensiones se analiza una distribución de concentraciones Gaussiana en dos dimensiones, sujeta a advección; para este caso se dispone de una solución analítica.

Es importante utilizar dos métodos diferentes para poder comparar tanto la precisión como la bondad del método. Una ventaja que se presenta en este procedimiento es que se cuenta con una solución analítica como es la distribución Gaussiana ya que comparando se obtienen resultados con una variación notoria al comparar con la prueba de diferencias finitas.

4.1 DIFERENCIAS FINITAS EN UNA DIMENSION.

Otra forma de resolver la ecuación de transporte 3.2 del capítulo tres es por medio de diferencias finitas como se muestra a continuación. Reduciendo la ec 3.2 en una dimensión

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

donde

t tiempo
 x dirección positiva del eje x
 $U(x,t)$ velocidad en dirección x

Las derivadas de la ec 4.1 pueden aproximarse como

$$\frac{\partial C}{\partial t} \approx \frac{C_j^{n+1} - C_j^n}{\Delta t} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} \approx \frac{C_j^n - C_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (4.3)$$

reemplazando las ecs 4.2 y 4.3 en la 4.1

$$\frac{C_j^{n+1} - C_j^n}{\Delta t} + U \frac{C_j^n - C_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (4.4)$$

despejando de la ec 4.4 C_j^{n+1}

$$C_j^{n+1} = C_j^n - U \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[C_j^n - C_{j-1}^n \right] \quad (4.5)$$

En esta ecuación puede calcularse la concentración en el tiempo $(n+1)\Delta t$ conocidos los valores de la concentración en el tiempo $n\Delta t$. A este tipo de esquemas se le llama esquema explícito. A $U\Delta t/\Delta x$ se le conoce como el número de Courant para este esquema.

Para ilustrar el uso de este método se desarrolla un ejemplo con $U = 1 \text{ m/s}$; $\Delta x = 1 \text{ m}$ y con diferentes incrementos de tiempo. Si por ejemplo $\Delta t = 1 \text{ s}$ se obtiene

$$U \Delta t / \Delta x = 1$$

y en la ec 4.5 resulta

$$C_j^{n+1} = C_{j-1}^n \quad (4.6)$$

En la fig 4.1 se presenta un ejemplo en una malla en donde se dan para el tiempo $t=0$ diferentes concentraciones para una distancia de 1 m. En las figs 4.1 y 4.2 se muestran los resultados. Puede verse que dada la ec 4.6, la distribución de las concentraciones son iguales. Tomando por ejemplo los valores de la fig 4.1

$$C_4^2 = C_9^1 = 2.5$$

Si ahora se toma $\Delta t = 1/2$ s, sustituyendo en la ec 4.5 se obtiene

$$C_j^{n+1} = C_j^n - \frac{1}{2} \left[C_j^n - C_{j-1}^n \right]$$

$$C_j^{n+1} = \frac{1}{2} C_j^n + \frac{1}{2} C_{j-1}^n \quad (4.7)$$

Reemplazando los valores de las concentraciones iniciales de la fig 4.1, en la ec 4.7 se obtienen los valores de la fig 4.3; por ejemplo para

$$C_4^2 = \frac{1}{2} \left[C_4^1 + C_9^1 \right] = 0.5 (4 + 2.5) = 3.25$$

se observa que es un método estable.

Ahora si se hace $\Delta t = 2$ s y se sustituye en la ec 4.5 se obtiene

$$C_j^{n+1} = C_j^n - 2 \left[C_j^n - C_{j-1}^n \right]$$

$$C_j^{n+1} = - C_j^n + 2 C_{j-1}^n \quad (4.8)$$

Haciendo el mismo cálculo que en los casos anteriores, se obtienen en este caso las figs 4.5 y 4.6. Se llega a la conclusión que el método es inestable ya que las concentraciones son negativas y con valores muy distantes. En la fig 4.6 se observa que es inestable ya que existen concentraciones negativas que no son físicamente imposibles.

4.2 MODELO PARA COMPARAR EN UNA DIMENSION.

Se hace una prueba con $U\Delta t/\Delta x = 1$ con el modelo descrito en el capítulo 3, se tiene que $C\alpha = Cd$ y $U = 1\text{ m/s}$

Para el desarrollo de este modelo, es necesario primero calcular la trayectoria. Se tiene en este caso, dado que $U = \text{cte}$ que

$$\Delta x = U \Delta t \quad (4.9)$$

Tomando sólo un cuadro de la malla con sus respectivas concentraciones y sus derivadas en cada nudo, fig 4.7, y reemplazando en la ec 4.9, $U = 1\text{ m/s}$ y $\Delta t = 1\text{ s}$ se obtiene Δx , igual a 1 por lo que sustituyendo en las ecuaciones del capítulo 2 (inciso 2.1.2) resulta

$$\alpha = 0; \quad H_{O_1} = 1; \quad H_{O_2} = 0; \quad H_{11} = 0; \quad H_{12} = 0$$

con ayuda de la interpolación de Hermite se obtiene la concentración interpolada (CI) para un $\Delta t=1\text{ s}$; para un punto de coordenadas $j-1$ y con ayuda de sus respectivas derivadas C_{xj}

$$C_j^{n+1} = C\alpha = Cd = CI_{j-1} = H_{O_1} C_j + H_{O_2} C_j + H_{11} C_{xj} + H_{12} C_{xj} \quad (4.10)$$

Sustituyendo valores de los polinomios de Hermite en la ec 4.10

$$CI_j^{n+1} = C_{j-1}^n$$

donde se observa que CI es igual a las concentraciones en los nudos. Los valores son idénticos a los del esquema explícito con $\Delta t=1\text{ s}$ y corresponden a los de la solución exacta.

Fijando ahora $\Delta t = 1/2\text{ s}$ y tomando de la fig 4.2 las concentraciones iniciales y sus derivadas con ayuda de las figs 4.8 y 4.9, sustituyendo en la ec 4.9 se encuentra el $\Delta x = 1/2$, entonces

$$\alpha = 1/2 \quad H_{O_1} = 0.5 \quad H_{O_2} = 0.5 \quad H_{11} = 0.125 \quad H_{12} = -0.125$$

Sustituyendo en la ec 4.10

$$CI_j^{n+1} = C\alpha = 0.5 C_{j-1}^n + 0.5 C_j^n + 0.125 C_{xj-1}^n - 0.125 C_{xj}^n$$

Tomando en cuenta las derivadas dadas en la fig 4.11 para el punto $j=4$

$$C_4^{n+1} = CI_9^n = 0.5(2.5) + 0.5(4) + 0.125(1.5) - 0.125(0) = 3.4375$$

En la fig 4.10 se muestran los resultados obtenidos usando un $\Delta t = 1$ s y en la fig 4.11 se dan los valores para un $\Delta t = 1/2$ s en donde C_x al final del intervalo se calcula con las ecuaciones del inciso 2.3.2 que en este caso dan

$$G_{01}(x) = -1.5 \quad G_{02}(x) = 1.5 \quad G_{11}(x) = -0.25 \quad G_{12}(x) = -0.25$$

$$C_x^{n+1} = G_{01}(x)C_{j-1}^n + G_{02}(x)C_j^n + G_{11}(x)C_{xj-1}^n + G_{12}(x)C_{xj}^n \quad (4.11)$$

Comparando los resultados de la fig 4.11. con los de la fig 4.3 se puede observar que los obtenidos con el modelo aquí desarrollado son más cercanos a la solución exacta.

Haciendo el mismo cálculo pero con $\Delta t = 2$ s (fig 4.12) y comparando con la fig 4.5 se concluye que con el método de diferencias finitas los resultados no son coherentes; sin embargo, con el procedimiento aquí desarrollado se demuestra que las concentraciones son las exactas dado que se interpola exactamente en un nudo de la malla.

4.3 GAUSSIANA EN DOS DIMENSIONES.

Se utilizó una distribución de concentración Gaussiana en dos dimensiones para poder detallar con más exactitud la bondad del método. La ecuación de la distribución de la concentración es la siguiente

$$\frac{C(x,y)}{C_0} = \exp \left[-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x-x_0}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{\sigma_y} \right)^2 \right] \right] \quad (4.12)$$

donde

C_0 concentración en el pico
 x_0, y_0 coordenadas del origen de la concentración
 σ_x equivale a la desviación estandar de la concentración en x
 σ_y equivale a la desviación estandar de la concentración en y

Para poder usar el modelo aquí desarrollado es necesario encontrar las derivadas de la concentración; por lo tanto derivando la ec 4.12 se obtiene

$$C_x = \frac{\partial C}{\partial x} = C_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x-x_0}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{\sigma_y} \right)^2 \right] \right] \left[-\left(\frac{x-x_0}{\sigma_x^2} \right) \right]$$

$$C_y = \frac{\partial C}{\partial y} = C_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x-x_0}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{\sigma_y} \right)^2 \right] \right] \left[-\left(\frac{y-y_0}{\sigma_y^2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} = C_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x-x_0}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{\sigma_y} \right)^2 \right] \right] \left[\left(\frac{x-x_0}{\sigma_x^2} \right) \left(\frac{y-y_0}{\sigma_y^2} \right) \right]$$

Con ayuda de un programa de computadora se pueden calcular las concentraciones en diferentes puntos de la malla pudiendo variar las velocidades (U,V), así como para diferentes tiempos.

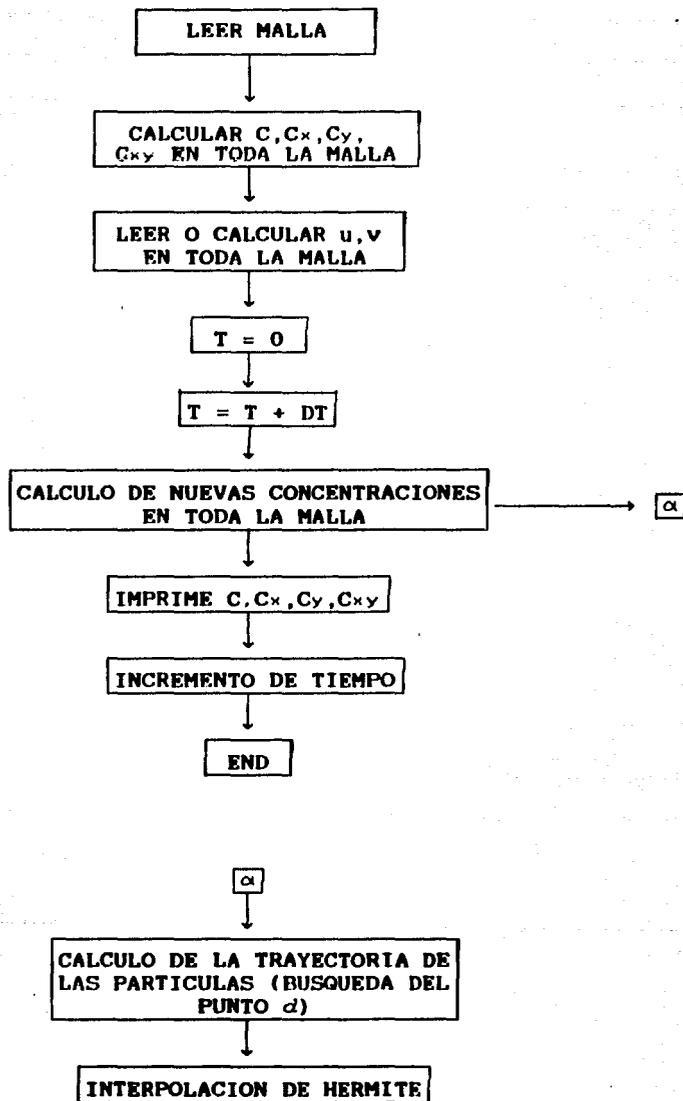
A continuación se muestra un diagrama de flujo del programa realizado.

Como ejemplo se resuelve un caso con los siguientes datos

$\Delta x = 100 \text{ m}$	$\sigma_x = 100 \text{ m}$
$\Delta y = 100 \text{ m}$	$\sigma_y = 200 \text{ m}$
$U = 1 \text{ m/s}$	$V = 0 \text{ m/s}$
$x_0 = 300 \text{ m}$	$y_0 = 400 \text{ m}$

En la fig 4.13 se muestran las concentraciones para el tiempo $t=t_0$; en la fig 4.14 pueden verse las derivadas C_x , C_y , C_{xy} en el cuadrante recordando que la distribución de la concentración es simétrica.

En la tabla (4.1) siguiente se muestran los resultados obtenidos por medio de un programa de computadora si $\Delta t=100 \text{ s}$. Puede verse como se esperaba que los resultados obtenidos son iguales que a los de la función exacta.



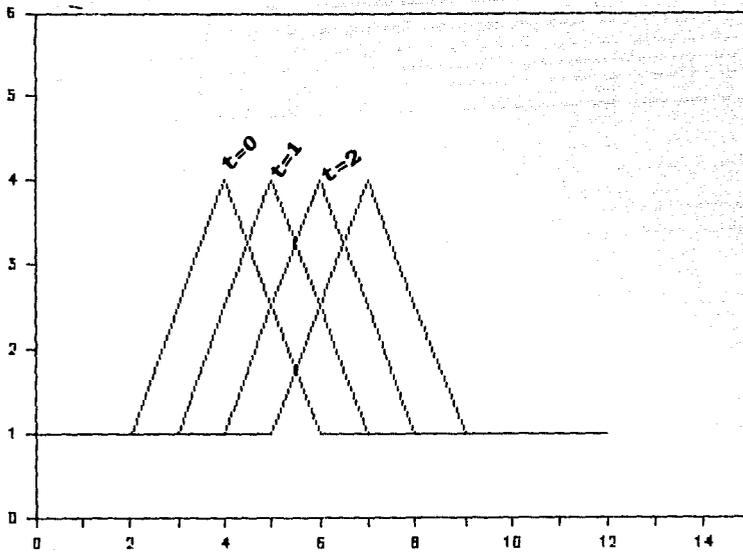


FIGURA 4.1 GRAFICA DE CONCENTRACIONES-DISTANCIA.

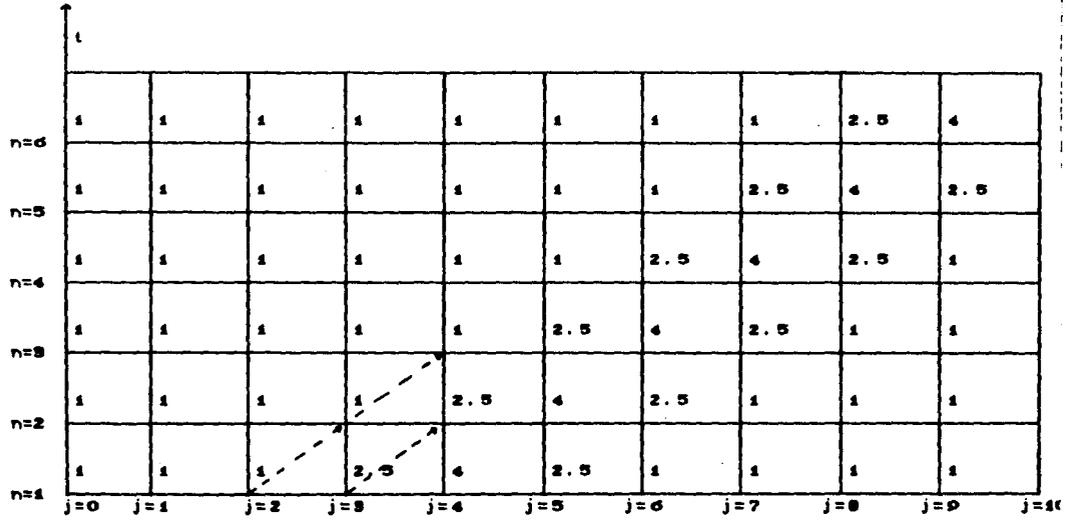


FIGURA 4.2 CONCENTRACIONES PARA $\Delta t=1$ S. ESQUEMA EN DIFERENCIAS FINITAS.

	1	1	1	1.08	1.2	1.67	2.82	2.65	2.82	1.67	
n=7	1	1	1	1.05	1.84	1.99	2.65	2.65	1.99	1.84	
n=6	1	1	1	1.10	1.57	2.41	2.88	2.41	1.57	1.10	
n=5	1	1	1	1.19	1.94	2.88	2.88	1.94	1.19	1	
n=4	1	1	1	1.88	2.5	8.25	2.5	1.88	1	1	
n=3	1	1	1	1.75	8.25	8.25	1.75	1	1	1	
n=2	1	1	1	2.5	4	2.5	1	1	1	1	
n=1	1	1	1	2.5	4	2.5	1	1	1	1	
	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8	j=9	j=10

FIGURA 4.3 CONCENTRACIONES PARA $\Delta t = 1/2$ S. ESQUEMA EN DIFERENCIAS FINITAS.

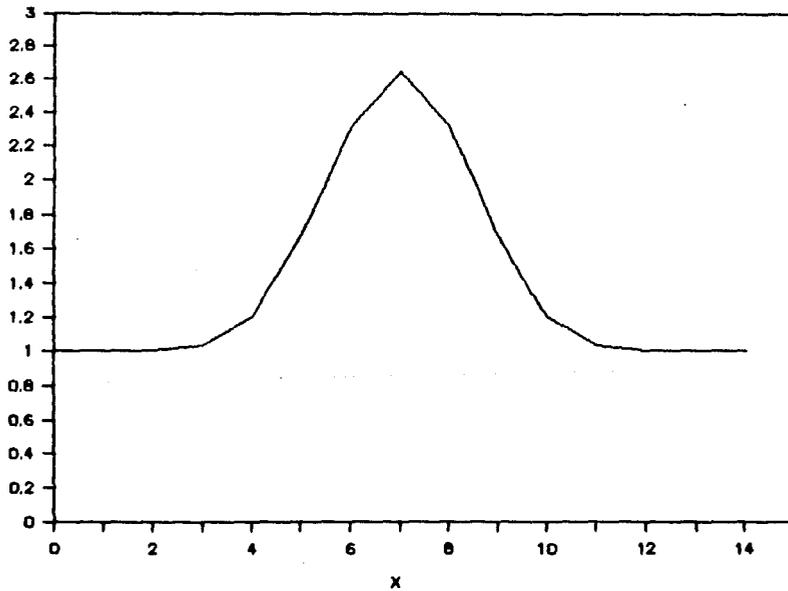


FIGURA 4.4 GRAFICA DE CONCENTRACIONES - DISTANCIA.

	t										
$n=5$											
	1	1	-0.5	5	9.5	-1.4	7	19	1	1	
$n=4$											
	1	1	1	2.5	0	-9.5	7	7	1	1	
$n=3$											
	1	1	1	-0.5	1	5.5	4	1	1	1	
$n=2$											
	1	1	1	2.5	4	2.5	1	1	1	1	
$n=1$											
	1	1	1	2.5	4	2.5	1	1	1	1	
	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$

FIGURA 4.5 CONCENTRACIONES PARA $\Delta t=2$ S. ESQUEMA EN DIFERENCIAS FINITAS.

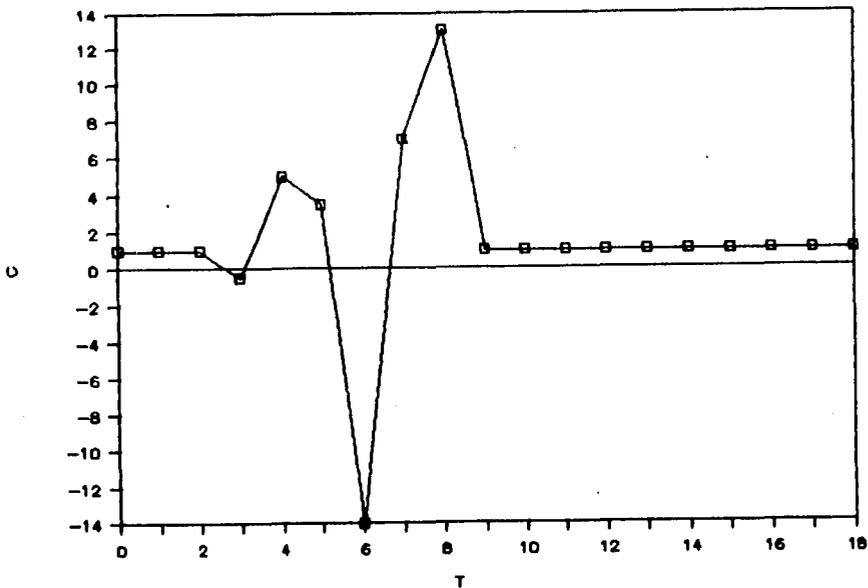


FIGURA 4.6 GRAFICA DE CONCENTRACIONES - DISTANCIA POR DIFERENCIAS FINITAS.

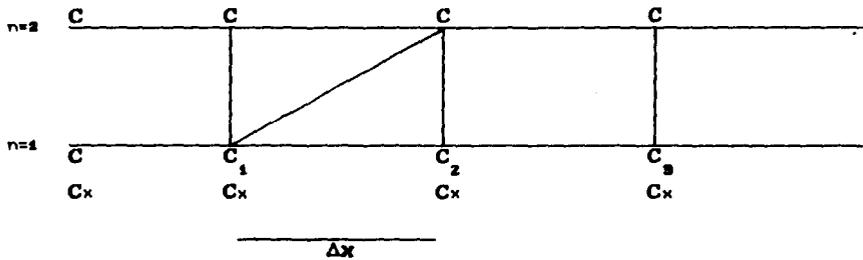


FIGURA 4.7 REPRESENTACION DE UN CUADRO DE LA MALLA CON CONCENTRACIONES Y CON UN $\Delta t=1$ SEG.

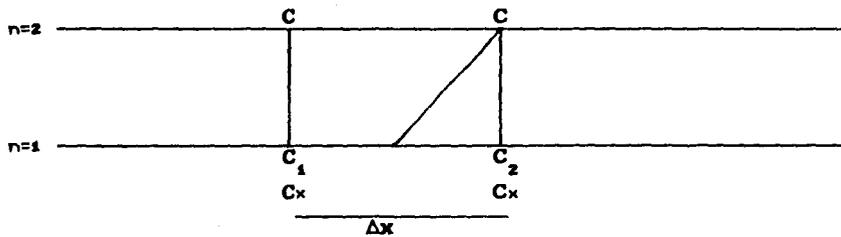


FIGURA 4.8 REPRESENTACION DE UN CUADRO DE LA MALLA CON CONCENTRACIONES Y CON UN $\Delta t=0.5$ SEG.

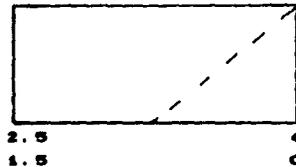


FIGURA 4.9 REPRESENTACION DE UN CUADRO DE LA MALLA CON SUS CONCENTRACIONES.

n=5	1	1	1	1	1	1	2.5	4	2.5	1	
n=4	1	1	1	1	1	2.5	4	1	1	1	
n=3	1	1	1	1	2.5	4	2.5	1	1	1	
n=2	1	1	1	2.5	4	2.5	1	1	1	1	
n=1	1	1	1	2.5	4	2.5	1	1	1	1	
	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8	j=9	j=10

FIGURA 4.10 CONCENTRACIONES PARA $\Delta t=1$ S.

n=2	1	1	1	0.907	1.65	3.43	3.43	1.65	0.907	1	
	0	0	-0.01	-0.05	1.58	1.62	-1.62	-1.58	0.059	0.01	
n=1	1	1	0.977	1.047	2.52	3.90	2.52	1.047	0.977	1	
	0	0	-0.09	0.75	1.78	0	-1.78	-0.75	0.09	0	
n=0	1	1	0.90	1.65	3.43	3.43	1.65	0.90	1	1	
	0	0	-0.18	1.68	1.87	-1.87	-1.68	0.18	0	0	
n=0	1	1	1	2.5	4	2.5	1	1	1	1	
	0	0	0.75	1.5	0	-1.5	-0.75	0	0	0	
	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8	j=9	j=10

FIGURA 4.11 CONCENTRACIONES Y SUS DERIVADAS PARA UN $\Delta t=0.5$ S.

n=3	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0.75	2.5 1.5	4 0	2.5 -1.5	1 -0.75	1 0
n=2	1 0	1 0	1 0	1 0.75	2.5 1.5	4 0	2.5 -1.5	1 0.75	1 0	1 0
n=1	1 0	1 0	1 0.75	2.5 1.5	4 0	2.5 -1.5	1 -0.75	1 0	1 0	1 0
n=0	1 0	1 0	1 0.75	2.5 1.5	4 0	2.5 -1.5	1 -0.75	1 0	1 0	1 0
	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8	j=9

FIGURA 4.12 CONCENTRACIONES PARA $\Delta t=2$ S.

2.00E-8	1.80E-2	8.20E-2	1.85E-1	8.20E-2	1.80E-2	2.00E-8
4.00E-8	4.40E-2	1.97E-1	8.25E-1	1.97E-1	4.40E-2	4.00E-8
7.00E-8	8.20E-2	8.68E-1	6.07E-1	8.68E-1	8.20E-2	7.00E-8
1.00E-2	1.19E-1	5.85E-1	8.82E-1	5.85E-1	1.19E-1	1.00E-2
1.10E-2	1.85E-1	6.07E-1	1.000	6.07E-1	1.85E-1	1.10E-2
1.00E-2	1.19E-1	5.85E-1	8.82E-1	5.85E-1	1.19E-1	1.00E-2
7.00E-8	8.20E-2	8.68E-1	6.07E-1	8.68E-1	8.20E-2	7.00E-8
4.00E-8	4.40E-2	1.97E-1	8.25E-1	1.97E-1	4.40E-2	4.00E-8
2.00E-8	1.80E-2	8.20E-2	1.85E-1	8.20E-2	1.80E-2	2.00E-8

FIGURA 4.13 CONCENTRACIONES DE LA MALLA.

1. 10E-2 00.00E-4 00.00E-4	1. 85E-1 00.00E-3 00.00E-3	6. 07E-1 00.00E-3 00.00E-3	1. 00 00.00
1. 00E-2 22. 84E-2 7. 88E-1 1. 13E-2	1. 10E-1 99. 90E-4 99. 90E-4 7. 88E-1	5. 85E-1 4. 00E-1 1. 00E-3 1. 88E-3	8. 82E-1 00. 00E-3 00. 00E-3
7. 00E-3 2. 00E-1 1. 00E-1 1. 00E-1	8. 20E-2 4. 00E-3 2. 00E-1 0. 00E-4	8. 08E-1 4. 00E-1 2. 00E-3 1. 88E-3	6. 07E-1 00. 00E-3 00. 00E-3
4. 00E-3 1. 00E-1 2. 70E-1 8. 15E-1	4. 40E-2 2. 00E-1 0. 00E-1 0. 00E-4	1. 07E-1 2. 00E-3 1. 00E-3 1. 47E-3	8. 25E-1 0. 00 2. 00E-3 0. 00
2. 00E-3 4. 00E-1 1. 00E-1 4. 00E-1	1. 80E-2 1. 80E-1 1. 80E-1 8. 00E-4	8. 20E-2 1. 00E-3 1. 00E-3 8. 20E-3	1. 85E-1 1. 00E-3 1. 00E-3 0. 00E-3

FIGURA 4.14 MALLA CON CONCENTRACIONES Y SUS DERIVADAS.

111, JJJ, DA, DT, DT, TBA, X00, Y00, X0, Y0, Z0, Z1							5	2
100,000000							100,000000	300,000000
0000000							300,000000	400,000000
100,000000							200,000000	
I	J	X	Y	C	CX	CY	CXY	
1	1	100,0	300,0	.009804	.2941E-03	.2651E-04	.7353E-06	
2	1	100,0	300,0	.119433	.2389E-02	.2986E-03	.5972E-05	
3	1	200,0	300,0	.535261	.5353E-02	.1338E-02	.1338E-04	
4	1	300,0	300,0	.882497	.0000E+00	.2206E-02	.0000E+00	
5	1	400,0	300,0	.535261	.5353E-02	.1338E-02	.1338E-04	
1	2	100,0	400,0	.011109	.3333E-03	.0000E+00	.0000E+00	
2	2	100,0	400,0	.135335	.2707E-02	.0000E+00	.0000E+00	
3	2	200,0	400,0	.606531	.6065E-02	.0000E+00	.0000E+00	
4	2	300,0	400,0	1.000000	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	
5	2	400,0	400,0	.606531	.6065E-02	.0000E+00	.0000E+00	
TIEMPO 100,00 E								
I	J	X	Y	C	CX	CY	CXY	
2	1	100,0	300,0	.009804	.2941E-03	.2651E-04	.7353E-06	
3	1	200,0	300,0	.119433	.2389E-02	.2986E-03	.5972E-05	
4	1	300,0	300,0	.535261	.5353E-02	.1338E-02	.1338E-04	
5	1	400,0	300,0	.882497	.0000E+00	.2206E-02	.0000E+00	
2	2	100,0	400,0	.011109	.3333E-03	.0000E+00	.0000E+00	
3	2	200,0	400,0	.135335	.2707E-02	.0000E+00	.0000E+00	
4	2	300,0	400,0	.606531	.6065E-02	.0000E+00	.0000E+00	
5	2	400,0	400,0	1.000000	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	
TIEMPO 200,00 E								
I	J	X	Y	C	CX	CY	CXY	
2	1	100,0	300,0	.009804	.2941E-03	.2651E-04	.7353E-06	
3	1	200,0	300,0	.009804	.2941E-03	.2651E-04	.7353E-06	
4	1	300,0	300,0	.119433	.2389E-02	.2986E-03	.5972E-05	
5	1	400,0	300,0	.535261	.5353E-02	.1338E-02	.1338E-04	
2	2	100,0	400,0	.011109	.3333E-03	.0000E+00	.0000E+00	
3	2	200,0	400,0	.011109	.3333E-03	.0000E+00	.0000E+00	
4	2	300,0	400,0	.135335	.2707E-02	.0000E+00	.0000E+00	
5	2	400,0	400,0	.606531	.6065E-02	.0000E+00	.0000E+00	
TIEMPO 300,00 E								
I	J	X	Y	C	CX	CY	CXY	
2	1	100,0	300,0	.009804	.2941E-03	.2651E-04	.7353E-06	
3	1	200,0	300,0	.009804	.2941E-03	.2651E-04	.7353E-06	
4	1	300,0	300,0	.009804	.2941E-03	.2651E-04	.7353E-06	
5	1	400,0	300,0	.119433	.2389E-02	.2986E-03	.5972E-05	
2	2	100,0	400,0	.011109	.3333E-03	.0000E+00	.0000E+00	
3	2	200,0	400,0	.011109	.3333E-03	.0000E+00	.0000E+00	
4	2	300,0	400,0	.011109	.3333E-03	.0000E+00	.0000E+00	
5	2	400,0	400,0	.135335	.2707E-02	.0000E+00	.0000E+00	

TABLA 4.1 RESULTADOS OBTENIDOS.

5. APLICACION.

5.1 DESCRIPCION DEL PROBLEMA.

En el presente capítulo se desarrolla un ejemplo de aplicación. Se estudia la descarga de agua caliente de un termoeléctrica en una zona costera. Se realiza un análisis de los datos del problema, como la batimetría del lugar, las mareas y flujos, concentraciones o temperaturas. Se muestran los resultados obtenidos de la hidrodinámica, el cálculo del campo de temperaturas, las velocidades medias y sus derivadas; finalmente se discuten los resultados obtenidos del campo de temperatura.

En cuanto a la descarga térmica se analiza un sistema abierto. Se entiende por sistema abierto aquel en el que el agua de enfriamiento que pasa por los condensadores no se vuelve a utilizar. Esto es, no se necesita enfriarla para su uso posterior. Para analizar la descarga en este trabajo sólo se toma en cuenta el campo lejano, por la dimensión de la malla en estudio. Se denomina campo lejano de una descarga térmica al espacio donde el chorro de agua caliente ha perdido el impulso original y pasa a ser una mancha de agua relativamente caliente, que es arrastrada por las corrientes advectivas del lugar.

Se desea conocer la evolución del agua caliente en la zona que se estudia.

6.2 ANALISIS DE DATOS.

Para la aplicación que aquí se describe se considera un caso sencillo en que la marea se mueve de izquierda a derecha y se mantiene constante un tiempo muy largo.

Primeramente se realizó un estudio de la batimetría de la zona en estudio, mostrada en las figs 5.1 y 5.2; la fig 5.2 fué obtenida con computadora, usando un programa para graficar niveles (ref 7). Para este ejemplo se realiza una descarga de agua caliente en el punto marcado en la figura con un gasto de $30 \text{ m}^3/\text{s}$, la temperatura de la descarga está por arriba de la del agua circundante con un $\Delta T = 10^\circ \text{ C}$, por la frontera izquierda entra un gasto unitario promedio de $0.348 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, por la frontera derecha se considera que el nivel es cero, y el flujo sale de la zona en estudio. En la parte inferior el flujo es nulo.

5.3 HIDRODINAMICA.

El campo de velocidades producido por las mareas, corrientes oceánicas o por la misma influencia de la toma y la descarga se determinó con una simulación numérica mediante computadora sin tomar en cuenta los cambios de temperatura. Es decir, considerando solamente la hidrodinámica descrita en el capítulo uno de este trabajo.

Se efectuó el cálculo con un número de horas, hasta lograr que el campo de flujo sea más o menos constante.

Como se observa en la fig 5.3, el chorro de la descarga que entra al dominio de la malla por la parte superior (elemento 83 en la fig 5.4), se esparce hacia el lado derecho. También se puede observar que hay velocidades muy pequeñas que no alcanzan a dibujarse.

Para el análisis se tiene una malla de la hidrodinámica (fig 5.5) con línea continua y la malla de convección con línea discontinua, en esta figura se observa que la malla de convección está exactamente al centro de la malla original. En esta malla se tienen como datos las velocidades V y U , en la malla de convección se tienen las concentraciones y profundidades. Para calcular las velocidades medias se suman las velocidades de la malla de la hidrodinámica y se dividen entre

dos para las direcciones x y y . Para encontrar las derivadas se obtienen de la diferencia de las velocidades medias dividiendo entre su ancho.

5.4 CALCULO DEL CAMPO DE TEMPERATURAS.

Cuando el agua caliente se descarga en el mar, el exceso de temperatura que traía ésta descarga se pierde en una gran mayoría por mezclado con el agua circundante. Después de recorrer un trecho no muy largo, esta agua diluida se esparce por la superficie del mar. Su movimiento depende principalmente de las corrientes marinas, de la velocidad y dirección del viento. El enfriamiento se debe principalmente por intercambio de calor con la atmósfera y es prácticamente nulo por intercambio de calor con el agua de mar sobre la cual flota.

Para el cálculo del campo de temperaturas se desarrolló un programa de computadora. Para su uso es necesario tomar en cuenta los siguientes datos:

número de elementos	156
incremento de tiempo	360 s
tiempo inicial de simulación	0:0 h
tiempo final de simulación	20:00 h
tamaño de los elementos en x y y	120 y 180
dimensión de la malla	14 x 13

5.5 DISCUSION DE RESULTADOS.

En las fig 5.6 y 5.7 se muestran las temperaturas en exceso para 10 y 20 h, se realizaron para diferentes tiempos ya que es necesario que la descarga se estabilice. Para una concentración de 9.5 se observa que está muy pegada a la orilla, para una concentración de 5 se va alejando un poco más saliendo por la orilla. La concentración 1 se encuentra más alejada y a las 20 h se observa que sale por la frontera derecha.

Los resultados de las concentraciones obtenidas se pueden ver en la fig 5.8 para diferentes tiempos.

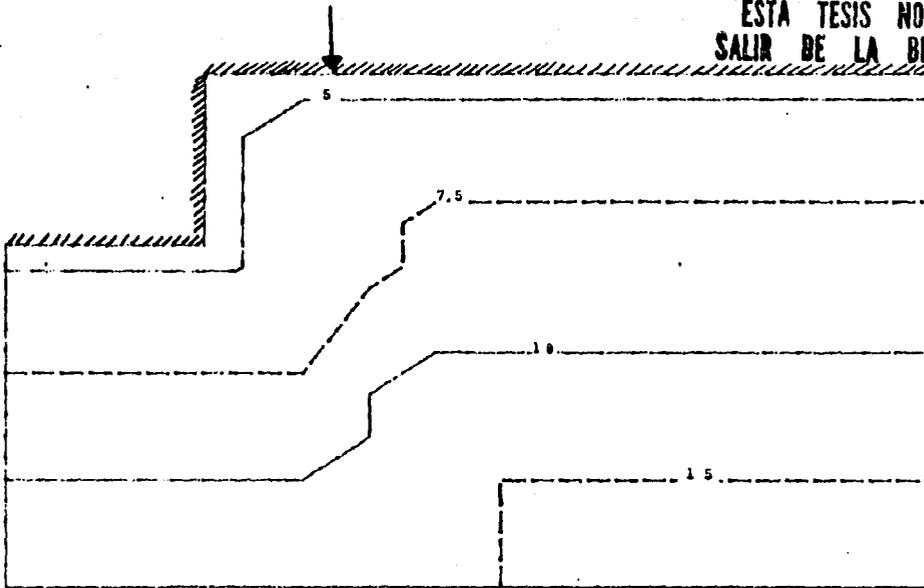


FIGURA 5.1 BATIMETRIA DE LA ZONA

```

*****
*****-5   -5  -5  -5  -5  -5  -5  -5  -5  -5  -5
*****  -5  -6  -6  -6  -6  -6  -6  -6  -6  -6  -6
*****  -5  -6  -7  -7  -7  -7  -7  -7  -7  -7  -7
*****  -5  -6  -7  -8  -8  -8  -8  -8  -8  -8  -8
-5   -5  -5  -5  -6  -7  -8  -8  -8  -8  -8  -8  -8  -8
-6   -6  -6  -6  -6  -8  -8  -9  -9  -9  -9  -9  -9  -9
-7   -7  -7  -7  -7  -9  -10 -10 -10 -10 -10 -10 -10 -10
-8   -8  -8  -8  -8  -10 -12 -12 -12 -12 -12 -12 -12 -12
-9   -9  -9  -9  -9  -10 -13 -13 -13 -13 -13 -13 -13 -13
-10  -10 -10 -10 -10 -12 -13 -15 -15 -15 -15 -15 -15 -15
-12  -12 -12 -12 -12 -12 -13 -15 -16 -16 -16 -16 -16 -16
-13  -13 -13 -13 -13 -13 -13 -15 -17 -17 -17 -17 -17 -17
    
```

FIGURA 5.2 PROFUNDIDADES DE LA ZONA

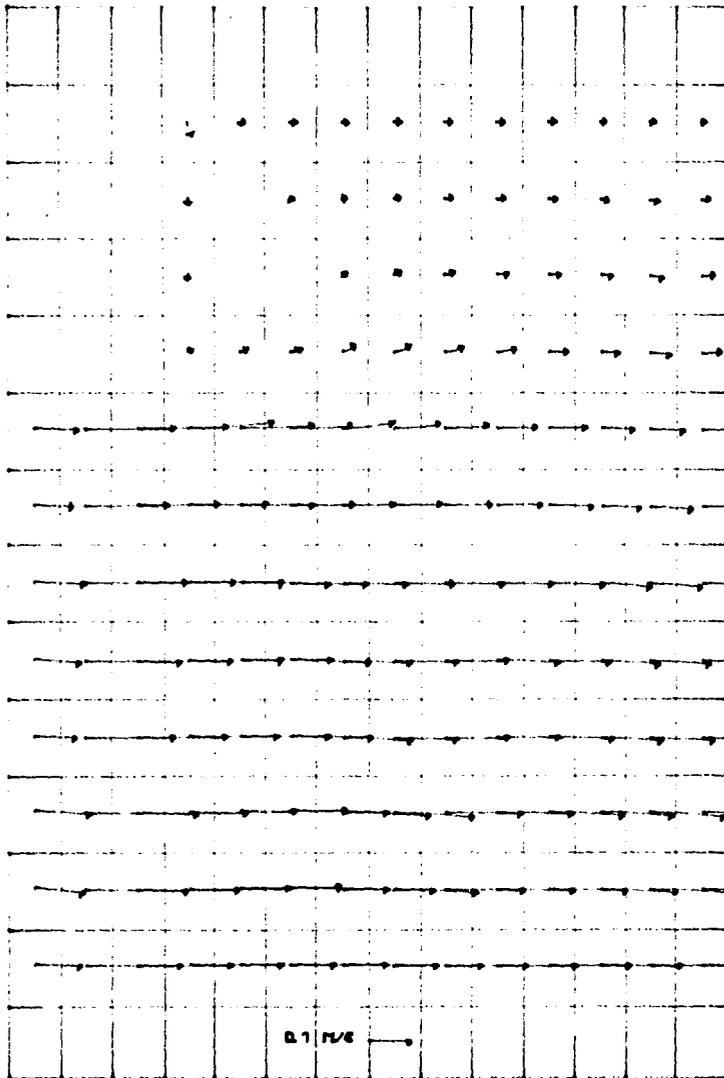


FIGURA 5.3 VELOCIDADES

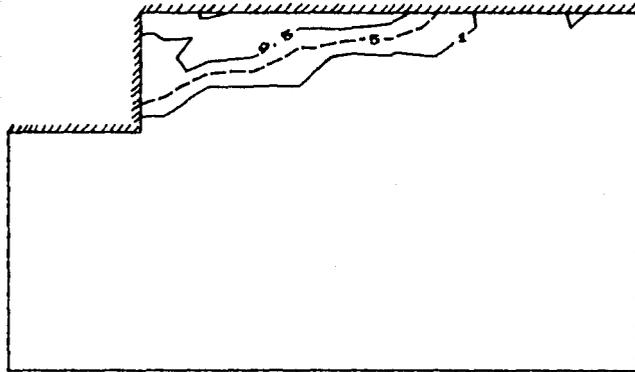


FIGURA 5.6 TEMPERATURA EN EXCESO A 10 H

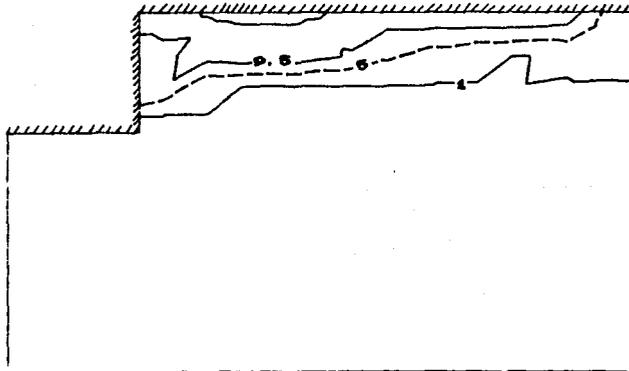


FIGURA 5.7 TEMPERATURA EN EXCESO A 20 H

TIEMPO = 20.00 H

*****	10.0	9.9	9.7	9.7	9.8	9.9	9.9	9.9	9.8	9.0	2.2
*****	8.8	11.0	11.8	12.0	9.4	5.8	2.8	.8	-1.1	1.1	2.4
*****	9.0	1.2	-2	-1	.0	.0	.0	.0	.0	-3	-5
*****	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0

FIGURA 5.8 CONTINUACION

6. CONCLUSIONES.

En el capítulo 2 se analiza la interpolación en dos dimensiones. Se demuestra que aplicando la interpolación de Hermite se obtienen resultados muy satisfactorios a comparación con otras interpolaciones mencionadas en el mismo capítulo. Se advierte que es más exacta y además la función interpolada es continua, así como sus derivadas.

En el capítulo 3 se describe un modelo para el cálculo de evolución de concentraciones, considerando únicamente la convección en un dominio en dos dimensiones basado en el método de las características. El método utiliza la interpolación de Hermite.

En el capítulo 4 se hicieron pruebas al modelo en una y dos dimensiones. Con el auxilio de un programa de computadora se pudo comprobar la bondad del método al analizar la convección de una distribución de concentración Gaussiana en dos dimensiones.

En el capítulo 5 se muestra una aplicación en la que se analiza la descarga de agua caliente de una termoeléctrica.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

1. James W. DAILY, Donald R. F. Harleman (1969) "Dinámica de Fluidos con aplicaciones en Ingeniería. Editorial Trillas, S.A.
2. Richard L. Burden, J. Douglas Faires, Albert C. Reynolds (1981) "Numerical Analysis". Ed. Prindle, Weber & Schmidt.
3. Moisés Berezowsky V., F. Javier Aparicio M (1987) "Continuidad y cantidad de movimiento", XIII Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería.
4. S. F. Rao (1982) "The finite element Method in Engineering". First Edition.
5. Forrest M. Holly, Jean-Marc, Usseglio-Polatera (Julio, 1984) "Journal of Hydraulic Engineering". Vol. 110, No. 7.
6. Manual de Diseño de Obras Civiles. Hidrotécnica. (1983). A.2.14 Obras de toma de sistemas de enfriamiento para plantas termoeléctricas. Comisión Federal de Electricidad.
7. Francisco Javier Torres Verdin. Tesis Profesional (México, D. F. 1987). "Graficación con computadora de resultados de modelos Hidrodinámicos de lagunas"