21 2ej.

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"MODULOS INYECTIVOS"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
M A T E M Á T I C O
PRESENTA
PABLO MENDOZA ITURRALDE

MÉXICO, 1988.

Introducción

En el capitulo I se hacen consideraciones y caracteristicas sobre los módulos inyectivos.

Los módulos inyectivos juegan un papel importante en ciertas categorías (además de la categoría de R-módulos) como:

La categoria de los espacios de Banach, en ésta el campo de los números reales es inyectivo. En la categoria de los espacios Topológicos normales, el intervalo cerrado [0,1] es inyectivo; este es el Teorema de Tietze [6], etc.

Además algunos resultados de inyectivos en la categoría de R-módulos pueden ser probados en estas categorías: uno de los más notables es que el producto directo de inyectivos es inyectivo, otro que la cápsula inyectiva de un dominio conmutativo es su campo de cocientes, para una generalización [7].

En el capitulo II se hacen consideraciones y relaciones entre los módulos inyectivos y los módulos semisimples. Resultando por ejemplo que si R es un anillo semisimple, cada R-modulo es semisimple ssi cada

R-módulo es inyectivo.
Otro resultado importante es que los módulos inyectivos inescindibles y los módulos simples tienen anillos casilocales de endomorfismos, y además de que si por ejemplo $\{E_i\}_{i\in I}$ y $\{F_j\}_{j\in J}$ son familias de R-módulos tal que $\bigoplus_{i\in I} E_i \cong \bigoplus_{j\in J} F_j$ donde los E_i y los F_j son simples ó inyectivos inescindibles existe una correspondencia uno a uno entre las 2 familias tal que los módulos correspondientes son isomorfos.
Se estudia el concepto de finitamente cogenerado para dar una caracterización para los módulos Artinianos y se compara con él concepto de finitamente generado.
En el capitulo III se dan ciertas caracterizaciones de los anillos Artinianos y Neterianos, destacando la que afirma:
R es un anillo Neteriano ssi cada suma directa de R-módulos inyectivos es inyectivo.
Se introduce el concepto de módulos inyectivos inescindibles asociados.
Se hace un estudio de la descomposición normal y se prueban los los 2 Teoremas de descomposición

normal destacando el segundo que afirma que si K es un submódulo de un R-módulo de M entonces:

(a) K tiene una descomposición normal en M.

(b) $E(M/K)$ es la suma directa de un número finito de módulos inyectivos inescindibles.

Tenemos por ejemplo que si M es un R-módulo que es Neteriano ó Artiniano y K un submódulo de M, entonces, K tiene una descomposición normal en M.

Se tiene que la descomposición normal se reduce a la descomposición de Lasker-Noether cuando M es un módulo Neteriano sobre un anillo conmutativo.

Se prueba una caracterización para los dominios de Dedekind en términos de módulos inyectivos.

Se prueba que un anillo Artiniano conmutativo es la suma directa de un número finito de anillos locales Artinianos. Se introduce el concepto de H-anillo.

CONTENIDO

Módulos Inyectivos

Proposición 1.1 Sea E un R-módulo

Son equivalentes:

(a) Dado un diagrama de R-módulos, con renglón exacto, existe un R-homorfismo $B \longrightarrow E$ tal que, el diagrama resultante es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed] \\ & E & \end{tikzcd}$$

(b) Dado un diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "inc."] \arrow[d] & R \arrow[dl, dashed] \\ & E & \end{tikzcd}$$

donde I es un ideal de R, entonces existe un R-homomorfismo $R \longrightarrow E$ tal que el diagrama resultante es conmutativo.

(c) Dada una sucesión exacta $0 \to A \to B \to C \to 0$ de R-módulos, la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom_R(C,E) \longrightarrow Hom_R(B,E) \longrightarrow Hom_R(A,E) \longrightarrow 0$$

es exacta

Definición. Un R-módulo E que satisface las condiciones equivalentes (a), (b) y (c) se dice que es inyectivo

Un grupo abeliano se dice que es inyectivo, si es inyectivo como Z-módulo.

Observación. La propiedad de ser inyectivo es preservada bajo isomorfismo, ya que si E es inyectivo, y E'

Proposición I.6. Cada módulo inyectivo es divisible.

Sea E un R-módulo inyectivo, $e \in E$ y $r \in R$ que no es un divisor derecho del cero. Considere la siguiente figura:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Rr \arrow[r, "inc."] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Donde $f: Rr \longrightarrow E$ es definido por $f(sr) = se \, (s \in R)$

Note que ya que r no es un divisor derecho del cero, si $sr = 0$ entonces $s = 0$ y $f(sr) = se = 0$, lo cual muestra que f es un R-homomorfismo bien definido.

Ya que E es inyectivo, existe un R-homomorfismo $g: R \longrightarrow E$ que coincide con f en Rr. Así $e = f(r) = g(r) = rg(1)$, lo cual muestra que E es divisible.

Ahora una caracterización parcial en el sentido inverso, antes una definición.

Definición. Sea R un dominio y E un R-módulo.

Un elemento $e \in E$ se dice que es un "elemento de Torsión" de E si existe $0 \neq r \in R$ tal que $re = 0$.

Si el único elemento de Torsión es el elemento cero, E se dice "libre de Torsión".

Proposición I.7. Sea R un dominio conmutativo y E un R-módulo divisible libre de Torsión. Entonces E es inyectivo.

es Tal que $E \cong E'$, se deduce del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed, "\varphi^{-1}\circ v"'] \arrow[ddl, "v"] \\ & E' \arrow[d, "\varphi \cong"'] & \\ & E & \end{tikzcd}$$

(c) es equivalente al hecho de que, si la sucesión $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\theta} B$ es exacta, entonces la sucesión $\mathrm{Hom}_R(B,E) \xrightarrow{\Theta} \mathrm{Hom}_R(A,E) \longrightarrow 0$, donde Θ está dado por $\Theta(f) = f\theta$ [$f \in \mathrm{Hom}_R(B,E)$], También es exacta.

El hecho anterior lo podemos expresar de la siguiente manera, si Tenemos un renglón exacto $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\theta} B$, y ya que Θ es sobre, si consideramos $g: A \longrightarrow E$ existe $f: B \longrightarrow E$ Tal que $\Theta(f) = g$, esto es $f\theta = g$ es decir el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Así (c) y (a) son equivalentes:

Ahora supondremos (b) y deduciremos (a); ya que (b) es un caso especial de (a), se completaría la prueba.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[dl, "\phi"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

donde A es un submódulo de B

Denotemos por Ω la colección de Todos los pares (C, ϕ) donde: (i) C es un submódulo de B que contiene a A. (ii) $\phi: C \to E$ es un R-homomorfismo Tal que el diagrama anterior es conmutativo, es decir, ϕ extiende a h.

Entonces Ω es no vacía ya que, claramente $(A, h) \in \Omega$. Introduzcamos un orden parcial en Ω. Decimos que $(C_1, \phi_1) \leq (C_2, \phi_2)$ si C_1 es un submódulo de C_2 y si el siguiente diagrama es conmutativo.

Así Ω es un sistema inductivo.

Ahora si $\{(C_\lambda, \phi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ es un subconjunto Totalmente ordenado de Ω, entonces Tiene una cota superior $(\overline{C}, \overline{\phi}) \in \Omega$, donde $\overline{C} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ y $\overline{\Phi}: \overline{C} \to E$, es definido por $\overline{\Phi}(\overline{c}) = \phi_\lambda(\overline{c})$ si $\overline{c} \in C_\lambda$. Por el lema de Zorn, Ω Tiene un elemento máximo (C_0, ϕ_0).

Falta probar que $B = C_0$.

Suponga que $C_0 \neq B$, existe $x \in B$, $x \notin C_0$.

Sea $I = C_0 : x$, es decir, I consiste de Todos los elemen-

Tos $r \in R$ Tal que $rx \in C_0$. I es un ideal de R.
Definimos $\mu : I \longrightarrow E$ por $\mu(r) = \phi_0(rx)$, donde $r \in I$
μ es un R-homomorfismo ya que si $s \in R$, $\mu(sr) = \phi_0(srx) = s\phi_0(rx) = s\mu(r)$, y ya que, estamos suponiendo (b), existe un R-homomorfismo $v : R \longrightarrow E$ Tal que el diagrama siguienTe es conmuTaTivo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\text{inc.}"] \arrow[d, "\mu"'] & R \arrow[dl, "v"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Ahora definamos un nuevo mapeo $\psi : C_0 + Rx \longrightarrow E$ por $\psi(c_0 + rx) = \phi_0(c_0) + v(r)$ $(c_0 \in C_0,\ r \in R)$
Si $c_0 + rx = 0$, enTonces $rx = -c_0$, así $r \in C_0 : x$ que es jusTamenTe I, y $\phi_0(c_0) + v(r) = -\phi_0(rx) + v(r) = -\mu(r) + v(r) = 0$ [ya que $\mu(1) = v(1)$].
Así ψ es un R-homomorfismo bien definido. Pero si $a \in A$, enTonces $\psi(a) = \phi_0(a) = h(a)$, lo cual muesTra que el siguienTe diagrama es conmuTaTivo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\text{inc.}"] \arrow[d, "h"'] & C_0 + Rx \arrow[dl] \\ E & \end{tikzcd}$$

De donde $(C_0 + Rx, \psi) \in \Omega$. Pero $(C_0, \phi_0) < (C_0 + Rx, \psi)$
EsTo conTradice la maximalidad de (C_0, ϕ_0), por lo TanTo $C_0 = B$ y se esTablece (a)

Ejemplos.- Ya que un anillo con división D tiene solamente dos ideales izquierdos 0 y D mismo, usando (b) de 1.1, se tiene que cada módulo sobre un anillo con división es inyectivo. Cada espacio vectorial, que es un módulo sobre un campo K (que tiene solo dos ideales 0 y K), de la misma manera es inyectivo. Se probará en 2.7 que la clase de anillos R en la que cada R-módulo es inyectivo es precisamente la clase de anillos semisimples.

Proposición 1.2. Sea $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de R-módulos. Entonces $\prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ es inyectivo $\Longleftrightarrow$ cada E_λ es inyectivo.

Prueba.- Sea $E=\prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ y denote las inyecciones y proyecciones asociadas con el producto directo por

$$\phi_\lambda: E_\lambda \longrightarrow E, \quad \pi_\lambda: E \longrightarrow E_\lambda$$

Suponga primero que cada E_λ es inyectivo, y considere el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed] \\ & E & \end{tikzcd}$$

El renglón es exacto. Para cada λ, se tiene que existe $g_\lambda \in \mathrm{Hom}_R(B, E_\lambda)$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[ddl, "g_\lambda"] \\ & E \arrow[d, "\pi_\lambda"'] & \\ & E_\lambda & \end{tikzcd}$$

Definamos $g: B \longrightarrow E$ por $g(b) = \{g_\lambda(b)\}_{\lambda \in \Lambda}$ $(b \in B)$

Entonces g es un R_ homomorfismo, y si $a \in A$,
$g(\psi(a)) = \{g_\lambda(\psi(a))\} = \{\pi_\lambda(f(a))\} = f(a)$, lo cual muestra que E es inyectivo.

Recíprocamente, suponga que E es inyectivo, sea $\lambda \in \Lambda$ y considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\mu"'] & B \\ & E_\lambda & \end{tikzcd}$$

Ya que E es inyectivo, si consideramos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\mu"'] & B \arrow[dl, dashed, "h'"'] \arrow[ddl, "h"] \\ & E_\lambda \arrow[d, "\phi_\lambda"'] & \\ & E & \end{tikzcd}$$

Existe $h \in Hom_R(B, E)$ Tal que $h\psi = \phi_\lambda \mu$. Así se define $h': B \longrightarrow E_\lambda$ por $h'(b) = \pi_\lambda(h(b))$ $(b \in B)$

Entonces h' es un R_ homomorfismo, y si $a \in A$,

$h'[\psi(a)] = \Pi_\lambda[h(\psi(a))] = \Pi_\lambda[\phi_\lambda(\mu(a))] = \mu(a)$, esto muestra que cada E_λ es inyectivo.

Proposición 1.2.- Sea $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de R-módulos.

(i) Si $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ es inyectivo, entonces cada E_λ es inyectivo

(ii) Si el conjunto de índices Λ es finito y cada E_λ es inyectivo, entonces $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ es inyectivo.

La parte (ii) es inmediata, ya que la suma directa y el producto directo (finito) de una familia de R-módulos coincide.

La parte (i) es similar a la segunda parte de 1.2, y que cada E_λ es sumando directo de $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$

El hecho de que Λ tenga que ser finito, es porque de otro modo, no podemos garantizar que hay tan solo un número finito de $g_\lambda(b)$ que son no cero.

Sin embargo esto provee una caracterización de anillos Neterianos. En el Teorema 3.1 se probará que un anillo R es Neteriano $\Leftrightarrow$ la suma directa de una familia arbitraria de R-módulos inyectivos es inyectivo.

1.2 Divisibilidad.

Decimos que un elemento $r \in R$ es un divisor derecho del cero (respectivamente izquierdo), si existe $s \in R$ tal que

$s \neq 0$ pero $sr = 0$ (respectivamente $rs = 0$)
Si R es conmutativo no hay diferencia entre los dos conceptos, y nos referiremos simplemente a un divisor del cero.
Un dominio es un anillo que no es trivial, y que no tiene divisores de cero, izquierdos o derechos, exceptuando el elemento cero.
Definición. Sea E un R-módulo. Un elemento $e \in E$ se dice que es "divisible", si para cada $r \in R$ que no es un divisor derecho del cero, existe $e' \in E$ tal que $e = re'$. Si cada elemento de E es divisible entonces E se dice que es un "módulo divisible".
Un grupo abeliano se dice que es "divisible", si es divisible como Z-módulo.
Alternativamente, E es divisible si $E = rE$ cuando $r \in R$, que no es un divisor derecho del cero.
Como comparación, sea E_1 un R-módulo derecho y $e_1 \in E_1$. Entonces e_1 se dice que es divisible, si para cada $r_1 \in R$ que no es un divisor izquierdo del cero, entonces existe $e_1' \in E_1$ tal que $e_1 = e_1' r_1$
Ejemplos.- El campo de cocientes de un dominio conmutativo, cuando es considerado un módulo sobre tal dominio, es un módulo divisible $[\frac{a}{b} = r[\frac{a}{rb}]$, con $b \neq 0]$.

En particular, los números racionales forman un grupo divisible bajo la adición. También, cada módulo sobre un anillo con división es divisible, sea $e \in E$ y $r \in R$ que no es un divisor derecho del cero, ya que R es un anillo con división existe s tal que $rs = 1$, $e = (rs)e = r[se]$. Y cada espacio vectorial es divisible (ya que es módulo sobre un campo K, en el cual los elementos son invertibles)

Lema 1.4.- Sea E un R-módulo divisible y sea E' un submódulo de E. Entonces E/E' es un R-módulo divisible.

Prueba. Sea $e + E'$ elemento de E/E' y $r \in R$, donde r no es un divisor derecho del cero. Por lo tanto existe $e' \in E$ tal que $e = re'$, de donde $e + E' = r(e' + E')$. Así E/E' es divisible.

Lema 1.5. Sea $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de R-módulos. Entonces $\prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ y $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ son R-módulos divisibles.

Prueba. Sea $\{e_\lambda\} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ donde $e_\lambda \in E_\lambda$, y sea $r \in R$ que no es un divisor derecho del cero. Entonces, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $e_\lambda' \in E_\lambda$ tal que $e_\lambda = r e_\lambda'$.

De donde $\{e_\lambda\} = r\{e_\lambda'\}$, lo cual muestra que $\prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ es divisible. Si $\{e_\lambda\} \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$, entonces $e_\lambda = 0$ exceptó un número finito, y que $\{e_\lambda\} = r\{e_\lambda'\}$ insistiendo en que $e_\lambda' = 0$ si $e_\lambda = 0$

Prueba. Considere la siguiente figura:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "inc."] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Donde I es un ideal de R y $f: I \to E$ es un R-homomorfismo. Si $I = 0$ puede ser contemplado este caso con el homomorfismo cero, así suponga que $I \neq 0$. Considere $0 \neq s \in I$. Ya que E es divisible, existe $e \in E$ tal que $f(s) = se$.

Sea $t \in I$. Entonces $sf(t) = f(st) = f(ts) = tf(s) = tse = ste$, así $sf(t) - ste = 0$, $s[f(t) - te] = 0$, y ya que E es libre de torsión $f(t) = te$. Si definimos $g: R \to E$ por $g(r) = re$ $(r \in R)$, se tiene que si $r \in I$, $g(r) = re = f(r)$ por lo tanto g coincide con f en I, por lo tanto E es inyectivo

Ejemplo. Consideremos el campo de fracciones de un dominio conmutativo. Sea e un elemento de torsión, sea K el campo de fracciones y R el dominio. Así existe $0 \neq r \in R$ tal que $re = 0$, pero $e = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$ y $a, b \in R$ por lo cual $r(\frac{a}{b}) = 0$, siguiendo el razonamiento $\frac{ra}{b} = 0$, con lo cual $ra = 0$ resultando $a = 0$ y $e = 0$ por lo tanto K es libre de torsión, resultando por el Teorema anterior que K es inyectivo.

Un dominio R se dice que es un dominio de ideales principales izquierdo, si cada ideal izquierdo es generado por un sólo elemento, es decir, cada ideal izquierdo de R es de la forma Rr para alguna $r \in R$. Un dominio de ideales principales derecho es un dominio con la propiedad de que cada ideal derecho es de la forma $r'R$ para alguna $r' \in R$.

Si R es conmutativo, no hay distinción entre los dos conceptos y se dice tan solo un dominio de ideales principales. El anillo $\mathbb{Z}$ de los enteros es un ejemplo de un dominio de ideales principales.

Teorema 1·8 Sea R un dominio de ideales principales izquierdo, y E un R-módulo. Entonces E es inyectivo $\Longleftrightarrow$ E es divisible.

Prueba. Por la proposición 1·6 E inyectivo $\Rightarrow$ E es divisible. Ahora supongamos que E es divisible, por demostrar que E es inyectivo.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "inc."] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

Donde I es un ideal de R. Supongamos que $I \neq 0$.
Ya que R es un dominio de ideales principales iz-
quierdo $I = Rs$ para $0 \neq s \in I$
Ya que E es divisible, existe $e \in E$ tal que $f(s) = se$
Definamos el R-homomorfismo $g: R \to E$ por
$g(r) = re$ $(r \in R)$. Entonces, si $t \in R$, $g(ts) = tse =$
$tf(s) = f(ts)$ lo cual muestra que g coincide con
f sobre I por lo tanto E es inyectivo.
Corolario.. Un grupo Abeliano es inyectivo $\Leftrightarrow$ es divisible
Ahora sea R un dominio conmutativo con campo de
fracciones y considere a K como un R-módulo de la
manera usual. Así el producto de los elementos $a \in R$
y $b/c \in K$, donde $b, c \in R$ y $c \neq 0$ es justamente $(ab)/c$
Sea F un R-submódulo de K tal que existe $0 \neq r \in R$
tal que $rF \subseteq R$. Un tal submódulo K es llamado un
ideal fraccional de R. Así los ideales de R son
llamados ideales enteros de R. Claramente cada ideal
entero es un ideal fraccional. Si se pone $I = rF \subseteq R$,
entonces I es un ideal entero de R y $F = (1/r)I$
Sean F, F' ideales fraccionales de R. Denotemos que
por FF', se entenderá el conjunto de todas las sumas
finitas $\sum_i f_i f_i'$, donde $f_i \in F$ y $f_i' \in F'$. FF' también
es un ideal fraccional ya que si $sF \subseteq R$ y $rF' \subseteq R$

entonces $rsFF' \subseteq rRF' \subseteq rF' \subseteq R$

Claramente la operación definida en el conjunto de los
ideales fraccionarios es conmutativa y asociativa.
Además $RF = \{\sum_i r_i f_i\} \subset F$ y dado $f \in F$, $f = 1 \cdot f \in RF$
por lo tanto $RF = F$, así R actúa como elemento
neutro.

Si dado un ideal fraccional F, existe un ideal fraccio-
nal F' tal que $FF' = R$, entonces F' es único y es
llamado el inverso de F; y en este caso F se dice
que es invertible.

Por ejemplo, los ideales principales (Rr) de R tienen
inverso $R(1/r)$. Note que $R(1/r)$ es un ideal fraccional,
ya que $rR(1/r) = Rr(1/r) \subseteq R$.

Definición.. Un "dominio de DedeKind" es un dominio
conmutativo con la propiedad de que cada ideal fraccio-
nal es invertible.

Lema 2.9. Sea R un dominio conmutativo tal que
cada ideal integral no cero es invertible. Entonces R
es un "dominio de DedeKind".

Prueba. Sea F un ideal fraccional no cero. Entonces
existe $0 \neq r \in R$ tal que rF es un ideal entero, siendo por
tanto fraccional, así existe un ideal fraccional F' tal
que $(rF)F' = R$. Rearreglando $F(rF') = R$, se tiene

que F Tiene inverso F', que es un ideal fraccional.

Ejemplo. Cada dominio de ideales principales conmutativo es un dominio de Dedekind.

Proposición 1.10. Cada módulo divisible sobre un dominio de Dedekind es inyectivo.

Prueba. Sea R un dominio de Dedekind y E un R-módulo divisible. Además, sea ahora I un ideal entero de R, y considere el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "inc."] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Por demostrar que existe $g: R \longrightarrow E$ que extiende al R-homomorfismo f, así considere $I \neq 0$.

Por hipótesis existe F fraccional Tal que $IF = R$

Así existen elementos $s_1, \dots, s_n$ en I y $k_1, \dots, k_n$ en F Tal que $\sum_{i=1}^{n} s_i k_i = 1$. Suponga que no Todas las s_i son cero. Ya que E es divisible, para cada i $(1 \leq i \leq n)$ existe $e_i \in E$ Tal que $f(s_i) = s_i e_i$.

Consideremos $s \in I$, ya que $sk_i \in IF = R$, entonces

$f(s) = f\left(\sum_{i=1}^{n} s k_i s_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (s k_i) f(s_i) = s \sum_{i=1}^{n} k_i s_i e_i$

Ahora $k_i s_i \in FI = R$, lo cual muestra que $\sum_{i=1}^{n} k_i s_i e_i \in E$ y podemos definir un R-homomorfismo $g: R \longrightarrow E$ por

$g(r)=r\sum_{i=1}^{n} k_i s_i e_i \quad (r\in R).$

Claramente g coincide con f en I, lo cual muestra que E es inyectivo.

Existe un recíproco de la proposición 1.10, si R es un dominio conmutativo con la propiedad de que cada R-módulo divisible es inyectivo, entonces R es un dominio de Dedekind. Esto se probará en el Teorema 3.25. Como una anticipación se inserta el lema 1.9. Así uniendo las dos caracterizaciones se tiene una para los dominios de Dedekind.

I.3 Teorema de inmersión.

Teorema 1.11 Cada módulo puede ser sumergido en un módulo inyectivo.

Antes algunos lemas preliminares.

Lema 1.12 Cada grupo Abeliano puede ser sumergido en un grupo Abeliano inyectivo.

Prueba.- Sea G un grupo Abeliano, y sea

$$F=\bigoplus_{g\in G} Z \quad , \quad F'=\bigoplus_{g\in G} Q$$

donde Q denota el grupo aditivo de los números racionales.

Sea $\phi: F\longrightarrow G$ dado por $\phi(\{n_g\}_{g\in G})=\sum_{g\in G} n_g\, g$, donde $n_g\in Z$ y $n_g=0$ exceptó un número finito.

Claramente ϕ es $\mathbb{Z}$-epimorfismo, y por el primer Teorema de Isomorfismo $F/K \cong G$ donde $K = \operatorname{Ker}\phi$ y ya que $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, G es isomorfo a un subgrupo de F'/K. Pero $\mathbb{Q}$ es un grupo divisible y por 1.5 y 1.4 F'/K es divisible. Por 1.8 F'/K es inyectivo. Así G puede ser sumergido en el grupo Abeliano inyectivo F'/K

Si G es un grupo Abeliano, se puede formar el grupo Abeliano $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$. Así podemos dar una estructura de R-módulo: si $r \in R$ y $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$, se define $rf \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ por $(rf)(r') = f(r'r)$ $(r' \in R)$

Lema 1.13. Sea G un grupo Abeliano inyectivo. Entonces $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ es un R-módulo inyectivo.

Prueba. Considere el siguiente diagrama de R-módulos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,G) & \end{tikzcd}$$

Ya que G es inyectivo consideremos el diagrama de $\mathbb{Z}$-módulos y $\mathbb{Z}$-homomorfismos siguiente:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & B \arrow[dl, "\Theta"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Donde $\phi: A \longrightarrow G$, dada por $\phi(a) = (f(a))(1)$ donde $a \in A$ y ya que G es inyectivo existe un $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\theta: B \longrightarrow G$ tal que el diagrama anterior es conmutativo.

Así sea $g: B \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(R, G)$ dado por $(g(b))(r) = \theta(rb)$, donde $r \in R$ y $b \in B$.

Así $(g(b+b'))(r) = \theta[r(b+b')] = \theta[rb + rb'] = \theta[rb] + \theta[rb']$, donde usando la definición de θ, se tiene que $\theta[rb] + \theta[rb'] = (g(b))(r) + (g(b))(r')$.

Ahora si $s \in R$ y $b \in B$ $\quad g(sb)(r) = \theta(rsb)$ y

$$(sg(b))(r) = g(b)(rs) = \theta(rsb)$$

Por lo cuál $g(sb) = sg(b)$, de donde g es R-homomorfismo. Además si $a \in A$ y $r \in R$, entonces:

$((g\psi)(a))(r) = \theta[r\psi(a)] = \theta[\psi(ra)] = \phi(ra) = [f(ra)](1) = [rf(a)](1) = [f(a)](r)$, de donde $g\psi = f$, lo cuál muestra que $Hom_{\mathbb{Z}}(R, G)$ es inyectivo.

Lema 1.14. Sea E un R-módulo. Entonces E puede sumergirse en el R-módulo $Hom_{\mathbb{Z}}(R, E)$.

Prueba. Sea $\phi: E \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(R, E)$ dado por $(\phi(e))(r) = re$, donde $r \in R$ y $e \in E$.

Sean $e, e' \in E$ entonces $[\phi(e+e')](r) = r(e+e') = re + re'$, de donde $[\phi(e+e')](r) = [\phi(e)](r) + [\phi(e')](r)$

Sean $s \in R$ y $e \in E$, así $[\phi(se)](r) = r(se)$ y por otro lado $s[\phi(e)](r) = [\phi(e)](rs) = (rs)(e)$, así $\phi(se) = s[\phi(e)]$

Por lo anterior ϕ es un R_ homomorfismo.
Si $\phi(e)=0$ para algún $e\in E$, entonces $e=[\phi(e)](1)=0$,
por tanto $e=0$, así ϕ es monomorfismo.

Sea E un R- módulo, como grupo Abeliano, E puede
sumergirse en un grupo Abeliano inyectivo E'
(lema 1.12) $E \hookrightarrow E'$, vía el encaje anterior, $Hom_Z(R,E)$
puede ser sumergido en $Hom_Z(R,E')$, este encaje
es inicialmente un Z- homomorfismo [$f \xrightarrow{\theta} i\circ f$, donde
$i: E \hookrightarrow E'$].

Si $f, g \in Hom_Z(R,E)$ entonces $\theta(f+g)(r) = i(f+g)(r) =$
$= i[f(r)+g(r)] = i[f(r)] + i[g(r)] = \theta(f)(r) + \theta(g)(r)$
Por otro lado si $s\in R$ y $r'\in R$, $\theta(sf)(r') = (isf)(r')$,
$\theta(sf)(r') = i[f(r's)]$ y $s[\theta(f)](r') = s[if(r')] = (if)(r's)$,
lo cual muestra que θ es un R- homomorfismo, re-
cordemos que $Hom_Z(R,E)$ y $Hom_Z(R,E')$ pueden ser
vistos como R- módulos.

Por el lema 1.14, y usando el resultado anterior
se tiene:

$$E \longrightarrow Hom_Z(R,E) \hookrightarrow Hom_Z(R,E')$$

Pero E' es inyectivo, así por 1.13 $Hom_Z(R,E')$ es un
R- módulo inyectivo. Así se tiene un encaje de E
hacia un módulo inyectivo:

$$E \longrightarrow Hom_Z(R,E')$$

Reformulación del Teorema 1.11. Cada módulo tiene una extensión inyectiva.

Se va a emplear el Teorema 1.11 para dar una caracterización alternativa de módulos inyectivos.

Teorema 1.15. Sea E un R módulo. Son equivalentes:

(a) E es inyectivo

(b) E es sumando directo de cada extensión de él.

Prueba. Suponga que E es inyectivo y sea E' una extensión de E. El diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "inc."] \arrow[d, "id."'] & E' \arrow[dl, dashed, "\theta"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Puede ser completado por un homomorfismo θ.
Sea $e' \in E'$, entonces $\theta(e') \in E$, del hecho de que $\theta(E) = E$, se infiere que $\theta(\theta(e')) = \theta(e')$, por lo cual $e' - \theta(e') \in \operatorname{Ker}\theta$, la relación anterior da como resultado $E' = E \oplus \operatorname{Ker}\theta$, ya que $E \cap \operatorname{Ker}\theta = \{0\}$.
Ahora suponga que se cumple (b), por el Teorema 1.11, E tiene una extensión inyectiva N. Pero por (b) $N = E \oplus N'$, y por la proposición 1.3 resulta que E es inyectivo.

I.4 Extensiones Esenciales.

Definición. Sea E un R-módulo extensión de un R-mó-
dulo A. E se dice que es una "extensión esencial"
de A si, para cada $0 \neq E'$ submódulo de E, $E' \cap A \neq 0$
Esto es equivalente a la condición siguiente:
Sea $e \neq 0$, considere $\langle e \rangle$, por la definición
$\langle e \rangle \cap A \neq 0$, existe $r \in R$ tal que $re \neq 0$ y $re \in A$.
Observaciones. Cada módulo es una extensión esen-
cial de sí mismo. También, si A es un submódulo de
B que a su vez es un submódulo de C son equi-
valentes las siguientes condiciones:
(a) C es una extensión esencial de A.
(b) C es una extensión esencial de B, y, B es una
extensión esencial de A.
(a) $\Rightarrow$ (b) Sea C una extensión esencial de A.
Sea $c \in C$, existe $r \in R$ tal que $0 \neq rc \in A$ pero ya
que A es un submódulo de B, se tiene que $rc \in B$.
Sea $b \in B$, ya que B es un submódulo de C, existe
$r \in R$ tal que $0 \neq rc \in A$, por lo tanto B es una
extensión esencial de A.
(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que se cumple (b), sea $c \in C$
existe $r \in R$ tal que $rc \in B$ (ya que B es una ex-
tensión esencial de A) existe $r' \in R$ tal que $0 \neq r'(rc) \in A$,

por tanto $(r'r)c \in A$. Así C es una extensión esencial de A.

Ejemplo. Si R es un dominio conmutativo con campo de fracciones K, entonces K considerado como R-módulo, es una extensión esencial de R.

Sea $0 \neq (\frac{a}{b}) \in K$ con $b \neq 0$, si $r = b \in R$, se tiene que; $b(\frac{a}{b}) = a \in R$, por lo tanto K es una extensión esencial de R.

Observación. Suponga que tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "inc."] \arrow[d, "\psi \cong"'] & E_1 \arrow[d, "\cong \varphi"] \\ A_2 \arrow[r, "inc."] & E_2 \end{tikzcd}$$

Donde los mapeos $A_1 \xrightarrow{\psi} A_2$ y $E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2$ son isomorfismos.

Se sigue, que si E_1 es una extensión esencial de A_1, entonces E_2 es una extensión esencial de A_2.

Sea $e_2 \in E_2$, entonces $e_2 = \varphi(e_1)$ y para $0 \neq e_1 \in E_1$ existe r tal que $0 \neq re_1 \in A_1$. Pero $re_2 = r\varphi(e_1)$ $= \varphi(re_1) = \varphi(a_1) = \psi(a_1) = a_2 \in A_2$.

Sea A un R-módulo que no tiene extensiones esenciales propias, entonces tampoco un R-módulo A_2

que sea isomorfo a A_1, considere el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[d, "\psi \cong"'] & \\ A_2 \arrow[r, "inc."'] & A_2 \end{tikzcd}$$

Por un resultado, existe un módulo extensión E_1 de A_1 y un isomorfismo $g: E_1 \longrightarrow E_2$, que extiende a $inc \circ \psi$, es decir $inc \circ \psi(a_1) = g(a_1)$

Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\psi \cong"'] & E_1 \arrow[d, "g"] \\ A_2 \arrow[r, "inc."'] & E_2 \end{tikzcd}$$

Si A_2 tuviera una extensión esencial, digamos E_2, por la observación anterior E_1 sería una extensión esencial de A_1, lo cual no es posible. Por tanto se tiene la conclusión.

Proposición 1.16. Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de R_módulos y suponga que, para cada λ, A_λ tiene una extensión esencial E_λ. Entonces $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ es una extensión esencial de $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

Prueba. Sea $A = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, $E_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$, y consideremos $0 \neq e \in E$. Así e tiene solamente un número finito de compo-

nentes no cero, sean éstas $e_i \in E_{\lambda_i}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$
Ya que E_{λ_1} es una extensión esencial de A_{λ_1}, existe $r_1 \in R$ tal que $0 \neq r_1 e_1 \in A_1$. Considere $r_1 e$, este es un elemento no cero de E. Si la única componente no cero es $r_1 e_1$, se tendría $r_1 e \in A$ y se tendría la prueba. De otra manera sea $r_1 e_p$ la primera componente no cero en la sucesión $r_1 e_2, \ldots, r_1 e_n$.
Ya que $E_{\lambda p}$ es una extensión esencial de $A_{\lambda p}$, existe $r_p \in R$ tal que $0 \neq r_p r_1 e_p \in A_{\lambda p}$. Note que $r_p r_1 e_1 \in A_{\lambda_1}$.
Podemos proceder con el argumento. Después de varios pasos, existe un elemento $r \in R$ tal que $0 \neq re \in A$.
Esto muestra que E es una extensión esencial de A.
Ahora daremos una caracterización de módulos inyectivos en términos de extensiones esenciales.
Teorema 1.17. Sea E un R-módulo. Son equivalentes:
(a) E es inyectivo.
(b) E no tiene extensiones esenciales propias.
Prueba (a) $\Rightarrow$ (b) Suponga que E es inyectivo y sea E' una extensión propia de E. Por la caracterización de 1.15, E es sumando directo de E', es decir existe $0 \neq F$ de E' tal que $E' = E \oplus F$. Pero $E \cap F = 0$, así E' no es una extensión esencial de E. Así se tiene (b).

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea F una extensión de E. Si se prueba que E es sumando directo de F se tendrá el resultado por 1.15. Denote por $\Omega = \{0 \neq X_{sub} \subseteq F \mid E \cap X = 0\}$

Por hipótesis, Ω es no vacío. Ordene Ω parcialmente por la inclusión, sea Ω' un subconjunto totalmente ordenado de Ω, sea $\bigcup_{i \in I} X_i$ con $X_i \in \Omega'$.

Por lo tanto $\left[\bigcup_{i \in I} X_i\right] \cap E = \bigcup_{i \in I} [X_i \cap E] = \bigcup_{i \in I} \{0\} = 0$

Así ya que $X_i \subset \bigcup_{i \in I} X_i$, Ω es un sistema inductivo y por el lema de Zorn, tiene un elemento máximo X_0.

Por demostrar que $F = E + X_0$.

Por los Teoremas de isomorfismo $F/X_0 \supseteq E + X_0/X_0 \cong$ $\cong E/E \cap X_0 \cong E$.

Suponga que $F \neq E + X_0$, por Teorema de correspondencia $F/X_0 \supset E + X_0/X_0$

Pero E no tiene extensiones esenciales propias, así tampoco $(E + X_0)/X_0$. Por Teorema de correspondencia existe un submódulo Y de F tal que $Y \supset X_0$ y $(Y/X_0) \cap (E + X_0/X_0) = 0$. Así se tiene que $Y \cap (E + X_0) = X_0$, por lo cual $Y \cap E \subseteq Y \cap (E + X_0) = X_0$. Así tenemos $Y \cap E \subseteq E \cap X_0 = 0$, es decir $Y \cap E = 0$.

Por lo tanto $Y \in \Omega$. Lo que contradice la maximalidad de X_0, por esto $F = E + X_0$ y $F = E \oplus X_0$ resultando E un R-módulo inyectivo.

Proposición 1.18. Sea A un R-módulo, E una extensión esencial de A y N una extensión inyectiva de A. Entonces el mapeo inclusión de A en N puede extenderse a un encaje de E en N.

Prueba.- Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "inc."] \arrow[d, "inc."'] & E \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Ya que N es inyectivo, existe un R-homomorfismo $g: E \longrightarrow N$ tal que el diagrama anterior es conmutativo, es decir, g extiende al mapeo inclusión de $A \longrightarrow N$.

Afirmación. $A \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$

Sea $x \in A \cap \operatorname{Ker} g$ entonces $i_1(x) = g \circ i_2(x)$, $x = g(x) = 0$, de lo cuál $x = 0$ y se tiene el resultado.

Ya que E es una extensión esencial de A, se debe tener $\operatorname{Ker} g = 0$ y, por lo tanto, g es un encaje de E en N.

Definición. Sea E un R-módulo, extensión de un R-módulo A. E se dice que es una "extensión esencial maximal" de A si:

(a) E es una extensión esencial de A, y

(b) cuando E' es una extensión propia de E, entonces E' no es una extensión esencial de A.

La segunda condición (es decir (b)) es equivalente a la condición de que E no tiene extensiones propias, ya que si E' es tal que $E \subset E'$ y E' es una extensión esencial de E, se tendría que $A \subset E \subset E'$ y, por lo tanto, E' es una extensión esencial de A, lo cual no es posible por el inciso (b).

Definición. Sea el R-módulo N extensión del R-módulo A. Entonces N se dice que es una "extensión inyectiva minimal de A si:

(a) N es inyectivo.

(b) Cuando N' es un submódulo propio de N que contiene a A entonces N' es, tal que, resulta no inyectivo

Proposición 1.19 Sea A un R-módulo y N una extensión inyectiva de A. Entonces N tiene un submódulo E que es una extensión esencial maximal de A

Prueba. Denote por Ω la colección de todas las extensiones esenciales de A que son submódulos de N. Ω es no vacío, ya que claramente $A \in \Omega$. Ω resulta parcialmente ordenado por la inclusión, sea Ω' un subconjunto totalmente ordenado (tiene una cota, a saber $\bigcup_{i \in I} X_i$ y $X_i \in \Omega'$), así Ω es un sistema inductivo y por el lema de Zorn Tiene un elemento máximo E. Se va a probar que E es realmente una extensión esencial máxima de A.

Sea E' una extensión esencial de E (por demostrar que $E' = E$)

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, "inc."'] & E' \arrow[dl, "\theta"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Por la proposición 1.18 existe un monomorfismo $\theta : E' \longrightarrow N$ que extiende al mapeo inclusión de $E \longrightarrow N$

Ahora $E \subset E'$ y $\theta(E) \subset \theta(E')$ pero $\theta(E) = E$, resultando $E \subset \theta(E')$. Así $\theta(E')$ es un miembro de Ω que contiene a E, por lo tanto $\theta(E') = E$, es decir, $E' = E$.

Proposición 1.20. Sea A un R_ módulo y E una extensión de A. Son equivalentes:

(a) E es una extensión inyectiva esencial de A.

(b) E es una extensión esencial máxima de A.

(c) E es una extensión inyectiva mínima de A.

Prueba. (a) $\Longleftrightarrow$ (b) Ya que si, E es inyectivo $\Longleftrightarrow$ E no tiene extensiones esenciales propias y de allí

que sea E una extensión esencial máxima.
(b) $\Rightarrow$ (c) Por el Teorema 1.17 E resulta inyectivo.
Sea E' una extensión inyectiva de A contenida en
E. Ya que $A \subset E' \subset E$, se tiene que E es una
extensión esencial de E', pero E' es inyectivo, así
que por 1.17, resulta $E = E'$. Por lo tanto E es
una extensión inyectiva mínima de A, así se da (c)
(c) $\Rightarrow$ (b) Por 1.19, E tiene un submódulo E'' que
es una extensión esencial máxima de A y por
tanto E'' es inyectivo, y por (c) se tiene que $E'' = E$,
por lo cuál E es una extensión esencial máxima de
A.

Teorema 1.21 Sea A un R-módulo. Existe un R-módulo satisfaciendo las siguientes condiciones:

(a) E es una extensión inyectiva esencial de A.

(b) E es una extensión esencial máxima de A.

(c) E es una extensión inyectiva mínima de A.

Además, si E_1, E_2 son dos extensiones esenciales inyectivas de A, existe un isomorfismo $\theta : E_1 \longrightarrow E_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\text{inc.}"'] \arrow[dr, "\text{inc.}"] & \\ E_1 \arrow[rr, "\theta", "\cong"'] & & E_2 \end{tikzcd}$$

Por el Teorema 1·11 se Tiene para cada módulo E, una extensión inyectiva E'. Por 1·19 E' Tiene un submódulo E'' que es una extensión esencial máxima de A, y por 1·20 se satisfacen las condiciones equivalentes:

Sean E_1, E_2 dos submódulos que satisfagan las condiciones, por la proposición 1·18, si consideramos el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & E_1 \arrow[dl, "\theta"] \\ E_2 & \end{tikzcd}$$

El mapeo inclusión $A \longrightarrow E_2$, puede extenderse a un monomorfismo $\theta: E_1 \longrightarrow E_2$.. Así $\theta(E_1) \cong E_1$ y $\theta(E_1) \subset E_2$. Entonces $\theta(E_1)$ es una extensión inyectiva de A contenida en E_2, por Tanto $\theta(E_1) = E_2$, es decir, θ es un isomorfismo.

Observación. Suponga que el R_módulo E_1 es una extensión inyectiva esencial del R_módulo A, y suponga que E_2 es otra extensión de A Tal que existe un isomorfismo $\theta: E_1 \longrightarrow E_2$ Tal que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\text{inc.}"'] \arrow[dr, "\text{inc.}"] & \\ E_1 \arrow[rr, "\theta \cong"'] & & E_2 \end{tikzcd}$$

Por el isomorfismo θ, resulta E_2 inyectivo.
Sea $e \in E_2$, entonces existe e_1 tal que $\theta(e_1) = e_2$.
Para $e_1 \in E_1$, existe $r \in R$ tal que $re_1 \in A$.
Así $re_2 = r\theta(e_1) = \theta(re_1) = re_1 \in A$, por lo tanto E es una extensión inyectiva esencial de A.
La unicidad se sigue de 1.21.
Definición. Sea A un R-módulo. Un R-módulo E satisfaciendo las condiciones del Teorema 1.21 es llamado una "cápsula inyectiva de A". Se usa el símbolo $E(A)$ para denotar una cápsula inyectiva de A.
Observación. Un R-módulo A es inyectivo $\Leftrightarrow E(A) = A$
Si A es inyectivo, A es una extensión inyectiva esencial de A y, por lo tanto, $E(A) = A$.
Si A es un R-módulo y B es un submódulo de $E(A)$, que contiene a A, entonces $E(A)$ es también una cápsula inyectiva de B.
Ya que $A \subset B \subset E(A)$, $E(A)$ es una extensión esencial de B, y ya que $E(A)$ es inyectivo se

Tiene que $E(A) = E(B)$.

Ejemplo. Sea R un dominio conmutativo. El campo de fracciones de R, cuando es considerado como un R-módulo, es una cápsula inyectiva de R. Se sabe que K (campo de fracciones de R) es una extensión esencial de R, y se probó también que K es inyectivo, por lo tanto K es una "cápsula inyectiva" de R.

Observación. Sean A_1, A_2 dos R-módulos y suponga que tenemos un isomorfismo $\theta : A_1 \longrightarrow A_2$. Considere cápsulas inyectivas $E(A_1)$, $E(A_2)$ de A_1 y A_2, respectivamente. Por un resultado, A_2 tiene una extensión E' tal que $E' \cong E(A_1)$, donde este isomorfismo extiende a θ.

Vía el isomorfismo, E' es una envolvente inyectiva de A_2, y por lo tanto, por 1·21 se tiene un isomorfismo de $E' \longrightarrow E(A_2)$, así el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
E(A_1) \arrow[r, "\cong"] & E' \arrow[r, "\cong"] & E(A_2) \\
A_1 \arrow[u] \arrow[rr, "\cong", "\theta"'] & & A_2 \arrow[ul, "\text{inc.}"'] \arrow[u, "\text{inc.}"']
\end{tikzcd}$$

Así se sigue que, $E(A_1) \cong E(A_2)$, bajo este isomorfismo que extiende a θ.

En otras palabras, un isomorfismo entre $A_1 \xrightarrow{\cong} A_2$ que son R-módulos, puede ser extendido a un isomorfismo $E(A_1) \cong E(A_2)$, entre las respectivas cápsulas inyectivas de A_1 y A_2.

Proposición 1·22 Sea A un submódulo de un R-módulo B y E(B) una cápsula inyectiva de B. Entonces A tiene una cápsula inyectiva E(A) que es un submódulo de E(B), y E(A) es sumando directo de E(B). Además, si B es una extensión esencial de A, se tiene $E(B) = E(A)$

Prueba. Ya que E(B) es una cápsula inyectiva de B, para cada submódulo E' de E(B) se tiene que $E' \cap B \neq 0$, y además $E' \cap A \subseteq E' \cap B \neq 0$.

Así aplicando 1·19, se tiene que E(B) tiene un submódulo $E = E(A)$ que por ser inyectivo,

$E(B) = E(A) \oplus K$

Por otro lado si B es una extensión esencial de A, y ya que $A \subseteq B \subseteq E(B)$, E(B) es una extensión esencial inyectiva de A, de donde se tiene que $E(B) = E(A)$

Proposición 1.23. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, R-módulos. Entonces $\bigoplus_{i=1}^{n} E(A_i)$ es una cápsula inyectiva de $\bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, es decir, $E(A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n) = E(A_1) \oplus \ldots \oplus E(A_n)$

Prueba. Ya que hay un número finito de A_i's, el módulo $\bigoplus_{i=1}^{n} E(A_i)$ es inyectivo (proposición 1.3). Por la proposición 1.16, el módulo anterior es una extensión esencial de $\bigoplus_{i=1}^{n} A_i$.

Observación. En la proposición 3.2 se Tendrá, que cuando R es un anillo NeTeriano, habrá un resultado análogo para una colección arbiTraria de R-módulos A_i.

Proposición 1.24. Sea A un R-módulo y $0 \neq a \in A$ Entonces existe un módulo simple S y un homomorfismo $\phi : A \longrightarrow E(S)$ Tal que $\phi(a) \neq 0$

Prueba. Consideremos el ideal izquierdo $0:a$ consistente de Todos los $r \in R$ Tal que $ra = 0$.
Este es un ideal izquierdo propio, ya que $a \neq 0$, y está contenido en un ideal izquierdo máximo M de R.

Definamos $\phi' : Ra \longrightarrow R/M$ por $\phi'(ra) = r + M$
ϕ' está bien definido, ya que si $ra = 0$, entonces $r \in 0:a \subseteq M$ y $r + M = 0_{R/M}$. Además, ϕ' es un R-homomorfismo y $\phi'(a) = 1 + M \neq 0_{R/M}$.

Sea $S = R/M$, se tiene que R/M es un R_módulo simple y consideremos el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ra \arrow[r, "\text{inc.}"] \arrow[d, "\phi'"'] & A \arrow[ddl, dashed, "\phi"] \\
& S \arrow[d] & \\
& E(S) &
\end{tikzcd}$$

Ya que $E(S)$ es inyectivo, existe un R-homomorfismo $\phi : A \longrightarrow E(S)$ tal que $\phi : A \longrightarrow E(S)$ tal que $\phi(a) = \phi'(a) \neq 0$.

Definición. Un R-módulo E se dice que es un "cogenerador inyectivo" de R si: (i) E es inyectivo, y (ii) Para cada R-módulo y cada $0 \neq a \in A$, existe un R-homomorfismo $\phi : A \longrightarrow E$ tal que $\phi(a) \neq 0$

Considere todas las clases de isomorfismo de R-módulos simples, y sea $\{S_i\}_{i \in I}$ una familia de representantes, uno de cada clase de isomorfismo. y $S_i = R/M_i$, donde M_i es un ideal izquierdo máximo de R; para lograr esto consideremos la familia de los distintos ideales izquierdos máximos de R. Efectivamente, cuando R es conmutativo, y M_1, M_2 son ideales bilaterales se tiene que si $R/M_1 \cong R/M_2$ entonces $M_1 = M_2$, y

por lo tanto la familia consiste de todos los ideales maximales de R.
Por la proposición 1.24, se tiene que para cada módulo A existe un módulo simple S_i y un homomorfismo $\phi: A \longrightarrow E(S_i)$, tal que $\phi(a) \neq 0$.
Consideremos $A \xrightarrow{\phi} E(S_i) \longrightarrow \prod_{i\in I} E(S_i)$, así $\prod_{i\in I} E(S_i)$ es un cogenerador inyectivo.
Si planteamos $A \xrightarrow{\phi} E(S_i) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} E(S_i) \longrightarrow E(\bigoplus_{i\in I} E(S_i))$ se tiene que $E(\bigoplus_{i\in I} E(S_i))$ es un cogenerador inyectivo de R.
Proposición 1.25. Sea E un cogenerador inyectivo de R. Cada R-módulo se puede sumergir en un producto directo de copias de E.
Prueba. Sea $0 \neq A$ un R-módulo. Sea $0 \neq a \in A$
Entonces existe un R-homomorfismo $\phi_a: A \longrightarrow E$ tal que $\phi_a(a) \neq 0$. Definamos $\phi: A \longrightarrow \prod_{\substack{a\in A \\ a\neq 0}} E$ por $\phi(x) = \{\phi_a(x)\}$ $x \in A$, si $\phi(x) = 0$ entonces para cada a, $\phi_a(x) = 0$. Afirmación $x = 0$.
Si $x \neq 0$ entonces por hipótesis $\phi_x(x) \neq 0$! con el hecho de que $\phi_a(x) = 0$ para cada $a \in A$, por lo tanto ϕ es monomorfismo.
Un caso especial de la proposición 1.25; que será útil en el capitulo 5, está contenido en el corolario:

Corolario. Cada R - módulo se puede sumergir en un producto directo de cápsulas inyectivas de módulos simples.

Proposición 1.26. Sea I un ideal izquierdo propio de R y $r \in \mathrm{Ann}_R\, E(R/I)$. Entonces existe un elemento $s \in R$, $s \not\subset I$ y $sr = 0$

Prueba. Suponga que no existe un elemento $s \in R$, $s \not\subset I$ y $sr = 0$. Así $0 : r \subseteq I$, definamos $\phi' : Rr \longrightarrow R/I$ por $\phi'(r'r) = r' + I$ donde $r' \in R$, claramente es un R - homomorfismo.

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Rr \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"'] & R \arrow[ddl, dashed, "\phi"] \\
& R/I \arrow[d] & \\
& E(R/I) &
\end{tikzcd}$$

Así ϕ' puede extenderse a un R - homomorfismo $\phi : R \longrightarrow E(R/I)$

Note que $r\phi(1) = \phi(r) = \phi'(r) = 1 + I \neq 0$

Pero $\phi(1) \in E(R/I)$ y $r \in \mathrm{Ann}_R\, E(R/I)$, así que $r\phi(1) = 0$, así que $r\phi(1) = 0$ por la definición de anulador ¡. Por tanto el resultado.

Corolario 1. Sea R un dominio y I un ideal izquierdo,
propio de R. Entonces $\operatorname{Ann}_R E(R/I) = 0$
Prueba. Sea $0 \neq r \in \operatorname{Ann}_R E(R/I)$, por 1.26, existe
$s \in R$, $s \notin I$ y $sr = 0$, por tanto hay divisores de
cero ∇. Así $\operatorname{Ann}_R E(R/I) = 0$
Corolario 2. Suponga que R tiene un único ideal
izquierdo maximal M. Entonces $\operatorname{Ann}_R E(R/M)$.
Prueba. Sea $r \in \operatorname{Ann}_R E(R/M)$. Entonces por 1.26,
existe $s \in R$, $s \notin M$, y tal que $sr = 0$.
Así $\langle s \rangle = R$, por lo tanto, $1 = ts$ para alguna
$t \in R$. Por lo cuál $r = 1 \cdot r = (ts)r = t(sr) = t(0) = 0$,
Teniendo $r = 0$ como conclusión.
Proposición 1.27. Sea I un ideal bilateral, y E
un R- módulo inyectivo. Entonces $0 :_E I$ es un (R/I)-
módulo inyectivo. Además si E es la cápsula
inyectiva de un R- módulo A, entonces $0 :_E I$ es
la cápsula inyectiva de $A \cap (0 :_E I)$ considerado
como un (R/I)- módulo.
Prueba. Considere el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[dl, dashed, "h'"'] \arrow[ddl, dashed, "h"] \\
& 0 :_E I \arrow[d, "\text{inc.}"'] & \\
& E &
\end{tikzcd}$$

Donde B y C son (R/I) _ módulos, f y g son (R/I)-homomorfismos y g es monomorfismo. Note que si E' es un (R/I) _ módulo, a E' se le puede dar una estructura de R módulo: $re' = (r+I)e'$ $(r \in R,\ e' \in E')$.
Así B, C y $0:_E I$ pueden ser considerados como R-módulos, en tanto f y g son R _ homomorfismos.
Ya que E' es inyectivo, el diagrama puede ser completado por un R _ homomorfismo h.
Sea $r \in I$, $c \in C$. Entonces $rh(c) = h(rc) = h(0) = 0$ $[rc = 0$ ya que $0:_R C \supseteq I]$, por lo cual $h(c) \subseteq 0:_E I$
Por lo anterior definimos $h'(c) = h(c)$, además h' es un (R/I) _ homomorfismo, lo cual muestra que $0:_E I$ es un (R/I) _ módulo inyectivo.
Ahora la segunda parte. Suponga que $E = E(A)$, donde A es un R _ módulo.
Sea X un (R/I) _ módulo no cero de $0:_E I$.
Claramente X es también un R _ submódulo de $0:_E I$, y $X \cap (A \cap 0:_E I) = (X \cap 0:_E I) \cap A = X \cap A \neq 0$, ya que, E es una extensión esencial de A.
Por lo tanto, $0:_E I$ es una extensión esencial de $A \cap (0:_E I)$, y por tanto, una cápsula inyectiva de $A \cap (0:_E I)$.

1.5 Módulos Inyectivos Inescindibles.

Definición. Un R_ módulo E es "inescindible" si:
(a) $E \neq 0$ y (b) Los únicos sumandos directos de E son 0 y E.

Si un módulo E es inescindible, entonces también cada módulo que sea isomorfo a E.

Definición. Sea E un R_ módulo y M un submódulo de E. E se dice que es un "submódulo irreducible" de M si:
(a) $M \neq E$, y (b) No existen submódulos M_1, M_2 de E tal que $M_1 \supset M$, $M_2 \supset M$ y $M_1 \cap M_2 = M$.

Un ideal izquierdo de un anillo se dice que es un "ideal izquierdo irreducible" si, cuando él anillo es visto como un módulo sobre sí mismo, el ideal izquierdo es un submódulo irreducible.

Proposición 1.28. Sea E un R_ módulo. Son equivalentes:

(a) E es inescindible.

(b) $E \neq 0$ y es cápsula inyectiva de cada submódulo no cero de E

(c) El submódulo cero de E es irreducible.

Prueba (a) $\Rightarrow$ (b). Suponga que E es inescindible. Entonces $E \neq 0$. Sea M un submódulo no cero de E.
Por 1.19, E tiene un submódulo E' que es una cápsula inyectiva de M, y por 1.15 (ya que E' es inyectivo), E'

es sumando directo de E, y ya que $E' \neq 0$ se sigue que $E' = E$ resultando $E = E'(M)$

(b)$\Rightarrow$(c) Supongamos que se cumple (b), y sean M_1, M_2 submódulos de E tal que $M_1 \cap M_2 = 0$. Suponga que $M_1 \neq 0$, entonces por hipótesis $E = E(M_1)$, en particular, E es una extensión esencial de M_1 y ya que tenemos $M_1 \cap M_2 = 0$, se sigue que $M_2 = 0$. Así se tiene (c).

(c)$\Rightarrow$(a) Suponga (c) entonces $0 \neq E$. Suponga que existen submódulos no cero E_1, E_2 de E, tal que $E = E_1 \oplus E_2$. Así $E_1 \cap E_2 = 0$, que contradice el hecho de que el submódulo no cero de E es irreducible.

Corolario1 Sea M un R-módulo. Entonces:

(a) $E(M)$ es inescindible $\Leftrightarrow$ el submódulo cero de M es irreducible.

(b) Un submódulo K de M es irreducible $\Leftrightarrow$ $E(M/K)$ es inescindible.

Prueba. (a) Suponga que $E(M)$ es inescindible, por 1.28 el submódulo cero de $E(M)$ es irreducible, y por lo tanto el submódulo cero de M es irreducible.

Recíprocamente, suponga que el submódulo cero de M es irreducible, y sean E_1, E_2 submódulos de $E(M)$ tal que $E_1 \cap E_2 = 0$. Por demostrar que $E_1 = 0$ ó $E_2 = 0$

Ya que $E(M)$ es una extensión esencial de M, si $E_1 \neq 0$

entonces $E_1 \cap M \neq 0$. Similarmente, si $E_2 \neq 0$ entonces $E_2 \cap M \neq 0$. Pero note que $(E_1 \cap M) \cap (E_2 \cap M) = (E_1 \cap E_2) \cap M = \{0\} \cap M = \{0\}$. y $E_1 \cap M$, $E_2 \cap M$ son submódulos de M. Entonces $E_1 \cap M = 0$ ó $E_2 \cap M = 0$, de aquí que $E_1 = 0$ ó $E_2 = 0$, lo cual muestra que el submódulo cero de $E(M)$ es irreducible. Por lo tanto $E(M)$ es inescindible.

(b) Sean K_1, K_2 submódulos de M que contienen a K.
Claramente $K_1 \cap K_2 = K \Longleftrightarrow (K_1/K) \cap (K_2/K) = 0$.
Si K es irreducible, $K_1 = K$ ó $K_2 = K$, por tanto $K_1/K = 0$ ó $K_2/K = 0$ y en sentido inverso, por lo tanto el submódulo K de M es irreducible $\Longleftrightarrow$ el submódulo cero de M/K es irreducible.

Corolario 2. Si S es un R-módulo simple, entonces $E(S)$ es inescindible.

Prueba. Claramente el submódulo cero de un módulo simple es irreducible, y por el inciso (a) del corolario 1, se tiene que $E(S)$ es inescindible.

Corolario 3. Sea E un R-módulo inyectivo inescindible y $0 \neq e \in E$. Entonces $E \cong E(R/(0:e))$ y $0:e$ es un ideal izquierdo irreducible de R.

Prueba. Consideremos el morfismo $r \xrightarrow{\varphi} re$, claramente es sobre, y el $\operatorname{Ker}\varphi = (0:e)$ por lo que por el primer Teorema de isomorfismo $R/\operatorname{Ker}\varphi \cong Re$

Así $R/(0:e) \cong Re$, por lo tanto sus cápsulas inyectivas son isomorfas, es decir, $E(R/(0:e)) \cong E(Re)$, el hecho de ser E inescindible da $E = E(Re)$ y por lo tanto $E \cong E(R/(0:e))$. Por el isomorfismo anterior $E(R/(0:e))$ es inescindible y por el corolario 1 se tiene que $0:e$ es un ideal izquierdo irreducible de R.

Corolario 4. Sea E un R-módulo. Entonces E es un R-módulo inyectivo inescindible $\Longleftrightarrow$ Existe un ideal izquierdo irreducible I de R tal que $E \cong E(R/I)$

Prueba $\Rightarrow$) Por el corolario 3, si tomamos $I = (0:e)$ se tiene el resultado.

$\Leftarrow$) Si existe un ideal izquierdo irreducible I de R tal que $E \cong E(R/I)$, por el inciso (b) del corolario 1, tenemos que $E(R/I)$ es inyectivo inescindible, y vía el isomorfismo E también es, así se tiene la prueba.

Corolario 5. Sea E un R-módulo inyectivo inescindible y suponga que E ó R es Artiniano. Entonces $E = E(S)$ para algún R-módulo simple.

En ambos casos E posee un submódulo simple S, y ya que E es inyectivo inescindible, $E = E(S)$ para algún R-módulo simple S.

Ejemplo. Sea R un dominio conmutativo con campo de cocientes K. Entonces K, considerado como R-módulo

es una cápsula inyectiva de R, es decir, $K = E(R)$
Pero se tiene que el ideal cero de R es irreducible, resultando K inescindible.

Así K es un R-módulo inyectivo inescindible.

Cuando el anillo R es conmutativo y Neteriano, se puede dar una descripción completa de los R-módulos inyectivos inescindibles en términos de los ideales primos de R. Lo anterior nos permitirá dar una descripción completa de los grupos abelianos inyectivos inescindibles. Para el resto de esta sección, R será un anillo conmutativo.

Definición. Sea P un ideal de R. P se dice que es un "ideal primo" de R si: (a) P es propio, y (b) Cuando $\alpha\beta \in P$ $(\alpha, \beta \in R)$, entonces $\alpha \in P$ ó $\beta \in P$.

Observaciones

1) Sea P un ideal primo de R y $r_1, r_2, \ldots, r_n$ $(n \geq 1)$ elementos de R. Si $r_1 r_2 \ldots r_n \in P$, entonces $r_i \in P$ para algún i. En particular, si $r \in R$ y $r^n \in P$, entonces $r \in P$.

2) Sea P un ideal primo de R y A, B ideales de R tal que $AB \subseteq P$. Entonces $A \subseteq P$ ó $B \subseteq P$.

Si $A \not\subseteq P$ y $B \not\subseteq P$ entonces existe $a \in A$ y $a \notin P$; $b \in B$ y $b \notin P$, pero $ab \in AB \subseteq P$ de lo cual $ab \in P$

y como P es primo $a \in P$ ó $b \in P$!, por lo tanto $A \subseteq P$ ó $B \subseteq P$.

3) Si P es un ideal primo, entonces R/P es un dominio entero.

Lema 1.29 Sea P un ideal primo de R. Entonces P es irreducible y $E(R/P)$ es inescindible.

Prueba. Suponga $P = A \cap B$, donde A y B son ideales de R. De $AB \subseteq A \cap B = P$, por la segunda observación $A \subseteq P$ ó $B \subseteq P$. Ya que $P = A \cap B$ se tiene $P = A \cap B \subseteq A$ y $P \subseteq B$, así $P = A$ ó $P = B$.
Entonces P es irreducible, se sigue de la proposición 1.28, corolario 1, que $E(R/P)$ es inescindible.

Lema 1.30 Sea M un R- módulo Neteriano distinto de cero. Entonces existe $m \in M$ tal que $0:m$ es un ideal primo de R

Prueba. Denote por Ω la colección de todos los ideales de R de la forma $0:x$, donde $0 \neq x \in M$. Ω es no vacío. Afirmación Ω tiene un elemento máximo.

Supongamos que no, entonces existe una cadena estrictamente ascendente infinita de ideales de R, $(0:x_1) \subset (0:x_2) \subset (0:x_3) \subset \ldots$, y en correspondencia obtenemos la cadena estrictamente ascendente infinita $0 \subset (0:x_2)/(0:x_1) \subset (0:x_3)/(0:x_1) \subset \ldots$ de submódulos de $R/(0:x_1)$. Pero $R/(0:x_1) \cong Rx_1$ que es un submódulo de M, y por tanto $R/(0:x_1)$ es Neteriano y por la descripción de arriba posee cadenas estrictamente infinitas de submódulos, lo cual proporciona una contradicción.

Sea $0:m = P$, el elemento máximo de Ω.

<u>Afirmación</u> P es primo. Claramente P es propio, sean $\alpha, \beta \in R$ tal que $\alpha\beta \in P$. Suponga que $\beta \notin P$. Entonces ya que $\alpha\beta \in P$, se tiene $\alpha\beta m = 0$ pero $\beta m \neq 0$. Ahora $0:\beta m \in \Omega$ y $0:\beta m \supseteq 0:m$, pero P era el elemento máximo, por tanto $0:\beta m = P$.

Pero $\alpha \in 0:\beta m$, con lo cuál $\alpha \in P$

Corolario 1 Sea M un R- módulo Neteriano no cero. Entonces existe un ideal primo P de R tal que M tiene un submódulo isomorfo a R/P.

Por el lema, sea $P = 0:m$ y ya que $Rm \cong R/(0:m)$ se tiene que $Rm \cong R/P$, por tanto el resultado.

Corolario 2 Cada ideal maximal de R es primo.

Prueba. Sea M un ideal maximal de R. R/M es un R- módulo simple (neteriano), por el corolario 1, existe un ideal primo P de R tal que $R/P \cong R/M$

Del hecho de, si I_1 y I_2 son ideales bilaterales de R y si $R/I_1 \cong R/I_2 \Rightarrow I_1 = I_2$, podemos inferir que $P = M$, y M es primo.

Sea P un ideal primo de R, y $0 \neq \varrho$ elemento del R-módulo R/P. Afirmación $0 : \varrho = P$

Sea $y \in 0 : \varrho$, entonces $y\varrho = \bar{0}$, $y(r+P) = \bar{0}$, así $yr \in P$, pero P es primo, por tanto, $y \in P$ $[0 : \varrho \subset P]$

Sea $y \in P$, $y(r+P) = yr + P$, pero $yr \in P$ con lo cuál $y(r+P) = P = \bar{0}$, de donde $y \in 0 : \varrho$.

Ahora sea $0 \neq \eta \in E(R/P)$, por ser $E(R/P)$ una extensión esencial de R/P, existe $r \in R$, tal que, $0 \neq r\eta \in R/P$

Por un razonamiento similar $0 : r\eta = P$. Pero $0 : \eta \subseteq$ $\subseteq 0 : r\eta$, así tenemos el siguiente lema:

Lema 1.31 Sea P un ideal primo de R. Entonces la colección de todos los anuladores de elementos no cero del R-módulo $E(R/P)$ tiene un elemento máximo P.

Corolario. Sean P_1, P_2 ideales primos de R y supongamos que $E(R/P_1) \cong E(R/P_2) \Rightarrow P_1 = P_2$

Definición. Sea P un ideal de R. P se dice que es N-primo si: (a) P es primo, y (b) R/P es un anillo Neteriano. Por ejemplo, cada ideal maximal M de R

es N-primo; además es primo por el lema 1.30 corolario 2, y R/M es campo (los únicos ideales son $\overline{0}$ y R/M, con lo cuál R/M es un anillo Neteriano.

Definición. Sea E un R-módulo. E se dice que es N-inyectivo si: (a) E es inyectivo, y (b) cuando $E \neq 0$, entonces E posee un submódulo Neteriano no cero.

Si R es un anillo Neteriano, no hay diferencia entre ideales primos y N-primos, ya que en este caso R/P es un anillo Neteriano.

Tampoco hay diferencia entre R-módulos inyectivos y R-módulos N-inyectivos. Sea $E \neq 0$ y consideremos $0 \neq e$ y $\langle e \rangle$, por el hecho de ser R un anillo Neteriano, $\langle e \rangle$ es un submódulo finitamente generado, así $\langle e \rangle$ es Neteriano y E posee un submódulo Neteriano.

Teorema 1.32

(i) Si P es un ideal N-primo de R, entonces $E(R/P)$ es un R-módulo inyectivo inescindible.

(ii) Si E es un R-módulo N-inyectivo inescindible entonces existe un ideal P, N-primo único, de R, tal que, $E \cong E(R/P)$

Prueba

(i) Sea P un ideal N-primo de R; por él lema 1.29, $E(R/P)$ es inescindible. R/P es un anillo NeTeriano y $E(R/P)$ Tiene a R/P como un submódulo NeTeriano no cero, de lo cuál se sigue que $E(R/P)$ es N-inyecTivo.

(ii) Sea E un R-módulo N-inyecTivo inescindible. Así E posee un submódulo NeTeriano y por él lema 1.30 corolario 1, E Tiene un submódulo NeTeriano $M \cong R/P$ para algún ideal primo P. Si consideramos las cápsulas inyecTivas, se Tiene que, $E(M) \cong E(R/P)$, pero E es inescindible, de donde $E \cong E(R/P)$. R/P es NeTeriano, vía el isomorfismo.

Por TanTo P es N-primo. La unicidad de P se sigue del lema 1.31 corolario.

El Teorema 1.32 da una descripción compleTa de los R-módulos inyecTivos inescindibles cuando, R es un anillo NeTeriano.

Corolario. Sea R un anillo NeTeriano conmuTaTivo E un R-módulo. Son equivalenTes:

(a) E es un R-módulo inyecTivo inescindible.

(b) $E \cong E(R/P)$ para algún ideal primo P de R.

Se determinarán los grupos Abelianos inyectivos inescindibles. El anillo Z de los enteros es un dominio de ideales principales, y por tanto Neteriano.

Los ideales primos son: (a) el ideal cero, (b) los ideales de la forma pZ con p primo.

El ideal cero da origen al grupo Abeliano inyectivo inescindible $E(Z)$, y por 1·4 $E(Z)=Q$ (grupo aditivo de los números racionales)

Sea p un número primo, y denote por Z_p el conjunto de los números racionales de la forma $\frac{m}{n}$, donde $m, n \in Z$ y $p \nmid n$. Z_p es un subgrupo de Q.

Sea $Z(p^\infty) = Q/Z_p$.

Afirmación $E(Z/Z_p) \cong Z(p^\infty)$

En primer lugar, Q es un grupo Abeliano divisible, y por el lema 1·4, Q/Z_p es divisible y $Z(p^\infty)$ también, del Teorema 1·8 se tiene que $Z(p^\infty)$ es inyectivo.

Denote por W el subgrupo de $Z(p^\infty)$ generado por el elemento $(1/p)+Z_p$.

Afirmación. $Z(p^\infty)$ es una extensión esencial de W.

Consideremos un elemento no cero de $Z(p^\infty)$, $(a/b) + Z_p (\, a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0)$

Así $(a/b) \notin Z_p$, por lo tanto $p \mid b$.

Suponga que la fracción $\frac{a}{b}$ puede ser reducida de tal manera que $(a,b) = 1$, así $p \mid b$ y $p \nmid a$.

Consideremos la máxima potencia K, tal que, $b = p^K b'$, donde $b' \in Z$ y $p \nmid b'$.

Entonces $p^{K-1} b' \left[\left(\frac{a}{b}\right) + Z_p \right] = \frac{p^{K-1} b' a}{b} + Z_p =$

$= \frac{p^{K-1} b' a}{p^K b'} + Z_p = \frac{a}{p} + Z_p$ que es un elemento

no cero de W, por lo tanto, $Z(p^\infty)$ es una extensión esencial de W. Así tenemos $Z(p^\infty) = E(W)$.

Pero tenemos que $Z/pZ \overset{\varphi}{\cong} W$, donde el elemento $n + pZ\ (n \in Z)$ le corresponde $(n/p) + Z_p$.

Primero se establecerá que está bien definido

Así de $n + pZ = n' + pZ$, se tiene $n - n' = pZ$, por otro lado $\frac{n}{p} - \frac{n'}{p} = \frac{n-n'}{p} = \frac{pz}{p} = z \in Z_p$. De donde, $\frac{n}{p} + Z_p = \frac{n'}{p} + Z_p$.

Lo cuál establece que φ está bien definido.

Si consideramos las cápsulas inyectivas, se tiene que, $E(Z/pZ) \cong E(W) = Z(p^\infty)$.

En conclusión, $E(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ y $E(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ no son isomorfos, ya que si $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}(p^\infty)$ $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$, $E(\mathbb{Z}/0) \cong E(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Y por él lema 2.31 corolario, $p\mathbb{Z} = (0)$ ⁈. Por lo Tanto

$$\mathbb{Q} \ncong \mathbb{Z}(p^\infty)$$

2. Módulos Inyectivos y Semisimplicidad.

En este capítulo, el símbolo R denotará un anillo con elemento identidad. No se tiene necesariamente que R es conmutativo. El término R_módulo será entendido como "R módulo izquierdo".

2.1 Anillos y módulos semisimples.

Lema 2.1 Sea M un R_módulo tal que cada submódulo de M es sumando directo de M y sea M' un submódulo de M. Entonces cada submódulo de M' es sumando directo de M'.

Prueba. Sea A un submódulo de M'. Entonces A también es un submódulo de M, y por lo tanto $M = A \oplus B$ con B submódulo de M. Por la ley modular, se tiene que, $A + (M' \cap B) = M' \cap (A + B) = M' \cap M = M'$. Así $M' = A + (M' \cap B)$, y la suma es directa ya que $A \cap (M' \cap B) = (A \cap M') \cap B = A \cap B = 0$

Proposición 2.2. Sea M un R_módulo. Son equivalentes:

(a) M tiene una familia $\{S_i\}_{i \in I}$ de submódulos simples tal que $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$.

(b) M tiene una familia de submódulos cuya suma es M.

(c) Cada submódulo de M es sumando directo de M.

Prueba. Supongamos que $M \neq 0$. Claramente (a) $\Rightarrow$ (b).
(b) $\Rightarrow$ (c) Supongamos que $M = \sum_{i \in I} S_i$, donde los S_i son módulos simples. Se probará un resultado auxiliar, que si N es un submódulo de M, Tal que, M es una extensión esencial de N, entonces $M = N$.
Supongamos que M es una extensión esencial del submódulo N. Entonces para cada $i \in I$, $S_i \cap N \neq 0$; pero ya que S_i es simple, se Tiene que $S_i \cap N = S_i$, por lo Tanto $S_i \subseteq N$ para cada $i \in I$, y $M = \sum_{i \in I} S_i \subset N$, por lo Tanto $M = N$.
Ahora sea M' un submódulo de M, por demostrar que M' es sumando directo de M. Supongamos además que $M \neq M'$, por la proposición 1.22, [Sea A un submódulo de un R- módulo B y $E(B)$ una cápsula inyectiva de B. Entonces A Tiene una cápsula inyectiva $E(A)$ que es submódulo de $E(B)$, y $E(A)$ sumando directo de $E(B)$], existen cápsulas inyectivas de $E(M)$ y $E(M')$ Tal que $E(M')$ es sumando directo de $E(M)$, i.e, existe $F \subset E(M)$, Tal que, $E(M) = E(M') \oplus F$. Ahora se probará que F es una extensión esencial de $M \cap F$. Considere un submódulo no cero T de F; ya que $F \subset E(M)$,

entonces T es un submódulo de $E(M)$, tal que, $T \cap (M \cap F) = (T \cap F) \cap M = T \cap M \neq 0$ que es lo que se requería.
Se sigue de la proposición 1.16 que $E(M) = E(M') \oplus F$ es una extensión esencial de $M' \oplus (M \cap F)$, de donde M es una extensión esencial de $M' \oplus (M \cap F)$, por el lema auxiliar $M = M' \oplus (M \cap F)$ y se tendría que M' es sumando directo de M.
(c) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que se cumple (c) y sea $0 \neq x \in M$. Claramente $Rx \cong R/(0:x)$ $[r \longrightarrow rx]$ y $(0:x)$ es un ideal izquierdo de R. Además se tiene que $(0:x)$ está contenido en un ideal izquierdo máximo Π de R, y el submódulo $\Pi/(0:x)$ de $R/(0:x)$ que es un submódulo máximo ya que si $\Pi/(0:x) \subseteq \Pi_0/(0:x)$ entonces por el Teorema de correspondencia $\Pi \subseteq \Pi_0$, y $\Pi = \Pi_0$ de donde $\Pi/(0:x) = \Pi_0/(0:x)$; el cual vía el isomorfismo se transforma en un submódulo máximo N de Rx, así Rx/N es un módulo que es simple. Por la hipótesis N es sumando directo de Rx, es decir, existe un submódulo S tal que $Rx = N \oplus S$, usando las proyecciones, $S \cong Rx/N$ y S es simple, ya que x es un elemento arbi-

Trario no cero de M, y cada submódulo no cero de M Tiene un submódulo simple.
Considere la familia de Todos los submódulos simples de M; por el lema de Zorn, existe una colección máxima de submódulos simples de M Tal que $\sum_{S\in\mathcal{C}} S$ es una suma directa. Sea $K=\sum_{S\in\mathcal{C}} S$, si $K\neq M$, entonces existe un submódulo no cero L de M Tal que $M=K\oplus L$. Pero por el resultado del parráfo anterior L contiene un submódulo simple $\bar{S}$, y la nueva suma $\bar{S}+\sum_{S\in\mathcal{C}} S$ es directa, ya que $\bar{S}\cap(\sum_{S\in\mathcal{C}} S)\subset L\cap K=\{0\}$.
Entonces se contradice el hecho de que $\mathcal{C}$ es una colección máxima. De donde $M=\sum_{S\in\mathcal{C}} S$, y se establece el resultado. (referencia [1])
Definición. Un módulo M que satisface las condiciones equivalentes de la proposición 2.2 se dice que es un "módulo semisimple".
Un anillo se dice que es semisimple (izquierdo) si es semisimple como módulo sobre sí mismo.
Observación. Existe una definición similar de un anillo semisimple (derecho). La razón de que las palabras izquierdo y derecho sean puestas entre

paréntesis es que los dos conceptos son equivalentes. Esto es consecuencia del Teorema de Artin_Wedderburn. Así se referirá simplemente a un anillo semisimple sin distinción, fuera de esta aclaración, nos referiremos a un anillo semisimple R, aquel que se representa como la suma directa de una familia de ideales izquierdos simples.

Si un módulo es semisimple, también cada módulo que es isomorfo a él, es semisimple.

Sea M un R-módulo semisimple y $M \underset{\varphi^{-1}}{\overset{\varphi}{\cong}} N$.

Sea N' un submódulo de N, por demostrar que existe N'' tal que $N = N' \oplus N''$.

Considere $\varphi(N') = M'$, entonces, ya que M es semisimple, $M = \varphi(N') \oplus K$, y $N = \varphi^{-1}(M) =$
$= \varphi^{-1}[\varphi(N') \oplus K] = \varphi^{-1}[\varphi(N')] \oplus \varphi^{-1}(K) = N' \oplus \varphi^{-1}(K)$,
lo anterior es válido por ser φ biyectiva.

Por lo tanto N es semisimple. Un módulo simple es semisimple, ya que en este caso $S = S$ y se tiene una representación para que S sea semisimple, ejemplo, el módulo cero.

Ocurren simplificaciones cuando se hacen algunas consideraciones sobre módulos semisimples.

Proposición 2.3. Sea M un R-módulo semisimple. Son equivalentes:

(a) M es la suma directa de una familia finita de submódulos simples.

(b) M es Neteriano.

(c) M es Artiniano.

(d) M es finitamente generado.

(a) $\Rightarrow$ (b) y (c)

Prueba. (a) $\Rightarrow$ (b) y (c)

Se sigue, si $M = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$, por el hecho de ser cada S_i Neteriano y Artiniano y por que la suma finita de Neterianos y Artinianos es Neteriano y Artiniano. Por lo tanto (b) y (c) se cumplen.

Ahora (b) y (c) $\Rightarrow$ (a), ya que si suponemos que M es la suma directa de una familia infinita de submódulos simples, podemos formar cadenas estrictamente ascendentes y descendentes. Así sea $\{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\} \subset \Lambda$ $[M = \bigoplus_{i \in \Lambda} S_i,\ \Lambda$ infinito$]$

Consideremos $S_{i_1} \subset S_{i_1} + S_{i_2} \subset S_{i_1} + S_{i_2} + S_{i_3} \subset \ldots$ y $\bigoplus_{i \in I} S_i \supset \bigoplus_{i \neq i_1} S_i \supset \bigoplus_{i \neq i_1, i_2} S_i \supset \ldots$; por lo tanto (b) y (c) son falsas, se tiene el resultado.

(d) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que $M = Rm_1 + Rm_2 + \ldots + Rm_n$, es decir, M es finitamente generado.

Ya que M es semisimple, $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ donde los S_λ son simples. Se puede elegir una colección finita $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ de elementos de Λ tal que:

$$m_i \in S_{\lambda_1} + S_{\lambda_2} + \ldots + S_{\lambda_r} \; (\forall 1 \leq i \leq n)$$

Así $M = Rm_1 + Rm_2 + \ldots + Rm_n = S_{\lambda_1} + \ldots + S_{\lambda_r}$.

Por tanto M es la suma directa de una familia finita de submódulos simples.

Corolario. Un anillo semisimple es la suma directa de ideales izquierdos simples.

Prueba. Se sigue del hecho de que el anillo R considerado como un R-módulo sobre sí mismo, es tal que, $R = \langle 1 \rangle$.

Proposición 2.4. Cada submódulo de un módulo semisimple es semisimple.

Prueba. Se sigue del lema 2.1.

Proposición 2.5. Una suma directa de módulos semisimples es semisimple.

Prueba. Ya que $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, con M_i semisimple, y cada $M_i = \bigoplus_{j \in J} S_j$ (S_j simple) resulta $M = \bigoplus_{i \in I} (\bigoplus_{j \in J} S_j)$.
De 2.2 (a), se tiene el resultado.

Proposición 2.6. Una imagen homomorfa de un módulo semisimple es semisimple.

Prueba. Sea M un R-módulo semisimple, M' un R-módulo, Tal que, existe $\phi: M \longrightarrow M'$ que es un epimorfismo.

Así por hipótesis, $Ker\,\phi$ es sumando directo de M, por tanto existe N submódulo de N, Tal que, $M = Ker\,\phi \oplus N$. Por los Teoremas de isomorfismo, $M' \cong M/Ker\,\phi \cong N$, ya que N es semisimple (proposición 2.4) resulta que M' es semisimple.

Proposición 2.7. Sea R un anillo. Son equivalentes.

(a) R es semisimple.

(b) Cada R-módulo es semisimple.

(c) Cada R-módulo es inyectivo.

(d) Cada ideal izquierdo de R es inyectivo.

(a) $\Rightarrow$ (b) Cada R-módulo es imagen homomorfa de una suma directa de copias de R.

$[\phi : \bigoplus_{g \in G} R \longrightarrow M$, por $\phi(\{r_g\}) = \sum_{g \in G} r_g g\,]$. Así por 2.5 $\bigoplus_{g \in G} R$ es semisimple y por 2.6 M es semisimple.

(b) $\Rightarrow$ (c) Suponga (b) y considere un R-módulo M. Sea M' una extensión de M. Entonces por hipótesis M' es semisimple, y por 2.2 (c) M es

sumando directo de M', y por 1.15 da como resultado que M es inyectivo.
(c) ⇒ (d) es claro, falta (d) ⇒ (a)
Sea I un ideal izquierdo de R. Entonces I es inyectivo y es sumando directo de R (Teorema 1.15)
Así por 2.2 (c) resulta R semisimple.

En la expresión de un módulo semisimple como una suma directa de submódulos simples, se plantea la pregunta: ¿cuándo se obtiene unicidad en esta representación?
De hecho si $\{S_i\}_{i\in I}$ y $\{T_j\}_{j\in J}$ son familias de submódulos simples de un R-módulo, tal que:

$$\bigoplus_{i\in I} S_i = \bigoplus_{j\in J} T_j$$

Existe una correspondencia uno a uno entre las dos familias, tal que, módulos simples correspondientes son isomorfos. Esto se probará en la siguiente sección.
Se establecerá un resultado más general. Se sabe que el anillo de endomorfismos de un módulo simple es un anillo con división.

Ahora la clase de anillos con división está contenida, en la clase de anillos casilocales.
Se probará que los módulos inyectivos inescindibles, como los módulos simples, tienen anillos casilocales de endomorfismos.
El Teorema de unicidad que se probará se aplica a sumas directas de módulos, que tienen anillos casilocales de endomorfismos, y así se pueden considerar bajo este caso, tanto a los módulos simples y a los módulos inyectivos inescindibles.

2.2 Módulos con anillos casilocales de endomorfismos.

Introduciremos en primer lugar la noción de anillo casilocal.

Lema 2.8 Sea J un subconjunto de un anillo R.

Son equivalentes:

(a) J es el conjunto de elementos de R que no tienen inversos izquierdos y es un ideal izquierdo de R.

(b) J es el conjunto de elementos de R que no tienen inversos derechos y es un ideal derecho de R.

(c) J es el conjunto de elementos de R que no tienen inverso izquierdo, ni derecho, los elementos que no están en J son unidades y J es un ideal bilateral.

(d) J es el conjunto de no unidades, es no vacío, y es cerrado bajo la adición.

Definición. Un anillo R que tiene un subconjunto J que satisface las condiciones equivalentes (a), (b), (c) y (d) del lema 2.8 se dice que es un "anillo casilocal".

Notas.

(i) Un anillo casilocal necesariamente es no trivial, ya que el único elemento de un anillo trivial es una unidad.

(ii) La condición (a) implica que J es el único ideal izquierdo máximo de R. En efecto, pues si existe M ideal izquierdo tal que $J \subset M \subset R$ se tiene que dada $x \in M - J$ existe $y \in R$, tal que $yx = 1 \in M = R$, así J es máximo. Sea J' ideal izquierdo máximo de R ($J' \neq J$). Así $J \not\subset J'$, entonces sea $x \in J' - J \Rightarrow x$ tiene inverso izquierdo, por lo tanto, existe $y \in R$ tal que $yx = 1 \in J'$, $J' = R$!. (pues J' es máximo). Así no existe x que cumpla $x \in J' - J$, por lo tanto, $J' - J = \phi \Leftrightarrow J' \subset J$ y como J' es máximo ($J' \neq R$), se tiene $J' = J$.

(iii) La condición (b) implica que J es el único ideal derecho máximo de R.

(iv) La condición (c) implica que J es el único ideal bilateral máximo de R.

(v) Deducimos de (c), que si $x \in R$ no tiene inverso izquierdo (derecho), tampoco tiene inverso derecho (izquierdo).

(vi) La condición (d) puede ser útil para probar cuando un anillo dado es casilocal.

(vii) Un anillo con división es casilocal, $J = 0$

Prueba de 2.8 (a) $\Rightarrow$ (b) Considere un elemento $x \in J$, y suponga que x tiene un inverso derecho, ie, $xy = 1$. Ahora $yx \in J$, Tenemos $(1 - yx)y = y - yxy = y \cdot y = 0$.

pero Tenemos $1-yx \notin J$, de oTra manera
$yx + 1 - yx = 1 \in J$, y $J = R$!
Así $1-yx$ Tiene un inverso z (izquierdo).
$z(1-yx) = 1$, de donde $y = z(1-yx)y = z[(1-yx)y] =$
$= z(0) = 0$. EsTo da la contradicción y ningún
elemenTo de J Tiene inverso derecho.
FalTa probar que J es un ideal derecho de R.
Sea $r \in R$, enTonces Jr es un ideal izquierdo
de R y $Jr \neq R$, ya que se probó que los
elemenTos de J no Tienen inverso derecho.
Ya que J es el único ideal izquierdo máximo
de R, se sigue que $Jr \subseteq J$
De lo anTerior J es un ideal derecho de R, ya
que se sabe que J es cerrado bajo la adición.
FinalmenTe sea $s \in R$ Tal que $s \notin J$. Por
demosTrar, que s Tiene un inverso derecho.
Ya que $s \notin J$, s Tiene un inverso izquierdo
T, esTo es, $Ts = 1$. Afirmación. $T \notin J$.
En caso conTrario $T \in J \Rightarrow Ts = 1 \in J$ y
por TanTo $J = R$!.
Así Tenemos que T Tiene un inverso izquierdo
U, esTo es, $UT = 1$. De donde $U = U \cdot 1 = U(Ts) =$
$(UT)s = 1 \cdot s = s$, enTonces $sT = 1$, y s Tiene un

inverso derecho T. Por lo Tanto se Tiene (b).
Por simeTría (b) $\Rightarrow$ (a); y (a) $\Leftrightarrow$ (b).
Es claro que (a) y (b) son equivalentes a (c),
y (c) $\Rightarrow$ (d)
Por demostrar que (d) $\Rightarrow$ (a)
Antes un lema auxiliar.
Lema 2.9 Sean α, β elementos de un anillo R,
y suponga que α y $\alpha\beta$ son unidades de R.
Entonces β también es una unidad.
Prueba. Sean α y $\alpha\beta$ con respectivos inversos
γ, δ, esto es, $\gamma\alpha = \alpha\gamma = 1$ y $\delta(\alpha\beta) = (\alpha\beta)\delta = 1$.
Entonces $\beta(\delta\alpha) = 1$, ya que $\beta(\delta\alpha) = \gamma(\alpha\beta)\delta\alpha =$
$= \gamma(1)\alpha = 1$
Por otro lado $(\delta\alpha)\beta = \delta(\alpha\beta) = 1$, esto muestra
que β tiene inverso $\delta\alpha$.
Completemos la prueba.
Sea $x \in J$ y $r \in R$. Mostraremos que $rx \in J$, de lo
que se seguirá que J es un ideal izquierdo.
Si $r \notin J$, entonces $rx \in J$, ya que en caso
contrario si $rx \notin J \Rightarrow x \notin J$ ¡! (por el lema)
Si es el caso que $r \in J$, entonces $-r \in J$,
de donde $1+r \notin J$, ya que $1+r-r = 1 \in J$ ¡!

Por el lema 2.9 $(1+r)x \in J$, es decir, $(1+r)(x)=j$, $1\cdot x + rx = j$, $rx = j-x \in J$.
Los elementos de J no pueden tener inverso izquierdo, ya que en tal caso si $x \in J$ tiene inverso izquierdo $x' \cdot x = 1 \in J$ para algún x'! Ya que $1 \notin J$.
En el otro caso, los elementos que no están en J tienen efectivamente inversos izquierdos.
Ahora consideremos el anillo de endomorfismos de un módulo inyectivo. Así tenemos el siguiente lema.

Lema 2.10. Sea E un R-módulo inyectivo inescindible y f perteneciente al anillo de endomorfismos de E. Entonces f es unidad $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = 0$

Prueba. Las unidades del anillo de endomorfismos de E son justamente los R-isomorfismos de E a E. Es claro que si f es una unidad $\Rightarrow \operatorname{Ker} f = 0$.
Por otro lado suponga que $\operatorname{Ker} f = 0$, entonces f es un monomorfismo y ya que $E \cong f(E)$ se tendrá que $f(E)$ es un módulo inyectivo.
Ahora por 1.15 $f(E)$ es sumando directo de E,

, es decir, $f(E) \oplus T = E$ para K submódulo de E, y $f(E) \neq 0$, y ya que E es inescindible $f(E) = E$. Entonces f es epimorfismo, y así es una unidad del anillo de endomorfismos de E.

Proposición 2.11. Sea E un R-módulo Tal que el anillo de endomorfismos de E es casilocal. Entonces E es inescindible.

Prueba. Un módulo cero Tiene un anillo de endomorfismos Trivial, así suponga que $E \neq 0$. Suponga que E no es inescindible. Entonces existen submódulos $E_1, E_2 \neq 0$ Tal que $E = E_1 \oplus E_2$. Denote las respectivas inyecciones y proyecciones por $\phi_1: E_1 \longrightarrow E_2$, $\phi_2: E_2 \longrightarrow E$, $\Pi_1: E \to E_1$, $\Pi_2: E \longrightarrow E_2$

Ahora consideremos $\phi_1 \Pi_1$ y $\phi_2 \Pi_2$.

Sea $e \in E$, entonces $e = e_1 + e_2$

$(\phi_1 \Pi_1)(e) = \phi_1[\Pi_1(e_1+e_2)] = \phi_1[e_1] = e_1$

Así $Ker(\phi_1 \Pi_1) = \{e \in E \mid e = 0 + e_2\} = E_2 \neq 0$

y similarmente $Ker(\phi_2 \Pi_2) = E_1 \neq 0$.

Por lo Tanto $\phi_1 \Pi_1$ y $\phi_2 \Pi_2$ son no unidades de $Hom_R(E, E)$ y además $\phi_1 \Pi_1 + \phi_2 \Pi_2 = id_E$.

De donde el anillo de endomorfismos de E no es casilocal.

Proposición 2·12 Sea E un R-módulo.
Son equivalentes:
(a) E es inescindible.
(b) El anillo de endomorfismos de E es casilocal.

Prueba. (a) $\Rightarrow$ (b) Suponga que E es inescindible. Ya que $E \neq 0$, el anillo de endomorfismos es no trivial. Sean f, g dos no unidades de $Hom_R(E, E)$. Por 2·10, $Ker f \neq 0$ y $Ker g \neq 0$, entonces $Ker f \cap Ker g \neq 0$ ya que en caso contrario el 0 sería reducible ¡ (ya que E es inescindible).
Pero, $0 \neq Ker f \cap Ker g \subset Ker(f+g)$, así $f+g$ es no unidad. Entonces el anillo de endomorfismos es casilocal.
(b) $\Rightarrow$ (a) por 2·11 se tiene la conclusión.
Nosotros podemos probar la unicidad del Teorema prometido en la sección anterior.
Este es el célebre Teorema de Krull-Schmidt-Remak-Azumaya.
La prueba no usa la Teoría de módulos inyectivos desarrollada hasta ahora.

Teorema 2.13 Sea M un R-módulo y suponga que $\{M_i\}_{i\in I}$ y $\{N_j\}_{j\in J}$ son familias de submódulos de M Tal que $\bigoplus_{i\in I} M_i = M = \bigoplus_{j\in J} N_j$ Suponga además que cada M_i y cada N_j Tiene un anillo casilocal de endomorfismos. Existe una correspondencia uno a uno entre las familias $\{M_i\}_{i\in I}$ y $\{N_j\}_{j\in J}$ Tal que los módulos correspondientes son isomorfos.

Antes un lema significativo para la prueba.

Lema 2.14. Sea M un R-módulo y suponga que $M = \bigoplus_{i\in I} M_i = N \oplus N'$, donde N y los M_i son submódulos con anillos casilocales de endomorfismos.

Entonces existe $i\in I$ Tal que el mapeo combinado $M_i \xrightarrow{\text{inc}} M \xrightarrow{\text{proj}} N$ es un isomorfismo y $M = M_i \oplus N'$.

Prueba. Ya que N Tiene un anillo no Trivial de endomorfismos, $N \neq 0$ y existe $0 \neq n \in N$. Así $n = m_1 + m_2 + \dots + m_s$, para $1 \leq k \leq s$, donde m_k es un elemento no cero de M_{i_k}.

Sea $P = M_{i_1} + M_{i_2} + \dots + M_{i_s}$, y $Q = \sum_{i \neq i_k} M_i$, es claro que $M = P \oplus Q$

Ahora consideremos los mapeos combinados

$\phi_1: N \xrightarrow{inc} M \xrightarrow{proj} P \xrightarrow{inc} M \xrightarrow{proj} N$,

$\phi_2: N \xrightarrow{inc} M \xrightarrow{proj} Q \xrightarrow{inc} M \xrightarrow{proj} N$

Los dos son endomorfismos y $\phi_1 + \phi_2 = id_N$, ya que Tiene sus componenTes en P y Q.

Ya que el anillo de endomorfismos es casilocal, Se sigue que ϕ_1 ó ϕ_2 es un isomorfismo. Pero no puede ser ϕ_2, ya que $\phi_2(n) = 0$, esTo porque $n \in P$ ToTalmenTe; así ϕ_1 es isomorfismo.

Ahora consideremos los endomorfismos de N dados por $\psi_k: N \xrightarrow{inc} M \xrightarrow{proj} M_{ik} \xrightarrow{inc} M \xrightarrow{proj} N$ para $1 \leq k \leq s$. Se Tiene que $\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_s = \phi_1$, que es un isomorfismo, así por lo menos uno de los ψ_k es isomorfismo (ya que el anillo de endomorfismos es casilocal)

Todo lo anTerior muesTra que existe $i \in I$ Tal que el mapeo combinado

$\psi: N \xrightarrow{inc} M \xrightarrow{proj} M_i \xrightarrow{inc} M \xrightarrow{proj} N$ es isomorfismo. Podemos rescribir ψ vía dos mapeos llamados α y β, donde $\alpha: N \xrightarrow{inc} M \xrightarrow{proj} M_i$ y $\beta: M_i \xrightarrow{inc} M \xrightarrow{proj} N$, de donde $\psi = \beta\alpha$.

Ya que ψ es isomorfismo, β es epi.

Consideremos $x \in M_i$, así $\beta(x) \in N$, de donde $\beta(x) = \psi(x')$ para alguna $x' \in N$, resultando $\beta(x) = (\beta\alpha)(x')$, de donde $x = \alpha(x') + (x - \alpha(x')) \in \alpha(N) + \operatorname{Ker}\beta$.

Ya que $\alpha(N) \cap \operatorname{Ker}\beta = 0$ [Sea $y \in \alpha(N) \cap \operatorname{Ker}\beta$ entonces $y = \alpha(T)$ y $\beta(y) = 0$; $\beta(\alpha(T)) = 0$ y $\psi(T) = 0$, de donde $T = 0$ ya que ψ es iso.

Por tanto $y = \alpha(0) = 0$, $y = 0$].

Lo anterior da como resultado que:

$$M_i = \alpha(N) \oplus \operatorname{Ker}\beta$$

Sabiendo ya que M_i es inescindible y $\alpha(N) \neq 0$, necesariamente $\operatorname{Ker}\beta = 0$, y β es isomorfismo. Se tiene una parte de lo que se quiere probar.

Ahora considere $y \in N$, y denote por $\pi : M \to N$ el mapeo proyección derivado de la suma directa $M = N \oplus N'$.

Existe $y' \in M_i$ tal que $\pi(y) = y = \beta(y') = (\pi \circ \iota)(y') = \pi(y')$, así $y - y' \in \operatorname{Ker}\pi = N'$. Esto da que $y \in M_i + N'$, lo cuál muestra que $M = M_i + N'$

Afirmación. $M_i \cap N' = \operatorname{Ker}\beta$.

Sea $x \in M_i \cap N'$, $\pi(x) = 0 = \beta(x)$ y $x \in \operatorname{Ker}\beta$

Sea $x \in Ker\beta$, claramente $Ker\beta \subset M_i$ y $\beta(x) = \Pi o_i(x)$ por tanto $\Pi(x) = 0$, y se tiene el resultado.

En la prueba de 3·13, se hará uso de dos resultados de Teoría de conjuntos que versan sobre lo siguiente:

Uno es el Teorema de Schroeder ~ Bernstein, que afirma que si X y Y son dos conjuntos no vacíos para los cuales existen inyecciones $X \to Y$, y, $Y \to X$, entonces existe una biyección entre X y Y

El otro, suponga que tenemos una familia infinita $\{X_i\}_{i\in I}$ de conjuntos finitos, no vacíos, entonces existe una inyección $\bigcup_{i \in I} X_i \longrightarrow I$, este es un resultado de la Teoría de Cardinales (referencia [2])

Prueba de 2·13. Supongamos que tenemos la situación descrita en el Teorema. Suponga que $M \neq 0$, y que los conjuntos de índices son no vacíos.

El conjunto de índices de I se parte como sigue:

Los elementos i, i' de I pertenecen al mismo conjunto de la partición ssi $M_i \cong M_{i'}$. El mismo es dado para J. Se sigue de 2.14 que existe una correspondencia uno a uno entre los conjuntos de las dos particiones; los conjuntos I_0 y J_0 se corresponden si $M_i \cong N_j$ cuando $i \in I_0$ y $j \in J_0$

Considere conjuntos correspondientes I_0 y J_0. El Teorema se seguirá si se puede probar que existe una biyección entre I_0 y J_0.

Considere un elemento j_1 de J_0. Por el lema 2.14 existe $i_1 \in I_0$ tal que $M = M_{i_1} \oplus (\sum_{j \neq j_1} N_j)$

Ahora considere $j_2 \in J_0$, $j_2 \neq j_1$, entonces existe $i_2 \in I_0$ tal que $M = M_{i_1} \oplus M_{i_2} \oplus (\sum_{j \neq j_1, j_2} N_j)$

Note que $i_2 \neq i_1$. Continuando en este camino, tenemos que para un conjunto finito de elementos distintos de J_0, existe un conjunto finito de igual número de elementos de I_0, ya que los papeles de I_0 y J_0 pueden ser intercambiados, si uno de I_0, y J_0 es finito, el otro tiene el mismo número de elementos.

Consideremos ahora el caso en que I_0 y J_0 son

los dos infinitos. Consideremos $i \in I_0$.
Para cada $j \in J$, consideremos el mapeo
$\theta_j : M_i \xrightarrow{inc} M \xrightarrow{proj} N_j$
Denotemos por $J(i)$ el conjunto de todas las $j \in J$ tal que el mapeo θ_j es un isomorfismo, $J(i) \subseteq J_0$
Sea $0 \neq m \in M_i$, por la descripción de M
$m = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$, de donde $n_k \in N_{j_k}$ $(1 \leq k \leq r)$
y cada $n_k \neq 0$.
Claramente $m \in \operatorname{Ker} \theta_j$ cuando $j \neq j_1, j_2, \ldots, j_r$;
así $J(i)$ es un conjunto finito. Por 2.14 cada elemento de J_0 pertenece a $J(i)$ para alguna $i \in I_0$, así $J_0 \subset \bigcup_{i \in I} J(i)$ por lo que se sigue que $\bigcup_{i \in I_0} J(i) = J_0$
Por el resultado de Teoría de conjuntos, existe una inyección de $\bigcup_{i \in I_0} J(i) \longrightarrow I_0$, y por tanto de $J_0 \longrightarrow I_0$.
Por simetría existe una inyección de $I_0 \longrightarrow J_0$
Por el Teorema de Schroeder–Bernstein existe una biyección entre I_0 y J_0.
Ahora un corolario relativo al Teorema 2.13.
Corolario. Sean $\{E_i\}_{i \in I}$ y $\{F_j\}_{j \in J}$ dos familias de

R- módulos Tales que $\bigoplus_{i\in I} E_i \cong \bigoplus_{j\in J} F_j$

Suponga que (a) Los E_i y F_j son simples, ó (b) Los E_i y F_j son módulos inyectivos inescindibles. Entonces existe una correspondencia uno a uno entre las dos familias Tal que los módulos correspondientes son isomorfos.

Prueba. En los dos casos, por ser el anillo de endomorfismos de un módulo simple un anillo con división y por Tanto casi local; y por el Teorema 2.12 Se Tiene la presencia de anillos casilocales de endomorfismos. Por Tanto se Tiene el resultado.

2.3 El soclo de un módulo.

Definición. Sea M un R- módulo. Denote por S(M) la suma de Todos submódulos simples de M, y llamaremos a S(M) el "soclo" de M. En el caso de que M no Tenga submódulos simples, se hará la convención, de que **S**(M) es el submódulo cero de M.

El soclo de un módulo es semisimple, esTo por 2.2 (b). De esTe modulo, se Tiene, que es de hecho el único submódulo semisimple máximo del módulo.

Proposición 2.15 Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos. Entonces $S(\bigoplus_{i\in I} E_i) = \bigoplus_{i\in I} S(E_i)$

Prueba. El submódulo $\bigoplus_{i\in I} S(E_i)$ de $\bigoplus_{i\in I} E_i$ es semisimple, así $\bigoplus_{i\in I} S(E_i) \subseteq S(\bigoplus_{i\in I} E_i)$

Para la otra contención, considere un submódulo simple de $\bigoplus_{i\in I} E_i$, este es generado digamos por x, esto es, $S = \langle x\rangle$. Suponga que x tiene una componente no cero x_j en E_j. Existe un epimorfismo $Rx \longrightarrow Rx_j$ que mapea rx a rx_j $(r\in R)$, así Rx_j es un módulo simple. Entonces $Rx \subseteq Rx_j \subseteq S(E_j)$, de lo cuál se sigue que $Rx \subseteq \bigoplus_{i\in I} S(E_i)$, lo cual muestra que $S(\bigoplus_{i\in I} E_i) \subseteq \bigoplus_{i\in I} S(E_i)$.

Proposición 2.16. Sea M' un submódulo del R-módulo M. Entonces $S(M')$ es un submódulo de $S(M)$.

Además $S(M') = S(M)$ si $M = E(M')$. En particular $S(E(M')) = S(M)$.

Prueba. La primera es clara. Sea $M = E(M')$ y considere un submódulo simple S de M, entonces $S \cap M' \neq 0$, así $S \cap M' = S$, es decir, $S \subseteq M'$, de lo cuál se sigue que $S(M) \subseteq S(M')$

Proposición 2.17. Sea M un R-módulo.

Son equivalentes:

(a) Cada submódulo no cero de M contiene un submódulo simple.

(b) $M = E(S(M))$.

Además, cuando (a) y (b) se cumplen, $E(M) = E(S(M))$

Prueba (a) $\Rightarrow$ (b)

Sea M' un submódulo no cero de M, por hipótesis M' contiene un submódulo simple S, así que $M' \cap S(M) \neq 0$, por lo tanto $M = E(S(M))$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea M' un submódulo no cero de M, entonces $M' \cap S(M) \neq 0$. Así $M' \cap S(M)$, será un submódulo del módulo semisimple $S(M)$, por tanto también semisimple, así $M' \cap S(M)$ tiene un submódulo simple S_0; de $S_0 \subset M' \cap S(M) \subset M'$ se sigue que M' tiene un submódulo simple.

Corolario Sea M un R-módulo, enTonces: (i) R es un anillo ArTiniano ó (ii) M es un módulo ArTiniano, enTonces M es una exTensión esencial de $S(M)$ y
$E(M) = E(S(M))$

2.4 Módulos finiTamenTe cogenerados.

Un módulo NeTeriano puede ser caracTerizado por el hecho de que cada submódulo es finiTamenTe generado. Ahora daremos una descripción dual para módulos ArTinianos.

Definición. Un R-módulo M se dice que es "finiTamenTe cogenerado", si existen módulos simples $S_1, S_2, \ldots, S_K$ Tal que $E(M) \cong E(S_1) \oplus \ldots \oplus E(S_K)$
Por convención, el módulo cero es finiTamenTe cogenerado, y en esTe caso no se Tienen módulos simples.

La propiedad de ser "finiTamenTe cogenerado" es preservada bajo isomorfismo.

Proposición 2.18 Un R-módulo (M) es finiTamenTe cogenerado ssi se saTisfacen las condiciones:

(a) M es una exTensión esencial de $S(M)$

(b) $S(M)$ es finiTamenTe generado.

Suponga que M es finitamente cogenerado, en este caso, $E(M) \cong E(S_1) \oplus E(S_2) \oplus \dots \oplus E(S_K)$ donde $S_1, S_2, \dots, S_K$ son módulos simples.
Se sabe que $S(E(M)) = S(M)$, pero se sabe que $S(\bigoplus_{i \in I} E_i) = \bigoplus_{i \in I} S(E_i)$, así aplicando el soclo:

$$S(E(S_1) \oplus \dots \oplus E(S_K)) = S(E(S_1)) \oplus \dots \oplus S(E(S_K))$$
$$= S(S_1) \oplus S(S_2) \oplus \dots \oplus S(S_K) = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_K$$

Así $S(E(M)) \cong S[E(S_1) \oplus \dots \oplus E(S_K)]$ y

$$S(M) \cong S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_K$$

Lo cual muestra que $S(M)$ es finitamente generado.
Por la proposición 1.16, $E(S_1) \oplus E(S_2) \oplus \dots \oplus E(S_K)$ es una extensión esencial de $S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_K$ y vía el isomorfismo $E(M)$ es una extensión esencial de $S(M)$. Pero $S(M) \subset M \subset E(M)$, así que M es una extensión esencial de $S(M)$.
Ahora supongamos que se cumplen (a) y (b).
Ya que $S(M)$ es semisimple y finitamente generado por 2.3, $S(M) = S_1 \oplus \dots \oplus S_K$ donde $S_1, S_2, \dots, S_K$ son módulos simples de M.
Pero $E(M) = E(S(M)) \cong E(S_1 \oplus \dots \oplus S_K)$, de donde, $E(M) \cong E(S_1) \oplus E(S_2) \oplus \dots \oplus E(S_K)$, lo cual muestra

que M es finitamente cogenerado.

El siguiente par de resultados establece la dualidad entre las nociones de finitamente generado y finitamente cogenerado.

Antes un par de definiciones.

Definición. Sea M un R-módulo. Una familia $\{M_i\}_{i\in I}$ de submódulos de M se dice que es un "sistema directo" si, para un número finito de elementos $i_1, i_2, \ldots, i_k$ de I, existe un elemento i_0 en I, tal que, $M_{i_0} \supseteq M_{i_1} + \ldots + M_{i_k}$

Definición. Sea M un R-módulo. Una familia $\{M_i\}_{i\in I}$ de submódulos de M es un "sistema inverso" si, para un número finito de elementos $i_1, \ldots, i_k$ de I, existe un elemento i_0 en I tal que $M_{i_0} \subseteq M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_k}$

Proposición 2.19'. Sea M un R-módulo. Son equivalentes:

(a) M es finitamente generado.

(b) Cada sistema directo de submódulos propios de M es acotado superiormente por un submódulo propio de M.

Proposición 2.19. Sea M un R-módulo. Son equivalentes:

(a) M es finitamente cogenerado.

(b) Cada sistema inverso de submódulos no cero de M es acotado inferiormente por un submódulo no cero de M.

Nota.- Se dice que una familia de submódulos de M es acotada superiormente [respectivamente, inferiormente] por un submódulo M' de M, si M' contiene [respectivamente, está contenido en] cada submódulo de la familia.

Aunque nada más nos interesan, por el momento, los módulos finitamente cogenerados, probaremos los dos resultados.

Prueba de 2·19'.

Suponga que M es finitamente generado, digamos por $m_1, m_2, \ldots, m_n$; y que M tiene un sistema directo $\{M_i\}_{i\in I}$ de submódulos propios que no es acotado superiormente por un submódulo propio. Entonces $\sum_{i\in I} M_i = M$, ya que de otra manera, es decir, $\sum_{i\in I} M_i \neq M$, tendríamos una cota para el sistema directo.

Ya que cada m_k se representa como una suma finita de elementos de los M_i, y hay solamente un número finito de m_k's, existe un conjunto finito $I' \subset I$, tal que $\sum_{i \in I'} M_i = M$

Pero $\{M_i\}_{i \in I}$ es un sistema directo, por lo tanto, existe un elemento i_0 en I, tal que, $M = \sum_{i \in I'} M_i \subseteq M_{i_0}$, pero M_{i_0} es propio, esto nos proporciona una contradicción y por tanto se tiene (b)

(b)$\Rightarrow$(a) Supongamos que se cumple (b), y que M no es finitamente generado.

Consideremos la colección de todos los submódulos finitamente generados de M, el cual claramente es un "sistema directo", ya que si $M_{i_1}, M_{i_2}, \dots M_{i_k}$ son finitamente generados; $M_{i_1} + \dots + M_{i_k}$ es finitamente generado y por tanto está en la colección.

Pero por (b) existe un submódulo propio M' que es una cota superior, del hecho de que $M' \neq M$ existe $m \in M$, $m \notin M'$.

Pero el submódulo Rm de M es finitamente generado, y por ser M' cota superior, $Rm \subset M'$ así $m \in M'$ ¡!, por lo tanto (b) $\Rightarrow$ (a).

Prueba de 2.19. Suponga primero que M es finitamente cogenerado, y considere un sistema

inverso $\{M_i\}_{i\in I}$ de submódulos no cero de M.
Ya que M es finitamente cogenerado, M es una extensión esencial de $S(M)$, de donde se tiene que $M_i \cap S(M) \neq 0$ para cada $i \in I$
También $S(M)$ es finitamente generado y por 2.3 es Artiniano. Por lo tanto existe un miembro mínimo $M_{i_0} \cap S(M)$ entre los del tipo $M_i \cap S(M)$.
Considere $i \in I$. Ya que $\{M_i\}_{i\in I}$ es un sistema inverso, existe $i' \in I$ tal que $M_{i'} \subseteq M_i \cap M_{i_0}$.
Pero $M_{i'} \cap S(M) \subseteq M_{i_0} \cap S(M)$, así se tiene $M_{i'} \cap S(M) = M_{i_0} \cap S(M)$, de lo cual se infiere que $M_{i_0} \cap S(M) \subseteq M_{i'} \subseteq M_i$, resultando que $M_{i_0} \cap S(M)$ es una cota superior para el sistema inverso, por lo tanto (a) $\Rightarrow$ (b)
(b) $\Rightarrow$ (a) Suponga que cada sistema inverso de submódulos no cero de M es acotado inferiormente por un submódulo no cero. Se va a probar que $M = E(S(M))$ y que $S(M)$ es finitamente generado.
Consideremos un submódulo no cero N de M.
Denote por Ω la colección de todos los submódulos

no cero de M, parcialmente ordenado por el opuesto a la inclusión, es decir, $N_1 < N_2$ si $N_2 \subset N_1$.

Consideremos un subconjunto totalmente ordenado Ω' de Ω. Ω' es un sistema inverso, ya que, si $\{N_i\}_{i\in I}$ es una colección de submódulos de N si tomamos $i_1, \ldots, i_k \in I$, entonces se tiene que $N_{i_1} \cap \ldots \cap N_{i_k}$ es un submódulo no cero de N. Y se sigue que $N_i < \bigcap_{i\in I} N_i$, ya que para cada $i \in I$ $\bigcap_{i\in I} N_i \subset N_i$. Por lo cual Ω' está acotado superiormente y por el lema de Zorn, Ω tiene un miembro máximo digamos N_0.

Afirmación N_0 es simple.

Si existierá $N_{i_0} \subset N_0$ por el orden $N_0 < N_{i_0}$, contradiciendo que N_0 es máximo. Por tanto N_0 es simple.

Pero $N \cap S(M) \supseteq S \neq 0$ y $M = E(S(M))$

Finalmente, suponga que $S(M)$ es la suma directa de una familia infinita de submódulos simples $[\ S(M) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$, Λ infinito$]$

Sea $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ una subfamilia numerable.

Afirmación. $\{\sum_{i=n}^{\infty} S_i\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema directo.

Consideremos $\sum_{i=p_1}^{\infty} S_i$, $\sum_{i=p_2}^{\infty} S_i, \ldots, \sum_{i=p_k}^{\infty} S_i$; y la intersección de ellos:

$$\left(\sum_{i=p_1}^{\infty} S_i\right) \cap \ldots \cap \left(\sum_{i=p_k}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=p_0}^{\infty} S_i$$

donde $p_0 = \max\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$

Ahora sea $T_j = \sum_{i=j}^{\infty} S_i$

Observación. $T_1 = \sum_{i=1}^{\infty} S_i$ es una suma directa, y a que, $S_i \cap \sum_{j \neq i} S_j \subset S_i \cap \sum_{\lambda \in \Lambda - \{i\}} S_\lambda = \{0\}$, entonces

$S_i \cap \sum_{j \neq i} S_j = 0$.

De hecho $T_j = \sum_{i=j}^{\infty} S_i$ es directa para cada j.

Afirmación $\bigcap_{i=1}^{\infty} T_i = \{0\}$

Sea $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$, entonces $x \in T_1$, $x = x_{i_1} + \ldots + x_{i_n}$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_n)$

y cada $x_{ij} \neq 0$. Pero $x \in T_{i_2}$, entonces tenemos que $x = x_{k_1} + \ldots + x_{k_s}$ $(k_\tau \geq i_2;\ \tau = 1, \ldots, s)$ y $x_{i_1} \neq 0$

De donde $0 = x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots x_{i_n} - x_{k_1} - \ldots - x_{k_s}$ y $x_{i_1} \neq 0$.

Así 0 tiene dos representaciones distintas ¡.

Asi el sisTema inverso no puede ser acotado inferiormenTe por un submódulo no cero. Ya que si existiera $T \subset T_i$ para cada $i \in I$, $T \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i = \{0\}$, por lo TanTo, $T = \{0\}$.

Por Todo lo anTerior se Tiene una contradicción, y por TanTo, $S(M)$ es la suma directa de un número finiTo de submódulos simples $[S(M) = \bigoplus_{i=1}^{k} S_i]$, es decir, $S(M)$ es finiTamenTe generado.

Para la prueba siguienTe, considere la sucesión exacTa, de R-módulos:

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\psi} A'' \longrightarrow 0$$

Proposición 2.20' Si A es finiTamenTe generado, También A''. Si A' y A'' son finiTamenTe generados, También A.

Proposición 2.20. Si A es finiTamenTe encajable, También lo es A'.

En parTicular, cada submódulo de un módulo finiTamenTe encajable es finiTamenTe encajable. También si A' y A'' son finiTamenTe encajables, resulTa A finiTamenTe encajable.

Prueba de 2.20'. Si A es generado por los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$; entonces A'' es generado por $\psi(a_1), \psi(a_2), \ldots, \psi(a_n)$. Para la otra parte supongamos que $A' = Ra_1' + Ra_2' + \ldots + Ra_s'$ y $A'' = Ra_1'' + \ldots + Ra_t''$

Ya que ψ es un epimorfismo; existen $a_1, a_2, \ldots, a_t \in A$, tal que $a_i'' = \psi(a_i)$ para $1 \leq i \leq t$.

Consideremos $a \in A$, entonces $\psi(a) = \sum_{i=1}^{t} r_i a_i'' = \sum_{i=1}^{t} r_i \psi(a_i)$ donde $r_i \in R$, así $a - \sum_{i=1}^{t} r_i a_i \in \operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\phi$

Así podemos escribir $a - \sum_{i=1}^{t} r_i a_i = \phi\left(\sum_{j=1}^{s} r_j' a_j'\right)$ donde $r_j' \in R$, esto muestra que $a = \sum_{i=1}^{t} r_i a_i + \sum_{j=1}^{s} r_j' \phi(a_j')$

por lo que concluimos que $A = Ra_1 + \ldots Ra_t + R\phi(a_1') + \ldots + R\phi(a_s')$ y A es finitamente generado.

Prueba de 2.20 Se sigue de 2.19, que si A es finitamente cogenerado, también lo es A'.

Por otra parte supongamos que A' y A'' son finitamente cogenerados, entonces $E(A') \cong E(S_1') \oplus \ldots \oplus E(S_k')$ y $E(A'') \cong E(S_1'') \oplus E(S_2'') \oplus \ldots \oplus E(S_l'')$

donde S_i' y S_j'' son módulos simples.

Así $E(E(A') \oplus E(A'')) = E(E(A')) \oplus E(E(A''))$

$$E(E(A') \oplus E(A'')) = E(A') \oplus E(A'')$$

$$E(E(A') \oplus E(A'')) \cong E(S_1') \oplus \ldots \oplus E(S_k') \oplus E(S_1'') \oplus \ldots \oplus E(S_l'')$$

Lo anterior muestra que $E(A') \oplus E(A'')$ es finitamente cogenerado. Ya que $E(A')$ es inyectivo, el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "inc."'] & A \arrow[dl, dashed, "\Phi'"] \\ & E(A') & \end{tikzcd}$$

Definimos el siguiente morfismo $\Theta: A \to E(A') \oplus E(A'')$ por $\Theta(a) = (\Phi'(a), \psi(a))$ donde $a \in A$ [Θ es R-homomorfismo]

Examinemos $\operatorname{Ker}\Theta$, suponga que $\Theta(a) = 0$ para alguna $a \in A$. Entonces $\psi(a) = 0$, y ya que $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\phi$ existe $a' \in A'$, tal que, $a = \phi(a')$. De donde $a' = inc(a') =$
$= \Phi'[\phi(a')] = \Phi'(a) = 0$

Por lo tanto $a = \phi(a') = \phi(0) = 0$, y $a = 0$; resultando Θ monomorfismo. Ya que $E(A') \oplus E(A'')$ es finitamente cogenerado, resulta que A es finitamente cogenerado.

El siguiente resultado establece una caracterización para módulos Artinianos.

Teorema 2.21 Sea M un R-módulo. Son equivalentes:

(a) M es Artiniano

(b) Cada módulo factor de M es finitamente cogenerado.

Prueba (a) $\Rightarrow$ (b) Suponga que M es Artiniano, y sea M' un módulo factor de M. Así M es Artiniano y por el corolario 2.17, $M' = E(S(M'))$

Por otra parte y a que $S(M') \subset M'$, $S(M')$ es Artiniano y por 2.3 $S(M')$ es finitamente generado.

Por una caracterización para módulos finitamente cogenerados, se sigue que M' es finitamente cogenerado.

(b) $\Rightarrow$ (a) Inversamente, supongamos que cada módulo factor de M es finitamente cogenerado, y considere la cadena descendente $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ de submódulos de M.

Sea $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, así A es un submódulo de M.

Si la cadena no termina, consideremos los cocientes $\{A_1/A, A_2/A, A_3/A, \dots\}$ de submódulos no cero; consideremos $A_{i_1}/A, A_{i_2}/A, \dots, A_{i_k}/A$ y su intersección $(A_{i_1}/A) \cap (A_{i_2}/A) \cap \dots \cap (A_{i_k}/A) =$
$= (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})/A = A_{i_0}/A$, donde $i_0 = \text{máx}\{i_1, \dots, i_k\}$

Así M/A tiene un sistema inverso $\{A_1/A, A_2/A, \dots,\}$ que no es acotado inferiormente por un submódulo no cero, ya que si existierá $P/A \subset A_i/A$ para toda i

se Tendría $P/A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_i/A)$, $P/A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_i/A$
$P/A \subset \bar{0}$, así $P/A = \bar{0}$, y $P = A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, resultando que la cadena Termina. Por lo Tanto M no sería finitamente cogenerado, resultando ser M Artiniano.

2.5 Un anillo Artiniano es Neteriano.

Para módulos, la condición de cadena ascendente y descendente son independientes. Pero este no es el caso cuando se Trabajan anillos.
Se probará que para un anillo la condición de cadena descendente implica la condición de cadena ascendente, es decir, un anillo Artiniano es Neteriano.
Denote por J el conjunto de Todos los elementos $r \in R$ Tal que $rS = 0$ para cada R-módulo simple S.
Afirmación. J es un ideal bilateral de R.
Sea $r' \in R$ y $r \in J$, por demostrar que $(r'r)S = 0$, pero es claro, ya que, $(r'r)S = r'(rS) = r'(0) = 0$
Sea $r' \in R$ y $r \in J$, por demostrar que $(rr')S = 0$, pero $(rr')S \subset rS = 0$, de donde $(rr')S = 0$
J es llamado el radical de Jacobson de R.

Además, J es la intersección de todos los ideales izquierdos máximos de R. Sea $r \in J$, para cada ideal izquierdo máximo M de R, se tiene que $r(R/M)=0$, de donde $r \in M$. Inversamente, sea r un elemento que esté en cada ideal izquierdo máximo de R, y considere un R-módulo simple arbitrario S.

Sea $0 \neq s \in S$. $S = Rs \cong R/(0:s)$. Así $0:s$ es un ideal izquierdo máximo de R, y por la elección de r, se tiene $r \in 0:s$, de donde $rs=0$ para $s \in S$ arbitrario. Lo cual muestra que $rS=0$. Por lo tanto $r \in J$.

De hecho J es la intersección de todos los ideales derechos máximos de R (Ver DGN Lessons Chapter 7, **Teorema** 3, referencia [3]).

Ya que J es un ideal bilateral de R, se puede formar la clase R/J. El cuál es un R-módulo izquierdo.

Observe que los ideales izquierdos de R/J son lo mismo que sus submódulos izquierdos, también para los idealez izquierdos simples y los submódulos simples.

Proposición 2.22 Sea R un anillo Artiniano. Entonces el radical de Jacobson J de R es la intersección de un número finito de ideales izquierdos máximos de R.

Prueba. Ya que R es Artiniano, se sigue que el R-módulo R/J es finitamente cogenerado.
Consideremos la colección de todas las intersecciones finitas de submódulos de R/J de la forma M/J, donde M es un ideal izquierdo máximo de R.
Este es un sistema inverso, ya que al tomar una intersección finita de elementos de la colección, la propia intersección es de la misma forma.
Este sistema inverso no puede ser acotado por un submódulo no cero, ya que si $R'/J \subset M_{i_1}/J \cap \ldots \cap M_{i_k}/J$ para intersecciones finitas, $R'/J \subset \bigcap_{i \in I} M_i / J$ y $R'/J = 0$.
Pero ya que R/J es finitamente cogenerado, la única posibilidad es que uno de los miembros de la colección sea cero, es decir, existen ideales izquierdos máximos $M_1, M_2, \ldots, M_n$, tal que, $(M_1/J) \cap (M_2/J) \cap \ldots \cap (M_n/J) = \bar{0}$; $(M_1 \cap \ldots \cap M_n)/J = \bar{0}$, de donde $J = M_1 \cap \ldots \cap M_n$, de allí el resultado.

Proposición 2.23 Sea R un anillo Artiniano y J el radical de Jacobson de R. Entonces R/J es un anillo semisimple.

Prueba. Por la proposición 2.22, existen ideales máximos $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de R, tal que, $J = M_1 \cap \ldots \cap M_n$
Consideremos el morfismo $\phi: R/J \to (R/M_1) \oplus \ldots \oplus (R/M_n)$ dado por $\phi(r+J) = (r+M_1, \ldots, r+M_n) = \bar{0}$, entonces $r \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i$, y $r \in J$, por lo tanto $r+J = \bar{0}$.
Así ϕ es monomorfismo.
Ahora $(R/M_1) \oplus (R/M_2) \oplus \ldots \oplus (R/M_n)$ es un R-módulo semisimple. Pero $R/J \cong \phi(R/J) \subset (R/M_1) \oplus \ldots \oplus (R/M_n)$ resultando $\phi(R/J)$ semisimple, pero vía el isomorfismo R/J es un R-módulo semisimple, y de allí R/J es un anillo semisimple.

Si n es un entero positivo, entonces J^n denota el conjunto de sumas finitas de elementos de R, de la forma $r_1 r_2 \ldots r_n$, donde cada $r_i \in J$
Claramente J^n es un ideal bilateral de R, sea $J^0 = R$.

Proposición 2.24. Sea R un anillo Artiniano y J el radical de Jacobson de R. Entonces existe un entero positivo K, tal que, $J^K = 0$

Prueba. Ya que R es Artiniano, la colección de todas las potencias positivas de J tiene un miembro mínimo, sea tal miembro $I = J^k$. Es claro el hecho de que I es un ideal bilateral de R y $I^2 = J^{2k} = J^k = I$.

Suponga que $I \neq 0$ y sea $I' = \{r \in R \mid Ir = 0\}$
Ahora I' es un ideal bilateral propio de R.
R/I' es un anillo Artiniano, y posee un ideal izquierdo simple. Supongamos que el elemento ρ de R/I' genera tal ideal. Entonces ρ genera a un R-módulo simple, $\langle \rho \rangle = S$, y se tiene que $J\rho = 0$, por la definición de J. Sea $x \in R$ representante de la clase ρ $[\rho = x + I']$. Entonces se tiene que $Ix \subseteq Jx \subseteq I'$, ya que, $0 = J\rho = J(x+I')$;
$Jx = -JI' \subseteq I'$

Del hecho $Ix \subseteq I'$ se tiene que $I^2 x = 0$, pero $I^2 = I$, de donde $Ix = 0$, de la definición de I' se tiene que $x \in I'$, y por lo tanto, $\rho = 0$.
Lo cuál es imposible, ya que ρ genera un R-módulo simple. Ante esta situación necesariamente $I = 0$, luego entonces $J^k = I = 0$.

Teorema 2.25. Sea R un anillo Artiniano y M un R-módulo. Son equivalentes:

(a) M es Neteriano.

(b) M es Artiniano.

Prueba. Sea J el radical de Jacobson de R. Por la proposición anterior existe un entero positivo k, tal que, $J^k = 0$. Consideremos la sucesión de submódulos de M:

$M = J^0 M \supseteq JM \supseteq J^2 M \supseteq \ldots \supseteq J^k M = 0$

El módulo factor $J^{i-1}M/J^iM$, para $1 \leq i \leq K$ es anulado por J, ya que $j(x + J^iM) = jx + J^iM$ con $x \in J^{i-1}M$, por tanto $jx \in J^iM$, así $jx + J^iM = \bar{0}$

Por lo tanto $J^{i-1}M/J^iM$ tiene una estructura de (R/J)-módulo $[(r+J)(x+J^iM) = r(x+J^iM)]$

Por la proposición 2.23, R/J es un anillo semi-simple, y por la proposición 2.7 se tiene que $J^{i-1}M/J^iM$ es un (R/J)-módulo semisimple.

Suponga que M es Neteriano (respectivamente, Artiniano). Entonces $J^{i-1}M/J^iM$ es Neteriano (respectivamente Artiniano) como R-módulo y también como R/J-módulo. Se sigue de 2.3 que $J^{i-1}M/J^iM$ es Artiniano (respectivamente, Neteriano), primero

como (R/J)-módulo, pero También como R-módulo.
Así $J^{k-1}M/J^kM$ Tiene series de composición
(ya que es ArTiniano y NeTeriano)

$$J^{k-1}M/J^kM \supset M_1/J^kM \supset M_2/J^kM \supset \dots J^kM/J^kM = \bar{0}$$

y por TanTo $J^{k-1}M/J^kM \big/ M_i/J^kM \cong J^{k-1}M/M_i$

es irreducible, y $M_i/J^kM \big/ M_{i+1}/J^kM \cong M_i/M_{i+1}$.

es También irreducible.
Porlo TanTo $J^{k-1}M \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset J^kM = 0$, es una serie de composición para $J^{k-1}M$, ya que, $J^{k-1}M/M_1$ es irreducible y M_i/M_{i+1} También.
De la misma manera para $J^{k-2}M = S_{(k-1)}r_{k-1} \supset \dots \supset$ $\supset S_{(k-1)}r_1 \supset J^{k-1}M$ los cocientes serían irreducibles y, $M = J^0M = S_{(1)}r_1 \supset \dots \supset S_{(1)1} \supset JM \supset \dots \supset J^{k-2}M =$ $= S_{(k-1)}r_{k-1} \supset \dots \supset J^{k-1}M = S_{(k)}r_k \supset \dots \supset J^kM = 0$ es una serie de composición para M y por lo TanTo M es ArTiniano.
Si se Toma $M = R$, se obTiene el siguienTe resulTado
Corolario. Cada anillo ArTiniano (izquierdo) es NeTeriano (izquierdo).

3. Módulos inyectivos y condiciones de cadena.

3.1 Caracterización de anillos Artinianos y Neterianos.

En la proposición 1.3, se probó que si $\{E_i\}_{i\in I}$ es una familia de R-módulos cuya suma directa es inyectivo, entonces cada E_i es inyectivo.

Pero no es cierto en general que si cada E_i es inyectivo $\Rightarrow \bigoplus_{i\in I} E_i$ sea inyectivo. Esto sólo en él caso en que I es de cardinalidad finita.

Probaremos que, una familia arbitraria de R-módulos es inyectivo $\Leftrightarrow$ R es Neteriano; esto provee una caracterización para los anillos Neterianos.

Recalquemos que un anillo Neteriano (resp "Artiniano") es pensado como un anillo Neteriano izquierdo (resp. "Artiniano izquierdo")

Teorema 3.1. Son equivalentes las siguientes condiciones.

(a) R es un anillo Neteriano.

(b) Cada suma directa de R-módulos inyectivos es inyectivo.

(c) Cada suma directa de una familia infinita numerable de cápsulas inyectivas de R-módulos simples es inyectivo.

(a)$\Rightarrow$(b) Suponga que R es un anillo Neteriano, y sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos inyectivos. Hagamos

$E = \bigoplus_{i \in I} E_i$. Consideremos el diagrama siguiente, donde B es un ideal izquierdo de R.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "inc."] \arrow[d, "f"'] & R \\ & E & \end{tikzcd}$$

Ya que R es Neteriano, B es finitamente generado. Así existe un subconjunto finito J de I, tal que, $f(B) \subseteq E' = \bigoplus_{i \in J} E_i$.

Del hecho de que E' es inyectivo, si consideramos el diagrama siguiente tenemos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "inc."] \arrow[d, "\bar{f}"'] & R \arrow[dl, dashed, "\Phi'"] \\ & E' & \end{tikzcd}$$

De lo que concluimos que existe $\Phi' : R \to E'$ que hace al diagrama conmutativo, es decir, $\Phi' \circ inc = f$

Extendamos el diagrama anterior:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "inc."] \arrow[d, "\bar{f}"'] & R \arrow[dl, dashed, "\Phi'"] \\ & E' \arrow[d, "\overline{inc}"'] & \\ & E & \end{tikzcd}$$

Pero $\overline{inc} \circ \overline{f} = f$. Si definimos $\phi = \overline{inc} \circ \phi'$, el diagrama original es conmutativo, ya que tenemos:
$\phi \circ inc = \overline{inc} \circ \phi' \circ inc = \overline{inc} \circ \overline{f} = f$, lo que implica que E es inyectivo, así (a) $\Rightarrow$ (b)

(b) $\Rightarrow$ (c) Es claro.

(c) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que se da (c) y aceptemos la existencia de una cadena ascendente estrictamente creciente $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ de ideales de R.
Sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces A es un ideal izquierdo de R, y para cada K, $A/A_K \neq 0$. Por la proposición 1.24 existe un módulo simple S_K y un homomorfismo no cero, $\alpha_K : A/A_K \longrightarrow E(S_K)$.
Sea $\phi_K : A \longrightarrow E_K$, donde $\phi_K = \alpha_K \circ \Pi$ $[\Pi : A \longrightarrow A_K]$.
Claramente $\phi_K \neq 0$.
Consideremos el mapeo $\phi : A \longrightarrow \bigoplus_{K=1}^{\infty} E(S_K) = N$ dado por $\phi(r) = \{\phi_K(r)\}_{K=1}^{\infty}$ $(r \in A)$
Para $r \in A$, existe K_0, tal que, $r \in A_K$ $\forall K \geq K_0$ por el comportamiento de la cadena.
Ahora por la definición de ϕ_K, se tendría que $\phi_K(r) = 0$ $\forall K \geq K_0$, por lo tanto el mapeo ϕ definido anteriormente está bien definido.

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "inc"] \arrow[d, "\phi"'] & R \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Ya que N es inyecTivo, por hipóTesis, se Tiene que ϕ puede exTenderse a un homomorfismo $\psi: R \longrightarrow N$. Pero R es generado por él 1 como R-módulo. Así existe un entero n, Tal que, $\psi(R) \subseteq \bigoplus_{k=1}^{n} E(S_k)$

Pero $\phi(A) = \psi(A) \subseteq \psi(R) \subseteq \bigoplus_{k=1}^{n} E(S_k)$

De donde $\phi(A) \subseteq \bigoplus_{k=1}^{n} E(S_k)$. Por lo Tanto ϕ_K es el mapeo cero para $K > n$, lo cuál es una contradicción, ya que $\phi_K \neq 0$

Por lo Tanto se Tendría que efectivamente R es un anillo Neteriano.

Proposición 3.2 Sea R un anillo NeTeriano y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de R-módulos. EnTonces $\bigoplus_{i \in I} E(A_i)$ es una cápsula inyectiva de $\bigoplus_{i \in I} A_i$, es decir, $E(\bigoplus_{i \in I} A_i) = \bigoplus_{i \in I} E(A_i)$

Prueba. Ya que R es un anillo Neteriano, y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de R_módulos se Tiene que $\bigoplus_{i\in I} E(A_i)$ es inyectivo, y el hecho de que sea una extensión esencial se hace como en 1.23.

Prueba. Supongamos lo contrario, entonces en particular $E(M)$ no es inescindible, así no existen submódulos $0 \neq B_1, C_1$ de M, Tal que, $B_1 \cap C_1 = 0$

Pero $E(B_1)$ no es inescindible, por lo Tanto, no existen submódulos $0 \neq B_2, C_2$ de B_1, Tal que, $B_2 \cap C_2 = 0$

Continuando en él mismo sentido, Tenemos que en él paso n, no existen submódulos B_n, C_n de B_{n-1}, Tal que, $B_n \cap C_n = 0$. Supongamos que Tenemos $C_1 + C_2 + \ldots C_{n-1} = C_1 + \ldots + C_n$ para algún $n > 1$.

Entonces $C_n \subseteq C_1 + C_2 + \ldots + C_{n-1}$

Consideremos $x \in C_n$, entonces existen $x_1 \in C_1, \ldots, x_{n-1} \in C_{n-1}$, Tal que, $x_1 + \ldots + x_{n-1} + x = 0$

Ahora $x_1 \in C_1 \cap (C_2 + \ldots + C_n) \subseteq C_1 \cap B_1 = 0$, por Tanto $x_1 = 0$.

Haciendo lo propio para $x_2 \in C_2 \cap (C_3 + \ldots + C_n) \subseteq$ $\subseteq C_2 \cap B_2 = \{0\}$, se Tiene $x_2 = 0$, siguiendo él razonamiento se Tendría que $x = 0$ ¡!, ya que $C_n \neq 0$

Por lo Tanto se Tiene la cadena estrictamente ascendente $C_1 \subset C_1+C_2 \subset C_1+C_2+C_3 \subset \ldots$ de submódulos de M. Esto contradice el hecho de que M es Neteriano.

Corolario. Sea R un anillo Neteriano y M un R-módulo distinto de cero. Entonces M tiene un submódulo K, tal que, $E(K)$ es inescindible.

Prueba. Sea $e \neq 0$, consideremos $\langle e \rangle \subset M$, ya que R es Neteriano $\langle e \rangle$ es Neteriano, por 3.3 $\langle e \rangle$ tiene un submódulo K, tal que, $E(K)$ es inescindible. Así $K \subset \langle e \rangle \subset M$, por lo que se sigue el Teorema.

Ahora introduciremos una noción que depende solamente de Teoría de cardinales.

Denotemos el cardinal de un conjunto X por $|X|$.

Sea M un R-módulo, y consideremos su soclo $S(M)$, entonces $S(M) = \bigoplus_{i \in I} S_i$ donde S_i son submódulos simples.

Por Teorema 2.13 Corolario, el número cardinal $|I|$ depende solamente del módulo M. Denotemos este número cardinal por $c(M)$. Notemos que $c(M)=0 \iff S(M)=0$. También, si M es un R-módulo inyectivo inescindible, el submódulo cero de M es irreducible y $c(M) = 0$ ó 1.

Teorema 3·4 Son equivalentes:

(a) R es un anillo Neteriano.

(b) Cada R-módulo inyectivo es una suma directa de R-módulos inyectivos inescindibles.

(c) Existe un número cardinal K, tal que, cada R-módulo inyectivo es de la forma $\bigoplus_{i \in I} M_i$, donde $c(M_i) \leq K \ \forall i \in I$

Prueba. (a) $\Rightarrow$ (b) Los lemas anteriores proveen la existencia de inyectivos inescindibles.

Sea E un R-módulo inyectivo, aplicando él lema de Zorn E tiene una familia $\{E_i\}_{i \in I}$ de submódulos inyectivos inescindibles que es máxima, con respecto a la propiedad de que su suma es directa.

Usando 3·1 se tiene que $\sum_{i \in I} E_i$ es inyectivo, y por tanto sumando directo de E. Así tenemos que $E = (\sum_{i \in I} E_i) \oplus E'$ donde E' es un submódulo de E, resultando que E' es inyectivo.

Si $E' \neq 0$, por él lema 3·3 corolario se sigue que E' tiene un submódulo K, tal que, $E(K)$ es inescindible; $E(K)$ puede ser elegido como un submódulo de E'.

En este caso si agregamos $E(K)$ a la familia $\{E_i\}_{i\in I}$ obtenemos una familia más grande de inyectivos inescindibles cuya suma es directa, ya que,
$E(K)\cap(\sum_{i\in I} E_i) \subset E' \cap (\sum_{i\in I} E_i)=\{0\}$
Esto da una contradicción. Por tanto $E'=\{0\}$ y
$E=\bigoplus_{i\in I} E_i$ que establece (b)

Es claro que (b) $\Rightarrow$ (c) con $K=1$
(c) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que se da (c), probaremos que R es Neteriano.
Sea $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia infinita numerable de R-módulos, si probamos que $\bigoplus_{n=1}^{\infty} E(S_n)$ es inyectivo se tendría que R es Neteriano (por 3.1)
Sea I un conjunto, tal que $|I|>K$.
Sea $S=\bigoplus_{n=1}^{\infty} S_n$, $T=\bigoplus_{i\in I} S$, y $F=E(T)$
T es semisimple y por la proposición 2.16,
$S_0(F)=S_0(E(T))=S_0(T)=S_0(\bigoplus_{i\in I} S)=S_0[\bigoplus_{i\in I}(\bigoplus_{n=1}^{\infty} S_n)]=$
$\bigoplus_{i\in I} S_0(\bigoplus_{n=1}^{\infty} S_n)=\bigoplus_{i\in I}(\bigoplus_{n=1}^{\infty} S_n)=T$, por lo tanto, $S_0(F)=T$.

Ahora ya que F es inyectivo, $F=\bigoplus_{j\in J} F_j$, y donde $c(F_j)\leq K$.
Para cada j, nosotros tenemos que $S(F_j)=\bigoplus_{k\in K_j} T_k$

donde los T_K son simples.

Notemos que $|K_j| \leq K$.

Ya que $S_o(F) = T$, se Tiene por un lado que

$S(F) = S(\bigoplus_{j\in J} F_j) = \bigoplus_{j\in J} S(F_j)$ y $T = \bigoplus_{i\in I}(\bigoplus_{n=1}^{\infty} S_n)$, por lo

Tanto $\bigoplus_{j\in J}(\bigoplus_{k\in K_j} T_k) = \bigoplus_{i\in I}(\bigoplus_{n=1}^{\infty} S_n)$

De esta manera; para cada entero positivo n, denote por $J(n)$ el conjunto de Todas las $j \in J$ para él que existe $k \in K_j$, Tal que, $T_K \cong S_n$.

Afirmación. Cada $J(n)$ es infinito.

Supongamos que $J(n)$ es finito para alguna n, con distintos elementos $j_1, j_2, \ldots, j_r$ $(r \geq 0)$

$|I| \leq |K_{j_1}| + |K_{j_2}| + \ldots + |K_{j_r}| \leq K + K + \ldots + K$ (r veces)

Así por la adición de números cardinales es finito ó K, pero con la condición de que sea estrictamente menor que $|I|$. Esto es una contradicción.

Por lo Tanto existe una sucesión de elementos distintos $l_1, l_2, l_3, \ldots$, Tal que, $l_n \in J(n)$ $\forall n$.

Para cada n, existe $k_n \in K_{l_n}$, Tal que, $T_{k_n} \cong S_n$

Pero $T_{k_n} \subseteq F_{l_n}$ y F_{l_n} es inyectivo [$F = \bigoplus_{j\in J} F_j$].

Por 1.19, T_{k_n} Tiene una cápsula inyectiva $E(T_{k_n})$ que es un submódulo de F_{l_n}. Así podemos establecer que $F_{\ell_n} = E(T_{k_n}) \oplus F_{\ell_n}'$ donde F_{ℓ_n}' es un submódulo de F_{ℓ_n}.

Así $F = \bigoplus_{j \in J} F_j = [\bigoplus_{n=1}^{\infty} F_{\ell_n}] \oplus D = [\bigoplus_{n=1}^{\infty}[E(T_{k_n}) \oplus F_{\ell_n}']] \oplus D =$

$= (\bigoplus_{n=1}^{\infty} E(T_{k_n})) \oplus D'$, por tanto $F = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} E(T_{k_n})) \oplus D'$

Así $\bigoplus_{n=1}^{\infty} E(T_{k_n})$ es sumando directo de F, y por lo tanto inyectivo.

Pero $E(T_{k_n}) \cong E(S_n)$, para cada n, por lo tanto $\bigoplus_{n=1}^{\infty} E(T_{k_n}) \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} E(S_n)$, vía el isomorfismo resulta que:

$\bigoplus_{n=1}^{\infty} E(S_n)$ es inyectivo, así tenemos que se cumple (a)

Observaciones. Como una ilustración del Teorema 3.4, notemos que un anillo R es Neteriano, si existe un número cardinal K tal que cada R-módulo inyectivo es la suma directa de una familia de submódulos cada uno de ellos, con una cardinalidad menor que K.

Esto se tiene ya que, para un R-módulo M, $c(M_i) \leq c(M) \leq |S(M)| \leq |M|$.

En particular, R es Neteriano si cada R-módulo inyectivo es la suma directa de una familia de submódulos cada uno de ellos con una cardinalidad menor que K.

Esto se tiene ya que, para un R-módulo M,

$$c(M_i) \leq c(M) \leq |S(M)| \leq |M|$$

En particular, R es Neteriano, si cada R-módulo inyectivo es la suma directa de una familia de submódulos finitamente generados; ahora si M es un R-módulo finitamente generado, se tiene que $M = Rm_1 + \dots + Rm_n$ y $|M| \leq |R \oplus R \oplus \dots \oplus R| = n|R|$, donde $n|R|$ es finito ó $|R|$ por Teoría de cardinales.

El Teorema 3.4 provee una caracterización alternativa para anillos neterianos, como la dada en 3.1. Se establecerá una similar caracterización para anillos Artinianos.

Teorema 3.5. Son equivalentes las siguientes condiciones.

(a) R es un anillo Artiniano.

(b) Cada R-módulo inyectivo es la suma directa de una familia de cápsulas inyectivas de módulos simples.

(a) $\Rightarrow$ (b) Si R es Artiniano $\Rightarrow$ R es Neteriano.

Y por él Teorema anterior cada R-módulo inyectivo es suma directa de una familia de módulos inyectivos inescindibles, pero por ser R Artiniano, cada E_i inyectivo inescindible es, tal que, $E_i = E(S_i)$ para algún R-módulo simple S_i, de donde se tiene (b).

(b)⇒(a) Por Teorema 2.21, se sabe que R es Artiniano, si cada imagen homomorfa de R es finitamente cogenerado. Consideremos un ideal A de R. Por hipótesis $E(R/A) = \bigoplus_{i \in I} E(S_i)$ donde los S_i son submódulos simples de $E(R/A)$. Ya que R/A es simplemente generado por $\bar{1}$ como R-módulo, existe un subconjunto finito J de I tal que

$$R/A \subseteq \bigoplus_{i \in J} E(S_i) \subseteq E(R/A).$$

Pero $\sum_{i \in J} E(S_i)$ es inyectivo, así que $E(R/A) = \bigoplus_{i \in J} E(S_i)$

y por lo tanto R/A es finitamente cogenerado. Esto muestra que R es Artiniano.

Se usará 3.5, para dar una descripción de cuando un anillo Neteriano conmutativo es Artiniano, una descripción que no involucra explícitamente módulos inyectivos.

Teorema 3·6. Sea R un anillo Neteriano conmutativo. Son equivalentes:

(a) R es Artiniano.

(b) Cada ideal primo de R es máximo.

Prueba (a) $\Rightarrow$ (b) Suponga que R es Artiniano y sea P un ideal primo P de R.

Por 3·5, $E(R/P) = \bigoplus_{i \in I} E(S_i)$ donde los S_i son módulos simples. Pero $E(R/P)$ es inescindible, por lo tanto, el conjunto de índices contiene un solo miembro, es decir, $E(R/P) = E(S)$ para algún submódulo simple de $E(R/P)$.

Pero $S \cong R/M$ para algún ideal máximo M de R. De donde, $E(S) \cong E(R/M)$, por lo tanto, se tiene que $E(R/P) \cong E(R/M)$, pero ya que M es máximo entonces M es primo, así $P = M$ (lema 1·31) y P resulta ser máximo.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que cada ideal primo de R es máximo. Por el Teorema 3·4, cada R-módulo E inyectivo es, tal que, $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$; donde los E_i son módulos inyectivos inescindibles.

Pero por 1·32 corolario $E_i \cong E(R/P_i)$. De donde, ya que P_i es máximo se tiene que E_i es

cápsula inyectiva de un módulo simple.
Así E es la suma directa de cápsulas inyectivas de módulos simples, resultando por 3.5 que R es Artiniano.

3.2 La descomposición normal.

El siguiente resultado es similar al Teorema 3.4.

Teorema 3.7. Sea M un R-módulo Neteriano. Entonces E(M) es la suma directa de un número finito de módulos inyectivos inescindibles.

Prueba Por el lema 3.3, existe E(K) inescindible para $K \subset M$, usando el lema de Zorn E(M) Tiene una familia $\{E_i\}_{i\in I}$ de submódulos inyectivos inescindibles que es máxima con respecto a la propiedad de que su suma sea directa.
Ya que E(M) es una cápsula inyectiva de M, los submódulos $E_i \cap M$ $(i \in I)$ son distintos de cero.
Afirmación $\sum_{i\in I} E_i \cap M$, es una suma directa.
Sea $x \in (E_j \cap M) \cap (\sum_{i\neq j} E_i \cap M)$, entonces $x \in E_j \cap M$ y $x \in \sum_{i\neq j} E_i \cap M \subset \sum_{i \neq j} E_i$. Por lo Tanto $x \in E_j \cap (\sum_{i\neq j} E_i)$!
Ya que $\bigoplus_{i\in I} E_i$ se Tiene por hipótesis.

Consideremos la cadena $E_{i_1} \cap M \subset E_{i_2} \cap M \subset \ldots$ de submódulos de M, ya que M es Neteriano existe m Tal que $E_{in} \cap M = E_{im} \cap M$ $\forall n \geq m$; por lo cuál se sigue que el conjunto I de índices es de cardinalidad finita.

Así, $\bigoplus_{i \in I} E_i$ es inyectivo, y por lo Tanto sumando directo de $E(M)$, por lo cual $E(M) = (\sum_{i \in I} E_i) \oplus E'$ donde E' es un submódulo de $E(M)$.

Si $E' \neq 0$, entonces $E' \cap M \neq 0$ será submódulo de M, y por lo Tanto También Neteriano.

Por el lema 3·3 $E' \cap M$, Tiene un submódulo K, Tal que $E(K)$ es inescindible, ya que $K \subset E' \cap M \subset E'$ se Tiene que $E(K) \subset E'$.

Si adjuntamos $E(K)$ a la familia $\{E_i\}_{i \in I}$, se Tiene que $(\sum_{i \in I} E_i) + E(K) \subset (\sum_{i \in I} E_i) + E'$ y $(\sum_{i \in I} E_i) \cap [E(K)] \subset (\sum_{i \in I} E_i) \cap E' = \{0\}$

Por lo Tanto $(\sum_{i \in I} E_i) + E(K)$ es directa, y se obtiene una familia más grande de submódulos inyectivos inescindibles de $E(M)$ cuya suma es directa, esto da una contradicción y se Tiene que $E(M) = \bigoplus_{i \in I} E_i$ (I de cardinalidad finita)

Ahora introduciremos una noción que será usada
para él resto del capítulo. Sea K un submó-
dulo de un R-módulo M y suponga que $E(M/K)$
es isomorfo a una suma directa de un número
finito de módulos inyectivos inescindibles, es decir,

$$E(M/K) \cong E_1 \oplus \ldots \oplus E_n.$$

Por 3.13 Corolario, $E_1, E_2, \ldots E_n$ son únicos salvo
isomorfismo.

Definición. Sean K y M como se mencionaron an-
teriormente. Decimos que $E_1, \ldots, E_n$ son un con-
junto completo de módulos inyectivos inescindi-
bles, o más simple, él "conjunto completo de
inyectivos inescindibles asociados" de K en M; y
nosotros decimos que "K posee inyectivos inescin-
dibles asociados en M".

Estrictamente, no asociamos con K módulos inyec-
tivos inescindibles de manera individual sino
clases de isomorfismo de módulos inyectivos.
Insertamos la palabra "completo" para enfa-
tizar que puede haber copias isomorfas entre
$E_1, E_2, \ldots, E_n$ [Esto es análogo con el hecho de
que el polinomio $(x-1)^2(x-2)$ tiene un conjunto

completo de raíces 1, 1, 2]

No asociamos módulos inyectivos inescindibles con cada submódulo K de M. La frase "K posee inyectivos inescindibles asociados en M" es sinónimo de que: "$E(M/K)$ es la suma directa de un número finito de módulos inyectivos inescindibles".

Ahora situaciones en que K posee inyectivos inescindibles asociados en M:

(i) M/K es Neteriano. Este es él hecho del Teorema 3.7. También, en particular cuando M es Neteriano.

(ii) M/K es finitamente cogenerado. Así, los inyectivos inescindibles asociados son todos cápsulas inyectivas de módulos simples.

(iii) M/K es Artiniano. Por 2.21 un módulo Artiniano es finitamente cogenerado. También en particular, cuando M es Artiniano.

(iv) K es un submódulo irreducible de M. Entonces K tiene un sólo inyectivo inescindible asociado en M, a saber $E(M/K)$.

(v) $K=M$. Es el conjunto vacío de inyectivos inescindibles que son asociados con M en M.

El siguiente resultado puede ser usado para reconocer cuando un módulo inyectivo inescindible es asociado con cierto submódulo. Se sigue inmediatamente del lema 2.14.

Lema 3.8 Sea K un submódulo de un R-módulo M. que posee inyectivos inescindibles asociados en M, y sea E un R-módulo inyectivo inescindible. Son equivalentes las siguientes condiciones:

(a) E es un módulo inyectivo inescindible asociado de K en M.

(b) E es isomorfo a un sumando directo de $E(M/K)$

Definición. Sean $K_1, \ldots, K_n$ submódulos de un R-módulo M. Entonces la intersección $K_1 \cap \ldots \cap K_n$ se dice que es "irredundante" si, para cada i $(1 \leq i \leq n)$,

$$K_i \not\supseteq K_1 \cap \ldots \cap K_{i-1} \cap K_{i+1} \cap \ldots \cap K_n.$$

En otras palabras, la intersección $K_1 \cap \ldots \cap K_n$ es irredundante si es alterada por la omisión de una de las K_i. Recalquemos que la intersección vacía puede ser pensada como M. Así la intersección vacía puede ser vista como irredundante.

Notemos que, dados $K_1, \ldots, K_n$ submódulos dados de M, podemos encontrar un subconjunto $\{K_{i_1}, \ldots, K_{i_r}\}$ de

$\{K_1, \ldots, K_n\}$ Tal que:

(a) $K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_r} = K_1 \cap \ldots \cap K_n$, y

(b) La intersección $K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_r}$ es irredundante.

Esto se puede lograr omitiendo apropiados K_i's, uno por uno.

Teorema 3.9 Sea $K = K_1 \cap \ldots \cap K_n$ una intersección irredundante de submódulos irreducibles de un R-módulo M. Entonces $E(M/K) \cong E(M/K_1) \oplus \ldots \oplus E(M/K_n)$ y K tiene él conjunto completo de inyectivos inescindibles $E(M/K_1), \ldots, E(M/K_n)$ en M.

Prueba. El morfismo $M \longrightarrow E(M/K_1) \oplus \ldots \oplus E(M/K_n)$ que manda a $m \in M$ al elemento $(m+K_1, \ldots, m+K_n)$; tiene Kernel K, e induce el monomorfismo:

$\phi: M/K \longrightarrow E(M/K_1) \oplus \ldots \oplus E(M/K_n)$

Para cada i, $(1 \leq i \leq n)$, denotemos por ϕ_i el morfismo inclusión $\phi_i: E(M/K_i) \longrightarrow E(M/K_1) \oplus \ldots \oplus E(M/K_n)$

Por la irredundancia de la intersección $K_1 \cap \ldots \cap K_n$, existe, para cada i, un elemento $x_i \notin K_i$ y $x_i \in K_1 \cap \ldots \cap K_{i-1} \cap K_{i+1} \cap \ldots \cap K_n$.

Entonces $\phi(x_i + K) = \phi_i(x_i + K_i)$ es un elemente no cero de $\phi(M/K) \cap \phi_i(M/K_i)$. Ya que $E(M/K_i)$ es inescindible, se sigue que, $\phi_i[E(M/K_i)]$ es inescindible.

Ya que $\phi(M/K) \cap \phi_i(M/K_i) \neq 0$ se sigue que;
$\phi_i[E(M/K_i)]$ es cápsula inyectiva de $\phi(M/K) \cap \phi_i(M/K_i)$
Entonces por la proposición 1.23, se tiene que,
$\bigoplus_{i=1}^{n} E(M/K_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} \phi_i[E(M/K_i)]$ es una cápsula

inyectiva de $\bigoplus_{i=1}^{n}[\phi(M/K) \cap \phi_i(M/K_i)]$.

Ya que $\bigoplus_{i=1}^{n}[\phi(M/K) \cap \phi_i(M/K_i)] \subset \phi(M/K) \subset \bigoplus_{i=1}^{n} E(M/K_i)$

se tiene que $\bigoplus_{i=1}^{n} E(M/K_i)$ es también cápsula inyectiva de $\phi(M/K)$, es decir, $\bigoplus_{i=1}^{n} E(M/K_i) = E(\phi(M/K))$.
Pero $M/K \cong \phi(M/K)$, así $E(M/K) \cong E(\phi(M/K))$. Por lo tanto, $E(M/K) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} E(M/K_i)$.

Corolario 1 Sea K un submódulo de un R-módulo y suponga que $K_1 \cap \ldots \cap K_n = K = K_1' \cap \ldots \cap K_p'$ son expresiones para K, como intersecciones irredundantes de submódulos irreducibles de M. Entonces $n = p$ y existe una correspondencia uno a uno entre los $E(M/K_i)$ y los $E(M/K_j')$, tal que, los módulos correspondientes son isomorfos.

El resultado $n = p$, caso particular del Teorema Ore-Kurosh.

Corolario 2. Sea K un submódulo de un R-módulo M, que puede ser expresado como una intersección de un número finito de submódulos irreducibles de M. Entonces K posee inyectivos inescindibles asociados en M (es decir, $E(M/K)$ es la suma directa de una familia finita de módulos inyectivos inescindibles.

Prueba Ya que podemos hacer un proceso selectivo omitiendo algunos de los K_i, podemos obtener una intersección irredundante de submódulos irreducibles.

El Teorema 3.9 corolario 2, describe una situación en que los inyectivos inescindibles asociados existen. De hecho, esta es la única situación en que existen, así tenemos el primer Teorema de descomposición.

Teorema 3.10 Sea K un submódulo de un R-módulo M Son equivalentes:

(a) $E(M/K)$ es la suma directa de un número finito de módulos inyectivos inescindibles.

(b) K es la intersección de un número finito de submódulos irreducibles de M.

Falta nada más probar que a) $\Rightarrow$ b)

Supongamos que $E(M/K) = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_n$, donde $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son R-módulos inyectivos inescindibles.

Para cada i, consideremos el morfismo:

$\phi_i : M \longrightarrow M/K \xrightarrow{inc.} E(M/K) \xrightarrow{proj} E_i$, donde $M \longrightarrow M/K$ es la proyección. Sea $K_i = \operatorname{Ker} \phi_i$.

Afirmación $K = K_1 \cap \ldots \cap K_n$.

Sea $x \in K$ y consideremos $\phi_i : M \longrightarrow M/K \xrightarrow{inc.} E(M/K) \xrightarrow{proj} E_i$

$$x \longrightarrow x+K=\bar{0} \longrightarrow \bar{0} \longrightarrow 0$$

Así $x \in \operatorname{Ker} \phi_i = K_i$, y esto para cada i.

Por lo tanto $K \subset K_1 \cap \ldots \cap K_n$

Ahora sea $x \in K_1 \cap \ldots \cap K_n$, $\phi_i(x) = 0$ para cada i.

$$\phi_i : M \longrightarrow M/K \xrightarrow{inc.} E(M/K) \xrightarrow{proj} E_i$$

$$x \longrightarrow x+K \longrightarrow x+K \longrightarrow 0$$

Así $x+K = \bar{0}$ (ya que todas sus componentes son cero), por lo tanto $x \in K$.

Por lo que tenemos $K_1 \cap \ldots \cap K_n \subset K$.

Por ser $E(M/K)$ una extensión esencial de M/K, $E_i \cap (M/K) \neq 0$, se sigue que $K_i \neq M$. De otra manera $K_i = M$ y $\phi_i(M) = E_i = 0$ [$E_i \cap (M/K) = 0$]!

Por lo tanto $K_i \neq M$. Además $M/K_i \cong \phi_i(M) \subseteq E_i$ y $E(M/K_i) \cong E(\phi_i(M)) = E_i$ ya que E_i es inescindible.

Se sigue que K_i es irreducible.

Observación. La intersección $K = K_1 \cap K_2 \ldots \cap K_n$ es de hecho irredundante.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d] \arrow[dr, "\psi"] & \\
E(M/K_i) \arrow[r, shift left] & \bigoplus_{i=2}^{n} E(M/K_i) \arrow[l, shift left, "p"]
\end{tikzcd}$$

Si $K = K_2 \cap \ldots \cap K_n$, entonces $\operatorname{Ker}\psi = \bigcap_{i=1}^{n} K_i = K$

$\therefore\ M/K \hookrightarrow \bigoplus_{i=2}^{n} E(M/K_i) = \bigoplus_{i=2}^{n} E_i$

$E(M/K) = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n \subset \bigoplus_{i=2}^{n} E_i$!.

Si no es él caso, se puede obtener una intersección irredundante con menos Términos, y por él Teorema 3·9 $E(M/K)$ es isomorfo a una suma directa de menos de n módulos inyectivos inescindibles.

Corolario Sea M un R-módulo que es Neteriano ó Artiniano y K un submódulo de M. Entonces K es la intersección de un número finito de submódulos irreducibles de M.

Por observaciones, precedentes a 3·8 $E(M/K)$ es la suma directa de un número finito de módulos inyectivos inescindibles, y por 3·10 K es la intersección de un número finito de submódulos irreducibles de M.

Definición. Sea K un submódulo de un R-módulo M y supongamos que K Tiene un conjunto completo de inyectivos inescindibles asociados $E_1, E_2, \ldots, E_n$ en donde $n \geq 1$. Supongamos además que $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son isomorfos entre sí. K se dice que es isotípico, o más explícitamente, si $E_1 \cong E_2 \cong \ldots \cong E_n \cong E$, K se dice que es E-isotípico.

Así decir que K es E-isotípico en M, donde E es un módulo inyectivo inescindible, es equivalente a:
$E(M|K) \cong E \oplus \ldots \oplus E$, donde hay un número finito de sumandos.
Alternativamente, esto es equivalente al hecho de que K puede ser expresado en la forma $K = K_1 \cap \ldots \cap K_r$, donde K_i es un submódulo irreducible y $E(M/K_1) \cong \ldots \cong E(M|K_r) \cong E$
Para el hecho anterior se necesita que la intersección sea irredundante.
Si K es un submódulo irreducible de un R-módulo M, entonces K se dice que es $E(M|K)$-isotípico.
Proposición 3.11. Sean $K_1, K_2, \ldots, K_n$ submódulos E-isotípicos de un R-módulo M. Entonces $K_1 \cap \ldots \cap K_n$ es un submódulo E-isotípico de M.
Prueba Sea $K = K_1 \cap \ldots \cap K_n$, se puede obtener una intersección irredundante omitiendo algunos de los K_i's.
Así $K = K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_r}$ es irredundante, y por el Teorema 3.9, $E(M|K) = E(M/K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_r}) \cong E(M|K_{i_1}) \oplus \ldots \oplus E(M|K_{i_r}) \cong$
$\cong E \oplus \ldots E \oplus \ldots E \oplus \ldots \oplus E$.
Definición. Sea K un submódulo de un R-módulo M.
Entonces una intersección $K = K_1 \cap \ldots \cap K_n$ se dice que es una "descomposición normal" de K en M si:

(a) La intersección es irredundante.
(b) Para cada i, K_i es E_i-isotípico para algún módulo inyectivo inescindible.
(c) Los E_i no son isomorfos.

Sea K un submódulo de un R-módulo M, y supongamos que $K = K_1 \cap \ldots \cap K_n$ es una intersección de submódulos irreducibles de M. Para cada i, K_i es $E(M/K_i)$-isotípico.

Agrupando aquellos K_i's cuyos inyectivos inescindibles asociados son isomorfos, y utilizando 3.11, obtenemos una expresión para K, como una intersección de un número finito de submódulos isotípicos cuyos inyectivos inescindibles asociados no son isomorfos.

De ésta se puede obtener una intersección irredundante, y por tanto tener una descomposición normal de K en M.

Para el argumento que da la proposición inversa, hay que tener cuidado con los módulos inyectivos inescindibles que intervienen en él proceso.

Así sea $K = K_1 \cap \ldots \cap K_n$ una descomposición normal de K en M, donde K_i es E_i-isotípico para $1 \leq i \leq n$. Entonces para $1 \leq i \leq n$, se tiene que $K_i = K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i p_i}$

donde $E(M/K_{ij}) \cong E_i$ para $1 \leq j \leq p_i$

Esto nos permite escribir a K como una intersección de submódulos irreducibles de M.

Examinemos la intersección más cuidadosamente.

Podemos obtener una intersección irredundante de submódulos irreducibles por la omisión de algunos K_{ij}.

Para $1 \leq i \leq n$, denotemos por K_i' la intersección de todos los K_{ij}'s, $1 \leq j \leq p_i$ que quedan.

Claramente $K_i \subseteq K_i'$ y $K = K_1' \cap \ldots \cap K_n'$.

Supongamos que todas las K_{ij}'s, para $1 \leq j \leq p_1$ pueden ser omitidas de tal manera que $K_1' = M$.

Entonces $K_1 \supseteq K_1 \cap \ldots \cap K_n = K_1' \cap \ldots \cap K_n' = K_2' \cap \ldots \cap K_n' \supseteq$ $\supseteq K_2 \cap \ldots \cap K_n$. Lo cuál no es posible ya que estamos suponiendo que tenemos una descomposición normal de K en M. Así no todas las K_{1j}'s pueden ser omitidas, ni todas las K_{2j}'s, ni todas las K_{3j}'s, y así sucesivamente.

¿Que podemos deducir de esto?

Así nuestra intersección de los K_i' no puede crecer para obtener a M, y no todas las K_{ij}'s puede ser omitidas.

Si ahora dirigimos nuestra atención hacia él conjunto completo de inyectivos inescindibles asociados de K en M.

Por 3·9, hay un número positivo de copias de E_1, un número positivo de copias de E_2, y así sucesivamente. En otras palabras $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son inyectivos inescindibles asociados de K en M que no son isomorfos entre sí, pero cada uno de ellos tiene un determinado número de copias.

En esta situación, se dice que $E_1, \ldots, E_n$ es un conjunto reducido de inyectivos inescindibles asociados de K en M.

Si usamos 3·10 y las observaciones anteriores se obtiene el segundo teorema de descomposición.

Teorema 3·12 Sea K un submódulo de un R-módulo M. Son equivalentes:

(a) $E(M/K)$ es la suma directa de un número finito de módulos inyectivos inescindibles.

(b) K tiene una descomposición normal en M.

Además, si $K = K_1 \cap \ldots \cap K_n$ es una descomposición normal de K en M, donde K_i es E_i-isotípico, entonces K tiene un conjunto reducido de inyectivos inescindibles asociados en M.

Corolario 1 Sea K un submódulo de un R-módulo M y supongamos que $K_1 \cap \ldots \cap K_n = K = K_1' \cap \ldots \cap K_p'$ son descomposiciones normales de K en M, donde K_i es E_i-isotípico y K_j' es E_j'-isotípico. Entonces $n=p$, y existe una correspondencia uno a uno entre los E_i y E_j', tal que, los módulos correspondientes son isomorfos.

Al ser descomposiciones normales, en particular son intersecciones irredundantes, y por el corolario 1 de 3·9, se tiene el resultado.

Como en el caso del Teorema 3·10, se puede obtener un corolario de 3·12.

Corolario 2 Sea M un R-módulo que es Neteriano ó Artiniano y K un submódulo de M.

Entonces K tiene una descomposición normal en M.

Si $K = K_1 \cap \ldots \cap K_n$ es una descomposición normal del submódulo K de M, donde K_i es E_i-isotípico, decimos que K_i es la E_i-isotípica componente en esta descomposición normal. No hay unicidad respecto a las diferentes componentes de la descomposición normal, no es cierto en general, que estas componentes sean únicas.

Se probará un resultado parcial en esta dirección.

Consideremos un submódulo K de M, con un conjunto reducido de inyectivos inescindibles asociados $E_1, \dots E_n$. Consideremos un subconjunto no vacio Ω de $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ Decimos que Ω es un conjunto aislado de inyectivos inescindibles asociados de K en M, si $\mathrm{Hom}_R(F, E) = 0$ cuando $E \in \Omega$ y $F \in \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, $F \notin \Omega$

Un inyectivo inescindible asociado aislado de K en M, Tal que, $\{E\}$ es un conjunto aislado se dice que es un inyectivo inescindible asociado aislado de K en M.

El conjunto reducido Total de inyectivos inescindibles asociados aislados de K en M es aislado, pero no es interesante.

Teorema 3.13 Sea K un submódulo de un R-módulo y Supongamos que K Tiene una descomposición normal en M. Sean $K_1 \cap \dots \cap K_n = K_1' \cap \dots \cap K_n'$ dos descomposiciones normales, donde K_i y K_i' son E_i-isotípicos para $1 \leq i \leq n$. Supongamos que $E_{i_1}, \dots, E_{i_r}$ donde $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$, forman un conjunto aislado de inyectivos inescindibles asociados de K en M. Entonces $K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_r} = K_{i_1}' \cap \dots \cap K_{i_r}'$

En particular, si E es inyectivo inescindible asociado aislado de K en M, entonces la E-isotípica componente de K en M es independiente de la descomposición normal particular.

Observación. Ya que no es claro que haya conjuntos de inyectivos inescindibles asociados, la unicidad mencionada anteriormente es débil.
En particular, no es claro que K posea inyectivos inescindibles asociados aislados en M.
Se Tendrá, por ejemplo, que cuando M es Neteriano ó un módulo Artiniano sobre un anillo Neteriano conmutativo, entonces cada submódulo propio de M posee inyectivos inescindibles asociados aislados en M.
Prueba. Consideremos la descomposición normal $K = K_1 \cap \ldots \cap K_n$ de K en M, donde K_i es E_i-isoTípico para $1 \leq i \leq n$.
Supongamos que $\{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$ forman un conjunto aislado de inyectivos inescindibles asociados de K en M.
Definamos el submódulo L de M, $L \supseteq K$ por

$$L/K = \bigcap_{i=1}^{r} \cap \{ \operatorname{Ker} \phi_i : \phi_i \in \operatorname{Hom}_R(M/K, E_i) \}$$

Se mostrará que $L/K = (K_1 \cap \ldots \cap K_r)/K$.
Esto a su vez dará como consecuencia que $K_1 \cap \ldots \cap K_r$ es independiente de la descomposición nor-

mal particular. Sea i, $1 \leq i \leq r$. Ya que K_i es E_i-isotípico existe un isomorfismo $\alpha_i : E(M/K_i) \longrightarrow E_i \oplus \dots \oplus E_i$, donde hay un número finito de términos en la suma directa digamos r_i.

Sea $1 \leq j \leq r_i$. Denotemos por Π_{ij} la j-ésima proyección de la suma directa anterior, y consideremos el mapeo compuesto:

$\alpha_{ij} : M/K \xrightarrow{n_i} M/K_i \xrightarrow{inc.} E(M/K_i) \xrightarrow{\alpha_i} E_i \oplus \dots \oplus E_i \xrightarrow{\Pi_{ij}} E_i$,

donde n_i es el mapeo inducido por la identidad de M. Así $\alpha_{ij} \in Hom_R(M/K, E_i)$

Afirmación $\bigcap_{j=1}^{r_i} Ker\, \alpha_{ij} = K_i/K$.

Sea $x \in \bigcap_{j=1}^{r_i} Ker\, \alpha_{ij}$, $x = m + K$, pero del hecho de que x pertenece a la intersección se tendría que $n_i(x) = m + K_i = 0$, por lo tanto $m \in K_i$, es decir, $x = m + K \in K_i/K$. La otra contención es clara.

Así $\bigcap_{i=1}^{r} \bigcap_{j=1}^{r_i} Ker\, \alpha_{ij} = \bigcap_{i=1}^{r} K_i/K = (K_1 \cap \dots \cap K_r)/K$, por lo tanto, $L/K \subseteq K_1 \cap \dots \cap K_r/K$.

Falta probar que $(K_1 \cap \dots \cap K_r)/K \subseteq L/K$.

Sea $n : M/K \longrightarrow M/(K_1 \cap \dots \cap K_r)$, el mapeo inducido por la identidad de M, y consideremos $\phi \in Hom_R(M/K, E_i)$ para alguna i, $1 \leq i \leq r$.

Se probará que existe un R- homomorfismo $\beta: M/(K_1\cap\ldots\cap K_r) \longrightarrow E_i$ Tal que $\phi=\beta\eta$.
De esta manera $\mathrm{Ker}\,\phi \supseteq \mathrm{Ker}\,\eta = (K_1\cap\ldots\cap K_r)/K$, y $L/K \supseteq \mathrm{Ker}\,\eta = (K_1\cap\ldots\cap K_r)/K$.
Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (K_1\cap\ldots\cap K_r)/K \xrightarrow{inc} M/K \xrightarrow{\eta} M/(K_1\cap\ldots\cap K_r) \longrightarrow 0$$

Esto da origen a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R[M/(K_1\cap\ldots\cap K_r), E_i] \xrightarrow{\xi} \mathrm{Hom}_R(M/K, E_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R[(K_1\cap\ldots\cap K_r)/K, E_i]$$

Para Tener nuestro resultado, basta probar que ξ es isomorfismo, o alternativamente que $\mathrm{Hom}_R((K_1\cap\ldots\cap K_r)/K, E_i)=0$ (para $1\leq i\leq r$)
Sea i, $1\leq i\leq r$. Consideremos el mapeo

$$\psi: (K_1\cap\ldots\cap K_r)/K \longrightarrow E(M/K_{r+1})\oplus\ldots\oplus E(M/K_n)$$

dado por $\psi(x+K)=(x+K_{r+1},\ldots,x+K_n)$, donde $x\in K_1\cap\ldots\cap K_r$, que es claramente monomorfismo.
Ya que E_i es inyectivo, se Tiene un epimorfismo

$$\mathrm{Hom}_R[E(M/K_{r+1})\oplus\ldots\oplus E(M/K_n), E_i] \longrightarrow \mathrm{Hom}_R[(K_1\cap\ldots\cap K_r)/K, E_i]$$

Pero $E(M/K_j)\cong E_j\oplus\ldots\oplus E_j$, para $r+1\leq j\leq n$; donde digamos hay r_j sumandos.
Pero se Tiene un epimorfismo de

$$\bigoplus_{j=r+1}^{n}\bigoplus_{k=1}^{r_j}[\mathrm{Hom}_R(E_j,E_i)] \longrightarrow \mathrm{Hom}_R[(K_1\cap\ldots\cap K_r)/K, E_i]$$

Lo anterior por:

$$\bigoplus_{j=r+1}^{n} \bigoplus_{k=1}^{r_j} Hom_R(E_j, E_i) \cong \bigoplus_{j=r+1}^{n} \left[Hom_R\left(\bigoplus_{k=1}^{r_j} E_j, E_i\right)\right] \cong$$

$$\cong \bigoplus_{j=r+1}^{n} \left[Hom_R(E(M/K_j), E_i)\right] \cong Hom_R\left[\bigoplus_{j=r+1}^{n} E(M/K_j), E_i\right]$$

$$\longrightarrow Hom_R[(K_1 \cap \ldots \cap K_r)/K, E_i]$$

Pero $\{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$ es un conjunto aislado de inyectivos inescindibles asociados aislados, así que $Hom_R(E_j, E_i) = 0$ para $r+1 \leq j \leq n$.

Por lo tanto se sigue que $Hom_R[(K_1 \cap \ldots \cap K_r)/K, E_i] = 0$ para $1 \leq i \leq r$ como se requería.

3.3 La descomposición de Lasker - Noether.

Se examinará la descomposición normal en una situación restringida. Consideremos un módulo Neteriano sobre un anillo conmutativo. Por el Teorema 3.12 corolario 2, cada submódulo de M tiene una descomposición normal. Se describirá la descomposición en términos que no involucren módulos inyectivos. La descomposición normal se reduce a la descomposición de Lasker-Noether (Ver [3]), en esta situación restrictiva.

En esta sección, R denotará un anillo conmutativo. Sea K un submódulo de un R-módulo M que tiene inyectivos inescindibles asociados en M; sea $E_1, \ldots,$ E_n un conjunto reducido de inyectivos inescindibles de K en M.

Supongamos además que existen ideales primos $P_1, \ldots, P_n$ tal que $E_i \cong E(R/P_i)$ para $1 \leq i \leq n$. $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son determinados por M y K salvo isomorfismo. Por él lema 2·31 corolario, y a que no ocurre isomorfismo entre las E_i; $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son todos diferentes y son determinados por M y K solamente.

Definición. Sea la situación descrita anteriormente. Llamamos a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ los "ideales primos asociados de K en M," así decimos que "K tiene ideales primos asociados en M".

La frase en M, puede ser omitida si no causa ambigüedad. Así por ejemplo, si nos referimos al conjunto de ideales primos asociados de un ideal (sí existen), el anillo es considerado como un módulo sobre sí mismo.

Ejemplos: 1. El R-módulo M tiene un conjunto vacío de ideales primos asociados en M (note que $E(M/M) = E(\bar{0})$), y es él único submódulo con esta.

propiedad.

2. Un ideal primo P de R Tiene exactamente un ideal primo asociado, P mismo.

3. Suponga que M/K es finitamente cogenerado, por ejemplo M puede ser Artiniano. Sabemos que K Tiene inyectivos inescindibles asociados en M que son cápsulas inyectivas de módulos simples. Se sigue que K Tiene ideales primos asociados en M que son ideales máximos. El inverso también es cierto, si K Tiene ideales primos asociados en M que son Todos máximos entonces M/K es finitamente cogenerado.

Además una situación en que los ideales primos existen la establece él Teorema 3.15.

Lema 3.14 Sea M un R-módulo Neteriano. Entonces un sumando directo de $E(M)$ es N-inyectivo.

Prueba. Consideremos un sumando directo $E' \neq 0$ de $E(M)$. Entonces E' es inyectivo. También $E' \cap M \neq 0$, y ya que, M es Neteriano También $E' \cap M$. Por lo Tanto, se Tiene el resultado.

Teorema 4.15 Sea M un R-módulo Neteriano y K un submódulo de M. Entonces K Tiene ideales primos asociados en M y además son ideales N-primos.

Prueba Sabemos que K Tiene inyectivos inescindibles asociados en M que son sumandos directos de $E(M/K)$.

Ahora por hipótesis M es Neteriano, así M/K es Neteriano, y se sigue del lema 3.14 que los inyectivos inescindibles son N-inyectivos.

El resultado se concluye de 1.32.

Teorema 3.16

Sea K un submódulo de un R-módulo M que Tiene ideales primos asociados en M y sea P un ideal primo de R. Son equivalentes:

(a) P es un ideal primo asociado de K en M.

(b) Existe un elemento $m \in M$ Tal que $P = K:m$

Prueba. Supongamos que P es un ideal primo de K en M. Se Tiene que $E(M/K) = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$, así $E(R/P)$ es isomorfo a un sumando directo de $E(M/K)$, $[\,E(R/P) \cong E_i$ para alguna $i\,]$.

De $R/P \xhookrightarrow{i} E(R/P) \xrightarrow{\varphi} E_i$, se Tiene que $R/P \cong (\varphi \circ i)(R/P) \subset E_i$, por lo cual $E(M/K)$ Tiene un submódulo $E' \overset{\psi}{\cong} R/P$, además $(M/K) \cap E' \neq 0$

Sea $0 \neq x \in (M/K) \cap E'$, así $x = m + K$, donde $m \in M$. Entonces se Tiene de $K:m = \{r \in R \mid r\,m \in K\}$ y $0:x = \{r \in R \mid rx = 0\}$ que son iguales, ya que si $r \in K:m$ $[\,rm \in K\,]$ y $r(m+K) = rm + K = \bar{0}$ se concluye que $r \in 0:x$, la oTra contención es clara.

Por lo cual $K:m = 0:x$.

Afirmación $0:x = P$

Sea $r \in 0:x$ entonces $rx = 0$, pero por el resulTado de que si $e_1 \in E_1$ y $e_2 \in E_2$ son elementos que se

Corresponden bajo un isomorfismo $\Rightarrow 0:e_1 = 0:e_2$,
si lo aplicamos a nuestro caso si y es Tal que
$\psi(x) = y$ enTonces $ry = r(x'+P) = 0$, por lo cual,
$rx' \in P$ así $r \in P$ ó $x' \in P$, pero $x' \in P \Rightarrow x'+P = \bar{0}$!
por lo TanTo $r \in P$.
Ahora sea $r \in P$, enTonces $ry = r[x'+P] = rx'+P = \bar{0}$
Por lo cual $r\psi(x) = \bar{0}$, $\psi(rx) = \bar{0}$, pero como ψ es
isomorfismo $rx = 0$ resulTando $P \subset 0:x$. Así se Tiene el resulTado.

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponga que existe un elemenTo $m \in M$, Tal que,
$P = K:m$, y denoTe por $\bar{m}$ la imagen de m bajo el
mapeo $M \longrightarrow M/K$.

Afirmación. $P = 0:\bar{m}$

Sea $r \in P$, enTonces $rm \in K$ y $r\bar{m} = r(m+K) = rm+K = \bar{0}$
por lo cual $r \in 0:\bar{m}$.

Ahora sea $r \in 0:\bar{m} \Rightarrow r\bar{m} = \bar{0}$, $r(m+K) = \bar{0}$
$rm+K = \bar{0} \Rightarrow rm \in K$, por lo cual $r \in P$.

Consideremos el mapeo $\psi: R \longrightarrow R\bar{m}$, que es un
epimorfismo, así $R\bar{m} \cong R/(0:\bar{m})$ por lo cual
$R\bar{m} \cong R/P$.

Se sigue de 1.22 que $E(R\bar{m})$ es sumando directo
de $E(M)$, por lo cual, $E(R/P)$ es isomorfo a un

sumando directo de $E(M/K)$, y ya que $E(R/P)$ es inescindible por el lema 3·8, P es un ideal primo asociado de K en M. Por lo tanto (b) $\Rightarrow$ (a)

Definición. Sea K un submódulo de un R-módulo M. K se dice que es un "submódulo primario de M" si: (a) K es propio, y (b) cuando $rm \in K$ $(r \in R, m \in M)$, entonces $m \in K$ ó existe un entero positivo n, tal que, $r^n M \subseteq K$.

Sea K un submódulo primario de un R-módulo M, y denote por P el conjunto de todos los elementos $r \in R$, tal que, $r^n M \subseteq K$ para algún entero positivo n. Así (b) se puede rescribir como sigue: (b)' cuando $rm \in K$ $(r \in R, m \in M)$, entonces $r \in P$ ó $m \in K$.

Lema 3·17 P es un ideal primo de R.

Prueba Claramente P es un ideal propio.

Sean $\alpha, \beta \in R$, tal que, $\alpha\beta \in P$ y suponga que $\beta \notin P$. Así existe un entero positivo n, tal que, $(\alpha\beta)^n M \subseteq K$. Sin embargo $\beta^n M \nsubseteq K$.

Por lo cual existe un $m \in M$, tal que, $\beta^n m \notin K$. Pero $\alpha^n \beta^n m \in K$, así $\alpha^n \in P$ ó $\beta^n m \in K$ por lo cual $\alpha^n \in P$, de lo que se sigue que $(\alpha^n)^r M \subseteq K$, rescribiendo se tiene que $(\alpha)^{nr} M \subseteq K$, lo cual muestra que $d \in P$; por lo cual P es primo.

Definición. Sea K un submódulo primario de un R-módulo M y sea P el ideal primo definido anteriormente. Describimos lo anterior diciendo que K es P-primario.

Si K es un submódulo P-primario de M, entonces $K : M \subset P$, ya que $K : M = \{r \in R \mid rM \subseteq K\}$ con $n = 1$, se tiene que $K : M \subset P$.

En particular, si Q es un ideal P-primario de R, entonces $Q : R = \{r \in R \mid rR \subseteq Q\} \subseteq P$, pero $Q \subset Q : R \subseteq P$, por lo tanto $Q \subseteq P$.

Lema 3.18. Sea K un submódulo P-primario del R-módulo M, y suponga que el anillo R es Neteriano. Entonces $P^n M \subseteq K$ para algún entero positivo n.

Prueba. Ya que R es Neteriano, P es finitamente generado, así $P = Rr_1 + \dots + Rr_s$ con $r_i \in P$ para $i = 1, \dots, s$. Entonces existen enteros positivos $n_1, \dots, n_s$, tal que, $r_i^{n_i} M \subseteq K$ para cada i.

Sea $n = n_1 + \dots + n_s$.

Ahora si $x_1, x_2, \dots, x_n$ son elementos arbitrarios de P, $(x_1 x_2 \dots x_n) M \subseteq K$. Por lo tanto se sigue que $P^n M \subseteq K$.

Se considerará la conección entre las nociones de submódulo isotípico y primario, antes una simplificación en la terminología. Sea P un ideal primo de R. Entonces el módulo inyectivo $E(R/P)$ es un módulo inyectivo inescindible.

Definición. Un submódulo $E(R/P)$-isotípico de un R-módulo M se dice que es P-isotípico.

Así un submódulo K de un R-módulo es P-isotípico ssi tiene exactamente un ideal primo asociado, él mismo P, esto por que $E(M/K) \cong E(R/P) \oplus \ldots \oplus E(R/P)$, y todas las copias son isomorfas a $E(R/P)$.

Note que si un submódulo es P-isotípico y P'-isotípico, donde P' es también un ideal primo de R, así $E(M/K) \cong E(R/P) \oplus \ldots \oplus E(R/P)$ y $E(M/K) \cong E(R/P') \oplus \ldots \oplus E(R/P')$.

Por lo tanto $E(R/P) \cong E(R/P')$, y ya que, la colección de anuladores tiene un elemento máximo P para $E(R/P)$ y P' para $E(R/P')$, se tiene por el corolario 1.30 que $P = P'$.

También, un submódulo P-isotípico de M es un submódulo propio de M.

Teorema 3·19. Sea M un R-módulo Neteriano, y K un submódulo de M y P un ideal primo de R. Entonces son equivalentes:

(a) K es un submódulo P- primario de M.

(b) K es un submódulo P- isotípico de M.

Prueba. Suponga que K es un submódulo P- primario de M. Entonces K es un submódulo propio de M. Ya que M es Neteriano, K Tiene ideales primos asociados en M. Ahora sea P' uno de Tales ideales primos asociados, que existe ya que K es un submódulo propio de M. Por el Teorema 3·16, existe un elemento $m \in M$, Tal que, $P' = K:m$. Ahora $m \notin K$, ya que $P' \neq R$ y en este caso existe $r \in R$, Tal que, $r \notin P'$ [es decir $rm \notin K$] y por lo Tanto $m \notin K$, ya que, si estuvierá $m \in K$ $rm \in K$! Por una observación $K:M \subseteq P$ y $K:m \subseteq K:M \subseteq P$, por lo Tanto, $P' \subseteq P$. Pero ahora si $r \in P$, entonces existe un entero positivo n, Tal que, $r^n M \subseteq K$. Pero por definición $r^n \in K:m = P'$, resultando $r \in P'$, ya que P' es primo, de allí $P \subseteq P'$. Así $P' = P$, esto prueba que P es el único ideal primo asociado de K

en M y K es P- isotípico.

Ahora supongamos que K es un submódulo P-isotípico de M. Entonces K es un submódulo propio de M.

Además $E(M/K) \overset{\varphi}{\cong} E(R/P) \oplus \ldots \oplus E(R/P)$, de donde

$$E(M/K) \cong E[(R/P) \oplus \ldots \oplus (R/P)]$$

Donde hay un número finito de sumandos, digamos ℓ ($\ell > 0$). Así tenemos que:

$$(R/P) \oplus \ldots \oplus (R/P) \xhookrightarrow{i} E[(R/P) \oplus \ldots \oplus (R/P)] \xrightarrow{\varphi^{-1}} E(M/K)$$

Es monomorfismo, pero:

$$(R/P) \oplus \ldots \oplus (R/P) \cong \varphi^{-1} \circ i[(R/P) \oplus \ldots \oplus (R/P)] \subset E(M/K)$$

Así sea $L = \varphi^{-1} \circ i[(R/P) \oplus \ldots \oplus (R/P)]$

Por lo tanto $E(M/K)$ tiene un submódulo L, tal que, $E(L) \cong E[(R/P) \oplus \ldots \oplus (R/P)]$ ($L \cong (R/P) \oplus \ldots \oplus (R/P)$) $\cong E(M/K)$.

Suponga que $rm \in K$ ($r \in R$, $m \in K$) y que $m \notin K$.

Denote por $\bar{m}$ la imagen de m bajo el mapeo natural $M \longrightarrow M/K$.

Ya que $E(L) = E(M/K)$ existe $s \in R$, tal que, $0 \neq s\bar{m} \in L$.

Consideremos la imagen de $s\bar{m}$ en $(R/P) \oplus \ldots \oplus (R/P)$ bajo el isomorfismo $[s\bar{m} \longrightarrow (r_1+P, \ldots, r_\ell+P) = Y]$ $0:Y = P = 0:s\bar{m}$. Entonces $r \in 0:\bar{m} \subseteq 0:s\bar{m} = P$

por lo Tanto $r \in P$.

Denotemos por Q el conjunto de Todos los elemen-
Tos $r \in R$, Tal que, $r^n M \subseteq K$ para algún entero
positivo n. Si podemos probar que $Q = P$, enton-
ces K es un submódulo P-primario de M.

Supongamos que $r \in Q$, entonces $r^n M \subseteq K$ para
algún entero positivo n. Pero $K \neq M$, entonces
existe $m \in M$ y $m \notin K$, pero $r^n m \in K \Rightarrow r^n \in P$ ó
$m \in K$, concluyendo que $r^n \in P$ y como P es primo
$r \in P$ $[Q \subset P]$.

Supongamos ahora que $r \in P$, y para cada entero
positivo n, sea $A_n = 0 :_{M/K} r^n = \{ e \in M/K \mid r^n e = 0 \}$
Claramente A_n es un submódulo de M/K y Tenemos
$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$

Ya que M/K es Neteriano, existe un entero po-
sitivo n_0, Tal que, $A_n = A_{n_0}$ cuando $n \geq n_0$.
Supongamos ahora que $A_{n_0} \neq M/K$. $r^{n_0}(M/K)$ es
un submódulo no cero de M/K; Tal que,
$[r^{n_0}(M/K)] \cap L \neq 0$ [ya que $E(L) = E(M/K)$]
Consideremos un elemento no cero de $[r^{n_0}(M/K)] \cap L$.
Dicho elemento se puede expresar como $r^{n_0} \eta$
para algún $\eta \in M/K$. De la definición $\eta \notin A_{n_0}$

pero $\eta \in A_{n_0+1}$, ya que, $r^{n_0+1}\eta = r[r^{n_0}\eta] = r\ell$

[y ya que $L \cong (R/P) \oplus \ldots \oplus (R/P)$] se Tiene,

$r\ell = 0$ ya que cada elemenTo de L es anu-

lado por cada elemenTo de P y $r \in P$ por hipó-

Tesis, del hecho de que $\eta \in A_{n_0+1} = A_{n_0}$, se

Tendría que $\eta \in A_{n_0}$!

Por lo TanTo, $A_{n_0} = M/K$ y por esTo se Tiene

que $r^{n_0}M \subseteq K$ lo cual muesTra que $r \in Q$.

Así $P \subset Q$. Por lo TanTo $Q = P$

Corolario Sea R un anillo NeTeriano, I un ideal

de R y P un ideal primo de R. Son equivalenTes:

(a) I es un ideal P- primario de R.

(b) I es un ideal P- isoTípico de R.

Sea M un R- módulo NeTeriano y K un submódulo

de M. Por Teorema 3.15, K Tiene ideales primos

asociados en M, sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ Tales.

EnTonces K Tiene una descomposición normal

$K = K_1 \cap \ldots \cap K_n$ en M, donde K_i es P- isoTípico

para $1 \leq i \leq n$.

Por el Teorema 3.19, P_i isoTípico es equivalenTe

a decir que es P_i - primario.

Así una descomposición normal de K en M es una expresión de la forma $K = K_1 \cap \ldots \cap K_n$ donde:

i) La intersección es irredundante.

ii) Para algún i, K_i es P_i- primario para algún ideal primo P_i, y

iii) Los P_i son distintos.

Lo anterior se conoce como la descomposición de Lasker - Noether de K en M. El conjunto de ideales primos es único, ellos son los ideales asociados de K en M.

Así la descomposición normal se reduce a la descomposición de Lasker - Noether cuando el anillo es conmutativo y M es Neteriano.

Se examinará la proposición 3·13 cuando se tiene la descomposición de Lasker - Noether.

Antes dos proposiciones:

Proposición 4·20 Sea Q un ideal y P un ideal primo de R. Son equivalentes:

(a) Q es irreducible y P- isotípico.

(b) Q es de la forma $0:e$, donde $0 \neq e \in E(R/P)$

Prueba. Suponga que Q es irreducible y P- isotípico. Entonces $E(R/Q)$ es inescindible y

$E(R/Q) \cong E(R/P)$

Considere el elemenTo $1+Q$ de R/Q, se Tiene

que $0:(1+Q)=Q$. Si e es el elemenTo en $E(R/P)$

correspondienTe a $1+Q$, enTonces $0:e=Q$.

Ya que $Q \neq R$, se Tiene que $e \neq 0$.

Ya que si $e=0$ enTonces $1+Q=Q$, por

lo TanTo $1 \in Q$ y $Q=R$! Así (a) $\Rightarrow$ (b)

(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que $Q=0:e$, donde e es

un elemenTo no cero de $E(R/P)$

Consideremos el mapeo $R \longrightarrow E(R/P)$ $[r \overset{\varphi}{\rightsquigarrow} re]$

$R/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi \subset E(R/P)$, pero

$R/(0:e) \hookrightarrow \operatorname{Im}\varphi \hookrightarrow E(R/P)$

Así se Tiene que: hay un monomorfismo de

$R/(0:e) \hookrightarrow E(R/P)$, de donde $R/(0:e) \cong L$, con

$L \subset E(R/P)$.

Así $E(R/(0:e)) \cong E(L) = E(R/P)$ [ya que $E(R/P)$

es inescindible]. Por lo TanTo, $E(R/P) \cong E(R/(0:e))$,

por lo cual $0:e$ es irreducible y P-isoTípico.

Proposición 3.21. Sea R un anillo NeTeriano y

P_1, P_2 ideales primos de R. Son equivalenTes:

(a) $P_2 \subseteq P_1$;

(b) $\mathrm{Hom}_R[E(R/P_1), E(R/P_2)] \neq 0$

Prueba Supongamos que $P_2 \subseteq P_1$. El morfismo identidad de R, induce un R-homomorfismo $R/P_2 \longrightarrow R/P_1$.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R/P_2 \arrow[r] \arrow[d] & E(R/P_2) \arrow[ddl, dashed] \\
 & R/P_1 \arrow[d] & \\
 & E(R/P_1) &
\end{tikzcd}$$

Con los homomorfismos canónicos, el cuál puede ser completado por un homomorfismo ϕ de $E(R/P_2)$ hacia $E(R/P_1)$ [por ser $E(R/P_1)$ inyectivo]
Además, ϕ no es el morfismo cero. Asi (a)$\Rightarrow$(b)
(b)$\Rightarrow$(a) Suponga que se cumple (b) y sea $\phi: E(R/P_2) \longrightarrow E(R/P_1)$ un R-homomorfismo no cero. Sea $e \in E(R/P_2)$, Tal que, $\phi(e) \neq 0$.

Por el lema 1·31, se Tiene $0:e \subseteq 0:\phi(e) \subseteq P_1$. Por medio de la proposición 3·20, $0:e$ es un ideal P_2-isoTípico de R, y por él Teorema 3·19 (Corolario), se Tiene que $0:e$ es un ideal P_2-primario. Sea $r \in P_2$ y consideremos $P_2 = \{r \in R \mid$ existe n Tal que $r^n R \subseteq 0:e\}$
Se Tiene que $r^n \subseteq 0:e_1 \subseteq P_1$. Pero P_1 es primo, así $r \in P_1$, esTo muestra que $P_2 \subseteq P_1$ y (b) $\Rightarrow$ (a)
Sea R un anillo NeTeriano y K un submódulo de un R-módulo que Tiene ideales primos asociados en M. DenoTemos el conjunTo de ideales primos asociados de K en M por $P_1, \ldots, P_n$; así K Tiene un conjunTo reducido de inyecTivos inescindibles asociados $E(R/P_1), \ldots, E(R/P_n)$.
Supongamos que $\{E(R/P_1), \ldots, E(R/P_r)\}$ es un conjunTo aislado y consideremos un ideal primo asociado $\neq$ de $P_1, P_2, \ldots P_r$. Si $P \subset P_i$ para alguna i, $1 \leq i \leq r$, por 3·21, se Tendría que $Hom_R[E(R/P), E(R/P_i)] \neq 0$, lo cual no es posible ya que $\{E(R/P_1), \ldots, E(R/P_r)\}$ es un conjunTo aislado. InversamenTe, si él conjunTo $\{P_1, \ldots, P_r\}$ Tiene la propiedad de que ninguno de $P_{r+1}, \ldots, P_n$ esTá conTenido enTre

$P_1, P_2, \dots, P_r$; se Tendría que $\mathrm{Hom}_R[E(R/P_i), E(R/P_j)] = 0$ para $i=1,\dots,r$ y $j=r+1,\dots n$ [por 3.21 También]
Así se Tendría que $\{E(R/P_1), \dots, E(R/P_r)\}$ es un conjunTo aislado.
Cuando existe $\{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ con la propiedad anTerior se dice que Tenemos un conjunTo aislado de ideales primos asociados de K en M.
Así un conjunTo aislado de ideales primos asociados se corresponde con un conjunTo aislado de inyecTivos inescindibles asociados.
Un ideal primo asociado P, Tal que, $\{P\}$ es un conjunTo aislado se dice que es un ideal primo asociado aislado de K en M.
Así le corresponde un inyecTivo inescindible asociado aislado. Un Ideal primo asociado aislado de K en M, es jusTamenTe un miembro mínimo del conjunTo de ideales primos asociados.
Del Teorema 4.13 se deduce el siguienTe Teorema de unicidad:
Teorema. Sea R un anillo NeTeriano, y K un submódulo de un R-módulo M que Tiene ideales primos asociados en M y sean $K_1 \cap \dots \cap K_n = K =$

$K_1' \cap \ldots \cap K_n'$ dos descomposiciones normales de K en M, donde K_i y K_i' son P_i-isotípicos para $1 \leq i \leq n$. Suponga que $P_{i_1}, \ldots, P_{i_r}$, donde $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$, forman un conjunto aislado de ideales primos asociados aislados de K en M. Entonces $K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_r} = K_{i_1}' \cap \ldots \cap K_{i_r}'$
En particular, si P es un ideal primo asociado aislado de K en M, entonces la P-isotípica componente de K en M es independiente de la descomposición normal particular.
Cuando M es Neteriano, se puede remplazar el hecho de ser P_i-isotípico por P_i-primario, en el Teorema y por la conclusión se tiene la unicidad para la descomposición de Lasker-Noether.
Proposición 3·23 Sea R un anillo Neteriano y P un ideal primo de R. Sea $E = E(R/P)$ y $A_n = 0:_E P^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ Entonces $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$
Además, cuando P es un ideal maximal de R, entonces $0 : A_n = P^n$ y $\mathrm{Ann}_R E = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$
Prueba. Sea $0 \neq e \in E$. Por 3·20, si $Q = 0 : e$, Q es irreducible y P-isotípico; y por el Teorema 3·19 (Corolario), $0 : e$ es un ideal P-primario.

Por el lema 3.18, existe un entero positivo n, tal que, $p^n R \subseteq 0{:}e$, de donde $p^n \subseteq 0{:}e$ $[p^n e = 0]$ por lo tanto $e \in A_n$, así $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, la otra contención es clara $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset E$, por lo tanto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Ahora supongamos que P es un ideal máximo de R y consideremos un entero positivo particular n. Ya que $p^n \cdot A_n = 0$, se tiene que $p^n \subset 0{:}A_n$ Por el Teorema 3.10 (corolario), $P = Q_1 \cap \ldots \cap Q_K$, donde $Q_1, \ldots, Q_K$ son ideales irreducibles de R. Sea $1 \leq i \leq K$, entonces $E(R/Q_i)$ es inescindible, y por el Teorema 3.10 (corolario) [se puede usar ya que R es un anillo Neteriano conmutativo], se tiene que $E(R/Q_i) \cong E(R/P_i)$ para algún ideal primo P_i. Así Q_i es P_i-isotípico y por tanto P_i-primario. Pero $p^n \subseteq Q_i \subseteq P_i$ [por ser Q_i, P_i-primario], así $P \subseteq P_i$.

Pero ya que P es máximo $P = P_i$.

Así tenemos que Q_i es irreducible y P-isotípico y por 3.20, $Q_i = 0{:}e_i$ donde $0 \neq e_i \in E$ Pero $p^n \subseteq Q_i = 0{:}e_i$, por lo cuál $p^n e_i = 0$, así $e_i \in A_n$, como esto es cierto para cada i, Se Tiene que:

$0 : A_n \subseteq (0:e_1) \cap \ldots \cap (0:e_K) = Q_1 \cap \ldots \cap Q_K = P^n$

[Ya que si $x \in 0 : A_n \Rightarrow x A_n = 0$ y como $P^n e_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, K$ se Tiene el resultado]

Finalmente, si P es un ideal maximal de R, se Tiene que $\mathrm{Ann}_R E = \bigcap_{n=1}^{\infty} (0 : A_n)$.

Sea $r \in \mathrm{Ann}_R E \iff rE = 0, \iff r(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$

Pero $r A_i \subset r(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$, por lo Tanto $r \in (0 : A_i)$ para Toda i, es decir, $r \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (0 : A_n)$

Por oTro lado si $r \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (0 : A_n)$, enTonces $r A_n = 0$ $\forall n$, sea $e \in E$, así $e \in A_n$ para alguna n, y esTo para cada e.

Así $re = 0$, por lo TanTo $r \in \mathrm{Ann}_R E$.

Pero se Tiene que $0 : A_n = P^n$.

Por lo cual, $\mathrm{Ann}_R E = \bigcap_{n=1}^{\infty} (0 : A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n$

Corolario 1 Sea R un dominio NeTeriano y M un ideal máximo de R. EnTonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = 0$

Prueba. Por el Teorema anTerior, se Tiene que $\mathrm{Ann}_R E = \mathrm{Ann}_R E(R/M) = \bigcap_{n=1}^{\infty} M^n$, pero $\mathrm{Ann}_R E(R/M) = 0$ por 1.26, así $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = 0$

Definición: Un anillo Neteriano conmutativo casi-
local se dice que es un "anillo local".
Así un anillo Neteriano conmutativo se dice
que es local si tiene un único ideal máximo.
Corolario 2. Sea R un anillo local con ideal
máximo $M \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = 0$
Prueba Ya que R es local existe solamente
un máximo el mismo M, pero por 1.26 coro-
lario 2, $\mathrm{Ann}_R\, E(R/M) = 0$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = 0$

Lema 3.24. Sea M un ideal máximo de R y
$E = E(R/M) \Rightarrow R/M = 0:_E M$
Prueba. Claramente $R/M \subseteq 0:_E M$.
Sea $x \in R/M$, $x = r+M$ y $M(r+M) = Mr + M =$
$= M' + M = \bar{0}$ $[M' \subseteq M]$
Si $e \in 0:_E M$ y $\bar{r} \in R/M$, entonces se tiene:
$\bar{r}e = (r+M)e = re$ y la suma usual nos
proporcionan la estructura, falta verificar que
efectivamente $re \in 0:_E M$, pero $M(re) = r(Me) =$
$= r(0) = 0$. Por tanto R/M es subespacio de $0:_E M$
Así R/M es sumando directo de $0:_E M$, es decir,
$0:_E M = (R/M) \oplus F$, donde F es un (R/M)-módulo.

Pero F es También un R-módulo [si $r \in R$ y $f \in F$
se tiene $rf = (r+M)f$].
Por ser la suma directa $(R/M) \cap F = 0$, pero
por ser E inescindible, el submódulo cero de
E es irreducible y $F = 0$. Por tanto, $0:_E M = R/M$.

Teorema 4.25. Sea R un dominio conmutativo.
Son equivalentes:
(a) R es un dominio de Dedekind.
(b) Cada R-módulo divisible es inyectivo.

Prueba. Por la proposición 1.10 cada módulo
divisible es inyectivo.
(b) $\Rightarrow$ (a) Se tiene que cada módulo inyectivo
es divisible por 1.6.
Así si $\{E_i\}_{i \in I}$ es una familia de R-módulos
inyectivos, cada E_i es divisible y como suma
directa de divisibles es divisible, $\bigoplus_{i \in I} E_i$ es
divisible, pero por hipótesis cada divisible
es inyectivo resulta $\bigoplus_{i \in I} E_i$ inyectivo, por tanto
de 3.1 resulta que R es un anillo Neteriano
[se usará el resultado].
Por el lema 1.9, basta probar que cada
ideal integral no cero de R es invertible.

Si R es campo, se Tiene. Por lo Tanto supondremos que R no es campo.

Primero consideremos un ideal maximal M de R, y denote por K el campo de fracciones de R. Como R-módulo, K es divisible, con R y M como submódulos, y ya que los cocientes de divisibles son divisibles, se Tiene que K/M es divisible y por hipótesis inyectivo.

Así R/M Tiene una cápsula inyectiva E que es submódulo de K/M.

Sea $A_n = 0 :_E M^n$.

Considere MA_2, donde $A_2 = 0 :_E M^2 = \{e \in E \mid M^2 e = 0\}$

Pero $M[MA_2] = M^2 A_2 = 0$, por lo Tanto $MA_2 \subseteq A_1$, por 3.24 $R/M = 0 :_E M = A_1$. Pero R/M es simple, por lo Tanto $MA_2 = 0$ ó $MA_2 = A_1$.

Consideremos $MA_2 = 0$. Entonces $A_2 \subseteq 0 :_E M = A_1$, por lo Tanto, $A_2 = A_1$. Por 3.23 $[0 : A_n = P^n]$, se Tiene $M = 0 : A_1$, y $M^2 = 0 : A_2$.

Pero $M^2 = 0 : A_2 = 0 : A_1 = M$.

Para $M^3 = M \cdot M^2 = M \cdot M = M$, y así sucesivamente.

Pero por la proposición 3.23, corolario $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = \bigcap_{n=1}^{\infty} M = 0$, de lo cuál $M = 0$

Así en el primer caso si $MA_2=0$ es que $M=0$, y nos proporciona información no Tan relevanTe.

Así supongamos $M\neq 0$, y que $MA_2=A_1$.

También $K/M \supseteq E \supseteq A_2 \supseteq A_1 = R/M$, por él Teorema de correspondencia existe un R- submódulo T de K Tal que $T\supseteq R$ y $A_2 = T/M$

Pero ya que $MA_2=A_1$, se Tiene $M(T/M)=R/M$, por lo cuál, $(MT)/M = R/M$ (NoTe que $MT\supseteq MR=M$)

Así $MT=R$, y hemos enconTrado un inverso para M, ya que T es un ideal fraccional de R.

Ahora se va a esTablecer que cada ideal inTegral no cero Tiene inverso.

Consideremos la colección de Todos los ideales inTegrales de R que no Tienen inverso.

EsTa colección es no vacía, ya que el ideal cero es miembro de dicha colección.

Ya que R es un anillo NeTeriano, la colección posee un miembro máximo, digamos I.

Pero I esTá conTenido en algún ideal máximo M, $I\subset M$, el cuál Tiene inverso digamos M^{-1}.

Además $I = IM^{-1}M \subseteq IM^{-1} \subseteq MM^{-1} = R$

IM^{-1} es un ideal entero que contiene a I
Así si $I \subset IM^{-1}$, IM^{-1} debe tener inverso.
Es decir, $IM^{-1}(IM^{-1})^{-1} = R$, lo cuál es equiva-
lente a $I[M^{-1}(IM^{-1})^{-1}] = R$, por lo tanto I tiene
inverso $M^{-1}(IM^{-1})^{-1}$?. Por lo tanto $I = IM^{-1}$,
así $IM = I$
Pero $I = IM = IMM = IM^2 = \dots$ [pero $IM^n \subset M^n \ \forall n$],
por lo tanto $I \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = 0$. Así cada ideal in-
tegral no cero de R tiene inverso.

3.4 Algunos resultados adicionales.

Ahora no se requiere que el anillo R sea conmu-
tativo.

Definición. Se dice que R es un H-anillo (izquierdo), si cuando S_1 y S_2 son R-módulos (izquierdos), tal que, $\mathrm{Hom}_R[E(S_1), E(S_2)] \neq 0 \Rightarrow S_1 \cong S_2$. Se puede omitir la palabra izquierdo y decir simplemente H-anillo.

Sean ahora S_1 y S_2 R-módulos simples, tal que, $\mathrm{Hom}_R[E(S_1), E(S_2)] \neq 0$.

Si R es conmutativo y Neteriano, y ya que cada ideal máximo es primo, por 3.21 se tiene $M_1 \subseteq M_2$,

de donde $M_1 = M_2$ y $S_1 \cong R/M_1 = R/M_2 \cong S_2$.
Por lo Tanto $S_1 \cong S_2$. Así cada anillo Neteriano conmutativo es un H-anillo.

Sea A un R-módulo finitamente cogenerado.
Entonces $E(A) \cong E(S_1) \oplus \ldots \oplus E(S_K)$, es decir, $E(A/0A) \cong E(S_1) \oplus \ldots \oplus E(S_K)$, así por 3.12 el submódulo cero 0A de A Tiene una descomposición normal en A; los inyectivos inescindibles asociados son cápsulas inyectivas de módulos simples.

Si R es un H-anillo, cada uno de estos inyectivos inescindibles asociados es aislado, ya que si $Hom_R[E(S_i), E(S_j)] \neq 0$ para $j \neq i$ por ser H-anillo $S_i \cong S_j$, por lo cuál $E(S_i) \cong E(S_j)$.
Lo cuál no es posible ya que él 0A de A Tiene una descomposición normal ($E(S_i) \not\cong E(S_j)$)
Se sigue del Teorema 3.13, que si R es un H-anillo, entonces 0A Tiene solamente una descomposición normal en A.

Teorema 3.26 Sea R, un H-anillo, sea A un R-módulo finitamente cogenerado y sea $E(S_1), \ldots, E(S_n)$ un conjunto reducido de inyectivos inescindibles asociados de OA en A, donde los S_i son módulos simples.

Sea $OA = K_1 \cap \ldots \cap K_n$ la única descomposición normal de OA en A, donde K_i es $E(S_i)$-isotípico para $1 \leq i \leq n$. Entonces existen submódulos únicos $A_1, \ldots, A_n$ de A tal que:

(i) $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, y

(ii) OA_i es un submódulo $E(S_i)$-isotípico de A_i.

Además para $1 \leq i \leq n$, $A_i = \bigcap_{j \neq i} K_j$ y $K_i = \sum_{j \neq i} A_j$

Prueba. Sea $A' = (A/K_1) \oplus \ldots \oplus (A/K_n)$.

Consideremos el morfismo $\alpha : A \longrightarrow A'$, dado por $\alpha(a) = (a + K_1, \ldots, a + K_n)$ donde $a \in A$.

Se examinará el $\operatorname{Ker} \alpha$.

Sea $a \in A$, tal que, $\alpha(a) = \bar{0}$.

Por tanto $(a + K_1, \ldots, a + K_n) = \bar{0}$, de donde $a \in K_i \ \forall i$. Así $a \in K_1 \cap \ldots \cap K_n = OA$, por lo cuál $\operatorname{Ker}\alpha \subset \{0\}$ y $\{0\} \subset \operatorname{Ker}\alpha$, por lo tanto, $\operatorname{Ker}\alpha = \{0\}$ y resulta que α es monomorfismo.

Se va a establecer que α es un isomorfismo.

Sea $B = A'/\alpha(A)$, por demostrar que $B=0$
Si $B \neq 0$, por la proposición 1.24 existe un R-módulo simple S y un homomorfismo no cero de $B \longrightarrow E(S)$
Se va a probar que para cada R-módulo simple S, el único homomorfismo $B \longrightarrow E(S)$ es él mapeo cero.
Sea S un R-módulo simple y $f: B \longrightarrow E(S)$ un R-homomorfismo. Sea $\eta: A' \longrightarrow B$ el morfismo natural. Para probar que $f=0$, es suficiente probar que $f\eta=0$ [ya que en este caso $f\eta = 0 = 0\eta$ y como η es sobre resulta $f=0$].
Denotemos por $\phi_i : A/K_i \longrightarrow A'$ $(1 \leq i \leq n)$, los morfismos inclusión. Un elemento arbitrario de A' puede escribirse como $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(a_i + K_i)$, donde $a_i \in A$, por la forma de los elementos de A' se va a probar que $\sum_{i=1}^{n} f\eta\phi_i(a_i+K_i) = 0$
El morfismo $f\eta\phi_i : A/K_i \longrightarrow E(S)$ puede extenderse a un homomorfismo $\theta_i : E(A/K_i) \longrightarrow E(S)$, ya que $E(S)$ es inyectivo. Por lo tanto tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A/K_i \arrow[r] \arrow[d, "f\eta\psi_i"'] & E(A/K_i) \arrow[dl, dashed] \\
& E(S) &
\end{tikzcd}$$

Pero K_i es $E(S_i)$-isotípico, así $E(M/K_i)$ es isomorfo a una suma directa de un número finito de copias; sea $\psi_i : E(S_i)\oplus\ldots\oplus E(S_i) \longrightarrow E(A/K_i)$ tal isomorfismo.

Se tiene un R-homomorfismo

$\theta_i\psi_i : E(S_i)\oplus\ldots\oplus E(S_i) \longrightarrow E(S)$.

Pero R es un H-anillo, si $S_i \neq S$, el único homomorfismo de $E(S_i)$ a $E(S)$ es el mapeo cero.

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^{n} E(S_i) \arrow[r, dashed, "f!"] & E(S) \\
{[E(S_i)]_\alpha} \arrow[u, "i_\alpha"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Así existe f única, tal que $0 = f \circ i_\alpha[(E(S_i))_\alpha]$, es decir, $f|(E(S_i))_\alpha = 0$, pero $\theta_i\psi_i|(E(S_i))_\alpha = 0$

Y como f es única, $\theta_i\psi_i = f = 0$

Así si $S_i \not\cong S$, $\theta_i\psi_i = 0$, de donde $\theta_i = 0$ ya que

ψ_i es isomorfismo, así $f\eta\phi_i = 0$.
De donde, si S no es isomorfo a algún S_i entonces
$$\sum_{i=1}^{n} f\eta\phi_i(a_i+K_i) = 0$$

En el otro caso si S es isomorfo a alguno digamos S_1, S no puede ser isomorfo a $S_2, \ldots, S_n$ [ya que por Transitividad $S_1 \cong S_i$ para $i \neq 1$ y $E(S_1) \cong E(S_i)$!, ya que se Tiene una descomposición normal].
Así $\sum_{i=1}^{n} f\eta\phi_i(a_i+K_i) = f\eta\phi_1(a_1+K_1) + f\eta\phi_2(a_2+K_2) + \ldots + f\eta\phi_n(a_n+K_n)$
$= f\eta\phi_1(a_1+K_1) + 0 + \ldots + 0$ [ya que $f\eta\phi_i = 0$ para $i = 2, \ldots n$; por ser $S \not\cong S_i$].
Luego, $\sum_{i=1}^{n} f\eta\phi_i(a_i+K_i) = f\eta\phi_1(a_1+K_1) + \ldots + f\eta\phi_n(a_1+K_n) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} f\eta\phi_i(a_1+K_i) = f\eta\left(\sum_{i=1}^{n}\phi_i(a_1+K_i)\right) = f\eta[\alpha(a_1)].$$

Pero $\eta[\alpha(a_1)] = \alpha(a_1) + \alpha(A) = \bar{0}$, de donde $f\eta[\alpha(a_1)] = 0$, por lo Tanto, $\sum_{i=1}^{n} f\eta\phi_i(a_i+K_i) = 0$

Así $f\eta = 0$ y $f = 0$. Por Todo lo anterior $B = 0$ y $\alpha(A) = A'$, resultando α un isomorfismo.
Sea $A_i = \alpha^{-1}[\phi_i(A/K_i)]$ para $1 \leq i \leq n$.
Se sabe que $A' = (A/K_1) \oplus \ldots \oplus (A/K_n)$
Pero $\alpha(A) = A' = (A/K_1) \oplus \ldots \oplus (A/K_n)$

$$\alpha(A)=\bigoplus_{i=1}^{n}\phi_i(A/K_i)$$

$$\alpha^{-1}[\alpha(A)]=\alpha^{-1}[\bigoplus_{i=1}^{n}\phi_i(A/K_i)] \text{ y } A=\bigoplus_{i=1}^{n}\alpha^{-1}\phi_i(A/K_i)=$$
$$=\bigoplus_{i=1}^{n}A_i.$$

Por lo Tanto, $A=A_1\oplus\ldots\oplus A_n$.

De $A'=(A/K_1)\oplus\ldots\oplus(A/K_n)$, se Tiene que $A_i\cong A/K_i$ y por Tanto $E(A_i/0A_i)\cong E(A/K_i)\cong E(S_i)\oplus\ldots\oplus E(S_i)$

Así $0A_i$ es $E(S_i)$-isoTípico.

EsTableceremos la unicidad de las A_i's.

Supongamos que $A=A_1\oplus A_2\oplus\ldots\oplus A_n$, y consideremos las proyecciones $\pi_i: A\longrightarrow A_i$.

Claramente $\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{Ker}\pi_i=0A$.

Ya que los A_i son no cero la inTersección es irredundanTe. Además $A/\operatorname{Ker}\pi_i\cong A_i$, por lo cuál, $E(A/\operatorname{Ker}\pi_i)\cong E(A_i)\cong E(S_i)\oplus\ldots\oplus E(S_i)$ y $\operatorname{Ker}\pi_i$ es $E(S_i)$-isoTípico. Así $\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{Ker}\pi_i=0A$ es una descomposición normal de $0A$ en A.

Por la unicidad se Tiene que $\operatorname{Ker}\pi_i=K_i$ para $1\leq i\leq n$.

Afirmación $A_i=\bigcap_{j\neq i}K_j=\bigcap_{j\neq i}\operatorname{Ker}\pi_j$

Sea $a_i\in A_i$, $a_i=(0,\ldots,0,a_i,0,\ldots 0)$

$\pi_j(a_i)=0$ $\forall j\neq i$. Por lo Tanto $a_i\in\bigcap_{j\neq i}\operatorname{Ker}\pi_j$.

Sea $x \in \bigcap_{j\neq i} \operatorname{Ker} \Pi_j$, entonces $\Pi_j(x) = 0 \ \forall j \neq i$.
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$; por lo tanto x toma la forma siguiente $x = (0, 0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots 0)$, es decir, $x = x_i \in A_i$

La anterior expresión da la unicidad para A, donde $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$.

Afirmación $K_i = \sum_{j\neq i} A_j$

Sea $x \in \sum_{j\neq i} A_j$, $x = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$
$\Pi_i(x) = 0$, por lo tanto, $x \in \operatorname{Ker} \Pi_i = K_i$
Si $x \in \operatorname{Ker} \Pi_i = K_i$ $[\Pi_i : A \longrightarrow A_i]$, $\Pi_i(x) = 0$
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \sum_{j\neq i} A_j$, por lo que $K_i = \sum_{j\neq i} A_j$.

En el caso de un Anillo Neteriano conmutativo, podemos dar una descripción explícita de los submódulos A_i, descritos en 3.26.

Antes un lema.

Lema 3.27 Sea R un anillo conmutativo, M_1, M_2 dos ideales máximos distintos de R, y sean k, l enteros positivos. Entonces $M_1^k + M_2^l = R$.

Prueba Si $M_1^k + M_2^l \neq R$, existe un ideal máximo M, tal que, $M_1^k + M_2^l \subseteq M$.

Pero $M_1 \subset M_1^k + M_2^l \subseteq M$ y $M_2 \subset M_1^k + M_2^l \subseteq M$.
Así $M_1 \subseteq M$, $M_2 \subseteq M$, y por ser máximos M_1 y M_2 se tiene $M_1 = M = M_2$ ⁈. Así se tiene el resultado.

Regresemos a la situación del Teorema 3.26, exceptuando que ahora R será un Anillo Neteriano conmutativo. Ya que A es finitamente cogenerado, $0A$ tiene ideales primos asociados en A, que son ideales máximos.

Corolario del Teorema 3.26. Sea R un anillo Neteriano conmutativo, A un R-módulo finitamente cogenerado y $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ideales primos asociados de $0A$ en A. Entonces existen submódulos $A_1, \ldots, A_n$ únicos, tal que, $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$; donde $0A_i$ es un submódulo M_i-isotípico de A_i.

Además, para $1 \leq i \leq n$, $A_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} (0 :_A M_i^k)$

Prueba.

Se tiene que $A_i \subseteq E(A_i) \cong E(R/M_i) \oplus \ldots \oplus E(R/M_i)$ con un número finito de términos en la suma.

Ya que R es Neteriano, por 3.23, cada elemento de $E(R/M_i)$ es anulado por alguna potencia de M_i. Lo mismo para A_i, así que $A_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (0 :_A M_i^k)$

Inversamente, consideremos un elemento $a \in A$, tal que,

$M_i^k a = 0$. Podemos escribir $a = a_1 + \dots + a_n$, donde $a_j \in A_j$ para $1 \leq j \leq n$. Consideremos $j \neq i$. Entonces $M_i^k a_j = 0$ [ya que $A_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (0 :_A M_j^k)$], así que $M_j^l a_j = 0$ para algún entero positivo l. Se sigue que $(M_i^k + M_j^l) a_j = 0$. Pero por él lema 3.27 se tiene, $M_i^k + M_j^l = R$. Así $R a_j = 0$, de donde $a_j = 0$ para cada $j \neq i$ y $a \in A_i$. Por tanto $\bigcup_{k=1}^{\infty} (0 :_A M_i^k) \subseteq A_i$. Así la igualdad.

Se puede obtener de 3.26 un importante Teorema de descomposición relativo a anillos Artinianos conmutativos. Antes unas observaciones.

Supongamos que él anillo R (no necesariamente conmutativo), puede ser expresado en la forma $R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$, donde $R_1, \dots, R_n$ son ideales bilaterales de R.

Así 1_R lo podemos expresar como:

$1_R = e_1 + e_2 + \dots + e_n$, donde $e_k \in R_k$ para $1 \leq k \leq n$.

Si $r \in R_j$, entonces $re_1 + \dots + r_n = r = e_1 r + \dots + e_n r$.

Ya que la suma es directa $re_j = r = e_j r$.

Así e_j actúa como elemento identidad de R_j y tiene estructura de anillo con elemento identidad.

Además, si $r_k \in R_k$ para $1 \leq k \leq n$ y $r \in R_j$ entonces $(r_1 + \dots + r_n) r = r_j r$, ya que, $r_k r \in R_k \cap R_j C$

$c\, R_k \cap (\sum_{j \neq k} R_j) = \{0\}$, se Tiene que $r_k r = 0$, para $k \neq j$. Así se sigue que los ideales izquierdos de R_j, cuando R_j es visTo como un anillo son lo mismo que sus submódulos cuando es visTo como un ideal izquierdo de R. En esTa siTuación, nos referiremos a que R es la suma directa de los anillos $R_1, \ldots, R_n$ en lugar de decir que R es la suma directa de los ideales bilaTerales $R_1, R_2, \ldots R_n$.

Teorema 3.28. Un anillo ArTiniano conmuTaTivo es la suma directa de un número finiTo de anillos locales ArTinianos.

Prueba. Sea R un anillo ArTiniano conmuTaTivo. Por él Teorema 2.25 corolario y 2.21 se Tiene que R es NeTeriano y finiTamenTe cogenerado como R-módulo. DenoTemos por $M_1, \ldots, M_n$ los ideales primos asociados del ideal cero de R.

De hecho son ideales máximos.

Por él Teorema 3.26 corolario, existen ideales $A_1, \ldots, A_n$ de R, Tal que, OA_i es un submódulo M_i-isoTípico de A_i y $R = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$.

EsTo expresa a R como una suma directa de anillos. Cada A_i es un R-módulo ArTiniano y También un

anillo ArTiniano.
Para probar que A_i es un anillo local, falta probar que A_i es un anillo casilocal, ya que por hipótesis es NeTeriano. Sea M un ideal máximo de A_i, EnTonces M es un submódulo máximo de A_i, y por lo TanTo, A_i/M es un R- módulo simple.
Consideremos él siguienTe diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_i \arrow[r] \arrow[d] & E(A_i) \arrow[ddl, dashed] \\ & A_i/M \arrow[d] & \\ & E(A_i/M) & \end{tikzcd}$$

Donde $E(A_i)$ y $E(A_i/M)$ son cápsulas inyecTivas.
Por ser $E(A_i/M)$ inyecTivo, existe un R- homomorfismo ϕ que hace conmuTaTivo él diagrama.
Pero $0A_i$ es un submódulo M_i- isoTípico de A_i, así $E(A_i) \overset{\psi}{\cong} E(R/M_i) \oplus \dots \oplus E(R/M_i)$ donde Tan sólo hay un número finiTo de sumandos.
Así existe un homomorfismo no cero de:
$E(R/M_i) \oplus \dots \oplus E(R/M_i) \longrightarrow E(A_i/M)$ $[\phi \circ \psi^{-1}]$
Por lo cuál, También existe un homomorfismo no cero

de $E(R/M_i)$ a $E(A_i/M)$. Pero ya que R es Neteriano, se Tiene que, R es un H-anillo.

Así que $R/M_i \cong A_i/M$.

Ahora sean M y M' dos ideales máximos de A_i, entonces A_i/M y A_i/M' son isomorfos como R-módulos y También como A_i-módulos$[(a_1+\dots+a_n)(a+M) = a_i(a+M) = a_i a + M]$

Así por él resultado, si $R/I_1 \cong R/I_2 \Rightarrow I_1 = I_2$, se Tiene que $M = M'$, y A_i Tiene un único ideal máximo (este es el ideal de las no unidades de A_i), y A_i es un anillo casilocal.

Lema 3.29 Sea R un anillo conmutativo, E un R-módulo, A un submódulo de E. Sea $r \in R$ y supongamos que A y $0:_E r$ son Artinianos. Entonces $0:_{E/A} r$ es También Artiniano.

Prueba: Consideremos el mapeo $\alpha: 0:_{E/A} r \longrightarrow A/rA$ dado por $\alpha(e+A) = re + rA$, donde e es un elemento de E, Tal que, $re \in A$.

Sean e, e', Tales que $e+A = e'+A$, entonces $e-e' \in A$, y por lo Tanto, $r(e-e') \in rA$.

Así $re - re' \in rA$, por lo Tanto $re + rA = re' + rA$

Por lo Tanto α está bien definido, y claramen-

Te es un R- homomorfismo.

Sea $e+A \in \operatorname{Ker} \alpha$, entonces $re \in rA$

Sea $\bar{y} = e+A$ entonces $r\bar{y} = r(e+A) = re+rA = 0$.

Por lo Tanto, $e \in A + (0:_E r)$

Inversamente, si $e \in A+(0:_E r)$ entonces $e+A \in \operatorname{Ker}\alpha$.

Así $\operatorname{Ker}\alpha = (A+(0:_E r))/A \cong (0:_E r) / [(0:_E r) \cap A]$, y por lo Tanto, $\operatorname{Ker}\alpha$ es Artiniano. Ya que $\operatorname{Im}\alpha \subset A/rA$, y por hipótesis, A es Artiniano resulta que $\operatorname{Im}\alpha$ es Artiniano.

Así Tenemos la sucesión exacta con los morfismos obvios: $0 \to \operatorname{Ker}\alpha \longrightarrow 0:_{E/A} r \longrightarrow \operatorname{Im}\alpha \to 0$

Por lo Tanto resulta que $0:_{E/A} r$ es Artiniano.

Teorema 3.30 Sea R un anillo Neteriano conmutativo y E un R-módulo. Son equivalentes:

(a) E es Artiniano.

(b) E es finitamente cogenerado.

Prueba (a)⇒(b) Se sigue de 2.21.

(b)⇒(a) Es suficiente probar que el R-módulo $E=E(R/M)$ donde M es un ideal de R es Artiniano (ya que,

$E \cong E(S_1) \oplus E(S_2) \oplus \dots \oplus E(S_n) \cong E(R/M_1) \oplus \dots \oplus E(R/M_n)$

Supongamos lo contrario y denotemos por Ω la colección de Todos los ideales B de R, Tal que $0:_E B$

no es Artiniano. Ω es no vacío, ya que $0:_E 0 = E$
y E no es Artiniano; por lo tanto él ideal cero
es miembro de Ω. Ya que R es Neteriano, Ω
tiene un elemento máximo. Ahora $(0:_E C) \cap (R/M) \neq 0$
[ya que $E = E(R/M)$]. Por tanto, $(0:_E C) \cap (R/M) = R/M$
ya que R/M es simple, y tenemos $R/M \subseteq 0:_E C$.
Así $C \subseteq M$. Pero, por él lema 3.24 $0:_E M = R/M$
que es Artiniano por lo tanto $C \subset M$.
Ahora consideremos el anillo Neteriano R/C.
Tiene un ideal máximo M/C. Por la proposición 1.27,
el (R/c)-módulo $0:_E C$ es una cápsula inyectiva del
(R/c)-módulo $(R/M) \cap (0:_E C) = R/M \cong (R/c)/(M/c)$.
Además, $0:_E C$ no es un (R/c)-módulo Artiniano, si
fuera $0:_E C$ sería un R-módulo Artiniano. !
Finalmente, si I es un ideal de R que contiene
estrictamente a C, entonces $0:_{0:_E C} (I/C) = 0:_E I$ que
es Artiniano. Así si en lugar de poner nuestra
atención hacia R, M y E nos dirigimos hacia.
R/C, M/C y $0:_E C$, podemos suponer la condición
extra de que cada ideal no cero de R tiene anu-
lador Artiniano en E.

Denotemos por Σ el conjunto de todos los submódulos A de E, tal que, E/A no es finitamente cogenerado. Ya que E no es Artiniano (por 2.21 no es finitamente cogenerado), se tiene que Σ es no vacío.
Ordenemos parcialmente a Σ por el opuesto a la inclusión ($A_\alpha < A_\beta$ si $A_\beta \subset A_\alpha$) y sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un subconjunto totalmente ordenado de Σ.
Entonces $\{A_{\alpha'}/\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\}_{\alpha'\in\Lambda}$ es un sistema inverso de submódulos de $E/\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, y no existe un submódulo distinto de cero de $E/\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ que esté contenido en cada $A_{\alpha'}/\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, ya que, si existiera
$Y/\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \subset A_{\alpha'}/\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ y $Y/\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \subset \bigcap (A_{\alpha'}/\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)$

$Y/\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \subset \bigcap A_{\alpha'}/\bigcap A_\alpha = \bar{0}$.

Por la proposición 2.19, existen dos posibilidades:
$A_{\alpha'}/\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = 0$ para alguna $\alpha'\in\Lambda$ ó $E/\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ no es finitamente cogenerado.
Así $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = A_{\alpha'}$ ó $E/\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ no es finitamente cogenerado. Por lo tanto $E/\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = E/A_{\alpha'}$ no es finitamente cogenerado ó $E/\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ no es finitamente cogenerado. Por lo tanto el subconjunto totalmente ordenado de Σ está acotado por $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$.

Entonces, por el lema de Zorn, Σ tiene un elemento máximo A_0. Notemos que A_0 es mínimo con respecto a la inclusión.

Afirmación A_0 es Artiniano.

Usaremos la caracterización de 2.21. Sea A_1 un submódulo de A_0 y consideremos A_0/A_1. Si $A_1 = A_0$, entonces A_0/A_1 es finitamente cogenerado. Si $A_1 \subset A_0$, entonces por ser mínimo A_0, E/A_1 y A_0/A_1 (Proposición 2.20) es finitamente cogenerado. Por lo tanto A_0 es Artiniano. Sea $0 \neq r \in M$, entonces $0:_E r$ es Artiniano. Por el lema 3.29. Se tiene que $0:_{E/A_0}$ es Artiniano.

Sea $F = E(E/A_0)$. Ya que R es Neteriano, se tiene que $F = \bigoplus_{i \in I} E_i$ donde E_i son módulos inyectivos inescindibles (Teorema 3.4). Sea $i \in I$. Ahora $E_i \cap (E/A_0) \neq 0$, consideremos el morfismo compuesto $E \longrightarrow E/A_0 \xrightarrow{\text{inc}} F \xrightarrow{\text{proj}} E_i$, donde $E \longrightarrow E/A_0$ es el morfismo natural, que no es cero. Así $\operatorname{Hom}_R(E, E_i) \neq 0$. Pero $E = E(R/M)$ y $E_i \cong E(R/P_i)$ para algún ideal primo P_i de R (Teorema 1.32 Corolario). Así $\operatorname{Hom}_R[E(R/M), E(R/P_i)] \neq 0$ y por la proposición 3.21 se tiene que $M \subseteq P_i$.

Ya que $M \subseteq P_i \subsetneq R$ y M es máximo, $M = P_i$. Por lo tanto $E_i \cong E$. Como esto es válido para cada i, las proposiciones 2.16 y 2.15 dan como resultado que $S(E/A_0) = S(F) \cong S(\bigoplus_{i \in I} E) = \bigoplus_{i \in I} (R/M)$. Así $M S(E/A_0) = 0$. Ya que $r \in M$, es inmediato que $S(E/A_0) \subseteq 0 :_{E/A_0} r$ y $S(E/A_0)$ es Artiniano. Así la suma directa anterior es finita y el conjunto de índices I es de cardinalidad finita. Ya que $E_i \cong E(R/M)$ y $F = E(E/A_0) = \bigoplus_{i \in I} E_i \cong \bigoplus_{i \in I} E(R/M)$ se tiene que $F \cong E(S) \oplus \ldots \oplus E(S)$ [I de cardinalidad finita], y por tanto $E(E/A_0) \cong E(S) \oplus \ldots \oplus E(S)$; lo cuál muestra que E/A_0 es finitamente cogenerado. Esto da como resultado una contradicción, y por lo tanto, se tiene que efectivamente $E = E(R/M)$ es Artiniano.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Anderson, F. and Fuller, K. Rings and Categories of Modules. Springer-Verlag, 1973.

[2] Bourbaki. Elements of Mathematics. Theory de Sets. Herman / Addison-Wesley, 1968.

[3] Cárdenas H., Lluis E. Módulos semisimples y representación de grupos finitos. Trillas, 1970.

[4] Cartan, H. and Eilenberg, S. Homological Algebra Princeton University Press, 1956.

[5] Curtis, C.W. and Reiner, I Representation Theory of finite groups and associative algebras. Interscience. John Wiley and Sons, Inc. N.Y. 1962

[6] Kelley, J.L. General Topology. Van Nostrand, 1963

[7] Lambek, J. Lectures on Ring and Modules. Ginn Blaisdell, 1966

[8] Lang, S. Algebra. Addison Wesley, 1965.

[9] Northcott, D.G. Ideal Theory. Cambridge University. Press 1965.

[10] Northcott, D.G. Lessons on Rings, Modules and Multiplicities. Cambridge, 1968

[11] Stenström B. Rings of Quotiens. Springer-Verlag.

[12] Vámos P. and D.W. Sharpe. Invective Modules. Cambridge University, 1972.

[13] Zariski O, and Samuel P. Conmutative Algebra. Volume I Springer-Verlag, 1958.