UNIVERSIDAD ANAHUAC

ESCUELA DE ACTUARIA

INCORPORADA A LA U. N. A. M.

EL FUNDAMENTO DUAL DE LA DEMANDA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

LUZ AKIKO NISHIZAKI LOPEZ

MEXICO, D. F.

1988

El Fundamento Dual de la Demanda

Indice

I N T R O D U C C I O N

A lo largo del desarrollo económico mundial se habla, cotidianamente, de términos tales como la Oferta y la Demanda, como representantes de una economía. Asimismo, se dice que su desequilibrio es el resultado de la alteración de una serie de factores económicos, políticos y/o sociales; los cuales provocan distorciones en los distintos mercados que forman parte de los agregados mencionados dificultando, cada vez más, el equilibrio entre ellos. Uno de los factores más distorcionantes, que goza actualmente de gran importancia por ser el factor más distorcionante y rebelde de la economía, es la inflación (1); fenómeno que es ocasionado por movimientos aleatorios de la oferta y la demanda.

La asignación de dichos términos depende del lado del proceso económico donde se ubique cada actividad. Así, por un lado se tiene a la oferta, que no es un número sino una función de varias variables, la cual concentra a la actividad productiva de una sociedad, i.e. la producción de bienes y/o servicios, global o sectorial, que está a disposición de los agentes económicos. Por el otro lado se encuentra la demanda, función n-variada, que atañe al mercado de bienes y/o servicios, producidos por los oferentes, que una sociedad desea adquirir para su consumo. Ambas funciones se definen para un tiempo determinado. En otras palabras, la oferta comprende el lado productor y la demanda, su dual, el lado consumidor de cualquier economía.

Aparentemente, del entendimiento del equilibrio entre estos dos sectores se desprende la explicación del comportamiento de una economía, en cierto momento. Sin embargo, no se hace hincapié en las fuentes que las modifican, ni en la interrelación que guardan estas con sus mercados ni, mucho menos en los supuestos sobre los que descansan cada una de ellas.

****

(1) Por inflación se entiende al incremento sostenido de los precios.

Adicionalmente, la diversidad de los datos publicados de ambos -- sectores en un mismo mercado, produce desconcierto a los individuos que ca_ recen de una información e instrucción económica suficiente, conllevándolos a una serie de conjenturas, muchas veces erróneas y sin fundamentos, acerca de las razones por las que cierta estructura económica presenta cierto de_-senvolvimiento. Tales conclusiones no son más que el resultado de una com_-prensión poco clara del contexto económico que los rodea, basadas en la fal_ ta general de explicación de los factores conducentes de los agregados eco_ nómicos la oferta y la demanda.

Con el objeto de aclarar las raíces de tales comportamientos, en-especial la evolución de la demanda; que compete a todos los miembros de -- una sociedad; y contribuir al entendimiento de algunos razgos del proceder-del consumidor se desarrolla el presente trabajo.

Desde la perspectiva de su fundamentación y desenvolvimiento eco_ nómico, el trabajo se ubica dentro del marco general, de la **Teoría Microeco_ nómica Neoclásica**; en particular y como punto de partida, la **Teoría de la U_ tilidad** que constituye la base de la **Teoría de la Demanda del Consumidor**. - Para lograr una mayor comprensión de esta última, y con el fin de darle al-estudio un fundamento matemático más sólido, se desarrollan algunos tópicos de la programación matemática, especificamente se discuten la **Programación - Cuasicóncava** como instrumento de planteamiento y solución del problema eco_ nómico.

Ambos tópicos se desarrollan desde um punto de vista, meramente,-teórico. Se escogió este enfoque por que un tipo de investigación de campo-implicaría la inclusión de conceptos estadísticos y econométricos; para po_ der lograr un cotejamiento con la realidad, vía la estimación de la función de demanda; cuya extensión puede ser objeto de un estudio ulterior. No obs_ tante se menciona a partir de donde se iniciaría dicha estimación.

****

Con el fin de situar al lector dentro del contexto neoclásico, se da en la primera parte el antecedente económico de la **Teoría de la Utilidad**, desde su aparición hasta las publicaciones de Hicks y Allen, en 1934.

La segunda sección, penetra en los principios básicos de la teoría mencionada. Tales fundamentos conducen a la formulación de dos funciones, esenciales, con las que se plantea, simultáneamente, lo que se conoce como el **Problema de Elección de Consumo**. Enunciándose, también las propiedades que estas funciones deben satisfacer.

Los principios matemáticos se encuentran en los dos capítulos siguientes. Se inicia con un resumen, recordatorio, de las condiciones necesarias para la existencia de un óptimo bajo diferentes circunstancias. Antes de proceder a la **Programación Cuasicóncava**, capítulo cuatro, se analizan, escuetamente, algunas propiedades de las funciones planteadas anteriormente, se buscan los requerimientos de suficiencia de las condiciones derivadas en un principio; detallando únicamente los teoremas y sus demostraciones respectivas de los enunciados que competen al desarrollo de este trabajo (2); y se profundiza en las propiedades de las funciones enunciadas por la **Teoría Económica Neoclásica**.

En la parte cinco, se unen ambos fundamentos para solucionar los problemas de selección en forma individual. La solución del problema nos dirige al desarrollo de la **Teoría de la Demanda del Consumidor**, por medio de la cual se obtienen dos tipos de funciones de demanda del consumidor, através del tratamiento primal y dual del problema. Esclareciéndose la dependencia funcional que tienen ambas con algunas variables que, obviamente, las determinan.

La conclusión resume los principales resultados del trabajo. Así como, algunas implicaciones que tienen los supuestos mantenidos a lo largo de todo el análisis. Se trata de concretizar la forma en que se construye una función de demanda y las variables que la pueden afectar, directamente, en un momento determinado.

Con la comprensión de este material es, relativamente, fácil la aplicación a cualquier campo en el que se desee conocer el comportamiento --

****

(2) Es decir, se demuestran los resultados que son evidentemente fundamentales en el estudio de la Teoría del Consumidor. Utilizándose para ello algunos resultados como bases, sin por ello tener que demostrarlos.

consumidor involucrado. De manera que la extensión y generalización al ámbito empírico es prácticamente inmediata.

CAPITULO I. ANTECEDENTE

Con el objeto de resaltar los puntos principales que precedieron al desarrollo de la **Teoría de la Demanda** actual, esperando que su contribución pueda ser justificada en el entendimiento de la economía actual, se desarrolla a continuación un pasaje breve de la historia económica que constituye el antecedente del presente estudio.

El marco de dicho antecedente está limitado por varios aspectos.- Primero, cubre el período que va desde la aparición formal de la **Escuela de la Utilidad Marginal**, que representa la ruptura con el pasado inmediato con el pasado inmediato en el sentido de ser la conclusión lógica del abandono de la **Teoría del Valor-Trabajo** con H. H. Gossen hasta las publicaciones de E. Slutsky (1915), Hicks y Allen (1934). Esta etapa comprende el final del siglo XIX y el principio del siglo XX. Segundo, el estudio se limita a ciertos tópicos importantes y al tratamiento de estos por los economistas de mayor trascendencia. La aplicación de la **Teoría de la Utilidad** al bienestar económico es el punto omitido de mayor relevancia. Dicha exclusión se justifica por el hecho de que la mayoría de los escritores de aquella época utilizan la teoría mencionada para explicar el comportamiento económico (1); particularmente, el comportamiento de la Demanda; y sólo en segundo plano justifican la política económica. Asimismo, se ha pasado por alto las críticas sostenidas por escritores empíricos, que forman una parte no constructiva de la teoría.

1.1 DESARROLLO FORMAL DE LA TEORIA DE LA UTILIDAD.

La primera generación de teóricos modernos de la utilidad marginal (2) está integrada por la trinidad W.S. Jevons, C. Menger y L. Walras.-

****

(1) La Teoría de la Utilidad del valor busca una explicación del valor en términos del grado en que se valúa un objeto que contribuye a la satisfacción de las necesidades prioritarias del individuo.

(2) . La utilidad económica es un término subjetivo. Se define como el poder o habilidad que tiene un bien en la satisfacción de un deseo humano, sin implicaciones de tipo ético o moral

. La utilidad marginal es la utilidad que aporta una unidad del bien o servicio. El poder decreciente del bien en la satisfacción del individuo se conoce como utilidad marginal decreciente.

Sin embargo, se considera Gossen como el iniciador de tal teoría debido a -- que sus teoremas han sido la base fundamental del pensamiento económico. -- Las características principales de su análisis son el utilitarismo decidido, desde la perspectiva del consumo, del método matemático y del objeto de la- conducta humana, misma que está enfocada a la obtención del máximo de 'goce'. Al mismo tiempo, en su obra enuncia dos leyes, las cuales le dan el nombre- de iniciador de dicha escuela. La primera de ellas dice: "La cantidad de u_ no y el mismo goce decrece constantemente a medida que se experimenta dicho goce sin interrupción, hasta que se llega a la 'saciedad'" (3). En otras pa labras la utilidad marginal es decreciente. La segunda ley se refiere a la forma en que se consigue el máximo de goce: "Para obtener la cantidad máxi_ ma de goce un individuo que puede elegir entre muchos goces pero no dispone del tiempo suficiente para procurárselos todos plenamente; está obligado, - por mucho que difiera la cantidad absoluta, a procurárselos todos parcial_- mente, aún antes de que haya terminado el más grande de ellos. La relación entre ellos tiene que ser tal que, en el momento en que se descontinúan, -- las cantidades de todos los goces sea la misma" (4).

En el mismo contexto se concibe al valor como una medida relativa i.e. el valor depende por completo de la relación entre el objeto y el suje to. Define un bien de 'consumo' como aquel que es capaz de proporcionar go_ ce estrictamente; bienes de 'segunda' clase los que se necesitan para obte_ ner el goce, actualmente conocidos como bienes complementarios; y bienes de 'tercera' clase a los usados en la producción de todos los otros bienes (5). Es así como el libro de Gossen contiene los principales elementos de la Teo ría Jevoniana y Austriaca, incluso el aparato geométrico y algebráico. No - obstante las circunstancias de la época no eran lo suficientemente maduras- para dar uso cabal al método subjetivo.

****

(3) A History of Economic Thought. Roll, E.. 1973, London: Faber and Faber Ltd., P. 368.

(4) Ibid., p. 368-369.

(5) Entwicklung der geetze des menschlichen verkehrs und des daraus fliessen der regau fur — menschliches handeln. Gossen, H.H.. 1889, p. 24-28. Traducción anónima.

En la transición de la Teoría de la Utilidad Marginal del valor a la Teoría Pura del Comportamiento del Consumidor (6) se destacan cuatro etapas que van desde W.S. Jevons hasta E. Slutsky, Hicks y Allen.

Dentro de la primera etapa aparece la formulación original de Jevons que parece estar basada en el primitivo principio utilitario de la 'viabilidad'. Asimismo, expresa su creencia acerca de que las leyes económicas podían ser reducidas a unos cuantos principios matemáticos y que estos últimos debían ser derivados de los "grandes resortes de la acción humana.- los sentimientos del placer y el dolor" (8). También afirma que la utilidad marginal del bien es una función de la cantidad del bien únicamente; supuestos que serán usados más tarde por Walras y Marshall. A Jevons se le debe la introducción de la utilidad a la teoría entonces existente. Así como, una formulación matemática más formal (9).

En este priodo se encuentra también Menger y Walras. Carl Menger, conocido como el representante de la Escuela Austriaca de la Utilidad Marginal, es el primero en elaborar una teoría del valor libre de todo supuesto hedonista (10). Define a la utilidad en el sentido relativo, i.e. como la capacidad que tiene un objeto al ser puesto en relación causal con una necesidad. Diciendo que las cosas que poseen esa capacidad se convierten en mercancías cuando la necesidad está presente y estas pertenecen a la clase de mercancis económicas cuando están dotadas de la 'escasez'. Su valor está dado por la importancia que las mercancías determinadas tengan en la satisfacción de las necesidades de un individuo (11). De esta manera el equilibrio se alcanza cuando la razón de las utilidades marginales entre dos mercancías se iguala (12).

****

(6) Nace como resultado de la aplicación de la primera teoría mencionada.
(7) 'A Review of Economic Doctrines, 1870-1929'. Hutchison, T.W., 1953, London: Clarendon Press. P. 303.
(8) The Theory of Political Economy. Jevons, W.S., 1924, London: Reprint. P. 304.
(9) Ibid., p. 164.
(10) El hedonismo se basa en la creencia de que el placer es el bien principal y que el individuo busca su bienestar y riqueza.
(11) C. Menger. Collected Works. Vol. I. 1934, London: London School of Economics, reprint. p. 78.
(12) Ibid., p. 39.

El último de los fundadores de esta escuela es León Walras, quién al igual que Jevons y Menger se basa en el valor del cambio en la utilidad y en la limitación de la cantidad. Es el primero en usar el término 'rareté' (rareza) que define como la "derivada de la utilidad efectiva con relación a la cantidad poseída" (13). Esto es el concepto de la utilidad marginal. - El deseo de igualar las utilidades marginales; de acuerdo con la segunda -- ley de Gossen; conducirá al cambio y este deseo, aunado a la existencia de mercancías poseídas por cada individuo en particular, dará una demanda u oferta determinada para cada individuo, misma que puede ser representada por una ecuación funcional o por una curva. Insiste en la interdependencia funcional entre el precio y la determinación de la última rareza.

En realidad Walras se dedicó al desarrollo y análisis de las condiciones que conducen al equilibrio simultáneo de todos los mercados en una economía.

Los tres últimos autores citados utilizan el supuesto de que la utilidad marginal es decreciente y que la función de utilidad es aditiva (14).

La segunda etapa de transición está representada por el trabajo - de F.Y. Edgeworth (1881) que encaja las relaciones de complementariedad entre los bienes y el tratamiento de la utilidad como función de todos los -- bienes en el mercado.

Adicionalmente, el autor introduce la curva de indiferencia (15)- o línea de nivel, con el objeto de ampliar el análisis al ámbito de lo gráfico. Tales curvas tendrán pendiente positiva pero decreciente (16). El considerar una función de utilidad generalizada tiene implicaciones importantes sobre la mesurabilidad de la utilidad total. Ya que, con tal función, -

....

(13) Eléments d'Economie Politique Pure. Walras, L., 1926, Paris: Pichon & Durand-Auzias.P.103.

(14) Por utilidad aditiva se entiende a la utilidad total que es el resultado de la suma de las utilidades individuales, que deben ser independientes. Con una función de este tipo, el - suponer utilidades marginales decrecientes es suficiente para garantizar la convexidad de la curva de indiferencia.

(15) Una curva de indiferencia es aquella que muestra el rango de combinaciones de dos bienes o servicios con la característica de que cada combinación proporciona la misma utilidad-total o el mismo nivel de satisfacción que las demás.

(16) Mathematical Psychics. Edgeworth, F.Y., 1881, London: London School of Economics, reprint 1932. P. 21 y 26.

el hecho de suponer que la utilidad marginal es decreciente no es una condición necesaria ni suficiente para garantizar la convexidad de la curva. Además, aún bajo sicho supuesto, no se tiene como corolario que todas las demandas presenten pendiente negativa (17).

Asimismo en este periodo se encuentran los trabajos hechos por Auspitz y Liben (1889) quienes precisan con detalle el concepto de complementariedad entre los bienes diciendo: " .... dos bienes son sustitutos en el consumo si la razón de utilidades marginales del monto 'efectivo consumido' es negativa: y son complementarios en el consumo si la razón es positiva" (18).

Dentro del tercer trayecto figuran Fisher y Pareto cuyos estudios llegan a concluir que la utilidad es inmesurable si se toman en cuenta las relaciones de complementariedad y en todo caso la utilidad es superflua. El exámen de la curva de indiferencia se llevó acabo por estos dos economistas con la intención de desarrollar una descomposición del comportamiento del consumidor desde un punto de vista no utilitarista. Sin embargo, su teoría no les permitió redefinir los conceptos desarrollados por Edgeworth ni la ley de la utilidad marginal decreciente. No obstante, se debe a Fisher la determinación del aparato geométrico de la curva de indiferencia en el que las cantidades de los bienes aparecen en los ejes cartesianos (19).

Una contribución importante a la curva de indiferencia fue derivada por W.E. Johnson el cual demuestra la irrelevancia que tiene la inmesurabilidad o mesurabilidad de la utilidad (20). Describe también, sin definir con exactitud, el concepto de la tasa de utilidad marginal de un bien di-

....

(17) Op. Cit., Edgeworth. p. 21, 34, 104 y 108.
(18) Essay in the History of Economics. Stigler, G.J., 1965. Chicago: University of Chicago Press. Capítulo 6, p. 65-77.
(19) Mathematical Investigation in the Theory of Value and Prices. Fisher, I., 1937. New Haven; Yale University Press, reprint of 1892. P. 102. Se toma el caso de dos bienes, es decir R^2.
(20) The Pure Theory of Utility Curves. Johnson, W.E., 1913, London: London School of Economics. Vol. XXIII, P. 490-493. Ver también: 'The Utility Analysis of Choice Involving Risk'. Friedman, M. & Savage, L.J., Journal of Political Economy, 1948, vol LVI.

ciendo: " .... lo que se necesita es una representación de la razón de las utilidades marginales; de hecho esta razón es precisamente la que describe la pendiente de la curva de indiferencia en cualquier punto" (21).

Paralelamente habla del concepto de complementariedad en términos de la utilidad e independientemente de la medida de esta (22).

La última etapa se caracteriza por la extrusión de la utilidad del análisis del comportamiento del consumidor realizado por E. Slutsky (1915) quien da la distinción fundamental que hay entre el efecto sustitución y el efecto ingreso de un cambio en precios. En su tratado manifiesta que el efecto sustitución consiste en un movimiento a lo largo de la curva de indiferencia manteniendo el ingreso real constante (23). Y el efecto ingreso es equivalente a un cambio en el ingreso real, o en todos los precios simultáneamente, estribando en un desplazamiento hacia una curva de indiferencia mayor o menor (24). Ahí mismo habla del contenido de su término 'variación compensada' del ingreso nominal (25) que define como "la indemnización necesaria para que un individuo que ha sufrido una pérdida o ganancia resultante de algún cambio en precios alcance nuevamente la curva de indiferencia en la que etaba originalmente.

La contribución aportada por este material no ejerció influencia alguna sino hasta 1934 cuando Hicks y Allen redescubren, por su parte, las conclusiones a las que había llegado Slutsky y las difunden.

Durante este periodo el análisis de la demanda de A. Marshall --- (1842-1924) tomaba fuerza, poseído de algo elemental e ilusoriamente sencillo, basado en el concepto de la utilidad como función de la cantidad del bien únicamente. En sus Principles Marshall emplea la técnica algebráica y geométrica para mostrar las relaciones exactas entre las variables en situaciones ....

(21) Op. Cit., Stigler, p. 135.

(22) Op. Cit., Johnson, p. 495. Ver también: The Theory and Measurement of Demand. Schultz, H., 1938. Chicago: Chicago University Press, p. 608-614.

(23) El ingreso real se refiere al poder de compra del ingreso efectivo. Esto es, toma en cuenta el cambio en precios, i.e. el cambio en el valor real del dinero.

(24) 'Sulla Teoria del Bilancio del Consumatore', Slutsky, E., Giornale degli Economisti, serie 3, vol. LI, 1915. P. 126.

(25) El ingreso nominal o monetario es el monto actualmente recibido como ingreso, medido en unidades de dinero o monetarias.

bien definidas (26). Explica como detrás de la curva de demanda se encuentra la utilidad marginal reflejada en los precios a los que se demandarán determinadas cantidades. Su aportación principal al problema del valor y del precio la da en su análisis del equilibrio entre la oferta y la demanda, fundamentado en la diferencia entre los distintos lapsos de tiempo en el que se considera que están las fuerzas que tienden al equilibrio (27).

Marshall deja dudoso el contenido exacto involucrado en su principio de utilidad, ya que si bien a fines de 1895 define: ".... la utilidad total de un bien para una persona está definida por el bien mismo"; y ".... la utilidad como el poder del beneficio dado" (28). En la primera edición de su libro habla de la utilidad en términos del 'placer' y el 'dolor' y no en función de la satisfacción (29) con lo que parece haber concluido su obra. Posteriormente postula su ley 'Universal' de la demanda que expresa que en general: ".... existe una sóla ley que es común a todas las demandas la cual dice que a mayor cantidad vendida menor será el precio al que se compra (léase se demanda)" (30). Esta ley es un corolario del supuesto de utilidades marginales decrecientes sólo cuando la función de utilidad es aditiva. del mismo modo afirma que la utilidad total de todos los bienes es la suma de las utilidades individuales: ".... debemos tomar el agregado de la medida monetaria de la utilidad total de la riqueza" (31).

Marshall incentivado por las relaciones de complementariedad y sustitución de los bienes presentadas por Fisher (32) modifica, más tarde,

....

(26) Principles of Economics. Marshall, A., 1927, London: Macmillan, 8ª edición, P. 10-19.

(27) Ibid., p. 378-379.

(28) 'The Law of Return under Competitive Conditions'. Sraffa, R., 1942, Economic Journal.

(29) Ibid., Marshall, 1890: nota II.

(30) Ibid., Marshall, p 139-160.

(31) Ibid., Marshall, p. 179-180. Su nota matemática III tiene las implicaciones de una función aditiva si su precio es: ".. el precio al cual (un individuo) está deseoso de pagar por una cantidad x del bien".

(32) Op. Cit., Fisher, o. 122-126.

su ley 'Universal' adjuntándole la paradoja del bien Giffen como una excepción en la edición de 1937 (33).

El análisis de la demanda marshalliana, en contraste con la de Jevons, da mayor énfasis a la independencia real; y no simplemente formal o teórica de los 'deseos' y las 'actividades' más que en el 'gusto' de los consumidores, como punto de partida para el análisis económico.

Con excepción de algunos ensayos posteriores basados en las investigaciones hechas por Marshall existen pocas aportaciones adicionales, distintas, a la explicación del comportamiento de la demanda, aquí presentada, entre los escritores de mayor renombre de este periodo.

Es así como se ha presentado un breve esbozo del desenvolvimiento de la Teoría Económica que antecedió a la Teoría Económica Moderna, actualmente aplicada.

****
****

(33) 'Notes on the History of the Giffen Paradox'. Marshall, A., Review of Economic Studies, 1937. p. 152-156. Donde se define un bien Giffen como aquel que al aumentar (o disminuir) su precio aumenta (o disminuye) la cantidad demandada haciendo que la curva de demanda tenga pendiente positiva. Aunque se debe notar que en la práctica se han encontrado muy pocos casos que encajen dentro de este tipo de bienes.

CAPITULO II. EL PROBLEMA ECONOMICO.

El problema central de la economía del consumidor encuentra sus fundamentos en la Teoría de la Elección: según la cual, el consumidor se enfrenta, cotidianamente, con un problema de asignación de un ingreso limitado.

¿En qué sentido está encarando dicho problema?. A este respecto existen dos formas de respuesta posibles: la primera, el hacer una elección constituye un problema de selección; la segunda, la necesidad de tomar una decisión es inevitable para el consumidor. Es la lógica e implicaciones de este último enfoque lo que se pretende desarrollar en la presente sección.

Las condiciones que conllevan al consumidor individual a la toma de decisiones respecto al tipo y cantidad de bienes y servicios que deberá adquirir para su consumo están dadas por lo siguiente (1):

1. Cada consumidor tiene deseos diferentes y variados que deben ser satisfechos;
2. Cada consumidor tiene un ingreso limitado (finito);
3. Cada bien y/o servicio a consumir debe satisfacer algún deseo y debe ser adquirido a un precio (no cero).

Dadas estas condiciones, que de hecho se apegan a la realidad, el consumidor no puede comprar todos los bienes y servicios que desearía para satisfacer completa y totalmente sus deseos. Por lo que es necesario que elija una combinación específica de bienes y servicios de entre todos los disponibles en la economía a precios no negativos.

Resulta ser claro que cada individuo tratará de obtener el máximo de satisfacción posible en la adquisición de tal combinación (2).

Desde una perspectiva global, la consideración de tal problemática de selección para la economía en su conjunto no cambia, en forma alguna, la concepción original. Sin embargo, la visión es distinta. Ya que, para el consumidor individual el problema se reduce a la elección de bienes y servicios que en determinado momento se encuentran en producción o que ya están en existencia; mientras que para la sociedad consumidora el problema se con

....

(1) Economics of Consumption. Cochrane & Bell. McGraw-Hill Book Co., Inc., P. 79.

(2) Ibid., p. 70.

creta en decidir que recursos deben ser utilizados y en que proporción para poder producir los bienes y servicios que demanda el conjunto de consumidores (3). A pesar de esto, todas las economías hacen frente a esta decisión por la misma razón por la cual cada uno de sus miembros, desde el principio de los tiempos, ha venido encarando. La razón, en su forma más cruda pero más significativa, es la carencia de recursos suficientes para la satisfacción total de los deseos individuales. Este hecho enmarca el **Principio de la Escasez de recursos** (4); principio que es muy importante en el ámbito económico.

Por otro lado, la limitación del ingreso conduce a todos los integrantes de una sociedad económica, exceptuando, quizás, a los estratos altos económicamente, a la elección de una combinación de bienes y servicios determinada. No obstante que las esferas económicamente altas no ven limitados sus deseos por la falta de recursos monetarios, no son del todo libres en sus decisiones, ya que el tiempo les impone una limitante fundamental (5).

De esta manera se puede concluir que todos los miembros de cualquier economía enfrentan limitaciones de ingreso y/o tiempo en la toma de decisiones de consumo, debido a que ninguno tiene lo suficiente de ambos factores, conjuntamente, como para poder consumir todo lo que cada uno de ellos desearía.

Es así como el consumidor individual está invariablemente en confrontación con el problema de como aplicar un ingreso limitado. Para solucionar esto el individuo debe determinar cuales de sus deseos deben de ser satisfechos y en que medida; entonces seleccionará una combinación de bienes y servicios que maximizen la satisfacción de sus deseos. El proceso anterior se conoce como el **Problema Central de Elección** en el consumo.

Básicamente el problema de elección consta de dos etapas: la primera, las decisiones de selección respecto a cual y en que grado cada de ....

(3) Op. Cit., Cochrane & Bell, p. 80-82.
(4) A Theory of Consumption Function, Friedman, M., 1957, Princeton: Princeton University Press. p. 139-145.
(5) Op. Cit., Cochrane & Bell, p. 85.

seo debe ser satisfecho; la segunda, las decisiones de elección respecto a combinación de bienes y servicios que serán adquiridos en el mercado para satisfacer el patrón de deseos establecido individualmente (6).

El hecho de que las decisiones de elección respecto a que deseos podrán cumplir no puedan ser medidas objetivamente, así como, la imposibilidad de garantizar que tal decisión en este nivel tan subjetivo, pueda ser definitiva o explícita, ha hecho que la mayoría de los economistas supongan en general que cada individuo actua en forma 'racional' (7); en el sentido de que cada individuo seleccionará aquella combinación de bienes y/o servicios que satisfagan 'mejor' el patrón de deseos específico.

El como se alcanzará tal combinación que satisfaga mejor los deseos del consumidor requiere del establecimiento de un planteamiento que permita determinar la solución 'adecuada' a la satisfacción de los gustos y que, considere, al mismo tiempo, las limitantes de presupuesto que cada individuo tiene. Dicho planteamiento comprende, hasta el momento, dos tipos de información; por un lado, los deseos o gustos del consumidor y por el otro, el ingreso del cual dispone en un momento dado el individuo. No obstante, estos deseos al ser no tangibles dificultan la conceptualización matemática del problema, pudiendo hacer que el mencionado planteamiento no sea válido. Para solucionar esto los economistas han venido usando un aparato geométrico conocido como la **Curva de Indiferencia**, através de la cual se trata de dar un contenido menos subjetivo y a la vez más tangible a los gustos de los consumidores, de manera que su tratamiento pueda ser más formal. Tales curvas han sido estructuradas bajo una serie de supuestos y teoremas, que dan forma a la **Función de Utilidad**; los que se explican a continuación.

2.1 AXIOMAS Y UTILIDAD.

Los supuestos que se mantendrán a lo largo de todo el análisis son:

....

(6) Op. Cit., Cochrane & Bell, p. 90-92.
(7) Op. Cit., Cochrane & Bell, p. 92-93. Ver también: Op. Cit., Schultz, p 5-17.

(a) Para todas las canastas de consumo (8), posibles, el individuo tiene un orden preferencial que refleja sus gustos;

(b) Existen sólo dos bienes en la economía, x_1 y x_2. Entendiéndose el término 'bienes' en el sentido más amplio de la palabra, de forma que se de cabida a aplicaciones en la elección de trabajo, elecciones intertemporales, sociales, etc. (9);

(c) No existe especialidad en el consumo de algún bien específico. Esto es, el individuo busca la diversificación de su canasta de consumo;

(d) Se supone la existencia de la función de utilidad y se examinarán sus propiedades:

(e) Los bienes y/o servicios considerados dentro de este esquema son bienes sustitutos; es decir, son bienes con la característica de que al aumentar el precio de alguno de ellos se incrementará el consumo del bien cuyo precio no ha aumentado.

Con el objeto de demostrar la existencia de la función de utilidad se presenta un conjunto de axiomas de elección que sostienen tal función. La aceptación de tales axiomas es equivalente a aceptar que la función de utilidad existe.

Los axiomas están definidos sobre un campo de elección cuya presentación usual es la compra individual de bienes de consumo como objetos de elección. Cabe destacar que la definición del campo o espacio de elección debe ser distinguiblemente clara.

A continuación se discuten seis axiomas (10): reflexividad, completez, transitividad, continuidad, no saciedad y convexidad. Debe aclararse que el simbolo '$\succsim$' significa 'tan bueno como' y el signo '$\sim$' denota la indiferencia o 'igualmente deseable que'.

Axioma 1. Reflexividad: Para cualquier canasta x: $x \succsim x$.

Cada canasta es tan buena como ella misma.

****

(8) Se entiende por una 'canasta' de consumo a una combinación determinada de bienes y/o servicios existentes en la economía.

(9) Op. Cit., Friedman, p. 147.

(10) Economics & Consumer Behaviour. Deaton & Muellbauer. 1984, Cambridge: Cambridge University Press. 1ª edición. p. 23-31.

Axioma 2. Completez: Para cualesquiera dos canastas, x_1 y x_2, dentro del conjunto de elección se da lo siguiente:

$x_1 \succsim x_2$ ó $x_2 \succsim x_1$.

Permite la comparación entre dos canastas: el consumidor puede elegir entre ambas.

Este axioma es conocido como 'conectividad' (11), también, o 'comparabilidad' (12). Hay que notar que este caso no excluye el caso de la indiferencia dado por: si $x_1 \succsim x_2$ y $x_2 \succsim x_1$, entonces: $x_1 \sim x_2$. Es decir x_1 es indiferente a x_2.

Axioma 3. Transitividad (o consistencia): Si $x_1 \succsim x_2$ y $x_2 \succsim x_3$, entonces: $x_1 \succsim x_3$.

Lo que constituye el centro de la Teoría de la Elección debido a que está fundamentado en el hecho de que los consumidores son racionales en sus decisiones, i.e. no se contradicen en la comparación de distintas combinaciones de consumo (13).

Los tres axiomas definen la preordenación del conjunto de elección: comúnmente son conocidos como el orden u orden preferencial. No todas las preferencias u órdenes pueden ser representadas por una función de utilidad por las discontinuidades que pueden existir dentro del mapa preferencial. Para evitar esta discontinuidad se postula el siguiente axioma:

Axioma 4. Continuidad: Para cualquier canasta x_1, se define: $A(x)$, el conjunto tan bueno como, y $B(x)$ como el conjunto no mejor que x, por: $A(x_1) = \{ x / x \succsim x_1 \}$ y $B(x_1) = \{ x / x_1 \succsim x \}$. Entonces: $A(x_1)$ y $B(x_1)$ son conjuntos cerrados. Esto es, conjuntos que contienen a sus fronteras, para cualquier x_1 dentro del espa........

(11) Op. Cit., Friedman, p. 30-32.

(12) Microeconomic Theory, Layard, P.R.G. & Walters, A.A., 1978, Great Britain: McGraw-Hill Co., Ltd., 1ª edición, p. 124.

(13) Economic Theory, Becker, G.S., 1971, Chicago: University of Chicago Press, 1ª edición, Cap. 35-36.

cio de elección (14).

Los axiomas uno a cuatro son suficientes para 'representar' las preferencias u órdenes por una función de utilidad, u(x). La cual se define en función de todos los bienes (15) y es en cierta forma un resultado psicológico más que físico, proveniente de la cantidad de 'utiles' que aporta cada bien a la utilidad (16).

Con esta representación los enunciados: $u(x_1) \geq u(x_2)$ y $x_1 \succsim x_2$ son exactamente equivalentes. De esta forma es posible dar un tratamiento matemático, convencional, a las preferencias o gustos del individuo através de la función de utilidad. Con esto la 'mejor' elección será aquella que produzca el máximo de utilidad.

Es conveniente en la práctica, restringir el marco de preferencias de manera que las mejores se encuentren sobre la restricción presupuestal y no dentro de ella (17). Para poder asegurar esto se enuncia el:

Axioma 5. No Saciedad: La función de utilidad, u(x), es no decreciente en cada uno de sus argumentos y para toda canasta, x, en el conjunto de elección la función es creciente en al menos uno de sus argumentos.

Lo que implica que todo individuo racional prefiere más a menos.

Hasta el momento se ha mostrado la transición que existe desde axiomas de elección hasta la formación de la función de utilidad, recordando que las restricciones se discutieron en páginas pasadas y que la limitación del ingreso disponible del consumidor impone mayor sesgo en la toma de decisiones de consumo, los cinco axiomas anteriores reducen el problema de elección del consumidor a la maximización restringida de la utilidad.

****

(14) Algunos autores suponen que los bienes son infinitamente divisibles para garantizar que el número de canastas es infinito y por tanto el espacio de curvas de indiferencia es cerrado. Ver op. cit., Layard & Walters, p.124 y op. cit., Becker, p. 110. Sin embargo esto ha creado gran controversia ya que no todos los bienes pueden cumplir con esto.

(15) Op. Cit., Cochrane & Bell, p. 65.

(16) Teoría de los Precios. Friedman, M.,Ed. Alianza, 4ª edición, P. 57-59.

(17) Op. Cit., Deaton & Muellbauer, p. 28.

Hasta el momento se ha supuesto la existencia de la función de utilidad, pero no se ha asegurado que tal función sea única. De hecho no lo es ya que cualquier otra función que sea capaz de reproducir el mismo orden preferencial del consumidor es tan buena como cualquier otra (18). En consecuencia: si $u(x)$ es una función de utilidad que representa un orden específico y $f()$ es una función, cualquiera, monotónicamente creciente entonces: $f(u(x_1)) > f(u(x_2))$ sí y sólo si $u(x_1) > u(x_2)$. Es decir, ambas funciones son equivalentes en el sentido de que ambas preservan el mismo orden preferencial. El hecho de que $u(x)$ y $f(u(x))$ sean funciones equivalentes, normalmente, se enuncia como "La función de utuilidad está definida únicamente como una transformación monotónicamente creciente" (19).

De lo anterior se desprende que una función de utilidad es ordinal, i.e. su propósito es el de ordenar las canastas y el valor que les asigne es irrelevante al modelar las ecuaciones.

Queda aún un axioma que es postulado en algunos casos, aunque, su validez no es del todo universal:

Axioma 6. Convexidad: Si $x_1 \succ x_0$, entonces para: $0 < \theta < 1$ se tiene que:

$$\theta x_1 + (1-\theta)x_0 \succ x_0.$$

La universalidad de este axioma está basada en el hecho que este tipo de comportamiento se observa sólo en situaciones en las que la incertidumbre no está presente. No obstante, el mantener tal axioma, como se hará en el presente caso, ayuda enormemente al entendimiento de la mecánica de elección involucrada en la ya aludida toma de decisiones de consumo. Por lo que en este estudio se analiza la formación y toma de decisiones bajo esquemas de absoluta certeza.

Adicionalmente, el conjunto $A(x)$, definido en el axioma cuatro, constituye un conjunto convexo. Entonces se dice que la curva de indiferen-
....

(18) 'Professor Hicks' Revision of Demand Theory', Machlup, F., Journal of Political Economy. 1972. Ver también: op. cit., Becker, p. 132-137.
(19) Microeconomics, Call, S.T. & Holahan, W.L. 1980, Belmont: Wadsworth Publishing Co., 1ª edición. P. 36.

cia es convexa al origen (20).

¿Cómo se traduce la convexidad de las preferencias en propiedades de la función de utilidad?. Para dar respuestas a lo anterior se define una función escalar como: $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$. n 2. es cuasicóncava si para x_1 y x_0 tales que: $\theta(x_1) > \theta(x_0)$ y para toda $0 < \lambda < 1$ se tiene que: $\theta(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_0) > \theta(x_0)$. Con esta definición y el axioma seis se sigue, trivialmente, que las preferencias son convexas si y sólo si la función de utilidad representante es cuasicóncava (21).

Entonces la curva de indiferencia debe cumplir con lo siguiente:

(a) Debe ser estrictamente convexa, i.e. convexa y sin segmentos rectilíneos;
(b) Debe tener derivadas bien definidas, en todos los puntos, es decir debe der una curva suave.

Con esto se dice que en cualquier punto donde ocurra el consumo la curva de indiferencia debe ser convexa al origen, excepto cuando:

(i) Exista especialidad en el consumo de algún bien, en cuyo caso la concavidad es posible: aunque este caso se ha desechado por los supuestos asumidos inicialmente.
(ii) El consumo no ocurra en un mercado normal (22).

La imposición a la utilidad a que sea una función cuasicóncava significa que es una función cóncava y creciente. Asimismo, la cuasiconcavidad estricta requiere de que la función sea cóncava a lo largo de la curva de indiferencia. En otras palabras la cuasiconcavidad estricta refleja el hecho que la función tiene que cumplir con:

....

(20) La convexidad que aquí se trata es del tipo estricto. La convexidad débil se define cuando el valor de λ se encuentra en el intervalo: $[0,1]$.
(21) Op. Cit., Deaton & Muellbauer, p. 29-30.
(22) Entendiéndose por mercado normal aquel donde se puede adquirir cantidades ilimitadas del bien a un costo marginal constante; el costo marginal se define como la derivada del costo respecto a la cantidad comprada.

$d^2 u(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} dx_i dx_j \leq 0$; donde: $u_{ij} = \frac{d^2 u(x)}{dx_i \, dx_j}$ para todo $dx_i \, dx_j$ distintos de cero al mismo tiempo. Y que satisfagan:

$$du = \sum_{i=1}^{n} u_i \, dx_i = 0; \text{ donde: } u_i = \frac{du(x)}{dx_i}$$

Las condiciones anteriores deben ser satisfechas por cualquier -- función que sea cuasicóncava (23).

Se añade a los supuestos la diferenciabilidad de la función de utilidad, pidiéndose que sea al menos dos veces diferenciable (24).

El mapa de indiferencia del consumidor se compone de líneas de - contorno o líneas de nivel, donde cada línea describe una serie de combinaciones de dos bienes para los cuales el individuo es indiferente, i.e. cada combinación se forma por un conjunto de bienes que pertenecen a la misma - curva de indiferencia y que proporcionan el mismo nivel de satisfacción individual de los deseos. Por su parte el consumidor no necesita conocer el-- monto exacto de satisfacción que le produce cada canasta de consumo en particular, todo lo que debe poder hacer es registrar sus preferencias de a - cuerdo a un orden que el mismo tiene que establecer (25).

Tales curvas de indiferencia tienen pendiente negativa por que para mantener al individuo sobre la misma curva el consumidor debe deshacerse de cierta cantidad de x_2 al aumentar su precio, y viceversa. Consecuente - mente la sustitución de un bien por otro en la combinación produce una curva de nivel con pendiente menor que cero a lo largo de la cual el nivel de-utilidad es constante.

Siendo la utilidad constante a lo largo de dicha curva, se demuestra, a continuación, la negatividad de la pendiente de la curva, en el plano (x_1, x_2) :

****

(23) Op. Cit., Layard & Walters, apéndice uno.
(24) Op. Cit., Cochrane & Bell, p. 118-119.
(25) Op. Cit., Cochrane & Bell, p. 123-125. Ver también: Op. Cit., Layard & Walters, p. 133 - 135. Y op. cit., Friedman , p. 56-60.

$u = u(x_1, x_2)$, diferenciando totalmente se tiene:

$$0 = \frac{\delta u}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta u}{\delta x_2} dx_2 \Rightarrow \frac{dx_2}{x_1} = - \frac{\delta u/\delta x_1}{\delta u/\delta x_2} = - \frac{u_1}{u_2}$$

$$\frac{dx_1}{dx_2} = - \frac{u_1}{u_2} < 0 \; ; \quad \text{donde:} \quad u_i = \frac{\delta u}{\delta x_i} \; .$$

Se debe recordar que la utilidad marginal de un bien, como se definió, es positiva pero decreciente, al aumentar la cantidad consumida del bien. La razón de utilidades marginales es conocida como la 'tasa marginal de sustitución' de x_1 por x_2. Esta tasa describe el monto de x_2 que necesita el individuo como compensación por la pérdida de algunas unidades de x_1, ocasionada por el aumento en el precio de x_1 (26).

2.2 RESTRICCION PRESUPUESTAL.

La restricción presupuestal se define como el locus de puntos a lo largo del cual se encuentran todas las combinaciones de bienes y servicios que el individuo puede alcanzar, en el sentido monetario, o adquirir con un gasto total fijo, y a precios constantes (27). Es decir, la restricción presupuestal describe el conjunto de oportunidades asequibles al individuo con un ingreso nominal dado.

Se supone que dicho ingreso se agota totalmente en la adquisición de bienes y/o servicios disponibles en la economía. Este supuesto es válido aún a pesar de que parte de su ingreso lo destine al ahorro; ya que, en el mediano y largo plazo, el ahorro representa un bien, en el sentido de aumentar las posibilidades de consumo futuro del ahorrador. No obstante, la introducción del ahorro como un bien de consumo involucra decisiones de consu ....

(26) Op. Cit., Cochrane & Bell, p 125-126.
(27) Op. Cit., Layard & Walters, apéndice tres. Ver también: op. cit., Friedman, p. 83-89.

mo interemporal que están fuera del contexto del estudio.

El agotamiento antes mencionado tiene razón de ser por el hecho - de que todos los bienes y/o servicios le implican al individuo costos marginales positivos.

Por consiguiente, bajo tal supuesto y la consideración de la existencia de dos bienes en la economía, se hace evidente que la restricción -- presupuestal está representada por una línea recta, en el punto (x_1, x_2) -- (28). Para el caso en que 'n' sea mayor a dos su configuración será la de - un hiperplano inclinado, mismo que describirá las posibilidades de consumo- que el individuo puede alcanzar. La posición de dicha línea está determinada por el gasto total efectuado.

Así, para 'n' igual a dos se define la restricción presupuestal - como:

$M = p_1x_1 + p_2x_2$; donde:

M: Gasto total.

p_i: Precio del i-ésimo bien.

x_i: Cantidad comprada del i-ésimo bien.

Entonces, manteniendo constante el gasto o ingreso; ya que al final ambos - deben de ser iguales; la pendiente de la restricción presupuestal estará dada por:

$M = p_1x_1 + p_2x_2$, diferenciando totalmente y manteniendo constante el gasto y los precios se tiene que:

$0 = p_1dx_1 + p_2dx_2$, entonces la pendiente de la línea será:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{p_1}{p_2} < 0$$

En consecuencia, la restricción presupuestal es una línea recta - con pendiente negativa, y que su pendiente está determinada por la razón de

****

(28) Op. Cit., Cochrane & Bell, p. 126.

precios de los bienes incluidos en la canasta de consumo.

Hasta el momento se han desarrollado dos cuerpos geométricos - separados que resumen, de alguna manera, el conocimiento con el que cuenta cada uno de los consumidores, o sociedades consumidoras, ante una toma de- decisiones de consumo. Tales aparatos se caracterizan por:

(1) La función de utilidad y la curva de indiferencia compactan los deseos o gustos que tiene cada individuo.

(2) La restricción presupuestal resume las posibilidades de consumo que posee cada consumidor con un determinado ingreso disponible.

Por medio de ambos cuerpos se expone en la siguiente sección - forma de obtener la curva de demanda individual de cada bien, que es en -- realidad el objetivo de este trabajo y que representa la finalidad de la - **Teoría del Consumidor.**

****
****

CAPITULO III. LA O P T I M I Z A C I O N.

Basados en el desarrollo del capítulo anterior se decue que el -- problema económico fundamental radica en el logro del 'mejor' uso de los re- cursos limitados de cada economía, dada la información con la que cuenta cada individuo y la sociedad misma. En la solución de tal cuestionamiento los méto dos matemáticos juegan un papel preponderante como instrumentos de apoyo eco nómico. De hecho, muchos estudios en esta rama hacen uso de dichos métodos.

Una de las aplicaciones de mayor importancia se encuentra en la - **Teoría Económica Neoclásica**; sin que con esto se quiera decir que su uso es - exclusivo; en la cual se perciben a los agentes económicos como optimizadores. En forma más específica, la teoría postula que el agente económico escoge los valores de las variables de decisión (e.g. la cantidad de consumo) que optimi zan la función objetivo (e.g. la función de utilidad). La selección de tales- valores está, por supuesto, circunscrita por diferentes limitaciones inheren tes a la situación modelada (e.g. la disponibilidad limitada del ingreso mone tario). Estas limitaciones se expresan como restricciones en el modelo matemá tico. El análisis de optimización es, entonces, usado para explicar o prede - cir el comportamiento (del consumidor en este caso).

En décadas recientes, los economistas han intentado dar una expli cación más eficiente a las complejidades del mundo real construyendo modelos- más detallados, lo cual ha provocado la invención y propagación de modelos ma temáticos más poderosos y sofisticados.

Adicionalmente, la mayor complejidad de dichos modelos se debe a- las necesidades empíricas resultantes del deseo de definir más concretamente- las variables de estudio (e.g. los bienes); práctica que puede arrojar proble mas de alta dimensión. En la mayor parte de la **Teoría Económica** es, a veces,- suficiente postular la existencia de sólo dos bienes, la estilización del mo delo debe permitir que algunos o todos los bienes sean agregados y conceptua lizados como bienes con propiedades y características similares de tal forma-

....

que no se requiera de un tratamiento individual de cada bien. Esto es, la definición de las variables de estudio y del modelo mismo 'debe poder', en algún momento, permitir la extensión y generalización a la problemática de la economía en general.

Aunque existen serios problemas en la formulación del modelo, la mayor dificultad se encuentra, generalmente, en el establecimiento de un óptimo aceptable. Si el individuo busca maximizar su utilidad, ¿cómo debe conceptualizar y medir su utilidad?. Aparentemente existe una gran polémica a este respecto. Lo que produce grandes críticas que llegan a rechazar la optimización formal en el análisis económico. Sin embargo, aún no han mostrado algún hecho de importancia que haga que tal enfoque se haga a un lado.

La **Teoría Neoclásica** supone que, fuera de la optimización, existe una serie de soluciones posibles; el trabajo del economista se reduce a la aplicación de criterios económicos relevantes para poder seleccionar la solución más deseable de entre las soluciones eficientes. Dicho punto de vista supone que 'alguien' ha hecho esas optimizaciones para producir la lista de puntos mencionada. Para los trabajos de la **Teoría Económica** este enfoque 'puede' ser totalmente satisfactorio, ya que su objetivo es establecer la naturaleza cualitativa del óptimo.

Una comparación entre la **Teoría Neoclásica** y los modelos matemáticos de programación relativa a la naturaleza de la solución óptima es que: la teoría tradicional usa modelos basados en cálculos, en los cuales se supone la no negatividad de las variables, y los requerimientos similares, se alcanzan automáticamente. Los métodos de programación en contraste, y con mayor realidad, reconocen explícitamente tales requerimientos y la solución óptima no es necesariamente una solución de 'frontera', i.e. un punto donde la no negatividad sea una restricción efectiva.

....

Para la **Teoría Neoclásica de la Utilidad** resulta de gran relevancia los resultados de la **Programación Cuasicóncava.**

El término programación cuasicóncava se aplica al caso del problema de maximización regular en el cual el maximando $f(x)$; e.g. la función de utilidad; es una función cuasicóncava y la restricción $g(x)$; e.g. la restricción presupuestal; es convexa; en ambos casos, para todos los valores no negativos de la variable x. En este caso se demuestra que un máximo local es un máximo global; además, si el maximando es estrictamente cuasicóncavo, entonces el máximo es único.

El planteamiento del problema originalmente atacado es el siguiente:

$$\text{Máx.} \quad u = u(x)$$
$$\text{sujeta a:} \quad g(x) = M = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

La solución proviene del uso del método del **Multiplicador Lagrangiano**, gracias a Lagrange, como método de optimización. Dicho multiplicador se caracteriza por introducir explícita y simultáneamente al maximando la restricción. De forma que el resultado toma en consideración todas las limitaciones antes discutidas.

En esta sección se presentan algunos conceptos y definiciones que se usarán en el desarrollo de la programación cuasicóncava que se discutirá posteriormente.

3.1 OPTIMO LOCAL Y GLOBAL.

A continuación se muestran los conceptos de máximo local y global. Asimismo se verá como de considerar a $f(x)$ como una función cuasicóncava en el sentido estricto, un máximo local es también global y es único. La exposición se basa, en primera instancia, en el ejemplo de la figura (1).

Esta función de la varibale no negativa x tiene un máximo local en el punto D. Esto es equivalente a decir que, $f(x)$ tiene el valor más grande en el punto D que el que podría alcanzar con algún otro valor de x en la vecindad de D; es decir, $f(x)$ tiene un máximo local en $x=x^*$ si:

....

$f(x^*) \geqslant f(x)$ para toda x en la vecindad 'e' de x^*, i.e. para toda x tal -- que: $x^*-e \leq x \leq x^*+e$, para algún $e > 0$ y e muy pequeño.

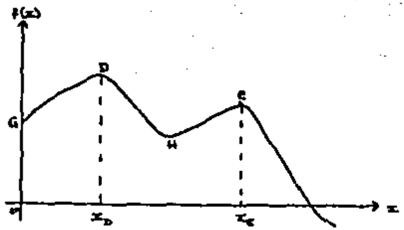

Fig. (1)

Se encuentra otro máximo local en el punto E, por supuesto, la - función decrece monotónicamente para todo $x > x_e$. Por tanto existen dos máximos locales, únicamente, viz. en D y E, y como $f(x_d) > f(x_e)$, entonces - $f(x)$ tiene un máximo global en el punto D.

De esta manera se dice que un máximo global ocurre en un máximo - local donde $f(x)$ es mayor que cualquier otro máximo local. Si dos o más máximos locales comparten esta propiedad vis-à-vis todos los otros máximos locales, entonces el máximo global no es único.

En este ejemplo, ambos máximos locales son puntos interiores. En contraste, hay un mínimo en el punto G, en la frontera, y en el punto H, -- que es interior: no hay un mínimo global finito.

Las técnicas de optimización disponibles, generalmente, tienen la propiedad de buscar un óptimo local, y si la función es tan complicada como la de la figura (1), se presenta un problema adicional al tratar de descubrir si el máximo local encontrado es también un óptimo global. Este trabajo no es trivial, ya que es muy difícil asegurar que se han encontrado todos los máximos locales y, entonces identificar cual de ellos es el máximo-global.

Afortunadamente, muchas de las funciones que aparecen en la práctica económica tienen la propiedad de tener un sólo máximo local, que por - ende debe ser un máximo global.

....

Para facilitar el análisis de estos casos se discute con mayor -- profundidad el concepto de convexidad de un conjunto.

Definición 1. Un conjunto es convexo sí para cualquier par de puntos en el- conjunto, todos los puntos del segmento lineal que une esos puntos están también en el conjunto (1).

Esta definición describe en forma inequívoca a la restricción presupuestal, que en el presente caso, como se dijo anteriormente, es una línea recta.

En el desarrollo subsecuente se asume que cada función está definida sobre un conjunto convexo; i.e. se supone que un dominio específico de la función es tomado como un conjunto convexo. El dominio específico de la- variable x, en este caso, está formado por la consideración de valores estrictamente no negativos .

definición 2. Una función $f(x)$ es estrictamnete cóncava (sobre un conjunto convexo) sí, para cualquier par de puntos en el dominio de la -- función, el segmento rectilíneo que los une se encuentra, siempre, por debajo de la función, con excepción de los puntos mismos (2).

Tal definición se expresa algebráicamente con la ayuda de la figura (2) -- la cual ejemplifica una función estrictamente cóncava: para cualquier par- de puntos A y B, correspondientes al valor x_a y x_b , respectivamente, y- para cualquier λ tal que: $0 < \lambda < 1$, la concavidad estricta requiere que:

$$f(\lambda x_a+(1- \lambda)x_b) > \lambda f(x_a)+(1- \lambda)f(x_b) \tag{3.1}$$

Donde el miembro izquierdo mide el valor de la función en el punto S, correspondiente al valor intermedio de x, y el miembro derecho es una combinación lineal convexa de los valores de la función entre los puntos A y B, y- mide la altura del punto intermedio T, que se encuentra sobre la línea recta.

****

(1) Optimization in Economics Theory, Dixit,A.K..1976,London: Oxford Univ.

(2) Ibid., capítulo 4.

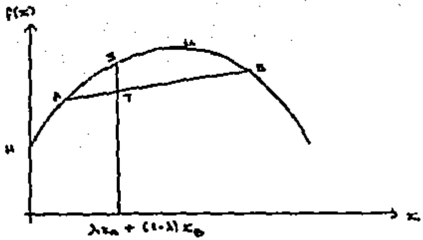

Fig (2)

Por la forma de la función de esta figura es claro que tal propiedad se cumple para cualquier par de puntos A y B, por tanto la función es estrictamente cóncava.

Se puede probar que una función estrictamente cóncava tiene un máximo local, y que tal máximo es también global. Tal hecho se ilustra en la figura (2), donde el punto M es un máximo local. El punto H es un mínimo local y, bajo el supuesto que f(x) decrece monotónicamente a la derecha de M, no existe otro óptimo local, por lo tanto M es un máximo global.

El ejemplo de la figura (2) se puede modificar para demostrar la importancia que tiene el hecho de que la función f(x) deba ser definida sobre un conjunto convexo.

Supogamos, alternativamente, que f(x) se define sobre los valores de x dados por los dominios: $0 \leq x \leq x_a$ *y* $x \geq x_b$. *El conjunto de posibilidades ya no es un conjunto convexo, por que tiene una discontinuidad entre* x_a *y* x_b, *y la combinación lineal convexa,* $\lambda x_a + (1-\lambda)x_b$, *no pertenece al conjunto. En este caso, hay un máximo local en el punto A y otro en el punto B; por lo tanto el teorema no se cumple.*

Cuando el segmento lineal cae sobre o por debajo de la función, la función es cóncava en el sentido débil. La condición algebráica es ahora una desigualdad débil:

$$f(\lambda x_a + (1-\lambda)x_b) \geq f(x_a) + (1-\lambda)f(x_b)$$

....

En tal caso existe la posibilidad de que la función sea lineal en algún rango. A pesar de que tal función cuente con algún máximo local que sea global, tal máximo no es único. Entonces la concavidad (estricta o débil) es una propiedad valiosa ya que su presencia simplifica el trabajo de buscar un máximo global.

Hay una definición correspondiente al caso opuesto. Considerando, nuevamente, una función de una sola variable:

Definición 3. Una función es estrictamente convexa sobre un conjunto convexo si, para cualquier par de puntos en el dominio de la función, el segmento lineal que los une se encuentra por encima de la función, con excepción de los mismos puntos (3).

Cabe destacarse que el término 'convexo' se aplica en dos sentidos distintos: el conjunto convexo se refiere al conjunto posible de puntos x, mientras que la convexidad de la función se refiere a la forma de la función f(x). Algebráicamente, esto es:

$$f(\lambda x_a + (1-\lambda)x_b) < \lambda f(x_a) + (1-\lambda) f(x_b) \qquad (3.2)$$

Como en el caso anterior, existe una categoría de funciones que son convexas en el sentido débil en cuyo caso la desigualdad pasa a ser una desigualdad del tipo débil.

Para una función estricta o débilmente convexa se puede demostrar que cualquier mínimo local es también global; pero sólo en el caso estricto tal mínimo es único. La figura (3) describe el caso para $x \geq 0$:

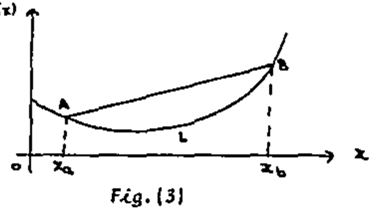

Fig. (3)

****

(4) Op. Cit., capítulo 4.

3.2 OPTIMIZACION NO RESTRINGIDA DE VARIABLES NO NEGATIVAS.

Se considera el caso de una función de una sóla variable mostrado en la figura (4). En esta figura se supone que $f(x)$ es monotónicamente creciente para todo: $x < x_a$. Entonces el máximo se alcanza en el punto A, donde se tiene que:

$$\frac{df}{dx} = 0 \tag{3.3}$$

Este ejemplo muestra que la presencia de requerimientos de no negatividad de la variable x no alteran, necesariamente, los resultados de considerar tal variable como libre de restricciones. En el caso general de 'n' variables, y bajo el supuesto de que el máximo se localiza en algun punto interior de la región factible (i.e. en algun punto donde $x_j > 0$), las condiciones necesarias de primer orden, de las que se hablará posteriormente, no se modifican.

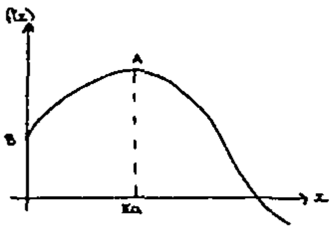

Fig. (4)

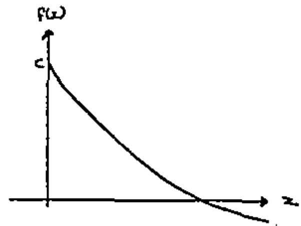

Fig. (5)

Sin embargo la posibilidad de que el máximo ocurra en un punto de esquina no puede ser descartada. Esto se muestra en la figura (5), en la cual $f(x)$ decrece monotónicamente al aumentar x. Dada la imposibilidad de -

....

tener valores negativos de la variable x, la derivada: $df/dx < 0$ en el punto C, al reducir x aumenta $f(x)$; no obstante tal reducción, como se supuso, no es permitida, por las restricciones de no negatividad de x; por lo tanto el máximo se encuentra en el punto C. Este ejemplo ilustra como la condición de la ecuación (3.3) no es una condición necesaria cuando se impone la no negatividad a la variable de estudio. En su lugar la condición para un máximo es:

$$\frac{df}{dx} \leq 0 \tag{3.4}$$

Donde la desigualdad se da cuando el máximo ocurre en algún x=0 y la igualdad cuando $x > 0$. De esta manera en todos los casos de x, $df/dx = 0$. Cuando se tengan 'n' variables, las condiciones necesarias de primer orden para un máximo serán:

$$\frac{\delta f}{\delta x_j} \leq 0 \qquad (j=1,2,\ldots,n) \tag{3.5}$$

$$x_j \frac{\delta f}{\delta x_j} = 0 \qquad (j=1,2,\ldots,n) \tag{3.6}$$

En cada una de las ecuaciones de (3.6), $\delta x_j = 0$ ó $df/dx = 0$, excepcionalmente ambas son cero; esto sucede en el caso de la figura (4) si la curva $f(x)$ fuese horizontal en el punto x=0 y descendiera después para toda $x > 0$.

En el caso general el máximo puede estar sobre la frontera especificada por alguno de los requerimientos no negativos, o dentro de la frontera especificada por otra restricción.

****

Esta caracterización del máximo - $df/dx < 0$ cuando $x_j = 0$ y -- $df/dx_j = 0$, cuando $x_j > 0$ - es parecida a la propiedad de la dualidad. En - la que el valor dual es estrictamente positivo cuando la desigualdad correspondiente del problema primal está saldada; i.e. cuando las variables de holgura y exceso son cero; y en la que el valor dual es cero cuando la desigualdad primal no está saldada; i.e. cuando las variables de holgura y exceso - no son cero.

3.3 OPTIMIZACION SUJETA A UNA RESTRICCION DE IGUALDAD.

3.3.1 SIN RESTRICCION DE SIGNOS A LAS VARIABLES:

El siguiente paso es considerar el caso donde la función no lineal $f(x)$ está restringida por una restricción de igualdad, sin limitar los valores posibles de la variable de decisión x. El problema de estudio es:

$$\text{Máx. } f = f(x) \tag{3.7}$$
$$\text{S.a. } c = g(x) \tag{3.8}$$

donde: c es una constante estrictamente mayor a cero.

La regla empleada aquí es sustraer de la restricción el lado izquierdo de forma que:

$$c - g(x) = 0 \tag{3.9}$$

Esta convención se adopta para facilitar interpretaciones futuras. El paso siguiente es el asociado con el factor de restricción λ, comúnmente conocido como el 'Multiplicador de Lagrange' o 'Multiplicador Lagrangiano'. Con - lo anterior se forma una nueva función, L; se multiplica la ecuación (3.9) - por λ, y se suma a la función original $f(x)$:

$$L = f(x) + \lambda\ (c-g(x)) \tag{3.10}$$

La función L es una función de variables x y λ que debe maximi_

....

zarse sin ninguna restricción.

Diferenciando L respecto a x y λ se tiene que las condiciones necesarias para un máximo local son:

$$\frac{\delta L}{\delta x} = \frac{\delta f}{\delta x} - \lambda \frac{\delta g}{\delta x} = 0 \qquad (3.11)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = c - g(x) = 0 \qquad (3.12)$$

Dichas condiciones son de primer orden, la igualdad a cero garantiza que el óptimo se encuentra en la frontera especificada por algun requerimiento de no negatividad.

Suponiendo, momentáneamente, que 'c' cambia en una cantidad 'dc', de la ecuación (3.10) se deduce que: $\delta L/\delta c = \lambda$, lo cual se traduce en la existencia de un impacto directo entre el cambio de la constante y el multiplicador lagrangiano ; en otras palabras, el valor óptimo del multiplicador lagrangiano mide la tasa de cambio del valor óptimo de $f(x)$ al cambiar el valor de la constante en la restricción.

Es por esta interpretación de λ como $\delta f/\delta c$ que es importante seguir la convención postulada en la derivación de la ecuación (3.9). Si esos signos son seguidos escrupulosamente, el resultado de λ siempre tendrá el signo apropiado para ser interpretado como se explicó anteriormente.

En lo relativo a la validez del 'Método del multiplicador lagrangiano', intuitivamente resulta fructífero notar que al formar la función L, la expresión añadida a $f(x)$ debe tener el valor de cero, suponiendo que los valores de x satisfacen la restricción (3.8). Así el maximizar (o minimizar si fuése el caso) la función L es equivalente a optimizar $f(x)$.

****

3.3.2 VARIABLES NO NEGATIVAS.

La técnica para manipular variables no negativas se combina con el método del multiplicador lagrangiano, con el objeto de conservar la igualdad en la restricción.

Se considera el caso de 'n' variables no negativas x que maximizen a la función $f(x)$, sujeta a 'm' restricciones distintas, es el problema generalizado de las ecuaciones (3.7) y (3.8). La función $L = L(x, \lambda)$ se forma de manera similar a la construida en la expresión (3.10).

Las condiciones necesarias de primer orden para un máximo local, como se dedujo en la sección 3.1, son:

$$\frac{\delta L}{\delta x_j} \leq 0 \tag{3.13}$$

$$x_j \frac{\delta L}{\delta x_j} = 0 \tag{3.14}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda_j} = 0 \tag{3.15}$$

conjuntamente con la condición implícita: $x \geq 0$. (3.16)

Como antes, resulta conveniente pensar que en la ecuación (3.13) $\delta L / \delta x_j = 0$ ó $x_j = 0$ (o ambos, rara vez). Se debe notar que la ecuación (3.15) es una igualdad por que los valores de las λ_i no tienen restringido el signo; es decir, las condiciones del tipo de las ecuaciones (3.13) y (3.14) son necesarias sólo para las variables con restricciones de no negatividad.

....

3.4 CONDICIONES DE KUHN-TUCKER: CUESTIONES SOBRE NECESIDAD Y SUFICIENCIA.

Se demuestra que las condiciones de primer orden para un óptimo - local (sea máximo o mínimo) son condiciones necesarias siempre que la fron_tera de la región factible no sea muy irregular o muestre un comportamiento 'enfermo'. Esta propiedad vaga se puede definir con exactitud en términos - de la 'Calificación' de la restricción. No se incluyen los detalles aqui -- por que el material se sale del contexto especificado, y por que en las a_-plicaciones económicas, que es lo que nos interesa, las 'calificaciones' de la restricción se satisfacen generalmente.

En particular, la aplicación que aqui compete, y en muchas de las aplicaciones económicas, se contemplan sólo restricciones del tipo lineal y- por lo tanto el siguiente teorema es importante (4):

TEOREMA A. Si el problema de maximización tiene una función objetivo no li_neal, mientras que la restricción es lineal, entonces la califica_ción de la restricción se satisface y las condiciones de Kuhn-Tuc_ker (apropiadas) comprenden un conjunto de condiciones para un má_ximo local.

Por supuesto que los resultados correspondientes se aplican a un- mínimo local.

Tales condiciones pueden no ser suficientes. Sin embargo, como se sugirió en la sección 3.1, hay veces en las que las condiciones de Kuhn-Tuc_ker, para un óptimo local o global, son necesarias y suficientes; en espe_-cial cuando se trata del óptimo de una función cóncava y convexa.

En sus trabajos preliminares Kuhn y Tucker demostraron un resulta_do equivalente a lo siguiente:

****

(4) Notes and Problems in Microeconomic Theory. Dixon, P.B., Bowles, S. & Kendrick, D., 1980, Am_sterdam: North-Holland Publishing Book.

TEOREMA B. En un problema de maximización no lineal, si:

(a) la función objetivo, $f(x)$, es diferenciable y débilmente cóncava para toda $x_j \geq 0$ y

(b) la función de restricción, $g(x)$, es diferenciable y débilmente convexa para toda $x_j \geq 0$.

Entonces las condiciones de Kuhn-Tucker (para un máximo) son suficientes para garantizar un máximo global.

Adicionalmente, si la calificación de la restricción se satisface, y las condiciones (a) y (b) del teorema se cumplen, entonces las condiciones de Kuhn-Tucker son condiciones necesarias y suficientes para un máximo global.

Con certeza estos resultados se emplean en el caso, especial, en que todas las restricciones sean lineales. Bajo tales circunstancias, dichas condiciones son tanto necesarias como suficientes para un óptimo global, dado que la función, $f()$, es cóncava (débilmente) si se trata de una máximización o convexa (débilmente) si fuese una minimización.

Con tales condiciones la mayoría de las aplicaciones económicas quedan justificadas y fundamentadas.

3.5 FUNCIONES

Muchas de las funciones que son importantes en la optimización económica se ejemplifican con una función en forma de campana simétrica, figura (6). Tal función está definida sobre un conjunto $0 < x < x_e$, y es un ejemplo de las funciones cuasicóncavas.

Definición 4. Una función, $f(x)$, es cuasicóncava si y sólo si:

$$f(\lambda x_a + (1-\lambda) x_b) \geq \min. (f(x_a), f(x_b)) \tag{3.17}$$

para toda $0 < \lambda < 1$, donde x_a y x_b son valores de x permitidos

****

en el rango de la función.

Como antes el miembro izquierdo mide el valor de la función en algún punto intermedio del dominio de la función. Para la cuasiconcavidad estricta la desigualdad débil se reemplaza por una desigualdad estricta.

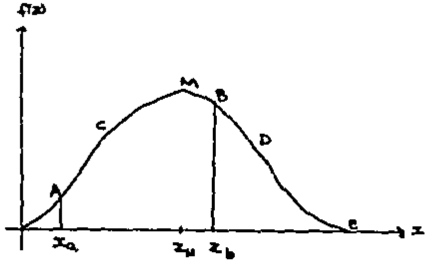

Fig. (6)

Si los puntos C y D son puntos donde el valor absoluto de la pendiente es mayor, entonces la función entre C y D es estrictamente cóncava. Esto ilustra el resultado general: una función cóncava (estrictamente) es (estrictamente) cuasicóncava, pero el contrario no se sostiene. En otras palabras, la concavidad es más restrictiva que la cuasiconcavidad.

Para la definición de la cuasiconvexidad la relación algebráica que se necesita es la siguiente:

$$f(\lambda x_a+(1-\lambda)x_b) \leq \text{máx.}\ (f(x_a),f(x_b)) \qquad (3.18)$$

****

Este caso es importante por la relevancia que tienen dichas funciones en la Teoría Neoclásica. La generalización a 'n' variables de la función de la figura (6) es usada en el estudio de la función de utilidad neoclásica. Específicamente, la parte de interés de tal curva es la porción creciente de la curva (el segmento OM de la figura (6)). Al atravesar dicha porción con algún plano horizontal se producirán las curvas de indiferencia, ya antes analizadas.

De hecho, una función cóncava (estrictamente) también arroja curvas de indiferencia pero, en la ausencia de una medida de utilidad cardinal (que determine la forma exacta de la función de utilidad), no es posible hacer a un lado el caso menos restrictivo, i.e. el caso de la función cuasicóncava.

De esta manera queda suficientemente aclarado el por que el análisis y resultados de la programación cuasicóncava son el instrumento matemático con el que se apoya la Teoría Neoclásica de la Utilidad.

****
****

CAPITULO IV. LA PROGRAMACION CUASICONCAVA.

4.1 INTRODUCCION.

El problema a tratar es la maximización de una función diferen_-ciable $f(x)$ de un vector 'n' dimensional $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ sujeta a las restricciones $g(x) \geq 0$, donde $g(x)$ es una función vector 'm' dimensional diferenciable, $g^1(x), \ldots\ldots, g^n(x)$, y $x \geq 0$. H.W. Kuhn y A.W. Tucker en su artículo sobre la programación no lineal (1) prueban que si $g(x)$ satisface lo que ellos llaman la 'Calificación de la Restricción' (Constraint Qualification) las condiciones para x^o que maximizan $f(x)$ sujeta a $g(x) \geq 0$ y $x \geq 0$ (condiciones de Kuhn-Tucker-Lagrange o KTL) son:

$$\begin{aligned} & f_x^o + \lambda^o g_x^o \leq 0 \\ & x^o(f_x^o + \lambda^o g_x^o) = 0 \\ & \lambda^o g(x^o) = 0 \\ & \lambda^o \geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(KTL)}$$

donde, en general, se denotan con subíndices a las derivadas parciales respecto al argumento indicado, y con supraíndices 'o' a la evaluación en el punto x^o. Entonces g_x^o es una matriz de (mxn) derivadas parciales de las funciones $g^j(x)$ respecto a las variables $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, evaluadas en el punto $x = x^o$; λ^o es un vector 'm' dimensional de multiplicadores de Lagrange.

Kuhn y Tucker demuestran, además, que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones cuasicóncavas, (KTL) son condiciones suficientes para un máximo restringido.

Reescribiendo las expresiones algebráicas de una función cóncava y cuasicóncava, expuestas en páginas anteriores:

(i) $f(x)$ es una función cóncava si:

$$f(\theta x + (1-\theta)x^o) \geq \theta f(x) + (1-\theta) f(x^o) \qquad (4.1)$$

....

(1) 'Non-Linear Programming', Kuhn,H.W. & Tucker,A.W., 1951, Berkley: University of California Press

para toda: $0 \leq \theta \leq 1$ y para todos los puntos x y x^{o} en la región de la función $f(x)$. Otra forma de expresar lo anterior es:

$$\frac{f(x^{o} + \theta(x-x^{o})) - f(x^{o})}{\theta} \geqslant f(x) - f(x^{o}) \qquad (4.2)$$

para toda $0 \leq \theta \leq 1$. Tomando el límite del lado izquierdo cuando θ tiende a cero, se obtiene:

$$f_{x}^{o}(x-x^{o}) + f(x^{o}) \geqslant f(x) \qquad (4.3)$$

que es una forma alternativa de definición de la concavidad para funciones diferenciables.

(ii) Una función es cuasicóncava si, para cada número real 'c' el conjunto x definido por la desigualdad:

$$f(x) \geqslant c \qquad (4.4)$$

es convexo. Esto es, $f(x)$ es cuasicóncava si:

$$f(x) \geqslant f(x^{o}) \quad \text{implica} \quad f(\theta x + (1-\theta)x^{o}) \geqslant f(x^{o}) \qquad (4.5)$$

para toda θ tal que: $0 \leq \theta \leq 1$. Ahora, para cualquier x que satisfaga la ecuación (4.5), sea:

$$F(\theta) = f(\theta x + (1-\theta)x^{o}) \geqslant f(x^{o}) = F(0) \qquad (4.6)$$

por lo tanto $F'(\theta) \geqslant 0$. Entonces diferenciando $F(\theta)$ y dejando que $\theta = 0$ se tiene que:

$$f(x) \geqslant f(x^{o}) \quad \text{implica} \quad f_{x}^{o}(x-x^{o}) \geqslant 0 \qquad (4.7)$$

para funciones cuasicóncavas diferenciables (2).

Al hablar de una función cuasicóncava, se supone que algún dominio específico de la función es tomado como un conjunto convexo, como se mencionó en el capítulo anterior. De esta forma la función cuasicóncava se define para valores no negativos de las variables x_i. Por lo tanto, una función que es cuasicóncava sobre un dominio de definición convexo no puede ser extendida a todo el espacio de definición. En adelante se conside-

****

(2) Analytical Geometry. Wold, A.A., 1977. London: London School of Economics Press. Cap. 6.

ran funciones cuasicóncavas de variables no negativas.

En términos de la teoría económica, una función cóncava es aquella que satisface las condiciones de segundo orden para un máximo:

$$d^2f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{x_i} f_{x_j} dx_i dx_j \leq 0 \qquad (4.8)$$

Como la cuasiconcavidad es una restricción débil no tiene porque cumplir con la ecuación (4.8).

Por otro lado, una función es cuasicóncava si muestra una tasa marginal de sustitución decreciente si $f_x > 0$, ó una tasa marginal de transformación creciente si $f_x < 0$, entre cualquier par de valores o combinación de valores.

Si $f(x)$ es cuasicóncava entonces: $(-1)^r D_r \geq 0$, para $r = 1,2,\ldots$ $\ldots,n$ y para toda x, donde D_r es el determinante horlado:

$$D_r = \begin{vmatrix} 0 & f_{x_1} & \cdots & f_{x_r} \\ f_{x_1} & f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_r} & f_{x_rx_1} & \cdots & f_{x_rx_r} \end{vmatrix} \qquad (4.9)$$

Además, una condición suficiente para que $f(x)$ sea cuasicóncava para $x \geq 0$, es que D_r tenga el signo: $(-1)^r$, para toda x y para toda $r=1,$ $2,\ldots,n$. Este hecho es usado, frecuentemente, en la literatura de la función de utilidad, pero falta aún la prueba que parte de una función cuasicóncavo, demostración que se desarrolla más adelante.

Se buscan condiciones suficientes para $x^o \geq 0$ que maximizen $f(x)$

....

sujeta a $g(x) \geqslant 0$, donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones cuasicóncavas diferenciables. Debido a que es inválido decir que las condiciones (KTL), por sí solas, son condiciones suficientes para la existencia de un máximo restringido. Posteriormente, se presenta una condición sencilla sobre las restricciones cuasicóncavas que de ser satisfecha implicaría, en consecuencia, que la 'Calificación' de la restricción se cumple y por lo tanto las condiciones (KTL) serían necesarias para un máximo global.

4.2 CONDICIONES SUFICIENTES PARA UN MAXIMO RESTRINGIDO.

A continuación se encuentran dos teoremas, con sus demostraciones respectivas, basados en la demostración, desarrollo y resulatdos de Slater (3).

Se define una variable 'relevante' como aquella variable que puede tomar valores mayores a cero; sin violar, necesariamente, sus restricciones. Formalmente, x_{io} es una variable relevante si existe algún punto en el conjunto restringido, i.e. el dominio de la variable x se restringe a los reales positivos, x^* para el cual $x_{io} \geqslant 0$.

Se utiliza este tipo de variables ya que al ser interpretadas, en la aplicación económica, como la cantidad del bien a consumir, y dado el supuesto de la no especialidad en el consumo, debe ser claro que dicha cantidad no puede ser negativa ni cero.

TEOREMA 1. Sea $f(x)$ una función cuasicóncava diferenciable de un vector 'm' dimensional x, y sea $g(x)$ una función vector cóncava 'm' dimensional, ambas definidas para $x \geqslant 0$. Si x^o y λ^o satisfacen (KTL), y suponiendo que al menos una de las siguientes condiciones se satisface:

****

(3) 'Lagrange Multiplier Revisited: A Contribution to Non-Linear Programming', Slater, M., 1950, Cowles Comission Discussion Paper, Math. 403.

(a) $f^o_{x_{io}} < 0$ para al menos una variable x_0 ;

(b) $f^o_{x_{i1}} > 0$ para alguna variable relevante x_{io} ;

(c) $f^o_x \neq 0$ y $f(x)$ dos veces diferenciable en la vecindad de x - (4);

(d) $f(x)$ es cóncava.

Entonces x^o maximiza $f(x)$ sujeta a la restricción $g(x) \geq 0$, -- $x \geq 0$.

Sólo una de estas cuatro condiciones -y pueden haber otras- se - necesita cumplir para que x^o maximize a $f(x)$ sujeta a las restricciones, - si (KTL) se alcanzan en el mismo punto x^o . La condición (b) será satisfe_ cha si $x^o_{i1} f^o_{x_{i1}} > 0$, si alguna $f^o_{x_{io}} > 0$ y todas las x_{io} son relevantes -- (caso usual en la teoría económica) ó si $f^o_x > 0$ y alguna x_0 es relevante.- Si ninguna x_{io} es relevante el problema es trivial. De las condiciones (a) y (b) se sigue que $f^o_x \neq 0$ es suficiente si todas las x_i son relevantes.

Tal vez estas condiciones puedan comprenderse mejor si se consi_ deran las condiciones que debe satisfacer $f(x)$ si el teorema no se cumplie_ se. Primero, de la condición (d), $f(x)$ debe ser una función cuasicóncava- que no sea cóncava; de (a), $f^o_x \geq 0$; de (b) $f^o_x = 0$, para todas las varia_ - bles relevantes. Entonces de la condición (c) se deduce que $f^o_x = 0$ ó --- $f^o_{x_i} = 0$ para todas las variables relevantes, y $f(x)$ no es dos veces dife_- renciable. Por lo tanto, las condiciones (KTL) no serán condiciones sufi_- cientes.

....

(4) Esto es, todas las derivadas parciales de segundo orden de $f(x)$ existen en x^o, aunque — pueden ser cero.

DEMOSTRACION.

Se usa la siguiente identidad:

$$f_x^o(x^1 - x^o) = (x^1 - x^o)(f_x^o + \lambda^o g_x^o) - \lambda^o g_x^o(x^1 - x^o) \qquad (4.10)$$

Si x^o satisface (KTL) y x^1 está en el conjunto restringido, el primer término del lado derecho es no positivo; el segundo término, del mismo lado, es también no positivo, bajo estas condiciones. Si $\lambda_j^o = 0$, $g_x^j = 0$ y el hecho de que x^1 esté en el conjunto restringido, entonces: $g^j(x^1) \geq 0$ implica $g^j(x^1) \geq g^j(x^o)$ ó $g_{x_o}^j(x^1 - x^o) \geq 0$. Por lo tanto, para $f(x)$ y $g(x)$ cuasicóncavas:

$$g(x^1) \geq 0,\ x^1 \geq 0 \quad \text{implica } f_x^o(x^1 - x^o) \leq 0 \qquad (4.11)$$

si x^o satisface (KTL).

(a) $f_{x_{io}}^o < 0$ para al menos una variable x_{io} .

Sea h el vector unitario, canónico, en la i-ésima dirección (5). Sea $x^2 = x^o + h$, entonces:

$$f_x(x^2 - x^o) = f^o h = f_{x_{io}}^o < 0\ ,\quad x^2 \geq 0 \qquad (4.12)$$

Para cualquier x^1 en el conjunto restringido sea:

$$x^1(\theta) = (1-\theta)x^1 + \theta x^2 \qquad (4.13a)$$

$$x^o(\theta) = (1-\theta)x^o + \theta x^2 \qquad (4.13b)$$

entonces apartir de la ecuación (4.6):

$$f_x^o(x^o(\theta) - x^o) = f_x((1-\theta)x^o + \theta x^2 - x^o)$$

$$f_x^o(x^o(\theta) - x^o) = \theta f_x(x^2 - x^o) < 0;\ \text{para } \theta > 0 \qquad (4.14)$$

$$f_x^o(x^1(\theta) - x^o(\theta)) = f_x((1-\theta)(x^1 - x^o))$$

$$f_x^o(x^1(\theta) - x^o(\theta)) = (1-\theta)f_x^o(x^1 - x^o) \leq 0;\ \ \text{para } \theta \leq 1 \qquad (4.15)$$

sumando (4.14) y (4.15) se tiene:

....

(5) h es el vector unitario en, e.g. la dirección de x_2 si $h=(0,1,0,\ldots,0)$.

$$f_x^o(x^1(\theta) - x^o) < 0; \text{ para } 0 < \theta \leq 1 \qquad (4.16)$$

de acuerdo con la ecuación (4.7) esto es posible si:

$$f(x^1(\theta)) < f(x^o)$$

LQQD

(b) $f^o_{x_{i1}} > 0$ para alguna variable relevante x_{i1}.

Si se excluye el caso anterior, $x^o f^o_x > 0$ y (b) son equivalentes. Claramente, $x^o f^o_x > 0$ implica que (b) se satisface. Para el caso contrario, notando que por la ecuación (4.11):

$$f^o_x x^1 \leq f^o_x x^o \qquad (4.17)$$

para toda x^1 en el conjunto restringido. Excluyendo (a):

$$f^o_x \geqslant 0 \qquad (4.18)$$

Pero (b) implica que para alguna x^* en el conjunto restringido y para algún i_o, $f^o_{x_{io}} > 0$ y $x^*_{io} > 0$, que aunados con (4.18) y la no negatividad de x^*, implican que: $f^o_x\, x^* > 0$. Si $x\ x^*$ en (4.17) entonces:

$$f^o_x\, x^o > 0.$$

Ahora, si $x^2 = 0$, aún se cumple la ecuación (4.12), y el resto de los argumentos usados para demostrar (a) siguen siendo válidos.

(c) $f^o_x \not\leq 0$ y $f(x)$ es dos veces diferenciables en la vecindad de x^o.

Partiendo al vector x^o en dos subvectores y^o y z^o correspondien- a las variables relevantes y no relevantes respectivamente. Excluyendo los dos casos ya probados, y suponiendo que $f^o_x \not\leq 0$ se tiene lo siguiente:

$$f^o_y = 0,\ f^o_z \geqslant 0,\ f^o_{z_{io}} > 0, \text{ para algún } z_{io} \qquad (4.19)$$

Por la definición de una variable no relevante, $z^o = 0$ y $z^1 = 0$, para toda $x^1 = (y^1, z^1)$ en el conjunto restringido. Entonces, para pro_

....

bar el teorema es suficiente demostrar que:

$$f(y^{\circ},0) \geq f(y^{1},0) \quad \text{para toda } y^{1} \geq 0 \qquad (4.20)$$

Se define la función:

$$\phi(u,v) = f((1-u)y^{\circ} + uy^{1} \; , \; v\bar{z}) - f(y^{\circ},) \qquad (4.20)$$

para: $0 \leq u \leq 1$ y $v \geq 0$, para cualquier $y^{1} \geq 0$ y $\bar{z} \geq 0$, tal que --- $\bar{z}_{io} > 0$. Como esencialmente esta función es $f(x)$ con el rango de variación restringido a un subconjunto convexo de variables no negativas, - $\phi(u,v)$ es cuasicóncava, entonces:

$$\phi(0,0) = 0 \qquad (4.21)$$

$$\phi_{u}(0,0) = f_{y}^{\circ}(y^{1} - y^{\circ}) = 0 \qquad (4.22)$$

$$\text{y} \quad \phi_{v}(0,0) = f_{\bar{z}}^{\circ}\,\bar{z} > 0 \qquad (4.23)$$

Se quiere demostrar que $\phi(1,0) < 0$, ó lo que es lo mismo probar- que $\phi(1,0) > 0$ no se mantiene. Para hacer esto, primero se establece- el hecho que en una vecindad lo suficientemente cercana a cero, $\phi(u,0)$ es mayor, menor o igual a cero (pero ninguna combinación de ellas). Entonces se demuestra que: $\phi(u,0) = 0$ y $\phi(u,0) < 0$ en una vecindad de - cero son incompatibles con $\phi(1,0) > 0$ mientras que $\phi(u,0) > 0$ contradice la hipótesis del teorema.

Primero si para alguna $\bar{u} > 0$, $\phi(\bar{u},0) \geq 0$, entonces por la definición de la cuasiconcavidad, ecuación (4.5), y por la ecuación (4.21),- $\phi(u,0) \geq 0$, para toda u tal que: $0 \leq u \leq \bar{u}$. Por lo tanto $\phi(u,0) \geq 0$ ó $\phi(u,0) < 0$ para toda u en el intervalo. Si $\phi(u,0) \geq 0$, o bien existe - alguna secuencia de puntos u_{n} que se aproximan a cero para los cuales- $\phi(u,0) > 0$, o bien no existen. Si no existen, $\phi(u,0) = 0$ para $u > 0$, - suficientemente pequeño. Si existen entonces, por la ecuación (4.5), - $\phi(u,0) > 0$ en el intervalo entre los puntos en la secuencia, y por lo tanto $\phi(u,0) > 0$ para $u > 0$ y u muy pequeño. De esta manera, ó -- $\phi(u,0) > 0$ ó $\phi(u,0) = 0$ ó $\phi(u,0) < 0$ en una vecindad de $u = 0$.

Es claro, por la ecuación (4.5), que si $\phi(1,0) > 0$, $\phi(u,0) > 0$ -- para toda u en el intervalo $[0,1]$, y $\phi(u,0)$ no puede ser negativa.

Ahora, suponiendo que $\phi(u,0) = 0$ en la vecindad de cero, si -- ....

$f(1,0) > 0$ se debe tener:

$$f(u,0) = 0 \qquad 0 \leq u \leq u^* \tag{4.24a}$$

$$f(u,0) > 0 \qquad u^* < u \leq 1 \tag{4.24b}$$

donde $u^* > 0$. Como por (4.23) $f_v(0,0) > 0$, existe una solución, $u(v)$,- de la ecuación:

$$f(u(v),0) = f(0,v) \tag{4.25}$$

donde $u(v) \geq u^*$, y v muy cercana a cero. La solución puede no ser única, pero no interesa. En cualquier caso:

$$\lim_{v \to 0} u(v) = u^* \tag{4.26}$$

sea: $\theta = 1 - \dfrac{u^*}{u(v)}$, se forma una combinación de puntos $(u(v),0)$ y -- $(0,v)$ con ponderaciones $(1-\theta)$ y θ respectivamente entonces, las ecuaciones (4.7) y (4.25) implican:

$$f((1-\theta)u(v),\theta v) = f(u^*,\theta v) \geq f(0,v) \tag{4.27}$$

por el teorema de Roy (teorema del punto medio) existe:

$$f_v(u^*,v^*) = \frac{f(u^*,\theta v) - f(u^*,0)}{\theta v} \tag{4.28}$$

para algun v^* en el intervalo: $0 \leq v^* \leq \theta v$. Pero $f(u^*,0) = 0$, por -- (4.24), de forma que (4.27) y (4.28) implican:

$$f_v(u^*,v^*) \geq \frac{1}{\theta} \quad \frac{f(0,v)}{v} \tag{4.29}$$

Tomando el límite de ambos lados cuando v se aproxima a cero. -- Por (4.26), θ se acerca a cero, lo mismo que v. $f(0,v)/v$ se aproxima a $f_v(0,0)$ que es positiva. Por lo tanto el lado derecho tiende al infinito. Como f_v es diferenciable por hipótesis, es continua, entonces el lado izquierdo se acerca a $f_v(u^*,0)$ que es finita. Por lo tanto, la hipótesis produce una contradicción, y $f(u,0)$, para $u > 0$, y $f(1,0) > 0$

....

no son compatibles.

Finalmente, suponiendo que $\phi(u,0) > 0$ para $u > 0$, pequeño. Definiendo $u(v)$ como en la ecuación (4.25):

$$\lim_{v \to 0} u(v) = 0 \tag{4.30}$$

Considerando que $\phi(u,v)$ se encuentra sobre la línea que une los puntos $(0,v)$ y $(u(v),0)$. Como $\phi(u,v)$ es cuasicóncava, su valor a lo largo de esa línea debe ser mayor o igual que su valor en los puntos extremos. Por consiguiente, la derivada direccional de $\phi(u,v)$ en $(0,v)$ en la dirección $(u(v),0)$ debe ser negativa. Es decir (6):

$$u(v)\ \phi_u\ (o,v) - v\phi_v(0,v) \geq\ 0 \tag{4.31}$$

Reexpresando la ecuación anterior:

$$u(v)\ \frac{\phi_u(0,v)}{v}\ \geq\ \phi_v\ (0,v) \tag{4.32}$$

tomando el límite cuando v, y por tanto $u(v)$, tiende a cero, se obtiene que: $\phi_v(0,0) > 0$ del lado derecho de la expresión. En el lado izquierdo, el límite de $\phi_u(0,v)/v$ es: $\phi_{uv}(0,0)$. La existencia de esta derivada es una de las hipótesis del teorema. El límite del lado izquierdo es cero, lo que es una contradicción. Entonces: $\phi(u,v) > 0$ para $u > 0$, muy pequeña, contradice la hipótesis del teorema, y la parte (c) queda demostrada.

(d) $f(x)$ es cóncava (7).

Las ecuaciones (4.3) y (4.11) implican que:
$f(x^o) \geq f(x^1)$ para toda $x^1 \geq 0$, $g(x^1) \geq 0$. Por lo tanto $f(x)$ es cóncava.

Esto completa la demostración del teorema.

****

(6) Es una aplicación de la ecuación (4.7) a $\phi(u,v)$.
(7) Es un resultado más general que el teorema de Kuhn-Tucker por que los componentes de $g(x)$ se asume que son cuasiconvexos más que cóncavos.

4.3 CONDICIONES NECESARIAS PARA UN MAXIMO RESTRINGIDO.

Kuhn y Tucker demostraron que (KTL) son condiciones necesarias - para un máximo restringido suponiendo que la función de restricción satisface la 'Calificación' de la restricción (8). En el establecimiento de e- sas condiciones, se define una 'trayectoria contenida' (contained path) en la dirección: $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots\ldots\ldots, e_n)$ como una función vector $\vartheta(\theta)$, definida para la variable real $\theta \geq 0$ en un intervalo que comienza en $\theta=0$, cu- yos valores son puntos del conjunto restringido, y es diferenciable en $\theta=0$ con: $\vartheta'(\theta)=\mathcal{E}$. La 'Calificación' de la restricción entonces requiere que - para alguna x^o en el conjunto restringido, exista una 'trayectoria contenida' con $\vartheta(0)=x^o$ en cualquier dirección $\mathcal{E}$ que satisfaga las condiciones:

$$\text{Si } g^j(x^o) = 0 \quad \text{entonces } g_x^{j\,o}\mathcal{E} \geq 0 \tag{4.33}$$

$$\text{Si } x_i^o = 0 \quad \text{entonces } \mathcal{E}_1 = 0 \tag{4.34}$$

Para comprender el significado de estas condiciones se considera cualquier restricción, $g^j(x) \geq 0$, efectiva en x^o, el hiperplano tangente: $g_x^{j\,o}(x-x^o)=0$, luego se divide el espacio en dos espacios medios (dado que - $g_x^{j\,o} \neq 0$), uno de esos espacios medios contiene al conjunto restringido. Entonces la dirección que satisface (4.33) debe apuntar sobre o a lo largo - de la frontera de ese espacio medio, un fundamento similar se aplica a las restricciones no negativas efectivas. Por lo tanto la 'Calificación' de la restricción requiere que para toda dirección desde x^o apunte sobre o a lo largo de la frontera del espacio medio apropiado para cada restricción e- fectiva, exista algún camino que empiece en x^o en la dirección $\mathcal{E}$ con to- dos sus puntos en alguna vecindad de x^o, en el conjunto restringido. Como Kuhn y Tucker demostraron, la 'calificación' de la restricción está diseñada para quitar singularidades a la frontera tales como cúspides puntiagu - ....

(8) Op. Cit., Kuhn & Tucker, p. 483.

das en la frontera del conjunto restringido en las que pueden haber λ que satisfacen (KTL) que no deberían existir.

Arrow et al en su artículo de 1971 (9), estudiaron algunas condiciones sencillas que al satisfacerse, implican que la 'calificación' de la restricción se cumple. Una de tales condiciones es que $g(x)$ sea lineal, como en el presente caso. Otra es que $g(x)$ sea cóncava y para algun $x^* \geqslant 0$, $g(x^*) > 0$; es decir, que cada coordenada sea positiva. Si la restricción $g(x)$ viene de un problema de análisis de actividad esta condición significa que es posible reducir todas las cantidades inicilaes de los bienes primarios y aún producir cantidades positivas de los bienes intermedios y finales.

Como se está interesado en las restricciones cuasicóncavas, se generaliza la condición anterior, de la siguiente manera:

Teorema 2. Sea $g(x)$ una función vector 'm' dimensional cuasicóncava diferenciable. Sea $g(x^*) > 0$ para algún $x^* \geqslant 0$, y para cada j sea:

(a) $g^j(x)$ cóncava ó

(b) para cada x° en el conjunto restringido, $g^j_{x^\circ} \neq 0$.

Entonces $g(x)$ satisface la 'calificación' de la restricción.

Por lo tanto, si x° maximiza cualquier función diferenciable $f(x)$ sujeta a $g(x) > 0$, las condiciones (KTL) son condiciones necesarias y suficientes para un máximo restringido.

****

(9) 'Constraint Qualification in Maximization Problem'. Arrow, K.J., Hurwichs, L. & Uzawa, H. 1971. Naval Research Logistic Quarterly.

Si las hipótesis de los teoremas 1 y 2 se cumplen, conjuntamente, (KTL) son condiciones suficientes y necesarias para un máximo restringido.

4.4 APLICACION A LA DEMANDA DEL CONSUMIDOR.

La propiedad fundamental de la función de utilidad en la Teoría de la Demanda del Consumidor es que las curvas de indiferencia definen un conjunto convexo o bien una tasa marginal de sustitución decreciente. Entonces la propiedad mínima de todas las funciones de utilidad es la cuasiconcavidad. Las proposiciones de tal teoría son una consecuencia directa de tal propiedad sin apelar a determinantes horlados de derivadas parciales, transformaciones monotónicas, etc..

Si la función de utilidad, $u(x)$, es una función cuasicóncava y se supone la no saciedad en el consumo, es decir: $u^o_{x_i} > 0$, para alguna x_i. Entonces las condiciones de primer orden, usuales, son necesarias y suficientes para un máximo restringido. Permitiendo que x^o satisfaga las condiciones:

$$u^o_{x_i} - \lambda^o p_{x_i} \leq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{4.35}$$

$$x^o_i (u_{x_i} - \lambda p_{x_i}) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{4.36}$$

$$\lambda^o (M - \sum_{i=1}^{n} x^o_i p_{x_i}) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{4.37}$$

donde: $p_{x_i} > 0$, es el precio de una unidad del bien x_i y M es el total del gasto, o ingreso por lo que se dijo anteriormente, del consumidor.- Entonces x^o maximiza $f(x)$ sujeta a la restricción:

....

$$M - \sum_{i=1}^{n} x_i p_{x_i} \geq 0 \quad y \quad x_i \geq 0$$

Además, si $\lambda^\circ > 0$, y bajo el supuesto de no saciedad, se asegura la existencia de algun x° que minimiza los costos de obtener $u(x^\circ)$, porque maximiza: $-\sum_{i=1}^{n} x_i p_{x_i}$ sujeta a la restricción: $u(x) - u(x^\circ) \geq 0$ y $x \geq 0$ (10).

Por lo tanto las condiciones (KTL) empleadas en la solución del cuestionamiento planteado en el desarrollo de la **Teoría de la Utilidad** son condiciones necesarias y suficientes. Adicionalmente, garantizan la existencia de una relación biunívoca entre el problema primal (originalmente planteado) expresado como:

$$\begin{aligned} &\text{Máx.} \quad u = u(x) \\ &\text{s.a.} \quad M = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{x_i} \geq 0 \end{aligned}$$

y su correspodiente dual:

$$\begin{aligned} &\text{Min.} \quad M = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{x_i} \\ &\text{s.a.} \quad u = u(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Con esto el resultado obtenido por cualquiera de los dos enfoques describe inequívocamente el valor óptimo de la problemática planteada en el capítulo dos.

****

(10) $u^\circ_{x_{io}} > 0$, $p_{x_{io}} > 0$ y $u^\circ_{x_{io}} - \lambda^\circ p_{x_{io}} \leq 0$ implican $\lambda^\circ > 0$. Las primeras dos ecuaciones de (KTL) para el segundo problema de maximización son: $-p_{x_i} + \mu^\circ u_{x_i} \leq 0$ y $x_i^\circ(-p_{x_i} + \mu^\circ u^\circ_{x_i}) = 0$, ó bien (4.35) a (4.37) con: $\mu^\circ = 1/\lambda^\circ$.

Sin embargo aunque ambos procedimientos matemáticos arrojen los mismos resultados económicamente tienen una interpretación distinta.

En el contexto econométrico resulta de mayor utilidad, y sencillez, la estimación de la demanda por medio del enfoque dual del problema. Esto es, básicamente, debido a la transparecnia y facilidad del procedimiento en la manipulación de los datos.

Hasta aquí se han desarrollado las condiciones y justificaciones que han formado el instrumento de apoyo en el desenvolvimiento de la ***Teoría de la Demanda del Consumidor.*** *Asimismo, se ha presentado el fundamento matemático que da validez a las aplicaciones económicas, fundamento que falta unir a tal teoría. Sólo resta dar el procedimiento por medio del cual se calcula la demanda, mismo con el que se concluye este trabajo.*

****
****

CAPITULO V. LA TEORIA DE LA DEMANDA.

La hipótesis fundamental, como se ha venido diciendo, es que el consumidor es racional y por tanto escoge, siempre, la canasta más preferida del conjunto de alternativas factibles.

En el problema de maximización, básico, el conjunto de alternativas factibles es, únicamente, el conjunto de todas las canastas que el consumidor, en un momento determinado del tiempo, puede comprar. Sea M el monto, fijo, de ingreso disponible para el individuo, sea X el conjunto de canastas disponibles en la economía y sea $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ el vector de precios de los bienes $1, 2, \ldots, n$, respectivamente. El conjunto de canastas que el individuo puede adquirir con un ingreso fijo y con el precio de cada bien constante, i.e. la restricción presupuestal, está dado por:

$$B = \left\{ \bar{x} \in X / \bar{p}\bar{x} \leq M \right\} \tag{5.1}$$

El problema de maximización de las preferencias se puede expresar como:

$$\begin{aligned} &\text{Máx.} \quad u = u(x) \\ &\text{s.a.} \quad \bar{p}\bar{x} \leq M \quad \text{ó} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq M \\ &\qquad\quad x \in X \end{aligned} \tag{5.2}$$

Cabe destacar algunos aspectos básicos del problema. Primero en general, existe una canasta que maximiza la utilidad siempre que $p_i > 0$ y $M > 0$. Suponiendo que, efectivamente, el precio de todos los bienes es positivo la restricción presupuestal es un conjunto compacto-regular; si algún precio fuese cero, el consumidor podría consumir una cantidad ilimitada del bien correspondiente, pero bajo el supuesto de la no especialidad en el consumo este caso deja de tener importancia. Segundo, la elección maximizadora, $\bar{x}^*$, es independiente del tipo de función de utilidad seleccionada para representar a las preferencias. Esto

....

es por que la selección de $\bar{x}^*$ debe ser tal que $\bar{x}^*$ cumpla con la siguiente propiedad: $\bar{x}^* \succsim \bar{x}$ en B, entonces cualquier función de utilidad que represente los gustos debe tomar a $\bar{x}^*$ como un máximo restringido. Tercero, si se multiplican todos los precios de los bienes e ingreso por alguna constante positiva la restricción presupuestal no se altera, y por lo tanto la elección óptima permanece. Es decir, la elección óptima es 'homogénea de grado cero' en precios e ingreso.

Bajo ciertos supuestos sobre la regularidad de las preferencias, se puede investigar más a fondo el comportamiento maximizador del consumidor. Por ejemplo, suponiendo que las preferencias satisfacen localmente, la no saciedad; se puede tener una $\bar{x}^*$ tal que $\bar{p}\bar{x}^* < M$?, imaginando que este sea el caso, entonces: como $\bar{x}^*$ cuesta menos que M, estrictamente, toda canasta en X cercana a $\bar{x}^*$, también, debe costar menos que M y por tanto debe ser factible. Sin embargo, de acuerdo a la no saciedad en el consumo, una canasta $\bar{x}^*$ que maximize la utilidad del consumidor debe satisfacer con la igualdad a la restricción presupuestal. En consecuencia, el problema del consumidor, en realidad, se expresa como:

$$\begin{aligned} v(\bar{p},M) &= \text{máx.} \quad u = u(\bar{x}) \\ &\quad\; \text{s.a.} \quad \bar{p}\bar{x} = M \end{aligned} \tag{5.3}$$

La función $v(\bar{p},M)$ que da la respuesta al problema del consumidor -estos es, la utilidad máxima alcanzable dados los precios e ingreso- es conocida como la 'función de utilidad indirecta' (1). Y el valor de $\bar{x}$ representa la 'cantidad demandada' por el consumidor; la cual expresa la cantidad de cada bien que el consumidor desea consumir a un nivel dado de precios e ingreso. La función que relaciona los precios e ingreso con dicha canasta es conocida como la 'función de demanda' del consumidor, comúnmente llamada Demanda de Marshall, o demanda ordinaria. Tal demanda será denotada por: $x(\bar{p},M)$.

****

(1) Microeconomics, Layard, P.R.G. & Walters, A.A., 1978, Great Britain: McGraw-Hill Book Ltd., Capítulo 5.

La función de demanda del consumidor es homogénea de grado cero en $(\bar{p}, M)$, por que al multiplicar todos los precios e ingreso por algun número positivo no cambia el conjunto presupuestal y por lo tanto no se altera la solución del problema.

Con el problema (5.3) se forma la función de Lagrange, la_-- grangiano, dados los precios e ingreso:

$$L = u(\bar{x}) + \lambda \left(M - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \tag{5.4}$$

con las siguientes condiciones de primer orden:

$$\frac{\delta L}{\delta x_i} = \frac{\delta u(\bar{x})}{\delta x_i} - \lambda p_i = 0 \quad i=1,2,\ldots,n \tag{5.5a}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = M - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 0 \tag{5.5b}$$

de (5.5a) se obtiene:

$$\frac{\delta L}{\delta x_j} = \frac{\delta u(\bar{x})}{\delta x_j} - \lambda p_j = 0 \quad \begin{array}{l} j=1,2,\ldots,n \\ j \neq i \end{array} \tag{5.5c}$$

entonces de (5.5a) y (5.5c) se tiene:

$$\frac{\delta u(\bar{x})}{\delta x_i} = \lambda p_i \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta u(\bar{x}) / \delta x_i}{p_i} = \lambda \tag{5.6a}$$

$$\frac{\delta u(\bar{x})}{\delta x_j} = \lambda p_j \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta u(\bar{x}) / \delta x_j}{p_j} = \lambda \tag{5.6b}$$

sea: $u_i = \dfrac{\delta u(\bar{x})}{\delta x_i}$ y $u_j = \dfrac{\delta u(\bar{x})}{\delta x_j}$.

reexpresando (5.6a) y (5.6b):

$$\frac{u_i}{p_i} = \lambda \; ; \quad \frac{u_j}{p_j} = \lambda$$

. . . .

por lo tanto las condiciones de primer orden son:

$$\frac{u_i}{u_j} = \frac{p_i}{p_j} \qquad \text{para: } i,j = 1,2,\ldots,n \quad i \neq j \tag{5.7}$$

La fracción del lado izquierdo es la tasa marginal de sustitución entre el i-ésimo y el j-ésimo bien, la pendiente de la curva de indiferencia. La razón del lado derecho describe la tasa marginal de -- sustitución económica entre el bien 'i' y el bien 'j', la pendiente de la restricción presupuestal. La maximización implica, pues, que estos - dos tasas deben igualarse en el punto óptimo Si este no fuese el caso - debe existir, entonces, alguna otra canasta que haga que esta condición se satisfaga.

La figura (7) clarifica, intuitivamente, esta condición.

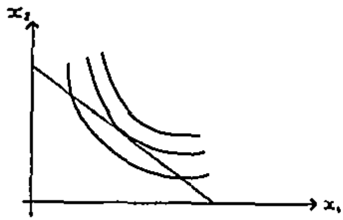

Fig. (7)

La línea de presupuesto está dada por:

$$\left\{ x \in X / \ p_1 x_1 + p_2 x_2 = M \right\} \tag{5.8}$$

$x_2 = \frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$. Entonces, la recta tiene pendiente: $-p_1/p_2$ e intercepción vertical: M/p_2 . El consumidor desea encontrar el punto sobre su restricción presupuestal que alcance la mayor utilidad posible. Dicho punto debe satisfacer la condición de tangencia (5.7): la pendiente de la curva de indiferencia iguala a la pendiente de la restricción presupuestal en el óptimo.

Finalmente, se establece la condición (5.7) en términos vectoriales: sea $\bar{x}^*$ la elección óptima y $d\bar{x}$ una perturbación de $\bar{x}^*$ que satisfaga la restricción presupuestal. Por lo tanto:

$$\bar{p}(\bar{x}^* \pm d\bar{x}) = M \quad \text{implica:} \quad \bar{p}d\bar{x} = 0$$

En otras palabras, $d\bar{x}$ debe ser un vector ortogonal a $\bar{p}$. Para cualquier perturbación $d\bar{x}$ la utilidad no puede alterarse, sino $\bar{x}^*$ no podría ser el óptimo. Es decir:

$$D\, u(\bar{x}^*)\, d\bar{x} = 0$$

De manera que las condiciones de primer orden vectorialmente son:

$$D\, u(\bar{x}^*) = \lambda\, \bar{p}$$

donde: D es el operador de derivación, y

λ es el multiplicador lagrangiano, ya descrito.

Las condiciones de segundo orden se expresan como:

$$\bar{h}\, D^2\, u(\bar{x}^*)\, \bar{h} \leq 0; \text{ para todo vector } \bar{h} \text{ tal que: } \bar{p}\bar{h} = 0.$$

Algebráicamente esto significa que el Hessiano de la función de utilidad es negativo semidefinido, para todo vector $\bar{h}$ ortogonal al vector de precios $\bar{p}$. Lo cual es una consecuencia del supuesto de cuasiconcavidad de la función de utilidad $u(x)$; esta expresión es equivalente a la condición (4.9). Geométricamente la condición significa que el conjunto del contorno superior debe encontrarse arriba del hiperplano tangente presupuestal en el óptimo $\bar{x}^*$.

****

Para facilitar la notación vectorial se usa en caso de las desigualdades el signo doble de la desigualdad correspondiente, e.g. $\bar{p}^1 \gg \bar{p}^2$ implica que $p_i^1 > p_i^2$ para toda $i=1,2,\ldots,n$. Asimismo, la multiplicación vectorial se trata en forma implícita como: $\bar{p}\bar{x} = M$.

5.1 LA FUNCION DE UTILIDAD INDIRECTA Y LA FUNCION DE GASTO.

5.1.1 LA FUNCION DE UTILIDAD INDIRECTA.

Recordando que la función de utilidad indirecta, denotada por: $v(\bar{p},M)$, proporciona el máximo de utilidad en función de $\bar{p}$ y M. Dicha función tiene las siguientes propiedades:

(i) $v(\bar{p},M)$ es continua en $\bar{p} \gg 0$, $M > 0$.

(ii) $v(\bar{p},M)$ es no decreciente en precios; es decir, si $\bar{p}^1 \gg \bar{p}$ implica que: $v(\bar{p}^1,M) \leq v(\bar{p},M)$. Similarmente, $v(\bar{p},M)$ es no-decreciente en M.

(iii) $v(\bar{p},M)$ es cuasiconvexa en p; esto es, $\{\bar{p}/v(\bar{p},M) \leq k\}$ es un conjunto convexo para todo número real k.

(iv) $v(\bar{p},M)$ es homogénea de grado cero en $(\bar{p},M)$.

<u>Demostración:</u>

(i) Como $u(\bar{x}^*)$ es continua y el rango de u es compacto entonces:
$$\bar{x}^* = \bar{x}^*(\bar{p},M) \rightarrow v(\bar{p},M) = u(\bar{x}^*) \rightarrow v(\bar{p},M) = u(\bar{p},M)$$
por lo que la continuidad de $v(\bar{p},M)$ es consecuencia de la continuidad de $u(\bar{x})$.

(ii) Si $B' = \{\bar{x} \in X / \bar{p}\bar{x} \leq M'\}$ y $M' \geq M$ implica que B' está contenida en B. Entonces, el máximo de $u(\bar{x})$ sobre B es al menos tan grande como el máximo de $u(\bar{x})$ sobre B'. Por lo tanto, $v(\bar{p},M)$ es no decreciente en M. Un argumento similar se aplica a $\bar{p}$.

....

(iii) Suponiendo que $\bar{p}$ y $\bar{p}'$ son dos vectores de precios tales que: -- $v(\bar{p},M) \leq k$ y $v(\bar{p}',M) \leq k$. Con ellos se forma una combinación li_-neal de la siguiente manera: para toda θ tal que: $0 \leq \theta \leq 1$, sea -- $\bar{p}'' = \theta\bar{p} + (1-\theta)\bar{p}'$. Por la definición de cuasiconvexidad del capí_tulo 3, se tiene que mostrar que el punto intermedio $\bar{p}''$ es tal -- que: $v(\bar{p}'',M) \leq k$. Se definen los siguientes conjuntos presupues_tales:

$$B = \{\bar{x}/\bar{p}\bar{x} \leq M\} \; ; \; B' = \{\bar{x}/\bar{p}'\bar{x} \leq M\} \; ; \; B'' = \{\bar{x}/\bar{p}''\bar{x} \leq M\}$$

Se demuestra que cualquier x en B'' debe estar contenida en B o B'

$$\bar{p}\bar{x} \leq M \qquad \text{implica:} \quad \theta\bar{p}\bar{x} \leq \theta M$$

$$\bar{p}'\bar{x} \leq M \qquad \text{implica:} \quad (1-\theta)\bar{p}'\bar{x} \leq (1-\theta)M$$

sumando ambas expresiones:

$$\theta\bar{p}\bar{x} + (1-\theta)\bar{p}'\bar{x} \leq \theta M + (1-\theta)M \qquad \text{implica:} \; (\theta\bar{p} + (1-\theta)\bar{p}')\bar{x} \leq M$$

entonces: $\bar{p}''\bar{x} \leq M$ implica: $v(\bar{p}'',M) \leq k$ y por lo tanto la-- función de utilidad indirecta es cuasiconvexa.

(iv) Multiplicando a $\bar{p}$ y M por algun escalar θ, $\theta \in R^{+}$:

$$\bar{p}\bar{x} \leq M \quad \text{implica:} \quad (\theta\bar{p})\bar{x} \leq \theta M \quad \text{sí y sólo si:} \quad \bar{p}\bar{x} \leq M$$

De manera que la restricción presupuestal no se altera y:

$$v(\theta\bar{p},\theta M) = \frac{1}{\theta} \, v(\theta\bar{p},\theta M) = v(\bar{p},M) \leq k$$

5.1.2. LA FUNCION DE GASTO.

En la figura (8) se ha dibujado la relación que existe entre la función de utilidad indirecta $v(\bar{p},M)$, y el ingreso, M, a precios fi_jos. Como $v(\bar{p},M)$ es estrictamente creciente en M, se puede invertir la - función y resolver para M como una función que dependa del nivel de uti_

....

lidad, u, se puede encontrar visualmente en la figura (8) el monto mínimo de ingreso necesario para alcanzar u a precios $\bar{p}$.

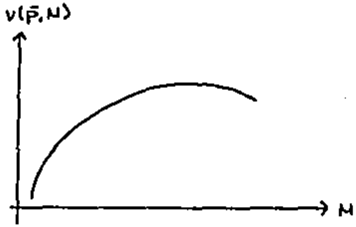

Fig. (8)

La función que relaciona al ingreso con la utilidad en esta forma inversa de la función de utilidad indirecta se conoce como la 'Función de Gasto' y se denota por: $c(\bar{p},u)$.

Una definición equivalente se da por el siguiente problema:

$$c(\bar{p},u) = \text{Min.} \quad M = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \bar{p}\bar{x}$$
$$\text{s.a.} \quad u(\bar{x}) \geq u \qquad (5.9)$$

Así, la función de gasto proporciona el costo mínimo de obtener un nivel fijo de utilidad.

Propiedades:

(i) No decreciente en $\bar{p}$. Si $\bar{p}' \gg \bar{p}$ implica: $c(\bar{p}',u) \geq c(\bar{p},u)$.

....

(ii) Homogénea de grado uno en $\bar{p}$: $c(\theta\bar{p},u) = \theta c(\bar{p},u)$, $\theta > 0$.

(iii) Cóncava en $\bar{p}$: $c(\theta\bar{p}+(1-\theta)\bar{p}',u) \geqslant \theta c(\bar{p},u)+(1-\theta)c(\bar{p}',u)$ para toda $0 \leq \theta \leq 1$.

(iv) Continua en $\bar{p}$, para todo $p_i > 0$, $i=1,2,\ldots,n$.

(v) Si $h(\bar{p},u)$ denota a la canasta que minimiza el gasto, entonces:

$$h_i(\bar{p},u) = \frac{\delta\, c(\bar{p},u)}{\delta\, p_i} \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad (5.10)$$

suponiendo que la derivada está definida y $p_i > 0$, para toda i tal que: $i=1,2,\ldots,n$.

Demostración:

(i) Sea $\bar{x}$ y $\bar{x}'$ dos canastas que minimizan el gasto asociadas a $\bar{p}$ y $\bar{p}'$, respectivamente. Como una consecuencia de la minimización se tiene que: $\bar{p}\bar{x} \leq \bar{p}\bar{x}'$ y $\bar{p}\bar{x}' \leq \bar{p}'\bar{x}'$ para $\bar{p} \ll \bar{p}'$. Por lo tanto:

$$\bar{p}\bar{x} \leq \bar{p}\bar{x}' \quad y \quad \bar{p}\bar{x}' \leq \bar{p}'\bar{x}' \quad \text{sí y sólo si:} \quad \bar{p}\bar{x}' \leq \bar{p}'\bar{x}'$$

(ii) Se demuestra que si $\bar{x}$ es una canasta que minimiza el gasto dados los precios $\bar{p}$, entonces $\bar{x}$ también minimiza el gasto a los precios $\theta\bar{p}$. Suponiendo que este no es el caso, y sea $\bar{x}'$ la canasta que, efectivamente, minimiza el gasto a precios $\theta\bar{p}$, de forma que: $\theta\bar{p}\bar{x}' < \theta\bar{p}\bar{x}$. Esta desigualdad implica que: $\bar{p}\bar{x}' < \bar{p}\bar{x}$ lo que contradice la definición de $\bar{x}$. Entonces, el multiplicar los precios de los bienes por un escalar positivo θ no cambia la composición de la canasta óptima, y por lo tanto, el gasto debe aumentar en la misma cantidad θ:

$$c(\theta\bar{p},u) = \theta\bar{p}\bar{x} = \theta c(\bar{p},u)$$

(iii) Sean $(\bar{p},\bar{x})$ y $(\bar{p}',\bar{x}')$ dos combinaciones de precios y bienes en la minimización del gasto y sea: $\bar{p}''=\theta\bar{p}+(1-\theta)\bar{p}'$, para cualquier θ tal

....

que: $0 \quad \theta \quad 1$, se define:

$$c(p'',u) = p''x'' = \theta px'' + (1-\theta)p'x''$$

Como x'' no es, necesariamente, la canasta óptima a precios p ó p' consecuentemente:

$$c(p'',u) \quad \theta c(p,u) + (1-\theta)c(p',u)$$

Por lo tanto $c(p,u)$ es una función cóncava en p.

(iv) La continuidad de $c(p,u)$ es una consecuencia directa de su concavidad.

La función $h(p,u)$ se conoce como la 'Función de Demanda Compensada' o demanda Hicksiana, gracias a Hicks. Este término viene de considerar la -- construcción de la demanda como resultado de la variación de precios e ingreso de manera que el nivel de utilidad permanezca fija. Con esto los cambios - en el ingreso se arreglan para 'compensar' los movimientos de los precios de- los bienes.

La función de demanda hicksiana no es, directamente, observable - por que depende de la utilidad que, como se mencionó, no es tangible. La función de demanda que se expresa en función de los precios e ingreso disponible es observable, i.e. la demanda marshalliana.

La única propiedad sorprendente es la concavidad de la función -- $c(p,u)$. Supóngase que se grafica el gasto como una función del precio de un - sólo bien, manteniendo constante los demás precios. Si el precio del bien -- aumenta el gasto nunca disminuirá, por la propiedad 1, sino más bien aumentará a una tasa decreciente, propiedad tres. ¿Por qué?, por que al encarecerse- ese bien y todos los demás permanecer fijos, el consumidor que busca la minimización de su gasto ira trasladando su consumo hacia los bienes cuyo precio- no se ha alterado.

****

5.2 ALGUNAS RELACIONES IMPORTANTES.

Existen algunas identidades que entrelazan a la función de gasto, la función de utilidad indirecta y directa, la demanda ordinaria y - la demanda compensada.

Considerando el problema de maximización:

$$v(\bar{p},M^*) = \text{máx.} \quad u = u(\bar{x}) \qquad \text{s.a.} \quad \bar{p}\bar{x} \leq M^* \tag{5.11}$$

Sea $\bar{x}^*$ la solución de (5.11) y sea $u^*=u(\bar{x}^*)$. Paralelamente se toma el problema de minimización del gasto:

$$c(\bar{p},u) = \text{min.} \quad \bar{p}\bar{x} = M \qquad \text{s.a.} \quad u(\bar{x}) \geq u^* \tag{5.12}$$

Por medio de una inspección de la figura (9), y los resultados de los teoremas 1 y 2 del capítulo anterior, se deduce que, en general,- la respuesta a ambos planteamientos además de ser la misma es única, con esto se infiere que el óptimo es global dadas las condiciones impuestas- a la función de utilidad indirecta y directa y a la función de gasto. Se dice 'en general' por que la exposición precisa de la compatibilidad de- los dos problemas es la siguiente (2):

$$(1)\ \text{máx.} \quad u(\bar{x}) \qquad \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \bar{p}\bar{x} \leq M$$

$$(2)\ \text{min.} \quad \bar{p}\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M \qquad \text{s.a.} \quad u(\bar{x}) \geq u$$

Supuestos:

(a) La funciónde utilidad es continua.

(b) Las preferencias satisfacen el supuesto de no saciedad, localmente.

(c) La solución de ambos problema existe.

....

(2) Structure of Economics: A Mathemathical Analysis. Silberberg,E., Norton. Pág. 234-235.

PROPOSICION A. Asumiendo que los supuestos anteriores se cumplen y que- $\bar{x}^*$ resuelve (1). Sea $u=u(\bar{x}^*)$, entonces $\bar{x}^*$ resuelve (2).

Prueba: Supongase que la proposición no se cumple, y sea $\bar{x}'$ la solución de (2), de forma que: $\bar{p}\bar{x}' < \bar{p}\bar{x}^*$ y $u(\bar{x}') \geq u(\bar{x}^*)$ bajo- el supuesto de no saciedad, existe una canasta $\bar{x}''$ muy parecida a $\bar{x}'$ tal que: $\bar{p}\bar{x}'' < \bar{p}\bar{x}^* = M$ y $u(\bar{x}'') > u(\bar{x}^*)$. Entonces $\bar{x}^*$ - no puede resolver (1). Por lo que la proposición es válida.

PROPOSICION B. Bajo los supuestos anteriores, sea $\bar{x}^*$ la solución de (2) se define: $M=\bar{p}\bar{x}^*$ y se supone que $M > 0$. Entonces $\bar{x}^*$ resuelve - (1).

Prueba: Supongase que no es el caso, y sea $\bar{x}'$ la solución de (1) - tal que $u(\bar{x}') > u(\bar{x}^*)$ y $\bar{p}\bar{x}' = \bar{p}\bar{x}^*$. Como $\bar{p}\bar{x}^* > 0$ y las preferencias son continuas se puede encontrar alguna θ, $0 < \theta < 1$, -- tal que: $p(\theta\bar{x}') < \bar{p}\bar{x}^*$ y $u(\theta\bar{x}') > u(\bar{x}^*)$. Por lo tanto $\bar{x}^*$ no -- puede resolver (2).

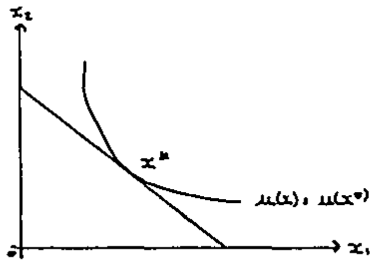

Fig. (9)

Esta última observación tra: como consecuencia cuatro identidades importantes:

****

(i) $c(\bar{p}, v(\bar{p}, M)) = M$; el gasto mínimo para obtener la utilidad $v(\bar{p}, M)$ es M.

(ii) $v(p, c(p, u)) = u$; la utilidad máxima del ingreso $c(p, u)$ es u.

(iii) $x_i(\bar{p}, M) = h_i(\bar{p}, v(\bar{p}, M))$; la demanda marshalliana en M es igual a la demanda hicksiana en $v(\bar{p}, M)$.

(iv) $h_i(\bar{p}, u) = x_i(\bar{p}, c(\bar{p}, u))$; la demanda hicksiana en u es la misma que la demanda marshalliana en $c(\bar{p}, u)$.

La última identidad es, probablemente, la más importante porque relaciona la función de demanda marshalliana, que es observable, con la inobservable demanda hicksiana. Con esto, la identidad (iv) muestra que la función de demanda compensada -la solución del problema dual- es igual a la función de demanda ordinaria -proveniente del problema primal- en un nivel de ingreso mínimo, necesario, dados los precios de los bienes, para alcanzar el nivel deseado de utilidad. Así, cualquier canasta demandada puede ser expresada como una solución del problema de maximización de la utilidad o como una solución del problema de minimización del gasto.

La aplicación más interesante de estas identidades se expresa por la siguiente proposición conocida como la 'Identidad de Roy' (3):

PROPOSICION C. Si $x_i(p, M)$ es la función de demanda marshalliana, entonces:

$$x_i(\bar{p}, M) = -\frac{\delta v(p, M)/\delta p_i}{\delta v(p, M)/\delta M} \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad (5.13)$$

suponiendo que el miembro derecho está bien definido y $p_i > 0$, $i=1,2,\ldots,n$, $M > 0$.

....

(3) Op. Cit., Layard & Walters, cap. 6. Ver también: op. cit., Silberberg, cap. 3.

Prueba: La función de utilidad inidrecta está dada por:

$$v(\bar{p},M) = u(\bar{x}(\bar{p},M)) \tag{5.14}$$

diferenciando (5.14) respecto a p_j:

$$\frac{\delta\, v(p,M)}{\delta\, p_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta\, u(x)}{\delta\, x_i} \frac{\delta x_i}{\delta p_j} \tag{5.15}$$

Como $x(p,M)$ es una función de demanda marshalliana satisface - las condiciones de primer orden (KTL) de la maximización de la utilidad:

$$u_i = \frac{\delta\, u(\bar{x})}{\delta\, p_i} = \lambda\, p_i \tag{5.16}$$

sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\frac{\delta\, v(\bar{p},M)}{\delta\, p_j} = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\delta x_i}{\delta p_j} \tag{5.17}$$

Adicionalmente, como las funciones de demanda también satisfa cen la restricción presupuestal:

$$g(\bar{x}) = \bar{p}\bar{x} = \bar{p}\bar{x}(\bar{p},M) = M \tag{5.18}$$

diferenciando (5.18) respecto a p_j:

$$\frac{\delta M}{\delta p_j} = \frac{\delta\, (\bar{p}\bar{x}(\bar{p},M))}{\delta\, p_j} = x_j(\bar{p},M) + \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\delta\, x_i(\bar{p},M)}{\delta\, p_j} = 0 \tag{5.19}$$

sustituyendo (5.19) en (5.17):

$$\frac{\delta\, v(\bar{p},M)}{\delta\, p_j} = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\delta\, x_i}{\delta\, p_j} = -\lambda\, x_j(\bar{p},M) \tag{5.20}$$

....

diferenciando (5.14) respecto a M:

$$\frac{\delta v(\bar{p},M)}{\delta M} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta u}{\delta x_i} \frac{\delta x_i}{\delta M} \qquad (5.21)$$

sustituyendo las condiciones de primer orden (5.16) en (5.21):

$$\frac{\delta v(\bar{p},M)}{\delta M} = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\delta x_i}{\delta M} \qquad (5.22)$$

diferenciando (5.18) respecto a M:

$$M = \bar{p}\bar{x}(\bar{p},M) \quad \text{implica:} \quad 1 = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\delta x_i}{\delta M} \qquad (5.23)$$

sustituyendo (5.23) en (5.22):

$$\frac{\delta v(\bar{p},M)}{\delta M} = \lambda \qquad (5.24)$$

sustituyendo (5.24) en (5.20):

$$\frac{\delta v(\bar{p},M)}{\delta p_j} = -\frac{\delta v(\bar{p},M)}{\delta M} x_j(\bar{p},M) \qquad (5.25)$$

por lo tanto:

$$x_j(\bar{p},M) = -\frac{\delta v(\bar{p},M)/\delta p_j}{\delta v(\bar{p},M)/\delta M} \qquad j=1,2,\ldots,n$$

LQQD

La ecuación (5.24) muestra que el multiplicador lagrangiano, , en las condiciones de primer orden representa la utilidad marginal del ingreso.

....

5.3 LA ECUACION DE SLUTSKY. (4)

Esta ecuación descompone el cambio en la demanda inducido por algun cambio en los precios de los bienes, Δp, en dos efectos separados:

(i) El efecto sustitución que es el resultado de dar una 'compensación' al consumidor por la pérdida (o ganancia) derivada del aumento (o disminución) del precio del bien. De forma que la compensación deje al individuo sobre la misma curva de indiferencia. Gráficamente lo anterior se representa por un movimiento a lo largo de la curva de demanda compensada. Ya que en la derivación de ella el nivel de utilidad permanece constante.

(ii) El efecto ingreso, el cual considera el impacto que tiene un cambio en precios sobre el ingreso y este sobre la cantidad demandada. Es un efecto que se refleja, por entero, en la demanda marshalliana, la cual se expresa en términos de precios e ingreso.

Sea $\bar{x}^*$ el resultado de maximizar la utilidad en $(\bar{p},M)$ y sea $u^*=u(\bar{x})$. Por la identidad (iv), de la sección 5.2, la demanda hicksiana en u es igual a la demanda marshalliana en $c(\bar{p},u)$, entonces:

$$h_j(\bar{p},u^*) = x_j(\bar{p},c(\bar{p},u)) \qquad (5.26)$$

diferenciando (5.26) respecto a p_i y evaluando la derivada en el punto $\bar{p}^*$:

$$\frac{\delta h_j(\bar{p}^*,u^*)}{\delta p_i} = \frac{\delta x_j(\bar{p}^*,M^*)}{\delta p_i} + \frac{\delta x_j(\bar{p}^*,M^*)}{\delta M}\frac{\delta c(\bar{p}^*,u^*)}{\delta p_i} \qquad (5.27)$$

El miembro izquierdo de la expresión mide en cuanto cambia la

....

(4) 'Sulla Teoria del Bilancio del Consumatore'. Slutsky,E.,Giornale degli Economisti. — Serie 3, vol. LVI, pag. 1-26.

demanda compensada cuando cambia p_i. El lado derecho separa el efecto anterior en el cambio en la demanda manteniendo fijo al ingreso en M^*, primer término, y en el cambio en la demanda cuando cambia el ingreso, inducido por el cambio en el precio, por el cambio en el ingreso necesario para mantener el nivel de utilidad constante. Este último cambio es precisamente: $x_i^* = h_i(\bar{p}, u^*)$, por la ecuación (5.12).

Sustituyendo (5.12) en (5.27):

$$\frac{\delta h_j(\bar{p}^*, u^*)}{\delta p_i} = \frac{\delta x_j(\bar{p}^*, M^*)}{\delta p_i} + \frac{\delta x_j(\bar{p}^*, M^*)}{\delta M} x_i^* \tag{5.28}$$

reexpresando (5.28):

$$\frac{\delta x_j(\bar{p}^*, M^*)}{\delta p_i} = \frac{\delta h_j(\bar{p}^*, u^*)}{\delta p_i} - x_i \frac{\delta x_j(\bar{p}^*, M^*)}{\delta M} \tag{5.29}$$

que es la ecuación de Slutsky. El primer término del lado derecho es el efecto sustitución y el segundo el efecto ingreso, i.e.:

$$\Delta x_j \approx \underbrace{\frac{\delta x_j(\bar{p}, M)}{\delta p_i} \Delta p_i}_{\text{cambio en la demanda.}} = \underbrace{\frac{\delta h_j(\bar{p}, u)}{\delta p_i} \Delta p_i}_{\text{efecto sustitución.}} - \overbrace{\frac{\delta x_j(\bar{p}, M)}{\delta M} \underbrace{x_i \, \Delta p_i}_{\text{cambio en } M \text{ para mantener la utilidad fija.}}}^{\text{efecto ingreso.}} \tag{5.30}$$

Si se desea considerar los efectos del cambio simultáneo de todos los precios, la interpretación de la derivada cambia a la de una derivada generalizada 'n' dimensional en vez de simples derivadas parciales. La ecuación de Slutsky general se expresa como sigue:

$$D_p \bar{x}(\bar{p}, M) = D_p \bar{h}(\bar{p}, v(\bar{p}, M)) - D_M \bar{x}(\bar{p}, M) \bar{x} \tag{5.31}$$

donde: $v(\bar{p}, M) = u$; D es el operador de derivación y $Df(\bar{x}^*)$ es la matriz jacobiana de f en $\bar{x}^*$.

....

Para el caso de dos bienes, n=2, la ecuación de Slutsky está dada por la siguiente ecuación (5.32):

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta x_1(\bar{p},M)}{\delta p_1} & \frac{\delta x_1(\bar{p},M)}{\delta p_2} \\ \frac{\delta x_2(\bar{p},M)}{\delta p_1} & \frac{\delta x_2(\bar{p},M)}{\delta p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta h_1(\bar{p},u)}{\delta p_1} & \frac{\delta h_1(\bar{p},u)}{\delta p_2} \\ \frac{\delta h_2(\bar{p},u)}{\delta p_1} & \frac{\delta h_2(\bar{p},u)}{\delta p_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\delta x_1(\bar{p},M)}{\delta M} \\ \frac{\delta x_2(\bar{p},M)}{\delta M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$$

Expandiendo el último término:

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta x_1(\bar{p},M)}{\delta M} \\ \frac{\delta x_2(\bar{p},M)}{\delta M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta x_1(\bar{p},M)}{\delta M} x_1 & \frac{\delta x_1(\bar{p},M)}{\delta M} x_2 \\ \frac{\delta x_2(\bar{p},M)}{\delta M} x_1 & \frac{\delta x_2(\bar{p},M)}{\delta M} x_2 \end{bmatrix} \qquad (5.33)$$

La matriz $D_p\bar{h}(\bar{p},v(\bar{p},M)) = D_p\bar{h}(\bar{p},M)$ es conocida como la matriz de 'sustitución', definida por Slutsky, por que mide los cambios cruzados ocasionado por los cambios generalizados en los precios de los bienes, i.e. mide el impacto que tiene un cambio en el precio del bien 'i' sobre la j-ésima demanda compensada, para toda $i,j=1,2,\ldots,n$. Dicha matriz tiene las siguientes propiedades:

(1) La matriz de sustitución $(D_p(h(p,u))$ es negativa definida. Lo cual es una consecuencia directa de la concavidad de la función de gasto.

Prueba: La concavidad de una función diferenciable significa que la función se encuentra por debajo del hiperplano tangente en cualquier punto. Considerese la figura (10).

....

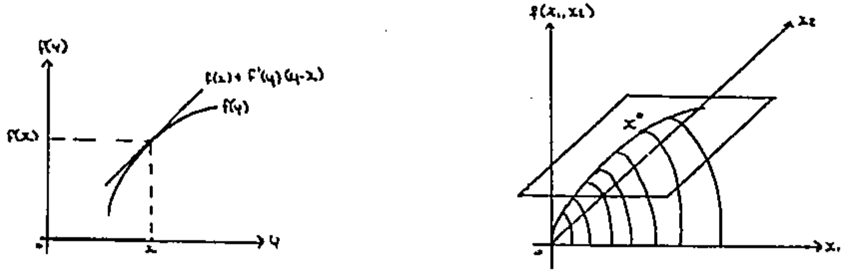

Fig. (10)

Asimismo, la concavidad puede ser interpretada diciendo que la pendiente del plano tangente es mayor que la cuerda que une dos puntos cuales_ - quiera, $v(\bar{p}_o,u)$ y $v(\bar{p}_1,u)$ para toda $\bar{p}_o \gg \bar{p}_1$. Es decir:

$$D_p v(\bar{p},u) \geqslant \frac{v(\bar{p}_1,u) - v(\bar{p}_o,u)}{\bar{p}_1 - \bar{p}_o} \qquad (5.34)$$

Entonces para $\bar{p}=\bar{p}_1$, se tiene:

$$v(\bar{p},u) \leqq v(\bar{p}_p,u) + D_p\bar{h}(\bar{p}_o,u)(\bar{p}-\bar{p}_o) \qquad (5.35)$$

o bien:

$$v(\bar{p},u) - v(\bar{p}_o,u) - D_p\bar{h}(\bar{p}_o,u)(\bar{p}-\bar{p}_o) \leqq 0 \qquad (5.35)$$

Aplicando la expansión de Taylor a $v(p,u)$ respecto a p, alrededor de $\bar{p}_o$, hasta el segundo término:

$$v(\bar{p}_o,u)+D_p v(\bar{p}_o,u)(\bar{p}_1-\bar{p}_o)+ \quad (\bar{p}_1-\bar{p}_o)D_p v(\bar{p}^*,\bar{u}^*)(\bar{p}_1-\bar{p}_o) \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$\leqq v(\bar{p}_o,u)+D_p v(\bar{p}_o,\bar{u})(\bar{p}_1-\bar{p}_o) \qquad (5.26)$$

implica:

....

$$\frac{1}{2}(\bar{p}_1-\bar{p}_0)D_p v(\bar{p}^*,\bar{u}^*)(\bar{p}_1-\bar{p}_0) \leq 0 \qquad (5.37)$$

Como: $D_p v(\bar{p}^*,\bar{u}^*) = h(\bar{p},\bar{u})$ implica: $D_p v(\bar{p}^*,\bar{u}^*)=D_p h(\bar{p},\bar{u})$ y $\bar{p}_1 \gg \bar{p}_0$. Por lo tanto: $D_p \bar{h}(\bar{p},u) \leq 0$. Entonces la matriz de sustitución es negativa - semidefinida.

(2) La matriz de sustitución es simétrica, por que:

$$\frac{\partial h_j(\bar{p},u)}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 c(\bar{p},u)}{\partial p_i p_j} = \frac{\partial^2 c(\bar{p},u)}{\partial p_j p_i} = \frac{\partial h_i(\bar{p},u)}{\partial p_j} \qquad (5.38)$$

(3) En particular el "efecto compensado del cambio en el precio del mismo bien es no positivo" (5). Esto es, las curvas de demanda compensada tienen pendiente negativa:

$$\frac{\partial h_i(\bar{p},u)}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 c(\bar{p},u)}{\partial p_i^2} \leq 0 \qquad (5.39)$$

Como la matriz es negativa semidefinida todos los elementos de su -- diagonal son no positivos.

Todas estas restricciones conciernen a las funciones de demanda hicksiana que, como se dijo, no son observables. Sin embargo, la ecuación de Slutsky permite expresar la derivada de $\bar{h}$ respecto a $\bar{p}$ como la derivada de $\bar{x}$ respecto a $\bar{p}$ y M, que son obervables.

****

(5) Hecho conocido como la 'Ley de la demanda'.

La ecuación de Slutsky y los resultado anteriores producen - producen la siguiente propiedad:

(4) La matriz:

$$\frac{\partial x_j(p,M)}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(p,M)}{\partial M}\, x_i$$

es simétrica, negativa semidefinida y observable.

5.4 LA DUALIDAD EN EL CONSUMO.

El análisis está basado en la dualidad que existe entre las - funciones de utilidad indirecta y directa. Es conveniente describir el - cálculo en términos de una función de utilidad indirecta, donde los precios se dividen por el ingreso de forma que el gasto sea igual a uno. -- Tal función se expresa como:

$$v(\bar{p}) = \text{máx.}_{\bar{x}}\; u(\bar{x}) \qquad \text{s.a.} \quad 1 = \bar{p}\bar{x} \tag{5.40}$$

Si se tiene que la función de utilidad indirecta $v(p)$, se puede encontrar la función de utilidad directa, no observable, resolviendo el siguiente problema:

$$u(x) = \text{min.}_{\bar{x}}\; v(\bar{p}) \qquad \text{s.a.} \quad 1 = \bar{p}\bar{x} \tag{5.41}$$

El procedimiento es: sea $\bar{x}(\bar{p})$ la canasta demandada a los precios $\bar{p}$. Por definición: $v(\bar{p}) = u(\bar{x}(\bar{p}))$. Sea $\bar{p}'$ cualquier otro vector de

....

precios que satisfaga la restricción presupuestal, i.e. $\bar{p}'\bar{x} = 1$. Como $\bar{x}(\bar{p})$ siempre es una elección factible a los precios $\bar{p}'$, la selección que maximize la utilidad debe proporcionar una utilidad al menos tan grande como la producida por $\bar{x}(\bar{p})$; es decir, $v(\bar{p}') \geq u(\bar{x}(\bar{p})) = v(\bar{p})$. Por lo que el mínimo de la función de utilidad inidrecta sobre todos los vectores de precios que satisfacen la restricción presupuestal reproduce a la función de utilidad directa, haciéndola visible.

Gráficamente este argumento se describe en la figura (11). En ella cualquier vector de precios $\bar{p}$ que satisfaga la restricción presupuestal, $\bar{p}\bar{x} = \bar{p}\bar{x}^{o}$, debe dar una utilidad mayor que $u(\bar{x}^{o})$, lo que significa que $u(\bar{x}^{o})$ resuelve el problema de minimización (5.41).

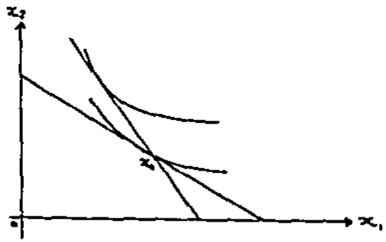

Fig. (11)

Esta última sección es, probablemente, uno de los hallazgos de mayor potencial en la Teoría Económica del Consumidor ya que permite en un momento determinado la estimación de los gustos del consumidor. Es decir, les da una tangibilidad de la cual carecían. Con esto se podría demostrar que los supuestos en los que se basa esta teoría efectivamente se cumplen. Hecho que de resultar verdadero echaría abajo las críticas hasta el momento sostenidas en contra de este enfoque.

****
****

CONCLUSION.

Inicialmente, todo individuo cuenta con dos tipos de informa_ - ción sus gustos o deseos y sus posibilidades de consumo, representadas por un ingreso limitado. Cuya manipulación lo conduce a la solución de su pro_ blema de elección de consumo.

Todo miembro de una sociedad económica actua en forma selectiva, dada la limitación de sus recursos, buscando, de una u otra manera, la ob_ tención del mayor provecho de esos recursos, en cada momento del tiempo, - con el fin de alcanzar la satisfacción máxima posible de sus gustos. En o_ tras palabras, todo consumidor se comporta 'racionalmente' en el sentido - maximizador de su bienestar individual.

La diversidad en los gustos de los distintos consumidores, así- como la variabilidad de sus ingresos, dificultan la posibilidad de un plan_ teamiento específico de la función de utilidad. Para unificar tales crite_ rios, la **Teoría de la Utilidad** propone y emplea cierta forma funcional, -- que todo individuo 'racional' debe poder conceptualizar, que se traduce en una función de utilidad de tipo ordinal e independiente del valor óptimo - resultante. Esto es, se tiene una función de utilidad que no es única y es una descripción geométrica y matemática de los deseos del consumidor. La - aceptación de la 'racionalidad' del individuo es básica para la existencia de la función de utilidad. Ya que de no ser ese el caso, se observará una- serie de contradicciones axiomáticas provenientes de un comportamiento dis_ torcionado. Lo que implicaría la no existencia de dicha función.

La no tangibilidad de los deseos, en primera instancia, dificul_ ta la concepción matemática del problema. Sin embargo, la introducción de- la curva de indiferencia, como el conjunto convexo sobre el cual se define la función de utilidad directa, 'materializa' en forma descriptiva tales - deseos, proviendo al análisis de la objetividad necesaria que le hacia fal_ ta. No obstante, la formulación de dicha curva contiene cierto grado de -- subjetividad del que hasta el momento no se ha podido deshacer.

Adicionalmente, la teoría habla de una tasa marginal de sustitu_ ción entre los bienes, positiva pero decreciente hecho que condiciona la - forma de la función de utilidad y de la curva de indiferencia. De hecho, -

****

cualquier función cóncava, en el sentido estricto, cumple con lo anterior y -- puede producir distintas curvas cardinales con las mismas propiedades. Pero en la ausencia de una función de utilidad cardinal, resulta difícil descartar el caso menos restrictivo dado por la cuasiconcavidad. En consecuencia, la Teoría Económica Neoclásica define un cuerpo cuasicóncavo y ordinal como representante de los gustos individuales.

La regularidad de la frontera de la región factible, la restricción presupuestal, aunada a los supuestos mantenidos a lo largo del desarrollo, garantizan la necesidad de las condiciones de primer orden (KTL) para la existencia de un máximo local restringido. Pero sólo las imposiciones de diferenciabilidad de las funciones objetivo, utilidad y gasto, así como las propiedades de cuasiconcavidad y cuasiconvexidad, respectivamente, y la no saciedad en el consumo, permiten dar el carácter de suficiencia a tales condiciones; teniéndose en consecuencia un óptimo que es global.

Como se vió, la restricción presupuestal cumple con la 'calificación' de la restricción de Kuhn y Tucker, por ende, con las condiciones de -- Arrow et al. que son simplificaciones de los resultados de los dos primeros -- autores. Consecuentemente, la solución del problema de elección del consumidor en cualquiera de sus versiones es un máximo (o mínimo) global restringido. No obstante, la resolución obtenida apartir del planteamiento dual produce una -- función inobservable, la función de demanda de Hicks, debido a su dependencia funcional con la utilidad directa. Afortunadamente, por medio de la función de utilidad indirecta se 'puede' tener una estimación de la función directa, vía instrumentos econométricos, y por tanto de la demanda de Hicks en el punto -- c(p,u), punto donde se define el mínimo del gasto dado el nivel de utilidad, - es decir la Identidad de Roy.

De esta manera, la intangibilidad se torna manipulable y deja de - representar un obstáculo para el análisis económico. Resaltándose así la importancia que tiene los hallazgos del problema desde su perspectiva dual, más que primal, por su practicidad y facilidad de aplicación y resolución.

....

Este último párrafo es, tal vez, el más relevante del presente trabajo, por que permite construir una función de demanda que sólo considera al efecto sustitución; el cual, según Slutsky, descarta todo movimiento de las variables nominales, involucradas en la función de demanda ordinaria, la demanda de Hicks. Así, la mesurabilidad real de los efectos, i.e. el impacto de los cambios en términos de las perturbaciones de los cambios en precios y/o ingreso sobre la cantidad del bien adquirida, es calculable, una de las consecuencias de la ecuación del mismo autor.

Por otro lado, la validez del uso del multiplicador de Lagrange como método de optimización, en el contexto microeconómico neoclásico, es una consecuencia del tipo de planteamiento que ahí se maneja. Además la facilidad de su interpretación es inmediata, encajando casi perfectamente, con el desarrollo de la **Teoría de la Demanda del Consumidor** desde el punto de vista maximizador (o minimzador, según sea el caso) de los deseos. Su docilidad permite extensiones a varibales restringidas, en este caso no negativas, cuya presencia no altera necesariamente los resultados del análisis, así como al tratamiento de funciones de restricción que no presenten una igualdad estricta.

De esta manera la programación cuasicóncava sirve para solucionar las discusiones de optimalidad aquí planteadas; haciendo posible su extensión a diversos problemas económicos pudiendo, por tanto, tener una visión clara de las conclusiones de la **Teoría del Consumidor** en lo relativo a la colocación eficiente de los recursos limitados.

No obstante, su aplicación tiene ciertas limitaciones. Por ejemplo, se ha supuesto la continuidad de las varaibles de elección cuando, en realidad, una o varias de ellas pudieran tomar únicamente valores enteros. Por fortuna lo anterior se resuelve por medio de la programación entera, la cual produce soluciones que están dentro del campo de los números enteros. Una limitante más seria -que no es exclusiva de este tipo de programación sino que es común a una serie de métodos matemáticos de optimización- se encuentra en la naturaleza estática de la solución. Al aseverar que la solución x^* es óptima se quiere decir que es la mejor elección que se puede hacer de cada variable x_j, bajo un conjunto de circunstancias previamente establecidas. Pero como --

....

x_j^* representa un valor númerico sólo puede pertenecer a un punto en el tiempo o a un periodo de tiempo determinado, durante el cual todas las circunstancias postuladas no experimenten cambio alguno. En ambos casos tanto el problema como la solución son estáticas. Sin embargo, el mundo real no es inerte haciendo que los resultados sirvan, sólamente, como una guía para el investigador; con una permanencia limitada al muy corto plazo; sobre el verdadero paradero del valor real. En contraste, la programación dinámica proporciona una trayectoria óptima de cada una de las variables de estudio en un lapso específico. Para aplicar dicho método se requiere, primeramente, de una comprensión profunda del problema a plantear y, en segundo lugar, un conocimiento del cálculo de variables, de la **Teoría del Control Optimo** y de la programación dinámica misma. Todo esto proporcionará una explicación que sea más apegada a la realidad.

Así, para terminar se ha dado un apartado que resalta las pricipales limitaciones de la técnica y el análisis matemático aquí desarrollados. Cuyo objeto no es, por supuesto, el de desacreditar el método empleado: sino más bien es el de hacer notar al lector que dichos procedimientos carecen de una naturaleza explicativa omnipotente. En realidad, en el aprendizaje es esencial tener presente, siempre, las fronteras que delimitan a los métodos matemáticos estudiados, con el objeto de no llegar a ser esclavos de ellos sino su maestro.

....
....

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA GENERAL.

Afriat, S.N.

'The Constuction of Utility Functions from Expenditure Data'
International Economic Review
1967. volumen 8.

Antonelli, G.B.

Sulla Teoria Matematica della Economia Politica
Nella Tipografia del Fochetto
1927. Niza. Primera edición

Barten, A.P.

- 'Evidence on the Slutsky Condition for Demand Equations'
  Review of Economic and Statistics
  1967. volumen 49.
- 'Refléxion sur la construction d'un Système Empirique des Fonctions de Demande'
  Cahier du Séminaire d'Econometrie
  1970. número 12.

Barten, A.P., Kloek, T. & Lempers, E.B.

'A Note on a Class of Utility and Production Functions yielding eve-rywhere differentiable Demand Functions'
Review of Economic Studies
1969. volumen 1.

Blackorby, C., Primont, D. & Ressell, R.R.

Duality, Separability and Functional Structure
American Elsevier
1978. New York. Primera edición.

Chipman, J.S., Hurwicks, L., Richter, M.K. & Sonneschen, H.F.

Preference, Utility and Demand
Harcourt Brace Jovanovich
1971. primera edición.

****

Cramer, J.S.

'A Dynamic Approach to the Theory of Consumer Demand'
Review of Economic Studies
1956-1957, volumen 24.

Davies, H.D.

'The Consumer's Choice among Qualities of Goods'
Discussion Paper in Economics, Birdbeck Collection
1976, número 26.

Deaton, A.S.

- *The Structure of Demand, 1920-1970*
  The Fontana Economic History of Europe
  1975, Fontana. Volumen 6, sección 2.
- *Consumption*
  Chapman and Hall
  1976, London. Segunda edición.

de Finetti, B.

'La prévission: ses lois logique, ses sources subjectives'
Annales de Institut Henri Poincaré
1937, volumen 7.

Diewert, W.E.

- *Application of Duality Theory*
  Frontiers of Qualitative Economics
  North Holland ! American Elsevier
  1974, Amsterdam. Volumen II.
- *'Symmetry Conditions for Market Demand Functions'*
  Review of Economics Studies
  1980, volumen 47.
- *'Duality Approaches to Microeconomic Theory'*
  Handbook of Mathematical Economics
  North Holland Publishing Co.
  1981, Amsterdam. Volumen 2.

****

Dorfmann,R.P.

Linear Programming and Economic Analysis
McGraw-Hill Publishing Co.
1958, New York. Primera edición.

Farrell,M.J.

'The New Theory of Consumption Function'
Economic Journal
1959, volumen 69.

Fletcher,R. & Reeves,G.M.

'Functional Minimization by Conjugate Gradients'
Computer Journal
1964, volumen 7.

Frisch,R.

New Methods of Measuring Marginal Utility
J.C.B. Mohr ed.
1936, Tubingen. Primera edición.

Fuss,M. & McFadden,D.

Production Economics: A Dual Approach to Theory and Application
North Holland Publishing Co.
1978, Amsterdam. Segunda edición.

Goldberger,A.S.

- 'Functional Form and Utility: A Review of Consumer Demand Theory'
Systems Formulation, Methodology and Policy Workshop Paper
1967, Wisconsin. Número 6703.
- 'Directly Additive Utility and Constant Marginal Budget Shares'
Review of Economic Studies
1969, volumen 36.

Gormann,W.M.

- 'On a Class of Preference Fields'
Metroeconomica
1961, volumen 13.

....

Gorman, W.M.

- 'The Structure of Utility Functions'
Review of Economic Studies
1968. volumen 35.

Hammond, P. J.

'Equity, Arrow's Conditions and Raw's Difference Principles'
Econometrica
1976. volumen 44.

Hanssen, F.

Consumer Choice Behaviour
Free Press
1972. New York. Primera edición.

Hicks, J.K.

Value and Capital
Oxford University press
1956. Oxford. Décima edición.

Hotelling, H.S.

Demand Functions with Limited Budgets
Econometrica
1935. volumen 3.

Houthakker, H.S.

- 'Revealed Preference and The Utility Function'
Economica
1950. volumen 7.
- 'Compensated Changes in Quantitative and Qualitative Consumed'
Review of Economic Studies
1951-1952. volumen 19.
- 'The Influence of Prices and Income on Household Expenditure'
Bulletin of the International Institute of Statistics
1960. volumen 37.

Konus, A.A.

'On the Theory of Means'
Acta Universitatis Asiae Mediae (Tashkent)
1934. serie Va. Matemática. fascículo 24.

****

Lancaster, K.J.

Consumer Demand: A New Approach

Columbia University Press

1971, New York. Primera edición.

Lau. L.J.

'Duality and the Structure of Utility Functions'

Journal of Economic Theory

1969. volumen 1.

Lipsey, R.G. & Rosenbuth, G.

'A Contribution to the new Theory of Demand: A Rehabilitation of the Giffen Good'

Canadian Journal of Economics

1971, volumen 3.

MacCrimmon, K.R. & Toda, M.

'The Experimental Determination of Indiference Curves'

Review of Economic Studies

1969, volumen 36.

McKenzie, L.W.

'Demand Theory without a Utility Index'

Review of Economic Studies

1956-1957. volumen 36.

Malinvaud, E.

Lectures in Microeconomic Theory

American Elsevier

1972. New York. Primera edición.

Maskin, E.

'A Theory on Utilitarism'

Review of Economic Studies

1978. volumen 45.

Michael, R.T. & Becker, G.S.

'On the New Theory of Consumer Behaviour'

Swedish Journal of Economics

1973. volumen 75.

....

Morishima, M.

The Theory of Demand, Real and Monetary
Oxford University press
1973. Oxford. Primera edición.

Nasse, P.

'Analyse des Effects de Substitution dans un Système Complet de Fonctions de Demande'
Annales de l'Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques
1970, número 5.

Nelson, P.

'Information and Consumer Behaviour'
Journal of Political Economy
1956, volumen 38.

Pearce, J.F.

- 'An Exact Method of Consumer Demand Analysis'
  Econometrica
  1961, volumen 29.
- A Contribution to Demand Analysis
  Oxofrd University Press
  1964. Oxford. Segunda edición.

Peston, M.H.

'Changing Utility Function'
Essays in Honor of Oskar Morgenstern
Princeton University Press
1967. Princeton. Primera edición.

Pollak, R.A.

- 'Conditional Demand Functions and Consumption Theory'
  Quarterly Journal of Economics
  1969, volumen 83.
- 'Interdependence Preferences'
  American Economic Review
  1976, volumen 66.

....

Roy, R.

<u>De l'Utilité, Contribution à la Theorie des Choix</u>
Hermann, Ed.
1942, Paris, Primera edición.

Samuelson, P.A.

- 'A Note on the Pure Theory of Consumer Behaviour'
  Economica
  1938, volumen 5.
- 'Using Full Duality to show that Simultaneously Additive Direct- and Indirect Utilities implies Unitary Price elasticity of Demand'
  Econometrica
  1965, volumen 33.
- 'Maximum Priciples in Analytical Economics'
  American Economic Review
  1972, volumen 62.

Schumpeter, J.

<u>History of Economic Analysis</u>
Oxford University Press
1954, New York and London. Primera edición.

Sen, A.K.

'Behaviour and the Concept of Preference'
Economica
1973, volumen 40.

Silberberg, E.

'Duality and the many Consumer's Surpluses'
American Economic Review
1974, volumen 62.

Simaon, H.A.

- 'A Behaviour Model of Rational Choice'
  Quarterly Journal of Economics
  1955, volumen 62.

****

Simaon, H.A.

- *'On How to Decide What To Do'*
  Bell Journal of Economics
  1978, volumen 9a.

Solari, L.

Théorie des Choix et Fonctions de Consumation Semi-Agrégées --- Modèle Statistique
Libraire Droz
1971, Genève, Primera edición.

Stigler, G.J.

- *'The Development of Utility Theory'*
  Journal of Political Economy
  1950, volumen 58.
- *'The Early History of Empirical Studies of Consumer Behaviour'*
  Journal of Political Economy
  1954, volumen 62.

Theil, H.

- *'The Information Approach to Demand Analysis'*
  Econometrica
  1965, volumen 33.
- *Theory and Measurement of Consumer Demand*
  North Holland Publishing Co.
  1976, Amsterdam, Volumen I y II.

Theil, H & Brooks, K.B.

'How does the Marginal Utility of Income change when Real Income - changes?
European Economic Review
1970, volumen 2.

Tintner, G.

'The Maximization of Utility over time'
Econometrica
1938, volumen 6b.

****

Tobin, J.

'The Consumption Function'
International Encyclopedia of the Social Sciences
1968, volumen III, Primera edición.

Wold, H.

- 'A Synthesis of Pure Demnad Analysis, Parts I and II'
  Scandinavish Aktuarietidskrift
  1943, volumen 26.
- 'A Synthesis of Pure Demand Analysis, Part III'
  Skandinavish Aktuarietidskrift
  1944, volumen 27.

working, E. J.

'What Do Statistical Demand Curves Show?
Quarterly Journal of Economics
1927, volumen 61.

Woodside, A.G., Sheth, J.N. & Bennett, P.D.

Consumer and Individual Buying Behaviour
North Holland Publishing Co.
1971, Amsterdam, Primera edición.

Yoshihara, K.

'Demand Functions: An Application to the Japanese Expenditure - Pattern'
Econometrica
1969, volumen 37.

....

BIBLIOGRAFIA GENERAL

Arrow, K. J., Hurwickz, L. & Uzawa, H.
'Constant Qualification in Maximization Problems'
Naval Research Logistic Quarterly
1971, New York.

Becker, G. S.
Economic Theory
Chicago University Press
1971, Chicago. Primera edición.

Call, S. T. & Holahan, W. L.
Microeconomics
Wadsworth Publishing Co.
1980, Belmont. Primera edición.

Cochrane & Bell
Economics of Consumption
McGraw-Hill Book Co., Ltd.
1983, London. Cuarta edición.

Deaton & Muellbauer
Economics and Consumer Behaviour
Cambridge University Press
1984, Cambridge. Primera edición.

Dixit, A. K.
Optimization in Economic Theory
Oxford University Press
1976, Oxford. Primera edición.

Dixon, P. B., Bowles, S. & Kendriks, D.
Notes and Problems in Microeconomic Theory
North Holland Publishing Co.
1980, Amsterdam. Segunda edición.

****

Edgeworth, F.Y.

Mathematical Psychics
London School of Economics Press
1932, London. Segunda edición.

Fisher, J.

Mathematical Investigation in the Theory of Value and Prices
Yale University Press
1937, New Haven. Tercera edición.

Friedman, M.

- The Theory of Consumption Function
  Princeton University Press
  1957, Princeton. Primera edición.
- Teoría de los Precios
  Editorial Alianza
  1979, México. Cuarta edición.

Friedman, M. & Savage, L.S.

'The Utility Analysis of Choice Involving Risk'
Journal of Political Economy
1948, volumen 56.

Gossen, H.H.

'Entwicklung der geetze des menschlichen verkhers und des darans fliessen der regew fur menschliches handeln'
Publicado en 1889, traducción anónima.

Hutchinson, T.W.

A Review of Economics Doctrines, 1870-1929
Clarendon Press
1953, Oxford. Primera edición.

Jevons, W.S.

The Theory of Political Economy
Macmillan Publishing Co.
1871, London. Tercera edición.

....

Johnson, W.E.

'The Pure Theory of Utility Curves'
Economic Journal
1913, volumen XXIII.

Kuhn, H.W. & Tucker, A.W.

Non-Linear Programming
University of California Press
1951, Berkley, Primera edición.

Layard, P.R.G. & Walters, A.A.

Microeconomics Theory
McGraw-Hill Publishing Co., Ltd.
1978, Great Britain, Primera edición.

Machlup, F.

'Professor Hicks' Revision of Demand Theory'
American Economic Review
1957, volumen 57.

Marshall, A.

- Principles of Economics
  Macmillan Publishing Co.
  1927, London, Octava edición.
- 'Notes on the History of the Giffen Paradox'
  Journal of Political Economy
  1947, volumen 54.

Menger, C.

Collected Works
London School of Economics Press
1934, London, Volumen I.

Roll, E.

A History of Economic Thought
Faber & Faber Ltd.
1973, London, Cuarta edición.

****

Schultz, H.

The Theory and Measurement of Demand
Chicago University Press
1938, Chicago. Quinta edición.

Silberberg, E.

Structure of Economics: A Mathematical Analysis
Norton Press.

Slater, H.

'Lagrange Multiplier Revisited: A Contibution to Non-Linear --- Programming'
Cowles Comission Discussion Paper, Math. 403
1950, Boston.

Slutsky, E.

'Sulla Teoria del Bilancio del Consomatore'
Giornale degli Economisti, serie 3
1915, Italia. Volumen LVI.

Sraffa, R.

'The Law of Returns under Competitive Conditions'
Economic Journal
1942, número 89.

Stigler, G. J.

Essays in the History of Economics
Chicago University Press
1965, Chicago. Tercera edición.

Woid, A. A.

Analytical Geometry
London School of Economics Press
1977, London. Octava edición.

****
****