

24.52



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE CIENCIAS

ESTABILIDAD HIDRODINAMICA DE UNA CAPA  
DE FLUIDO  
DESCENDIENDO  
POR UN PLANO INCLINADO EN ROTACION

TESIS  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
FISICO  
PRESENTA  
GERARDO RUIZ CHAVARRIA

MEXICO, D. F.

SEPTIEMBRE DE 1988



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# CONTENIDO

RESUMEN.....	3
INTRODUCCION.....	4
<b>1.- PRINCIPIOS GENERALES DE LA MECANICA DE FLUIDOS</b>	
1.I HIPOTESIS DEL CONTINUO.....	9
1.II DESCRIPCIONES LAGRANGIANA Y EULERIANA.....	10
1.III CONSERVACION DE LA MASA.....	12
1.IV CONSERVACION DE MOMENTO.....	13
1.V ECUACIONES CONSTITUTIVAS.....	15
1.VI SEMEJANZA FISICA Y PARAMETROS ADIMENSIONALES.....	18
1.VII CONDICIONES DE FRONTERA.....	21
<b>2.-TEORIA LINEAL DE LA ESTABILIDAD</b>	
2.I DEFINICION DEL PROBLEMA .....	24
2.II MODOS NORMALES.....	26
2.III LIMITES DE LA TEORIA LINEAL.....	29
<b>3.- FLUJO DESCENDIENDO POR UN PLANO INCLINADO</b>	
3.I FLUJO PRINCIPAL.....	30
3.II ADIMENSIONALIZACION DE LAS VARIABLES DE FLUJO.....	36
<b>4.- FUNDAMENTOS DE LA TEORIA LINEAL DE LA ESTABILIDAD EN UN SISTEMA EN ROTACION</b>	
4.I GENERALIZACION DE LA ECUACION DE ORR SOMMERFELD.....	45
4.II CONDICION CINEMATICA.....	49
4.III CONDICIONES DE FRONTERA.....	50
<b>5.- ESTABILIDAD DE PERTURBACIONES CON NUMERO DE ONDA PEQUEÑO. APROXIMACION A ORDEN CERO</b>	
5.I ECUACIONES FUNDAMENTALES Y CONDICIONES DE FRONTERA..	54
5.II APROXIMACION A ORDEN CERO.....	56

<b>6.- ESTABILIDAD DE PERTURBACIONES CON NUMERO DE ONDA PEQUEÑO. APROXIMACION A PRIMER ORDEN</b>	
6.I	INTRODUCCION..... 66
6.II	INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DE ESTABILIDAD. REDUCCION DE ORDEN..... 69
6.III	SOLUCION PARTICULAR. METODOS DE PARAMETROS INDETERMINADOS..... 78
6.IV	CALCULO DE C A PRIMER ORDEN..... 81
6.V	ANALISIS DE LA ESTABILIDAD..... 86
<b>7.- ESTABILIDAD DE UN FLUJO CON VALORES PEQUEÑOS DE NUMERO DE REYNOLDS, NUMERO DE TAYLOR Y ANGULO DE INCLINACION</b>	
7.I	HIPOTESIS BASICAS..... 103
7.II	ECUACIONES FUNDAMENTALES Y CONDICIONES DE FRONTERA.. 105
7.III	SOLUCION A ORDEN CERO..... 107
7.IV	SOLUCION A PRIMER ORDEN EN AUSENCIA DE TENSION SUPERFICIAL..... 114
7.V	ANALISIS DE LA ESTABILIDAD..... 121
8.-	CONCLUSIONES..... 130
BIBLIOGRAFIA..... 133	

## RESUMEN

En este trabajo se aborda el problema de la estabilidad lineal de una capa de fluido que desciende sobre un plano inclinado en rotación. Como primer paso se obtiene una solución estacionaria en forma de capa descendente y con espesor constante, sobre el cual se estudiara la estabilidad.

En un capítulo posterior se obtiene un sistema de ecuaciones que generaliza a la ecuación de Orr-Sommerfeld, mismo que se utiliza para describir la evolución de perturbaciones infinitesimales. Considerando que no hay soluciones analíticas a dichas ecuaciones, se hacen aproximaciones en forma de serie de potencias para dos casos a) perturbaciones con número de onda pequeño y b) perturbaciones en flujos con valores pequeños de número de Reynolds, número de Taylor y ángulo de propagación.

En líneas generales se obtiene que la rotación tiene un efecto estabilizador sobre el flujo.

## INTRODUCCION

El flujo de un líquido sobre una superficie sólida aparece en muchos procesos naturales e industriales. Por ejemplo, el descenso de las gotas de lluvia por una placa de vidrio o bien el recubrimiento de superficies con pintura. Las características de estos flujos han sido estudiadas intensamente en las últimas cuatro décadas.

En 1906 Sommerfeld obtiene una ecuación diferencial de cuarto orden para la función de corriente de una perturbación en un flujo unidireccional (Drazin, 1979). Ocupa el método de separación en modos normales. Se trata de la llamada ecuación de Orr-Sommerfeld:

$$\phi'''' - 2k^2\phi'' + k^4\phi = ikR[(U' - c)(\phi'' - k^2\phi) - U'\phi],$$

siendo  $c$  una cantidad compleja cuya parte real es la velocidad de propagación de la perturbación, y la parte imaginaria indica si la perturbación crece o se amortigua,  $k$  el número de onda,  $R$  es el número de Reynolds y  $U$  el campo de velocidades (dependiente de una sola coordenada).

La primera investigación teórica acerca del escurrimiento de un líquido por un plano inclinado fue realizada por Nusselt en 1926 (Mijeev, 1979), quien supuso que la interfase líquido-aire era plana. Como resultado de su estudio obtiene algunas características del flujo, entre las que destacan que el líquido se mueve en una sola dirección y que el perfil de velocidades es semiparabólico, con el vértice en la superficie libre.

El modelo de Nusselt predice un flujo estacionario, resultado del balance entre las fuerzas viscosas y la componente de la gravedad en la dirección del plano inclinado; los términos

de inercia son despreciados en la ecuación de momento. Las conclusiones de éste modelo son válidas únicamente para números de Reynolds pequeños (Benjamin, 1957).

Usualmente la superficie libre no es plana; una gran cantidad de experimentos muestran la formación de ondas que se propagan hacia abajo. Las ondas pueden crecer hasta llegar a una amplitud de equilibrio o bien dar lugar a un flujo más complicado (Krantz et. al., 1971). Las evidencias experimentales indican que la superficie ondulada se observa hasta valores de  $R$  alrededor de 300, y con valores más altos el movimiento se torna turbulento (Benjamin, 1957).

El problema de la formación de ondas en una capa líquida que desciende por un plano inclinado se encuentra en los marcos de la estabilidad hidrodinámica. Los trabajos que inician esta línea de investigación se deben a Kapitza, Benjamin e Yih (Krantz, 1971). Kapitza investiga el comportamiento y las características de las ondas sin amortiguamiento ni crecimiento (Krantz, 1971), aunque sus resultados son inexactos (Yih, 1963).

Posteriormente, Benjamin (1957) presenta una solución aproximada a la ecuación de Orr-Sommerfeld en forma de una serie de Frobenius, truncada hasta la potencia 15. Con este desarrollo demuestra que el escurrimiento por una pared vertical es inestable para todos los valores finitos de  $R$ . La convergencia de la serie de potencias es lenta para valores grandes de  $R$ , por lo que sus resultados son válidos cuando el número de Reynolds es pequeño.

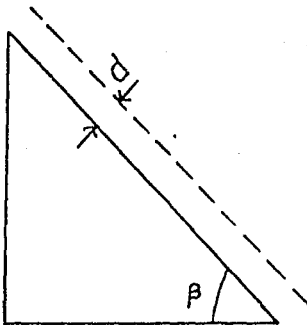
Uno de los trabajos más importantes corresponde a Yih (1963). Yih obtiene soluciones aproximadas a la ecuación de Orr-Sommerfeld en dos casos: a) para valores pequeños del número de onda y b) para valores pequeños del número de Reynolds. El método de solución es una expansión en serie de potencias de los parametros  $k$  y  $R$  en la ecuación de Orr-Sommerfeld y en las

condiciones de frontera. Algunas de las conclusiones concuerdan con las de Benjamin, otras son nuevas.

Yih (1963) demuestra que para valores pequeños de  $k$  las ondas se propagan con una velocidad que es dos veces la del flujo en la superficie libre. Además, dichas ondas crecerán si el número de Reynolds es tal que:

$$R > \frac{5}{6} \cot \beta$$

La velocidad que ocupa Yih para definir el número de Reynolds es el promedio espacial de  $U$ ,  $\langle U \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d U dy$ , donde  $d$  es la anchura de la capa (ver figura). Adicionalmente, resulta que la tensión superficial no influye en la estabilidad de las ondas largas, algo que era de esperarse, ya que en tales condiciones la curvatura de la superficie libre es despreciable.



En la aproximación para números de Reynolds pequeños, Yih llega a la conclusión de que el flujo siempre es estable, excepto cuando el plano está vertical y la tensión superficial es despreciada.

Otra línea de investigación es el estudio del escurrimiento de líquidos en superficies que no son planas, como sucede en tubos, alambres y conos. Algunos procesos industriales presentan este tipo de flujos. Por ejemplo, el depósito de una capa aislante en los alambres ocupados para la fabricación de bobinas, el



deposito de la emulsión en las películas fotográficas o el recubrimiento de tubos con una película protectora de pintura o aceite.

En muchos casos es importante que la capa tenga una anchura uniforme. La inestabilidad (manifestada en la formación de ondas) impone un límite a las tasas de producción o bien induce la selección de los materiales fabricados. Lin y Liu (1975) resuelven una ecuación diferencial parcial no-lineal que describe el movimiento de la superficie libre de una película de fluido sobre un cuerpo de forma cilíndrica. Las fuerzas que consideran son: la gravedad, la viscosidad y la tensión superficial. Estos autores determinan algunas condiciones bajo las cuales el espesor de la capa es uniforme, mismas que dependen explícitamente del número de Reynolds, el número de onda y el número de Weber. La utilidad de esta investigación es evidente.

Más recientemente, Zollars (1980) presenta una investigación sobre la estabilidad de un líquido que desciende por un cono, cuyo eje coincide con la vertical. Hay dos diferencias respecto al problema del plano inclinado, a saber, la curvatura de la superficie y el incremento de la superficie donde se mueve el cono. Un efecto de esto último es la disminución del espesor de la capa líquida conforme se aleja del vertice del cono. En líneas generales puede decirse que si bien, localmente puede haber inestabilidad, lejos del vertice todas las perturbaciones decaen. En esto juega un papel primordial el adelgazamiento de la capa.

En este trabajo se aborda el problema de la estabilidad lineal de una película de fluido que se mueve por un plano inclinado bajo la acción de la gravedad y la rotación. El capítulo 1 está dedicado a presentar los conceptos primordiales y las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos. En el capítulo 2 se exponen las características, los métodos y los límites de aplicación de la teoría lineal de la estabilidad.

En el capítulo 3 se plantean y se resuelven las ecuaciones que describen el comportamiento de la capa de fluido por un plano inclinado en rotación y en ausencia de perturbaciones. La solución es un flujo laminar cuyas componentes de velocidad dependen sólo de la coordenada perpendicular al plano. Además, al final se transforman las variables del flujo a una forma adimensional.

El capítulo 4 está dedicado a aplicar los métodos de la teoría lineal de la estabilidad al problema de la capa de fluido en rotación. En base a las ecuaciones de momento y continuidad se obtiene una generalización de la ecuación de Orr-Sommerfeld.

Partiendo de que las ecuaciones de la estabilidad lineal no tienen una solución analítica, en los capítulos 5 y 6 se obtiene una aproximación válida para números de onda pequeños. Lo que se hace es buscar una solución en serie de potencias de  $k$  y se trunca el desarrollo hasta el término de orden 1.

El capítulo 7 incluye una aproximación al problema de la estabilidad válida cuando el número de Reynolds, el número de Taylor y el ángulo de inclinación (medido respecto a la vertical) son pequeños.

Los principales resultados de este trabajo se presentan a través de gráficas al final de los capítulos 6 y 7. Por último, en el capítulo 8 se dan las conclusiones y las perspectivas.

# I.-PRINCIPIOS GENERALES DE LA MECANICA DE FLUIDOS

## I. -HIPOTESIS DEL CONTINUO

Una de las hipótesis básicas de la mecánica de fluidos es la suposición de que la materia contenida en cierta región del espacio llena totalmente el volumen donde esta confinada, es decir, no existen huecos. La estructura molecular de la materia es ignorada y se le sustituye por un continuo. De acuerdo a esta concepción, se considera que la cantidad de partículas dentro en un volumen arbitrario es infinita. Si a lo anterior agregamos que un fluido es un cuerpo deformable, esto es, la separación entre dos partículas es susceptible de sufrir modificaciones por la acción de una fuerza, resulta que el número de coordenadas para describir su movimiento es infinito. Por lo tanto, en el modelo del continuo un fluido es tratado como un sistema con un número infinito de grados de libertad (Landau, 1978).

En lo sucesivo, al referirnos a una partícula material consideraremos un elemento de fluido, pequeño desde el punto de vista macroscópico, pero que contenga aún un número considerable de moléculas, de manera que pueda ser ignorado el carácter discreto de la materia. En forma similar definiremos un elemento de volumen.

La hipótesis del continuo conduce a predicciones cuantitativas que concuerdan con las observaciones experimentales cuando las distancias características de los fenómenos estudiados son mucho mayores que el camino libre medio de una molécula. Existe un parametro adimensional  $K$  conocido como número de Knudsen, que se define así:  $K = \frac{l}{L}$ , siendo  $l$  el camino libre medio y  $L$  una longitud representativa del flujo. Cuando  $K$  es pequeño el

fluido puede ser estudiado como un continuo.

Aparte de lo anterior, supondremos que todas las funciones que describen las propiedades del fluido son continuas, excepto en un número finito de superficies que separan a las regiones de continuidad. Esto último permitirá ocupar las herramientas del cálculo diferencial e integral.

Una de las consecuencias de la hipótesis del continuo es la utilización de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales en la descripción de las propiedades de un fluido (Sommerfeld, 1950), lo que marca una diferencia básica con respecto a la mecánica de sistemas con un número finito de grados de libertad.

## II. -DESCRIPCIONES LAGRANGIANA Y EULERIANA

En la mecánica ordinaria uno de los conceptos básicos es el de posición de la partícula. Se trata de una variable que se obtiene al resolver la segunda ley de Newton y que depende de las coordenadas iniciales y del tiempo (Landau, 1978).

A la descripción de la trayectoria de un cuerpo en términos de las condiciones iniciales y el tiempo se le conoce como representación lagrangiana (Malvern, 1969).

Aparte de la anterior, existe una forma alternativa para describir las propiedades de un fluido. En lugar de considerar un elemento de materia, lo que se hace es fijar la atención en un elemento de volumen fijo en el espacio. Las propiedades del fluido se determinan para cada punto del espacio y el tiempo; entonces, las magnitudes como la velocidad, la presión, la temperatura, etc. adquieren el carácter de campos. En esta representación las coordenadas espaciales y el tiempo son puestas al mismo nivel: son las variables independientes. A la anterior se le conoce como

descripción euleriana y es la más usual en la mecánica de fluidos.

Las leyes de la mecánica y la termodinámica están referidas usualmente a un elemento de masa. Sin embargo, la descripción euleriana requiere de la aplicación de estas leyes a un elemento de volumen. El paso de una a otra se hace por medio de un resultado conocido como *Teorema de Transporte de Reynolds*

Fijemos la atención en una masa de fluido en movimiento. Tanto el volumen que ocupa como su frontera sufrirán modificaciones en el transcurso del tiempo. Luego, la integral de una propiedad  $\alpha$  del fluido se hará sobre una región de integración que es función del tiempo.

Interesa conocer cuál es la razón de cambio de una integral, ya que estas aparecen en las expresiones de balance de masa, momento y energía.

Definimos la *derivada material* de una integral de volumen como la razón de cambio -en el tiempo- de una integral que se toma, no en un volumen determinado del espacio (como se hace usualmente), sino sobre un sistema de masa constante. Se denota como sigue:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \alpha dv,$$

donde  $v(t)$  es el volumen que ocupa el sistema y depende del tiempo.

Esta integral se expresará en función de las variables independientes en un sistema de Euler, la posición  $\bar{x}$  y el tiempo  $t$ . Sea  $v$  el volumen ocupado por un sistema de masa constante a un cierto tiempo y  $s$  la superficie que limita a  $v$ . La razón de cambio de la integral  $\int_{v(t)} \alpha dv$  tiene dos contribuciones: a) la variación de  $\alpha$  dentro del volumen inicial  $v$  y b) el flujo neto de  $\alpha$  a través de la superficie  $s$  (Malvern, 1969). Lo anterior conduce a la

igualdad:

$$(1.1) \quad \frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \alpha dv = \int_v \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \int_s \alpha \vec{v} \cdot \hat{n} ds.$$

Recurriendo al teorema de Gauss, la igualdad quedará escrita en terminos de integrales de volumen:

$$(1.2) \quad \frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \alpha dv = \int_v \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \text{div}(\alpha \vec{v}) \right] dv$$

La integral de la derecha se hace sobre un volumen fijo en el espacio; Por tanto llegamos a una expresión aplicable directamente en la representación euleriana. Señalese que  $\alpha$  puede ser un escalar o los elementos de un vector o un tensor.

### III. -CONSERVACION DE LA MASA

Uno de los principios básicos de la física clásica establece que la cantidad de masa permanece constante en el universo. Esto significa que no puede existir creación o de aniquilación de materia. La variación de masa en un volumen fijo  $v$  se debe entonces al flujo a través de la superficie que lo limita.

Considerese un masa arbitraria de fluido. La conservación de la materia implica que la derivada material de la integral de volumen de la densidad de masa es igual a cero. En la representación euleriana esto significa que:

$$(1.3) \quad \int_v \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} \right] dv = 0.$$

Teniendo en cuenta que el volumen de integración es arbitrario, concluimos que el integrando es igual a cero. La ecuación que resulta es una expresión local de la conservación de la masa:

$$(1.4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0,$$

que se conoce como ecuación de continuidad por ser una ecuación en derivadas parciales, lo que implica que la velocidad es continua (Currie, 1974). Se ha ocupado notación tensorial, en la que se usa la convención de suma sobre índices repetidos.

Cuando la velocidad del flujo es pequeña en comparación a la velocidad del sonido del fluido, podemos considerar que la densidad permanece constante. A los fluidos que cumplen esta condición se les llama incompresibles. La ecuación de continuidad adopta entonces una forma más simple:

$$(1.5) \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0.$$

#### IV. -CONSERVACION DE MOMENTO

La ecuación de conservación de momento resulta al aplicar la segunda ley de Newton a un elemento de fluido. Recurriendo al teorema de transporte de Reynolds, la ecuación de balance de momento toma la forma:

$$(1.6) \quad \int_v \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) \right] dv = F_i,$$

donde  $F_i$  incluye a todas las fuerzas que actúan sobre el fluido.

Las fuerzas pueden agruparse en dos categorías. En primer lugar mencionaremos aquellas que actúan sobre cada punto material del fluido y que se conocen como fuerzas volumétricas o de cuerpo. Dentro de esta clase se encuentran las fuerzas gravitacionales, las electromagnéticas y las fuerzas ficticias (que se incluyen cuando el movimiento se describe desde un sistema de referencia no inercial). En el otro grupo están las fuerzas que actúan sobre la superficie del elemento de fluido; dependen exclusivamente del área y orientación de la misma y se les llama fuerzas de superficie.

Sea  $\bar{f}$  la fuerza volumétrica por unidad de masa y  $\bar{P}$  la resultante de las fuerzas superficiales por unidad de área. La fuerza total  $\bar{F}$  puede escribirse entonces como la suma de una integral de volumen y una integral de superficie:

$$(1.7) \quad \bar{F} = \int_V \rho \bar{f} \, dv + \int_S \bar{P} \, ds,$$

Dentro de las fuerzas superficiales por unidad de área incluimos a la presión y a los esfuerzos viscosos. En un elemento

de fluido podemos identificar 9 componentes de esfuerzos, 3 para cada plano coordenado. Luego, la descripción de los esfuerzos se hará con un tensor de segundo rango  $\sigma_{ij}$ , donde el primer subíndice indica que ese elemento actúa sobre un plano perpendicular al eje  $x_i$  y el segundo índice da la dirección hacia donde actúa el esfuerzo.  $P_i$

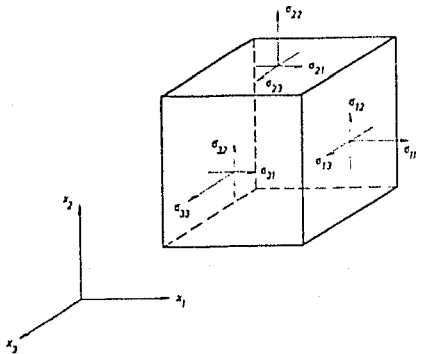


FIGURA 1. - Representación de los elementos del tensor de esfuerzos.



puede escribirse entonces como sigue:

$$(1.8) \quad P_i = \sigma_{ij} n_j,$$

siendo  $n_j$  el vector normal a la superficie. La fuerza adopta la siguiente forma:

$$(1.9) \quad F_i = \int_V \rho f_i dv + \int_S \sigma_{ij} n_j ds,$$

Usando el teorema de la divergencia se transforma al segundo termino en una integral de volumen. La ecuación de momento queda entonces así:

$$(1.10) \quad \int_V \left[ \rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] \right] dv = \int_V \left[ \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] dv.$$

Considerando que el volumen de integración es arbitrario, podemos escribir la ecuación de momento en forma diferencial:

$$(1.11) \quad \rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}.$$

#### V. - ECUACIONES CONSTITUTIVAS

En los párrafos anteriores se han establecido los principios generales que satisface cualquier fluido. En esta parte serán consideradas las ecuaciones que relacionan las fuerzas que actúan sobre una partícula material con la estructura interna y las propiedades del fluido. Estas relaciones reciben el nombre de *ecuaciones constitutivas*.

Las ecuaciones constitutivas se obtienen a partir de la observación experimental y ciertas condiciones adicionales. Un

buen ejemplo lo constituye la Ley de Hooke , que relaciona la deformación de un cuerpo con las cargas aplicadas. En un fluido es importante determinar la dependencia funcional de los elementos del tensor de esfuerzos con respecto a otras variables del flujo.

Helmholtz demostró en 1858 que un movimiento infinitesimal de un elemento de cuerpo deformable puede ser representado como la suma de una traslación, una rotación y una deformación (extensión o contracción y corte puro) (Sommerfeld, 1950). Las fuerzas superficiales que actúan en las paredes del elemento material producen deformaciones.

De la evidencia experimental se propone que  $\sigma_{ij}$  depende del tensor rapidez de deformación  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_s} \right)$ . Considerando la simetría del tensor de esfuerzos -que se obtiene de la conservación del momento angular (Strelkov, 1977)- resulta que este sólo puede depender de la parte simétrica de  $(\partial u_k / \partial x_s)$ , es decir de  $(\partial u_k / \partial x_s + \partial u_s / \partial x_k)$  conocido como tensor de rapidez de corte ( $e_{sk}$ ).

Una relación entre  $\sigma_{ij}$  y  $e_{ij}$  se obtiene al hacer una expansión en serie de Taylor alrededor de  $e_{kl} = 0$ :

$$(1.12) \quad \sigma_{ij} = f_{ij} + f_{ijkl} e_{kl} + f_{ijklmn} e_{kl} e_{mn} + \dots,$$

donde  $f_{ij}$  es un tensor de segundo orden,  $f_{ijkl}$  es un tensor de cuarto orden, etc.

Se supondrá que la relación es lineal. Un comportamiento de este tipo puede encontrarse en el agua, el aire y muchos de los fluidos más abundantes en la superficie de la tierra (a los fluidos que se comportan de esta manera se les denomina newtonianos). La hipótesis de linealidad implica que  $f_{ijkl}$  no depende de  $e_{ij}$  y que  $f_{ij}$  es, a lo más, lineal en  $e_{ij}$ .

Entonces, la relación entre  $\sigma_{ij}$  y  $e_{ij}$  queda:

$$(1.13) \quad \sigma_{ij} = f_{ij} + f_{ijkl} e_{kl}.$$

Se considera además que el fluido es homogéneo e isotrópico, lo que implica que  $f_{ij}$  y  $f_{ijkl}$  deberán ser tensores isotrópicos.

Un tensor es isotrópico si sus elementos permanecen iguales bajo una transformación ortogonal de coordenadas cualquiera. En el caso de los tensores de segundo rango, cumplen esta condición únicamente aquellos de la forma:

$$(1.14) \quad f_{ij} = \lambda \delta_{ij},$$

donde  $\lambda$  es un escalar.

Por otra parte, la forma más general de un tensor isotrópico de cuarto orden es (Malvern, 1969):

$$(1.15) \quad f_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \alpha (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Teniendo en mente que  $\sigma_{ij}$  es simétrico, tendremos que hacer  $\alpha$  igual a cero, ya que este coeficiente multiplica a un tensor antisimétrico en  $i$  y  $j$  y en  $k$  y  $l$ .

En ausencia de movimiento, la única fuerza superficial es la presión hidrostática, que es un esfuerzo perpendicular a la superficie. Por lo tanto  $f_{ij} = -p \delta_{ij}$ .

La relación que se tiene hasta ahora entre  $\sigma_{ij}$  y  $e_{ij}$  es:

$$(1.16) \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x^k} \right) + \eta e_{ij},$$

misma que puede reescribirse en términos de cantidades físicas que caracterizan la sustancia, la viscosidad cortante  $\mu$  y la viscosidad volumétrica  $\zeta$  (Currie, 1974):

$$(1.17) \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

Por lo tanto, la ecuación de balance de momento de un fluido newtoniano e incompresible es:

$$(1.18) \quad \rho \left[ \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \nabla^2 u_j + \rho f_j$$

A (1.18) se le denomina ecuación de Navier-Stokes.

## VI. -SEMEJANZA FISICA Y PARAMETROS ADIMENSIONALES

Decimos que 2 fenómenos son semejantes cuando existen entre ellos algunas características comunes. Desde el punto de vista de la mecánica de fluidos podemos hablar de tres tipos de semejanza entre dos sistemas (Malvern, 1969):

i) Semejanza Geométrica: ocurre cuando la geometría y la forma del flujo tienen la misma disposición en los dos casos. El cociente de longitudes correspondientes siempre da el mismo valor. Podríamos decir que dos hojas de papel son semejantes geométricamente si el cociente *anchura/largo* es el mismo en ambos casos.

ii) Semejanza Cinemática: elijase al azar un punto (1) en uno de los flujos; busquese enseguida el punto equivalente (2) en el otro flujo. Entonces, los flujos serán equivalentes cinemáticamente si los cocientes de la velocidad  $v_1/v_2$  y de la aceleración  $a_1/a_2$  no dependen de la elección del punto 1.

iii) Semejanza Dinámica: considere dos elementos de masa, elegidos como se hizo en el caso anterior. Dos flujos son dinámicamente equivalentes si el cociente de la fuerza  $F_1/F_2$  no depende de la elección del elemento de masa 1.

Habr  semejanza completa cuando se cumplan simultaneamente todas las condiciones sealadas en los incisos anteriores. La semejanza se convierte en un medio de comparaci3n de resultados aparentemente diferentes. Por ejemplo, la corriente en un río puede asemejarse bajo ciertas condiciones al flujo en un canal.

Desde una interpretaci3n distinta, la semejanza permitirá extender los resultados te3ricos y experimentales obtenidos en un fen3meno particular a otros casos. Esto es importante por cuanto las ecuaciones que describen un flujo son no-lineales y su integraci3n es bastante complicada, requiriendose en la mayoría de los casos el uso de m3todos num3ricos.

Uno de los procesos que permite comparar fen3menos (y buscar semejanzas) con diferentes dimensiones y propiedades físicas es la adimensionalizaci3n de variables. La introducci3n de variables adimensionales en las ecuaciones de movimiento conduce directamente a la formaci3n de combinaciones de cantidades físicas cuyas dimensiones se cancelan y que representan comunmente cocientes de fuerzas (parametros adimensionales).

La ecuaci3n de Navier-Stokes contiene las siguientes variables: la velocidad, las coordenadas, el tiempo y la presi3n. Adimensionalizemos  $\bar{v}$  con la magnitud de una velocidad representativa en el flujo ( $U_0$ ); a las coordenadas con una longitud característica del sistema ( $L$ ). A la presi3n con  $\rho U_0^2$  y al tiempo con  $L/U_0$ . Al introducir esto en la ecuaci3n de momento y en ausencia de fuerzas externas aparece una única combinaci3n adimensional:  $U_0 L / \nu$  ( $\nu = \mu / \rho$  es la viscosidad cinemática) que se conoce como *Número de Reynolds* ( $R$ ). En ausencia de fuerzas externas la ecuaci3n de Navier-Stokes queda:

$$(1.19) \quad R \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \right] = \nabla^2 u_i$$

La presión se adimensionalizó con  $\rho U_0^2$  considerando la igualdad (Monin, 1975):

$$(1.20) \quad \nabla^2 p = -\rho(\partial^2 u_j u_k / \partial x_j \partial x_k),$$

que se obtiene al tomar la divergencia de la ecuación (1.18) cuando el fluido es incompresible.

Los resultados obtenidos para un valor fijo de  $R$  son aplicables a otros fenómenos. Se requiere únicamente que la geometría sea semejante y la combinación  $U_0 L / \nu$  sea la misma. He aquí una ventaja de los parámetros adimensionales.

Los números adimensionales permiten además comparar el orden de magnitud de los diversos términos en las ecuaciones de movimiento. Lo anterior es importante pues permiten determinar qué términos pueden ser ignorados y así simplificar las ecuaciones.

Cada parámetro adimensional tiene un significado físico. En particular, el número de Reynolds representa el cociente entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas.

Otro parámetro adimensional es la combinación  $\tau = 2\Omega L^2 / \nu$ , conocida como *Número de Taylor*, que aparece en la ecuación de balance de momento cuando el fluido está en rotación y el movimiento se describe desde un sistema de referencia no inercial.  $\Omega$  es la velocidad angular de rotación,  $L$  es una longitud característica y  $\nu$  es la viscosidad cinemática. El número de Taylor es el cociente entre la fuerza de Coriolis y la fuerza viscosa.

Para los fenómenos en que aparecen ondas superficiales existe una combinación adimensional conocida como *Número de Froude*  $Fr = U / (gL)^{\frac{1}{2}}$ . Este parámetro es el cociente entre una velocidad representativa del flujo y la velocidad de propagación de una onda gravitacional en aguas poco profundas. El cuadrado del

número de Froude también se interpreta como el cociente entre la fuerza de inercia y la fuerza de gravedad.

### VII. -CONDICIONES DE FRONTERA

La ecuación de Navier-Stokes es una ecuación vectorial en derivadas parciales, de segundo orden y de tipo parabólico . Sus soluciones deben satisfacer ciertas condiciones de frontera.

Usualmente se utiliza como una condición la velocidad en todas las fronteras sólidas. Supongase que un líquido fluye hallándose en contacto con una superficie de este tipo. Si  $\bar{U}$  es la velocidad de la pared, entonces la condición que debe satisfacer el campo de velocidades en la frontera es:

$$(1.21) \quad \bar{v} = \bar{U}.$$

Los resultados teóricos obtenidos al usar (1.21) concuerdan con los experimentos en una amplia gama de fenómenos.

Por otra parte, en una interfase líquido-gas las condiciones de frontera se expresan en términos de los elementos del tensor de esfuerzos. Supongase que una de las fronteras de cierto líquido en movimiento es una capa de aire, inicialmente en reposo. Si despreciamos el arrastre del gas, los esfuerzos tangenciales son nulos en esa frontera.

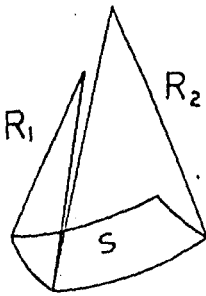
Los esfuerzos normales a la superficie libre satisfacen otro tipo de condición, esto por la existencia de una fuerza de superficie. La capa de fluido que esta en la interfase líquido-gas se encuentra en una situación especial. Las moléculas que se localizan en la superficie libre sólo están rodeadas por otras similares hacia un lado, a diferencia de lo que sucede en el

interior del líquido. Tales moléculas tienen un exceso de energía respecto a sus similares que no se encuentran en la frontera, lo que da lugar a una fuerza conocida como tensión superficial, la cual tiende a reducir el área de las fronteras de cualquier cuerpo. La tensión superficial es la causante de que las pequeñas gotas de agua tomen una forma esférica (Matvéev, 1987).

Supongase que la interfase líquido-gas es inicialmente plana y que por alguna causa sufre una deformación. Dicha deformación aumenta el área de la superficie libre; luego, la tensión superficial tenderá a que la interfase recupere su forma plana (Guerasimov et. al., 1977).

La tensión superficial es una fuerza dirigida normalmente a

la frontera entre los dos medios, es proporcional a la curvatura de la superficie. Sean  $R_1$  y  $R_2$  los dos radios principales de la superficie (ver figura 2). La condición de frontera respectiva es un balance entre los esfuerzos normales (que denotaremos aquí como  $\sigma_{nn}$ ) y la tensión superficial:



$$(1.22) \sigma_{nn} - T_s \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0,$$

FIGURA 2. -Radios principales de un elemento de superficie.

$T_s$  es el coeficiente de tensión superficial y depende de los medios que

se encuentran en contacto.

Cuando se adimensionaliza esta condición de frontera, surge un parámetro sin dimensiones, conocido como Número de Weber:

$$(1.23) \quad We = \frac{T_s}{\rho U^2 L},$$



que será usado en los capítulos 5 y 7. Con esto se concluye la parte dedicada a exponer los principios fundamentales de la mecánica de fluidos.

## 2.-TEORIA LINEAL DE LA ESTABILIDAD

### I. -DEFINICION DEL PROBLEMA

Se entiende por perturbación de un flujo a una acción sobre éste que modifica el comportamiento predecido por las ecuaciones de la mecánica de fluidos y las correspondientes condiciones iniciales y de frontera. Una perturbación puede ser, por ejemplo, una vibración de las fronteras o la colocación de un obstáculo dentro del flujo.

Los campos de velocidad  $\bar{V}(x,t)$  y de presión  $p(x,t)$  tendrán desviaciones respecto a los valores calculados para el flujo original o primario. Podremos expresar estas magnitudes como la suma de dos contribuciones:

$$\begin{aligned}\bar{V}(x,t) &= \bar{U}(x,t) + \bar{u}(x,t), \\ p(x,t) &= P(x,t) + p(x,t),\end{aligned}$$

donde  $\bar{U}(x,t)$  y  $P(x,t)$  son los campos de velocidad y presión en el flujo primario; y  $\bar{u}(x,t)$ ,  $p(x,t)$  son los correspondientes términos debidos a la perturbación.

El problema básico de la teoría de la estabilidad lineal consiste en determinar si los campos asociados a la perturbación crecen, permanecen constantes o se amortiguan. En el primer caso decimos que el flujo es inestable, ya que las campos que lo describen se alejan espacial o temporalmente del comportamiento original; en el último caso afirmamos que el flujo es estable pues al paso del tiempo o con la distancia los campos  $\bar{V}(x,t)$  y  $p(x,t)$  tienden respectivamente a  $\bar{U}(x,t)$  y  $P(x,t)$ . Si la perturbación permanece constante decimos que el flujo tiene

estabilidad neutra (Drazin, 1979). Por su parte, el problema básico de la teoría de la estabilidad no-lineal es obtener la evolución temporal y espacial de la perturbación.

En 1883 Osborne Reynolds realizó experimentos con agua fluyendo a través de tubos de diferentes radios. Uno de los resultados de su investigación fue que el flujo dejaba de ser laminar cuando la combinación adimensional  $U_0 L/\nu$  (el número de Reynolds) sobrepasaba el valor crítico  $Re=13000$ ;  $U_0$  es la velocidad máxima del agua y  $L$  es el radio del tubo (Drazin, 1979).

Usualmente la inestabilidad de un flujo esta asociada a valores de número de Reynolds ( $R$ ) relativamente altos. El comportamiento de una perturbación arbitraria y su dependencia del número de Reynolds, así como de otros parametros adimensionales, puede determinarse recurriendo a las ecuaciones de momento y continuidad. Las variables que aparecen ahí se adimensionalizarán como se hizo en la sección 1.VI. Fijaremos la atención exclusivamente en la estabilidad de flujos estacionarios e incompresibles. Por lo demás, restringiremos el estudio a los casos en que las fuerzas volumétricas sean constantes o bien, dependan de la velocidad.

Los campos de velocidad y presión en el flujo primario ( $\bar{U}$  y  $P$ ), así como en el flujo perturbado ( $\bar{V}$  y  $p$ ) son soluciones de las ecuaciones de la mecánica de fluidos. Por lo tanto, se cumplen las siguientes igualdades (escritas en términos de variables adimensionales):

$$(2.1) R \left[ \frac{\partial V_j}{\partial t} + v_k \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \frac{\partial p_j}{\partial x_k} \right] = S f_j(V_i) + \nabla^2 V_j,$$

$$(2.2) R \left[ U_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial P}{\partial x_j} \right] = S f_j(U_i) + \nabla^2 U_j,$$

$$(2.3) \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0,$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0,$$

donde  $U_j$  y  $V_j$  son las componentes  $j$  de  $\bar{U}$  y  $\bar{V}$  respectivamente y  $S$  es un parametro adimensional.

$f_j$  incluye a todas las fuerzas de cuerpo que actuan sobre el fluido. Por cada una de estas fuerzas podemos definir un número adimensional  $S$ ; Supongase, por ejemplo, que la fuerza es la de Coriolis  $-2\rho(\bar{\Omega} \times \text{velocidad})$ . La combinación adimensional que se forma es  $(2\Omega L^2/\nu)$ , el número de Taylor.

Las ecuaciones que gobiernan a la perturbación se obtienen al restar (2.2) de (2.1) y (2.4) de (2.3), dando por resultado:

$$(2.5) \quad R \left[ \frac{\partial u_j}{\partial t} + U_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] = -R \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nabla^2 u_j + S \delta f_j,$$

$$(2.6) \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0,$$

siendo  $\delta f_j = f_j(V_1) - f_j(U_1)$  y  $u_j$  es la representación tensorial del vector  $\bar{u}$ .

Determinar la evolución de la perturbación y, por lo tanto, conocer la estabilidad, es un problema en el que aparecen ecuaciones diferenciales no lineales.

## II. -MODOS NORMALES

Las dificultades asociadas a la búsqueda de soluciones a ecuaciones diferenciales no lineales pueden evitarse si se consideran unicamente perturbaciones pequeñas, es decir, si suponemos que se cumple  $\|\bar{u}(x,t)\| \ll \|\bar{U}(x)\|$ .

En ese supuesto podemos despreciar lo términos cuadráticos  $u_k (\partial u_j / \partial x_k)$  en la ecuación de momento, quedando así:

$$(2.7) \quad R_i \left[ \frac{\partial u_j}{\partial t} + U_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right] = S \delta f_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nabla^2 u_j$$

La ecuación (2.6) queda igual.

Además de las ecuaciones (2.6) y (2.7), toda solución deberá ajustarse a las condiciones iniciales y satisfacer ciertas condiciones de frontera.

Supongase que el flujo primario es estacionario. En ese caso las ecuaciones (2.6) y (2.7) forman un sistema homogéneo cuyos coeficientes no dependen del tiempo. Esperamos entonces que las soluciones contengan un factor del tipo  $\exp(-i\omega t)$  (Shivamoggi, 1985), donde el coeficiente  $\omega$  es, en general, complejo. En el caso de que  $U_j$  no dependa explícitamente de alguna de las variables espaciales, podremos aplicar el mismo argumento. Por ejemplo, supongase que el campo de velocidades tiene una dependencia explícita únicamente en la coordenada  $x_2$ . Las soluciones tendrían entonces un factor del tipo  $\exp(i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t))$ .

En el fondo; lo que se ha hecho es aplicar una separación de variables en un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones diferenciales parciales. A este método se le da el nombre de *modos normales* (Monin, 1975).

Fijemos la atención en la expresión  $\exp(i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t))$ . El término  $\exp(i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t))$  lo podemos escribir como  $k(\cos \theta x_1 + \sin \theta x_2 - ct)$ , siendo  $k = (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $(k_2/k_1) = \tan \theta$  y  $c = (\omega/k)$ . La interpretación física de  $k$ ,  $c$  y  $\theta$  es inmediata si recordamos la descripción matemática de una onda.  $k$  es el número de onda ( $2\pi/\lambda$ ) ( $\lambda \equiv$  longitud de onda),  $\theta$  es el ángulo de propagación; la parte real de  $c$  es la velocidad de propagación y la parte imaginaria indica la razón de crecimiento o decrecimiento de la perturbación. Cuando  $C_i \equiv \text{Im}(c) > 0$  hay un crecimiento temporal de tipo exponencial;  $C_i < 0$  implica que la perturbación decrece en el tiempo;  $C_i = 0$  es el caso

de la estabilidad neutra (la perturbación se propaga en forma de una onda sin modificación temporal).

Considerese una perturbación cuya longitud de onda es  $\lambda_0$ . El parametro  $k$  es igual a  $2\pi/\lambda_0$ . Luego, de acuerdo al método de modos normales la solución de  $u_j$  y  $p$  será del tipo:

$$u_j = f_j(x_2) \exp[ik(\cos\theta x_1 + \text{sen}\theta x_2 - ct)],$$

$$p = g(x_2) \exp[ik(\cos\theta x_1 + \text{sen}\theta x_2 - ct)].$$

El problema de la estabilidad consiste en determinar los valores posibles que adopta  $c$ . El procedimiento usual es el siguiente: las soluciones de los campos de velocidad y presión contienen a  $f_j(x_2)$  y  $g(x_2)$ . Estas funciones satisfacen ecuaciones diferenciales que se obtienen al sustituir las expresiones de  $u_j$  y  $p$  dadas anteriormente, en (2.6) y (2.7). Los coeficientes de estas ecuaciones dependen de  $k$ ,  $c$ ,  $R$  y posiblemente de otros números adimensionales.

Las soluciones deben satisfacer ciertas condiciones (que resultan de aplicar las condiciones de frontera). Al imponerlas obtenemos, por lo general, un sistema de ecuaciones homogéneas. El parametro  $c$  se determina como un valor propio, de manera que las ecuaciones sean consistentes. Por lo tanto, el cálculo de la estabilidad lineal se convierte en un problema de eigenvalores.

Existe una dependencia entre  $c$  y los parametros  $k$ ,  $\theta$ ,  $R$  y los otros números adimensionales; entonces  $c=c(k, R, \theta, \dots)$ . Podemos establecer condiciones bajo las cuales las soluciones elementales del problema se amortiguen o no sufran modificaciones. Estas serán condiciones de estabilidad respecto a perturbaciones infinitesimales.

### III. -LIMITES DE LA TEORIA LINEAL

El estado final de un flujo inestable puede ser un flujo laminar diferente al original, o bien el surgimiento de la turbulencia. El camino que sigue el flujo no puede ser determinado con la teoría lineal de la estabilidad. El crecimiento de una perturbación conduce inevitablemente a que sean cada vez más importantes los términos cuadráticos  $u_k(\partial u_j / \partial x_k)$  de la ecuación de momento y la evolución posterior es un problema no-lineal.

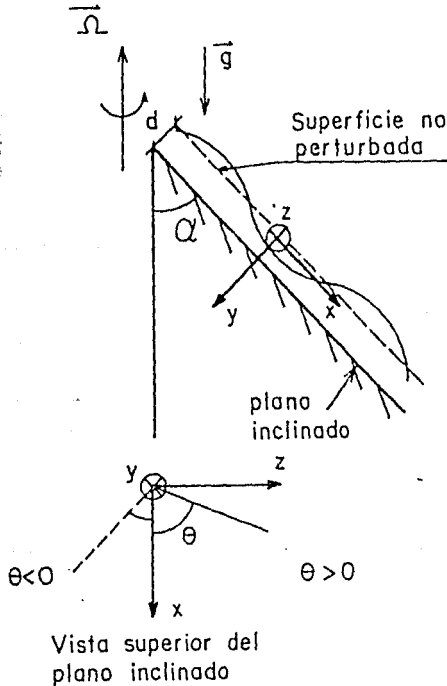
Un flujo puede ser estable en presencia de perturbaciones pequeñas, pero aún queda la posibilidad de que con respecto a perturbaciones finitas sea inestable (Para investigar esto último se requiere un método distinto al de modos normales). El mismo Osborne Reynolds lo pudo constatar en sus experimentos. Usando tubos con paredes rugosas o perturbando el líquido a la entrada del tubo, encontró que la estabilidad se perdía a números de Reynolds del orden de 2000 (Drazin, 1979).

En este trabajo se abordará el estudio de la estabilidad lineal en dos casos: a) para perturbaciones con números de onda pequeños y b) para perturbaciones en flujos cuyos números de Reynolds y Taylor son pequeños.

### 3.-FLUJO DESCENDIENDO POR UN PLANO INCLINADO

#### I. -FLUJO PRINCIPAL

Abordamos el problema de la estabilidad buscando en primera instancia los campos de velocidad y presión correspondientes al flujo primario. Consideramos una capa líquida de espesor constante ( $d$ ) que se mueve por un plano inclinado que rota con velocidad angular constante  $\Omega$ . El ángulo que forman la vertical y el plano inclinado se denota con  $\alpha$ . Ilustramos gráficamente las condiciones del problema en la figura 3.



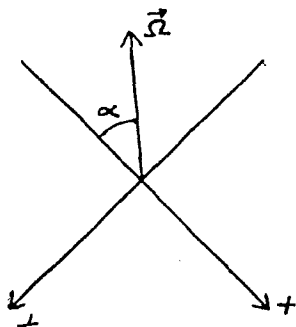
La dirección del vector velocidad angular es antiparalela a la dirección de la gravedad. Por otra parte, elegimos un sistema de referencia no inercial que se mueve con el plano inclinado y cuyo origen se localiza en un punto sobre la superficie libre de la capa de fluido (no perturbada). El eje  $x$  y el eje  $z$  son paralelos al plano inclinado. El primero coincide con la dirección de la componente de la gravedad que es paralela al plano. El eje  $y$  es perpendicular a la interfase sólido-líquido, de manera que tengamos un sistema de coordenadas derecho.

FIGURA 3.- Vistas lateral superior del plano inclinado en rotación.



La descripción del movimiento se hace desde un sistema de referencia no-inercial. Por lo tanto, la ecuación de Navier-Stokes incluye dos fuerzas de cuerpo: la fuerza ficticia de Coriolis  $-2\rho(\bar{\Omega} \times \bar{U})$  y la fuerza centrífuga  $-\rho\bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r})$ , donde  $\bar{r}$  es un vector que comienza en el eje de rotación y termina en el punto donde está aplicada la fuerza (ver la figura anterior).

En el sistema de coordenadas que se ha elegido, el vector  $\bar{\Omega}$  tiene componentes en los ejes  $x$  y  $y$  (ver figura 4), a saber:



$$(3.1) \quad \bar{\Omega} = -\Omega \cos \alpha \hat{i} - \Omega \sin \alpha \hat{j},$$

$$\text{con } \Omega = \|\bar{\Omega}\|.$$

FIGURA 4. -Vector velocidad angular en el sistema de referencia no inercial, que se mueve con el plano inclinado.

La ecuación vectorial de balance de momento -que incluye además a la gravedad- es (Sommerfeld, 1950):

$$(3.2) \quad \rho \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \nabla U^2 - \rho \bar{U} \times (\nabla \times \bar{U}) = \nabla P - 2\rho(\bar{\Omega} \times \bar{U}) - \rho\bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}) + \mu \nabla^2 \bar{U},$$

donde  $\bar{U} = U\hat{i} + V\hat{j} + W\hat{k}$  y  $U^2 = \|\bar{U}\|^2$ .

Tratándose de un fluido incompresible, la ecuación de conservación de la masa es:

$$(3.3) \quad \text{div } \bar{U} = 0.$$

Antes de resolver el sistema de ecuaciones, se harán algunas consideraciones físicas. En primer lugar, la inclusión de la fuerza centrífuga tiene como consecuencia que las coordenadas  $x, y, z$  (a través de  $\vec{r}$ ) aparezcan explícitamente en la ecuación (3.2), lo cual dificulta el cálculo del flujo principal. Por otra parte, una dependencia explícita de los campos de velocidad  $\vec{U}$  y  $P$  (flujo principal) respecto a  $x, y, z$  limita la utilidad del método de modos normales. Las soluciones serían del tipo  $f(x, y, z) \exp(-i\omega t)$ , es decir, solo es posible separar la dependencia temporal de la dependencia espacial. Con el fin de evitar las dificultades matemáticas asociadas a este problema, comenzaremos eliminando la fuerza centrífuga. Este paso limita la validez de los resultados a fenómenos en los que la fuerza de Coriolis domina a la centrífuga.

Entonces, limitaremos la investigación a flujos en los que suceda lo siguiente:

$$\frac{\|\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})\|}{\|2(\vec{\Omega} \times \vec{U})\|} \ll 1.$$

Sea  $r_0$  una longitud representativa de la distancia del eje de rotación al plano inclinado. Entonces la relación de arriba es equivalente a:

$$(3.4) \quad \frac{\Omega r_0}{2U_0} = \frac{r}{R} \frac{r_0}{4d} \ll 1,$$

donde  $U_0$  es una velocidad característica del flujo.

La segunda suposición es que el área que ocupa el flujo es lo suficientemente grande como para desprestigiar los efectos de borde. Entonces todos los puntos en un plano  $y=cte.$  serán equivalentes, es decir, las variables que describen el fenómeno

tendrán el mismo valor. En otras palabras, los campos de velocidad  $\bar{U}$  y de presión  $P$  sólo pueden depender explícitamente de la coordenada  $y$ . De la condición de continuidad resulta que  $\frac{dV}{dy}=0$ ; eso significa que  $V = \text{cte}$ . Dado que la velocidad debe anularse en la interfase líquido-plano inclinado, se tiene que  $V=0$ .

Con base en lo anterior, el sistema de ecuaciones que satisfacen los campos del flujo principal es el siguiente:

$$(3.5) \quad -2\Omega \operatorname{sen} \alpha W = g \cos \alpha + \nu \frac{d^2 U}{dy^2},$$

$$(3.6) \quad 2\Omega \cos \alpha W = g \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dy},$$

$$(3.7) \quad 2\Omega \operatorname{sen} \alpha U = \nu \frac{d^2 W}{dy^2},$$

donde  $U$ ,  $V$  y  $W$  son las componentes de la velocidad en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente.

Las ecuaciones (3.5) y (3.7) forman un sistema cerrado, cuyas incógnitas son las componentes del campo de velocidades. Buscaremos las soluciones de este sistema transformándolo en una sola ecuación compleja. Multiplicamos a (3.7) por  $i$  y enseguida le sumamos a (3.5):

$$(3.8) \quad i2\Omega \operatorname{sen} \alpha (U + iW) = g \cos \alpha + \nu \frac{d^2}{dy^2} (U + iW).$$

Definamos ahora una función  $F \equiv U + iW$ , con lo cual llegamos a una sola ecuación diferencial de segundo orden y no homogénea, a saber:

$$(3.9) \quad i2\Omega \operatorname{sen} \alpha F - \nu \frac{d^2 F}{dy^2} = g \cos \alpha.$$

La parte real de la solución será  $U(y)$  y la parte imaginaria  $W(y)$ . Si adimensionalizamos a las coordenadas con el espesor de la capa, llegamos a la siguiente ecuación:

$$(3.10) \quad i2\Omega \operatorname{sen} \alpha F - \frac{\nu}{d^2} \frac{d^2 F}{dy^2} = g \operatorname{cos} \alpha.$$

La búsqueda de la solución se hará por el camino usual. Primero resolveremos la correspondiente ecuación homogénea:

$$(3.11) \quad i2\Omega \operatorname{sen} \alpha F - \frac{\nu}{d^2} \frac{d^2 F}{dy^2} = 0.$$

De la teoría de ecuaciones diferenciales lineales, esperamos que (3.10) tenga soluciones del tipo exponencial  $F = \exp(\lambda y)$  (Kreider, 1983). El problema será determinar los posibles valores de  $\lambda$ . Como la ecuación es de segundo orden esperamos que haya 2 raíces. Sustituyendo  $\exp(\lambda t)$  en (3.11) llegamos a una ecuación algebraica:

$$(3.12) \quad \lambda^2 = i2\Omega \operatorname{sen} \alpha d^2 / \nu.$$

Recordemos la representación polar de los números complejos. El término de la derecha se encuentra a  $90^\circ$  del eje de los reales. Luego, una raíz se localiza a la mitad, es decir a  $45^\circ$  del eje real. La otra solución forma un ángulo de  $45^\circ + 180^\circ = 225^\circ$ . Por lo tanto, las raíces son:

$$(3.13) \quad \lambda_1 = (1+i)\chi \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -(1+i)\chi,$$

donde  $\chi = (\Omega d^2 \operatorname{sen} \alpha / \nu)^{\frac{1}{2}}$ . La solución general de la ecuación homogénea es:

$$(3.14) \quad A_1 \exp((1+i)\chi y) + A_2 \exp(-(1+i)\chi y).$$

Por otra parte, una solución particular de F es:

$$(3.15) \quad F_p = -i \frac{g \cot \alpha}{2\Omega} .$$

Sea  $\beta = \frac{g \cot \alpha}{2\Omega}$ . Entonces, la solución general de la ecuación diferencial (3.10) es :

$$(3.16) \quad F = A_1 \exp(1+i)\chi + A_2 \exp(-1-i)\chi - i\beta .$$

El campo de velocidades quedará totalmente determinado si ahora se imponen las condiciones de frontera. En la superficie libre (es decir, en el plano  $y = 0$ ) los esfuerzos tangenciales se anulan. Considerando la identidad  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu e_{ij}$ , lo anterior es equivalente a pedir que  $e_{21}$  y  $e_{23}$  sean iguales a cero, es decir, que:

$$(3.17) \quad \frac{dU}{dy} = \frac{dW}{dy} = 0 \quad \text{en } y = 0 .$$

Por otra parte, desde nuestro sistema de referencia el plano inclinado permanece en reposo. La condición de no-deslizamiento en la interfase líquido-plano inclinado implica entonces que las componentes de la velocidad son nulas en  $y = 1$ :

$$(3.18) \quad U(1) = W(1) = 0$$

Las condiciones en (3.17)-(3.18) implican que  $\frac{d}{dy}(U+iW) = \frac{dF}{dy} = 0$  en  $y=0$  y  $(U+iW)=0$  en  $y=1$ . De aquí llegamos a un sistema de ecuaciones para  $A_1$  y  $A_2$  :

$$(3.19) \quad A_1 \exp(1+i)\chi + A_2 \exp(-1-i)\chi - i\beta = 0$$

$$(3.20) \quad (1+i)\chi[A_1 - A_2] = 0$$

Es evidente que ambas raíces son iguales; su valor es:

$$(3.21) \quad A_1 = A_2 = i\beta / (2 \cosh(1+i)\chi)$$

Luego, la función F se expresa en términos de cosenos hiperbólicos complejos, a saber :

$$(3.22) \quad F(y) = i\beta \left[ \frac{\cosh(1+i)\chi y}{\cosh(1+i)\chi} - 1 \right]$$

Finalmente, las componentes de la velocidad son las partes real e imaginaria de F :

$$(3.23)$$

$$U = \text{Re}(F) = \beta_1 [\sinh\chi(1+y) \sin\chi(1-y) + \sinh\chi(1-y) \sin\chi(1+y)]$$

$$W = \text{Im}(F) = \beta_1 [\cosh\chi(1+y) \cos\chi(1-y) + \cosh\chi(1-y) \cos\chi(1+y)] - \\ - \beta_1 [\cosh 2\chi + \cos 2\chi]$$

con  $\beta_1 = \beta / (\cosh 2\chi + \cos 2\chi)$ .

## II. -ADIMENSIONALIZACION DE LAS VARIABLES DE FLUJO

Ocuparemos ahora los criterios de semejanza física con el fin de que la amplia gama de condiciones en que puede existir el flujo sea estudiada con una cantidad reducida de parámetros. El primer paso será la adimensionalización de las variables que describen el flujo. Para ello requerimos únicamente dos cantidades: una longitud característica y una velocidad representativa.

En lo que toca a la longitud característica, la única

cantidad plenamente identificada es la anchura de la capa de fluido en el flujo primario (d).

Por otra parte, teniendo en cuenta que hay dos componentes de la velocidad, se escogerá una velocidad representativa  $U_0$  de forma que refleje el caracter bidimensional de  $\bar{U}$ . Una magnitud que satisface esta característica es la raíz cuadrada de:

$$(3.24) \quad \langle U^2 + W^2 \rangle = \int_0^1 (U^2 + W^2) dy$$

Esta integral es el promedio espacial del cuadrado de  $\|\bar{U}\|$ . La  $U_0$  que hemos elegido se le denomina usualmente velocidad cuadrática media.

Evaluamos la integral usando una propiedad de los números complejos y que  $F = U + iW$ :  $\|\bar{U}\|^2 = FF^*$ . Ocupando la ecuación (3.22) y la identidad hiperbólica  $\cosh a \cosh b = \frac{1}{2}[\cosh(a+b) + \cosh(a-b)]$ , la magnitud de la velocidad al cuadrado es:

$$(3.25) \quad \|\bar{U}\|^2 = \Xi [\cosh(1+i)\chi y - \cos(1+i)\chi] [\cosh(1-i)\chi y - \cosh(1-i)\chi],$$

$$\text{donde } \Xi = \frac{2\beta^2}{(\cosh 2\chi + \cos 2\chi)}.$$

La integración de esta expresión da como resultado la magnitud que buscamos:

$$(3.26) \quad \langle U^2 + W^2 \rangle = \beta^2 \left( 1 - \frac{\sinh 2\chi + \sin 2\chi}{2\chi (\cosh 2\chi + \cos 2\chi)} \right).$$

En los pasos intermedios se usó otra identidad de funciones hiperbólicas:  $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a$ . La velocidad representativa es por lo tanto:

$$(3.27) \quad U_0 = \beta \left( 1 - \frac{\sinh 2\chi + \sin 2\chi}{2\chi (\cosh 2\chi + \cos 2\chi)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Se investigarán otras cantidades como velocidades representativas. Al realizar los cálculos de  $\langle U \rangle$  y  $\langle W \rangle$  se encontró una relación entre  $U_0$  y  $\langle W \rangle$ , que de acuerdo a la física del problema esta plenamente justificada, ya que el campo de velocidades depende del rezago del fluido que es producido por la fuerza de Coriolis.

El promedio espacial de  $W$  es :

$$\begin{aligned}
 \langle W \rangle &= \text{Im } i\beta \int_0^1 \left( \frac{\cosh(1+i)\chi y}{\cosh(1+i)\chi} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} dy \\
 (3.28) \quad &= \text{Im } \left( \frac{i\beta \tanh(1+i)\chi}{(1+i)\chi} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= -\beta \left( 1 - \frac{\sinh 2\chi + \sin 2\chi}{2\chi(\cosh 2\chi + \cos 2\chi)} \right)^{\frac{1}{2}} .
 \end{aligned}$$

y la relación a que se hizo alusión es la siguiente:

$$(3.29) \quad U_0^2 = \beta \langle -W \rangle$$

Pasaremos enseguida a escribir las componentes del campo de velocidad en forma adimensional:

$$(3.30) \quad U = T [\sinh \chi(1+y) \sin \chi(1-y) + \sin \chi(1+y) \sinh \chi(1-y)] ,$$

$$(3.31) \quad W = T [\cosh \chi(1+y) \cos \chi(1-y) + \cos \chi(1+y) \cosh \chi(1-y)] - T [\cos 2\chi + \cosh 2\chi] ,$$

$$\text{donde } T = \frac{1}{(\cos 2\chi + \cosh 2\chi) \left( 1 - \frac{\sin 2\chi + \sinh 2\chi}{2\chi(\cos 2\chi + \cosh 2\chi)} \right)^{\frac{1}{2}}} .$$

Uno de los resultados es que las velocidades (3.30) y (3.31) dependen solo de un parametro:  $\chi = (\Omega d^2 \sin \alpha / \nu)^{\frac{1}{2}}$ . De acuerdo



a su definición se observa que  $\chi$  es función del número de Taylor  $\tau = (2\Omega d^2 \text{sen} \alpha / \nu)$  y del ángulo de inclinación  $\alpha$  :

$$(3.32) \quad \chi = (\tau \text{ sen} \alpha / 2)^{\frac{1}{2}}$$

Nótese entonces que para el flujo primario adimensional el parametro importante es  $\chi$  y no  $\tau$  y  $\alpha$  por separado, como pudiera esperarse.

El número adimensional  $\chi$  incluye a la velocidad angular  $\Omega$ . Se espera que un desarrollo de U y W en serie de potencias de  $\chi$  tenga como término a orden cero el campo de velocidad de una capa de fluido descendiendo por un plano inclinado *sin* rotación.

La expansión en serie de U y W es :

$$(3.33) \quad U = (15/8)^{\frac{1}{2}} (1 - y^2) + O(\chi),$$

$$(3.34) \quad W = 0 + O(\chi).$$

Los términos a orden cero corresponden a un flujo unidireccional, como el calculado por Yih(1963). Hay una diferencia respecto a los resultados de este autor, ya que se ha usado una velocidad representativa que no es equivalente a la de Yih.

El carácter bidimensional del flujo es un efecto producido por la rotación. Con un valor de  $\chi = 0.1$  la componente de la velocidad W es despreciable en comparación con U. Sin embargo, con  $\chi = 1$ , ambas componentes del campo de velocidad son del mismo orden de magnitud. Con valores superiores del parametro  $\chi$  los papeles se invierten, pues W llega a ser predominante.

En las figuras 5, 6, 7 y 8 se presentan gráficas de las componentes del campo de velocidades como función de la coordenada y, con valores del parametro  $\chi$  de 0.5, 1.0, 1.5 y 2.0. A partir de

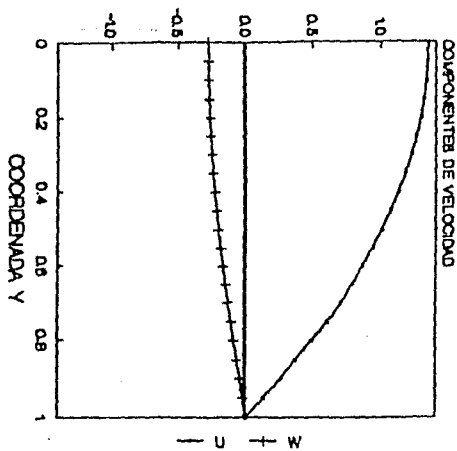


FIGURA 5.-Componentes del campo de velocidades. Valor de  $\chi=0.5$ . La magnitud de la velocidad en x es mayor que la magnitud de w.

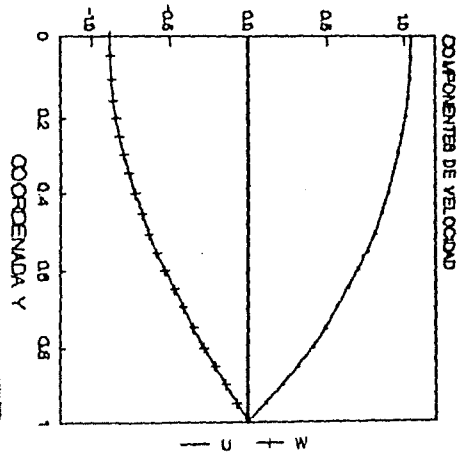


FIGURA 6.- Componentes del campo de velocidades. Valor de  $\chi=1.0$ . Ambas componentes de la velocidad tienen el mismo orden de magnitud.

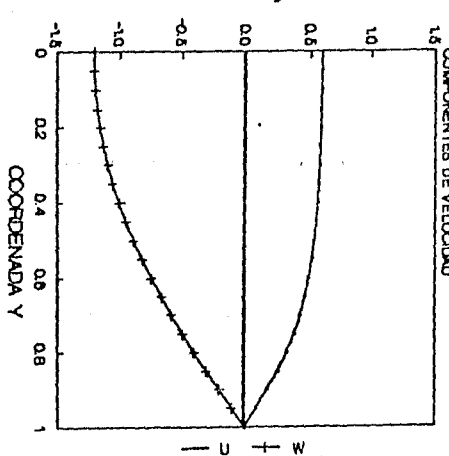


FIGURA 7. Componentes del campo de velocidades. Valor de  $\chi=1.5$ . En promedio la magnitud de W es mayor a la de U.

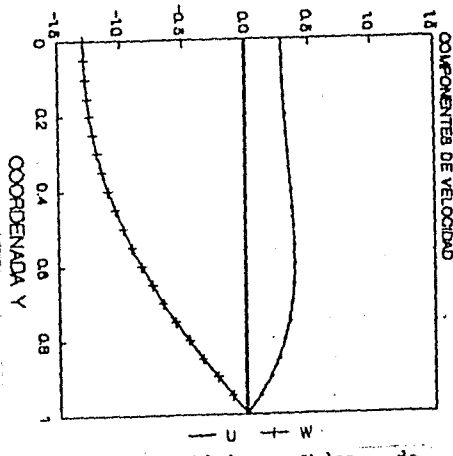


FIGURA 8.- Componentes del campo de velocidades. Valor de  $\chi=2.0$ . Existe una región dentro de la capa de fluido en la que U es mayor que U(0).

$\chi = 1.57$  se observa un comportamiento que no se presenta en flujos parecidos a este: la componente U de la velocidad adquiere en el interior de la capa valores superiores al que se obtiene en la superficie libre, lo que se observa claramente en el perfil de velocidades con  $\chi = 2.0$ . Este comportamiento quizá no ocurra si se incluye a la fuerza centrífuga en la deducción del flujo principal, cuestión que quedaría abierta a una futura investigación. Con el objeto de evitar resultados que aparentemente no tienen fundamento físico se estudiará la estabilidad de flujos cuyo parámetro  $\chi$  sea menor a 1.57.

En los párrafos anteriores se ha calculado una velocidad representativa del flujo y se ha elegido una longitud característica. Lo anterior permite obtener un número de Reynolds ( $R$ ), que de acuerdo a (3.27) y a la definición de  $\chi$  es:

$$(3.35) \quad R = \frac{g \cos \alpha d^3}{\nu^2} \left( \frac{1}{2\chi^2} \left( 1 - \frac{\sinh 2\chi + \sin 2\chi}{2\chi(\cos 2\chi + \cos 2\chi)} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

El número de Reynolds ( $R_0$ ) equivalente para un flujo sin rotación es (Yih, 1963):

$$(3.36) \quad R_0 = \frac{g \cos \alpha d^3}{2\nu^2} (8/15)^{\frac{1}{2}}.$$

Se puede pasar de (3.35) a (3.36) si  $\chi \rightarrow 0$ .

Enseguida se hará una comparación de  $R$  con respecto a  $R_0$ , con el fin de mostrar la influencia de la rotación. En la figura 9 se hace una gráfica ( $R/R_0$ ) vs.  $\chi$ , la que muestra que el cociente ( $R/R_0$ ) es una función decreciente de  $\chi$ . Se interpreta el decremento de  $R$  respecto de  $R_0$  como un aumento en la importancia de las fuerzas viscosas. La rotación induce una componente de la velocidad en el eje  $z$  pero además aparecen esfuerzos viscosos adicionales.

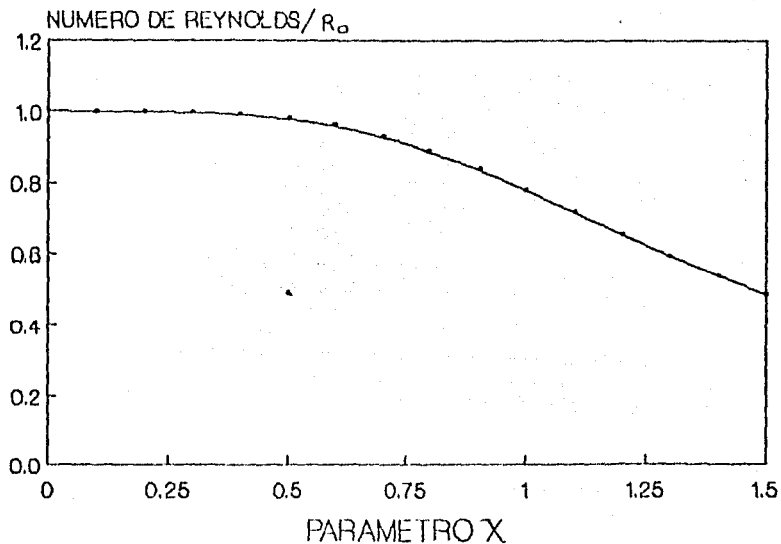


FIGURA 9.- Gráfica  $(R/R_0)$  vs.  $\chi$ . La relación produce un crecimiento de los esfuerzos viscosos.

$R$  está relacionado con otro número adimensional, conocido como *Numero de Froude*

$$(3.37) \quad Fr = \frac{U_0}{(gd)^{\frac{1}{2}}}$$

$Fr$  es el cociente entre la velocidad representativa del flujo y la velocidad de propagación de una onda cuya longitud es grande en comparación a la profundidad ( $d$ ) de una capa de líquido.

El cuadrado de la velocidad representativa es:

$$(3.38) \quad U_0^2 = \frac{gd^2 \cos \alpha}{\nu} \frac{1}{2\chi^2} \left( 1 - \frac{\sin 2\chi + \sinh 2\chi}{2\chi(\cos 2\chi + \cosh 2\chi)} \right)^{\frac{1}{2}} U_0$$

Dividamos ambos lados de la ecuación entre  $gd$ . En la parte

izquierda aparece  $Fr$  elevado al cuadrado. Del otro lado hay un factor que es el número de Reynolds. La relación entre  $Fr$  y  $R$  a que se hizo alusión anteriormente es:

$$(3.39) \quad Fr^2 = R \cos \alpha \frac{1}{2\chi^2} \left( 1 - \frac{\sin 2\chi + \sinh 2\chi}{2\chi(\cos 2\chi + \cosh 2\chi)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Se puede observar que  $Fr$  depende del ángulo de inclinación y de la rotación. Después de haber obtenido una longitud característica y una velocidad representativa podremos adimensionalizar las variables. Las velocidades las adimensionalizamos dividiéndolas entre  $U_0$ , a las longitudes con el espesor de la capa  $d$ ; al tiempo se le adimensionaliza dividiendo entre  $d/U_0$  y a la presión con  $\rho U_0^2$ .

Como primer paso para expresar los resultados con cantidades adimensionales, fijaremos la atención en la ecuación (3.6), que será ocupada posteriormente en el estudio de la estabilidad.

La forma adimensional de dicha ecuación es:

$$(3.40) \quad \frac{2\Omega d}{U_0} \cos \alpha W = \frac{gd}{U_0^2} \sin \alpha - \frac{dP}{dy}$$

o bien, en términos de los parámetros  $R$ ,  $\tau$  y  $F$  :

$$(3.41) \quad \frac{dP}{dy} = \frac{\sin \alpha}{F^2} - \cos \alpha \frac{\tau}{R} W \\ = \frac{1}{R} [ \tan \alpha D - \tau \cos \alpha W ]$$

$$\text{donde } D = 2\chi^2 / \left( 1 - \frac{\sin 2\chi + \sinh 2\chi}{2\chi(\cos 2\chi + \cosh 2\chi)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Definimos una magnitud  $E$  como:

$$(3.42) \quad E = \tan \alpha D - \tau \cos \alpha W$$

misma que será utilizada posteriormente.

En este capítulo se ha obtenido una solución estacionaria a las ecuaciones de momento y continuidad en forma de una capa descendente con un espesor constante. En los capítulos siguientes se estudiará la estabilidad de este flujo.

## 4.-FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE LA ESTABILIDAD EN UN SISTEMA EN ROTACION

### I. -GENERALIZACION DE LA ECUACION DE ORR-SOMMERFELD

La aplicación del método de modos normales a las perturbaciones en flujos unidireccionales y considerando como fuerza de cuerpo a la gravedad conduce a la ecuación de Orr-Sommerfeld (Drazin, 1979):

$$(4.1) \quad \phi'''' - 2kz\phi'' + k^4\phi = ikR[(U' - c)(\phi' - kz\phi) - U'\phi].$$

Esta ecuación se ha deducido suponiendo que el fluido es incompresible y el campo de velocidades depende explícitamente de una sola coordenada.

En esta sección deduciremos las ecuaciones correspondientes para un flujo bidimensional y bajo la acción de una fuerza adicional: la de Coriolis.

Sean  $\vec{u} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$  y  $p$  las perturbaciones del campo de velocidades y de la presión respectivamente. Las ecuaciones lineales adimensionales que satisfacen estos campos son las siguientes:

a) Balance de momento

$$(4.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial U}{\partial y} + w\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\tau}{R} \operatorname{sen} \alpha w = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \nabla^2 u,$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + U\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\tau}{R} \operatorname{cosec} \alpha w = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \nabla^2 v,$$

$$(4.4) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\tau}{R} \operatorname{sen} \alpha u - \frac{\tau}{R} \operatorname{cosec} \alpha v = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R} \nabla^2 w,$$

b) Ecuación de continuidad

$$(4.5) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ,$$

Algunos de los coeficientes de estas ecuaciones dependen de la coordenada  $y$ . En efecto, en el sistema (4.2)-(4.5) aparecen las componentes de la velocidad del flujo primario ( $U$  y  $W$ ), así como sus primeras derivadas. No existe, por otra parte, dependencia explícita respecto a las demás coordenadas. En base a esta argumentación esperamos que las soluciones para  $u$ ,  $v$ ,  $w$  y  $p$  sean de la forma:

$$f(y) \exp i k (\cos \theta x + \sin \theta z - ct).$$

El número de incógnitas es igual a 4 y podemos reducir su número haciendo algunas consideraciones sobre la ecuación de continuidad. De las propiedades de operadores vectoriales sabemos que:

$$(4.6) \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{s} = 0 ,$$

siendo  $\bar{s}$  una función vectorial arbitraria.

Escribamos  $\bar{u}$  como el rotacional de una función vectorial cuya componente en el eje  $y$  es nula, o sea:

$$(4.7) \quad \bar{u} = \operatorname{rot} [\xi \hat{i} + \gamma \hat{k}] = \frac{\partial \gamma}{\partial y} \hat{i} + \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \hat{j} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \hat{k} ,$$

por lo que el problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales con 3 incógnitas ( $\gamma$ ,  $\xi$  y  $p$ ). Suponemos que las soluciones de  $\xi$ ,  $\gamma$  y  $p$  son de la siguiente forma:



$$(4.8) \quad \begin{aligned} \xi &= \psi(y) \exp i k (\cos \theta x + \sin \theta z - ct) , \\ \gamma &= \phi(y) \exp i k (\cos \theta x + \sin \theta z - ct) , \\ \rho &= g(y) \exp i k (\cos \theta x + \sin \theta z - ct) . \end{aligned}$$

Las soluciones de las amplitudes  $\psi$ ,  $\phi$  (denominadas en adelante funciones potenciales) y  $g$  se obtendrán resolviendo (4.2)-(4.4) después de sustituir las expresiones dadas en (4.7) y (4.8).

De acuerdo a las definiciones (4.7) y (4.8), las componentes del campo de velocidad de la perturbación se expresan como se muestra:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} u &= \phi'(y) \exp i k (\cos \theta x + \sin \theta z - ct) , \\ v &= ik [\sin \theta \psi(y) - \cos \theta \phi(y)] \exp i k (\cos \theta x + \sin \theta z - ct) , \\ w &= -\psi'(y) \exp i k (\cos \theta x + \sin \theta z - ct) . \end{aligned}$$

Se sustituyen ahora las expresiones de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  y  $\rho$  en las ecuaciones de balance de momento de la perturbación. El resultado es el sistema de ecuaciones que aparecen enseguida (en el cual se ha dividido el factor  $\exp i k (\cos \theta x + \sin \theta z - ct)$ ):

$$(4.10) \quad k^2 \phi'' + ikR [C' \phi' + (\sin \theta \psi - \cos \theta \phi) \frac{dU}{dy}] + ikR \cos \theta g + \tau \sin \alpha \psi'' - \phi'''' = 0 ,$$

$$(4.11) \quad ik^3 [\sin \theta \psi - \cos \theta \phi] - kR C' [\sin \theta \psi - \cos \theta \phi] - ik [\sin \theta \psi'' - \cos \theta \phi''] + R g' - \tau \cos \alpha \psi' = 0 ,$$

$$(4.12) \quad -k^2 \psi'' + ikR [-C' \psi' + (\sin \theta \psi - \cos \theta \phi) (\frac{dW}{dy} - \frac{\tau}{R} \cos \alpha)] + ikR \sin \theta g + \tau \sin \alpha \phi'' + \psi'''' = 0 ,$$

con  $C' = U \cos \theta + W \sin \theta - c$ .

Es posible obtener un sistema de ecuaciones que no contenga a la función  $g(y)$ . Eso se puede lograr si derivamos una vez a (4.10) y (4.12) y luego eliminamos  $g'$  usando la ecuación (4.11). El resultado es :

$$(4.13) \quad \tau \text{sen} \alpha \psi'' - \phi'''' + ikR[U' \cos \theta + W' \text{sen} \theta] \phi' + (U \cos \theta + W \text{sen} \theta - c) \phi'' + ikR[(\psi' \text{sen} \theta - \phi' \cos \theta)U' + (\psi \text{sen} \theta - \phi \cos \theta)U''] + ik\tau \cos \alpha \cos \theta \psi' + k^2[\phi'' - \cos \theta(\psi' \text{sen} \theta - \phi' \cos \theta)] + k^4 \cos \theta (\psi \text{sen} \theta - \phi \cos \theta) + ik^3 R \cos \theta (U \cos \theta + W \text{sen} \theta - c) (\psi \text{sen} \theta - \phi \cos \theta) = 0 ,$$

$$(4.14) \quad \tau \text{sen} \alpha \phi'' + \psi'''' + ikR[-(U' \cos \theta + W' \text{sen} \theta)\psi' - (U \cos \theta + W \text{sen} \theta - c)\psi''] + ikR[(\psi' \text{sen} \theta - \phi' \cos \theta)W' + (\psi \text{sen} \theta - \phi \cos \theta)W''] + ik\tau \cos \theta \cos \alpha \phi' + k^2[-\psi'' - \text{sen} \theta(\psi' \text{sen} \theta - \phi' \cos \theta)] + k^4 \text{sen} \theta (\psi \text{sen} \theta - \phi \cos \theta) + ikR \text{sen} \theta (U \cos \theta + W \text{sen} \theta - c) (\psi \text{sen} \theta - \phi \cos \theta) = 0 .$$

El sistema (4.13)-(4.14) es la generalización de la ecuación de Orr-Sommerfeld, válida para un flujo bidimensional y sometido a la acción simultánea de la gravedad y la fuerza de Coriolis. Podemos pasar de (4.13)-(4.14) a la ecuación de Orr-Sommerfeld si hacemos lo siguiente:

i) Consideramos que las perturbaciones se propagan en una sola dirección a lo largo del eje  $x$ .

ii) Hacemos tender  $t$  a cero es decir tomamos como límite el flujo sin rotación.

La hipótesis i) implica que el ángulo  $\theta$  es igual a cero; luego  $\cos \theta = 1$  y  $\text{sen} \theta = 0$ . Por otra parte, la segunda hipótesis permitirá eliminar todos los términos donde aparezca  $\tau$  como factor.

En el límite de un flujo sin rotación las velocidades  $U$  y  $W$  tienden a:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} U = U^* = (15/8)^{\frac{1}{2}} (1 - \gamma^2) ,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} W = 0 .$$

De acuerdo a estas consideraciones la ecuación (4.13) se reduce a:

$$(4.15) \quad -\phi'''' + 2k^2\phi'' - k^4\phi + [kR(U^* - c)(\phi'' - k^2\phi) - U^{*'}\phi'] = 0 .$$

## II. -CONDICION CINEMATICA

Originalmente la superficie libre de la capa de fluido es plana y la presencia de una perturbación producirá curvaturas en ella. En algunos puntos la anchura de la capa será mayor que en otros.

La amplitud de una perturbación  $\eta$  de la superficie libre que se anula en infinito, puede expresarse como una superposición de perturbaciones senoidales (por medio de la integral de Fourier (Yih, 1963)) del tipo :

$$(4.16) \quad \eta = \gamma(0) \exp[ik(\cos\theta_1 x + \sin\theta_2 z - ct)] .$$

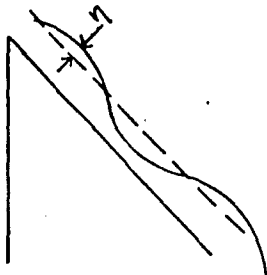


FIGURA 10.- Perturbación de la superficie libre.  $\eta$  es la amplitud adimensional.

La perturbación induce una componente de velocidad ( $v$ ) en el eje  $y$ , inexistente en el flujo primario. El valor de  $v$  en la frontera superior es igual a la velocidad vertical del elemento de masa situado en la superficie libre. En la descripción euleriana

lo anterior se traduce en la igualdad :

$$(4.17) \quad v = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (U+u) \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + (W+w) \frac{\partial \eta}{\partial z} .$$

A esta ecuación se le conoce como condición cinemática. Despreciando los productos donde aparecen  $\eta$ ,  $u$ ,  $v$  y  $w$  simultaneamente, obtenemos una ecuación que permite determinar  $\gamma(0)$  :

$$ik[\text{sen}\theta\psi(0) - \text{cos}\theta\phi(0)] = i\gamma(0)[-c + \text{cos}\theta U(0) + \text{sen}\theta W(0)].$$

De donde se despeja finalmente  $\gamma(0)$  :

$$(4.18) \quad \gamma(0) = \frac{\text{sen}\theta \psi(0) - \text{cos}\theta \phi(0)}{\text{cos}\theta U(0) + \text{sen}\theta W(0) - c} .$$

De aquí :

$$(4.19) \quad \eta(x, z, t) = \frac{\text{sen}\theta \psi(0) - \text{cos}\theta \phi(0)}{\text{cos}\theta U(0) + \text{sen}\theta W(0) - c} \exp ik(\text{cos}\theta x + \text{sen}\theta z - ct).$$

### III. -CONDICIONES DE FRONTERA

Las soluciones de  $\phi$ ,  $\psi$  y  $g$  obtenidas a partir de (4-10)-(4-12) [o bien, de (4.13) y (4.14)] deben construirse de manera que los campos de velocidad y de presión satisfagan las condiciones de frontera.

En la superficie libre, es decir, en  $y = \eta(x, z, t)$  los esfuerzos tangenciales se anulan. Lo anterior significa que  $e_{21}$  y  $e_{23}$  son iguales a cero :

$$(4.20) \quad \frac{\partial}{\partial y} (U+u) + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

en  $y = \eta$ .

$$(4.21) \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial (W+w)}{\partial y} = 0,$$

En lugar de evaluar las ecuaciones en  $y = \eta$  haremos una expansión de ellas alrededor del cero. Las derivadas de la velocidad tienen el siguiente desarrollo:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=\eta} = \left. \frac{dU}{dy} \right|_{y=0} + \eta \left. \frac{d^2 U}{dy^2} \right|_{y=0} + \mathcal{O}(\eta^2),$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial y} \right|_{y=\eta} = \left. \frac{dW}{dy} \right|_{y=0} + \eta \left. \frac{d^2 W}{dy^2} \right|_{y=0} + \mathcal{O}(\eta^2),$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{y=\eta} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{y=0} + \eta \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right|_{y=0} + \mathcal{O}(\eta^2),$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{y=\eta} = \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{y=0} + \eta \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \right|_{y=0} + \mathcal{O}(\eta^2),$$

Como las perturbaciones son pequeñas, los términos con  $\eta^2$  y orden superior son despreciables. Lo mismo sucede con las expresiones que incluyen al producto de  $\eta$  con derivadas segundas de  $v$ . La anulación de los esfuerzos tangenciales tiene la siguiente aproximación en perturbaciones infinitesimales:

$$(4.22) \quad \eta \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

en  $y = 0$ .

$$(4.23) \quad \eta \frac{d^2 W}{dy^2} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

Aquí se usaron las identidades  $\frac{dU}{dy} = \frac{dW}{dy} = 0$  en  $y = 0$ .

Rescribimos las ecuaciones en términos de las funciones potenciales :

$$(4.24) \quad U''(\theta)\gamma(\theta) + \phi''(\theta) = k^2 \cos\theta [\sin\theta\psi(\theta) - \cos\theta\phi(\theta)],$$

$$(4.25) \quad W''(0)\gamma(0) - \psi''(0) = k^2 \text{sen}\theta [\text{sen}\theta\psi(0) - \text{cos}\theta\phi(0)].$$

Otra de las condiciones de frontera en la superficie libre es el balance entre los esfuerzos normales y la tensión superficial. La ecuación que describe dicho balance (en forma adimensional) es (Yih, 1963):

$$(4.26) \quad -p + \frac{2}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \text{We} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) = 0, \quad \text{en } y = \eta.$$

We es el número de Weber definido al final del capítulo 1 (ec. 1.23).

La condición se cumple en  $y = \eta$ . Se hará también una expansión alrededor de  $y=0$ .

La serie de Taylor de la presión es :

$$(4.27) \quad p = P(0) + \eta P'(0) + p(0) + \eta p'(0) + O(\eta^2).$$

La aproximación con perturbaciones pequeñas es :

$$(4.28) \quad -\eta P'(0) - p(0) + \frac{2}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \text{We} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) = 0, \quad \text{en } y = 0.$$

Se ha despreciado el término  $\eta p'(0)$ , ya que tanto  $\eta$  como  $p$  son pequeños.

Procedamos finalmente a escribir esta igualdad en términos de las funciones potenciales  $\phi$ ,  $\psi$  y de  $g$  :

$$(4.29) \quad -\frac{E}{R} \gamma(0) - g(0) + \frac{12k}{R} [\text{sen}\theta \psi'(0) - \text{cos}\theta \phi'(0)] - k^2 \text{We} \gamma(0) = 0,$$

la expresión analítica de E fue dada en la ecuación (3.42).

Ahora bien, la condición de no deslizamiento en el plano inclinado ( $y=1$ ) implica que las componentes tangenciales de la velocidad son iguales a cero:

$$U + u = 0,$$

$$W + w = 0.$$

En una pared sin poros la componente en  $y$  de la velocidad también se anula, o sea  $v = 0$ . Estas mismas condiciones satisfacen las componentes de la velocidad en el flujo principal. Por lo tanto el vector  $\bar{u}$  es igual a cero en  $y = 1$  :

$$(4.30) \quad u = v = w = 0.$$

Traduciendo a funciones potenciales, la condición (4.30) es equivalente a :

$$(4.31) \quad \phi'(1) = 0,$$

$$(4.32) \quad \text{sen}\theta \psi(1) - \text{cos}\theta \phi(1) = 0,$$

$$(4.33) \quad -\psi'(1) = 0.$$

Cuando se estudia perturbaciones paralelas a los ejes  $x$  y  $z$ , aparece únicamente una de las dos funciones potenciales, que puede ser  $\phi$  o  $\psi$  dependiendo del caso. La condición que satisfacen es  $\phi(1)=0$ ,  $\psi(1)=0$ . En perturbaciones tridimensionales supondremos que también se cumplen esas condiciones, mismas que concuerdan con (4.32). Entonces, en la interfase líquido-sólido se cumple que:

$$(4.34) \quad \psi(1) = \phi(1) = 0.$$

En este capítulo se obtuvo un sistema de ecuaciones que generaliza a la ecuación de Orr-Sommerfeld, con la cual se estudiará la evolución temporal de las perturbaciones en flujo por un plano inclinado en rotación.

## 5.-ESTABILIDAD DE PERTURBACIONES CON NUMEROS DE ONDA PEQUEÑOS APROXIMACION A ORDEN CERO

### I.-ECUACIONES FUNDAMENTALES Y CONDICIONES DE FRONTERA

A pesar de que el sistema de ecuaciones (4.10)-(4.12) [ o bien, (4.13)-(4.14) ] es lineal y homogéneo, no es posible resolverlo analíticamente. La dificultad radica en que los coeficientes dependen de la coordenada  $y$ . Se puede, sin embargo, obtener aproximaciones a la solución por medio de un desarrollo en serie de potencias de uno de los parámetros incluidos en el sistema. Se proponen soluciones de la forma:

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_0 + \phi_1 q + \phi_2 q^2 + \dots \\ \psi &= \psi_0 + \psi_1 q + \psi_2 q^2 + \dots \\ g &= g_0 + g_1 q + g_2 q^2 + \dots \\ c &= c_0 + c_1 q + c_2 q^2 + \dots\end{aligned}$$

siendo  $q$  el parámetro.

El primer parámetro que ocuparemos para hacer un desarrollo en serie de potencias es el número de onda  $k$ . Obtendremos los dos primeros términos de la expansión, lo cual limita la validez de los resultados a valores pequeños de  $k$ . Dicho de otra manera, se investigará la estabilidad de perturbaciones con longitudes características grandes en comparación a la anchura de la capa de fluido.

Las ecuaciones (4.9)-(4.11) se expresarán como una serie de potencias, a saber :

$$\begin{aligned}(5.1) \quad & [\tau \text{sen} \alpha \psi_0' - \phi_0'''] + \\ & [\tau \text{sen} \alpha \psi_1' - \phi_1''' + iRC' \phi_0' + iRU' (\text{sen} \theta \psi_0 - \text{cos} \theta \phi_0) + iR \text{cos} \theta g_0] k \\ & + \dots = 0,\end{aligned}$$



$$(5.2) \quad [Rg_0' - \tau \cos \alpha \psi_0'] + \\ [Rg_1' - \tau \cos \alpha \psi_1' - i \operatorname{sen} \theta \psi_0'' + i \cos \theta \phi_0''] k + \dots = 0,$$

$$(5.3) \quad [\tau \operatorname{sen} \alpha \phi_0' + \psi_0'''] + \\ [\tau \operatorname{sen} \alpha \phi_1' + \psi_1''' - i R C' \psi_0' + i (\operatorname{sen} \theta \psi_0 - \cos \theta \phi_0) (R W' - \tau \cos \alpha)] k + \\ [i k R \operatorname{sen} \theta g_0] k + \dots = 0.$$

El conjunto de términos  $k^0, k^1, k^2, \dots, k^n$  es linealmente independiente. Luego, la única manera de que la combinación lineal se cumpla es que los coeficientes sean iguales a cero.

Las condiciones de frontera también admiten un desarrollo en serie de potencias, mismo que aparece enseguida:

a) Anulación de las funciones potenciales en  $y = 1$

$$(5.4) \quad \phi_0(1) + \phi_1(1)k + \phi_2(1)k^2 + \dots = 0,$$

$$(5.5) \quad \psi_0(1) + \psi_1(1)k + \psi_2(1)k^2 + \dots = 0.$$

b) Anulación de las derivadas de  $\phi$  y  $\psi$  en  $y = 1$

$$(5.6) \quad \phi_0'(1) + \phi_1'(1)k + \phi_2'(1)k^2 + \dots = 0,$$

$$(5.7) \quad \psi_0'(1) + \psi_1'(1)k + \psi_2'(1)k^2 + \dots = 0.$$

c) Condiciones sobre esfuerzos tangenciales

$$(5.8) \quad [(U''(0)/C_0') (\operatorname{sen} \theta \psi_0(0) - \cos \theta \phi_0(0)) + \phi_0''(0)] + \\ + [(U''(0)/C_0') (\operatorname{sen} \theta \psi_1(0) - \cos \theta \phi_1(0))] k + \\ + [-(U''(0)/C_0'^2) (\operatorname{sen} \theta \psi_0(0) - \cos \theta \phi_0(0)) c_1 + \phi_1''(0)] k + \dots = 0,$$

$$(5.9) \quad [(W''(0)/C_0') (\operatorname{sen} \theta \psi_0(0) - \cos \theta \phi_0(0)) - \psi_0''(0)] + \\ + [(W''(0)/C_0') (\operatorname{sen} \theta \psi_1(0) - \cos \theta \phi_1(0))] k + \\ + [(W''(0)/C_0'^2) (\operatorname{sen} \theta \psi_0(0) - \cos \theta \phi_0(0)) c_1 - \psi_1''(0)] k + \dots = 0,$$

donde  $C_0' = U(0)\cos\theta + W(0)\text{sen}\theta - c_0$ .

d) Condición sobre esfuerzos normales

$$(5.10) \quad + [(E/R C_0') (\cos\theta\phi_0(0) - \text{sen}\theta\psi_0(0)) - g_0(0)] + \\ + [-(E/R C_0') (\text{sen}\theta\psi_1(0) - \cos\theta\phi_1(0)) - g_1(0)]k + \\ + [(E c_1/R C_0'^2) (\text{sen}\theta\psi_0(0) - \cos\theta\phi_0(0))]k + \\ + [(2i/R) (\text{sen}\theta\psi_0'(0) - \cos\theta\phi_0'(0))]k + \dots = 0.$$

Al hacer el desarrollo en serie de potencias de las condiciones de frontera en la superficie libre, se ha usado la siguiente relación:

$$\frac{1}{\cos\theta U(0) + \text{sen}\theta W(0) - c} = \frac{1}{\cos\theta U(0) + \text{sen}\theta W(0) - c_0 - kc_1 - \dots} = \\ = \frac{1}{\cos\theta U(0) + \text{sen}\theta W(0) - c_0} + \frac{kc_1}{[\cos\theta U(0) + \text{sen}\theta W(0) - c_0]^2} + O(k^2).$$

## II. - APROXIMACION A ORDEN CERO

Los coeficientes que multiplican a  $k^0$  en las ecuaciones (5.1)-(5.3) se igualan a cero. Este paso da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes. Las funciones que aparecen son  $\phi_0$ ,  $\psi_0$  y  $g_0$ :

$$(5.11) \quad r \text{sen}\alpha\psi_0' - \phi_0'' = 0,$$

$$(5.12) \quad Rg_0' - r \cos\alpha\psi_0' = 0,$$

$$(5.13) \quad r \text{sen}\alpha\phi_0' + \psi_0'' = 0.$$

La primera y la última forman un sistema cerrado de ecuaciones. Si se multiplica a (5.11) por el complejo puro  $i$  y se suma el resultado a (5.13), tenemos:

$$(5.14) \quad \tau \operatorname{sen} \alpha (\phi_0' + i\psi_0') - i(\phi_0''' + i\psi_0''') = 0$$

Definiendo una función compleja  $h_0 = \phi_0 + i\psi_0$ , el problema se reduce a la búsqueda de la solución de la ecuación:

$$(5.15) \quad \tau \operatorname{sen} \alpha h_0' - i h_0''' = 0$$

El primer término es una contribución de la rotación, más específicamente, de la componente de  $\bar{\Omega}$  en la dirección del eje  $y$ . A un valor fijo de  $\tau$ , los efectos de la rotación (a orden cero) aún pueden variar debido a la dependencia que hay respecto al ángulo  $\alpha$ . En el caso extremo de un plano vertical  $\tau \operatorname{sen} \alpha = 0$ ; los resultados son iguales a los de flujos sin rotación. La influencia de la fuerza de Coriolis crece con el aumento del ángulo de inclinación  $\alpha$ .

Resolver (5.15) es una tarea sencilla. La ecuación es homogénea y de coeficientes constantes, características que permiten suponer un comportamiento exponencial (Elgolstz, 1973). Sea  $h_0 \propto \exp(\lambda y)$ .  $\lambda$  es la solución de la ecuación de tercer grado que se obtiene luego de sustituir en (5.15):

$$(5.16) \quad \lambda(\lambda^2 + i\tau \operatorname{sen} \alpha) = 0.$$

Una raíz es cero. Las otras dos son soluciones de la ecuación de segundo grado :

$$(5.17) \quad \lambda^2 = -i\tau \operatorname{sen} \alpha.$$

La expresión de la parte derecha es un número complejo situado a  $270^\circ$  del eje de los reales. Luego, una solución esta a mitad de camino, es decir, a  $135^\circ$  y la otra a  $135^\circ + 180^\circ = 315^\circ$ . En

base a lo anterior, las tres raíces son:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0, \\ \lambda_2 &= (-1+i)[r\text{sen}\alpha/2]^{\frac{1}{2}} = (-1+i)\chi, \\ \lambda_3 &= (1-i)[r\text{sen}\alpha/2]^{\frac{1}{2}} = (1-i)\chi.\end{aligned}$$

La solución general de  $h_0$  es entonces :

$$(5.18) \quad h_0(y) = A_0 + A_1 \exp(-1+i)\chi y + A_2 \exp(1-i)\chi y.$$

Las constantes  $A_0$ ,  $A_1$  y  $A_2$  son complejas y se determinarán a partir de las condiciones de frontera a orden cero.

En  $y=1$  la velocidad  $\bar{u}$  es cero y como consecuencia los potenciales satisfacen:

$$(5.19) \quad \phi_0(1) = \psi_0(1) = 0,$$

$$(5.20) \quad \phi_0'(1) = \psi_0'(1) = 0.$$

Las cuatro condiciones se traducen en dos para la función compleja  $h_0(y)$ , es decir:

$$(5.21) \quad h_0(1) = h_0'(1) = 0,$$

de donde resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(5.22) \quad A_0 + A_1 \exp(-1+i)\chi + A_2 \exp(1-i)\chi = 0,$$

$$(5.23) \quad (-1+i) [A_1 \exp(-1+i)\chi - A_2 \exp(1-i)\chi] = 0.$$

Expresaremos la solución en términos de  $A_1$ . Para ello resolveremos las ecuaciones anteriores para  $A_0$  y  $A_2$  como sigue:

$$A_0 = -2A_1 \exp(-1+i)\chi,$$

$$A_2 = A_1 \exp(-1+i)2\chi.$$

Por lo tanto, la función  $h_0$  será:

$$\begin{aligned} h_0(y) &= A_1 [-2\exp(-1+i)\chi + \exp(-1+i)\chi y + \exp(1-i)\chi(y-2)] \\ (5.24) \quad &= A_1 \exp(-1+i)\chi [-2 + \exp(-1+i)\chi(y-1) + \exp(1-i)\chi(y-1)] \\ &= 2A_1 \exp(-1+i)\chi [\cosh(-1+i)\chi(y-1) - 1]. \end{aligned}$$

El coeficiente  $A_1$  se ajustará de manera que los esfuerzos tangenciales se anulen en la superficie libre. Las condiciones a orden cero sobre las funciones potenciales en  $y = 0$  son:

$$(5.25) \quad \frac{U''(0)}{C_0'} [\sen\theta\psi_0(0) - \cos\theta\phi_0(0)] + \phi_0(0) = 0,$$

$$(5.26) \quad \frac{W''(0)}{C_0'} [\sen\theta\psi_0(0) - \cos\theta\phi_0(0)] - \psi_0(0) = 0,$$

con  $C_0' = \cos\theta U(0) + \sen\theta W(0) - c_0$ .

No existe una manera de que (5.25) y (5.26) se combinen para dar una ecuación que contenga únicamente a  $h_0(0)$  y sus derivadas. Entonces se debe aplicarlas directamente sobre  $\phi_0$  y  $\psi_0$ .

De la definición de  $h_0$ , su parte real es la función potencial  $\phi_0$ , mientras que su parte imaginaria es  $\psi_0$ . Luego:

$$(5.27) \quad \phi_0(y) = [\cos\chi y e^{-\chi y} - 2\cos\chi e^{-\chi} + \cos\chi(2-y)e^{-\chi(2-y)}]a_1 \\ [-\sen\chi y e^{-\chi y} + 2\sen\chi e^{-\chi} - \sen\chi(2-y)e^{-\chi(2-y)}]b_1,$$

$$(5.28) \quad \psi_0(y) = [\sen\chi y e^{-\chi y} - 2\sen\chi e^{-\chi} + \sen\chi(2-y)e^{-\chi(2-y)}]a_1 \\ [\cos\chi y e^{-\chi y} - 2\cos\chi e^{-\chi} + \cos\chi(2-y)e^{-\chi(2-y)}]b_1,$$

donde  $a_1 = \text{Re}A_1$  y  $b_1 = \text{Im}A_1$ .

Antes de seguir adelante cabe hacer un comentario: al sustituir las expresiones de  $\phi_0$  y  $\psi_0$  dadas por (5.27) y (5.28) en las ecuaciones (5.25) y (5.26) se obtiene un sistema de dos ecuaciones lineales y homogéneas para  $a_1$  y  $b_1$ . Supongase que se tiene una solución para esas dos incógnitas; resulta que si  $D$  es un escalar, las cantidades  $Da_1$  y  $Db_1$  también son soluciones al sistema de ecuaciones.

Lo anterior implica que  $\phi_0$  y  $\psi_0$  serán determinadas salvo por una constante. Entonces las dos ecuaciones sobre esfuerzos tangenciales servirán para calcular el parámetro  $c_0$  y una de las constantes que aparecen en (5.27)-(5.28). La otra será una constante arbitraria.

Se necesita evaluar las segundas derivadas de  $\phi_0$  y  $\psi_0$  en  $y=0$ . En lugar de realizar la derivación directamente, obtendremos  $h_0''(0)$  y luego separaremos las partes real e imaginaria. La segunda derivada de  $h_0$  es:

$$(5.29) \quad h_0''(y) = -i4\chi^2(a_1 + ib_1)\exp(i-1)\chi \cosh\chi(i-1)(y-1).$$

Luego,  $\phi_0''(0)$  y  $\psi_0''(0)$  son respectivamente:

$$(5.30) \quad \phi_0''(0) = 2\chi^2[\operatorname{sen}2\chi \exp(-2\chi)a_1 + (1 + \operatorname{cos}2\chi \exp(-2\chi))b_1],$$

$$(5.31) \quad \psi_0''(0) = 2\chi^2[-(1 + \operatorname{cos}2\chi \exp(-2\chi))a_1 + \operatorname{sen}2\chi \exp(-2\chi)b_1].$$

Un factor que aparece simultáneamente en (5.25) y (5.26) es  $\operatorname{sen}\theta \psi_0(0) - \operatorname{cos}\theta \phi_0(0)$ . Con el fin de simplificar la obtención de  $c_0$ , se procederá a calcular dicha expresión. Se utilizan (5.27) y (5.28) :

$$(5.32) \quad \begin{aligned} \operatorname{sen}\theta \psi_0(0) - \operatorname{cos}\theta \phi_0(0) = \\ [2(\operatorname{cos}\theta \operatorname{cos}\chi - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\chi) e^{-x} + (\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}2\chi - \operatorname{cos}\theta \operatorname{cos}2\chi) e^{-x}] a_1 + \\ + [-2(\operatorname{cos}\theta \operatorname{sen}\chi + \operatorname{sen}\theta \operatorname{cos}\chi) e^{-x} + (\operatorname{sen}\theta \operatorname{cos}2\chi + \operatorname{cos}\theta \operatorname{sen}2\chi) e^{-x}] b_1 + \\ + \operatorname{sen}\theta b_1 - \operatorname{cos}\theta a_1. \end{aligned}$$

La expresión de arriba se simplifica con el uso de 2 identidades trigonométricas bastante conocidas (Chilov, 1973), a saber :

$$(5.33) \quad \begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta, \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha. \end{aligned}$$

Lo que resulta es una expresión con funciones trigonométricas, cuyos argumentos son combinaciones lineales de  $\theta$  y  $\chi$ . Se trata de lo siguiente :

$$(5.34) \quad \begin{aligned} &\operatorname{sen}\theta \psi_0(0) - \cos\theta \phi_0(0) = \\ &[-\cos\theta + 2\cos(\theta + \chi) e^{-\chi} - \cos(\theta + 2\chi) e^{-2\chi}] a_1 + \\ &+ [\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}(\theta + \chi) e^{-\chi} + \operatorname{sen}(\theta + 2\chi) e^{-2\chi}] b_1. \end{aligned}$$

Se sustituye éste resultado, así como los valores de  $\phi_0'(0)$  y  $\psi_0'(0)$  en (5.25) y (5.26). El problema de la estabilidad se reduce ahora a resolver el sistema de ecuaciones :

$$(5.35) \quad \begin{aligned} &[U''(0) (-\cos\theta + 2\cos(\theta + \chi) e^{-\chi} - \cos(\theta + 2\chi) e^{-2\chi})] a_1 + \\ &+ 2\chi^2 \operatorname{sen}2\chi e^{-2\chi} C_0' a_1 + 2\chi^2 (1 + e^{-2\chi} \cos2\chi) C_0' b_1 + \\ &+ [U''(0) (\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}(\theta + \chi) e^{-\chi} + \operatorname{sen}(\theta + 2\chi) e^{-2\chi})] b_1 = 0, \end{aligned}$$

$$(5.36) \quad \begin{aligned} &[W''(0) (-\cos\theta + 2\cos(\theta + \chi) e^{-\chi} - \cos(\theta + 2\chi) e^{-2\chi})] a_1 + \\ &+ 2\chi^2 (1 + \cos2\chi) e^{-2\chi} C_0' a_1 - 2\chi^2 \operatorname{sen}2\chi e^{-2\chi} C_0' b_1 \\ &+ [W''(0) (\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}(\theta + \chi) e^{-\chi} + \operatorname{sen}(\theta + 2\chi) e^{-2\chi})] b_1 = 0. \end{aligned}$$

Algunos de los términos se repiten dos veces. Con el objeto de simplificar los cálculos algebraicos se han definido 4 constantes como se indica a continuación :

$$\begin{aligned}
l_1 &= -\cos\theta + 2\cos(\theta+\chi)e^{-\chi} - \cos(\theta+2\chi)e^{-2\chi}, \\
l_2 &= -\sin\theta + 2\sin(\theta+\chi)e^{-\chi} - \sin(\theta+2\chi)e^{-2\chi}, \\
l_3 &= 2\chi^2 \sin 2\chi e^{-2\chi}, \\
l_4 &= 2\chi^2 (1 + \cos 2\chi e^{-2\chi}).
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (5.35) y (5.36) se reescriben como:

$$(5.37) \quad [U''(0)l_1 + l_3 C_0'] a_1 + [-U''(0)l_2 + l_4 C_0'] b_1 = 0,$$

$$(5.38) \quad [W''(0)l_1 + l_4 C_0'] a_1 + [-W''(0)l_2 - l_3 C_0'] b_1 = 0.$$

Despejamos ahora  $b_1$  de ambas ecuaciones :

$$b_1 = \frac{l_1 U''(0) + l_3 C_0'}{l_2 U''(0) - l_4 C_0'} a_1,$$

$$b_1 = \frac{l_1 W''(0) + l_4 C_0'}{l_2 W''(0) + l_3 C_0'} a_1.$$

La Única forma en que las dos igualdades sean consistentes es que los factores que multiplican a  $a_1$  valgan lo mismo, es decir :

$$(5.39) \quad \frac{l_1 U''(0) + l_3 C_0'}{l_2 U''(0) - l_4 C_0'} = \frac{l_1 W''(0) + l_4 C_0'}{l_2 W''(0) + l_3 C_0'}.$$

Todos los términos que aparecen aquí son conocidos, excepto  $C_0'$ . Por lo tanto, el valor obtenido para  $C_0'$  será la condición de solubilidad del sistema (5.35)-(5.36). Como se había mencionado con anterioridad, la estabilidad lineal es un problema de valor propio y en este caso (5.39) es la ecuación de eigenvalores.

Reescribiendo (5.39) como un polinomio de segundo grado en  $C_0'$  resulta:

$$(5.40)$$

$$(l_3^2 + l_4^2) C_0'^2 + [(l_1 l_3 - l_2 l_4) U''(0) + (l_2 l_3 + l_1 l_4) W''(0)] C_0' = 0.$$



Una de las raíces es cero; la otra es :

$$(5.41) \quad C_0' = \frac{(l_2 l_4 - l_1 l_3) U'(0) - (l_2 l_3 + l_1 l_4) W'(0)}{(l_3^2 + l_4^2)}$$

$C_0'$  aparece como un denominador en las condiciones de frontera, por lo que la solución  $C_0' = 0$  es físicamente inaceptable.

De acuerdo a las definiciones de  $C_0'$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  y  $l_4$ ,  $c_0$  se puede escribir  $c_0$  como función de los parámetros  $\theta$  y  $\chi$  :

$$(5.42) \quad c_0 = \cos\theta U(0) + \sin\theta W(0) +$$

$$\frac{2\sin(\chi+\theta)e^{-\chi} - \sin(2\chi+\theta)e^{-2\chi} + \sin(2\chi-\theta)e^{-2\chi} - \sin\theta}{2\chi^2(1+2\cos 2\chi \exp(-2\chi) + \exp(-4\chi))} U'(0)$$

$$+ \frac{[2\sin(\chi-\theta)e^{-\chi} - \sin\theta e^{-4\chi}] U'(0) + [2\cos(\chi-\theta)e^{-\chi} - \cos\theta e^{-4\chi}] W'(0)}{2\chi^2(1+2\cos 2\chi \exp(-2\chi) + \exp(-4\chi))}$$

$$+ \frac{[2\cos(\chi+\theta)e^{-\chi} - \cos(2\chi-\theta)e^{-2\chi} - \cos(2\chi-\theta)e^{-2\chi} - \cos\theta]}{2\chi^2(1+2\cosh 2\chi \exp(-2\chi) + \exp(-4\chi))} W'(0).$$

El valor de  $c_0$  es real por lo que las perturbaciones se propagan como ondas. No hay crecimiento ni amortiguamiento. En el lenguaje de la teoría de la estabilidad decimos que hay estabilidad neutra.

La figura 11 muestra el comportamiento de  $c_0$  como función del ángulo de propagación  $\theta$  y del parámetro  $\chi$ . Hay dos detalles que merecen comentario. Primero, cuando no hay rotación la velocidad máxima de propagación de la onda (de la perturbación) ocurre en  $\theta=0$  cuando no hay rotación. Conforme aumenta el valor de  $\chi$ , el máximo sufre un corrimiento hacia la izquierda, es decir, hacia valores negativos del ángulo de propagación. Segundo, la rotación produce una disminución en el valor máximo de  $c_0$ , lo que se observa si comparamos curvas con distintos valores de  $\chi$ .

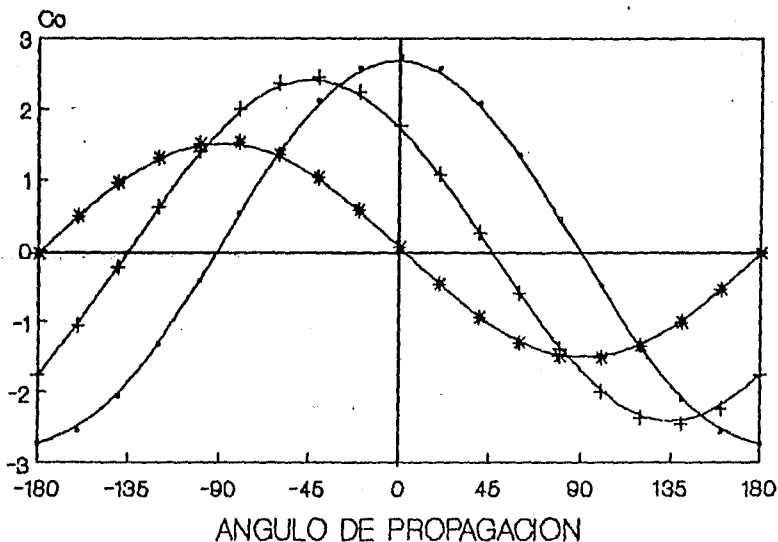


FIGURA 11.- Gráfica \$C\_0\$ vs \$\theta\$ para 3 valores del parámetro \$\chi\$ (0.1, 0.8 y 1.5). \$C\_0\$ es la velocidad de propagación de la perturbación.

Para valores pequeños de \$\chi\$, el valor propio \$c\_0\$ tiende a:

$$(5.43) \quad c_0 \rightarrow (15/2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta.$$

Finalmente, anotemos que \$c\_0\$ es una función de periodo \$360^\circ\$ respecto al ángulo de propagación, o sea \$c\_0(\theta) = c\_0(\theta + 360^\circ)\$.

En el cálculo de \$c\_0\$ se tenía una relación de proporcionalidad entre \$a\_1\$ y \$b\_1\$ del tipo \$b\_1 = M a\_1\$; luego de algunas operaciones llegamos al siguiente resultado:

$$(5.44) \quad M = \frac{[2\cos(\chi+\theta)e^{-\chi} - \cos(2\chi+\theta)e^{-2\chi} - \cos\theta]W'(\theta) + 2\chi^2(1 + \cos 2\chi e^{-2\chi})C_0'}{[2\sin(\chi+\theta)e^{-\chi} - \sin(2\chi+\theta)e^{-2\chi} - \sin\theta]W'(\theta) + 2\chi^2\sin 2\chi e^{-2\chi}C_0'}$$

Por lo tanto, la función  $h_0$  adopta la forma que se indica a continuación (la constante  $a_1$  se ha igualado a 1):

$$(5.45) \quad h_0(y) = 2(1+iM)\exp(-1+i)\chi [\cosh\chi(-1+i)(y-1)-1].$$

En los cálculos al siguiente orden será necesario tener  $\phi_0$  y  $\psi_0$  por separado; eso se puede obtener si separamos la parte real y la imaginaria de la función  $h_0$ . Entonces:

$$(5.46) \quad \phi_0 = [\cos\chi y e^{-xy} - 2\cos\chi e^{-x} + \cos\chi(2-y)e^{-x(2-y)}] - \\ -M[\sin\chi y e^{-xy} - 2\sin\chi e^{-x} + \sin\chi(2-y)e^{-x(2-y)}],$$

$$\psi_0 = [\sin\chi y e^{-xy} - 2\sin\chi e^{-x} + \sin\chi(2-y)e^{-x(2-y)}] + \\ +M[\cos\chi y e^{-xy} - 2\cos\chi e^{-x} + \cos\chi(2-y)e^{-x(2-y)}].$$

En este capítulo se obtuvo una primera aproximación al problema de la estabilidad de una perturbación cuyo número de onda es pequeño. El resultado principal es una expresión para la velocidad de propagación de la perturbación.

## 6.-ESTABILIDAD DE PERTURBACIONES CON NUMEROS DE ONDA PEQUEÑOS APROXIMACION A PRIMER ORDEN

### I.-INTRODUCCION

En la aproximación a orden cero las perturbaciones se propagan en forma de ondas con amplitud constante. Este resultado parte del supuesto de que el número de onda  $k$  es igual a cero, es decir, la longitud de onda es infinita. Se trata de un caso físicamente inexistente, pero que sirve como paso intermedio en la investigación de la estabilidad del flujo. A continuación se presenta el cálculo del segundo término del desarrollo en serie de potencias de  $c$ , o sea,  $c_1$ .

La expresión  $c_0 + kc_1$  será una buena aproximación de  $c$  cuando suceda que  $k \ll 1$ ; en efecto, siendo pequeño el número de onda, los términos de orden superior a 1 son despreciables.

Los resultados tienen validez en perturbaciones con longitudes de onda mucho mayores a la anchura de la capa de fluido.

De acuerdo al desarrollo en serie de potencias dado en la sección (5.1), el sistema de ecuaciones diferenciales para  $\phi_1$ ,  $\psi_1$  y  $g_1$  es :

$$(6.1) \quad \tau \operatorname{sen} \theta \psi_1'' - \phi_1'''' = -iR [(U \cos \theta + W \operatorname{sen} \theta - c_0) \phi_0' + (\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \cos \theta) U' - \cos \theta g_0],$$

$$(6.2) \quad R g_1' - \tau \cos \theta \psi_1 = i[\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \cos \theta],$$

$$(6.3) \quad \tau \operatorname{sen} \theta \phi_1' + \psi_1'''' = -iR [-(U \cos \theta + W \operatorname{sen} \theta - c_0) \psi_0' + (\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \cos \theta) W' + \operatorname{sen} \theta g_0] + i \tau \cos \theta (\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \cos \theta).$$

Los términos no-homogéneos de las ecuaciones (6.1)-(6.3) son puramente imaginarios, dependen explícitamente de la coordenada  $y$ , y en ellos está incluido el factor  $\tau \cos \alpha$ , proporcional a la componente de la velocidad angular en el eje  $x$ . Lo último indica que las soluciones no dependerán únicamente de  $\chi = (\tau \text{sen} \alpha / 2)^{\frac{1}{2}}$ , sino de los valores de  $\tau$  y  $\alpha$  tomados por separado, a diferencia de lo que ocurrió en la aproximación a orden cero.

La sección 5.1 incluye también el desarrollo en serie de potencias de las condiciones de frontera. A primer orden dichas condiciones son :

$$(6.4) \quad \phi_1(1) = \psi_1(1) = 0,$$

$$(6.5) \quad \phi_1'(1) = \psi_1'(1) = 0,$$

$$(6.6) \quad [(\psi_1 \text{sen} \theta - \phi_1 \text{cos} \theta) + \frac{c_1}{C_0} (\psi_0 \text{sen} \theta - \phi_0 \text{cos} \theta)] \frac{U''(0)}{C_0'} + \phi_1''' = 0,$$

$$(6.7) \quad [(\psi_1 \text{sen} \theta - \phi_1 \text{cos} \theta) + \frac{c_1}{C_0} (\psi_0 \text{sen} \theta - \phi_0 \text{cos} \theta)] \frac{W''(0)}{C_0'} - \psi_1''' = 0,$$

$$(6.8) \quad - \frac{E}{C_0} (\psi_1 \text{sen} \theta - \phi_1 \text{cos} \theta) - \frac{E}{C_0} (\psi_0 \text{sen} \theta - \phi_0 \text{cos} \theta) c_1 \\ - Rg_1 + i\Omega (\psi_0' \text{sen} \theta - \phi_0' \text{cos} \theta) = 0.$$

Resolveremos el problema de la estabilidad con un procedimiento semejante al de la aproximación a orden cero. Las ecuaciones (6.1) y (6.3) forman un sistema cerrado para  $\phi_1$  y  $\psi_1$ . Luego, las funciones potenciales a orden 1 se obtienen sin recurrir a (6.2).

La parte homogénea de (6.1)-(6.3) es igual al sistema de ecuaciones de la aproximación a orden cero. Esta característica indica que la solución puede buscarse con un método similar al

esbozado en el capítulo anterior y en particular será de utilidad definir una función compleja  $h_1 = \phi_1 + i\psi_1$ .

El empleo de variables complejas debe hacerse con cierto cuidado. Recuerdese que  $\phi_0$  y  $\psi_0$  eran respectivamente la parte real y la parte imaginaria de  $h_0$ , lo que implícitamente significaba que ambas funciones potenciales eran reales. No es el caso de  $\phi_1$  y  $\psi_1$ , ya que tales funciones tendrán una parte imaginaria inducida por los términos no-homogéneos de las ecuaciones (6.1) y (6.3). Evitaremos esta dificultad definiendo un parámetro  $s$  que absorba al imaginario puro  $i$  ( $s$  será precisamente  $i$ ). En todas las operaciones intermedias  $s$  será tratado como real y únicamente en los resultados finales se sustituirá por su valor imaginario.

Multiplicamos a (6.1) por  $-1$ , a (6.3) por  $i$  y luego sumamos ambas ecuaciones. El resultado es:

$$(6.9) \quad i r \operatorname{sen} \alpha h_1' + h_1''' = sR [(U \cos \theta + W \operatorname{sen} \theta - c_0) h_0' + (\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \cos \theta)(U' - iW') + e^{-i\theta} g_0] + i s r \cos \alpha (\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \cos \theta).$$

Se trata de una ecuación diferencial de tercer orden y no-homogénea. Se resolverá de la manera usual, encontrando la solución general de la parte homogénea y luego calculando una solución particular de la ecuación no-homogénea.

La parte homogénea es :

$$(6.10) \quad i r \operatorname{sen} \alpha h_1' + h_1''' = 0.$$

La ecuación es idéntica a (5.15), por lo que ambas tienen la misma solución general; lo anterior significa que (5.18) es también solución de la parte homogénea de (6.9), o sea :

(6.11)

$$B_0 + B_1 \exp(i-1)\chi y + B_2 \exp(1-i)\chi y.$$

El cálculo de la solución particular de (6.9) es bastante más complicado y se dividirá en dos partes. La primera es una integración directa, cuyo fin es reducir el problema a encontrar la solución de una ecuación diferencial de orden 2. La segunda parte es precisamente la deducción de la solución particular con el método de parámetros indeterminados.

## II. -INTEGRACION DE LA ECUACION DE LA ESTABILIDAD

### REDUCCION DE ORDEN

Al integrar una vez se reduce en 1 el orden de la ecuación diferencial:

$$(6.12) \quad i\tau \operatorname{sen} \theta h_1 + h_1'' = \\ sR \int [(U \cos \theta + W \operatorname{sen} \theta - c_0) h_0' + (\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \cos \theta)(U' - iW') + e^{-i\theta} g_0] dy \\ + i\tau c_0 \int (\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \cos \theta) dy.$$

Para realizar la integración del miembro derecho es necesario conocer el campo de velocidades del flujo principal, así como las funciones  $\phi_0$ ,  $\psi_0$  y  $g_0$ .

En la parte no-homogénea hay varios términos que dependen de la coordenada  $y$ , a saber :

- a)  $(U \cos \theta + W \operatorname{sen} \theta - c_0)$
- b)  $h_0'$
- c)  $g_0$
- d)  $(\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \cos \theta)$
- e)  $(U' - iW')$

La expresión analítica de cada uno de estos términos se determina usando los resultados de los capítulos anteriores, en particular las ecuaciones (3.22), (3.27), (3.30), (3.31), (5.10), (5.12), (5.42), (5.45) y (5.46). Entonces :

(6.13a)

$$(U \cos \theta + W \sin \theta - c_0) = \\ -c_0 + T \cos \theta [\operatorname{sen} \chi(1-y) \operatorname{senh} \chi(1+y) + \operatorname{sen} \chi(1+y) \operatorname{senh} \chi(1-y)] + \\ + T \sin \theta [\cos \chi(1-y) \cosh \chi(1+y) + \cos \chi(1+y) \cosh \chi(1-y) - \cos 2\chi - \cosh 2\chi],$$

(6.13b)

$$h_0' = 2\chi(1-i)(1+iM) \exp(i-1)\chi \operatorname{senh} \chi(i-1)(1-y),$$

(6.13c)

$$g_0 = \frac{\tau}{R} \cos \alpha [(\operatorname{sen} \chi y + M \cos \chi y) e^{-\chi y} + (\operatorname{sen} \chi(2-y) + M \cos \chi(2-y)) e^{-\chi(2-y)}] \\ - \frac{\tau}{R} \cos \alpha [M + (\operatorname{sen} 2\chi + M \cos 2\chi) e^{-2\chi}] - \frac{E}{RC_0} [\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \cos \theta],$$

(6.13d)

$$\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \cos \theta = \\ \operatorname{sen} \theta [(\operatorname{sen} \chi y + M \cos \chi y) e^{-\chi y} - (\operatorname{sen} \chi + M \cos \chi) 2e^{-\chi}] + \\ + \operatorname{sen} \theta [(\operatorname{sen} \chi(2-y) + M \cos \chi(2-y)) e^{-\chi(2-y)}] - \\ - \cos \theta [(\cos \chi y - M \operatorname{sen} \chi y) e^{-\chi y} - (\cos \chi - M \operatorname{sen} \chi) 2e^{-\chi}] \\ - \cos \theta [\cos \chi(2-y) - M \operatorname{sen} \chi(2-y)] e^{-\chi(2-y)},$$

(6.13e)

$$U' - iW' = -i2T(1-i)\chi \cosh(1+i)\chi \operatorname{senh}(1-i)\chi y.$$

Luego, el término no-homogéneo de (6.9) es :



(8.14)

$$\begin{aligned} & s a_1 \cos \theta [\operatorname{sen} \chi(1-y) \operatorname{senh} \chi(1+y) + \operatorname{sen} \chi(1+y) \operatorname{senh} \chi(1-y)] \operatorname{senh} \chi(i-1)(1-y) + \\ & s a_1 \operatorname{sen} \theta [\cos \chi(1-y) \operatorname{cosh} \chi(1+y) + \cos \chi(1+y) \operatorname{cosh} \chi(1-y)] \operatorname{senh} \chi(i-1)(1-y) + \\ & [-s a_1 \operatorname{sen} \theta (\cos 2 \chi + \operatorname{cosh} 2 \chi) - s \frac{a_1}{T} c_0] \operatorname{senh} \chi(i-1)(1-y) - s e^{-i \theta} \gamma(0) E + \\ & s T \cos \alpha [(\operatorname{sen} \chi y + M \cos \chi y) e^{-\chi y} + (\operatorname{sen} \chi(2-y) + M \cos \chi(2-y)) e^{-\chi(2-y)}] + \\ & -s T \cos \alpha [M + (\operatorname{sen} 2 \chi + M \cos 2 \chi) e^{-2 \chi}] + s a_2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \chi y e^{-\chi y} \operatorname{senh}(1-i) \chi y \\ & + s a_2 \operatorname{sen} \theta [M \cos \chi y e^{-\chi y} + (\operatorname{sen} \chi(2-y) + M \cos \chi(2-y)) e^{-\chi(2-y)}] \operatorname{senh}(1-i) \chi y - \\ & s a_2 \cos \theta [(\cos \chi y - M \operatorname{sen} \chi y) e^{-\chi y} + \cos \chi(2-y) e^{-\chi(2-y)}] \operatorname{senh}(1-i) \chi y + \\ & + s a_2 M \cos \theta \operatorname{sen} \chi(2-y) e^{-\chi(2-y)} \operatorname{senh}(1-i) \chi y + 2 s a_2 \cos \theta \cos \chi e^{-\chi} \operatorname{senh}(1-i) \chi y \\ & + s a_2 [-2 M \cos \theta \operatorname{sen} \chi e^{-\chi} - \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \chi + M \cos \chi) 2 e^{-\chi}] \operatorname{senh}(1-i) \chi y + \\ & (s T \cos \alpha \operatorname{sen} \theta [(\operatorname{sen} \chi y + M \cos \chi y) e^{-\chi y} + (\operatorname{sen} \chi(2-y) + M \cos \chi(2-y)) e^{-\chi(2-y)}] - \\ & (s T \cos \alpha \cos \theta [(\cos \chi y + M \operatorname{sen} \chi y) e^{-\chi y} + (\cos \chi(2-y) - M \operatorname{sen} \chi(2-y)) e^{-\chi(2-y)}] + \\ & (s T \cos \alpha [\cos \theta (\cos \chi - M \operatorname{sen} \chi) - \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \chi + M \cos \chi)]) 2 e^{-\chi} . \end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2RT\chi(1-i)(1+iM)\exp(i-1)\chi, & y \\ a_2 &= -iRT\chi(1-i)\cosh(1+i)\chi . \end{aligned}$$

La integración es un proceso largo debido a la gran cantidad de términos. Podría complicarse por la presencia de productos de funciones de  $y$ ; a fin de evitar las dificultades asociadas a la integración de productos de funciones, se reescribirá el término independiente con ayuda de 5 igualdades (Chilov, 1973):

$$(8.15) \quad \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2} [\cosh(a+b) - \cosh(a-b)],$$

$$(8.16) \quad \operatorname{cosh} a \operatorname{cosh} b = \frac{1}{2} [\cosh(a+b) + \cosh(a-b)],$$

$$(8.17) \quad \operatorname{sen} a \operatorname{cosh} b = \frac{1}{2} [\operatorname{senh}(a+b) - \operatorname{senh}(a-b)],$$

$$(6.18) \quad i \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} h i a,$$

$$(6.19) \quad \operatorname{cosec} a = \operatorname{cosh} i a.$$

Con ellas se transforman los productos en sumas de funciones. Se inicia este proceso con el término  $sR(U \cos \theta + W \operatorname{sen} \theta) h_0'$ . El primer paso será escribir las funciones trigonométricas en forma hiperbólica valiéndose de (6.18) y (6.19):

$$(6.20) \quad \begin{aligned} sR(U \cos \theta + W \operatorname{sen} \theta) h_0' = & \\ -i s a_1 \cos \theta \operatorname{sen} h i \chi(1-y) \operatorname{sen} h \chi(1+y) \operatorname{sen} h \chi(i-1)(1-y) - & \\ -i s a_1 \cos \theta \operatorname{sen} h \chi(1-y) \operatorname{sen} h i \chi(1+y) \operatorname{sen} h \chi(i-1)(1-y) + & \\ + s a_1 \cos \theta \operatorname{cosh} i \chi(1-y) \operatorname{cosh} h \chi(1+y) \operatorname{sen} h \chi(i-1)(1-y) + & \\ + s a_1 \cos \theta \operatorname{cosh} h \chi(1-y) \operatorname{cosh} i \chi(1+y) \operatorname{sen} h \chi(i-1)(1-y) + & \\ -s a_1 (\cos 2\chi + \operatorname{cosh} 2\chi) \operatorname{sen} h \chi(i-1)(1-y) & \end{aligned}$$

Con las identidades (6.15) y (6.16) se expresan los productos de funciones hiperbólicas como sumas de cosenos hiperbólicos:

$$(6.21) \quad \operatorname{sen} h i \chi(1-y) \operatorname{sen} h \chi(1+y) = \frac{1}{2} [\operatorname{cosh} h \chi((1+i)+(1-i)y) - \operatorname{cosh} h \chi((i-1)-(1-i)y)],$$

$$(6.22) \quad \operatorname{sen} h \chi(1-y) \operatorname{sen} h i \chi(1+y) = \frac{1}{2} [\operatorname{cosh} h \chi((1+i)+(i-1)y) - \operatorname{cosh} h \chi((i-1)+(1+i)y)],$$

$$(6.23) \quad \operatorname{cosh} i \chi(1-y) \operatorname{cosh} h \chi(1+y) = \frac{1}{2} [\operatorname{cosh} h \chi((1+i)+(1-i)y) + \operatorname{cosh} h \chi((i-1)+(1+i)y)],$$

$$(6.24) \quad \operatorname{cosh} h \chi(1-y) \operatorname{cosh} i \chi(1+y) = \frac{1}{2} [\operatorname{cosh} h \chi((1+i)+(i-1)y) + \operatorname{cosh} h \chi((i-1)+(1+i)y)].$$

Los resultados se introducen en (6.20). Notese que cada

una de las funciones se repite dos veces en las ecuaciones (6.21-24). Después de reagrupar resulta la expresión:

$$\begin{aligned}
 (6.25) \\
 -s \frac{i a_1}{2} e^{i\theta} [\cosh \chi((1+i)+(1-i)y) + \cosh \chi((1+i)+(i-1)y)] \operatorname{senh} \chi(i-1)(1-y) + \\
 + s \frac{i a_1}{2} e^{-i\theta} [\cosh \chi((i-1)-(1+i)y) + \cosh \chi((i-1)+(1+i)y)] \operatorname{senh} \chi(i-1)(1-y) \\
 - s a_1 \operatorname{sen} \theta (\cos 2\chi + \cosh 2\chi) \operatorname{senh} \chi(i-1)(1-y).
 \end{aligned}$$

Aún quedan productos de funciones. Se cambian por una suma de senos hiperbólicos con el uso de la igualdad (6.17) :

$$\begin{aligned}
 (6.26) \\
 \cosh \chi((1+i)+(1-i)y) \operatorname{senh} \chi(i-1)(1-y) &= \frac{1}{2} [\operatorname{senh} 2\chi(i+(1-i)y) - \operatorname{sen} 2\chi], \\
 (6.27) \\
 \cosh \chi((i-1)-(1+i)y) \operatorname{senh} \chi(i-1)(1-y) &= \frac{1}{2} [\operatorname{senh} 2\chi(-iy+(i-1)) + \operatorname{senh} 2\chi y], \\
 (6.28) \\
 \cosh \chi((1+i)+(i-1)y) \operatorname{senh} \chi(i-1)(1-y) &= \frac{1}{2} [\operatorname{senh} i 2\chi - \operatorname{senh} 2\chi(1+(i-1)y)], \\
 (6.29) \\
 \cosh \chi((i-1)+(1+i)y) \operatorname{senh} \chi(i-1)(1-y) &= \frac{1}{2} [\operatorname{senh} 2\chi(y+(i-1)) - \operatorname{senh} i 2\chi y].
 \end{aligned}$$

Finalmente  $sR(U \cos \theta + W \operatorname{sen} \theta) h_0'$  se expresa como una suma de  $\theta$  senos hiperbólicos :

$$\begin{aligned}
 (6.30) \quad sR(U \cos \theta + W \operatorname{sen} \theta) h_0' = \\
 -s \frac{i a_1}{4} e^{i\theta} [\operatorname{senh} 2\chi(i+(1-i)y) - \operatorname{sen} 2\chi + \operatorname{senh} i 2\chi - \operatorname{senh} 2\chi(1+(i-1)y)] + \\
 + s \frac{i a_1}{4} e^{-i\theta} [\operatorname{senh} 2\chi((i-1)-iy) + \operatorname{senh} 2\chi - \operatorname{senh} i 2\chi y + \operatorname{senh} 2\chi((i-1)+y)] + \\
 + s L_1 \operatorname{senh} \chi(i-1)(1-y),
 \end{aligned}$$

donde  $L_1 = -a_1 \operatorname{sen} \theta (\cos 2\chi + \cosh 2\chi)$ .

Este proceso se repite con otro de los términos incluidos en la parte no-homogénea de la ecuación diferencial (6.9). Le toca el turno a  $sRe^{-i\theta} g_0$ . A diferencia del caso anterior, en que había hasta productos triples de funciones, ahora sólo aparecen productos de una función trigonométrica con una exponencial. En esta parte se usa la expresión de senos y cosenos trigonométricos en términos de exponenciales complejas:

$$(6.31) \quad \operatorname{sen} a = \frac{1}{2i} [e^{ia} - e^{-ia}],$$

$$(6.32) \quad \operatorname{cos} a = \frac{1}{2} [e^{ia} + e^{-ia}].$$

La expresión analítica inicial de  $sRe^{-i\theta} g_0$  es:

$$(6.33) \quad sT \operatorname{cos} a e^{-i\theta} [(\operatorname{sen} \chi y + M \operatorname{cos} \chi y) e^{-\chi y} + (\operatorname{sen} \chi(2-y) + M \operatorname{cos} \chi(2-y)) e^{-i\chi(2-y)}] + sL_2,$$

con  $L_2 = -e^{-i\theta} [T \operatorname{cos} a (M + (\operatorname{sen} 2\chi + M \operatorname{cos} 2\chi) e^{-2\chi}) - \gamma(0)E]$ .

Ocupamos (6.31) y (6.32) para reescribir los productos dentro del paréntesis cuadrado como una suma de exponenciales:

$$(6.34) \quad (\operatorname{sen} \chi y + M \operatorname{cos} \chi y) e^{-\chi y} = \frac{1}{2} [-ie^{i\chi y} + ie^{-i\chi y} + Me^{i\chi y} + Me^{-i\chi y}] e^{-\chi y}$$

$$= \frac{(M-i)}{2} \exp(i-1)\chi y + \frac{(M+i)}{2} \exp(-1-i)\chi y,$$

$$(6.35) \quad (\operatorname{sen} \chi(2-y) + M \operatorname{cos} \chi(2-y)) e^{-i\chi(2-y)} =$$

$$\frac{1}{2i} [e^{-i\chi(2-y)} - e^{i\chi(2-y)}] e^{-i\chi(2-y)} + \frac{1}{2} M [e^{i\chi(2-y)} + e^{-i\chi(2-y)}] e^{-i\chi(2-y)} =$$

$$= \frac{(M-i)}{2} \exp \chi(i-1)(2-y) + \frac{(M+i)}{2} \exp(i+1)(y-2).$$

De acuerdo a lo anterior, la forma final de  $sRe^{-i\phi}g_0$  es :

$$(6.36) \quad \frac{1}{2} \tau \cos \alpha e^{-i\phi} [(M-i) \exp(i-1)\chi y + (M+i) \exp(-1-i)\chi y] + \\ \frac{1}{2} \tau \cos \alpha e^{-i\phi} [(M-i) \exp \chi(i-1)(2-y) + (M+i) \exp(1+i)(y-2)] + sL_2$$

Los productos de funciones en dos partes de la ecuación diferencial se han eliminado, sin embargo aún faltan dos términos. Continuamos ahora con  $i\tau \cos \alpha (\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \operatorname{cos} \theta)$ . De acuerdo a (6.13d), aquí hay productos de funciones trigonométricas y exponenciales. Corresponde entonces utilizar las identidades (6.31) y (6.32). La expresión  $\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \operatorname{cos} \theta$  se reagrupa como sigue :

$$(6.37) \quad \psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \operatorname{cos} \theta = \\ \operatorname{sen} \theta [( \operatorname{sen} \chi y + M \operatorname{cos} \chi y ) e^{-\chi y} + ( \operatorname{sen} \chi(2-y) + M \operatorname{cos} \chi(2-y) ) e^{-\chi(2-y)}] \\ + 2e^{-\chi} [ -\operatorname{sen} \theta ( \operatorname{sen} \chi + M \operatorname{cos} \chi ) + \operatorname{cos} \theta ( \operatorname{cos} \chi - M \operatorname{sen} \chi ) ] - \\ - \operatorname{cos} \theta [ ( \operatorname{cos} \chi y - M \operatorname{sen} \chi y ) e^{-\chi y} + ( \operatorname{cos} \chi(2-y) - M \operatorname{sen} \chi(2-y) ) e^{-\chi(2-y)} ] = \\ = ( \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \chi y - \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \chi y ) e^{-\chi y} + M ( \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \chi y + \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \chi y ) e^{-\chi y} \\ + ( -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \chi + \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \chi ) 2e^{-\chi} + M ( -\operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \chi - \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \chi ) 2e^{-\chi} \\ + ( \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \chi(2-y) - \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \chi(2-y) ) e^{-\chi(2-y)} + \\ + M ( \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \chi(2-y) + \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \chi(2-y) ) e^{-\chi(2-y)}$$

Todos los factores entre paréntesis pueden simplificarse usando dos igualdades trigonométricas :

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \operatorname{cos} b + \operatorname{sen} b \operatorname{cos} a, \quad y \\ \operatorname{cos}(a+b) = \operatorname{cos} a \operatorname{cos} b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Entonces, (6.37) se reescribe así :

$$(6.38) \quad \begin{aligned} & \psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \operatorname{cos} \theta = \\ & [-\operatorname{cos}(\theta + \chi y) + M \operatorname{sen}(\theta + \chi y)] e^{-\chi y} - \operatorname{cos}(\theta + \chi(2-y)) e^{-\chi(2-y)} \\ & + M \operatorname{sen}(\theta + \chi(2-y)) e^{-\chi(2-y)} + L_3, \end{aligned}$$

donde  $L_3 = [\operatorname{cos}(\theta + \chi) - M \operatorname{sen}(\theta + \chi)] 2e^{-\chi}$ .

Luego de algunos pasos algebraicos similares a los de (6.34) y (6.35) se llega finalmente a :

$$(6.39) \quad \begin{aligned} & i \operatorname{tr} \operatorname{cosa}(\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \operatorname{cos} \theta) = \\ & \frac{i}{2} \operatorname{tr} \operatorname{cosa} [-(1+iM) \exp(i\theta + (i-1)\chi y) + (-1+iM) \exp(-i\theta + (1+i)\chi y)] + \\ & - \frac{i}{2} \operatorname{tr} \operatorname{cosa} (1+iM) \exp(i\theta + (i-1)\chi(2-y)) \\ & + \frac{i}{2} \operatorname{tr} \operatorname{cosa} (-1+iM) \exp(-i\theta + (1+i)\chi(y-2)) + i \operatorname{tr} \operatorname{cosa} L_3. \end{aligned}$$

Queda aún por reescribir el término  $sR(\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \operatorname{cos} \theta)(U' - iW')$ . Originalmente aquí hay productos hasta de 3 funciones. Recurriendo a (6.38) el problema se simplifica pues ahora aparecerán únicamente productos de exponenciales y un seno hiperbólico :

$$(6.40) \quad \begin{aligned} & (\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \operatorname{cos} \theta)(U' - iW') = \\ & s \frac{\alpha^2}{2} [-(1+iM) \exp(i\theta + (i-1)\chi y) + (-1+iM) \exp(-i\theta + (1+i)\chi y)] \operatorname{senh}(1-i)\chi y \\ & - s \frac{\alpha^2}{2} (1+iM) \exp(i\theta + (i-1)\chi(2-y)) \operatorname{senh}(1-i)\chi y \\ & + s \frac{\alpha^2}{2} (-1+iM) \exp(-i\theta + (1+i)\chi(y-2)) \operatorname{senh}(1-i)\chi y + s \alpha_2 L_3 \operatorname{senh}(1-i)\chi y, \end{aligned}$$

lo cual puede escribirse en la forma siguiente :

$$\begin{aligned} & -s \alpha_2 (1+iM) \exp(i\theta + (i-1)\chi) \operatorname{cosh} \chi(i-1)(y-1) \operatorname{senh}(1-i)\chi y + \\ & + s \alpha_2 (-1+iM) \exp(-i\theta + (1+i)\chi) \operatorname{cosh} \chi(1+i)(1-y) \operatorname{senh}(1-i)\chi y. \end{aligned}$$

Ocupamos ahora la identidad (6.17) :

(6.42)

$$\cosh\chi(i-1)(y-1) \sinh(i-1)\chi y = \frac{1}{2}[\sinh(i-1)\chi + \sinh\chi(i-1)(2y-1)],$$

(6.43)

$$\cosh\chi(1+i)(1-y) \sinh(i-1)\chi y = \frac{1}{2}[\sinh\chi((1+i)-i2y) + \sinh\chi(-(1+i)+2y)],$$

de lo cual resulta:

(6.44)

$$\begin{aligned} & sR(\psi_0 \operatorname{sen}\theta - \phi_0 \operatorname{cos}\theta)(U' - iW') = \\ & -s\frac{\alpha_2}{2}(1+iM)\exp(i\theta+(i-1)\chi)[\sinh\chi(i-1) + \sinh\chi(i-1)(2y-1)] \\ & +s\frac{\alpha_2}{2}(-1+iM)\exp(-i\theta-(1+i)\chi)[\sinh\chi((1+i)-i2y) + \sinh\chi(-(1+i)+2y)] \\ & +s\alpha_2 L_3 \sinh(i-1)\chi y . \end{aligned}$$

En base a todo lo anterior se llega a la forma final del término no homogéneo de la ecuación diferencial:

(6.45)

$$\begin{aligned} & -\frac{i\alpha_1}{4}e^{i\phi}[\sinh 2\chi(i+(1-i)y) - \operatorname{sen} 2\chi + \operatorname{sen} i 2\chi - \sinh 2\chi(1+(i-1)y)] \\ & +s\frac{i\alpha_1}{4}e^{-i\phi}[\sinh 2\chi((i-1)-iy) + \sinh 2\chi y - \operatorname{sen} i 2\chi y + \sinh 2\chi((i-1)+y)] \\ & +sL_1 \sinh\chi(1-y)(y-1) + \frac{s}{E} r \operatorname{cos}\alpha e^{-i\phi}[(M-i)\exp(i-1)\chi y + (M+i)\exp(-(1-i)\chi y)] \\ & + \frac{s}{E} r \operatorname{cos}\alpha e^{-i\phi}[(M-i)\exp\chi(i-1)(2-y) + (M+i)\exp\chi(1+i)(y-2)] + sL_2 \\ & - i s r \operatorname{cos}\alpha (1+Mi)\exp(i\theta+(i-1)\chi)\cosh\chi(i-1)(1-y) + \\ & + i s r \operatorname{cos}\alpha (-1+iM)\exp(-i\theta-(1+i)\chi)\cosh\chi(1+i)(1-y) + i s r \operatorname{cos}\alpha L_3 \\ & -s\frac{\alpha_2}{2}(1+iM)\exp(i\theta+(i-1)\chi)[\sinh\chi(i-1) + \sinh\chi(i-1)(2y-1)] \\ & +s\frac{\alpha_2}{2}(-1+iM)\exp(-i\theta-(1+i)\chi)[\sinh\chi((1+i)-i2y) + \sinh\chi(-(1+i)+2y)] \\ & -s\frac{\alpha_2}{E} \alpha_1 \sinh\chi(i-1)(1-y) + s\alpha_2 L_3 \sinh(i-1)\chi y . \end{aligned}$$

La integración de esta expresión es un proceso tedioso pero los pasos son sencillos (hay que integrar funciones hiperbólicas y constantes). Luego, la forma final de la ecuación (6.12) es:

(6.48)

$$i r \operatorname{sen} \alpha h_1 + h_1'' =$$

$$\begin{aligned} & -s \frac{ia_1}{4} e^{i\theta} \left[ \frac{\cosh 2\chi(i+(1-i)y)}{2\chi(1-i)} - y \operatorname{sen} 2\chi + y \operatorname{sen} i 2\chi + \frac{\cosh 2\chi(1+(1-i)y)}{2\chi(1-i)} \right] \\ & + s \frac{ia_1}{8\chi} e^{-i\theta} \left[ i \cosh 2\chi(i-1-iy) + \cosh 2\chi y + i \cosh i 2\chi y + \cosh 2\chi((1-i)+y) \right] \\ & - \frac{isr}{\chi(1-i)} \operatorname{cosec} \alpha (1+iM) \exp(i\theta+(1-i)\chi) \operatorname{senh} \chi(1-i)(1-y) \\ & - \frac{isr}{\chi(1+i)} \operatorname{cosec} \alpha (-1+iM) \exp(-i\theta-(1+i)\chi) \operatorname{senh} \chi(1+i)(1-y) \\ & - s \frac{a_2}{2} (1+iM) \exp(i\theta+(1-i)\chi) \left[ y \operatorname{senh} \chi(1-i) + \frac{\cosh \chi(1-i)(2y-1)}{2\chi(1-i)} \right] \\ & + s \frac{a_2}{4\chi} (-1+iM) \exp(-i\theta-(1+i)\chi) \left[ i \cosh \chi(1+i-i2y) + \cosh \chi(-(1+i)+2y) \right] \\ & + \frac{s(M-i)}{\chi(1-i)} r \operatorname{cosec} \alpha \exp(-i\theta+(1-i)\chi) \operatorname{senh} \chi(i-1)(y-1) \\ & + \frac{s(M+i)}{\chi(1+i)} r \operatorname{cosec} \alpha \exp(-i\theta-(1+i)\chi) \operatorname{senh} \chi(1+i)(y-1) \\ & + s \frac{\zeta_1}{\chi(1-i)} \cosh \chi(i-1)(1-y) + s \frac{\zeta_2}{\chi(1-i)} \cosh(1-i)\chi y + s \zeta_3 y. \end{aligned}$$

donde  $\zeta_1 = L_1 - (c_0/T)$ ,  $\zeta_2 = a_2 L_2$  y  $\zeta_3 = L_2 + i r \operatorname{cosec} \alpha L_2$ .

### III. -SOLUCION PARTICULAR.

#### METODO DE PARAMETROS INDETERMINADOS

El método de variación de parámetros permite hallar una solución particular de una ecuación diferencial no homogénea cuando son conocidas las soluciones de la ecuación homogénea asociada. (Kreider, 1983). Podríamos optar por este camino, sin embargo el procedimiento es bastante largo.



Resulta más sencillo usar el método de parámetros indeterminados. Los cálculos se basarán en una propiedad de las funciones hiperbólicas y exponenciales : la segunda derivada es proporcional a la misma función. Sea por ejemplo la función  $J_i = \sinh(\omega y + \xi)$ . Una combinación lineal de  $J_i$  y  $J_i''$  es proporcional a  $J_i$ . Lo mismo sucede con  $\cosh(\omega y + \xi)$  y  $\exp(\omega y + \xi)$ .

El término independiente de la ecuación (8.43) contiene (además de un término lineal en  $y$ ) funciones como las señaladas arriba. Por otra parte, considerando que es una ecuación diferencial lineal, podremos obtener la solución aplicando por separado el método a cada una de las funciones.

Sea  $J_i$  una función incluida en el término independiente. Proponemos como la parte de la solución particular correspondiente a esta función una expresión del tipo  $n_i J_i$ , con  $n_i$  una constante a determinar.

Las funciones hiperbólicas y exponenciales incluidas en el término independiente de (8.46) son :

- $J_1 = \cosh 2\chi(i + (1-i)y)$
- $J_2 = \cosh 2\chi(1 + (i-1)y)$
- $J_3 = \cosh 2\chi(-iy + (i-1))$
- $J_4 = \cosh 2\chi y$
- $J_5 = \cosh i 2\chi y$
- $J_6 = \cosh 2\chi((i-1) + y)$
- $J_7 = \sinh \chi(1-i)(1-y)$
- $J_8 = \sinh \chi(1+i)(1-y)$
- $J_9 = \cosh \chi(1-i)(2y-1)$
- $J_{10} = \cosh \chi((1+i) - i 2y)$
- $J_{11} = \cosh \chi(2y - (1+i))$
- $J_{12} = \cosh \chi(i-1)(1-y)$
- $J_{13} = \cosh \chi(1-i) \chi y$
- $J_{14} = \sinh \chi(1+i)(y-1)$

ESTE TEXTO NO DEBE  
 SER USADO PARA  
 REPRODUCCION

Luego de un cálculo sencillo, las constantes  $n_i$  resultan ser las siguientes (recuérdese que  $\chi = (\tau \text{sen} \alpha / 2)^{\frac{1}{2}}$ ):

$$(6.47) \quad \begin{aligned} n_1 &= \frac{-1}{8\chi^2 i} & ; \quad n_2 &= \frac{-1}{8\chi^2 i} & ; \quad n_3 &= \frac{1}{2\chi^2(i-2)} & ; \\ n_4 &= \frac{1}{2\chi^2(2+i)} & ; \quad n_5 &= \frac{1}{2\chi^2(i-2)} & ; \quad n_6 &= \frac{1}{2\chi^2(i+2)} & ; \\ n_8 &= \frac{1}{4\chi^2 i} & ; \quad n_9 &= \frac{-1}{8\chi^2 i} & ; \quad n_{10} &= \frac{1}{2\chi^2(i-2)} & ; \\ n_{11} &= \frac{1}{2\chi^2(i+2)} & ; \quad n_{14} &= \frac{1}{4\chi^2 i} . \end{aligned}$$

En algunos casos el método no es aplicable por la sencilla razón de que ciertas funciones  $J_i$  son soluciones de la ecuación homogénea. La parte de la solución particular asociada a  $J_7$ ,  $J_{12}$  y  $J_{13}$  se calculará usando una variante del método de parámetros indeterminados. Proponemos soluciones de la forma:

$$(6.48) \quad N_i y J_i'$$

Las constantes  $N_i$  resultan ser:

$$(6.49) \quad N_7 = \frac{1}{2\chi(i-1)} \quad ; \quad N_{12} = N_{13} = -N_7 .$$

Después de todo este proceso sólo falta unir todos los términos que darán la solución particular. Será una combinación de funciones hiperbólicas y una parte lineal:

$$(6.50) \quad \begin{aligned} H_p(y) &= \frac{5a_1 e^{i\phi}}{48\chi^3(1-i)} [\cosh 2\chi(i+(1-i)y) + \cosh 2\chi(1+(i-1)y)] \\ &\quad - s \frac{a_1 e^{i\phi}}{8\chi^2} [-\text{sen} 2\chi + \text{sen} i 2\chi] y \\ &\quad + s \frac{ia_1 e^{-i\phi}}{16\chi^3(i-2)} [i \cosh 2\chi(-iy+(i-1)) + i \cosh i 2\chi y] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +s \frac{ia_1 e^{-i\theta}}{16\chi^3(1+2)} [\cos 2\chi y + \cosh 2\chi(y+(1-i))] \\
& + \frac{s7\cos\alpha}{4\chi^2} y(1+iM)\exp(-i\theta-(1+i)\chi) \sinh\chi(1-i)(1-y) \\
& + \frac{s7\cos\alpha}{4\chi^2(1+i)} y(1-iM)\exp(-i\theta-(1+i)\chi) \sinh\chi(1+i)(1-y) \\
& + s \frac{a_2}{2}(1+iM)\exp(i\theta+(1+i)\chi) \left[ \frac{y \sinh\chi(1-i)}{2\chi^2} - \frac{\cosh\chi(1-i)(2y-1)}{12\chi^3(1+i)} \right] \\
& + s \frac{a_2(-1+iM)}{8\chi^3} \exp(-i\theta-(1+i)\chi) \left[ \frac{i \cosh\chi((1+i)-i2y)}{i-2} + \frac{\cosh\chi(2y-(1+i))}{i+2} \right] \\
& + \frac{s7\cos\alpha e^{-i\theta}}{2\chi^2(i-1)^2} (M-i)y \exp\chi(i-1) \cosh\chi(i-1)(y-1) \\
& + \frac{s7\cos\alpha e^{-i\theta}}{4\chi^3(i-1)} (M+i)\exp(-1-i)\chi \sinh\chi(1+i)(y-1) \\
& + s \frac{\zeta_1}{2\chi^2(1-i)^2} y \sinh\chi(1-i)(1-y) + s \frac{\zeta_2}{2\chi^2(1-i)} y \sinh(1-i)\chi y + s \frac{\zeta_3}{i2\chi^2} y .
\end{aligned}$$

Como se puede apreciar, la solución particular  $H_p$  es directamente proporcional a  $s$ . Esto significa que las soluciones particulares de las funciones  $\phi_1$  y  $\psi_1$  son puramente imaginarias.

#### IV. -CALCULO DE C A PRIMER ORDEN

La solución general de (6.9) es :

$$(6.51) \quad h_1 = B_0 + B_1 \exp(i-1)\chi y + B_2 \exp(1-i)\chi y + H_p(y).$$

Corresponde ahora imponer las condiciones de frontera, lo que permitirá calcular las constantes complejas  $B_0$ ,  $B_1$  y  $B_2$  (salvo por un factor), así como el valor de  $c_1$ .

Las condiciones (6.4) y (6.5) son equivalentes a

$h_1(1) = h_1'(1) = 0$ , o sea:

$$(6.52) \quad B_0 + B_1 \exp(i-1)\chi + B_2 \exp(1-i)\chi + H_p(1) = 0,$$

$$(6.53) \quad B_1 \exp(i-1)\chi - B_2 \exp(1-i)\chi + \frac{H_p'(1)}{\chi(i-1)} = 0.$$

Por otra parte, (6.6) y (6.7) no son expresables en términos de  $h_1$ . Dichas ecuaciones incluyen a las funciones potenciales  $\phi_1$  y  $\psi_1$  (así como sus segundas derivadas) en ambos casos evaluadas en  $y=0$ . El cálculo de estas cantidades se hará a partir de (6.51).

La función compleja evaluada en cero da como resultado:

$$(6.54) \quad h_1(0) = B_0 + B_1 + B_2 + H_p(0).$$

Entonces, de la definición de  $h_1$  se tiene que :

$$(6.55) \quad \phi_1(0) = a_0 + a_1 + a_2 + s\phi_p(0),$$

$$(6.56) \quad \psi_1(0) = b_0 + b_1 + b_2 + s\psi_p(0),$$

ya que  $B_0 = a_0 + ib_0$ ,  $B_1 = a_1 + ib_1$ ,  $B_2 = a_2 + ib_2$  y  $H_p = s(\phi_p + i\psi_p)$ .

La segunda derivada de  $h_1$  en  $y=0$  es :

$$(6.57) \quad -i2\chi^2(B_1 + B_2) + H_p''(0) = 0.$$

Por lo tanto,  $\phi_1''(0)$  y  $\psi_1''(0)$  son respectivamente:

$$(6.58) \quad \phi_1''(0) = 2\chi^2(b_1 + b_2) + s\phi_p''(0),$$

$$(6.59) \quad \psi_1''(0) = -2\chi^2(a_1 + a_2) + s\psi_p''(0).$$

Luego, las condiciones de frontera (6.6) y (6.7) se traducen en:

(6.60)

$$\frac{U''(0)}{C_0'} [(b_0 + b_1 + b_2) \sin \theta - (a_1 + a_2 + a_3) \cos \theta] + 2\chi^2 (b_1 + b_2) = -s\phi_p''(0)$$

$$- \frac{U''(0)}{C_0'^2} [\psi_0(0) \sin \theta - \phi_0(0) \cos \theta] c_1 + \frac{U''(0)}{C_0'} [\phi_p(0) \cos \theta - \psi_p(0) \sin \theta],$$

(6.61)

$$\frac{W''(0)}{C_0'} [(b_0 + b_1 + b_2) \sin \theta - (a_0 + a_1 + a_2) \cos \theta] + 2\chi^2 (a_1 + a_2) = s\psi_p''(0)$$

$$- \frac{W''(0)}{C_0'^2} [\psi_0(0) \sin \theta - \phi_0(0) \cos \theta] c_1 + \frac{W''(0)}{C_0'} [\phi_p(0) \cos \theta - \psi_p(0) \sin \theta].$$

Es necesario comentar que (6.52), (6.53), (6.60) y (6.61) forman un sistema de ecuaciones algebraicas con siete incógnitas, a saber, el valor propio  $c_1$ , así como  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$ . La parte homogénea de estas ecuaciones es idéntica al sistema obtenido en la aproximación a orden cero. En aquel caso se asignó un valor a  $c_0$  de manera que hubiera una solución distinta de la trivial (el conjunto de ecuaciones se hace linealmente dependiente).

Esto último quiere decir que la parte homogénea de (6.52), (6.53), (6.60) y (6.61) también forma un sistema linealmente dependiente. Lo anterior implica que mediante operaciones elementales podemos llegar a dos ecuaciones cuyo miembro izquierdo sea el mismo. El valor de  $c_1$  será aquel que haga que las ecuaciones sean compatibles.

El problema de valor propio se resolverá aplicando el método de eliminación al sistema de ecuaciones. El primer paso es restar (6.53) a (6.52), de manera que el resultado sea una ecuación sin la constante compleja  $B_1$ :

$$(8.62) \quad 2B_2 \exp(i-1)\chi + B_0 = S_1,$$

$$\text{con } S_1 = -H_p(1) + \frac{H_p'(1)}{\chi(i-1)}.$$

Las ecuaciones (8.53) y (8.62) permiten expresar  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$  y  $b_1$  en términos de  $a_2$  y  $b_2$ . Esto es posible si separamos partes real e imaginaria de ambas ecuaciones:

$$(8.63) \quad a_0 = -2e^{-x}(a_2 \cos \chi - b_2 \sin \chi) + s r_1,$$

$$(8.64) \quad b_0 = -2e^{-x}(a_2 \sin \chi + b_2 \cos \chi) + s r_2,$$

$$(8.65) \quad a_1 = e^{-2x}(a_2 \cos 2\chi - b_2 \sin 2\chi) + s r_3,$$

$$(8.66) \quad b_1 = e^{-2x}(a_2 \sin 2\chi + b_2 \cos 2\chi) + s r_4,$$

$$\text{siendo } s r_1 = \text{Re}(S_1), \quad s r_2 = \text{Im}(S_1), \quad s r_3 = -\text{Re}\left(\frac{H_p'(0)}{\chi(i-1)} \exp(i-1)\chi\right),$$

$$\text{y } s r_4 = -\text{Im}\left(\frac{H_p'(0)}{\chi(i-1)} \exp(i-1)\chi\right).$$

Introducimos estos resultados en (8.60) y (8.61). Luego de simplificar con ayuda de identidades trigonométricas se llega a un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$(8.67) \quad \left[ \sin(\theta-\chi)e^{-x} + \sin(2\chi-\theta)e^{-2x} - \sin\theta + \frac{2\chi^2 C_0'}{U_1'(0)} \sin 2\chi e^{-2x} \right] a_2 + \\ + \left[ -2\cos(\theta-\chi)e^{-x} + \cos(2\chi-\theta)e^{-2x} + \cos\theta + \frac{2\chi^2 C_0'}{U_1'(0)} (1 + \cos 2\chi) e^{-2x} \right] b_2 = \\ = s q_1 + s Q + m c_1,$$

$$\begin{aligned}
 (8.68) \quad & [\text{sen}(\theta-\chi)2e^{-\chi} + \text{sen}(2\chi-\theta)e^{-2\chi} - \text{sen}\theta + \frac{2\chi^2 C_0'}{W'(\theta)}(1 + \cos 2\chi e^{-2\chi})] a_2 + \\
 & + [-\cos(\theta-\chi)2e^{-\chi} + \cos(2\chi-\theta)e^{-2\chi} + \cos\theta - \frac{2\chi^2 C_0'}{W'(\theta)} \text{sen} 2\chi e^{-2\chi}] b_2 = \\
 & = sq_2 + sQ + mc_1,
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 Q &= (\phi_p(\theta) - r_2 - r_4) \cos \theta - (\psi_p(\theta) - r_1 - r_3) \text{sen} \theta, \\
 q_1 &= (C_0' / U'(\theta)) [2\chi^2 r_4 + \phi_p'(\theta)], \\
 q_2 &= (C_0' / W'(\theta)) [\psi_p'(\theta) - 2\chi^2 r_3].
 \end{aligned}$$

De acuerdo a la dependencia lineal en la parte homogénea de las ecuaciones, resulta que el miembro izquierdo de (8.67) es un múltiplo escalar del miembro izquierdo de (8.68).

Las ecuaciones (8.67) y (8.68) son de la forma:

$$(8.69) \quad A_{11}a_2 + A_{12}b_2 = sq_1 + sQ + m c_1.$$

$$(8.70) \quad A_{21}a_2 + A_{22}b_2 = sq_2 + sQ + m c_1.$$

Se multiplica (8.69) por  $\frac{A_{21}}{A_{11}}$  y resulta:

$$(8.71) \quad A_{21}a_2 + A_{12} \frac{A_{21}}{A_{11}} b_2 = \frac{A_{21}}{A_{11}} [sq_1 + sQ + m c_1].$$

Por la dependencia lineal debe suceder que  $\frac{A_{21}}{A_{11}} A_{12} = A_{22}$ . La condición de solubilidad es entonces :

$$(8.72) \quad \frac{A_{21}}{A_{11}} [sq_1 + sQ + m c_1] = sq_2 + sQ + m c_1.$$

Esta ecuación permite conocer el valor propio  $c_1$  :

$$(6.73) \quad c_1 = s \frac{A_{21}(q_1+Q) - A_{11}(q_2+Q)}{(A_{11} - A_{21})m} = -s \frac{Q}{m} + s \frac{A_{21}q_1 - A_{11}q_2}{(A_{11} - A_{21})m}$$

Exceptuando  $s$ , todas las cantidades que aparecen en la ecuación (6.73) son reales. Eso significa que  $c_1$  es una expresión puramente imaginaria y su comportamiento permitirá saber si el flujo es estable o no.

Recordando la definición de cada uno de los términos se tiene finalmente que :

(6.74)

$$c_1 = s \frac{-2\chi(\phi_0(0)\cos\theta - \psi_0(0)\sin\theta) + (\phi_p'(1) - \psi_p'(1) - 2\chi\phi_p(1)\sin\theta)}{2\chi(\phi_0(0)\cos\theta - \psi_0(0)\sin\theta)} C_0' +$$

$$+ s \frac{\cos\theta(\psi_p'(1) + \phi_p'(1) - 2\chi\psi_p(1)) - \phi_p'(1)(\sin(\chi - \theta) + \cos(\chi - \theta))e^{-\chi}}{2\chi(\phi_0\cos\theta - \psi_0\sin\theta)} C_0' -$$

$$- s \frac{\psi_p'(1)(\cos(\chi - \theta) - \sin(\chi - \theta))e^{-\chi}}{2\chi(\phi_0(0)\cos\theta - \psi_0(0)\sin\theta)} C_0'$$

$$+ s\mu_1 [-(\cos\chi - \sin\chi)\chi e^{-\chi}\psi_p'(1) - (\cos\chi + \sin\chi)\chi e^{-\chi}\phi_p'(1) + \phi_p''(0)] C_0' +$$

$$+ s\mu_2 [(\cos\chi - \sin\chi)\chi e^{-\chi}\phi_p'(1) - (\cos\chi + \sin\chi)\chi e^{-\chi}\psi_p'(1) + \psi_p''(0)] C_0'$$

con :

$$\mu_1 = - \frac{2\sin(\theta + \chi)e^{-\chi} + \sin(2\chi - \theta)e^{-2\chi} - \sin\theta + (2\chi^2 C_0' / W''(0))(1 + \cos 2\chi e^{-2\chi})}{2\chi^2 U''(0) \left[ \frac{\sin 2\chi}{U''(0)} e^{-2\chi} - \frac{(1 + \cos 2\chi \exp(-2\chi))}{W''(0)} \right] (\phi_0(0)\cos\theta - \psi_0(0)\sin\theta)}$$

$$\mu_2 = - \frac{2\sin(\theta - \chi)e^{-\chi} + \sin(2\chi - \theta)e^{-2\chi} - \sin\theta + (2\chi^2 C_0' / U''(0))\sin 2\chi}{2\chi^2 W''(0) \left[ \frac{\sin 2\chi}{U''(0)} e^{-2\chi} - \frac{(1 + \cos 2\chi \exp(-2\chi))}{W''(0)} \right] (\phi_0(0)\cos\theta - \psi_0(0)\sin\theta)}$$

No es posible determinar cuál es el comportamiento de  $c_1$  por simple observación de su expresión analítica. Sin embargo, ya hemos dicho que  $c_1$  es una cantidad imaginaria.



## V. -ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD

Las funciones  $\phi_p$  y  $\psi_p$  dependen linealmente del número de Reynolds, de  $\tau \cos \alpha$  y de  $\tan \alpha$ . En base a esta característica y a la ecuación (6.74) llegamos a que  $c_1$  es una función de los parámetros  $\tau$ ,  $R$ ,  $\theta$  y  $\alpha$  del tipo siguiente:

$$(6.75) \quad c_1(\theta, \alpha, \tau, R) = i[\lambda(\theta, \chi)R + \eta(\theta, \chi)\tau \cos \alpha + \Sigma(\chi)\tan \alpha].$$

El segundo término del miembro derecho es inducido exclusivamente por la rotación. Por otra parte, en ausencia de rotación se tiene que:

$$(6.76) \quad c_1 \rightarrow i[R \cos 2\theta - (5/8)^{1/2} \tan \alpha],$$

valor al que tiende la expresión dada en (6.75) cuando  $\tau \rightarrow 0$ .

La expresión analítica de  $c_1$  es bastante complicada, motivo por el cual se procedió a realizar análisis numérico. Se utilizó con este fin la computadora Burroughs-7800 de la Dirección General de Servicios de Computo Académico (D3SCA).

La cantidad que se calculó no fue directamente  $c_1$ , sino:

$$(6.77) \quad C_1 = \text{Im}(c_1) = \frac{c_1}{i}$$

El signo de  $C_1$  es primordial para saber si el flujo es estable o inestable. En la aproximación de ondas largas resulta que  $c_0 + ikC_1$  es una buena aproximación de  $c$  ( $c_0$  y  $C_1$  son reales). Entonces, las perturbaciones se propagan en forma de ondas con una razón de crecimiento o decrecimiento dada por  $kC_1$ . Considerando que  $k$  es una cantidad positiva, el flujo será estable si  $C_1 \leq 0$ . En caso de que  $C_1 > 0$  el flujo es inestable.

El análisis de la dependencia de  $C_i$  respecto a los parámetros  $\tau$ ,  $R$ ,  $\theta$  y  $\alpha$  se hizo con programa escrito en un lenguaje que tiene incluido a los números complejos, el ALGOL. En líneas generales el programa consta de las partes que se enumeran a continuación:

- a) Subrutinas que permiten calcular funciones hiperbólicas de argumento complejo.
- b) Cálculo del campo de velocidades del flujo principal, de  $c_0$  y del factor  $M$ .
- c) Cálculo de  $hp(0)$ ,  $hp''(0)$ ,  $hp(1)$  y  $hp'(1)$ .
- d) Determinación de  $C_i$  como función de  $\tau$ ,  $R$ ,  $\theta$  y  $\alpha$ .

Se tomaron valores del número de Taylor en el rango [0.1,4.0], variándose a intervalos de 0.1 en 0.1. Por su parte, el ángulo de inclinación se varió entre  $10^\circ$  y  $80^\circ$ , a intervalos de  $10^\circ$ . En lo que toca al ángulo de propagación, se hicieron cálculos de  $C_i$  en los que  $\theta$  es un múltiplo de 10. Finalmente, el número de Reynolds se varió a intervalos de una unidad. El primer resultado es que  $C_i$  tiene una periodicidad de  $180^\circ$  respecto a  $\theta$ . En base a esta propiedad se ha estudiado la estabilidad únicamente en el intervalo  $[-90^\circ, 90^\circ]$ .

En la figura 12 se muestra una gráfica de  $C_i$  vs.  $\theta$  para el caso en que no hay rotación. Notese que el valor máximo ocurre en  $\theta=0$ . Lo anterior significa que la dirección en que el flujo tiene menor estabilidad es aquella en la que se mueve el fluido. Este resultado se menciona frecuentemente en la literatura sobre la estabilidad de flujos unidireccionales (Drazin,1979; Shivamoggi,1985).

La rotación produce un desplazamiento del valor máximo de  $C_i$  ( $C_{i_{\max}}$ ) hacia valores negativos de  $\theta$ , como se puede apreciar en la figura 13, en la cual se dibujan curvas para 3 valores distintos del número de Taylor. Este desplazamiento se explica

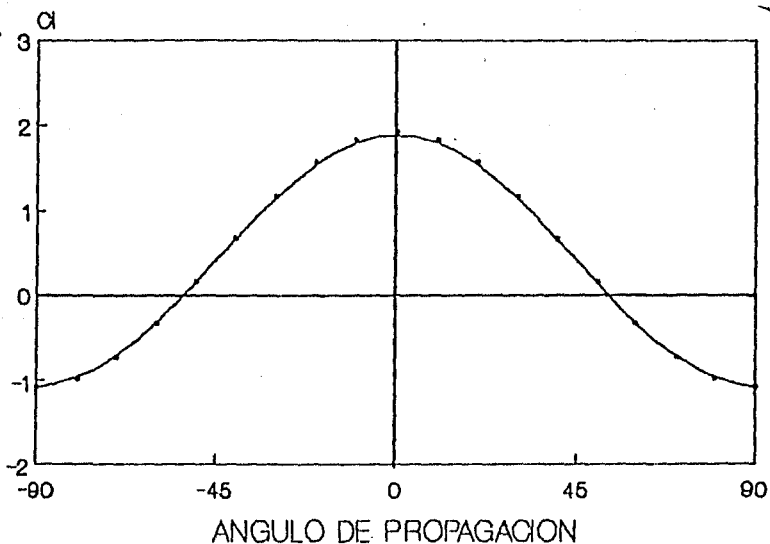


FIGURA 12.- Gráfica  $C_i$  vs.  $\theta$  en ausencia de rotación.  $R=3$ ,  $\alpha=50$ . La curva es simétrica respecto a  $\theta=0$ .

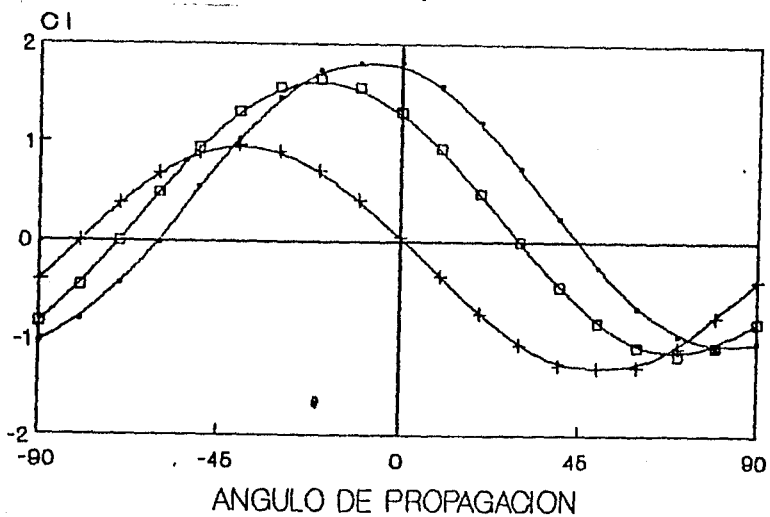


FIGURA 13.- Gráfica  $C_i$  vs.  $\theta$ ;  $R=3$ ,  $\alpha=50$ . Las curvas corresponden a distintos valores de número de Taylor (0.2, 0.5 y 1.0). La rotación produce un corrimiento del máximo hacia la izquierda.

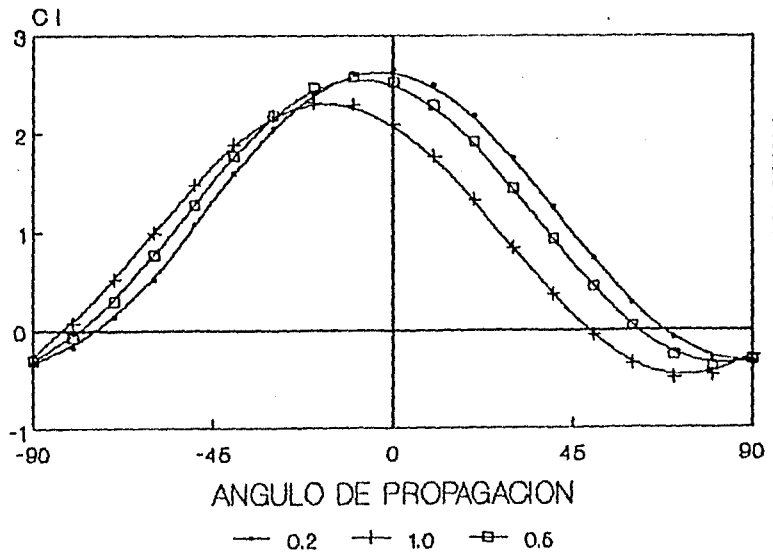


FIGURA 14.- Gráfica  $C_i$  vs.  $\theta$ ;  $R=3$ ,  $\alpha=20$ . Las curvas corresponden a diferentes valores de número de Taylor (0.2, 0.5 y 1.0).

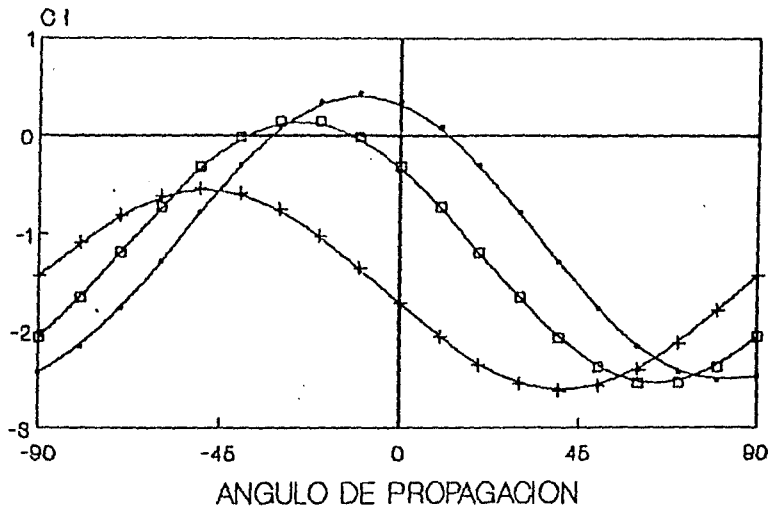


FIGURA 15.- Gráfica  $C_i$  vs.  $\theta$ ;  $R=3$ ,  $\alpha=70$ . Las curvas corresponden a diferentes valores de número de Taylor (0.2, 0.5 y 1.0). Con  $r=1$ , el flujo es estable.

parcialmente por el hecho de que el flujo primario ya no esta orientado según el eje x, pues existe una componente adicional de la velocidad, en el sentido negativo del eje z debido a un rezago del fluido producido por la rotación. Además, la dirección del vector velocidad del flujo primario varía con la profundidad (ver figura 26 al final de capítulo)

Ahora bien, haciendo un paralelo con el flujo sin rotación, veamos si  $\theta_{\max}$  (ángulo de propagación en el que ocurre  $C_{i\max}$ ) coincide con la dirección promedio del flujo principal. Definimos un ángulo Y de la siguiente manera:

$$(6.78) \quad Y = \arctan \frac{\langle W \rangle}{\langle U \rangle}$$

Y depende del parámetro  $\chi$ . Al realizar algunos cálculos encontramos que  $\theta_{\max}$  está a la izquierda de Y, es decir resulta que  $\theta_{\max} < Y < 0$ . Otra posibilidad sería comparar  $\theta_{\max}$  con el ángulo en que esta dirigido el flujo principal en la superficie libre (lo denominaremos  $Y_1$ ). Aunque  $Y_1$  está a la izquierda de Y, tampoco hay coincidencia con el ángulo de máximo crecimiento de  $C_i$ . Se cumple la relación :

$$(6.79) \quad \theta_{\max} < Y_1 < Y < 0.$$

Este fenómeno se puede explicar recordando que la perturbación evoluciona bajo la acción de la fuerza de Coriolis. En ausencia de ella, las direcciones de menor estabilidad y la del flujo principal coinciden.

Supóngase que una perturbación se mueve inicialmente en cierta dirección. Dado que la fuerza de Coriolis es perpendicular a la velocidad, la perturbación cambiará su dirección original de propagación por otra en la que haya un balance entre todas las

fuerzas. Las perturbaciones de menor estabilidad no se propagan en la dirección promedio del campo de velocidades del flujo principal (o en la dirección de la velocidad en la superficie libre), ya que la fuerza de Coriolis las mueve hacia valores de  $\theta$  situados a la izquierda. El corrimiento aumenta con el incremento del número de Taylor.

En las figuras 14 y 15 aparecen 2 gráficas  $C_1$  vs.  $\theta$ , similares a la 13, pero con distintos valores del ángulo de inclinación. El comportamiento es cualitativamente el mismo.

Otro de los detalles que se muestran es el efecto estabilizador de la rotación. Las curvas de la figura 16 se hicieron con un valor fijo del número de Reynolds ( $R=5$ ). Cuando  $\tau=0.2$ , las perturbaciones con ángulos de propagación en el rango  $[-32,13]$  son inestables. Sin embargo, al aumentar el número de Taylor a 1,  $C_1$  será negativa en todos los valores de  $\theta$ , lo que significa que el flujo se vuelve estable.

Al principio de la sección se mencionó que  $c_1$  es una función lineal de  $R$ , lo que también vale para  $C_1$ . De acuerdo a (6.75) y a (6.77) resulta que :

$$(6.80) \quad C_1 = \lambda(\theta, \chi)R + \eta(\theta, \chi)\text{rcosa} + \Sigma(\chi)\text{tana}.$$

La suma de los dos últimos términos es negativa, excepto cuando  $\alpha=0$ .

Una de las fuerzas que da estabilidad al flujo es la componente de la gravedad en el eje  $y$  ( $g\text{sen}\alpha$ ). Dicha componente de gravedad aparece en  $C_1$  a través del término  $\Sigma(\chi)\text{tana}$ , que es siempre negativo para valores finitos del ángulo de inclinación  $\alpha$ .

En la estabilidad del flujo juega un papel importante la reducción en magnitud de  $\lambda(\theta, \chi)$ , cantidad que multiplica al número

de Reynolds en la definición de  $C_i$  [ver ecuación (8.80)]. Esta característica es la que permite ampliar el rango de valores de  $R$  para los cuales es estable el flujo descendiendo por un plano inclinado. En la figura 16 se grafica  $\lambda(\theta, \chi)$  vs.  $\chi$  con varios valores del ángulo de propagación  $\theta$ . Ahí también puede apreciarse como la dirección en que  $C_i$  es máximo varía con  $\chi$ .

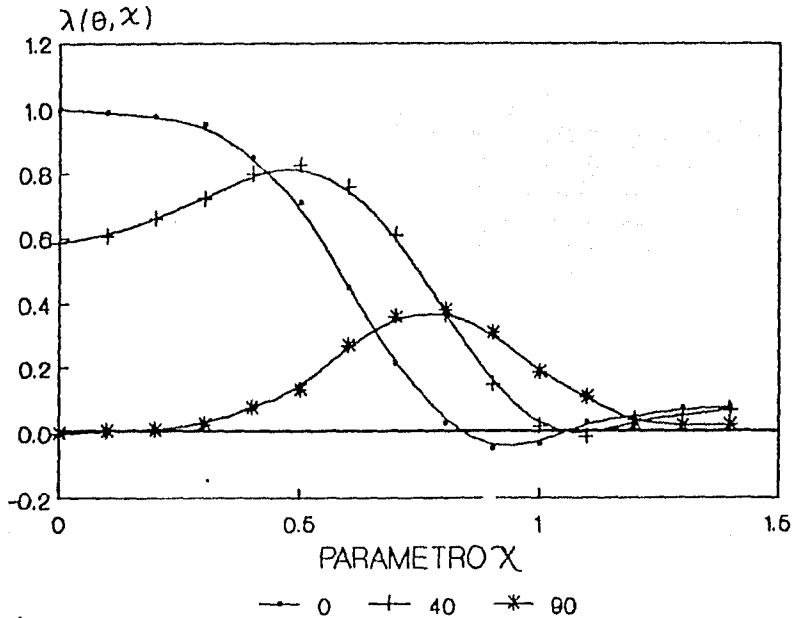
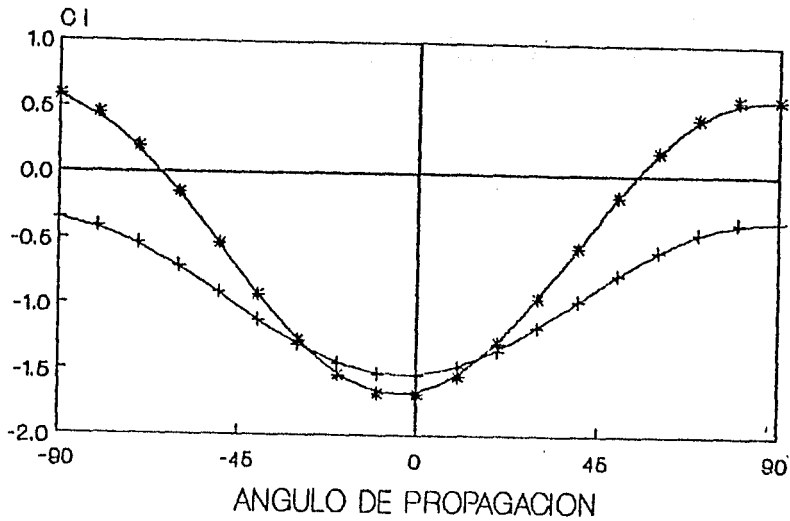


FIGURA 16.- Gráfica  $\lambda(\theta, \chi)$  vs.  $\chi$  con tres valores distintos de ángulo de propagación ( $0$ ,  $40$  y  $90$ ).

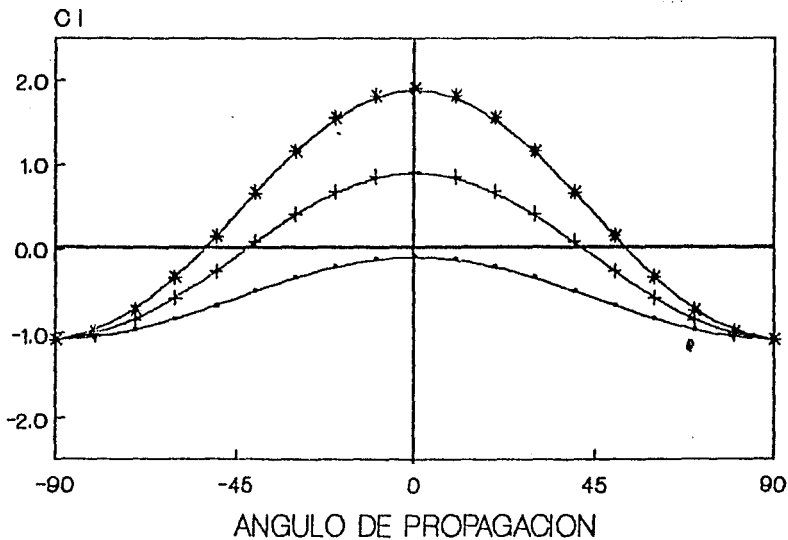
La siguiente figura (17) es una gráfica de  $C_i$  vs.  $\theta$  en la cual se ha dejado fijo el número de Taylor ( $\tau=2.5$ ) y el ángulo de inclinación ( $\alpha=50^\circ$ ). Lo que interesa aquí es mostrar el papel que desempeña el número de Reynolds en la estabilidad del flujo. Se han dibujado curvas para 2 valores distintos de  $R$ .

Como puede observarse, con  $R=5$  el flujo aún es estable, resultado que contrasta con el que se obtiene en ausencia de



+ R=5    \* R=9

FIGURA 17.- Gráfica  $C_i$  vs.  $\theta$ ;  $r=2.5$ ,  $\alpha=50$ . Las curvas corresponden a distintos valores de número de Reynolds (5 y 9). Con  $R=5$  el flujo es estable. Con valores superiores a  $r=2$ , se puede tener flujo estable a valores altos de  $R$ .



— R=1    + R=2    \* R=3

FIGURA 18.- Gráfica  $C_i$  vs.  $\theta$  en ausencia de rotación para 3 valores de número de Reynolds (1,2,3). Las curvas coinciden en  $\theta=90$  y  $\theta=-90$ .



rotación. De acuerdo a (6.76), si  $\tau=0$ , se llega a la inestabilidad cuando:

$$(6.81) \quad R = (5/6)^{\frac{1}{2}} \tan 50^\circ = 1.08.$$

Hagase una comparación más con el flujo sin rotación. En la figura 18 se muestra una gráfica de  $C_i$  vs.  $\theta$  con  $\tau=0$ . Se han dibujado curvas para 3 valores distintos de  $R$ . Como puede observarse, todas ellas coinciden en  $\theta = \pm 90^\circ$ . El valor que adopta  $C_i$  a ese ángulo, es el mínimo y además es negativo. Se puede afirmar entonces que la dirección de mayor estabilidad en el flujo sin rotación es la del eje  $z$ . Además  $C_i(\theta=\pm 90^\circ)$  no depende de las variaciones del número de Reynolds (ver también (6.76)).

Cuando hay rotación, la zona de mayor estabilidad se desplaza de la dirección del eje  $z$ , moviéndose hacia la del eje  $x$ . En la gráfica 17, con  $\tau=2.5$ , el valor mínimo de  $C_i$  ocurre para un valor negativo de  $\theta$  cercano a cero. Con valores menores del número de Taylor, el desplazamiento, respecto a la dirección eje  $z$ , es más pequeño, lo que se puede apreciar en las figuras 13, 14 y 15.

Es necesario comentar que en el flujo sin rotación la dirección del eje  $z$  es la única en la que la estabilidad no se ve afectada por las variaciones de  $R$ . Si  $\tau=0$ , se tiene un intervalo de  $\theta$  en que el flujo es estable, independientemente de  $R$ . En este intervalo (fig. 17) el factor  $\lambda(\theta, \chi)$  es menor o igual a cero y un aumento de  $R$  tendría un efecto estabilizador.

Ahora se darán algunos resultados sobre la estabilidad del flujo como función del ángulo de inclinación. La figura 19 muestra una gráfica  $C_i$  vs.  $\theta$ ; Se define  $\theta_l$  como el ángulo de propagación en el cual la curva cruza el eje  $\theta$ . En otras palabras,  $\theta_l$  es el límite entre las direcciones estable e inestable del flujo.

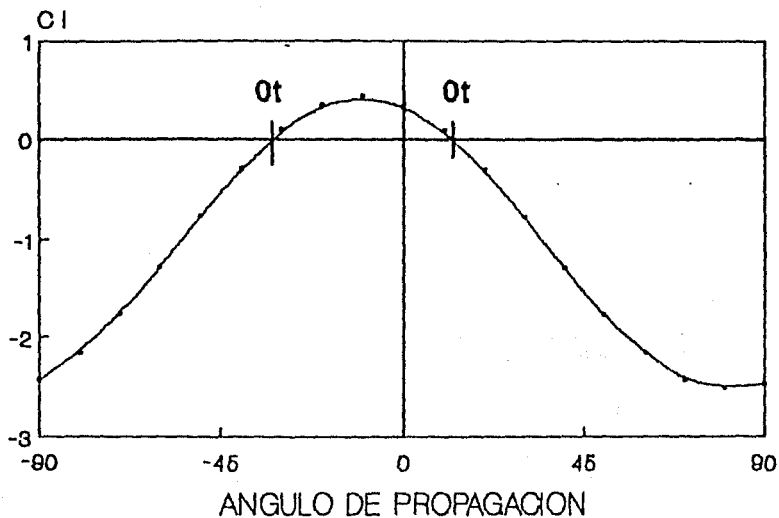
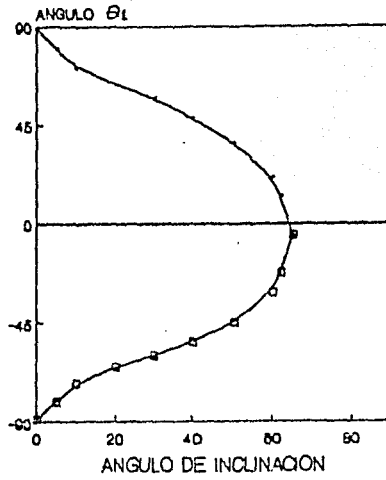


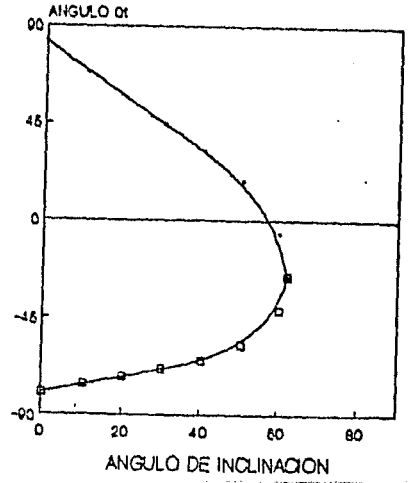
FIGURA 19. - Gráfica  $C_i$  vs  $\theta$ . Definición de  $\theta_{crit}$ .  
 $\theta_{crit}$  es el ángulo de propagación en el cual se anula  $C_i$ .

En la figura <sup>se</sup> 20 grafica  $\theta_{crit}$  vs.  $\alpha$  con dos valores distintos del número de Taylor y un valor de  $R$ . Como se puede apreciar, existe un rango de valores de  $\alpha$  en el cual hay dos ángulos de cambio de estabilidad. Un aumento de  $\alpha$  produce una disminución en el ancho de la zona inestable. Existe un ángulo de inclinación  $\alpha_1$ , luego del cual el flujo es estable. De lo anterior podemos afirmar que un aumento en el ángulo de inclinación tiene un efecto estabilizador.

En el primer caso ( $\tau=0.1$ ), el flujo es estable para valores de  $\alpha$  superiores a los  $64^\circ$ . En el segundo ( $\tau=0.5$ ) habrá estabilidad si  $\alpha > 0$ . Lo anterior y un análisis más detallado de los resultados numéricos indican que un aumento en  $\tau$  para  $R$  fija, da como resultado una disminución en el valor de  $\alpha_1$ . Dicho de otra

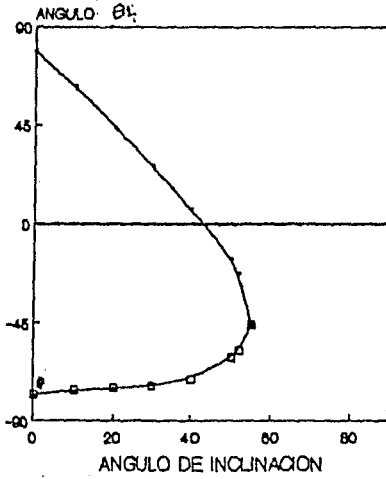


a)  $R=2$ ,  $r=0.1$ . El flujo estable si  $\alpha > \alpha_c$ .

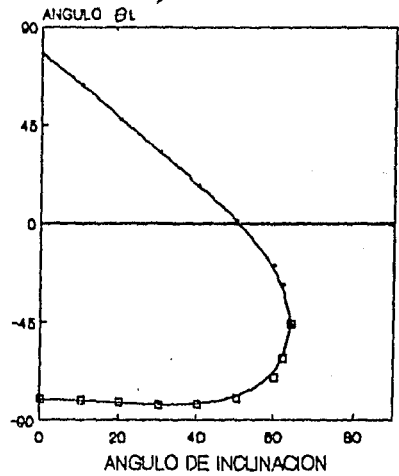


b)  $R=2$ ,  $r=0.5$ . El flujo estable si  $\alpha > \alpha_c$ .

FIGURA 20. -Gráficas  $\theta_1$  vs.  $\alpha$ .  
La rotación es la causante de la asimetría de las curvas respecto al eje  $\alpha$ .



a)  $R=2$ ,  $r=1.0$ .



b)  $R=3$ ,  $r=1.0$ .

FIGURA 21. -Gráficas  $\theta_1$  vs.  $\alpha$ .  
Un incremento en el número de Reynolds tiene efecto desestabilizador sobre el flujo, como se puede apreciar al comparar ambas curvas.

manera, la rotación amplía el rango de valores de  $\alpha$  en los cuales el flujo es estable.

En la figura 21 se presentan dos gráficas  $\theta_1$  vs.  $\alpha$ , sólo que ahora el parámetro que permanece fijo es  $\tau$ . Los valores del número de Reynolds son respectivamente 2 y 3. Notamos que el ángulo de transición aumenta con el crecimiento de  $R$ . Esto es una manifestación de que los incrementos en el número de Reynolds juegan un papel de desestabilización del flujo.

En el flujo sin rotación, la curva  $\theta_1$  vs.  $\alpha$  es una línea simétrica respecto al eje  $\alpha$ . Con  $\tau \neq 0$  la curva se desplaza hacia abajo, lo que significa que la región de inestabilidad se carga hacia los valores negativos de  $\theta$ . Este fenómeno está relacionado con el hecho de que  $\chi$  depende del ángulo de inclinación. Cuando  $\tau=0$ , el parámetro  $\chi$  se anula y  $C_i$  vale:

$$(8.82) \quad C_i = (R \cos 2\theta - (5/6)^{\frac{1}{2}} \tan \alpha) + \eta_0(\theta) \tau$$

$$\text{donde } \eta_0(\theta) = \lim_{\chi \rightarrow 0} \eta(\theta, \chi)$$

La expresión de arriba se diferencia de la que resulta para un flujo sin rotación, en el término  $\eta_0(\theta)\tau$ . Dicho término es el que produce la asimetría de la región inestable en el flujo por una pared vertical ( $\alpha=0$ ) (ver en las gráficas 20 y 21 la intersección de las curvas con el eje  $\theta_1$ ).

Un aumento de  $\alpha$  -manteniendo  $\tau$  constante- induce un incremento en  $\chi$ . Considerando que el término  $\Sigma(\chi)\tan \alpha$  no depende del ángulo  $\theta$  (ecuación 8.75), resulta que la asimetría aparece a través de la expresión:

$$\lambda(\theta, \chi)R + \eta(\theta, \chi)\tau \cos \alpha$$

El crecimiento de  $\chi$  es el factor primordial que produce el corrimiento de la zona de inestabilidad hacia los valores negativos de  $\theta$ .

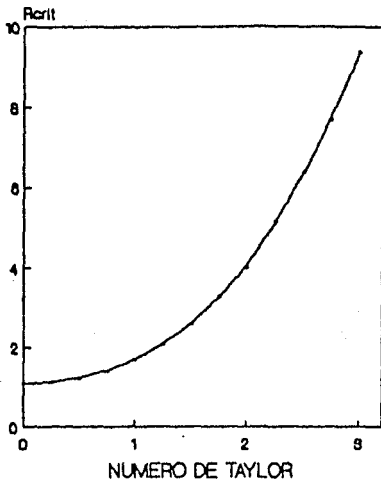
Dado que  $\chi$  depende de  $r \sin \alpha$  y este último es proporcional a la componente de  $\bar{\Omega}$  según el eje  $y$ , resulta que dicha componente de la velocidad angular es la principal responsable de la asimetría.

Definimos ahora el número de Reynolds crítico ( $R_{crit}$ ), como el valor máximo de  $R$  por debajo del cual  $C_f < 0$  para todos los ángulos de propagación. Es decir, si  $R \leq R_{crit}$  el flujo es estable y cuando  $R > R_{crit}$  hay inestabilidad. A manera de conclusión presentamos varias gráficas de  $R_{crit}$  vs.  $\tau$  (figura 22). Observamos que conforme aumenta  $\tau$ , el valor de  $R_{crit}$  también se incrementa, lo que significa que la rotación permite tener flujo estable en un rango más amplio de números de Reynolds.

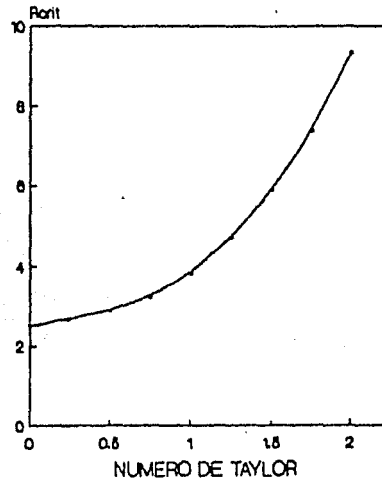
A cada valor de  $R_{crit}$  le asociamos un ángulo crítico de propagación (ver figura 23). En la figura 24 se presentan gráficas  $\theta_{crit}$  vs.  $\tau$  que muestran como la rotación hace que  $\theta_{crit}$  tenga un corrimiento hacia valores negativos.

En la figura 25, las gráficas  $R_{crit}$  vs.  $\alpha$  muestran como  $R_{crit}$  es una función creciente del ángulo de inclinación. Un incremento de  $\alpha$  tiene efecto estabilizador por dos motivos: a) aumenta la componente de la gravedad a lo largo del eje  $y$  y b) aumenta la componente de  $\bar{\Omega}$  en la misma dirección.

Con esto se concluye el análisis de la estabilidad, mismo que se hizo luego de calcular el valor propio  $c_1$ . Obtuvimos como resultado que la rotación tiene efecto estabilizador sobre el flujo.



$R_{crit}$  vs  $T$ .  $\alpha=50$



$R_{crit}$  vs  $T$ .  $\alpha=70$

FIGURA 22.-Gráficas  $R_{crit}$  vs  $T$ . Como puede apreciarse en ellas, el número de Reynolds crítico aumenta rápidamente con un incremento en el número de Taylor

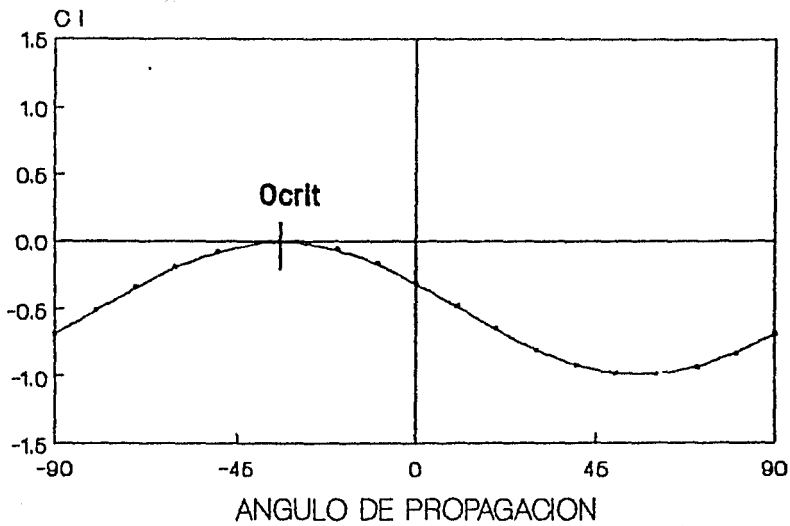
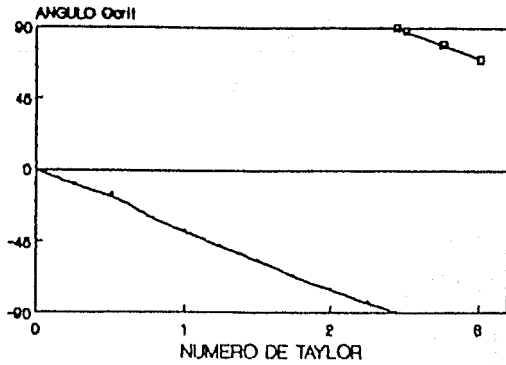
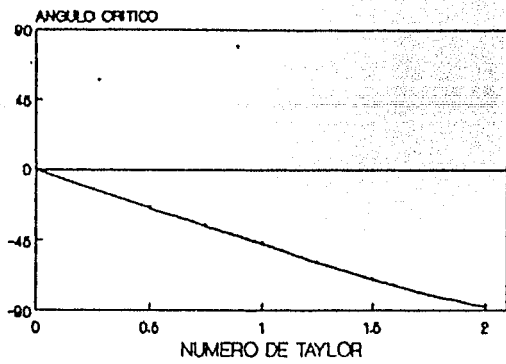


FIGURA 29.- Gráfica  $C_i$  vs.  $\theta$ . Definición del  $\theta_{crit}$ .

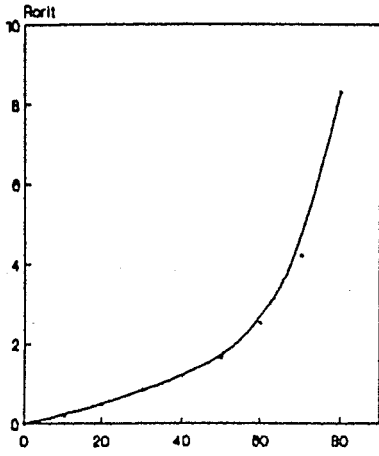


$\theta_{crit}$  vs  $\tau$ .  $\alpha=50$

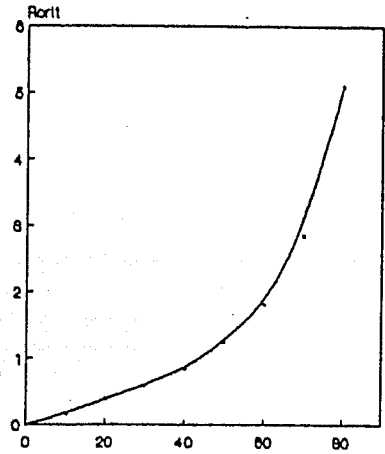


$\theta_{crit}$  vs  $\tau$ .  $\alpha=70$

FIGURA 24. - Gráficas  $\theta_{crit}$  vs  $\tau$ .



Rcrit vs  $\alpha$ .  $\tau=1.0$



Rcrit vs  $\alpha$ .  $\tau=0.5$

FIGURA 25. - Gráficas Rcrit vs  $\alpha$ .

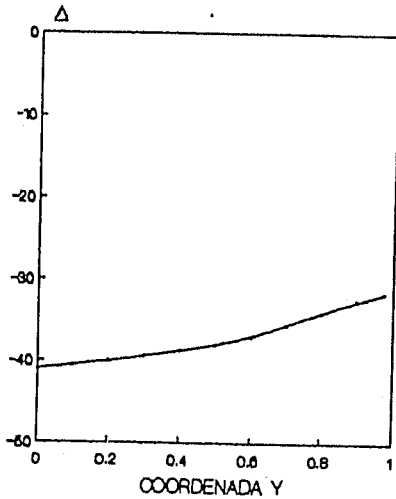


FIGURA 26. - Gráfica  $\Delta$  vs. y.  $\Delta$  es el ángulo de la dirección del flujo principal medido respecto al eje x.



## 7.-ESTABILIDAD DE FLUJO CON VALORES PEQUEÑOS DE NUMERO DE REYNOLDS, NUMERO DE TAYLOR Y ANGULO DE INCLINACION

### I. -HIPOTESIS BASICAS

En esta sección se investiga la estabilidad hidrodinámica de una capa de fluido que desciende por un plano inclinado en rotación, con la característica de que el número de Reynolds  $R$ , el número de Taylor  $\tau$  y el ángulo de inclinación son pequeños.

Bajo estas circunstancias es posible expresar a  $R$ ,  $\tau$  y  $\alpha$  en forma de series de potencias de un mismo parámetro pequeño  $\epsilon$  :

$$(7.1) \quad \begin{aligned} a) R &= R_1\epsilon + R_2\epsilon^2 + \dots \\ b) \tau &= \tau_1\epsilon + \tau_2\epsilon^2 + \dots \\ c) \alpha &= \alpha_1\epsilon + \alpha_2\epsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

El significado físico de  $\epsilon$  se dará más adelante. El número de Reynolds depende de  $\chi$  y de acuerdo a su definición (ver ecuación 3.35)  $R$  es una función par respecto a este parámetro. El correspondiente desarrollo en serie de potencias es :

$$(7.2) \quad R = \frac{g \cos \alpha d^3}{\nu^2} \left[ (2/15) \chi^2 + O(\chi^4) \right].$$

$O(\chi^2)$  incluye únicamente términos con potencias pares de  $\chi$ . Si Recordamos que  $\chi = (\tau \sin \alpha / 2)^{\frac{1}{2}}$  y de acuerdo a (7.1), éste parámetro acepta un desarrollo en serie de potencias de  $\epsilon$  :

$$(7.3) \quad \chi = (\tau_1 \alpha_1 / 2)^{\frac{1}{2}} \epsilon + O(\epsilon^2).$$

Este resultado junto con la expansión de  $\cos \alpha$  permiten

escribir (7.2) como:

$$(7.4) \quad R = \frac{gd^3}{\nu^2} [(2/15)^{\frac{1}{2}} + O(\epsilon^2)].$$

De acuerdo a (7.1a) el término  $\frac{gd^3}{\nu^2} (2/15)^{\frac{1}{2}}$  debe coincidir con  $\epsilon R_1$ . Lo anterior permite hacer una elección de  $\epsilon$  a partir de magnitudes físicas. Consideraremos que  $\epsilon$  es proporcional a  $\frac{1}{\nu^2}$ . Dicha elección será congruente con la definición de  $\tau$  si, por ejemplo, hacemos  $\Omega \propto \frac{1}{\nu}$ . Bajo esta hipótesis se cumple entonces que  $\tau \propto \frac{1}{\nu^2}$ .

Las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de la perturbación incluyen al campo de velocidades del flujo principal. Las funciones  $U$  y  $W$  dependen de  $x$  y por lo tanto de  $\epsilon$ . Luego, el cálculo de la estabilidad requiere que previamente se haga la expansión de las velocidades  $U$  y  $W$ :

$$(7.6) \quad U = (15/8)^{\frac{1}{2}}(1-y^2) + O(\epsilon^2),$$

$$(7.7) \quad W = 0 + O(\epsilon^2).$$

Las funciones potenciales  $\phi$  y  $\psi$ , así como  $c$  se escribirán también en forma de serie de potencias:

$$(7.8) \quad \begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \phi_1\epsilon + \phi_2\epsilon^2 + \dots, \\ \psi &= \psi_0 + \psi_1\epsilon + \psi_2\epsilon^2 + \dots, \\ c &= c_0 + c_1\epsilon + c_2\epsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

Igual que en el caso de la aproximación con números de onda pequeños, se calcularán únicamente los dos primeros términos de la serie. Los resultados se restringirán a flujos en los que  $\epsilon$  sea pequeño, o de manera equivalente, cuando  $R$ ,  $\tau$  y  $\alpha$  sean pequeños.

## II. - ECUACIONES FUNDAMENTALES Y CONDICIONES DE FRONTERA

En éste problema resulta más adecuado utilizar el sistema de ecuaciones que generaliza a la ecuación de Orr-Sommerfeld (4.13) y (4.14). El desarrollo en serie de potencias da como resultado :

(7.9)

$$\begin{aligned}
 & [-\phi_0'''' + k^2\phi_0'' - k^2\cos\theta(\psi_0'' \operatorname{sen}\theta - \phi_0'' \cos\theta) + k^4\cos\theta(\psi_0 \operatorname{sen}\theta - \phi_0 \cos\theta)] + \\
 & [-\phi_1'''' + k^2\phi_1'' - k^2\cos\theta(\psi_1'' \operatorname{sen}\theta - \phi_1'' \cos\theta) + k^4\cos\theta(\psi_1 \operatorname{sen}\theta - \phi_1 \cos\theta)]\epsilon \\
 & + ikR_1[(V_0 - c_0)\phi_0'' + V_0'\phi_0' + (\psi_0' \operatorname{sen}\theta - \phi_0' \cos\theta)U_0']\epsilon + \\
 & + ikR_1[(\psi_0 \cos\theta - \phi_0 \cos\theta)U_0'' + k^2\cos\theta(V_0 - c_0)(\psi_0 \operatorname{sen}\theta - \phi_0 \cos\theta)]\epsilon + \\
 & + ik\tau_1\cos\theta \psi_0' \epsilon + \dots = 0,
 \end{aligned}$$

(7.10)

$$\begin{aligned}
 & [\psi_0'''' - k^2\psi_0'' - k^2\operatorname{sen}\theta(\psi_0'' \operatorname{sen}\theta - \phi_0'' \cos\theta) + k^4\operatorname{sen}\theta(\psi_0 \operatorname{sen}\theta - \phi_0 \cos\theta)] + \\
 & [\psi_1'''' - k^2\psi_1'' - k^2\operatorname{sen}\theta(\psi_1'' \operatorname{sen}\theta - \phi_1'' \cos\theta) + k^4\operatorname{sen}\theta(\psi_1 \operatorname{sen}\theta - \phi_1 \cos\theta)]\epsilon + \\
 & + ikR_1[-(V_0 - c_0)\psi_0'' - V_0'\psi_0' + (\psi_0' \operatorname{sen}\theta - \phi_0' \cos\theta)W_0']\epsilon + \\
 & + ikR_1[(\psi_0 \operatorname{sen}\theta - \phi_0 \cos\theta)W_0'' + k^2\operatorname{sen}\theta(V_0 - c_0)(\psi_0 \operatorname{sen}\theta - \phi_0 \cos\theta)]\epsilon + \\
 & + ik\tau_1[-(\psi_0 \operatorname{sen}\theta - \phi_0 \cos\theta) + \operatorname{sen}\theta \psi_0']\epsilon + \dots = 0,
 \end{aligned}$$

siendo  $V_0 = (15/\beta)^{\frac{1}{2}} \cos\theta(1 - y^2)$ .

La expansión en serie de las condiciones de frontera es:

$$(7.11) \quad \phi_0(1) + \phi_1(1)\epsilon + \phi_2(1)\epsilon^2 + \dots = 0,$$

$$(7.12) \quad \phi_0'(1) + \phi_1'(1)\epsilon + \phi_2'(1)\epsilon^2 + \dots = 0,$$

$$(7.13) \quad \psi_0(1) + \psi_1(1)\epsilon + \psi_2(1)\epsilon^2 + \dots = 0,$$

$$(7.14) \quad \psi_0'(1) + \psi_1'(1)\epsilon + \psi_2'(1)\epsilon^2 + \dots = 0,$$

(7.15)

$$\left[ \frac{U_0''(0)}{C_0'} (\psi_0(0) \operatorname{sen}\theta - \phi_0(0) \cos\theta) + \phi_0''(0) - k^2 \cos\theta (\psi_0(0) \operatorname{sen}\theta - \phi_0(0) \cos\theta) \right] \\ + \frac{U_0''(0)}{C_0'} [(\psi_1(0) \operatorname{sen}\theta - \phi_0(0) \cos\theta) + (\psi_0(1) \operatorname{sen}\theta - \phi_0(1) \cos\theta) \frac{C_1}{C_0} + \phi_1''(1)] \epsilon - \\ - k^2 \operatorname{sen}\theta (\psi_1(1) \operatorname{sen}\theta - \phi_1(1) \cos\theta) \epsilon + \dots = 0,$$

(7.16)

$$[-\psi_0''(0) - k^2 \operatorname{sen}\theta (\psi_0(0) \operatorname{sen}\theta - \phi_0(0) \cos\theta)] + \\ + [-\psi_1''(0) - k^2 \operatorname{sen}\theta (\psi_1(0) \operatorname{sen}\theta - \phi_0(0) \cos\theta)] \epsilon + \dots = 0,$$

(7.17)

$$[-\phi_0'''(0) + 3k^2 \phi_0'(0) - ik^2 \cos\theta \frac{We'}{C_0'} (\psi_0(0) \operatorname{sen}\theta - \phi_0(0) \cos\theta)] + \\ + [-\phi_1'''(0) + 3k^2 \phi_1'(0) - ik^2 \operatorname{sen}\theta \frac{We'}{C_0'} (\psi_1(0) \operatorname{sen}\theta - \phi_1(0) \cos\theta)] \epsilon + \\ + [-ik \cos\theta (15/2)^{\frac{1}{2}} \alpha_1 (\psi_0(0) \operatorname{sen}\theta - \phi_0(0) \cos\theta) + ik R_1 (V_0 - c_0) \phi_0'(0)] \epsilon + \\ + \dots = 0,$$

(7.18)

$$[\psi_0'''(0) - 3k^2 \psi_0'(0) - ik^2 \operatorname{sen}\theta \frac{We'}{C_0'} (\psi_0(0) \operatorname{sen}\theta - \phi_0(0) \cos\theta)] + \\ + [\psi_1'''(0) - 3k^2 \psi_1'(0) - ik^2 \operatorname{sen}\theta \frac{We'}{C_0'} (\psi_1(0) \operatorname{sen}\theta - \phi_0(0) \cos\theta)] \epsilon + \\ + [-ik \operatorname{sen}\theta (15/2)^{\frac{1}{2}} \alpha_1 (\psi_0(0) \operatorname{sen}\theta - \phi_0(0) \cos\theta) - ik (V_0 - c_0) R_1 \psi_0'(0)] \epsilon + \\ - ik \tau_1 (\psi_0(0) \operatorname{sen}\theta - \phi_0(0) \cos\theta) \epsilon + \dots = 0,$$

con  $C_0' = V_0(0) - c_0$  y  $We' = RWe$ . Pudiera pensarse que esta última expresión no debe aparecer a orden cero. Sin embargo, de acuerdo a

la definición de  $R$  y  $We$  se tiene que  $RWe = T_0 / \mu U_0$  ( $U_0$  es la velocidad representativa). Supongase que  $U_0$  es muy pequeña y que la viscosidad es muy grande. Luego, el número de Reynolds es muy pequeño. En el límite  $R=0$  es posible que la expresión  $\mu U_0$  tienda a un valor finito.

### III. -SOLUCION A ORDEN CERO

Las funciones  $\phi_0$  y  $\psi_0$  satisfacen un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas :

(7.19)

$$-\phi_0'''' + k^2 \phi_0'' - k^2 \cos \theta (\psi_0'' \operatorname{sen} \theta - \phi_0'' \cos \theta) + k^4 \cos \theta (\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \cos \theta) = 0,$$

(7.20)

$$\psi_0'''' - k^2 \psi_0'' - k^2 \operatorname{sen} \theta (\psi_0'' \operatorname{sen} \theta - \phi_0'' \cos \theta) + k^4 \operatorname{sen} \theta (\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \cos \theta) = 0.$$

Mediante operaciones elementales el problema se reduce a resolver una sola ecuación diferencial. Multiplicando (7.19) por  $\cos \theta$  y (7.20) por  $\operatorname{sen} \theta$  y sumando se tiene:

$$(7.21) \quad (\psi_0'''' \operatorname{sen} \theta - \phi_0'''' \cos \theta) - 2k^2 (\psi_0'' \operatorname{sen} \theta - \phi_0'' \cos \theta) + k^4 (\psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \cos \theta) = 0.$$

Surge de manera natural la idea de definir una función  $f_0 = \psi_0 \operatorname{sen} \theta - \phi_0 \cos \theta$ , de modo que (7.21) se convierta en una ecuación diferencial para  $f_0$ :

$$(7.22) \quad f_0'''' - 2k^2 f_0'' + k^4 f_0 = 0.$$

Como se demostrará enseguida las condiciones de frontera

pueden ser expresadas en términos de  $f_0$ . A orden cero se tienen las siguientes condiciones :

$$(7.23) \quad \phi_0(1) = \psi_0(1) = 0,$$

$$(7.24) \quad \phi_0'(1) = \psi_0'(1) = 0,$$

$$(7.25) \quad [((U_0''(0)/C_0') - k^2 \cos \theta)(\psi_0(0) \sin \theta - \phi_0(0) \cos \theta) + \phi_0''(0)] = 0,$$

$$(7.26) \quad [-\psi_0''(0) - k^2 \sin \theta (\psi_0(0) \sin \theta - \phi_0(0) \cos \theta)] = 0,$$

$$(7.27) \quad [-\phi_0'''(0) + 3k^2 \psi_0'(0) - ik^3 \cos \theta \frac{We'}{C_0'} (\psi_0(0) \sin \theta - \phi_0(0) \cos \theta)] = 0,$$

$$(7.28) \quad [\psi_0'''(0) - ik^3 \sin \theta \frac{We'}{C_0'} (\psi_0(0) \sin \theta - \phi_0(0) \cos \theta) - 3k^2 \psi_0'(0)] = 0.$$

En base a (7.23) y (7.24) llegamos a 2 condiciones que debe cumplir  $f_0$  :

$$(7.28) \quad f_0(1) = 0,$$

$$(7.28) \quad f_0'(1) = 0.$$

La tercera y la cuarta condición se obtienen por medio de una combinación de las ecuaciones (7.25) y (7.26) por un lado y (7.27) y (7.28) por el otro. Multiplíquese a (7.25) por  $\cos \theta$  y a (7.26) por  $\sin \theta$ , luego de lo cual se suman. El resultado es:

$$(7.31) \quad \left( \frac{V_0''(0)}{C_0'} - k^2 \right) (\psi_0(0) \sin \theta - \phi_0(0) \cos \theta) - (\psi_0''(0) \sin \theta - \phi_0''(0) \cos \theta) =$$

$$\left( \frac{V_0''(0)}{C_0'} - k^2 \right) f_0(0) - f_0''(0) = 0.$$

Haciendo lo mismo con las ecuaciones (7.27) y (7.28) se llega a :

$$(7.32) \quad f_0''''(0) - 3k^2 f_0'(0) - ik^2 \frac{We'}{Co} f_0(0) = 0.$$

A manera de conclusión se puede decir que a orden cero el problema de la estabilidad se reduce a resolver una ecuación diferencial de cuarto orden. Además los resultados son parecidos a los que dedujo Yih en 1963 en su desarrollo en serie de potencias de  $R$ .

Como la ecuación (7.28) es homogénea se espera que las soluciones sean del tipo  $f_0 \propto \exp(\lambda y)$ . Al sustituir lo anterior en la ecuación diferencial, obtenemos una ecuación característica de cuarto grado :

$$(7.33) \quad (\lambda^4 - 2k^2 \lambda^2 + k^4) = (\lambda^2 - k^2)^2 = 0,$$

la cual tiene únicamente 2 raíces distintas  $\lambda_1 = k$  y  $\lambda_2 = -k$ .

Como una ecuación diferencial de cuarto orden debe tener 4 soluciones linealmente independientes y la ecuación característica ha permitido determinar únicamente 2 de ellas ( $e^{ky}$  y  $e^{-ky}$ ), las soluciones restantes se obtienen multiplicando a las anteriores por  $y$  (Kreider, 1963). Entonces, la forma más general de  $f_0$  es :

$$(7.34) \quad f_0 = Ae^{ky} + Be^{-ky} + Dye^{ky} + Eye^{-ky}.$$

Las condiciones de frontera dan lugar a un sistema homogéneo de ecuaciones lineales simultáneas, cuyas incógnitas son  $A$ ,  $B$ ,  $D$  y  $E$  :

$$(7.35) \quad Ae^k + Be^{-k} + De^k + Ee^{-k} = 0,$$

$$(7.36) \quad kAe^k - kB e^{-k} + (1+k)De^k + (1-k)Ee^{-k} = 0,$$

$$(7.37) \quad [(V_0'(0)/C_0') - 2k^2](A+B) - 2k(D-E) = 0,$$

$$(7.38) \quad 2C_0'(A-B) + i k W e'(A+B) = 0.$$

El parámetro  $c_0$  aparece en las ecuaciones a través de  $C_0'$  y tendrá un valor tal que la solución para A, B, D y E sea distinta a la trivial, lo que se puede lograr si hacemos que el sistema de ecuaciones sea linealmente dependiente.

En cualquier sistema de ecuaciones linealmente dependiente al menos una de las incógnitas es arbitraria. En base a esta propiedad hacemos  $A=1$ . Las cuatro ecuaciones permitirán determinar B, D, E y  $c_0$ .

Despejamos B de la ecuación (7.38)

$$(7.39) \quad B = \frac{-iWe' - 2C_0'}{iWe' - 2C_0'}$$

Los valores de D y E calculados a partir de (7.35) y (7.36) son respectivamente :

$$(7.40) \quad D = \frac{1}{2k} [1 - 2k + B e^{-2k}],$$

$$(7.41) \quad E = -\frac{1}{2k} [(1 + 2k)B + e^{2k}].$$

Por otra parte, la constante D es , a partir de (7.41) y (7.37) , igual a :

$$(7.42) \quad D = -\frac{1}{2k} [e^{2k} + (1 + 2k)B + (2k^2 - \frac{V_0'(0)}{C_0'}) (1 + B)].$$

Las dos expresiones de D deben coincidir. Eso conduce a la ecuación de  $C_0'$  :



$$(7.43) \quad (1-2k) + Be^{-2k} = -[e^{2k} + (1 + 2k)B + (2k^2 - \frac{V_0'(0)}{C_0'})(1+B)].$$

Sustituyendo B por su expresión dada en (7.39) y luego de despejar  $C_0'$  llegamos a :

$$(7.44) \quad C_0' = - \frac{1}{1+2k^2+\cosh 2k} [(15/2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta + i \frac{We'}{2} (2k - \sinh 2k)].$$

Finalmente, de acuerdo a la definición de  $C_0' = V_0(0) - c_0$ , se tiene que el valor propio  $c_0$  es :

$$(7.45) \quad c_0 = (15/8)^{\frac{1}{2}} \cos \theta + \frac{1}{1+2k^2+\cosh 2k} [(15/2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta + i \frac{We'}{2} (2k - \sinh 2k)],$$

un número complejo cuya parte imaginaria es proporcional al coeficiente de tensión superficial. El desarrollo en serie de Taylor de  $\sinh 2k$  muestra que la cantidad  $(2k - \sinh 2k)$  es negativa, para valores del número de onda distintos de cero. Por lo tanto, la parte imaginaria de  $c_0$  es negativa y hay estabilidad.

En el caso límite de una perturbación con número de onda pequeño resulta que (Yih, 1963):

$$(7.46) \quad c_0 \rightarrow (15/2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta$$

lo que concuerda con la velocidad de propagación obtenida en la aproximación para valores pequeños de  $k$  en un plano sin rotación (Yih, 1963).

El efecto estabilizador de la tensión superficial aumenta con  $k$ . Esto era de esperarse ya que la curvatura de la superficie se incrementa a la par del número de onda. Para valores grandes del  $k$ , el parámetro  $c_0$  tiende a :

$$(7.47) \quad c_0 \rightarrow (15/8)^{\frac{1}{2}} \cos \theta - i 0.5 We'$$

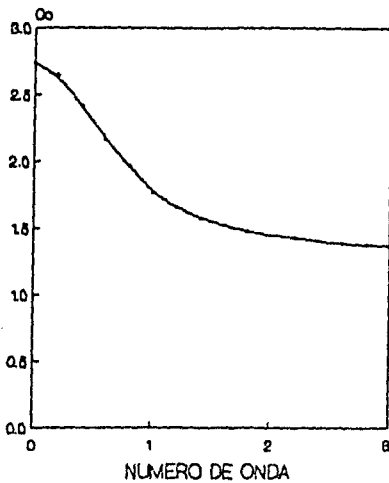


FIGURA 27.- Ordica  $c_0$  vs  $k$ ,  $\theta=0$ . Velocidad de propagación de la perturbación como función del número de onda.

Se nota que la velocidad de propagación de la perturbación disminuye con el aumento de  $k$  (ver figura 27).

Si  $k$  vale 0 resulta que  $Im(c_0)=0$  y si  $k$  es muy grande  $Im(c_0) \rightarrow -\frac{1}{2}We'$ . Entre estos dos limites existe un rango de números de onda en los que el factor de amortiguamiento es pequeño. En adelante se investigará lo que sucede en este último caso (supondremos que  $We'=0$ ).

En ausencia de tensión superficial la constante  $B$  es igual a 1. Luego, la función  $f_0$  es :

$$(7.48) \quad f_0 = e^{ky} + e^{-ky} - \frac{1}{2k}[2k-1-e^{-2k}]ye^{ky} + \frac{1}{2k}[-2k-1-e^{2k}]ye^{-ky}.$$

En las ecuaciones a primer orden aparece un término con  $\psi_0$  por separado. Por ello esta función será obtenida en adelante.

$\psi_0$  satisface una ecuación diferencial no-homogénea :

$$(7.49) \quad \psi_0'''' - k^2\psi_0'' = \text{sen}\theta(k^2f_0'' - k^4f_0).$$

misma que se obtiene al sustituir  $\psi_0\text{sen}\theta - \phi_0\text{cos}\theta$  por  $f_0$  en la ecuación (7.20). Es fácil probar que una solución particular es  $\text{sen}\theta f_0$ ; pasamos ahora a calcular la solución de la ecuación homogénea :

$$(7.50) \quad \psi_0'''' - k^2\psi_0'' = 0.$$

La ecuación característica es:

$$(7.51) \quad \lambda^2(\lambda^2 - k^2) = 0$$

Las raíces de esta ecuación son :

$$(7.52) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = k, \lambda_4 = -k$$

Existe una degeneración en la solución. La ecuación característica permite determinar únicamente tres soluciones linealmente independientes. La otra se obtiene al multiplicar por  $y$  a la solución que corresponde a las raíces repetidas (Kreider, 1963). Entonces, la forma más general de  $\psi_0$  es :

$$(7.53) \quad \psi_0 = a_1 + a_2 y + a_3 e^{ky} + a_4 e^{-ky} + \text{sen} \theta f_0.$$

La anulación de  $\psi_0$  y su primera derivada dan lugar a dos ecuaciones algebraicas :

$$(7.54) \quad a_1 + a_2 + a_3 e^k + a_4 e^{-k} = 0,$$

$$(7.55) \quad a_2 + a_3 k e^k - a_4 k e^{-k} = 0.$$

Las ecuaciones (7.26) y (7.28) son las condiciones de frontera en la superficie libre. Al introducir (7.53) en ellas resultan 2 ecuaciones algebraicas adicionales :

$$(7.56) \quad a_3 + a_4 = -\frac{2 \text{sen} \theta}{k^2} (1 + 2k^2 + \cosh 2k),$$

$$(7.57) \quad k^2 a_2 = 0.$$

Resolver este sistema es una tarea sencilla. No se

escribirán los pasos intermedios, sino sólo el resultado final, la función potencial  $\psi_0$  :

$$(7.58) \quad \psi_0 = -2\text{sen}\theta \frac{(1+2k^2+\cosh 2k)}{k^2 \cosh k} [\cosh k(y-1) - 1] + \text{sen}\theta f_0.$$

IV. -SOLUCION A PRIMER ORDEN EN AUSENCIA DE TENSION SUPERFICIAL

La ausencia de tensión superficial tiene efectos sobre la estabilidad: a orden cero las perturbaciones adquieren la forma de ondas (sin amortiguamiento ni crecimiento) que se propagan con una velocidad igual a :

$$c_0 = (15/8)^{\frac{1}{2}} \cos\theta + \frac{(15/2) \cos^{\frac{3}{2}}\theta}{1+2k^2+\cosh 2k}.$$

Ahora se investigará lo que sucede cuando  $R$ ,  $\tau$  y  $\alpha$  adquieren valores pequeños, pero distintos de cero. Esto se puede llevar a cabo si hacemos los cálculos al siguiente orden en  $\epsilon$ .

El sistema de ecuaciones para  $\phi_1$  y  $\psi_1$  es el siguiente:

$$(7.59) \quad -\phi_1'''' - k^2[\phi_1'' - \cos\theta(\psi_1'' \text{sen}\theta - \phi_1'' \cos\theta)] + k^4 \cos\theta(\psi_1 \text{sen}\theta - \phi_1 \cos\theta) + ikR_1[(V_0 - c_0)[\phi_0'' + k^2 \cos\theta(\psi_0 \text{sen}\theta - \phi_0 \cos\theta)] + (\psi_0' \text{sen}\theta - \phi_0' \cos\theta)U_0'] + ikR_1[(\psi_0 \text{sen}\theta - \phi_0 \cos\theta)U_0'' + V_0' \phi_0'] + ik\tau_1 \cos\theta \psi_0' = 0,$$

$$(7.60) \quad \psi_1'''' - k^2[\psi_1'' + \text{sen}\theta(\psi_1'' \text{sen}\theta - \phi_1'' \cos\theta)] + k^4 \text{sen}\theta(\psi_1 \text{sen}\theta - \phi_1 \cos\theta) + ikR_1[(V_0 - c_0)[k^2 \text{sen}\theta(\psi_0 \text{sen}\theta - \phi_0 \cos\theta) - \psi_0''] - V_0' \psi_0'] + ik\tau_1 \text{sen}\theta \psi_0' - ik\tau_1(\psi_0 \text{sen}\theta - \phi_0 \cos\theta) = 0.$$

Si se define una función  $f_1 = \psi_1 \sin \theta - \phi_1 \cos \theta$ , mediante un procedimiento similar al que permitió obtener (7.22) se llega a una ecuación diferencial para  $f_1$  :

$$(7.61) \quad f_1'''' - 2k^2 f_1'' + k^4 f_1 = ikR_1[(V_0 - c_0)(f_0'' - k^2 f_0) - f_0 V_0''] + ik\tau_1(\sin \theta f_0' - \psi_0').$$

En lugar de escribir las 8 condiciones de frontera originales, se ha optado por dar únicamente las 4 que debe satisfacer  $f_1$ . Estas son:

$$(7.62) \quad f_1(1) = f_1'(1) = 0,$$

$$(7.63)$$

$$3k^2 f_1'(0) - f_1'''(0) = -ik[R_1 c_0' f_0'(0) + (\tau_1 \sin \theta + (15/2)^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha_1}{c_0'}) f_0(0)],$$

$$(7.64) \quad (k^2 - \frac{V_0''(0)}{c_0'}) f_1(0) + f_1''(0) - \frac{V_0''(0)}{c_0'^2} c_1 f_0(0) = 0.$$

Pasemos a determinar la solución de (7.61). En primer lugar, la ecuación homogénea asociada a (7.61) es idéntica a (7.21). Por lo tanto, la solución general de ambas es la misma:

$$(7.65) \quad A_1 e^{ky} + B_1 e^{-ky} + D_1 y e^{ky} + E_1 y e^{-ky}.$$

Ahora se obtendrá una solución particular de la ecuación diferencial. Para ello definimos 2 operadores diferenciales  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{L}$ :

$$(7.66) \quad \mathcal{P} = \left( \frac{d^4}{dy^4} - 2k^2 \frac{d^2}{dy^2} + k^2 \right),$$

$$(7.67) \quad \mathcal{L} = (V_0 - c_0) \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) - V_0''.$$

En términos de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{L}$ , la ecuación (7.61) adopta la

siguiente forma :

$$(7.66) \quad \mathcal{P}(f_1) = ikR_1 \mathcal{L}(f_0) + ik\tau_1(\text{sen}\theta f_0' - \psi_0').$$

Al aplicar el operador  $\mathcal{P}$  sobre las funciones  $y^2 e^{ky}$ ,  $y^3 e^{ky}$ ,  $y^4 e^{ky}$  obtenemos tres identidades que serán usadas más adelante:

$$(7.69) \quad \mathcal{P}(y^2 e^{ky}) = 8k^2 e^{ky},$$

$$(7.70) \quad \mathcal{P}(y^3 e^{ky}) = 24k(1+ky)e^{ky},$$

$$(7.71) \quad \mathcal{P}(y^4 e^{ky}) = 24(1+4ky+2k^2 y^2)e^{ky}.$$

La linealidad de la ecuación (7.66) permite calcular la solución particular como la suma de las soluciones correspondientes a cada uno de los términos que aparecen en el miembro derecho. La ecuación (7.66) puede reescribirse como:

$$(7.72) \quad \mathcal{P}(f_1) = ikR_1 \mathcal{L}(e^{ky}) + ikR_1 \mathcal{L}(e^{-ky}) + ikR_1 D \mathcal{L}(ye^{ky}) + ikR_1 E \mathcal{L}(ye^{-ky}) + ik\tau_1 \text{sen}\theta \frac{(1+2k^2 + \cosh 2k)}{k \cosh k} \text{senhk}(y-1),$$

con D y E dadas en las ecuaciones (7.40) y (7.41).

Denotemos como  $f_{11}^*$ ,  $f_{12}^*$ ,  $f_{13}^*$  y  $f_{14}^*$  las partes de la solución particular correspondientes a los primeros 4 términos del miembro derecho de (7.72). De acuerdo a la definición del operador  $\mathcal{L}$ , dichas funciones satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$(7.73) \quad \mathcal{P}(f_{11}^*) = ikR_1 (15/2)^{\frac{1}{2}} \cos\theta e^{ky},$$

$$(7.74) \quad \mathcal{P}(f_{12}^*) = ikR_1 (15/2)^{\frac{1}{2}} \cos\theta e^{-ky},$$

$$(7.75) \quad \mathcal{P}(f_{13}^*) = -ikDR_1 \frac{\cos\theta (15/2)^{\frac{1}{2}}}{1+2k^2 + \cosh 2k} 2ke^{ky} + ikR_1 (15/8)^{\frac{1}{2}} \cos\theta (y-2ky^2)e^{ky},$$

$$(7.76) \quad \mathcal{K}(f_{14}^*) = ikER_1 \frac{\cos\theta(15/2)^{\frac{1}{2}}}{1+2k^2+\cosh 2k} 2ke^{-ky} + ikR_1 \cos\theta(15/8)^{\frac{1}{2}} (y+y^2 2k) e^{-ky}.$$

Mediante operaciones elementales con las identidades (7.69)-(7.62) se pueden determinar las funciones  $f_{11}^*$ ,  $f_{12}^*$ ,  $f_{13}^*$  y  $f_{14}^*$ . El resultado aparece a continuación:

$$(7.77) \quad f_{11}^* = ikR_1 \cos\theta \frac{(15/2)^{\frac{1}{2}}}{8k^2} y^2 e^{ky},$$

$$(7.78) \quad f_{12}^* = ikR_1 \cos\theta \frac{(15/2)^{\frac{1}{2}}}{8k^2} y^2 e^{-ky},$$

$$(7.79) \quad f_{13}^* = -ikR_1 D \frac{(15/2)^{\frac{1}{2}}}{1+2k^2+\cosh 2k} y^2 e^{ky} - ikR_1 D \cos\theta \frac{(15/8)^{\frac{1}{2}}}{48k^5} (2k^2 y^2 - 12k^3 y^3 + 30k^4 y^4) e^{ky},$$

$$(7.80) \quad f_{14}^* = ikR_1 E \cos\theta \frac{(15/2)^{\frac{1}{2}}}{1+2k^2+\cosh 2k} \frac{y^2}{4k} e^{-ky} + ikR_1 E \frac{(15/8)^{\frac{1}{2}}}{48k^5} (2k^2 y^2 + 12k^3 y^3 + 30k^4 y^4) e^{-ky}.$$

Se recurre a la identidad (7.69) para determinar la expresión analítica de la solución correspondiente al término que depende de  $\tau_1$ . La ecuación que satisface es:

$$(7.81) \quad \mathcal{K}(l^*) = ik\tau_1 \sin\theta \frac{1+2k^2+\cosh 2k}{k \cosh k} \operatorname{senh} k(y-1).$$

La función  $l^*$  resulta ser:

$$(7.82) \quad l^* = ik\tau_1 \sin\theta \frac{(1+2k^2+\cosh 2k)}{4k^3 \cosh k} \operatorname{senh} k(y-1).$$

Se observa que todos los términos de la solución particular tienen como factor una función trigonométrica. Para resaltar esta característica la escribimos de la manera siguiente:

$$(7.83) \quad f_p = ikR_1 \cos \theta F_p(y) + ik\tau_1 \operatorname{sen} \theta \kappa(y).$$

donde  $F_p(y) = (f_{11}^* + f_{12}^* + f_{13}^* + f_{14}^*) / ikR_1 \cos \theta$  y  $\kappa(y) = l^* / ik\tau_1 \operatorname{sen} \theta$ .

Luego, la solución general es:

$$(7.84) \quad f_1 = A_1 e^{ky} + B_1 e^{-ky} + D_1 y e^{ky} + E_1 y e^{-ky} + ikR_1 \cos \theta F_p + ik\tau_1 \operatorname{sen} \theta \kappa.$$

Una de las constantes es arbitraria, de manera que hacemos  $A_1 = 1$ . Corresponde ahora aplicar las 4 condiciones de frontera, con las cuales será determinado el valor propio  $c_1$ . Con el fin de simplificar los cálculos de las constantes que aparecen en (7.84) se escribirán como:

$$A_1 = 1; \quad B_1 = B + \Delta B; \quad C_1 = C + \Delta C; \quad D_1 = D + \Delta D.$$

La condición sobre esfuerzos normales incluye únicamente a  $\Delta B$ ; despejándola se tiene que:

$$(7.85) \quad \Delta B = - \frac{l^*}{2k^2} R_1 C_0' (2k + \operatorname{senh} 2k) + \frac{l^*}{2k^2} (\tau_1 \operatorname{sen} \theta + (15/2)^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha_1}{C_0'}) + \frac{ikR_1 \cos \theta}{2k^2} (F_p''(0) - 3k^2 F_p'(0)) - \frac{ik\tau_1 \operatorname{sen} \theta}{2k^2} (\kappa''(0) - 3k^2 \kappa'(0)).$$

La condición sobre esfuerzos tangenciales incluye al parámetro  $c_1$ , a saber:

$$(7.86) \quad (2k^2 - \frac{V_0''(0)}{C_0'}) \Delta B + 2k(\Delta D - \Delta E) + ikR_1 \cos \theta [(k^2 - \frac{V_0''(0)}{C_0'}) F_p(0) + F_p'(0)] + ik\tau_1 \operatorname{sen} \theta [(k^2 - \frac{V_0''(0)}{C_0'}) \kappa(0) + \kappa'(0)] = 2 \frac{V_0''(0)}{C_0'^2} c_1.$$



Ocupamos la ecuación (7.43) con el fin de reescribir el coeficiente que multiplica a  $\Delta B$  en forma distinta. Al hacer  $We' = 0$  y luego de recordar que  $V_0''(0) = -(15/2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta$  obtenemos una identidad:

$$(7.87) \quad 2k^2 - \frac{V_0''(0)}{C_0'^2} = -(1 + \cosh 2k).$$

Se procede ahora a despejar  $c_1$  de (7.86), llegando a :

$$(7.88) \quad c_1 = \frac{C_0'^2}{2V_0''(0)} [-(1 + \cosh 2k)\Delta B + 2k(\Delta D - \Delta E)] \\ + ikR_1 \cos \theta \frac{C_0'^2}{2V_0''(0)} [-(1 + k^2 + \cosh 2k)F_p'(0) + F_p''(0)] \\ + ik\tau_1 \sin \theta \frac{C_0'^2}{2V_0''(0)} [-(1 + k^2 + \cosh 2k)\kappa(0) + \kappa'(0)].$$

Por otra parte, la anulación de la velocidad en la interfase liquido-sólido ( $y=1$ ) se traduce en dos ecuaciones, que aparecen a continuación:

$$(7.89) \quad \Delta B e^{-k} + \Delta D e^{-k} + \Delta E e^{-k} = -ikR_1 \cos \theta F_p'(1) - i\tau_1 \sin \theta \kappa(1),$$

$$(7.90) \quad -k\Delta B e^{-k} + (1+k)\Delta D e^{-k} + (1-k)\Delta E e^{-k} = -ikR_1 \cos \theta F_p''(1) - i\tau_1 \sin \theta \kappa'(1).$$

Réstese (7.85) a la ecuación (7.84), previamente multiplicada por  $(1+k)$ . En el resultado desaparece la constante  $\Delta D$ :

$$(7.91) \quad 2k\Delta E = ikR_1 \cos \theta e^k [F_p'(1) - (1+k)F_p(1)] \\ + ik\tau_1 \sin \theta e^k [\kappa'(1) - (1+k)\kappa(1)] - (1+2k)\Delta B.$$

Pasemos ahora a obtener una ecuación que no contenga a  $\Delta E$ . Multiplíquese a (7.89) por  $(1-k)$  y al resultado se le restará

la ecuación (7.90) :

$$(7.92) \quad -2k\Delta D = ikR_1 \cos\theta e^{-k} [F'_p(1) - (1-k)F_p(1)] \\ + ikr_1 \sin\theta e^{-k} [f'(1) - (1-k)f(1)] - \Delta B e^{-2k}.$$

El siguiente paso es el cálculo del valor propio  $c_1$ . En la ecuación (7.88) sustituimos los valores de  $\Delta B$ ,  $\Delta C$  y  $\Delta D$  dados en (7.85), (7.91) y (7.92).  $c_1$  es una cantidad puramente imaginaria:

(7.93)

$$c_1 = iR_1 \zeta \cos^2\theta \left[ \frac{(15/2) \frac{1}{2} 4k^2 - \sinh 2k}{2k^3} \frac{(2k - \sinh 2k)}{2k^2} [F''_p(0) - 3k^2 F_p(0)] \right. \\ + iR_1 \zeta \cos^2\theta [-2k \cosh k F'_p(1) - 2k(\cosh k + k \sinh k) F_p(1)] \\ + iR_1 \zeta \cos^2\theta [-k(1+k^2 + \cosh 2k) F_p(0) + k F''_p(0)] \\ + i r_1 \zeta \sin\theta \cos\theta \left[ \frac{(2k - \sinh 2k)}{2k^2} [1 - f''(0) + 3k^2 f'(0)] - 2k \cosh k f'(1) \right] \\ + i r_1 \zeta \sin\theta \cos\theta [-2k(\cosh k + k \sinh k) f(1) - k(1+k^2 + \cosh 2k) f(0) + k f'(0)] \\ \left. + i \alpha_1 \frac{(15/2) \frac{1}{2} (2k - \sinh 2k)}{4k^2(1+2k^2 + \cosh 2k)} \right]$$

$$\text{donde } \zeta = \frac{-(15/8) \frac{1}{2}}{(1+2k^2 + \cosh 2k)}$$

## V. -ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD

A pesar de que  $\alpha_1$  no aparece en la ecuación (7.80), el valor propio  $c_1$  depende del ángulo de inclinación. Esto se debe a que  $\alpha_1$  está incluido en la condición de esfuerzos normales.

El parámetro  $c_1$  depende linealmente de  $R_1$ ,  $\tau_1$  y  $\alpha_1$ . De acuerdo a la ecuación (7.83) se puede escribir de la siguiente manera:

$$(7.94) \quad c_1 = i[p_1(k)\cos^2\theta R_1 + p_2(k)\cos\theta\sin\theta\tau_1 + p_3(k)\alpha_1],$$

donde:

$$p_1(k) = \xi \left[ \frac{(15/2)^{\frac{1}{2}} (4k^2 - \sinh 2k)}{2k^3 (1 + 2k^2 + \cosh 2k)} - \frac{(2k - \sinh 2k)}{2k^2} [F_p'''(0) - 3k^2 F_p'(0)] \right]$$

$$+ \xi \left[ k F_p''(0) - 2k \cosh k F_p'(1) - 2k (\cosh k + k \sinh k) F_p(1) \right]$$

$$+ \xi \left[ -k(1 + k^2 + \cosh 2k) F_p(0) \right],$$

$$p_2(k) = \xi \left[ \frac{(2k - \sinh 2k)}{2k^2} [1 - \tau_p'''(0) + 3k^2 \tau_p'(0)] - 2k \cosh k \tau_p'(1) \right]$$

$$+ \xi \left[ -2k (\cosh 2k + k \sinh k) \tau_p(1) - k(1 + k^2 + \cosh 2k) \tau_p(0) + k \tau_p''(0) \right],$$

$$p_3(k) = \frac{i(15/2)^{\frac{1}{2}}}{4k^2} \frac{2k - \sinh 2k}{1 + 2k^2 + \cosh 2k}.$$

Debido a que la expresión analítica de  $c_1$  es bastante complicada, no es posible sacar conclusiones generales sin recurrir a análisis numérico. Sin embargo si se pueden dar algunos resultados. Para valores de  $k$  superiores a 4.0 se tiene que:

(7.95)

$$c_1 \rightarrow -i(15/6)^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha_1}{k^2}.$$

O sea, las perturbaciones decaen en el tiempo. Un detalle que merece la atención es que, para esos valores de  $k$ ,  $c_1$  deja de depender del ángulo de propagación. El parámetro  $\alpha_1$  entra en la condición de esfuerzos normales a través de la componente de la gravedad a lo largo del eje  $y$ .

Se analizará ahora lo que sucede con el término que depende de  $R_1$ , es decir,  $iR_1 \cos^2 \theta p_1(k)$ . Para valores relativamente grandes del número de onda ( $k > 4$ ), tiende a :

(7.96)

$$-i \frac{810}{284k^4} \cos^2 \theta R_1.$$

Este resultado no concuerda con el obtenido por Yih (1963). Dicho autor analiza la estabilidad de una capa de fluido que desciende por un plano vertical, en ausencia de rotación y con números de Reynolds pequeños. El límite de  $c_1$  que reporta (que debería coincidir con el nuestro cuando se hace  $\tau_1 = \alpha_1 = 0$ ) es distinto de (7.96), entre otras cosas, por el signo. Su error consiste en no haber tomado el límite con suficiente cuidado, como ya fue señalado con anterioridad por Krantz y Goron (1971).

El término en  $c_1$  que depende de  $\tau_1$  es:  $i p_2(k) \cos \theta \sin \theta$ . Con un valor fijo de  $k$ , esa expresión tendrá cambios de signo dependiendo de la dirección de propagación. De acuerdo a lo anterior suponiendo que  $p_2(k)$  es positivo;  $i p_2(k) \cos \theta \sin \theta \tau_1$  será negativo en el intervalo  $(-90, 0)$  y tomará un valor positivo en los intervalos  $(0, 90)$ . Por otro lado, para  $k > 4$  ese término tiende a:

(7.97)

$$-i \frac{\cos \theta \sin \theta}{k^4} (135/128)^{\frac{1}{2}} \tau_1.$$

Se puede decir algo más: revisando la ecuación (7.93), concluimos que  $c_1$  es una función periódica, respecto al ángulo de propagación, con período de  $180^\circ$ .

El valor propio  $c_1$  depende de 5 parámetros:  $R_1$ ,  $\tau_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\theta$  y  $k$ . El análisis numérico del comportamiento de  $c_1$  se hizo con un programa escrito en lenguaje ALGOL, que fue corrido en la computadora Burroughs 7800 de la DGECA-UNAM. En lugar de  $c_1$ , lo que se determinó fue su parte imaginaria,  $C_i = \text{Im}(c_1) = c_1/i$ . El parámetro  $k$  se varió entre 0.1 y 10 a intervalos de 0.1 y el ángulo de propagación se varió entre  $-90^\circ$  y  $90^\circ$ . No fue necesario considerar valores de  $\theta$  en el intervalo restante por la periodicidad en  $\theta$ .

En base a la ecuación (7.94) y a la definición de  $C_i$ , resulta que:

$$(7.98) \quad C_i = p_1(k)\cos^2\theta R_1 + p_2(k)\cos\theta\text{sen}\theta\tau_1 + p_3(k)\alpha_1.$$

El número de Reynolds, el número de Taylor y el ángulo de inclinación tienen que ser pequeños, lo que se satisface si el parámetro  $\epsilon$  lo es.  $R_1$ ,  $\tau_1$  y  $\alpha_1$  tienen cierta libertad de variación. Para fines del análisis de la estabilidad los tres parámetros se varían en el intervalo  $[0,10]$ .

Considerando que la relación entre  $C_i$  y  $R_1$ ,  $\tau_1$  y  $\alpha_1$  es lineal, la misma se puede poner en la forma:

$$(7.99) \quad C_i = \frac{dC_i}{dR_1}R_1 + \frac{dC_i}{d\tau_1}\tau_1 + \frac{dC_i}{d\alpha_1}\alpha_1.$$

$\frac{dC_i}{dR_1}$ ,  $\frac{dC_i}{d\tau_1}$  y  $\frac{dC_i}{d\alpha_1}$  son, respectivamente, las razones de cambio de  $C_i$  respecto a  $R_1$ ,  $\tau_1$  y  $\alpha_1$  e indican la importancia que tienen esos parámetros para la estabilidad. En base a (7.98) concluimos que :

$$(7.100) \quad \frac{dC_i}{dR_1} = p_1(k) \cos 2\theta,$$

$$(7.101) \quad \frac{dC_i}{d\tau_1} = p_2(k) \cos \theta \sin \theta,$$

$$(7.102) \quad \frac{dC_i}{d\alpha_1} = p_3(k).$$

La figura 28 muestra una gráfica  $\frac{dC_i}{dR_1}$  vs.  $k$ , para  $\theta=0$  y  $\theta=50$ . En el intervalo  $[0, 1.82]$   $\frac{dC_i}{dR_1}$  es positiva, lo que significa que un aumento en  $R_1$  tiende a desestabilizar el flujo. El valor máximo en ambos casos (lo que se puede generalizar para cualquier dirección de propagación) ocurre con un número de onda  $k = 0.3$ .

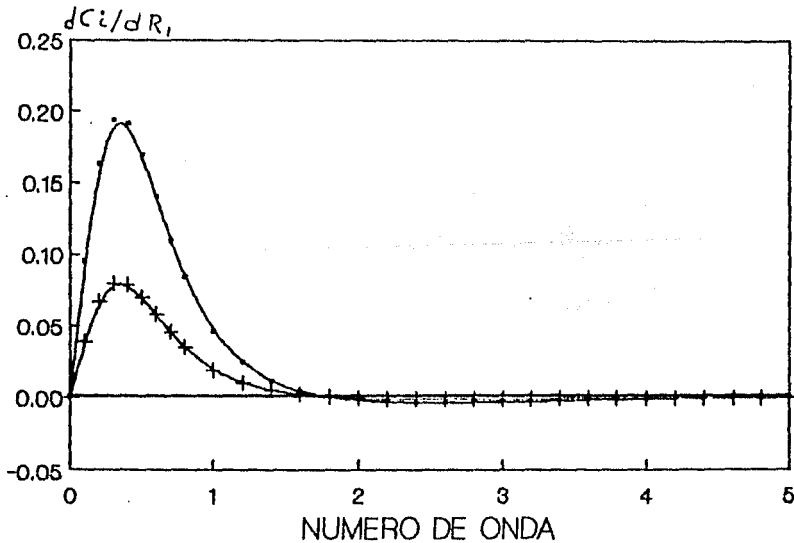


FIGURA 28. -Gráfica  $\frac{dC_i}{dR_1}$  vs  $k$ . En el intervalo  $(0, 1.82)$  un incremento en  $R_1$  tiene efecto desestabilizador sobre el flujo

Por encima de  $k=1.82$ ,  $\frac{dC_i}{dR_1}$  se torna negativo. Esto indica que número de Reynolds tiene un efecto estabilizador en las perturbaciones cuya longitud de onda es comparable o menor a la anchura de la capa de fluido.

El comportamiento de  $\frac{dC_i}{d\tau_1}$  con respecto a  $\theta$  y  $k$  se muestra en la figura 29, en la que aparece una gráfica  $\frac{dC_i}{d\tau_1}$  vs.  $k$  para tres valores distintos del ángulo de propagación. Las curvas tienen cambio de signo en  $k \approx 0.7$ . Además, hay un punto crítico (que puede ser máximo o mínimo dependiendo del ángulo  $\theta$ ) que ocurre con un número de onda cercano a 0.3. Un punto crítico con características opuestas aparece en  $k \approx 1.1$ .

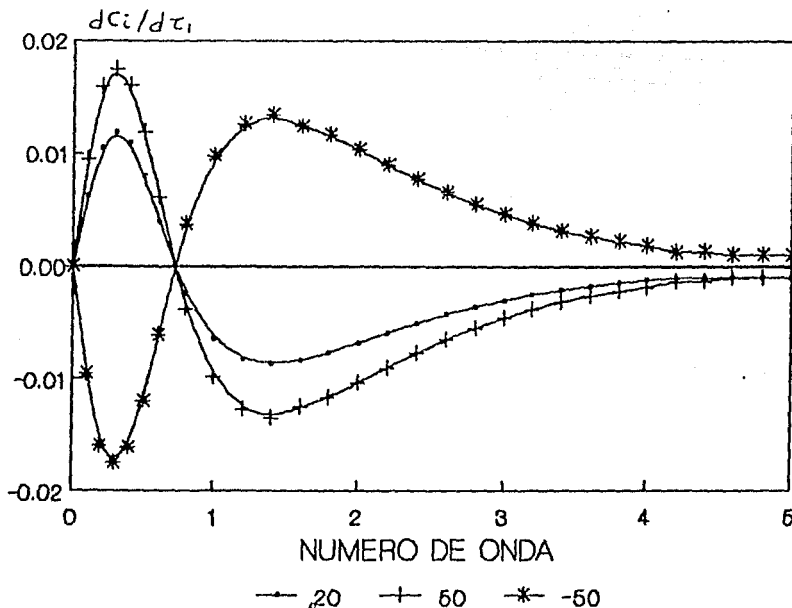


FIGURA 29.- Gráfica  $(\frac{dC_i}{d\tau_1})$  vs  $k$ ,  $\theta=50, 20, 50$ . El efecto de la rotación depende del número de onda y del ángulo de inclinación.

En el rango de números de onda (0,0,0,7) la rotación tiene efecto desestabilizador sobre las perturbaciones que se propagan entre 0 y 90 grados. Por el contrario, la rotación tiende a estabilizar entre -90° y 0°.

Finalmente, el orden de magnitud de  $\frac{dC_i}{d\tau_1}$  es de  $10^{-2}$ . Si hacemos una comparación, el número de Reynolds juega un papel más importante en la estabilidad que el número de Taylor (ver figuras 28 y 29).

A partir de (7.94) se tiene que  $\frac{dC_i}{d\alpha_1}$  no depende del ángulo de propagación. La figura 30 contiene una gráfica  $\frac{dC_i}{d\alpha_1}$  vs.  $k$ . Se pueda apreciar que  $\frac{dC_i}{d\alpha_1}$  es siempre negativa, lo que indica que el aumento de  $\alpha_1$ , hace que el flujo sea más estable (o menos inestable). El mínimo ocurre en  $k = 1$  y es aproximadamente -0.315.

En la mayoría de los casos el factor que determina la ~~estabilidad del flujo es el término~~ dependiente de  $\alpha_1$ . Eso lo podemos observar, por ejemplo, en la gráfica 31, donde aparecen dos curvas  $C_i$  vs.  $k$ , para valores diferentes del ángulo  $\theta$ . Solo basta comparar las curvas con la que aparece en la gráfica 30.

El comportamiento de la estabilidad del flujo frente a una variación del número de Reynolds se ilustra en la figura 32. En ella aparecen tres curvas  $C_i$  vs.  $\theta$ , cada una con un valor diferente de  $R_1$  (los demás parámetros permanecen fijos). Para los tres valores de  $R_1$  el flujo es estable; el término que domina en  $C_i$  es el que depende del ángulo de inclinación. Por otra parte, el valor máximo de  $C_i$  ocurre a ángulos de propagación negativos. Además se cumple que para valores grandes de  $R_1$ , el máximo tiende a situarse en  $\theta=0$ .

Veremos a continuación algunos detalles de la influencia de la rotación sobre la estabilidad del fluido. La figura 33 contiene una gráfica  $C_i$  vs.  $\theta$ , que incluye tres curvas, cada una con un valor distinto de  $\tau_1$ . Como se puede apreciar, el efecto de la



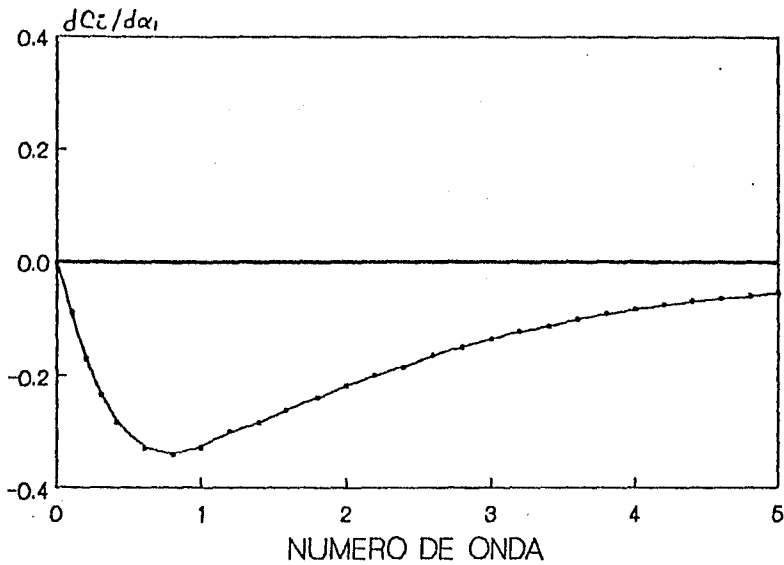


FIGURA 30.-Gráfica  $(dC_i/d\alpha_1)$  vs  $k$ . El término  $(dC_i/d\alpha_1)$  es negativo para cualquier valor del número de onda  $k$ , lo que significa que  $\alpha_1=0$  afecta positivamente a la estabilidad.

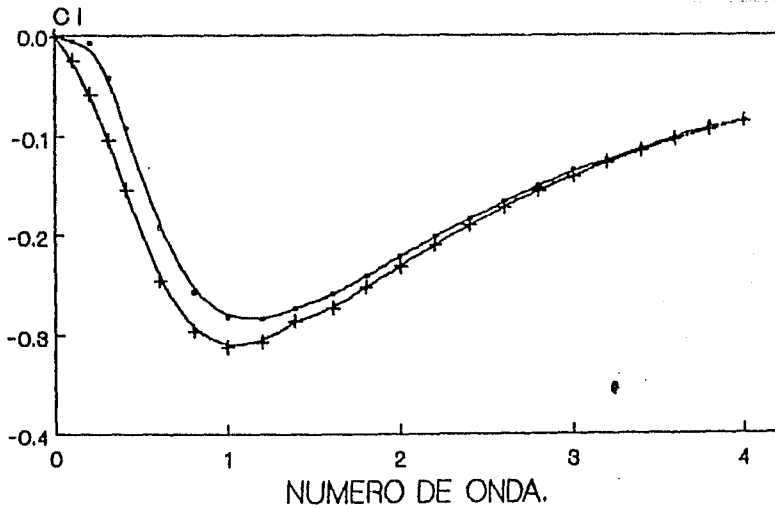


FIGURA 31.- Gráfica  $C_i$  vs  $k$ , con dos valores del ángulo de propagación.

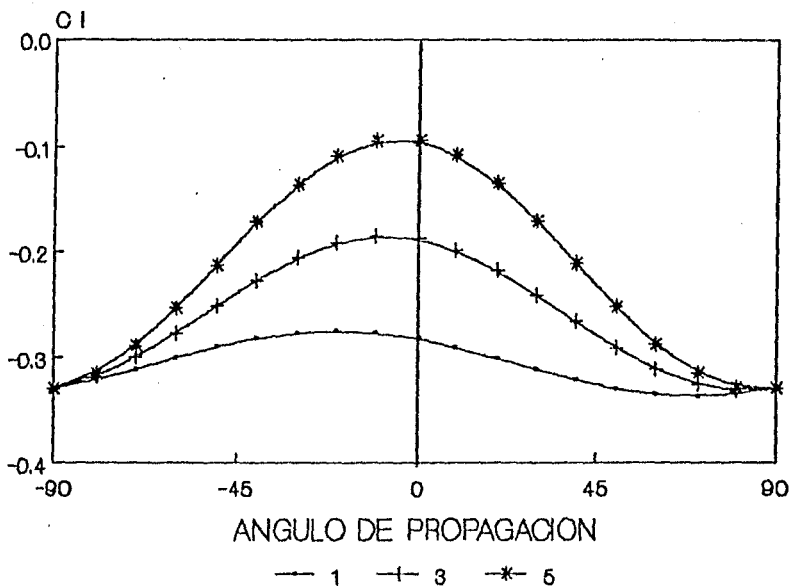


FIGURA 32.- Gráfica  $C_1$  vs  $\theta$ , con varios valores de número de Reynolds.  $\alpha_1=1$ ,  $\tau_1=0.5$ ,  $R_1=1,3,5$ .

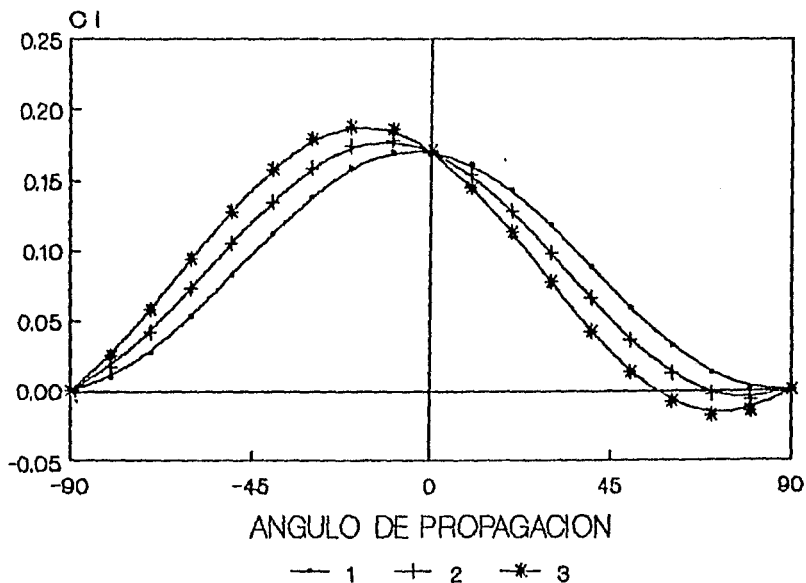


FIGURA 33.- Gráfica  $C_1$  vs  $\theta$ , con varios valores de número de Taylor.  $\alpha_1=0$ ,  $R_1=5$ ,  $\tau_1=1,2,3$ .

rotación es distinto dependiendo si el ángulo de propagación es positivo o negativo. Un incremento de  $\tau_1$  tiende a estabilizar las perturbaciones que se propagaban entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . Sucede lo contrario en el intervalo  $(-90^\circ, 0^\circ)$ .

En la figura 34 se muestra una gráfica  $C_i$  vs.  $\theta$ , con tres curvas que se diferencian entre si por el valor de  $\alpha_1$ . Ahí se puede apreciar como un aumento en el ángulo de inclinación tiene un efecto estabilizador, que domina sobre la rotación y las fuerzas de inercia. Un detalle que llama la atención es que el valor máximo de  $C_i$  no depende de las variaciones del parámetro  $\alpha_1$ .

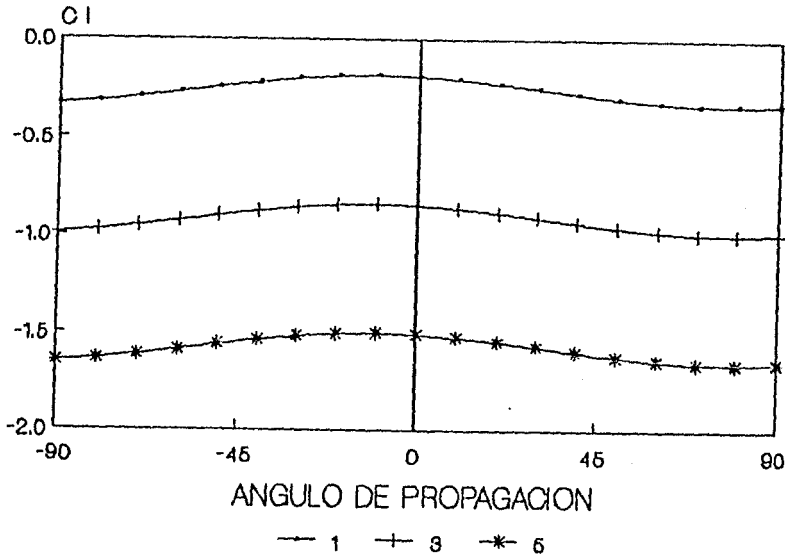


FIGURA 34. -Gráfica  $C_i$  vs  $\theta$ , con varios valores del ángulo de inclinación.  $R_1=3$ ,  $\tau_1=1$ ,  $\alpha_1=1,3,5$ .

Con esto se concluye el análisis de la estabilidad. En contramos que la rotación tiene una influencia pequeña en la estabilidad del flujo y que la misma depende de la dirección de propagación de las perturbaciones.

## 8.-CONCLUSIONES

En este trabajo se investigaron las características y la estabilidad del escurrimiento de un líquido newtoniano por un plano inclinado en rotación. En primer lugar se resolvieron las ecuaciones de momento y continuidad incluyendo a dos fuerzas de cuerpo, la gravedad y la fuerza de Coriolis, y se obtuvo como resultado un flujo estacionario en forma de una capa descendente con espesor constante. Enseguida se procedió a deducir la forma adimensional de las componentes del campo de velocidad, luego de lo cual se encontró que estas dependen de un parámetro sin dimensiones:  $\chi = (r \operatorname{sen} \alpha / 2)^{\frac{1}{2}}$ .

El estudio de la estabilidad del flujo primario se hizo descomponiendo en modos normales a las variables que describen a las perturbaciones. Como resultado se obtuvo un sistema de ecuaciones diferenciales que generalizan a la ecuación de Orr-Sommerfeld por dos razones: a) se consideran perturbaciones tridimensionales y b) se incluye una fuerza de cuerpo adicional inducida por la rotación.

La imposibilidad de resolver en forma analítica dichas ecuaciones condujo a proponer soluciones en forma de series de potencias de cierto parámetro. El primer desarrollo corresponde a una aproximación en serie de potencias del número de onda.

De acuerdo a la literatura existente sobre el tema, el valor del Número de Reynolds por debajo del cual hay estabilidad es:

$$R_{crit} = (5/6)^{\frac{1}{2}} \tan \alpha.$$

Uno de los motivos de la presente investigación fue probar si la acción de una fuerza de cuerpo adicional podía hacer que el

flujo fuera estable con valores más altos de número de Reynolds. Después de analizar el comportamiento de las perturbaciones bajo la acción conjunta de la gravedad y la rotación llegamos a una respuesta positiva, y de acuerdo al análisis numérico se concluye que  $R_{crit}$  es una función creciente del número de Taylor, lo que se puede apreciar en las gráficas incluidas en la figura 22, al final del capítulo 6.

Las fuerzas que tienen relevancia en el amortiguamiento de las perturbaciones son la componente de la gravedad perpendicular al plano y la parte de la fuerza de Coriolis inducida por la componente de la velocidad angular en el eje  $y$ .

La otra aproximación que se hizo fue para valores pequeños de número de Reynolds, número de Taylor y ángulo de inclinación. Se encontró por un lado que el factor dominante en la estabilidad es la componente de la gravedad perpendicular al plano inclinado. Por otro lado, se llegó a que el efecto de la rotación depende de la dirección de propagación. Sucede por ejemplo que entre  $-90^\circ$  y  $0^\circ$  la rotación tiende a estabilizar el flujo, mientras que a ángulos de propagación comprendidos en el intervalo  $(0^\circ, 90^\circ)$  juega un papel desestabilizador. Los resultados que aquí se mencionan se pueden apreciar en las figuras 29, 30, 33 y 34.

Los resultados que aquí se presentan tienden a los que se han obtenido en un plano inclinado sin rotación cuando el número de Taylor tiende a cero. Por otro lado, los resultados que se han obtenido tendrán validez en los casos en que la fuerza de Coriolis sea más importante que la fuerza centrífuga.

Una de las áreas de aplicación de esta investigación podría ser el recubrimiento de superficies con películas de espesor constante. Un procedimiento común de recubrimiento consiste en hacer fluir la sustancia originalmente en estado líquido por la superficie en cuestión. Interesa conocer las condiciones bajo las cuales se amortiguan las perturbaciones del flujo primario.

Este trabajo podría ser la base para realizar futuras investigaciones. Entre los temas que podrían estudiarse destacan los siguientes:

- a) Abordar el problema de la estabilidad de la capa de fluido incluyendo a la fuerza centrífuga.
- b) Investigar este mismo problema en fluidos no-newtonianos.
- c) Investigar la estabilidad de perturbaciones sobre una película de fluido que desciende por un cono en rotación.

## BIBLIOGRAFIA

- Benjamin, T.B.. *Wave Formation in Laminar Flow Down an Inclined Plane*. J. Fluid Mechanics, 2(554)1957.
- Bialko, A. *Nuestro planeta, la tierra. col Física al alcance de todos* Editorial Mir. Moscú, 1985.
- Burroughs. B6000/B7000 cande language reference. Burroughs Corporation. Detroit, 1980.
- Burroughs. B6000/B7000 algol reference manual. Burroughs Corporation. Detroit, 1977.
- Burroughs. B6000/B7000 fortran reference manual. Burroughs Corporation. Detroit, 1978.
- Chilov, G. *Analyse mathématique*, vol. I. Editions Mir. Moscú, 1973.
- Currie, I.G.. *Fundamental Mechanics of Fluids*. McGraw Hill, New York, 1974.
- Drazin, R.G. *Hidrodinamic Stability*. Cambridge University, Cambridge, 1979.
- Elsgoltz, L. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Ediciones de cultura popular. México, 1975.
- Floryan, J.M. , S.H. Davis y R.E. Kelly. *Instabilities of a liquid film flowing down a slightly inclined plane*. Phys. Fluids, 30(4)1987, pp. 983-989.
- Golovina, L.I. *Algebra lineal y algunas de sus aplicaciones*. Editorial Mir. Moscú, 1980.
- Guerasimov, Dreving et. al. *Curso de química física*, tomo I. 2a. edición. Editorial Mir. Moscú, 1977.
- Higgins, Brian. *Film flow on a rotating disk*. Phys. Fluids, 29(11)1986, pp. 3522-3529.
- Hunter, S.G.. *Mechanics of Continuos Media*. Ellis Horwood Ltd. West Sussex, 1983.

- Hwang, Shyh-Hong y Hsue-Chia Chiang. **Turbulent and inertial roll waves in inclined film flow**, Phys. Fluids, 30(5)1987, pp. 1259-1268.
- Kheshgi, H.S. y L.E. Scriven. **Disturbed film flow on a vertical plate**. Phys. Fluids, 30(4)1987, pp. 990-997.
- Krantz, W.B. y S.L. Goren. **Stability of thin liquid films flowing down a plane**. Ind. Eng. Chem. Fundam., 10(1)1971, pp. 91-101.
- Kreider, D.L., R.G. Kuller y D.R. Ostberg. **Ecuaciones diferenciales**. Fondo educativo interamericano. México, 1983.
- Landau, L.D. y E.M. Lifshitz. **Mecánica. col Curso de física teórica vol I**, 2a. edición. Ed. Reverté. Barcelona, 1978.
- Landau, L.D. , A. Ajiezer y E.M. Lifshitz. **Curso de física general, mecánica y física molecular**. Editorial Mir. Moscú, 1973.
- Lin, S.P. y W. C. Liu. **Instability of film coating of wires and tubes**. Aiche Journal, 21(4)1975, pp. 775-782.
- Malvern, L.E. **Introduction to Mechanics of a Continuous Medium**. Prentice Hall. New Jersey, 1969.
- Matvéev, A.N. . **Física Molecular**. Editorial Mir. Moscú, 1987.
- Mijeev, M.A. y I.M. Mijeeva. **Fundamentos de -termotransferencia**. Editorial Mir. Moscú, 1979.
- Monin, A.S. y A.M. Yaglom. **Statistical Fluid Mechanics, vol.I**. MIT Press, Cambridge, 1975.
- Pedlosky, J. **Geophysical Fluid Dynamics**. Springer Verlag, New York, 1979.
- Ramirez, A. **IMSL, manual de uso**. DGSCA-UNAM. México, 1987.
- Sanchez Bibriesca, J.L.. **Mecánica del medio continuo**. UNAM. México, 1972.
- Shivamoggi, B.K. **Theoretical Fluid Dynamics**. . Martinus Nijhoff Publishers. Dordrecht, 1985.



Solorio, F. Estudio experimental de la influencia de la curvatura en el flujo de películas descendentes. Memoria del decimotercer congreso ANIAC. Guadalajara, Septiembre de 1987. pp. 143-148.

- Sommerfeld, Arnold. *Mechanics of Deformable Bodies. col Lectures on theoretical physics vol II* Academic Press, New York, 1950.

- Strelkov, S. *Mécanique*. Editions Mir, Moscú, 1978.

-Yih, Chia-Shun. Stability of liquid flow down an inclined plane. *Phys. Fluids*, 6(3)1963, pp. 321-334.

- Zollars, R. y W.B. Krantz. Non-parallel flow effects on the stability on film flow down a right circular cone. *J. Fluid Mechanics*, 26(3)1980, pp. 1585-1601.