20 2ej.

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

EJEMPLOS DE ESPACIOS UNICOHERENTES Y MULTICOHERENTES

T E S I S

Que para obtener el título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

RITA OLIVA MAYA HERNANDEZ

México, D. F. 1988

(*)

I N D I C E

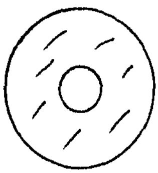
(*)

I N T R O D U C C I O N

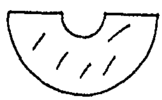
La manera más sencilla de definir el concepto de espacio topológico agujerado es la unicoherencia.

Se dice que un espacio topológico conexo $\mathbb{X}$ es unicoherente si no existen dos subconjuntos cerrados y conexos H y K de $\mathbb{X}$ tales que $\mathbb{X} = H \cup K$ y $H \cap K$ es disconexo. Los espacios conexos que no son unicoherentes son llamados multicoherentes.

Un ejemplo típico de un espacio multicoherente es:

$\mathbb{X}$ = 

donde podemos tomar H = 

y K = 

Claramente se observa que su unión es $\mathbb{X}$ y su intersección es igual a: es disconexo.

Intuitivamente, los espacios unicoherentes son aquellos que no están atravesados por ningún agujero, aunque pueden tener huecos, y multicoherentes son aquellos que tienen un agujero por el cual se pueden atravesar.

Los ejemplos más comunes de espacios unicoherentes son todos los espacios Euclidianos, las esferas de dimensión mayor o igual que 2, los espacios proyectivos, etc.

Cuando se piensa en ejemplos de espacios unicoherentes y multicoherentes, generalmente, uno se imagina subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ (o de algún $\mathbb{R}^n$), ya que de ellos es más o menos fácil ver si tienen agujeros o no. Además, casi siempre, la unicoherencia se estudia en espacios con propiedades adicionales (conexidad local, normalidad, compacidad, etc.).

En general, se sabe poco de la multicoherencia de espacios con topologías raras. Por esta razón, en el presente trabajo nos dedicamos a estudiar todos los espacios topológicos conexos que aparecen en el libro "Counterexamples in Topology" [3], tratando de determinar si son unicoherentes o no. Conseguimos hacer esto en casi todos los ejemplos, a continuación describimos el contenido de cada uno de los capítulos:

Capítulo I. Aquí se demuestran los principales Teoremas y Lemas que se utilizan posteriormente.

Capítulo II. Espacios Ultraconexos. En estos espacios se tiene que la intersección de cualesquiera dos subconjuntos cerrados es diferente del vacío. Es fácil ver que todos ellos son unicoherentes (Lema 1). Los ejemplos que pertenecen a esta categoría son: Topologías del Punto Excluido [8, 9, 10, 11]*, Divisible [57] y de los Ideales Primos [56].

Capítulo III. Integrado por Espacios Hiperconexos, para los cuales se tiene que todos sus subconjuntos abiertos no son ajenos dos a dos. Todos estos espacios son unicoherentes (Lema 2) y son los siguientes: Topologías Indiscreta [4], del Punto Particular [8, 9, 10, 11], de la Extensión Cerrada [12], del Complemento Finito [18, 19], del Complemento Numerable [20], Doble del Complemento Numerable [21], del Complemento Compacto [22], del Orden Derecho en $\mathbb{R}$ [50], de los Intervalos Anidados [52], de los Intervalos Encimados [53] y de los Intervalos Trabados [54].

Capítulo IV. Espacios Totalmente Ordenados, son aquellos en los que su topología está dada por un orden. Los ejemplos que cumplen esta definición son, además de los reales, Orden Lexicográfico en el Cuadrado Unitario [48], Línea Larga Extendida [46] y Línea Larga [45]. Todos ellos son unicoherentes (Teorema 2).

Capítulo V. Espacios topológicos que son Extensiones Perfectas. Todos los ejemplos que se encuentran en esta categoría son unicoherentes (Teorema 3): Topologías de Mitades de Disco [78], Metrizable del Disco Tangente [83], del Disco Tangente de Niemytzki [82] y Cuadrado Simplificado de Arens [81].

Capítulo VI. Espacios Normales y Contraibles. Son los siguientes: Espacio de Helly [107], Doble Recta Real [62], Espacio de las Funciones Continuas con la Topología de la Convergencia Uniforme [108], Escoba Cerrada [120] y Topología Euclidiana [28], todos son unicoherentes.

*Los números que se ponen a continuación de los nombres de los espacios, son los números que tienen en [3].

Capítulo VII. Espacios que no están clasificados en ninguno de los anteriores Capítulos: Escoba de los Números Enteros [121], Conjuntos Conexos de Bernstein [124], Extensión Racional Indiscreta de ℝ [66, 67, 68, 69], Pendiente Irracional [75], Origen Doble [74], Radio Borrado [77], Diámetro Borrado [76], Telefase [73], Curva Senoidal [116], Curva Senoidal Cerrada [117], Curva Senoidal Extendida [118], La Escoba [119], Angulos Anidados [122], Jaula Infinita [123], Disco Unitario sin su Centro [132], Pseudoarco [130], Compactación Casi-Discreta y Unipuntual de los Racionales [35], Espacio de la Red de Roy [126] y la Topología Radial del Plano [141].

Capítulo VIII. Espacios Producto que son Unicoherentes [2] y son los siguientes: I^{ω} [38], I^{I} [105] y l_2 [36].

En el Capítulo **IX** se presentan los ejemplos para los cuales no se pudo determinar si tienen o no agujero: Los Enteros con la Topología de los Primos Relativos [60], Sacacorchos Condensado de Hewitt [92], Conjunto Biconexo de Miller [131], Tienda Agujerada de Cantor [128], El Cuadrado de Alexandroff [101] y El Espacio de las Sucesiones de Gustin [125].

CAPITULO I

TEOREMAS Y LEMAS IMPORTANTES

ULTRACONEXOS.

Definición:

$\mathcal{X}$ es ultraconexo si para todo S y T cerrados de $\mathcal{X}$, con S y T $\neq \emptyset$, se tiene que $S \cap T \neq \emptyset$.

LEMA 1:

Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico. Si $\mathcal{X}$ es ultraconexo, entonces es conexo y unicoherente.

Demostración:

a) $\mathcal{X}$ es conexo.

Supongamos que $\mathcal{X}$ no es conexo, entonces existen A y B cerrados de $\mathcal{X}$, ajenos, no vacíos tales que $A \cup B = \mathcal{X}$.

Por ser A y B cerrados no vacíos, se tiene por hipótesis que $A \cap B \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción que nos prueba que $\mathcal{X}$ es conexo.

b) $\mathcal{X}$ es unicoherente.

Supongamos que $\mathcal{X}$ no es unicoherente, entonces existen A y B subconjuntos cerrados conexos de $\mathcal{X}$ tales que $A \cup B = \mathcal{X}$ y $A \cap B$ no es conexo.

Como $A \cap B$ no es conexo existen H y K ajenos, no vacíos, cerrados de $\mathcal{X}$ tales que $H \cup K = A \cap B$. Entonces H y K contradicen la ultraconexidad de $\mathcal{X}$.

Por tanto, $\mathcal{X}$ es unicoherente.

HIPERCONEXOS.

Definición:

$\mathfrak{X}$ es hiperconexo si existe β base de $\mathfrak{X}$, tal que para todas $U, V \in \beta$, con $U, V \neq \emptyset$, se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$.

LEMA 2.

Sea $\mathfrak{X}$ un espacio topologico. Si $\mathfrak{X}$ es hiperconexo, entonces es conexo y unicoherente.

Demostración:

a) $\mathfrak{X}$ es conexo.

Sea β una base de $\mathfrak{X}$ como en la del hiperconexo.

Supongamos que $\mathfrak{X}$ no es conexo entonces existen A, B abiertos de $\mathfrak{X}$, ajenos, no vacios tales que $A \cup B = \mathfrak{X}$.

Por ser A abierto no vacio existe $V \in \beta$ no vacío tal que $V \subset A$ y como B también es abierto no vacío existe $W \in \beta$ no vacío tal que $W \subset B$, entonces $\emptyset \neq V \cap W \subset A \cap B$. Esta es una contradicción. Por tanto $\mathfrak{X}$ es conexo.

b) $\mathfrak{X}$ es unicoherente.

Supongamos que $\mathfrak{X}$ no es unicoherente, entonces existen A, B subconjuntos cerrados conexos de $\mathfrak{X}$ tales que $A \cup B = \mathfrak{X}$ y $A \cap B$ no es conexo, esto implica que $A \neq \mathfrak{X}$ y $B \neq \mathfrak{X}$.

Por ser A y B cerrados se tiene que A^c y B^c son abiertos no vacios, lo cual implica lo siguiente: $\emptyset \neq A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \mathfrak{X}^c = \emptyset$. Esta contradicción prueba que $\mathfrak{X}$ es unicoherente.

ORDENADOS.

Desde el Lema siguiente hasta el Teorema 2, $\mathfrak{X}$ denotará un conjunto totalmente ordenado.

Recordemos que $\mathfrak{X}$ es totalmente ordenado si cumple lo siguiente:

1) $\forall\ a \in \mathfrak{X} \quad a \leq a$

2) $\forall\ a, b, c \in \mathfrak{X}$ si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.

3) $\forall\ a, b \in \mathfrak{X}$ si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

4) $\forall\ a, b \in \mathfrak{X}$, $a \neq b$, se cumple una y sólo una de las siguientes opciones $a \leq b$ o $b \geq a$.

Cuando se tiene un espacio totalmente ordenado, se define $a < b$ si $a \leq b$ y $a \neq b$.

La Topología de orden de $\mathfrak{X}$ tiene como base a los conjuntos de la forma (x, y), $(\leftarrow, y)$, $(x, \rightarrow)$ donde:

$(x, y) = \{z \in \mathfrak{X} \ / \ x < z < y\}$.

$(\leftarrow, y) = \{x \in \mathfrak{X} \ / \ x < y\}$.

$(x, \rightarrow) = \{y \in \mathfrak{X} \ / \ y > x\}$.

Diremos que $\mathfrak{X}$ tiene la propiedad del punto intermedio si dados $x, y \in \mathfrak{X}$ con $x < y$, existe $z \in \mathfrak{X}$ tal que $x < z < y$.

Un intervalo de $\mathfrak{X}$ es un subconjunto E con la propiedad de que $x, y \in E$ y $x < z < y$ implican $z \in E$.

LEMA 3:

Si $\mathfrak{X}$ es conexo entonces $\mathfrak{X}$ tiene la propiedad del supremo y del punto intermedio.

Supongamos que $\mathfrak{X}$ es conexo, probaremos que $\mathfrak{X}$ tiene la propiedad del supremo.

Supongamos que $\mathfrak{X}$ no tiene la propiedad del supremo, entonces existe S subconjunto no vacío de $\mathfrak{X}$, acotado superiormente por $u \in \mathfrak{X}$ de tal manera que S no tiene supremo.

Definimos: $A = \{x \in \mathfrak{X} \,/\, x \text{ es cota superior de } S\}$.

$B = \{y \in \mathfrak{X} \,/\, y \text{ no es cota superior de } S\}$.

En seguida probaremos una serie de propiedades para A y B.

a) $A \neq \emptyset$. Es claro ya que $u \in A$.

b) $A \cup B = \mathfrak{X}$.

c) $B \neq \emptyset$.

Si S fuera un conjunto de un sólo punto, $S = \{z\}$. Entonces z sería el supremo de S. Como estamos suponiendo que S no tiene supremo, entonces S tiene al menos dos elementos z y w con $z < w$. Aseguramos que $z \in B$, pues de lo contrario z sería una cota superior de S y en consecuencia se tendría que $z \geq w$, lo cual es absurdo. Por tanto $B \neq \emptyset$.

d) A es abierto.

Sea $a \in A$, como S no tiene supremo existe $d \in A$ tal que $d < a$.

Definimos $I = (d, \rightarrow)$ entonces $a \in I$.

Dada $x \in I$ tenemos que $d < x$ y como $d \in A$, $s \leq d$ para toda $s \in S$ entonces $s \leq d < x$ esto implica que $s < x$ para toda $s \in S$ lo que significa que x es cota superior de S. Así que $x \in A$.

Por tanto $a \in I \subset A$. En conclusión A es abierto.

e) B es abierto.

Sea $b \in B$ como b no es cota superior de S entonces existe $s \in S$ tal que $b < s$. Definimos $I = (\leftarrow, s)$ entonces $b \in I$. Dada $z \in I$ tenemos que $z < s$. De modo que z no es cota superior de S, esto significa que $z \in B$. Así pues $I \subset B$.

En conclusión $b \in I \subset B$ por lo que B es abierto.

De todo lo anterior podemos concluir que $\mathcal{X} = A \cup B$ es una separación de $\mathcal{X}$, esta contradicción prueba que S debe tener supremo. Por tanto $\mathcal{X}$ tiene la propiedad del supremo.

Ahora mostraremos que $\mathcal{X}$ tiene la propiedad del punto intermedio.

Supongamos que $\mathcal{X}$ no tiene la propiedad del punto intermedio, entonces existen $x, y \in \mathcal{X}$ con $x < y$ tal que $(x, y) = \emptyset$.

Probaremos que $\mathcal{X} = (\leftarrow, x] \cup [y, \rightarrow)$ es una separación de $\mathcal{X}$, lo cual es absurdo pues estamos suponiendo que $\mathcal{X}$ es conexo.

Esto concluirá la prueba de que $\mathfrak{X}$ tiene la propiedad del punto intermedio.

Notemos que $(\leftarrow, x] \neq \emptyset$ ya que $x \in (\leftarrow, x]$ y $[y, \rightarrow) \neq \emptyset$ ya que $y \in [y, \rightarrow)$.

Como $\mathfrak{X} - ((\leftarrow, x] \cup [y, \rightarrow)) = (x, y) = \emptyset$ tenemos que $\mathfrak{X} = (\leftarrow, x] \cup [y, \rightarrow)$.

Veamos ahora que $(\leftarrow, x] \cap [y, \rightarrow) = \emptyset$.

Supongamos que $(\leftarrow, x] \cap [y, \rightarrow) \neq \emptyset$, entonces existe $z \in (\leftarrow, x] \cap [y, \rightarrow)$ esto implica que $z \in (\leftarrow, x]$ y $z \in [y, \rightarrow)$, con lo que se tiene que $y \leq z \leq x$. Esta es una contradicción que nos prueba que $(\leftarrow, x] \cap [y, \rightarrow) = \emptyset$. Además $(\leftarrow, x]$ y $[y, \rightarrow)$ son cerrados ya que $(\leftarrow, x]^c$ y $[y, \rightarrow)^c$ son abiertos.

Concluimos entonces que $\mathfrak{X} = (\leftarrow, x] \cup [y, \rightarrow)$ es una separación de $\mathfrak{X}$. Por tanto $\mathfrak{X}$ tiene la propiedad del punto intermedio.

LEMA 4:

Si $\mathfrak{X}$ tiene la propiedad del supremo y del punto intermedio. Entonces $E \subset \mathfrak{X}$ es conexo si y sólo si E es intervalo.

Supongamos que E no es intervalo, demostraremos que E no es conexo.

Como E no es intervalo existen $x, y \in E$ y existe z tal que $x \leq z \leq y$ y $z \notin E$. (Entonces $x < z < y$).

Definimos $A = E \cap (\leftarrow, z)$ y $B = E \cap (z, \rightarrow)$, entonces $E = A \cup B$.

Como $x \in A$ y $y \in B$, entonces $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$.

Claramente A y B son abiertos ajenos de E. De modo que E no es conexo.

Ahora probaremos que si E es intervalo entonces E es conexo.

Supongamos que E no es conexo. Tomemos $A, B \subset E$, ajenos, no vacíos tales que $A \cup B = E$ y $\bar{A} \cap B = \emptyset = A \cap \bar{B}$.

Escogemos $x \in A$ y $y \in B$. Podemos suponer que $x < y$.

Definimos $C = [x, y] \cap A$. Notemos lo siguiente:

Que $C \neq \emptyset$, porque $x \in C$.

Que y es cota superior de C. Entonces existe $z \in \mathbb{X}$ tal que $z = \sup. C$. Esto implica que $z \in \bar{C}$. Como $C \subset A$ entonces $\bar{C} \subset \bar{A}$.

De modo que $z \in \bar{A}$ y $z \notin B$, de donde se tiene que $x \leq z < y$.

Como E es intervalo, tenemos que $z \in E = A \cup B$.

De manera que $z \in A$ y por tanto $z \notin \bar{B}$.

De aquí que existen $a, b \in \mathbb{X}$ tales que $z \in (a, b) \subset \mathbb{X} - \bar{B}$.

Como $z < y, b$, tenemos que $z < \min. \{y, b\}$.

Por la propiedad del punto intermedio que tiene $\mathbb{X}$, existe $t \in \mathbb{X}$ tal que $z < t < \min. \{y, b\} \leq y, b$.

Si $t \in A$, entonces $t \in A \cap [x, y] = C$, así que $t \leq z$.

Esta contradicción muestra que $t \notin A$. Además $a < z < t < b$, así que $t \in (a, b)$ y entonces $t \notin B$. Esto prueba que $t \notin E$, que $x < t < y$, y que E es intervalo, lo cual es absurdo.

Por tanto E tiene que ser conexo.

TEOREMA 1:

$\mathcal{X}$ es conexo si y sólo si $\mathcal{X}$ tiene la propiedad del supremo y del punto intermedio.

La suficiencia es el Lema 3.

Para probar la necesidad, según el Lema 4, sólo hace falta observar que $\mathcal{X}$ es un intervalo de $\mathcal{X}$.

TEOREMA 2:

Si $\mathcal{X}$ tiene la propiedad del supremo y del punto intermedio entonces $\mathcal{X}$ es conexo y unicoherente.

Por Teorema 1 es inmediato que $\mathcal{X}$ es conexo.

En seguida mostraremos que $\mathcal{X}$ es unicoherente.

Supongamos que no lo es.

Entonces existen dos subconjuntos cerrados conexos A, B de $\mathcal{X}$ tales que $A \cup B = \mathcal{X}$ y $A \cap B$ no es conexo.

Como A, B $\subset \mathcal{X}$ y son conexos entonces A y B son intervalos.

De manera que $A \cap B$ es un intervalo y por tanto conexo, esta contradicción implica que $\mathcal{X}$ es unicoherente.

EXTENSIONES PERFECTAS.

TEOREMA 3:

Sea P unicoherente, conexo y localmente conexo. $\mathcal{X}$ conexo y localmente conexo tal que P es denso en $\mathcal{X}$ y todo punto de $\mathcal{X}$ tiene una base de vecindades U's de manera que $U \cap P$ es conexo, entonces $\mathcal{X}$ es unicoherente.

Antes de demostrar el teorema, probaremos que si W es un abierto de $\mathcal{X}$, entonces W es conexo si y sólo si $W \cap P$ es conexo en P.

Primero demostraremos que si W es conexo entonces $W \cap P$ es conexo en P.

Supongamos que $W \cap P$ no es conexo.

Entonces existen dos abiertos H, K de $\mathcal{X}$ no vacíos, ajenos, tales que $W \cap P = H \cup K$.

Por hipótesis para cada $x \in W$, existe Vx abierto básico en $\mathcal{X}$ tal que $x \in Vx \subset W$ y $Vx \cap P$ es conexo.

Además, como $Vx \cap P \subset W \cap P \subset H \cup K$ entonces $Vx \cap P \subset H$ o $Vx \cap P \subset K$.

Hacemos $H_1 = \{x \in W \,/\, Vx \cap P \subset H\}$

$K_1 = \{x \in W \,/\, Vx \cap P \subset K\}$

En seguida probaremos algunas propiedades para H_1 y K_1.

Veamos que $H_1 = \bigcup \{Vx \,/\, x \in H_1\}$.

Claramente $H_1 \subset \bigcup \{Vx \,/\, x \in H_1\}$.

Para demostrar la otra contención tomamos $y \in \bigcup \{Vx \ / \ x \in H_1\}$ y sea $x \in H_1$ tal que $y \in Vx$.

Como $x \in H_1$ se tiene que $x \in W$ y $Vx \cap P \subset H$.

Además como $y \in Vx$ entonces $y \in Vx \cap Vy$.

$Vx \cap Vy$ es un abierto no vacío de $\mathfrak{X}$, entonces $Vx \cap Vy \cap P \neq \emptyset$.

De manera que $Vy \cap P \cap Vx \cap P \neq \emptyset$. Así que $Vy \cap P \cap H \neq \emptyset$.

Esto implica que $Vy \cap P \subset H$. Por tanto $y \in H_1$.

De igual manera se muestra que $K_1 = \bigcup \{Vx \ / \ x \in K_1\}$.

Por lo anterior se tiene que H_1 y K_1 son abiertos.

Es fácil ver que $H_1 \cup K_1 = W$ y que $H_1 \cap K_1 = \emptyset$.

De lo anterior concluimos que H_1 y K_1 es una separación de W, este absurdo prueba que $W \cap P$ es conexo.

A continuación probaremos que si $W \cap P$ es conexo en P entonces W es conexo en $\mathfrak{X}$.

Vemos que $W \subset (W \cap P)^{-\mathfrak{X}}$.

Tomemos $x \in W$ y U abierto de $\mathfrak{X}$ tal que $x \in U$.

Entonces $W \cap U$ es abierto no vacío de $\mathfrak{X}$.

Así que $W \cap U \cap P \neq \emptyset$. Por tanto $x \in (W \cap P)^{-\mathfrak{X}}$.

Hemos demostrado que $W \cap P \subset W \subset (W \cap P)^{-}$, por tanto W es conexo.

De esta manera se mostró que si W es un abierto de $\mathfrak{X}$, entonces W es conexo si y sólo si $W \cap P$ es conexo en P.

Para la siguiente prueba usaremos el Teorema 3 de [4] el cual afirma que la unicoherencia abierta y la unicoherencia cerrada son equivalentes en espacios conexos y localmente conexos.

Demostración de que $\mathfrak{X}$ es unicoherente.

Escogemos cualesquiera dos abiertos conexos U y V de $\mathfrak{X}$ tales que $\mathfrak{X} = U \cup V$.

Probaremos que $U \cap V$ es conexo.

Como $P = (U \cap P) \cup (V \cap P)$ y además U, V son abiertos y conexos en $\mathfrak{X}$ entonces $U \cap P$ y $V \cap P$ son abiertos y conexos en P.

Además, como P es unicoherente entonces $(U \cap P) \cap (V \cap P)$ es conexo.

Así que $(U \cap V) \cap P$ es conexo. Por tanto $U \cap V$ es conexo.

De manera que $\mathfrak{X}$ es unicoherente.

OTROS.

LEMA 5:

Sea $\mathfrak{X}$ un espacio topológico tal que existe $p \in \mathfrak{X}$ con la propiedad de que: Si U es abierto en $\mathfrak{X}$ y $p \in U$ entonces $U = \mathfrak{X}$.

Entonces, se tiene lo siguiente:

a) **Todo subconjunto de $\mathfrak{X}$ que tiene a p es conexo.**

b) **$\mathfrak{X}$ es unicoherente.**

Demostración:

a) Tomemos $A \subset \mathfrak{X}$ tal que $p \in A$.

Supongamos que A no es conexo, entonces existen $H, K \subset \mathfrak{X}$ no vacíos tales que $H \cup K = A$ y $\overline{H} \cap K = \emptyset = H \cap \overline{K}$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p \in H$.

Definimos $U = \mathfrak{X} - \overline{K}$ abierto que contiene a P.

Así que $U = \mathfrak{X}$, entonces $\overline{K} = \emptyset$. Esta contradicción demuestra que A es conexo.

b) Supongamos que $\mathfrak{X}$ no es unicoherente.

Entonces existen M, N subconjuntos cerrados conexos de $\mathfrak{X}$ tales que $M \cup N = \mathfrak{X}$ y $M \cap N$ no es conexo.

Como $M \cap N$ no es conexo, por (a), tenemos que $p \notin M \cap N$.

Entonces $p \in (\mathfrak{X} - (M \cap N))$ que es abierto en $\mathfrak{X}$.

Así que $(\mathfrak{X} - (M \cap N)) = \mathfrak{X}$, entonces $M \cap N = \emptyset$.

Este absurdo muestra que $\mathfrak{X}$ es unicoherente.

LEMA 6:

Los cerrados totalmente disconexos de $\mathbb{R}^2$ son "0" dimensionales.

Sea A cerrado totalmente disconexo de $\mathbb{R}^2$.

Como $\mathbb{R}^2$ es localmente compacto y A es cerrado de $\mathbb{R}^2$ entonces A es localmente compacto. Además A es T_2.

Aplicando el Teorema 29.7 de [5], se tiene que A es "0" dimensional.

LEMA 7:

Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico. Si $\mathcal{X}$ es indescomponible entonces $\mathcal{X}$ es unicoherente.

Supongamos que $\mathcal{X}$ no es unicoherente.

Entonces existen H, K subconjuntos cerrados conexos de $\mathcal{X}$ tales que $H \cup K = \mathcal{X}$ y $H \cap K$ no es conexo.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que H no es propio, entonces $H = \mathcal{X}$.

De manera que $H \cap K = K$ es conexo.

Por tanto $\mathcal{X}$ es descomponible.

CAPITULO II

Aquí mostraremos los espacios que por ser ultraconexos son conexos y unicoherentes. (Ver Lema 1).

TOPOLOGIA DEL PUNTO EXCLUIDO

En este ejemplo supondremos que X es cualquier conjunto.

Elegimos un punto p de X.

La Topología definida para este espacio es la siguiente: $\tau = \{X\} \cup \{U \subset X \ / \ p \notin U\}$.

Hacemos $\beta = \tau$, una base para esta topología.

Observemos que los cerrados de este espacio son los conjuntos que tienen a p y el vacío.

Claramente, este espacio es ultraconexo y por lo tanto es conexo y unicoherente.

Los siguientes son ejemplos particulares de este espacio, que dependen de la cardinalidad de X.

a) TOPOLOGIA DEL PUNTO EXCLUIDO CON X FINITO.

b) TOPOLOGIA DEL PUNTO EXCLUIDO CON X NUMERABLE.

c) TOPOLOGIA DEL PUNTO EXCLUIDO CON X NO NUMERABLE.

TOPOLOGIA DIVISIBLE

En este ejemplo $\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x \geq 2\}$.

Los subbásicos de esta Topología se definen de la siguiente manera:

Para cada $n \geq 2$, se hace $U_n = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x \mid n\}$.

A continuación demostraremos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$\overline{\{x\}} = \{n \in \mathbb{N} / n$ es múltiplo de $x\}$.

Tomemos $n \in \overline{\{x\}}$ entonces para toda V vecindad de n, se tiene que $V \cap \{x\} \neq \emptyset$, en particular $U_n \cap \{x\} \neq \emptyset$. Así que $x \in U_n$, entonces n es múltiplo de x.

Ahora supongamos que n es múltiplo de x, y tomemos una vecindad W de n, entonces existe un básico B de $\mathbb{X}$ tal que $n \in B \subset W$.

Por ser B básico, B es intersección finita de subbásicos. Entonces existen $n_1, n_2, \ldots, n_s \in \mathbb{N}$ tal que $B = U_{n_1} \cap U_{n_2} \cap \ldots \cap U_{n_s}$.

Así que $n \in (U_{n_1} \cap U_{n_2} \cap \ldots \cap U_{n_s})$. Esto implica que $n|n_1$, $n|n_2$, ..., $n|n_s$ entonces $x|n_1$, $x|n_2$, ..., $x|n_s$. Entonces $\emptyset \neq \{x\} \subset W \cap \{x\}$. Por tanto $n \in \overline{\{x\}}$.

De manera que hemos probado entonces que $\overline{\{x\}} = \{n \in \mathbb{N} / n$ es múltiplo de $x\}$.

Para probar que $\mathfrak{X}$ es ultraconexo, tomemos dos cerrados no vacíos V y W de $\mathfrak{X}$. Elegimos puntos $x \in V$ y $z \in W$. Entonces $\{n \in \mathbb{N} / n$ es múltiplo de $x\} = \overline{\{x\}} \subset \bar{V} = V$.

Además $\{n \in \mathbb{N} / n$ es múltiplo de $z\} = \overline{\{z\}} \subset W$.

En particular $xz \in V \cap W$.

Esto demuestra que $\mathfrak{X}$ es ultraconexo y, por tanto, conexo y unicoherente.

TOPOLOGIA DE LOS IDEALES PRIMOS

En este ejemplo para cada número primo ρ hacemos:

$M\rho = \{\rho x \in \mathbb{Z} / x \in \mathbb{Z}\}$.

Definimos $\mathfrak{X} = \{M\rho / \rho$ es primo$\}$.

Para cada $x \in \mathbb{Z}$ definimos $Vx = \{M\rho \in \mathfrak{X} / \rho \nmid x \}$.

Definimos también $\beta = \{Vx / x \in \mathbb{Z}\}$.

Dadas $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces $Vn \cap Vm = Vnm$. De manera que β es una base para una Topología en $\mathfrak{X}$.

Además, la intersección de dos básicos cualesquiera es no vacía. Por tanto $\mathfrak{X}$ es hiperconexo y, en consecuencia, conexo y unicoherente.

CAPITULO III

En seguida se presentan espacios que por ser hiperconexos, son conexos y unicoherentes. (Ver Lema 2).

$\mathcal{X}$ siempre denotará un conjunto diferente del vacío.

$\mathcal{X}$ CON LA TOPOLOGIA INDISCRETA

Una base de $\mathcal{X}$ es por supuesto $\beta = \{\mathcal{X}, \emptyset\}$.

Claramente, este espacio es hiperconexo y por lo tanto, es conexo y unicoherente.

TOPOLOGIA DEL PUNTO PARTICULAR

Elegimos un punto p de $\mathcal{X}$. La Topología para este espacio es $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathcal{X} \,/\, p \in U\}$.

Hacemos $\beta = \tau$, una base para esta Topología.

Este espacio es hiperconexo ya que dados cualesquiera U y $V \in \beta$ no vacíos, su intersección es diferente del vacío, por lo tanto es conexo y unicoherente.

Los siguientes ejemplos son casos particulares de este espacio, que dependen del tamaño de $\mathcal{X}$.

a) TOPOLOGIA DEL PUNTO PARTICULAR CON X FINITO.

b) TOPOLOGIA DEL PUNTO PARTICULAR CON X NUMERABLE.

c) TOPOLOGIA DEL PUNTO PARTICULAR CON X NO NUMERABLE.

d) ESPACIO DE SIERPINSKI $X = \{0, 1\}$ DONDE $p = 0$, EN ESTE CASO $\tau = \beta = \{\emptyset, X, \{0\}\}$.

TOPOLOGIA DE LA EXTENSION CERRADA

Elegimos un punto $p \notin X$. Definimos $X^* = X \cup \{p\}$.

La Topología definida para este espacio es la siguiente:

$\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \ / \ U = W \cup \{p\}$ con W abierto de $X\}$.

Hacemos $\beta = \tau$, una base para esta Topología.

Este espacio es hiperconexo, ya que dados cualesquiera dos U, $V \in \beta$ no vacíos, su intersección tiene al menos a p. Por tanto, X es conexo y unicoherente.

TOPOLOGIA DEL COMPLEMENTO FINITO

Para este ejemplo supondremos que X es Infinito.

La Topología definida para este espacio es la siguiente:

$\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \ / \ X - U$ es Finito$\}$.

Hacemos $\beta = \tau$, una base para esa Topología.

Este espacio es hiperconexo ya que dados cualesquiera dos conjuntos U, $V \in \beta$ no vacíos, se tiene que:

$\mathcal{X} - (U \cap V) = (\mathcal{X} - U) \cup (\mathcal{X} - V)$ es finito por ser unión de dos finitos.

Como $\mathcal{X} - (U \cap V) \neq \mathcal{X}$, se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$.

Concluimos entonces que $\mathcal{X}$ es conexo y unicoherente.

Los siguientes ejemplos son casos particulares de este espacio, que dependen del tamaño de $\mathcal{X}$:

a) TOPOLOGIA DEL COMPLEMENTO FINITO CON $\mathcal{X}$ NUMERABLE.

b) TOPOLOGIA DEL COMPLEMENTO FINITO CON $\mathcal{X}$ NO NUMERABLE.

TOPOLOGIA DEL COMPLEMENTO NUMERABLE

En este ejemplo supondremos que $\mathcal{X}$ no es numerable.

La Topología que se define para este espacio es la siguiente $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathcal{X} \ / \ \mathcal{X} - U \text{ es numerable}\}$.

Hacemos $\beta = \tau$, una base para esta Topología.

Este espacio es hiperconexo ya que dados cualesquiera dos conjuntos U y $V \in \beta$ no vacíos, se tiene que:

$\mathcal{X} - (U \cap V) = (\mathcal{X} - U) \cup (\mathcal{X} - V)$ es numerable por ser la unión de dos numerables. Como $\mathcal{X} - (U \cap V) \neq \mathcal{X}$, se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$, de lo que se concluye que $\mathcal{X}$ es conexo y unicoherente.

TOPOLOGIA DOBLE DEL COMPLEMENTO NUMERABLE

En este ejemplo supongamos que $\mathcal{X} = \mathcal{X}^* \times \{0, 1\}$ donde $\mathcal{X}^*$ tiene la Topología del complemento numerable, $\{0, 1\}$ la Topología Indiscreta y $\mathcal{X}$ tiene la Topología del producto.

Entonces la Topología para este espacio es:

$\tau = \{U \subset \mathcal{X} \ / \ U = W \times \{0, 1\}$ con W abierto de $\mathcal{X}^*\}$.

Hacemos $\beta = \tau$, una base para esta Topología.

Este espacio es hiperconexo, ya que dados cualesquiera $(W \times \{0, 1\}) \in \beta$ y $(V \times \{0, 1\}) \in \beta$ no vacíos, su intersección $(W \cap V) \times \{0, 1\}$ es diferente del vacío porque $(W \cap V) \neq \emptyset$. Esto implica que $\mathcal{X}$ es conexo y unicoherente.

TOPOLOGIA DEL COMPLEMENTO COMPACTO.

En el siguiente ejemplo supondremos que $\mathcal{X} = \mathbb{R}$.

La Topología definida para este espacio es la siguiente:

$\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathcal{X} \ / \ \mathcal{X} - U$ es compacto en $\mathbb{R}$ con la topología usual$\}$.

Hacemos $\beta = \tau$, una base para esta Topología.

Este espacio es hiperconexo ya que dados cualesquiera dos conjuntos U y V $\in \beta$ no vacíos, se tiene lo siguiente: $\mathbb{X} - (U \cap V) = (\mathbb{X} - U) \cup (\mathbb{X} - V)$ es compacto por ser la unión de dos compactos.

Como $\mathbb{X} - (U \cap V) \neq \mathbb{X}$, $U \cap V \neq \emptyset$, con lo que concluimos que $\mathbb{X}$ es conexo y unicoherente.

TOPOLOGIA DEL ORDEN DERECHO EN $\mathbb{R}$

En este ejemplo supondremos que $\mathbb{X}$ es linealmente ordenado.

La Topología definida para este espacio es:

$\tau = \{ (a, \rightarrow) \ / \ a \in \mathbb{X} \} \cup \{ \mathbb{X} \}$.

Hacemos $\beta = \tau$, una base para esta Topología.

Este espacio es hiperconexo, ya que dados cualesquiera dos básicos no vacíos $(a, \rightarrow)$, $(b, \rightarrow)$ se tiene que su intersección es igual a $(\text{máx. } \{a, b\}, \rightarrow) \in \beta$ y es diferente del vacío, por lo tanto $\mathbb{X}$ es conexo y unicoherente.

TOPOLOGIA DE LOS INTERVALOS ANIDADOS

En este ejemplo supondremos que $\mathcal{X} = (0, 1)$.

La Topología que se define para este espacio es:

$\tau = \{\emptyset\} \cup \{\mathcal{X}\} \cup \{U_n = (0, 1 - 1/n) \text{ con } n = 2, 3, \ldots\}$.

Hacemos $\beta = \tau$, una base para esta Topología.

Este espacio es hiperconexo ya que dados cualesquiera dos básicos no vacíos $(0, 1 - 1/n)$, $(0, 1 - 1/m)$ se tiene que su intersección es $(0, 1 - 1/\min. \{n, m\}) \in \beta$ y es diferente del vacío, por lo cual $\mathcal{X}$ es conexo y unicoherente.

TOPOLOGIA DE LOS INTERVALOS ENCIMADOS

En el siguiente ejemplo supondremos que $\mathcal{X} = [-1, 1]$.

La Topología definida para este espacio es:

$\tau = \{[-1, b) \text{ con } b > 0, (a, 1] \text{ con } a < 0 \text{ y } (a, b)\}$.

Hacemos $\beta = \tau$, una base para esta Topología.

$\mathcal{X}$ es hiperconexo ya que para cualesquiera U, $V \in \beta$, no vacíos se tiene que en su intersección siempre se encuentra el cero. Por tanto $\mathcal{X}$ es conexo y unicoherente.

TOPOLOGIA DE LOS INTERVALOS TRABADOS

En este ejemplo supondremos que $\mathbb{X} = \mathbb{R}^+ - \mathbb{Z}^+$.

Una base para una topología τ de $\mathbb{X}$ se define como:

$\beta = \{Sn = (0, \frac{1}{n}) \cup (n, n + 1) \text{ con } n \in \mathbb{X}\}$.

$\mathbb{X}$ es hiperconexo ya que para cualesquiera dos básicos $(0, \frac{1}{n}) \cup (n, n + 1) \in \beta$, $(0, \frac{1}{m}) \cup (m, m + 1) \in \beta$, se tiene que su intersección es igual a:

$(0, \frac{1}{\text{máx.}\{n, m\}}) \cup (\text{máx} \{n, m\}, \text{mín} \{n, m\} + 1)$, lo cual es diferente del vacío, por tanto $\mathbb{X}$ es conexo y unicoherente.

CAPITULO IV

En este Capítulo presentamos una serie de espacios totalmente ordenados que tienen la propiedad del supremo y del punto intermedio y por lo tanto, por Teorema 2, son conexos y unicoherentes.

ORDEN LEXICOGRAFICO EN EL CUADRADO UNITARIO

En este ejemplo $\mathscr{X} = [0, 1] \times [0, 1]$ con el Orden Lexicográfico. Recordemos que el Orden Lexicográfico se define de la siguiente manera: $(a, b) < (c, d)$ si y sólo si $(a < c)$ o $(a = c$ y $b < d)$.

En seguida demostraremos que $\mathscr{X}$ tiene la Propiedad del Supremo y del Punto Intermedio.

a) $\mathscr{X}$ tiene la Propiedad del Supremo.

Tomemos $A \subset \mathscr{X}$, $A \neq \emptyset$ y A acotado superiormente.

Definimos $S = \{x \in \mathscr{X} \,/\, (x, y) \in A$ para alguna $y \in [0, 1]\}$.

Como A es diferente del vacío, podemos tomar un punto $(a, b) \in A$, entonces $a \in S$, por tanto $S \neq \emptyset$.

Como A es acotado superiormente podemos tomar una cota superior (u, v) de A. Demostraremos que u es cota superior de S.

Dada $s \in S$, existe $y \in [0, 1]$ tal que si $(s, y) \in A$, entonces $(s, y) \leq (u, v)$.

Así que $(s < u)$ o $(s = u$ y $y < v)$. En ambos casos $s \leq u$. De modo que u es cota superior de S.

Por tanto S tiene Supremo.

Sea α = Supremo de S.

Como $S \subset [0, 1]$ tenemos que $\alpha \in [0, 1]$

Para mostrar que A tiene Supremo, analizaremos dos casos:

1) $A \cap \{\{\alpha\} \times [0, 1]\} = \emptyset$.

Aseguramos que $(\alpha, 0)$ es el Supremo de A.

Tomemos un punto $(a_1, a_2) \in A$ y supongamos que $(\alpha, 0) < (a_1, a_2)$.

Notemos que $a_1 \in S$. Así que $a_1 \leq \alpha$.

Podemos suponer entonces que $\alpha = a_1$ y $0 < a_2$. De modo que $(a_1, a_2) \in A \cap (\{\alpha\} \times [0, 1])$. Esta contradicción demuestra que $(\alpha, 0)$ es cota superior de A.

Tomemos ahora (m, n) una cota superior de A.

Supongamos que $(m, n) < (\alpha, 0)$.

Si $m < \alpha$ entonces m no es cota superior de S. De modo que existe un punto $s_1 \in S$ tal que $m < s_1 < \alpha$.

También existe $a_0 \in [0, 1]$ tal que $(s_1, a_0) \in A$. Entonces $(m, n) < (s_1, a_0)$. Esto es absurdo pues (m, n) es cota superior de A.

Entonces deberíamos tener que $m = \alpha$ y $n < 0$. Pero esto también es absurdo porque $0 \leq n \leq 1$. Por tanto se tiene $(\alpha, 0) \leq (m, n)$. De manera que $(\alpha, 0)$ es el Supremo de A.

2) $A \cap (\{\alpha\} \times [0, 1]) \neq \emptyset$.

Elegimos un punto $(\alpha, yo) \in A \cap (\{\alpha\} \times [0, 1])$.

Definimos $C = \{y \in [0, 1] / (\alpha, y) \in A\}$.

Entonces $yo \in C$, así que $C \neq \emptyset$. Por tanto existe β Supremo de C. Aseguramos que (α, β) es el Supremo de A.

Tomemos un punto $(a_1, a_2) \in A$. Entonces $a_1 \in S$, así que $a_1 \leq \alpha$. Si $a_1 < \alpha$ entonces directamente se tiene que $(a_1, a_2) \leq (\alpha, \beta)$.

Si $a_1 = \alpha$ se tiene que $a_2 \in C$, entonces $a_2 \leq \beta$ y $(a_1, a_2) \in (\alpha, \beta)$.

Si $a_1 = \alpha$ se tiene que $a_2 \in C$, entonces $a_2 \leq \beta$ y $(a_1, a_2) \leq (\alpha, \beta)$. Por tanto (α, β) es cota superior de A.

Ahora tomemos (m, n) una cota superior de A.

Entonces $(\alpha, yo) \leq (m, n)$. Así que $\alpha \leq m$.

Supongamos que $(m, n) < (\alpha, \beta)$ entonces $m \leq \alpha$, así que $m = \alpha$. De manera que $n < \beta$ y entonces existe $y \in C$ tal que $n < y < \beta$. De modo que $(m, n) < (\alpha, y)$ y $(\alpha, y) \in A$.

Esta contradicción demuestra que $(\alpha, \beta) \leq (m, n)$.

Por tanto (α, β) es el Supremo de A.

En conclusión $\mathcal{X}$ tiene la propiedad del supremo.

b) $\mathcal{X}$ tiene la propiedad del punto intermedio.

Tomemos puntos (x, y) y $(z, w) \in \mathcal{X}$ tales que $(x, y) < (z, w)$.

Analicemos dos casos:

1) Si $x = z$. Entonces $y < w$.

Escogemos un punto $b \in (y, w)$.

Entonces $(x, y) < (x, b) < (x, w)$.

2) Si $x < z$.

Escogemos un punto $b \in (x, z)$.

Entonces $x < b < z$. Así que $(x, y) < (b, y) < (z, w)$.

Por tanto $\mathcal{X}$ tiene la Propiedad del Punto Intermedio.

Con esto concluimos que $\mathcal{X}$ es conexo y unicoherente.

LINEA LARGA EXTENDIDA

En este ejemplo $\mathcal{X} = [0, \Omega] \times [0, 1)$ con el Orden Lexicográfico. En seguida demostraremos que $\mathcal{X}$ tiene la Propiedad del Supremo y del Punto Intermedio.

a) $\mathcal{X}$ tiene la Propiedad del Supremo.

Tomemos $A \subset \mathcal{X}$, $A \neq \emptyset$ y A acotado superiormente.

Definimos $S = \{x \in [0, \Omega] \ / \ (x, y) \in A$ para alguna $y \in [0, 1)\}$.

Como A es diferente del vacío, podemos tomar un punto $(a, b) \in A$, entonces $a \in S$, por tanto $S \neq \emptyset$.

Por ser A acotado superiormente podemos tomar una cota superior (u, v) de A.

Demostraremos que u es cota superior de S.

Dada $s \in S$, existe $y \in [0, 1)$ tal que $(s, y) \in A$ entonces $(s, y) \leq (u, v)$.

Así que $(s < u)$ o $(s = u$ y $y < v)$. En ambos casos $s \leq u$.

De modo que u es cota superior de S.

Por tanto S tiene supremo.

Sea $\alpha =$ sup. S.

Para mostrar que A tiene supremo, analizaremos dos casos:

1) $A \cap \{ \{\alpha\} \times [0, 1) \} = \emptyset$.

Aseguramos que $(\alpha, 0)$ es el supremo de A.

Tomemos un punto $(a_1, a_2) \in A$ y supongamos que $(\alpha, o) < (a_1, a_2)$.

Notemos que $a_1 \in S$, así que $a_1 \leq \alpha$.

Podemos suponer entonces que $\alpha = a_1$ y $0 < a_2$.

De modo que $(a_1, a_2) \in A \cap (\{\alpha\} \times [0, 1))$.

Esta contradicción demuestra que $(\alpha, 0)$ es cota superior de A.

Veamos ahora que si (m, n) es cota superior de A entonces $(\alpha, 0) < (m, n)$.

Supongamos que $(m, n) < (\alpha, 0)$.

Si $m < \alpha$, entonces m no es cota superior de S. De modo que existe un punto $s_1 \in S$ tal que $m < s_1 < \alpha$, también existe $a_0 \in [0, 1)$ tal que $(s_1, a_0) \in A$.

Entonces $(m, n) < (s_1, a_0)$. Esto es absurdo pues (m,n) es cota superior de A.

Entonces deberíamos tener que $m = \alpha$ y $n < 0$. Pero esto también es absurdo porque $0 \leq n \leq 1$.

Por tanto $(\alpha, 0) \leq (m, n)$.

De manera que $(\alpha, 0)$ es el supremo de A.

2) $A \cap (\{\alpha\} \times [0, 1)) \neq \emptyset$.

Elegimos un punto $(\alpha, y_0) \in A \cap (\{\alpha\} \times [0, 1))$.

Definimos $C = \{y \in [0, 1) \ / \ (\alpha, y) \in A\}$.

Entonces $y_0 \in C$, por tanto $C \neq \emptyset$.

A continuación analizaremos dos casos para C.

a) Supongamos que C no tiene cotas superiores.

Aseguramos que $(\alpha+1, 0)$ es el supremo de A.

Tomemos un punto $(a_1, a_2) \in A$. Entonces $a_1 \in S$, así que $a_1 \leq \alpha < \alpha+1$. De manera que $(a_1, a_2) < (\alpha+1, 0)$.

Por tanto $(\alpha+1, 0)$ es cota superior de A.

Ahora tomemos (m, n) una cota superior de A.

Entonces $(\alpha, y_0) \leq (m, n)$. Así que $\alpha \leq m$.

Supongamos que $(m, n) < (\alpha+1, 0)$.

Si $m < \alpha+1$ entonces $m \leq \alpha$, así que $m = \alpha$.

Entonces $(m, n) = (\alpha, n)$.

Como $(\alpha, y) \leq (\alpha, n)$ para toda $(\alpha, y) \in A$, entonces $y \leq n$.

Esto es absurdo porque C no tiene cotas superiores.

La otra posibilidad es que $m = \alpha+1$ y $n < 0$, que claramente es absurda. Por tanto $(\alpha+1, 0) \leq (m, n)$.

De manera que $(\alpha+1, 0)$ es el supremo de A.

b) C tiene supremo. Sea β el supremo de C.

Aseguramos que (α, β) es el supremo de A.

Tomemos un punto $(a_1, a_2) \in A$. Entonces $a_1 \in S$, así que $a_1 \leq \alpha$.

Si $a_1 < \alpha$ entonces directamente se tiene que $(a_1, a_2) \leq (\alpha, \beta)$.

Si $a_1 = \alpha$ se tiene que $a_2 \in C$, entonces $a_2 \leq \beta$ y $(a_1, a_2) \leq (\alpha, \beta)$.

Por tanto (α, β) es cota superior de A.

Ahora tomemos (m, n) una cota superior de A. Entonces $(\alpha, y_0) \leq (m, n)$. Así que $\alpha \leq m$. Supongamos que $(m, n) < (\alpha, \beta)$ entonces $m \leq \alpha$, así que $m = \alpha$.

De manera que $n < \beta$ y entonces existe $y \in C$ tal que $n < y < \beta$.

De modo que $(m, n) < (\alpha, y)$ y $(\alpha, y) \in A$.

Esta contradicción demuestra que $(\alpha, \beta) \leq (m, n)$.

Por tanto (α, β) es el supremo de A.

De lo anterior se concluye que $\mathcal{X}$ tiene la propiedad del supremo.

b) $\mathcal{X}$ tiene la propiedad del punto intermedio.

Tomemos puntos (x, y) y $(z, w) \in \mathcal{X}$ tales que $(x, y) < (z, w)$.

Analicemos dos casos.

1) Si $x = z$. Entonces $y < w$.

Escogemos un punto $b \in (y, w)$.

Entonces $(x, y) < (x, b) < (x, w)$.

2) Si $x < z$.

Escogemos un punto $b \in (x, z)$.

Entonces $x < b < z$. Así que $(x, y) < (b, y) < (z, w)$.

Por tanto $\mathcal{X}$ tiene la Propiedad del Punto Intermedio.

De aquí concluimos que $\mathcal{X}$ es conexo y unicoherente.

La Línea Larga es un caso particular de este ejemplo y se describe en seguida.

Consideremos a $\mathbb{X}^* = [0, \Omega) \times [0, 1)$.

Probaremos que $[0, \Omega) \times [0, 1)$ es un intervalo de $[0, \Omega] \times [0, 1)$.

Tomamos dos puntos $(a, b), (c, d) \in [0, \Omega) \times [0, 1)$ y escogemos $(m, n) \in [0, \Omega] \times [0, 1)$ tales que $(a, b) \leq (m, n) \leq (c, d)$.

Esto implica que $0 \leq m \leq \Omega$ y $0 \leq n < 1$.

Por tanto $(m, n) \in [0, \Omega) \times [0, 1)$.

Por el Lema 3, $\mathbb{X}^*$ es conexo, entonces tiene la propiedad del supremo y del punto intermedio.

Por tanto $\mathbb{X}^*$ es unicoherente.

CAPITULO V

En este capítulo se muestran los espacios que son extensiones perfectas (Teorema 3) y que, por tanto, son conexos y unicoherentes.

TOPOLOGIA DE MITADES DE DISCOS

En este ejemplo hacemos $\mathfrak{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 0\}$.

Sean $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 0\}$ y $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0\}$.

Para $p \in P$ y $\epsilon > 0$, con $\epsilon < p_2$ (donde $p = (p_1, p_2)$), definimos:

$B_\epsilon(p) = \{x \in \mathfrak{X} \ / \ d(x, p) < \epsilon\}$.

Y para $p \in L$ y $\epsilon > 0$, hacemos:

$R_\epsilon(p) = (B_\epsilon(p) \cap P) \cup \{p\}$.

Tomamos como base para una Topología τ de $\mathfrak{X}$ a la siguiente:

$\beta = \{B_\epsilon(p) \ / \ p \in P \text{ y } 0 < \epsilon < p_2\} \cup \{R_\epsilon(p) \ / \ \epsilon > 0 \text{ y } p \in L\}$.

Ahora probaremos que $\mathfrak{X}$ y P cumplen las hipótesis del Teorema 3. Notemos que P como subespacio de $\mathfrak{X}$ tiene la misma topología que como subespacio de $\mathbb{R}^2$, por lo que P es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. De manera que P es conexo, localmente conexo y unicoherente. Claramente P es denso en $\mathfrak{X}$, así que $\mathfrak{X}$ es también conexo. Observemos que $B_\epsilon(p)$ y $R_\epsilon(p)$ son conexos en $\mathfrak{X}$. Así que β es una base de conexos para $\mathfrak{X}$, entonces $\mathfrak{X}$ es localmente conexo.

Notemos que además, para todo $U \in \beta$, $U \cap P$ es conexo.

De manera que todo punto de $\mathfrak{X}$ tiene una base de vecindades que intersectan a P en un conjunto conexo.

Por tanto, P y $\mathfrak{X}$ cumplen las hipótesis del Teorema 3, así que $\mathfrak{X}$ es unicoherente.

Los siguientes ejemplos se demuestran de manera análoga:

1) TOPOLOGIA METRIZABLE DEL DISCO TANGENTE.

Definimos $\mathfrak{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0\} \cup S$ donde S es un conjunto numerable del eje "X".

Tomamos como base para una Topología τ de $\mathfrak{X}$ a la siguiente:

$$\beta = \{B_\epsilon(p) \ / \ p \in P \text{ y } 0 < \epsilon < p_2 \text{ donde } p = (p_2, p_2)\}$$
$$\cup \{R_\epsilon(p) \ / \ \epsilon > 0 \text{ y } p \in S\}.$$

2) TOPOLOGIA DEL DISCO TANGENTE DE NIEMYTZKI.

En este ejemplo definimos $\mathfrak{X} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 0\}$.

Sean $L = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 0 \}$ y $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0\}$.

Definimos para $p \in P$ y $\epsilon > 0$, con $\epsilon < p_2$ (donde $p = (p_1, p_2)$):

$B_\epsilon(p) = \{ x \in \mathfrak{X} \ / \ d(x, p) < \epsilon \}$.

Y para $x \in L$ y $\epsilon > 0$ hacemos:

$B'_\epsilon(x) = \{x\} \cup B_\epsilon((x_1, \epsilon))$ (donde $x = (x_1, 0)$.

Tomamos como base para una topología τ de $\mathfrak{X}$ a la siguiente:

$$\beta = \{B_\epsilon(p) \ / \ p \in P \text{ y } 0 < \epsilon < p_2\} \cup \{B'_\epsilon(x) \ / \ x \in L \text{ y } \epsilon > 0\}.$$

2) CUADRADO SIMPLIFICADO DE ARENS.

En este ejemplo hacemos:

$\mathbb{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \cup \{(0, 0), (1, 0)\}$.

Sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

Para $p \in S$ y $\in > 0$ definimos:

$B_{\in}(p) = \{x \in \mathbb{X} / d(x, p) < \in\}$.

Y para $n \in \mathbb{R}$ hacemos:

$U_n(0, 0) = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) \in S / 0 < x < \frac{1}{2}, 0 < y < \frac{1}{n}\}$.

$U_n(1, 0) = \{(1, 0)\} \cup \{(x, y) \in S / \frac{1}{2} < x < 1, 0 < y < \frac{1}{n}\}$.

Tomamos como base para una topología τ de $\mathbb{X}$ a la siguiente:

$\beta = \{B_{\in}(p) / p \in S\} \cup \{U_n(0, 0) / n \in \mathbb{R}\} \cup \{U_n(1,0) / n \in \mathbb{R}\}$.

CAPITULO VI

En este capítulo se muestran los espacios que por ser normales y contraibles son unicoherentes. Este resultado se sigue de los Teoremas 2.3 y 2.4 de [1].

ESPACIO DE HELLY

En este ejemplo $I^I = \{f : I \to I \ / \ f$ es función$\}$ con la topología producto, es decir, con la que tiene como base a:

$\beta = \{U = U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2} \times \ldots \times U_{\alpha_n} \times \prod \{I_\beta \ / \ \beta \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ donde U_{α_i} es un abierto de $I_{\alpha_i}\}$.

Hacemos $\mathcal{X} = \{$funciones crecientes de $I \to I\}$ con la topología inducida.

En seguida mostraremos que $(I^I - \mathcal{X})$ es abierto.

Tomemos una función f de $(I^I - \mathcal{X})$. Como $f \in (I^I - \mathcal{X})$ entonces f no es creciente. Así que existen puntos $x, y \in I$ tales que $x < y$ pero $f(x) > f(y)$.

Tomemos $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} |f(x) - f(y)|$ y hacemos $U_x = (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$ y $U_y = (f(y)-\varepsilon, f(y)+\varepsilon)$.

Sea $g \in U_x \times U_y \times \prod \{ I_\beta \ / \ \beta \in I - \{x, y\}\}$, entonces $g(x) \in U_x$ y $g(y) \in U_y$.

Entonces $g(y) < f(y) + \varepsilon < f(x) - \varepsilon < g(x)$. Así que $g(y) < g(x)$.

Por tanto g no es creciente.

Entonces $U_x \times U_y \times \Pi\{I_\beta / \beta \in I - \{x, y\}\}$ es una vecindad de f ajena a $\mathcal{X}$. Por tanto $\mathcal{X}$ es cerrado.

Como I^I es normal entonces $\mathcal{X}$ es normal.

Ahora probaremos que $\mathcal{X}$ es contraible.

Definimos $F : \mathcal{X} \times I \to \mathcal{X}$ por:

$(F(f,t))\ (s) = tf(s) + (1-t)s.$

$(F(f,0))\ (s) = s$, así que $F(f, 0)$ es la identidad en I.

$(F(f,1))\ (s) = f(s)$ de modo que $F(f,1) = f$ para toda $f \in \mathcal{X}$.

En seguida probaremos que $F(f,t)$ es creciente para toda $f \in \mathcal{X}$ y toda $t \in [0, 1]$.

Tomemos $x, y \in \mathcal{X}$ tales que $x < y$. Como f es creciente se tiene que $f(x) \leq f(y)$. Además $t, 1-t \geq 0$.

De manera que $tf(x) + (1-t)x \leq tf(y) + (1-t)y$. Es decir $(F(f,t))\ (x) \leq (F(f,t))\ (y)$.

Por tanto $F(f,t)$ está efectivamente en $\mathcal{X}$ para todas f y t.

Como $F : \mathcal{X} \times I \to \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ tiene la topología inducida del producto, para probar que F es continua, basta que mostremos que, para toda $\beta \in I$, $\Pi_\beta o F : \mathcal{X} \times I \to I_\beta$ es continua.

Como $(\Pi_\beta o F)\ (f, t) = \Pi_\beta(F(f, t)) = (F(f, t))\ (\beta)$

$$= tf(\beta) + (1-t)\beta = t\Pi_\beta(f) + (1-t)\beta$$

tenemos que $\Pi_\beta o F : \mathcal{X} \times I \to I_\beta$ es continua. Por tanto F es continua.

De manera que $\mathcal{X}$ normal y contraible y por tanto unicoherente.

DOBLE RECTA REAL

En este ejemplo hacemos $\mathcal{X} = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$.

Tomemos como Topología a la siguiente:

$\tau = \{B \times \{0, 1\}$ / B es abierto de $\mathbb{R}$ con la topología usual$\}$.

Observemos que los cerrados de $\mathcal{X}$ son de la forma $H \times \{0, 1\}$ con H cerrado de $\mathbb{R}$.

A continuación demostraremos que A es cerrado y conexo de X si y sólo si $A = H \times \{0, 1\}$ con H cerrado y conexo de $\mathbb{R}$.

Supongamos que $A \subset \mathcal{X}$ es cerrado y conexo, entonces $A = H \times \{0, 1\}$ con H cerrado de $\mathbb{R}$.

Ahora, supongamos que H no es conexo.

Así que existen cerrados, ajenos, no vacíos M, N de H tales que $M \cup N = H$.

De manera que $A = (M \cup N) \times \{0, 1\} = M \times \{0, 1\} \cup N \times \{0, 1\}$ es una separación de A, lo cual es absurdo. Por tanto H es conexo.

En forma similar se prueba la necesidad.

Por tanto los cerrados conexos de $\mathcal{X}$ son de la forma $H \times \{0, 1\}$ con H intervalo.

Dados dos cerrados conexos $A = L \times \{0, 1\}$ y $B = M \times \{0, 1\}$, con L y M intervalos, entonces $A \cap B = (L \cap M) \times \{0, 1\}$ donde $L \cap M$ es un intervalo.

Así que $A \cap B$ es conexo. De aquí se sigue que $\mathcal{X}$ es unicoherente.

EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES CONTINUAS CON LA TOPOLOGIA DE LA CONVERGENCIA UNIFORME

En este ejemplo hacemos $\mathscr{X} = C[0,1] = \{f:[0,\ 1] \to \mathbb{R}\ /f$ es continua$\}$ con la distancia definida de la siguiente forma:

$d(f,\ g) = \sup_{t \in I} |f(t) - g(t)|$.

Observemos que cada bola $B_{\epsilon}(fo)$ es convexa, ya que si tomamos $g,\ h \in B_{\epsilon}(fo)$ y la función $\phi:[0,\ 1] \to C[0,\ 1]$ definida por $\phi(t) = tg + (1-t)h$ obtenemos una trayectoria de g a h.

De aquí que $C[0,\ 1]$ es arco conexo y por tanto conexo.

En seguida mostraremos que $\mathscr{X}$ es contraible.

Definimos $F:\mathscr{X} \times I \to \mathscr{X}$ por : $(F(f,t))\ (s) = tf(s)$.

Entonces $(F(f,0))\ (s) = 0$ y $(F(f,1))\ (s) = f(s)$ de modo que $F(f,1) = f$ para toda $f \in \mathscr{X}$.

Ahora probaremos que $F(f,t)$ es continua para toda $f \in \mathscr{X}$ y toda $t \in [0,\ 1]$.

Escogemos $(f,\ t) \in \mathscr{X} \times I$ y tomamos A abierto en $\mathscr{X}$ tal que $F(f,\ t) \in A$.

Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{\epsilon}(F(f,\ t)) \subset A$.

Proponemos $B = B_{\frac{\epsilon}{2}}(f) \times (t - \frac{\epsilon}{2M},\ t + \frac{\epsilon}{2M})$ donde $M > 0$ es cota de f.

Es claro que $(f,\ t) \in B$.

Tomemos $(g,r) \in B$.

Demostraremos que $\sup |(F(g,r))(s) - (F(f,t))(s)| \leq \epsilon$ para todo $s \in I$, esto es, que $\sup |rg(s) - tf(s)| \leq \epsilon$.

Como
$$
\begin{aligned}
|rg(s) - tf(s)| &= |rg(s) - tf(s) - rf(s) + rf(s)| \\
&= |(-t + r)\, f(s) + r\,(g(s) - f(s))| \\
&\leq |(-t + r)\, f(s)| + |r(g(s) - f(s))| \\
&= |(-t + r)|\, |f(s)| + r\,|g(s) - f(s)| \\
&= |t - r|\, |f(s)| + r\,|f(s) - g(s)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2\,(M)}\,(M) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}
$$

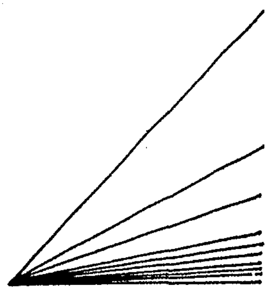
Entonces $\sup |rg(s) - tf(s)| \leq \epsilon$.

Por tanto F es continua.

En conclusión $\mathcal{X}$ es un espacio contraible y normal y, por tanto, unicoherente.

ESCOBA CERRADA

Para $n \in \mathbb{N}$ definimos: $L_n = \left\{(t, \frac{1}{n}t) \in \mathbb{R}^2 \ / \ t \in [0, 1]\right\}$ y hacemos $\mathcal{X} = \bigcup \left\{L_n \ / \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \in [0, 1]\right\}$.



Claramente $\mathcal{X}$ es conexo.

En seguida demostraremos que $\mathcal{X}$ es contraible.

Definimos $F : \mathcal{X} \times I \to \mathcal{X}$ por: $F((x, y), t) = ((1 - t)x, (1 - t)y)$.

Entonces $F((x, y), 0) = (x, y)$, $F((x, y), 1) = (0, 0)$ y F es continua.

Así que $\mathcal{X}$ es contraible y, por tanto, unicoherente.

TOPOLOGIA EUCLIDIANA

En este ejemplo hacemos $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ con la topología usual, es decir la que tiene como básicos a los conjuntos de la forma:

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b$ con $a, b \in \mathbb{R}\}$.

Claramente $\mathcal{X}$ es normal.

Además es contraible ya que si definimos $F : \mathcal{X} \times I \to \mathcal{X}$ por:

$(F(x, y), t) = ((1-t)x, (1-t)y)$ tenemos que se cumple lo siguiente

$F((x, y), 0) = (x, y)$ y $F((x, y), 1) = (0, 0)$.

Como F es continua entonces $\mathcal{X}$ también es contraible.

Por lo tanto $\mathcal{X}$ es unicoherente.

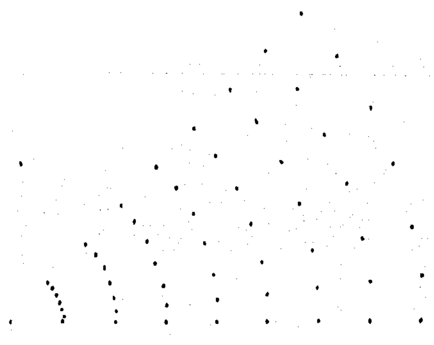
CAPITULO VII

Aquí se presentan espacios topológicos que no están clasificados en ninguno de los anteriores capítulos.

LA ESCOBA DE LOS NUMEROS ENTEROS

En este ejemplo definimos:

$\mathbb{X} = \{n(\cos \frac{1}{m}, \text{ sen } \frac{1}{m}) \ / \ n, \ m \in \mathbb{N}\} \cup \{(n, \ 0) \ / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, \ 0)\}.$



Definimos una base β para una topología τ de $\mathbb{X}$ dada por:

$\beta = \{(a, \ \infty) \times V) \cap \mathbb{X} \ / \ a \in \mathbb{R}, \ a \geq 0 \text{ y } V \text{ abierto de } \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{X}\}.$

Observemos que el único abierto que contiene al origen es $\mathbb{X}$.

Por tanto $\mathbb{X}$ es conexo y unicoherente (Lema 5).

CONJUNTOS CONEXOS DE BERNSTEIN

En este ejemplo se construyen, usando inducción transfinita, un par de subconjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^2$ tales que ambos intersectan a todo subconjunto con más de un punto conexo y cerrado de $\mathbb{R}^2$.

Además $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = \mathbb{R}^2$.

No vamos a construir estos espacios, sólo vamos a probar que A y B tienen que ser conexos y multicoherentes.

Primero veamos que A es conexo. La demostración para ver la conexidad de B es similar.

Supongamos que A no es conexo.

Entonces existen abiertos ajenos U, V de $\mathbb{R}^2$ tales que $A \subset U \cup B$, $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$ y $A \cap U \cap V = \emptyset$.

Definimos $F = \mathbb{R}^2 - (U \cup V)$.

Como $U \cup V$ es abierto entonces F es cerrado en $\mathbb{R}^2$.

Por ser F cerrado, sus componentes son cerradas.

Además, como F es ajeno a A tenemos que las componentes de F están formadas por un solo punto.

Entonces F es totalmente disconexo.

Por el Lema 6 se tiene que F es "0" es dimensional.

Esto implica que $\mathbb{R}^2 - F$ es conexo [6], pero $\mathbb{R}^2 - F = U \cup V$ es una separación. Este absurdo prueba que A es conexo.

Ahora mostraremos que A es multicoherente.

Definimos:

$$H^{+} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y \geq 0\}$$

$$H^{-} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y \leq 0\}$$

Hacemos:

$$H = A \cap H^{+} \quad y \quad K = A \cap H^{-}$$

Notemos que $H \cup K = A$, que H, K son cerrados conexos de A y que

$$\begin{aligned} H \cap K &= (A \cap H^{+}) \cap (A \cap H^{-}) \\ &= A \cap (H^{+} \cap H^{-}) \\ &= A \cap (\text{eje real}) \end{aligned}$$

Si existiera una componente M de $A \cap$ (eje real) con más de un punto, entonces M sería un intervalo no degenerado.

Así que $\emptyset \neq M \cap B \subset A \cap B$. Este absurdo prueba que $A \cap$ (eje real) es totalmente disconexo, además $A \cap$ (eje real) no puede ser un solo punto pues A intersecta a todo intervalo no degenerado del eje real.

Por tanto A es multicoherente.

Similarmente se demuestra que B es multicoherente.

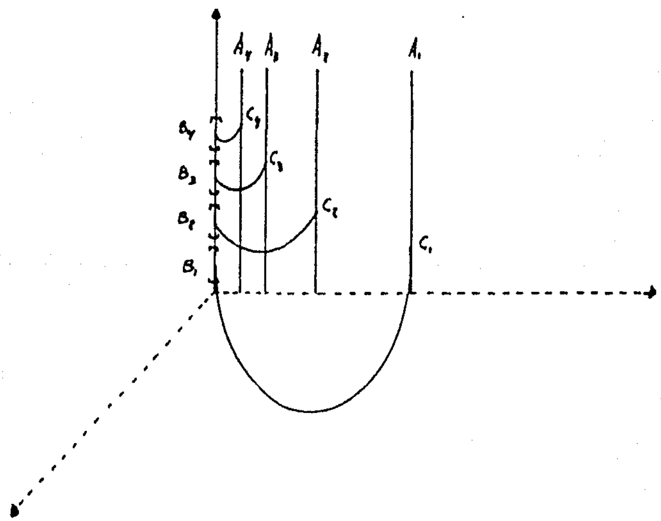
LA JAULA INFINITA

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$An = \{(\tfrac{1}{n},\ y,\ 0) \in \mathbb{R}^3 \ /\ y \geq 0\}$$

$$Bn = \{(0,\ y,\ 0) \in \mathbb{R}^3 \ /\ 2n - \tfrac{1}{2} \leq y \leq 2n + \tfrac{1}{2}\}$$

$$Cn = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ 0 \leq x \leq \tfrac{1}{n},\ y = 2n,\ z = x(\tfrac{1}{n} - x)\}$$



Hacemos $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (An \cup Bn \cup Cn)$ con la topología euclidiana inducida. Sea $Dn = An \cup Bn \cup Cn$.

Observemos que $\{Dn\}$ es una colección de subconjuntos cerrados conexos de X ajenos dos a dos.

Veamos en seguida que $\mathbb{X}$ es conexo.

Supongamos que no lo es, entonces existen Y, Z ajenos, no vacíos tales que $Y \cup Z = \mathbb{X}$.

Como $A_n = \{(\frac{1}{n}, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y \geq 0\}$ y la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito, entonces todos los puntos del eje "Y" están en la cerradura de la unión de los A_n's.

Notemos además que, como A_n es conexo para cada n, $A_n \subset Y$ o $A_n \subset Z$.

Supongamos, por ejemplo, que Y tiene un número infinito de A_n's.

Entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset (\overline{\bigcup \{A_k \ / \ A_k \subset Y\})} \subset \overline{Y} = Y$.

Dada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_n \cup B_n \cup C_n$ es conexo y $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m \subset Y$ entonces $A_n \cup B_n \cup C_n \subset Y$.

De manera que $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n \cup C_n)$.

Así que $Y = \mathbb{X}$ y $Z = \emptyset$. Este absurdo prueba que $\mathbb{X}$ es conexo.

Ahora probaremos que $\mathbb{X}$ es multicoherente.

Definimos:

$$A = (\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n} \cup B_{2n} \cup C_{2n}))} = (\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{2n})} = (\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{2n}) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$$

$$B = (\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n+1} \cup B_{2n+1} \cup C_{2n+1}))} = (\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{2n+1})}$$

$$= (\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{2n+1}) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$$

Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{2n}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{2n+1}$ son conexos y $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ está en la cerradura de ambos, entonces A y B son conexos.

Además, claramente A y B son cerrados y $A \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ no es conexo.

Por tanto $\mathfrak{X}$ es multicoherente.

DISCO UNITARIO SIN SU CENTRO

En este ejemplo hacemos $\mathfrak{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1, \ (x,y) \neq (0,0)\}$.
Para $0 \leq \phi \leq 2\Pi$ y $0 < a < b < 1$ definimos:

$A(\phi, a, b) = \{t(\cos \phi, \operatorname{sen} \phi) \in \mathbb{R}^2 \ / \ t \in (a, b)\}$.

Una base β para una topología τ de $\mathfrak{X}$ es la siguiente:

$\beta = \{U \ / \ U = V \cap \mathfrak{X}$ con V abierto de $\mathbb{R}^2\}$

$\quad \cup \{A(\phi, a, b) \ / \ 0 \leq \phi \leq 2\Pi$ y $0 < a < b < 1\}$.

En seguida mostraremos que $\mathfrak{X}$ es conexo.

Como todos los radios contenidos en el disco unitario agujerado son homeomorfos al $(0, 1]$, entonces son conexos y además intersectan a la circunferencia, que es conexa por tener la topología usual, entonces $\mathfrak{X}$ es conexo.

Ahora veamos que $\mathfrak{X}$ es multicoherente.

Definimos $A = \{(x, y) \in \mathfrak{X} \ / \ y \geq 0\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathfrak{X} \ / \ y \leq 0\}$.

Claramente se observa que A y B son cerrados conexos, $A \cup B = \mathfrak{X}$ y que $A \cap B = \{(x, y) \in \mathfrak{X} \ / \ y = 0\}$

$$= \{(x, 0) \in \mathfrak{X} \ / \ x < 0\} \cup \{(x, 0) \in \mathfrak{X} \ / \ x > 0\}$$

$$= [-1, 0) \cup (0, 1].$$

Como $A \cap B$ tiene la topología usual de la recta y es disconexo, entonces $\mathfrak{X}$ es multicoherente.

EXTENSION RACIONAL INDISCRETA DE $\mathbb{R}$

En este ejemplo $\mathbb{X} = \mathbb{R}$.

Denotemos por τ a la Topología Euclidiana.

Fijemos $D \subset \mathbb{X}$ tal que D y $(\mathbb{X} - D)$ son densos en $\mathbb{X}$.

Definimos la extensión indiscreta de τ como:

$\tau^* = \{V \cup (D \cap U) \ / \ U \text{ y } V \in \tau\}$

Y definimos la extensión puntual τ' de τ a la Topología que tiene como base a:

$\{\{x\} \cup (D \cap U) \ / \ x \in \mathbb{R}, \ \ U \in \tau, \ x \in U \text{ y } U \neq \emptyset\}$.Es fácil probar que $\tau \subset \tau^* \subset \tau'$.

A continuación demostraremos que si $Z \in \tau'$ entonces $\bar{Z}^{\tau} = \bar{Z}^{\tau'}$.

Tomemos un punto $p \in \bar{Z}^{\tau}$ entonces todo abierto de τ que contiene a p intersecta a Z.

Ahora tomemos un abierto $W \in \tau'$ que contenga a p.

Entonces existe un básico $A = \{x\} \cup (D \cap U)$ con $x \in U$ y $U \in \tau$, tal que $p \in A \subset W$. Entonces $p \in U$.

Como $U \in \tau$ y contiene a p, se tiene que $U \cap Z \neq \emptyset$.

Además como $\tau \subset \tau'$ se tiene que $U \in \tau'$ y $Z \in \tau'$, entonces $(U \cap Z) \in \tau'$. Así que existe un básico $B = \{y\} \cup (D \cap V)$ de τ' no vacío tal que $B \subset U \cap Z$.

Entonces $\emptyset \neq D \cap V \subset U \cap Z \cap D \subset W \cap Z$. De manera que $W \cap Z \neq \emptyset$. Así que $x \in \bar{Z}^{\tau'}$. Por tanto $\bar{Z}^{\tau} \subset \bar{Z}^{\tau'}$.

Ahora veamos que $\bar{Z}^{\tau'} \subset \bar{Z}^{\tau}$.

Como $\bar{Z}^{\tau}$ es un conjunto cerrado en τ y $\tau \subset \tau'$ entonces $\bar{Z}^{\tau}$ es un conjunto cerrado en τ' que contiene a Z. De modo que $\bar{Z}^{\tau'} \subset \bar{Z}^{\tau}$.

Esto termina la prueba de que $\bar{Z}^{\tau'} = \bar{Z}^{\tau}$ para todo $Z \in \tau'$.

En particular, cuando $Z \in \tau$, también tenemos que $\bar{Z}^{\tau'} = \bar{Z}^{\tau}$ porque $\tau \subset \tau'$.

En seguida demostraremos que todo intervalo abierto es conexo en τ'.

Tomemos un intervalo abierto I y supongamos que I no es conexo en τ'.

Como $I \in \tau'$, entonces existen dos conjuntos abiertos, ajenos no vacíos A y B en τ' tales que $I = A \cup B$.

De modo que $\bar{A}^{\tau'} \subset (X - B)$ entonces $\bar{A}^{\tau'} \cap B = \emptyset$, de igual manera $A \cap \bar{B}^{\tau'} = \emptyset$.

Como $\bar{A}^{\tau'} = \bar{A}^{\tau}$ y $\bar{B}^{\tau'} = \bar{B}^{\tau}$ entonces $\bar{A}^{\tau} \cap B = \emptyset$ y $\bar{B}^{\tau} \cap A = \emptyset$.

Esto implica que I es disconexo en τ.

Esta contradicción demuestra que todo intervalo abierto es conexo en τ'.

Observemos que para $a < b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene lo siguiente:

$(a, b) \subset (a, b], [a, b), [a, b] \subset \overline{(a, b)}^{\tau} = \overline{(a, b)}^{\tau'}$.

Esto implica que $(a, b]$, $[a, b)$ y $[a, b]$ son conexos en τ'.

De aquí se sigue que todo intervalo en $\mathbb{R}$ es conexo en τ'. En particular $\mathbb{X}$ es conexo en τ'.

Además, como $\tau^* \subset \tau'$, tenemos también que todos los intervalos son conexos en τ^*.

Ahora veamos que $(\mathbb{X}, \tau')$ es unicoherente.

Supongamos que no lo es.

Tomemos dos subconjuntos cerrados conexos A, B de $\mathbb{X}$ en τ', tales que $A \cup B = \mathbb{X}$ y $A \cap B$ no es conexo.

Ya que $\tau \subset \tau'$, tenemos que A, B son conexos en τ, así que A y B son intervalos.

Como la intersección de dos intervalos es un intervalo, entonces $A \cap B$ es un intervalo, de manera que $A \cap B$ es conexo en τ'. Esta contradicción demuestra que $(\mathbb{X}, \tau')$ es unicoherente.

Similarmente se muestra que $(\mathbb{X}, \tau^*)$ es unicoherente.

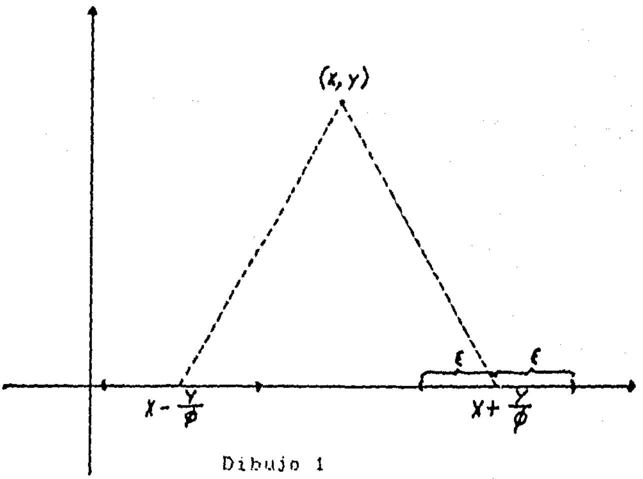
TOPOLOGIA DE LA PENDIENTE IRRACIONAL.

En este ejemplo $\mathbb{X} = \{ (x, y) \ / \ y \geq 0, \ x, \ y \in \mathbb{Q} \}$.

A través de este ejemplo ϕ denota un irracional fijo.

Para cada $(x,y) \in \mathbb{X}$ y $\varepsilon > 0$ definimos:

$$N_{\varepsilon}((x,y)) = \{(x,y)\} \cup \{(r,0)/r \in \mathbb{Q} \text{ y } r \in (x + \tfrac{y}{\phi} - \varepsilon, \ x + \tfrac{y}{\phi} + \varepsilon)\}$$
$$\cup \{(z,0)/z \in \mathbb{Q} \text{ y } z \in (x - \tfrac{y}{\phi} - \varepsilon, \ x - \tfrac{y}{\phi} + \varepsilon)\}$$



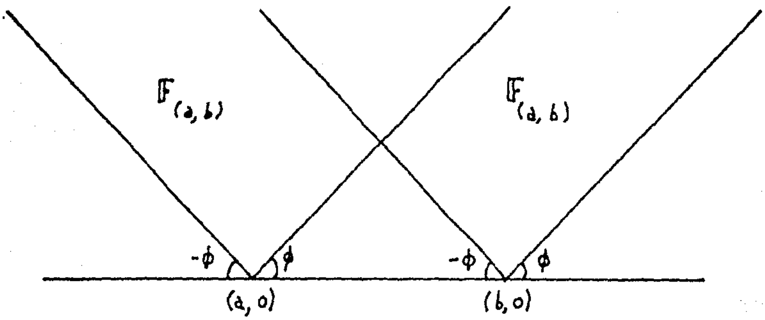
Dibujo 1

Tomemos como base para una Topología τ de $\mathbb{X}$ a:

$\beta = \{ N_{\varepsilon}((x,y)) \ / \ (x,y) \in \mathbb{X} \ \text{ y } \ \varepsilon > 0 \}$.

Para cada intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$, definimos:

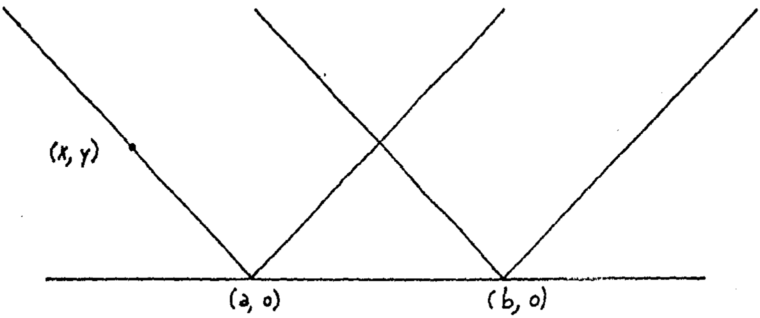
$\mathbb{F}_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathcal{X}/\phi(x-b) \leq y \leq \phi(x-a) \text{ o } \phi(a-x) \leq y \leq \phi(b-x)\}$.



Dibujo 2

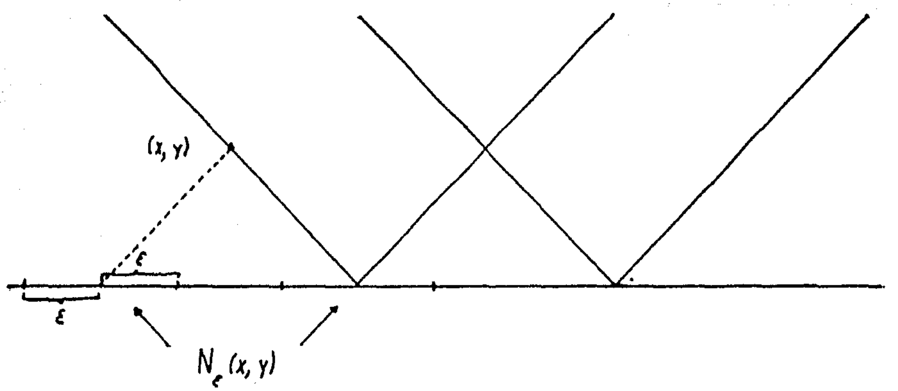
Antes que nada demostraremos que $((a, b) \times \{0\})^{-} = \mathbb{F}_{(a,b)}$.

Tomemos $(x, y) \in \mathbb{F}_{(a,b)}$. Escojamos por ejemplo el del Dibujo 3.



Dibujo 3

Una vecindad básica de (x, y) es de la siguiente forma:



Dibujo 4

$N_\varepsilon(x, y)$ intersecta a $((a, b) \times \{0\})^-$ en $(a, b) \cap (x + \frac{y}{\phi}, \varepsilon)$.

Por tanto $(x, y) \in ((a, b) \times \{0\})^-$.

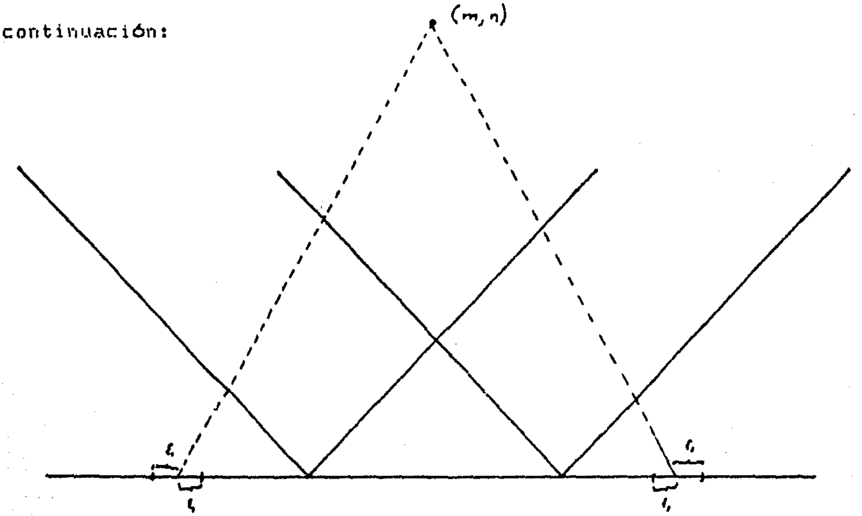
De manera que $\mathbb{F}_{(a,b)} \subset ((a, b) \times \{0\})^-$.

Ahora veamos que $((a, b) \times \{0\})^- \subset \mathbb{F}_{(a,b)}$.

Escogemos un punto (m, n) de $\mathbb{X}$ tal que $(m, n) \notin \mathbb{F}_{(a,b)}$.

Supongamos, por ejemplo, que (m, n) está como en el Dibujo 5.

Entonces podemos dar una vecindad básica como la que se ilustra a continuación:



Dibujo 5

Claramente se observa que $(m, n) \notin ((a, b) \times \{0\})^{-}$.

De manera que $((a, b) \times \{0\})^{-} \subset \mathbb{F}_{(a,b)}$.

Por tanto $((a, b) \times \{0\})^{-} = \mathbb{F}_{(a,b)}$.

En seguida demostraremos que $\mathfrak{X}$ es conexo.

Supongamos que no lo es.

Tomemos dos conjuntos ajenos, cerrados, no vacíos $A, B \in \tau$ tales que $A \cup B = \mathfrak{X}$.

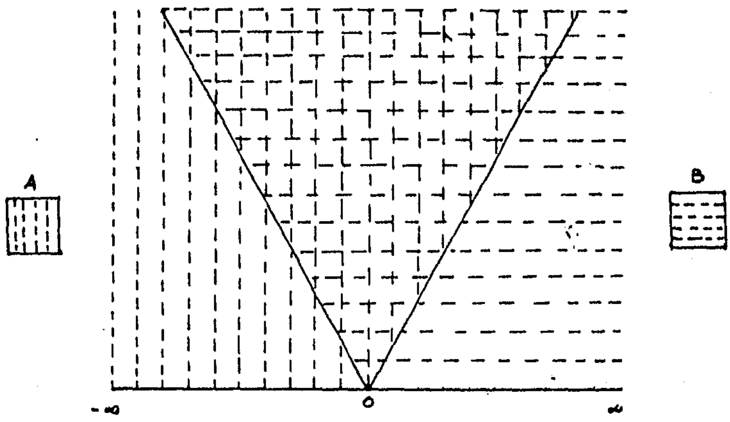
Entonces existen dos abiertos básicos no vacíos V y W de $\mathcal{X}$ tales que $V \subset A$ y $W \subset B$ respectivamente.

Como todos los abiertos básicos contienen al menos un intervalo sobre el eje "X", entonces aplicando lo que se probó en el párrafo anterior se observa que $\bar{V} \cap \bar{W} \neq \emptyset$ entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Este absurdo muestra que $\mathcal{X}$ es conexo.

Finalmente mostraremos que $\mathcal{X}$ es multicoherente.

Definimos $A = \overline{((-\infty, 0] \times \{0\})}$ y $B = \overline{([0, \infty) \times \{0\})}$ como en el Dibujo 6.

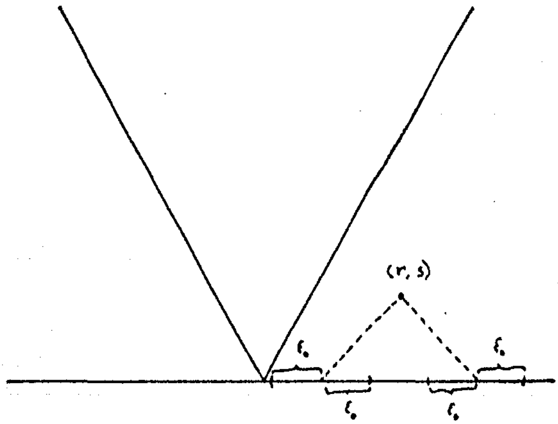


Dibujo 6

Observemos que $A \cup B = \mathcal{X}$.

Veamos que $\mathbb{X} - A$ es abierto.

Tomemos un punto (r, s) en $\mathbb{X} - A$, por ejemplo el del Dibujo 7, entonces se puede construir una vecindad básica de (r, s) que no intersecte a A. (como en el Dibujo).



Dibujo 7

Por tanto A es cerrado.

Similarmente se demuestra que B es cerrado.

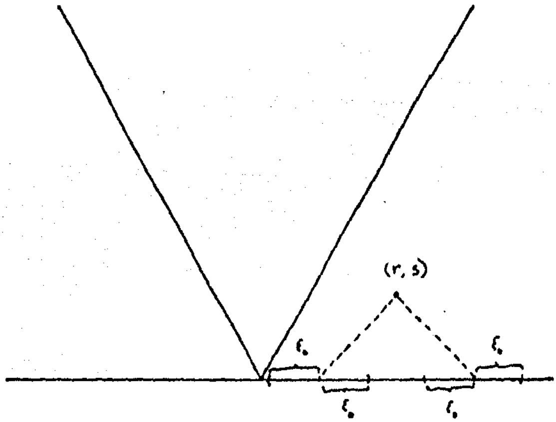
Ahora mostraremos que $A \doteq ((-\infty, 0] \times \{0\})^-$ es conexo.

Supongamos que no lo es.

Entonces existen dos conjuntos cerrados, ajenos, no vacíos M y N de $\mathbb{X}$ tales que $M \cup N = A$.

Veamos que $\mathcal{X}$ - A es abierto.

Tomemos un punto (r, s) en $\mathcal{X}$ - A, por ejemplo el del Dibujo 7, entonces se puede construir una vecindad básica de (r, s) que no intersecte a A. (como en el Dibujo).



Dibujo 7

Por tanto A es cerrado.

Similarmente se demuestra que B es cerrado.

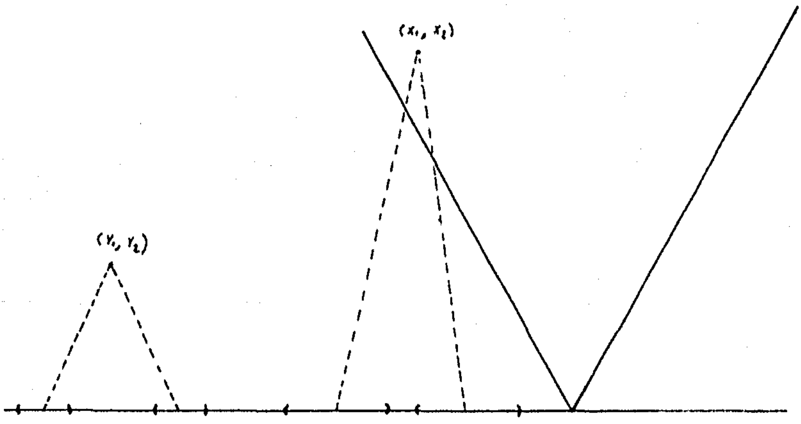
Ahora mostraremos que $A = ((-\alpha, 0] \times \{0\})^{-}$ es conexo.

Supongamos que no lo es.

Entonces existen dos conjuntos cerrados, ajenos, no vacíos M y N de $\mathcal{X}$ tales que $M \cup N = A$.

Sean $(x_1, x_2) \in M$ y $(y_1, y_2) \in N$, por ser M y N ajenos, existen vecindades básicas V y W de (x_1, x_2) y (y_1, y_2) respectivamente tales que $V \cap N = \emptyset$ y $W \cap M = \emptyset$.

Sabemos que V es la unión de dos intervalos contenidos en el eje real más el punto (x_1, x_2). (Ver Dibujo 8).



Dibujo 8

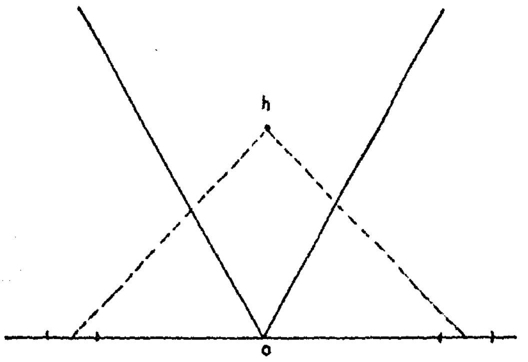
Notemos que si I es el intervalo de la izquierda, entonces $I \subset V \cap A$.

Por la misma razón, existe un intervalo no vacío J del eje real tal que $J \subset W \cap A$. Por lo que vimos anteriormente se tiene que $\emptyset \neq \bar{I} \cap \bar{J} \subset \overline{(V \cap A)} \cap \overline{(W \cap A)} \subset N \cap M$.

Esta contradicción demuestra que A es conexo.

Análogamente se prueba que B es conexo.

Además, se tiene que $A \cap B$ no es conexo, ya que si tomamos un punto $h \in A \cap B$ y un abierto básico V de $A \cap B$ que contenga a h, se tiene que $V = U \cap (A \cap B)$ donde $U \in \beta$. Esto se ilustra en el Dibujo 9.



Dibujo 9

Observemos que $V = \{h\}$. Así que $A \cap B$ tiene la topología discreta, por lo cual $A \cap B$ es totalmente disconexo.

Por tanto $\mathfrak{X}$ es multicoherente.

TOPOLOGIA DEL ORIGEN DOBLE

En este ejemplo $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2 \cup \{0^*\}$.

Para $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$V_n(0) = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 1/n^2 \text{ con } y > 0\} \cup \{0\}$.

$V_n(0^*) = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 1/n^2 \text{ con } y < 0\} \cup \{0^*\}$.

También definimos como una *base* para una Topología de $\mathbb{X}$ a la siguiente:

$\beta = \{V_n(0) / n \in \mathbb{N}\} \cup \{V_n(0^*) / n \in \mathbb{N}\} \cup \{U / U$ es abierto usual de $\mathbb{R}^2 - \{0\}\}$.

Observemos que $\mathbb{R}^2 - \{0\} \subset \mathbb{X} = \mathbb{R}^2 \cup \{0^*\} \subset \tilde{\mathbb{R}}^2$.

Como $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ es conexo por tener la topología usual del plano, entonces $\mathbb{X}$ es conexo.

A continuación demostraremos que $\mathbb{X}$ es multicoherente.

Tomemos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{X}$:

$A = \{(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } y \geq 0\}$

$B = \{(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\} \text{ con } y \leq 0\} \cup \{0^*\}$.

Claramente $A \cup B = \mathbb{X}$ y A y B son cerrados en $\mathbb{X}$.

Además $\{(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\} \text{ con } y \geq 0\}$ es conexo por tener la topología del plano, entonces su cerradura también es conexa.

Y como $(\{(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\} \text{ con } y \geq 0\})^- = A$, entonces A es conexo.

Similarmente B es conexo.

Por otro lado, $A \cap B = \{(x, y) \in \mathfrak{X} \ / \ y = 0, \ x \neq 0\}$ no es conexo por ser el eje "X" con la topología usual, sin el origen.

Por tanto $\mathfrak{X}$ es multicoherente.

TOPOLOGIA DEL RADIO BORRADO

En este ejemplo $X = \mathbb{R}^2$.

Designemos con τ^* la Topología usual de $\mathbb{R}^2$.

Para $\varepsilon > 0$ y $p \in \mathbb{R}^2$ hacemos $D'_\varepsilon(p)$ igual al disco abierto de radio ε con centro en p, quitándole el radio horizontal derecho (sin quitarle p).

Se define como base para una Topología τ de X a la siguiente $\beta = \{ D'_\varepsilon(p) \ / \ p \in X \text{ y } \varepsilon > 0 \}$. Claramente $\tau^* \subset \tau$.

En seguida veamos que si $U \in \tau$ entonces $\bar{U}^{\tau^*} = \bar{U}^\tau$.

Tomemos un punto $p \in \bar{U}^{\tau^*}$ y un básico cualquiera $D'_\varepsilon(p)$ de p.

Como $B_\varepsilon(p) \in \tau^*$ se tiene que $B_\varepsilon(p) \cap U \neq \emptyset$.

Elegimos un punto $z \in B_\varepsilon(p)$ y $z \in U$.

Como $U \in \tau$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $D'_\delta(z) \subset U$ y $B_\delta(z) \subset B_\varepsilon(p)$.

Como $D'_\delta(z)$ no está contenido en $(B_\varepsilon(p)) - (D'_\varepsilon(p))$ entonces existe $q \in D'_\delta(z)$ tal que $q \notin (B_\varepsilon(p)) - (D'_\varepsilon(p))$.

Esto implica que $q \in D'_\varepsilon(p)$.

Así que $U \cap D'_\varepsilon(p) \neq \emptyset$. Entonces $p \in \bar{U}^\tau$.

Por tanto se tiene que $\bar{U}^{\tau^*} \subset \bar{U}^\tau$.

La contención $\bar{U}^\tau \subset \bar{U}^{\tau^*}$ se sigue de que $\tau^* \subset \tau$. Por tanto, para todo $U \in \tau$ se tiene que $\bar{U}^{\tau^*} = \bar{U}^\tau$. En particular cuando $U \in \tau^*$ también tenemos que se cumple la igualdad $\bar{U}^{\tau^*} = \bar{U}^\tau$.

A continuación demostraremos que $(\mathfrak{X}, \tau)$ es conexo.

Supongamos que no lo es, entonces existen dos conjuntos ajenos, no vacíos A y B $\in \tau$, tales que $A \cup B = \mathfrak{X}$. Como $\bar{A}^{\tau} = \bar{A}^{\tau^*}$ y $\bar{B}^{\tau} = \bar{B}^{\tau^*}$, se tiene que $\emptyset = \bar{A}^{\tau} \cap B = \bar{A}^{\tau^*} \cap B$ y $\emptyset = A \cap \bar{B}^{\tau} = A \cap \bar{B}^{\tau^*}$.

De manera que A y B es una separación de $\mathfrak{X}$ con la topología usual, lo cúal es una contradicción.

Concluimos entonces que $(\mathfrak{X}, \tau)$ es conexo.

Ahora, definimos $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y < 0\}$.

Mostraremos que A y B son conexos en τ.

Supongamos que A no es conexo en τ.

Como $A \in \tau$, existen dos abiertos en τ, ajenos, no vacíos, M y N de $\mathfrak{X}$ tales que $M \cup N = A$.

Como $\bar{M}^{\tau} \cap N = \emptyset$ y $\bar{M}^{\tau} = \bar{M}^{\tau^*}$ entonces se tiene que $\bar{M}^{\tau^*} \cap N = \emptyset$, de igual manera $M \cap \bar{N}^{\tau^*} = \emptyset$. Así que M y N es una separación de A en τ^*. Este absurdo demuestra que A es conexo en τ.

Similarmente B es conexo en τ.

Entonces $\bar{A}^{\tau} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$ y $\bar{B}^{\tau} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 0\}$ son conexos en τ. Además su unión es $\mathfrak{X}$.

Notemos que $\bar{A} \cap \bar{B} = \{(x.y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$ es el eje "X", el cual tiene la topología de la Recta de Sorgenfrey. De manera que $\bar{A}^{\tau} \cap \bar{B}^{\tau}$ es totalmente disconexo. Por tanto $(\mathfrak{X}, \tau)$ es multicoherente.

TOPOLOGIA DEL DIAMETRO BORRADO

En este ejemplo $\mathscr{X} = \mathbb{R}^2$.

Denotemos con τ^* la Topología usual de $\mathbb{R}^2$.

Para $\varepsilon > 0$ y $p \in \mathbb{R}^2$ hacemos $D^*_\varepsilon(p)$ igual al disco abierto de radio ε con centro en p, quitándole todo el diámetro horizontal y hacemos $D_\varepsilon(p) = D^*_\varepsilon(p) \cup \{p\}$.

Definimos como base para una Topología τ de $\mathscr{X}$ a la siguiente: $\beta = \{D_\varepsilon(p) \ / \ p \in \mathscr{X} \text{ y } \varepsilon > 0\}$.

Claramente $\tau^* \subset \tau$.

A continuación demostraremos que si $U \in \tau$ entonces $\bar{U}^{\tau^*} = \bar{U}^{\tau}$.

Tomemos un punto $p \in \bar{U}^{\tau^*}$, entonces todo abierto de τ^* que contiene a p intersecta a U.

Ahora tomemos un abierto $W \in \tau$ que contenga a p. Entonces existe un básico $D_\varepsilon(p) \subset W$ con $\varepsilon > 0$.

Como $B_\varepsilon(p) \in \tau^*$ y contiene a p, se tiene que $B_\varepsilon(p) \cap U \neq \emptyset$.

Elegimos un punto $z \in B_\varepsilon(p)$ y $z \in U$.

Como $U \in \tau$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $D_\delta(z) \subset U$ y $B_\delta(z) \subset B_\varepsilon(p)$.

Como $D_\delta(z)$ no está contenido en $(B_\varepsilon(p) - D_\varepsilon(p))$ entonces existe $q \in D_\delta(z)$ tal que $q \notin (B_\varepsilon(p) - D_\varepsilon(p))$.

Lo anterior implica que $q \in D_{\varepsilon}(p)$. Así que $U \cap D_{\varepsilon}(p) \neq \emptyset$.
Entonces $W \cap U \neq \emptyset$. Por tanto $\bar{U}^{\tau^*} \subset \bar{U}^{\tau}$.

Ahora vemos que $\bar{U}^{\tau} \subset \bar{U}^{\tau^*}$.
Como $\bar{U}^{\tau^*}$ es un conjunto cerrado en τ^* y como $\tau^* \subset \tau$ entonces $\bar{U}^{\tau^*}$ es un conjunto cerrado en τ que contiene a U. De modo que $\bar{U}^{\tau} \subset \bar{U}^{\tau^*}$.
Por tanto para todo $U \in \tau$ se tiene que $\bar{U}^{\tau^*} = \bar{U}^{\tau}$.
En particular, cuando $U \in \tau^*$ también tenemos que $\bar{U}^{\tau^*} = \bar{U}^{\tau}$.

En seguida demostraremos que $(\mathcal{X}, \tau)$ es conexo.
Supongamos lo contrario. Tomemos dos conjuntos ajenos, no vacíos A, $B \in \tau$, tales que $A \cup B = \mathcal{X}$.
Como $\bar{A}^{\tau} = \bar{A}^{\tau^*}$ y $\bar{B}^{\tau} = \bar{B}^{\tau^*}$ y además $\bar{A}^{\tau} \cap B = \emptyset$ entonces $\bar{A}^{\tau^*} \cap B = \emptyset$, de igual manera $\bar{B}^{\tau^*} \cap A = \emptyset$.
Por tanto A y B es una separación de $\mathcal{X}$ con la Topología usual, lo cual es absurdo. De manera que $(\mathcal{X}, \tau)$ es conexo.

Para demostrar que $(\mathcal{X}, \tau)$ es multicoherente, definimos:
$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0 \}$
$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y < 0 \}$
Probaremos que A y B son conexos en τ.
Supongamos que A no es conexo en τ. Como $A \in \tau$, existen dos abiertos en τ, ajenos, no vacíos M y N de $\mathcal{X}$ tales que $M \cup N = A$.

Como $\bar{M}^{\tau} \cap N = \emptyset$ y $\bar{M}^{\tau} = \bar{M}^{\tau^*}$ entonces $\bar{M}^{\tau^*} \cap N = \emptyset$, por la misma razón $M \cap \bar{N}^{\tau^*} = \emptyset$.

De manera que M y N es una separación de A en τ^*.

Esta contradicción demuestra que A es conexo en τ.

Similarmente se demuestra que B es conexo en τ.

Entonces

$\bar{A}^{\tau} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0 \}$ y $\bar{B}^{\tau} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 0 \}$ son conexos en τ. Además su unión es $\mathbb{X}$.

Observemos que $\bar{A} \cap \bar{B} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0 \}$ es el eje "X", el cual tiene la topología discreta.

Así que $\bar{A}^{\tau} \cap \bar{B}^{\tau}$ es totalmente disconexo.

Por tanto se concluye que $(\mathbb{X}, \tau)$ es multicoherente.

TOPOLOGIA TELEFASE

En este ejemplo $\mathscr{X} = [0, 1) \cup \{1, 1^*\}$.

Denotemos por φ a la Topología usual de $[0, 1]$.

Definimos una base para una Topología τ de $\mathscr{X}$ a la siguiente:

$\beta = \varphi \cup \{(a, 1) \cup \{1^*\} \,/\, a < 1\}$.

Notemos que como la Topología τ restringida a $[0, 1]$ es φ, entonces los subconjuntos conexos de $(\mathscr{X}, \tau)$ contenidos en $[0, 1]$ son exactamente los subintervalos de $[0, 1]$.

Veamos que si $A \subset \mathscr{X}$ es conexo entonces $A \cap [0, 1]$ es un intervalo (y por lo tanto es conexo).

Supongamos que $A \cap [0, 1]$ no es intervalo.

Entonces existen dos puntos $x, y \in A \cap [0, 1]$ y $z \in [0, 1]$ tales que $x \leq z \leq y$ y $z \notin A \cap [0, 1]$.

Como $z \notin A \cap [0, 1]$ entonces $z \notin A$.

Entonces $A = ([0, z) \cap A) \cup ((z, 1] \cup \{1^*\}) \cap A$ es una separación de A. Este absurdo prueba que $A \cap [0,1]$ es un intervalo.

A continuación se probará que si A es conexo y $1^* \in A$ entonces $A = \{1^*\}$ o $A \cap [0,1]$ es un intervalo I tal que $1 \in (I - \{1\})^{-\varphi}$.

Si $A \cap [0, 1] = \emptyset$, no es posible que $A = \{1, 1^*\}$ porque A es conexo. Entonces $A \cap [0, 1) \neq \emptyset$.

Como A es conexo entonces $A \cap [0, 1] = I$ es un intervalo contenido en $[0, 1]$.

Aseguramos que $1 \in (I - \{1\})^{-\varphi} = (A \cap [0, 1] - \{1\})^{-\varphi}$

$= (A \cap [0,1))^{-\varphi}$.

Ya que si $1 \notin (A \cap [0, 1))^{-\varphi}$ entonces existe $1 > \varepsilon > 0$ tal que $(1 - \varepsilon, 1] \cap (A \cap [0, 1)) = \emptyset$.

Entonces $A = (A \cap [0, 1 - \varepsilon/2)) \cup (A \cap ((1 - \varepsilon/2, 1] \cup \{1^*\}))$ es una separación de A. $(\emptyset \neq A \cap [0, 1) \subset A \cap [0, 1 - \varepsilon/2))$.

Este absurdo prueba que $1 \in (I - \{1\})^{-\varphi}$.

Ahora demostraremos que si I es un subintervalo de $[0, 1]$ tal que $1 \in (I - \{1\})^{-\varphi}$ entonces $I \cup \{1^*\}$ es conexo.

Para ver esto probaremos que $1^* \in I^{-\tau}$.

Sea $V = (b, 1) \cup \{1^*\}$ es una vecindad básica de 1^*.

Sabemos que $1 \in (I - \{1\})^{-\varphi}$ así que $(b, 1] \cap (I - \{1\}) \neq \emptyset$.

Esto implica que $(b, 1) \cap I \neq \emptyset$. De manera que $V \cap I \neq \emptyset$.

Por tanto $1^* \in I^{-\tau}$.

En conclusión $I \subset I \cup \{1^*\} \subset I^{-\tau}$, así que $I \cup \{1^*\}$ es conexo.

En seguida veremos que $(\mathfrak{X}, \tau)$ es unicoherente.

Tomemos dos subconjuntos cerrados conexos A, B de $(\mathfrak{X}, \tau)$ tales que $A \cup B = \mathfrak{X}$.

Analicemos 3 casos:

1) $1^* \in A$ y $1^* \notin B$.

Entonces $A \cap B = (A \cap (B \cap [0, 1]) = B \cap (A \cap [0, 1])$ es conexo.

2) De manera análoga $A \cap B$ es conexo si $1^* \in B$ y $1^* \notin A$.

3) $1^* \in B$ y $1^* \in A$.

Entonces $A \cap B = ((A \cap [0, 1]) \cap (B \cap [0, 1]) \cup \{1^*\}$.

Como $A \cap [0, 1]$ es un intervalo I de $[0, 1]$ tal que $1 \in (I - \{1\})^{-\varphi}$ al igual que $B \cap [0, 1]$, entonces $A \cap B = J \cup \{1^*\}$ donde J es un intervalo de $[0, 1]$ y $1 \in (J - \{1\})^{-\varphi}$.

De manera que $A \cap B$ es conexo.

Por tanto $(\mathcal{X}, \tau)$ es unicoherente.

CURVA SENOIDAL.

En este ejemplo hacemos $S = \{(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x}) \;/\; x \in (0, 1]\}$ considerado como un subconjunto del plano euclidiano con la topología inducida.

Definimos $\mathscr{X} = S \cup \{(0, 0)\}$.

Como S es conexo, por ser la gráfica de una función continua, y $(0, 0)$ está en su cerradura entonces $\mathscr{X}$ es conexo.

Los cerrados conexos de $\mathscr{X}$ son:

$A(a, b) = ([a, b] \times \mathbb{R}) \cap \mathscr{X}$ con $0 \leq a \leq b \leq 1$.

A continuación probaremos que $\mathscr{X}$ es unicoherente.

Sean $A(a, b)$ y $A(c, d)$ subconjuntos cerrados conexos de $\mathscr{X}$.

Como $A(a, b) \cap A(c, d) = (([a, b] \cap [c, d]) \cap \mathbb{R}) \cap \mathscr{X}$ es un conjunto de la forma $A(m, n)$, con $[a, b] \cap [c, d] = [m, n]$, y, por tanto, conexo tenemos entonces que $\mathscr{X}$ es unicoherente.

La unicoherencia del ejemplo siguiente se demuestra de manera análoga.

CURVA SENOIDAL CERRADA

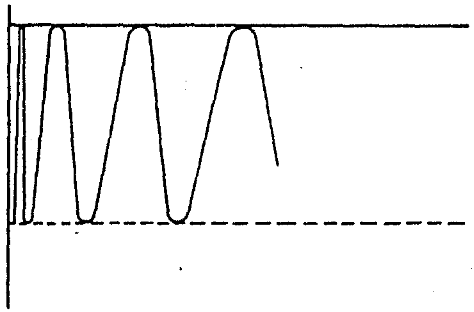
Definimos $\mathscr{X} = \bar{S} = \{(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x})/x \in (0, 1]\} \cup \{(0, y)/-1 \leq y \leq 1\}$.

CURVA SENOIDAL EXTENDIDA

Definimos $\mathcal{X} = \left\{(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}) \ / \ x \in (0, 1]\right\} \cup \left\{(0, y) \ / \ -1 \leq y \leq 1\right\}$

$\cup \left\{(x, 1) \ / \ 0 \leq x \leq 1\right\}$.

$\mathcal{X} =$



Claramente $\mathcal{X}$ es conexo.

En seguida probaremos que $\mathcal{X}$ es multicoherente.

Proponemos $A = \left\{(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}) \ / \ x \in (0, 1]\right\} \cup \left\{(0, y) \ / \ -1 \leq y \leq 1\right\}$

y $B = \left\{(x, 1) \ / \ 0 \leq x \leq 1\right\}$.

Notemos que A y B son cerrados conexos de $\mathcal{X}$; que $A \cup B = \mathcal{X}$ y que

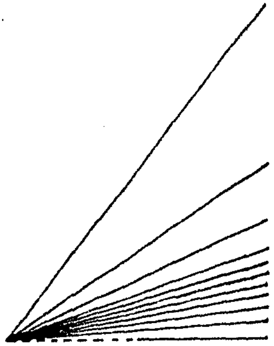
$A \cap B = \left\{(x_n, 1) \ / \ n \in \mathbb{N} \text{ y } x_n = \dfrac{1}{\pi\left(\frac{1 + 4n}{2}\right)}\right\} \cup \left\{(0, 1)\right\}$, por lo

que $A \cap B$ tiene un número infinito de componentes.

Por tanto $\mathcal{X}$ es multicoherente.

ESCOBA

Para $n \in \mathbb{N}$ definimos: $L_n = \left\{(t, \frac{1}{n} t) \in \mathbb{R}^2 \;/\; t \in [0, 1]\right\}$ y hacemos $\mathfrak{X} = (\bigcup \{L_n \;/\; n \in \mathbb{N}\} \cup ((\frac{1}{2}, 1] \times \{0\})$.



Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que L_n es conexo y todos los L_n se intersectan en el origen, entonces $\bigcup \{L_n \;/\; n \in \mathbb{N}\}$ es conexa.
De aquí que $\mathfrak{X}$ es conexo.

Ahora veamos que $\mathfrak{X}$ es multicoherente.
Hacemos $A = (\bigcup \{L_{2n} \;/\; n \in \mathbb{N}\}) \cup ((\frac{1}{2}, 1] \times \{0\})$ y
$B = (\bigcup \{L_{2n+1} \;/\; n \in \mathbb{N}\}) \cup ((\frac{1}{2}, 1] \times \{0\})$.
Es claro que A y B son cerrados conexos de $\mathfrak{X}$ y que $A \cup B = \mathfrak{X}$.
Además, $A \cap B = \{(0, 0)\} \cup ((\frac{1}{2}, 1] \times \{0\})$ no es conexo.
Por tanto $\mathfrak{X}$ es multicoherente.

ANGULOS ANIDADOS

Para $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos:

$Ln = \{t(n, \frac{1}{n+1}) + (1 - t)(0, 1) /\ t \in [0, \alpha]\} \cup \{(x, \frac{1}{n+1}) / x \leq n\}$

y hacemos:

$\mathcal{X} = \bigcup \{Ln \ /\ n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{(x, 0) \ /\ x \in \mathbb{R}\}$ considerado como un subconjunto del plano con la topología inducida.

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que $\bigcup \{Ln \ /\ n \in \mathbb{Z}^+\}$ es conexo.

Notemos que:

$\bigcup \{Ln \ /\ n \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathcal{X} \subset \overline{(\bigcup \{Ln \ /\ n \in \mathbb{Z}^+\})}$. De aquí que $\mathcal{X}$ es conexo.

En seguida probaremos que $\mathcal{X}$ es multicoherente.

Proponemos $A = (\bigcup \{Ln \ /\ n \in \{2, 4, 6, \ldots\}) \cup (\{(x, 0) \ /\ x \in \mathbb{R}\})$ y

$B = (\bigcup \{Ln \ /\ n \in \{1, 3, 5, \ldots\}) \cup (\{(x, 0) \ /\ x \in \mathbb{R}\})$.

Observemos que A y B son cerrados y conexos de $\mathcal{X}$, que $A \cup B = \mathcal{X}$ y que $A \cap B = \{(0, 1)\} \cup \{(x, 0) \ /\ x \in \mathbb{R}\}$ no es conexo.

Así que $\mathcal{X}$ es multicoherente.

PSEUDOARCO

Como el Pseudoarco es indescomponible, por el Lema 7, se tiene que es unicoherente.

TOPOLOGIA RADIAL DEL PLANO

En este ejemplo $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^2$.

Para $0 \leq \varphi < 2\Pi$ y para $0 < a < b$ definimos:

$A(\varphi, a, b) = \{t(\cos \varphi, \text{ sen } \varphi) \in \mathbb{R}^2 \; / \; t \in (a, b)\}$.

Para $0 \leq \sigma < \Pi$ y para $0 < d$ hacemos:

$I(\sigma, d) = \{s(\cos \sigma, \text{ sen } \sigma) \in \mathbb{R}^2 \; / \; s \in (-d, d)\}$.

Una base β para una topologia τ de $\mathfrak{X}$ es la siguiente:

$\beta = \{A(\varphi, a, b) \; / \; 0 \leq \varphi < 2\Pi \text{ y } 0 < a < b\}$

$\quad \bigcup \{ \bigcup \{I(\sigma, d_\sigma) \; / \; 0 \leq \sigma < \Pi \text{ y } d_\sigma > 0\}\}$.

En seguida veamos que $\mathfrak{X}$ es normal.

Para $0 \leq \phi < \Pi$ definimos:

$L_\phi = \{t(\cos \phi, \text{ sen } \phi) \in \mathbb{R}^2 \; / \; t \in \mathbb{R}\}$.

Sean A y B cerrados ajenos de $\mathfrak{X}$. Primero supongamos que $(0, 0) \notin A \bigcup B$. Tomemos $\phi_1 \in [0, \Pi)$.

Como $\bigcup\{U_\phi : 0 \leq \phi < \Pi\} \cap \bigcup\{V_\phi : 0 \leq \phi < \Pi\} \subset \bigcup\{U_\phi \cap V_\phi : 0 \leq \phi < \Pi\} = \emptyset$ podemos concluir que A y B pueden ser separados por dos abiertos.

Ahora supongamos que $(0, 0) \in A$.

Entonces $A \cap L_{\phi_1}$ y $B \cap L_{\phi_1}$ son cerrados de L_{ϕ_1}.

Claramente $(A \cap L_{\phi_1}) \cap (B \cap L_{\phi_1}) = \emptyset$.

Como $\mathbb{R}^2$ con la topología usual es normal y L_{ϕ_1} tiene la topología inducida, entonces L_{ϕ_1} es normal.

Entonces existen abiertos ajenos U_{ϕ_1} y V_{ϕ_1} contenidos en L_{ϕ_1} tales que $A \cap L_{\phi_1} \subset U_{\phi_1}$ y $B \cap L_{\phi_1} \subset V_{\phi_1}$; además, podemos tomar V_{ϕ_1} de manera que $(0, 0) \notin V_{\phi_1}$, lo mismo para A.

Ahora probaremos que $A \subset \bigcup\{U_\phi : 0 \leq \phi < \Pi\}$.

Tomemos $a \in A$ entonces $a \in L_\phi$ para alguna $\phi \in [0, \Pi)$ y como $A \cap L_\phi \subset U_\phi$ para alguna $\phi \in [0, \Pi)$ se tiene que $a \in \bigcup\{U_\phi : 0 \leq \phi < \Pi\}$.

Similarmente se demuestra qu $B \subset \bigcup\{V_\phi : 0 \leq \phi < \Pi\}$.

Dada $\phi \in [0, \Pi)$, Si $B \cap L_\phi \neq \emptyset$, elegimos dos abiertos ajenos U_ϕ y V_ϕ tales que $A \cap L_\phi \subset U_\phi$ y $B \cap L_\phi \subset V_\phi$ y si $B \cap L_\phi = \emptyset$, hacemos $U_\phi = \mathbb{R}$ y $V_\phi = \emptyset$.

Como antes, tenemos que $\bigcup\{U_\phi : 0 \leq \phi < \Pi\}$ y $\bigcup\{V_\phi : 0 \leq \phi < \Pi\}$ son dos abiertos ajenos de $\mathbb{X}$ que contienen a A y B, respectivamente. De manera que $(\mathbb{X}, \tau)$ es normal.

En seguida demostraremos que $\mathfrak{X}$ es contraible.

Definimos $F : \mathfrak{X} \times I \to \mathfrak{X}$ por $F((x, y), t) = ((1 - t)x, (1 - t)y)$.

Entonces $F((x, y), 0) = (x, y)$, $F((x, y), 1) = (0, 0)$ y es fácil convencerse de que F es continua.

Por lo tanto $\mathfrak{X}$ es unicoherente.

COMPACTACION CASI-DISCRETA Y UNIPUNTUAL DE LOS RACIONALES

En este ejemplo $\mathfrak{X} = \mathbb{Q} \cup \{p\}$ donde p es un punto ideal ($p \notin \mathbb{Q}$). La Topología que se define para $\mathfrak{X}$ es la siguiente:

$\tau = \{U \subset \mathbb{Q} : U$ es abierto en la topología usual de $\mathbb{Q}\}$

$\cup \{\{p\} \cup U: U \subset \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q} - U$ es finito$\}$.

En seguida probaremos que:

(*) Si A es un intervalo no degenerado de $\mathbb{Q}$ entonces $\{p\} \cup A$ es conexo.

Supongamos que $A \cup \{p\} = H \cup K$ donde $\bar{H} \cap K = \emptyset = H \cap \bar{K}$ y $H \neq \emptyset \neq K$. Podemos suponer, por ejemplo, que $p \in H$.

Entonces $p \notin \bar{K}$ así que existe $U \subset \mathbb{Q}$ con $\mathbb{Q} - U$ finito y $p \in \{p\} \cup U \subset \mathfrak{X} - K$. Sea $x \in K \subset \mathfrak{X} - \bar{H}$. Entonces existe un intervalo abierto I tal que $x \in I \subset \mathfrak{X} - \bar{H}$, además $x \in A$. De manera que $I \cap A$ es un intervalo de $\mathbb{Q}$ no degenerado.

En particular, $I \cap A$ es infinito. De modo que $I \cap A$ no está contenido en $\mathbb{Q} - U$. Sea $y \in I \cap A$ con $y \notin \mathbb{Q} - U$.

Entonces se tiene que $y \in (\mathfrak{X} - H) \cap A \cap U \subset K \cap U$.

Esto es absurdo pues $U \subset \mathfrak{X} - K$. Por tanto $\{p\} \cup A$ es conexo.

De (*) se sigue entonces que $\mathbb{Q} \cup \{p\} = \mathfrak{X}$ es conexo.

Para probar que $\mathfrak{X}$ no es unicoherente, hacemos:

$A = (-\infty, 0] \cup \{p\}$ y $B = [0, \infty) \cup \{p\}$

Claramente A y B son cerrados y conexos. Además, $A \cap B = \{0, p\}$ es disconexo. Por tanto $\mathfrak{X}$ es multicoherente.

EL ESPACIO DE LA RED DE ROY

En este ejemplo tomamos $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección numerable de subconjuntos densos, ajenos de $\mathbb{Q}$ y w un punto ideal fijo.

Hacemos $\mathscr{X} = \{(r,i) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \ / \ r \in C_i,\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{w\}$.

Para $r \in C_{2n}$ y $\varepsilon > 0$ definimos:

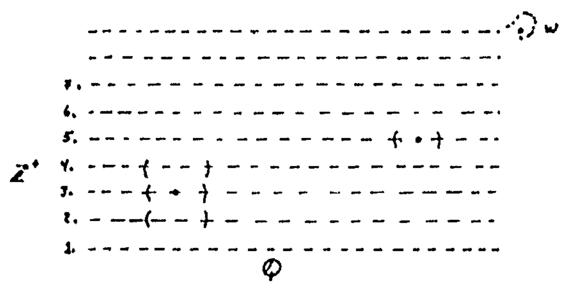
$V_\varepsilon(r,\ 2n) = \{(s,\ 2n) \in \mathscr{X} \ / \ r - \varepsilon < s < r + \varepsilon\}$.

Para $r \in C_{2n-1}$ y $\varepsilon > 0$ hacemos:

$V_\varepsilon(r,\ 2n-1) = \{(s,\ t) \in \mathscr{X} \ / \ r - \varepsilon < s < r + \varepsilon$ y con $t \in \{2n-1,\ 2n-2,\ 2n+1\}\}$.

Para $s \in \mathbb{N}$ y w definimos:

$V_s(w) = \{(r,\ i) \in \mathscr{X} \ / \ i \geq s\} \cup \{w\}$.



Una base β para una Topología τ de $\mathscr{X}$ es la siguiente:

$\beta = \{V_\varepsilon(r,\ 2n) \ / \ r \in C_{2n},\ \varepsilon > 0 \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$

$\quad \cup \{V_\varepsilon(r,\ 2n-1) \ / \ r \in C_{2n-1},\ \varepsilon > 0 \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$

$\quad \cup \{V_s(w) \ / \ s \in \mathbb{N}\}$

Para $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$Ln = \{(r, n) \in \mathfrak{X} \;/\; r \in Cn\}$.

En seguida se probará que si A es cerrado en $\mathfrak{X}$ y $L2n \subset A$ entonces $L2n+1 \subset A$ y $L2n-1 \subset A$.

Sea $(r, 2n+1) \in L2n+1$ y un básico $V_{\varepsilon}(r, 2n+1)$ del punto $(r, 2n+1)$.

Por la densidad de los Ln's y la definición de $V_{\varepsilon}(r, 2n+1)$ se tiene que $V_{\varepsilon}(r, 2n+1) \cap L2n \neq \emptyset$.

Hemos probado que $(r, 2n+1) \in \bar{A} = A$.

Por tanto $L2n+1 \subset A$.

Análogamente se demuestra que $L2n-1 \subset A$.

Ahora mostraremos que si A es abierto y $L2n+1 \subset A$ entonces $A \cap L2n$ es denso en L2n.

Tomemos un abierto no vacío W de L2n y un punto $(r, 2n) \in W$.

Escogemos un básico $V_{\varepsilon}(r, 2n) \subset W$ del punto $(r, 2n)$.

Hacemos $M = \{(r_0, 2n+1) \in L2n+1 \;/\; r - \varepsilon < ro < r + \varepsilon\}$.

Tomemos un punto $(r_1, 2n+1) \in M$.

Sea $V_{\varepsilon_1}(r_1, 2n+1)$ un básico que contenga al punto $(r_1, 2n+1)$ tal que $V_{\varepsilon_1}(r_1, 2n+1) \subset A$ y escogemos ε_1 de manera que tengamos $(r_1-\varepsilon_1, r_1+\varepsilon_1) \subset (r-\varepsilon, r+\varepsilon)$.

Por la definición de $V_{\varepsilon_1}(r_1, 2n+1)$ y la densidad de los Ln's se tiene que $V_{\varepsilon_1}(r_1, 2n+1) \cap L2n \neq \emptyset$.

Como $V_{\varepsilon_1}(r_1, 2n+1) \cap L2n \subset A \cap L2n$ y $V_{\varepsilon_1}(r_1, 2n+1) \cap L2n \subset W$ entonces $W \cap (A \cap L2n) \neq \emptyset$.

Por tanto $A \cap L2n$ es denso en $L2n$.

A continuación veamos que $\mathfrak{X}$ es conexo.

Supongamos que existe A abierto y cerrado de $\mathfrak{X}$ tal que $A \neq \emptyset$ y $A \neq \mathfrak{X}$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $w \in A$.

Como A es abierto y contiene a w, entonces existen n, $N \in \mathbb{N}$ tales que para toda $n \geq N$ se tiene que $Ln \subset A$.

Sea $n_1 = \min. \{n \,/\, Ln, Ln+1, Ln+2, \ldots \subset A\}$.

Observemos que $n_1 > 1$.

Analicemos dos casos para n_1:

a) n_1 par:

Como A es cerrado y $Ln_1 \subset A$ entonces $Ln_1-1 \subset A$, contradiciendo la minimalidad de Ln_1.

b) n_1 impar:

Por ser A abierto se tiene que $Ln_1-1 \cap A$ es denso en Ln_1-1.

Así que $\overline{Ln_1-1 \cap A} = Ln_1-1$. Como $\overline{Ln_1-1 \cap A}^{\,Ln_1-1} \subset \overline{A}^{\,Ln_1-1} = A$ entonces $Ln_1-1 \subset A$, lo cual también es una contradicción.

Por tanto $\mathfrak{X}$ es conexo.

A continuación probaremos que $\mathfrak{X}$ es multicoherente.

Sea (r_o, n_o) un punto fijo de $\mathfrak{X}$.

Hacemos $A = \{(r, n) \in \mathfrak{X} \,/\, r \leq r_o$ y $n \in \mathbb{N}\} \cup \{w\}$ y

$B = \{(r, n) \in \mathfrak{X} \,/\, r \geq r_o$ y $n \in \mathbb{N}\} \cup \{w\}$

Claramente se observa que $A \cup B = \mathfrak{X}$.

En seguida se demostrará que A es cerrado.

Tomemos $(r, n) \in \mathfrak{X} - A$ entonces $r > r_o$.

Definimos $\epsilon = \frac{r - r_o}{2} > 0$.

Entonces $V_\epsilon(r, n) \subset \mathfrak{X} - A$. Así que A es cerrado.

De igual manera se prueba que B es cerrado.

Ahora veamos que A es conexo.

Supongamos que no lo es. Entonces existen $H, K \subset \mathfrak{X}$ tales que H y K son cerrados, ajenos, no vacíos y $H \cup K = A$.

Como $w \in A$ entonces $w \in H$ o $w \in K$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w \in K$. Entonces existe vecindad básica $U = (\bigcup_{n \geq N_o} Ln) \cup \{w\}$ que contiene a w tal que $U \cap H = \emptyset$.

Para $n \geq N_o$ se tiene que $Ln \cap A \subset U$.

Así que $(Ln \cap A) \cap H = \emptyset$, entonces $\bigcup_{n \geq N_o} (Ln \cap A) \subset K$.

Tomemos $m = \min \{n \,/\, Ln, Ln+1, Ln+2, \ldots \subset K\}$.

De manera que $\bigcup_{n \geq m} (Ln \cap A) \subset K$.

Así que $L_{m-1} \cap A$ no está contenida en K o $m = 1$.

Supongamos que $m = 1$.

Entonces $\bigcup\limits_{n\geq m} (Ln \cap A) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Ln \cap A = A - \{w\} \subset K$ y como $w \in K$ entonces $A \subset K$. De donde se sigue que $H = \emptyset$.

Esta contradicción implica que $m > 1$ y que $\bigcup\limits_{n\geq m-1} (Ln \cap A)$ no está contenida en K.

Como $Lm-1 \cap A$ no está contenida en K existe un punto $(r_1, m-1)$ en $(Lm-1 \cap A) - K$. Consideremos dos casos:

a) m par.

Tomemos una vecindad básica $V_\varepsilon(r_1, m-1)$ del punto $(r_1, m-1)$.

Por la definición de $V_\varepsilon(r_1, m-1)$ y la densidad de los Ln's se tiene que $V_\varepsilon(r_1, m-1) \cap Lm \neq \emptyset$.

Hacemos $R = \{(s, m) \in Lm \;/\; r_1 - \epsilon < s < r_1\}$.

Tomemos un punto $(r_2, m) \in R$, entonces $r_2 < r_1 \leq r_0$ así que $(r_2, m) \in A \cap Lm \subset K$.

Además, $(r_2, m) \in V_\epsilon(r_1, m-1) \cap Lm \subset V_\epsilon(r_1, m-1)$. De manera que $K \cap V_\epsilon(r_1, m-1) \neq \emptyset$. Por tanto $(r_1, m-1) \in \overline{K} = K$.

Esta es una contradicción ya que $(r_1, m-1) \notin K$.

b) m impar.

Como $(r_1, m-1) \notin K$ entonces existe vecindad básica $V_\varepsilon(r_1, m-1)$ tal que $V_\varepsilon(r_1, m-1) \cap K = \emptyset$.

Definimos $N = \{(s, m) \in Lm \,/\, r_1 - \varepsilon < s < r_1\}$.

Tomemos un punto $(r_2, m) \in N$. Entonces $(r_2, m) \in K$, es decir $(r_2, m) \notin H$.

Sea $V_{\varepsilon_1}(r_2, m)$ un básico del punto (r_2, m) de manera que $(r_2 - \varepsilon_1, r_2 + \varepsilon_1) \subset (r_1 - \varepsilon, r_1)$ y $V_{\varepsilon_1}(r_2, m) \cap H = \emptyset$.

Entonces $V_{\varepsilon_1}(r_2, m) \subset A$ (pues $r_1 \leq r_0$). Además, como $V_{\varepsilon_1}(r_2, m) \cap H = \emptyset$, tenemos que $V_{\varepsilon_1}(r_2, m) \subset K$.

Por la definición de $V_{\varepsilon_1}(r_0, m)$ y por la densidad de los Ln's se tiene que $V_{\varepsilon_1}(r_2, m) \cap Lm\text{-}1 \neq \emptyset$.

Como $V_{\varepsilon_1}(r_2, m) \cap Lm\text{-}1 \subset V_{\varepsilon}(r_1, m\text{-}1) \cap K$ entonces $V_{\varepsilon}(r_1, m\text{-}1) \cap K \neq \emptyset$, lo cual es absurdo.

Por tanto A es conexo.

De igual manera se prueba que B es conexo.

Además, como $A \cap B = \{(r_0, n_0)\} \cup \{w\}$ no es conexo, podemos concluir que $\mathfrak{X}$ es multicoherente.

CAPITULO VIII

En este Capítulo se presentan 3 ejemplos que son familias no vacías de conexos, localmente conexos por trayectorias, normales y espacios T_1, por lo que su producto es unicoherente (Teorema 2.2 de [2]):

EL CUBO DE HILBERT

Este espacio es I^{ν}. Es decir es el producto topológico de una cantidad numerable de intervalos unitarios cerrados.

I^I

O sea el producto cartesiano no numerable de intervalos unitarios cerrados.

ℓ_2

Como este espacio es homeomorfo a $\mathbb{R}^{\nu}$ (el producto topológico de una cantidad numerable de rectas), entonces también es unicoherente.

CAPITULO IX

En este Capítulo se mencionan los espacios para los cuales no fue posible determinar si tienen o no agujero.

LOS ENTEROS CON LA TOPOLOGIA DE LOS PRIMOS RELATIVOS

En este ejemplo $\mathbb{X} = \mathbb{Z}^+$.

Para cada pareja de primos relativos $(a, b) = 1$, hacemos $U_a(b) = \{(b + na) \in \mathbb{X} \;/\; n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Definimos una base β para una topología τ de $\mathbb{X}$ como:

$\beta = \{U_a(b) \;/\; (a, b) = 1\}$.

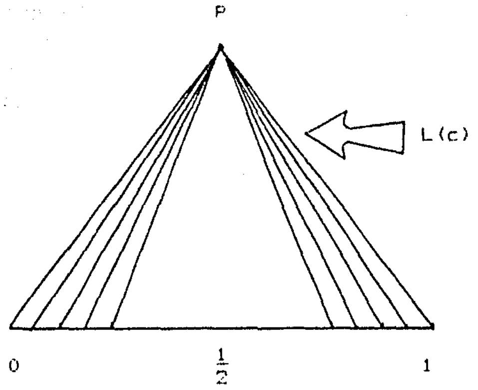
Los siguientes dos ejemplos no los abordé porque se construyen en base a la Teoría de los Números Ordinales, la cual no conozco:

SACACORCHOS CONDENSADO DE HEWITT

y

CONJUNTO BICONEXO DE MILLER

TIENDA AGUJERADA DE CANTOR



En este ejemplo definimos a C como el conjunto de Cantor situado en el intervalo unitario.

Tomamos $p = (1/2, 1/2)$ y definimos a $L(c)$ como el segmento que une al punto p con $c \in C$.

Hacemos $\mathscr{X} = \bigcup \{L(c) \;/\; c \in C\}$.

Sean E el subconjunto de C que consiste de los puntos extremos de C y $F = C - E$.

Sean $X_E = \bigcup \{L(c) \;/\; c \in E\}$ y $X_F = \bigcup \{L(c) \;/\; c \in F\}$.

Definimos $Y_E = \{(x, y) \in X_E \;/\; y \in \mathbb{Q}\}$ y $Y_F = \{(x, y) \in X_F \;/\; y \notin \mathbb{Q}\}$ de manera que $\mathscr{Y} = Y_E \cup Y_F$.

$\mathscr{X}$ y $\mathscr{Y}$ con la topología euclidiana inducida.

Entonces $\mathscr{X}$ es normal y contraible y, por tanto unicoherente. No sabemos si $\mathscr{Y}$ es unicoherente o no.

EL CUADRADO DE ALEXANDROFF

En este ejemplo $\mathfrak{X} = [0, 1] \times [0, 1]$.

Definimos como diagonal principal a: $\Delta = \{(x, x) \;/\; x \in [0, 1]\}$.

Para $\varepsilon > 0$ y s, $t \in [0, 1]$ hacemos:

$N_{\varepsilon}(s, t) = \{(s, y) \in \mathfrak{X} - \Delta \;/\; |t - y| < \varepsilon\}$

Dados $s \in [0, 1]$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$, hacemos:

$M_{\varepsilon}(s, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \{(x, y) \in \mathfrak{X} \;/\; |y - s| < \varepsilon, \; x \neq x_0, x_1, \ldots x_n\}$.

Una base para una topología τ de $\mathfrak{X}$ es la siguiente:

$\beta = \{N_{\varepsilon}(s, t) \;/\; (s, t) \in \mathfrak{X}-\Delta\} \cup \{M_{\varepsilon}(s, x_0, , \ldots, x_n) \;/\; s \in [0, 1], \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N} \text{ y } x_0, \ldots, x_n \in [0, 1]\}$

ESPACIO DE LAS SUCESIONES DE GUSTIN

BIBLIOGRAFIA

[1] A. GARCIA-MAYNEZ AND A. ILLANES.
A SURVEY ON UNICOHERENCE AND RELATED PROPERTIES. PREPRINT.

[2] A. ILLANES.
MULTICOHERENCE AND PRODUCTS TOP. PROC. 10(1985) 83-94.

[3] L. A. STEEN AND J. A. SEEBACH, JR.
COUNTEREXAMPLES IN TOPOLOGY.
HOLT, RINEHART AND WINSTON, INC.
SAINT OLAF COLLEGE (1967-1968).

[4] A. H. STONE.
INCIDENCE RELATIONS IN UNICOHERENT SPACES.
TRANS. AMER. MATH. SOC. 65(1949) 427-447.

[5] S. WILLARD.
GENERAL TOPOLOGY. ADISSON WESLEY.
PUBLISHING COMPLANY (1970).

[6]