

10
24.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

Estructuras de Resonancia
en Osciladores Acoplados

Tesis

Que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

Presenta

Clara Eugenia Garza Hume

México, D. F. 1988



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1	
DERIVACIÓN DEL PROBLEMA CANÓNICO	5
1.1 FORMAS NORMALES	5
1.2 REPASO DE TEORÍA DE FLOQUET	10
CAPÍTULO 2	
SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA δ PEQUEÑA	12
2.1 INTRODUCCIÓN	12
2.2 SOLUCIONES ESTACIONARIAS	13
Bifurcación de Hopf	13
2.3 LA SOLUCIÓN $(\eta, 0)$	23
Estabilidad de $(\eta, 0)$	25
2.4 LA SOLUCIÓN (η, η_0)	27
Sistema ortonormal a lo largo de una órbita cerrada	27
2.5 ECUACIONES DE ÓRBITAS CON RESPECTO AL SISTEMA	
ORTONORMAL	31
Aplicación a dos osciladores acoplados	32
Esbozo de un Método Alternativo	38
2.6 BIFURCACIONES DE (η, η_0)	38
CAPÍTULO 3	
LA SOLUCIÓN EN FASE	45
3.1 ESTABILIDAD Y BIFURCACIONES DE (ω_0)	46
3.2 ESTABILIDAD ORBITAL DE SOLUCIONES PERIÓDICAS	48
CAPÍTULO 4	
LA SOLUCIÓN FUERA DE FASE	55
4.1 REGIÓN DE EXISTENCIA	55
4.2 ESTABILIDAD	67
CAPÍTULO 5	
CAMBIOS EN LA ESTRUCTURA DE RESONANCIA	69
5.1 ESTABILIDAD DE ω_π	69
5.2 NÚMERO DE ROTACIÓN CERCA DE LA RECTA DE BIFURCACIONES	
DE HOPF	76

5.3 COMPORTAMIENTO DE LOS CUERNOS DE RESONANCIA	77
CAPÍTULO 6	
EL CASO $\epsilon = 0$	82
6.1 LA SOLUCIÓN ω_0	82
6.2 LA SOLUCIÓN ω_π	84
6.3 OTRAS SOLUCIONES	88
6.4 ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES BIFURCADAS	93
RESUMEN	95
APÉNDICE 1	
NÚMERO DE ROTACIÓN.....	101
Mapeo de Poincaré y Función Angular	101
Número de Rotación.....	102
APÉNDICE 2	
BIFURCACIÓN DE SOLUCIONES PERIÓDICAS.....	104
A2.1 BIFURCACIÓN DE HOPF.... 104 A2.2 BIFURCACIÓN A PARTIR DE UNA	
FAMILIA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS.....	106
BIBLIOGRAFÍA	112

INTRODUCCION

Muchos fenómenos biológicos y químicos, como reacciones orgánicas oscilantes (la de Belousov-Zhabotinskii por ejemplo), redes de neuronas, generadores centrales de patrones, ondas intestinales, ritmos circadianos, ciclos celulares, formación de patrones etc., se modelan como sistemas de osciladores acoplados. Generalmente los modelos son complejos, y para poder entenderlos se hacen hipótesis que los simplifiquen. Una de ellas es que los osciladores son casi idénticos y que están débilmente acoplados. En este caso lo único que importa es la fase de cada uno de los osciladores, el sistema se reduce a uno más pequeño sobre un k -toro y puede estudiarse usando técnicas de perturbaciones, promedios o escalas múltiples. Estas simplificaciones se usan tanto en sistemas discretos como en ecuaciones de reacción y difusión.

Sin embargo, restringiendo a los osciladores a que estén cerca de sus ciclos límite se pierden muchos fenómenos interesantes como atrapamiento de fase, estados periódicos estables múltiples, falta de periodicidad y caos. Estos efectos dependen de un acoplamiento fuerte que saque al sistema del toro de fase. En [S.M.] se encontró numéricamente que dos osciladores idénticos acoplados con difusión no escalar pueden mostrar una variedad de fenómenos dinámicos complejos que incluyen transiciones a toros invariantes, doblamiento de período y caos. En sistemas continuos (i.e. reacción-difusión) con cinética oscilatoria, muchos de estos mismos fenómenos ocurren. Cuando la difusión no es escalar, pueden aparecer patrones estacionarios en medios oscilatorios (véase [E.H.T.]) También es posible que sistemas no homogéneos con difusión fuerte pierdan periodicidad y lleguen a un estado estacionario homogéneo.

La fibrilación y el ataque cardiaco se estudian con ecuaciones parecidas a las de la reacción Belousov-Zhabotinskii, que presentan ondas espirales. Se cree que la fibrilación y el ataque cardiaco se deben a la aparición de ondas espirales de actividad eléctrica en el miocardio ventricular. Las ecuaciones que se usan para modelar este tipo de fenómenos son aproximadamente una versión continua de las que se estudiarán en los capítulos siguientes; son de la forma:

$$\begin{aligned}\epsilon \frac{\partial u}{\partial t} &= \epsilon^2 \nabla^2 u + f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \epsilon D \nabla^2 v + g(u, v)\end{aligned}$$

con $0 < \epsilon \ll 1$, $D > 0$, donde ϵ es la razón de escalas temporales de velocidades de reacción para las dos especies u , v . Las funciones f , g tienen la dinámica típica de medios excitables.

Los peces de muchas especies se mueven por medio de ondulaciones rítmicas debidas a contracciones que pasan a lo largo de la espina dorsal, y que se deben a su vez a cambios rítmicos de voltaje. El "programa" neuronal que produce este tipo de comportamiento se

conoce como generador central de patrones (CPG). Excepto en invertebrados muy sencillos, el funcionamiento de los CPG es desconocido. Sin embargo, se acepta como hipótesis de trabajo que los CPG involucran la interacción de osciladores acoplados, en donde cada oscilador puede ser una sola célula o una red de ellas. Una pregunta muy importante es cómo interactúan los osciladores para generar espontáneamente y establemente los patrones de fases espaciales y temporales adecuados para que los músculos se contraigan en los momentos debidos. A pesar de lo poco que se sabe, algo puede hacerse, porque muchas observaciones son consecuencia de propiedades generales de osciladores acoplados, independientes de los detalles de la fisiología. Las matemáticas proporcionan una herramienta para identificar qué aspectos de la fisiología son significativos y hacen predicciones acerca de ella.

El modelo utilizado para el movimiento de peces consta de osciladores acoplados pero no por acoplamiento difusivo (como el que se tratará en este trabajo) sino por un acoplamiento más general como el que se espera de células que interactúan por medio de sinapsis y no por mera difusión. Se supone que el acoplamiento es débil, que los osciladores interactúan solamente con sus vecinos más cercanos y que cada oscilador tiene un ciclo límite.

El acoplamiento sináptico se introduce porque en el caso del movimiento de peces, se buscan soluciones en las que haya atrapamiento de fase (es decir, la diferencia de fase es independiente del tiempo) y con acoplamiento difusivo la solución que se tiene es aquella en que la diferencia de fase es cero.

Se ha observado que los embriones de peces presentan movimientos en que la diferencia de fase es cero, lo que según las matemáticas correspondería a un estado en el que aún no hay sinapsis desarrolladas. Más adelante, los embriones comienzan a mostrar el tipo normal de movimiento, que indica el desarrollo de la sinapsis.

El cerebro es un órgano muy complicado y hasta ahora no se sabe realmente cuál es la mejor manera de estudiarlo. Algunos piensan que por medio de física, química y modelos matemáticos como el que se tratará en los siguientes capítulos es posible dilucidar lo que está pasando, pero otros creen que es necesario tratar de entender las cosas en forma más cualitativa y no tratar de entender cada detalle; este es aproximadamente el enfoque de René Thom. Hay otros más que dicen que las funciones no son ni físicas ni químicas sino cibernéticas. El cerebro es un órgano sensor y de control y debe por lo tanto estudiarse con métodos de computación. Este enfoque tampoco es sencillo ya que el cerebro se comporta a veces como computadora digital, a veces como computadora analógica y a veces como mucho más que ambas. Se modela como máquina de Turing, como autómatas de estados finitos o como algo continuo. Un modelo continuo es por ejemplo la teoría de holograma de la memoria. Sin embargo, estos modelos no contemplan los aspectos de computadora del cerebro. La experiencia con inteligencia artificial ha mostrado que muchas de las cosas que realiza el cerebro requieren algoritmos muy sofisticados. De hecho muchas de las funciones del cerebro, algunas en el área de reconocimiento de patrones y voces ha resultado imposibles de duplicarse hasta ahora [Br].

En lo que sigue se estudia un sistema (con tres parámetros) de dos osciladores con ciclo límite acoplados por acoplamiento difusivo. Se estudian las diferentes soluciones que existen cuando se varían los parámetros que son, uno la frecuencia natural de los osciladores y los otros dos parte del acoplamiento. Se observan varios tipos de bifurcaciones y algunas regiones de biestabilidad.

En el capítulo 1 se presenta el problema que va a estudiarse, explicando en qué sentido puede considerarse como un modelo canónico de osciladores acoplados. Se da también un repaso de los elementos de la teoría de Floquet que se usarán en los capítulos siguientes.

En el capítulo 2 se ve qué soluciones existen cuando los osciladores están desacoplados y se demuestra que las que subsisten cuando hay acoplamiento son la solución estacionaria (ambos osciladores en reposo), aquella en que un oscilador se mueve mientras el otro per-

manece en reposo, una en que los osciladores se mueven en fase y otra en que se mueven fuera de fase. Se estudia con cierto detalle cada una de estas soluciones.

La solución en fase, ω_0 , y la solución fuera de fase, ω_π son de particular interés. La primera se estudia en el capítulo 3. La existencia y estabilidad de la segunda se estudian en el capítulo 4.

En el capítulo 5 se utiliza el número de rotación, cuyas propiedades se demuestran en el apéndice 1, para estudiar la estabilidad de la solución fuera de fase en el espacio de los parámetros. Se dice lo que se entiende por estructura de resonancia y se ve cómo varía ésta con los parámetros.

En el capítulo 6 se estudia el caso particular en que uno de los parámetros es cero. Se ve que es posible encontrar una solución completa al problema para este valor particular del parámetro.

El trabajo se basa principalmente en la referencia [O.W.].

Los diagramas de bifurcación se hicieron en una VAX con el programa AUTO.

Se agradece todo el trabajo y paciencia de Jorge Ize y las correcciones y comentarios de Arturo Vargas, A.A. Minzoni y Catherine García Reimbert.

CAPÍTULO 1

1. DERIVACIÓN DEL PROBLEMA CANÓNICO

El comportamiento de osciladores acoplados puede, en el límite de acoplamiento débil, estudiarse sin conocer la estructura precisa del campo vectorial subyacente. Sin embargo, para acoplamiento intermedio, que es importante en las aplicaciones, el comportamiento depende fuertemente del campo. En lo que sigue se estudiarán sistemas descritos por

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y - x(x^2 + y^2) \\ -\beta x + \alpha y - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

En las coordenadas

$$z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

dos osciladores descritos por el campo anterior y acoplados linealmente obedecen al sistema

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= f(z_1) + \delta D(z_2 - z_1) \\ \frac{dz_2}{dt} &= f(z_2) + \delta D(z_1 - z_2) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

donde D es una matriz de 2×2 .

Se mostrará primero en qué sentido puede (1.1.1) considerarse como un modelo canónico de osciladores acoplados linealmente pasando las ecuaciones generales de este tipo de osciladores a su forma normal.

1.1 FORMAS NORMALES

Supóngase que se tiene un sistema suave en \mathbb{R}^2 de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= f_1(c_1, c_2, a) \\ \frac{dc_2}{dt} &= f_2(c_1, c_2, a), \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Supóngase que el sistema

$$f_i(c_1, c_2, a) = 0, \quad i = 1, 2 \tag{1.1.3}$$

6 1. DERIVACIÓN DEL PROBLEMA CANÓNICO

tiene una solución única $(c_1^*(a), c_2^*(a))$ para a en una vecindad de un punto dado a_0 y sean

$$u_i = c_i - c_i^*, \quad i = 1, 2.$$

Entonces expandiendo en series de Taylor se tiene que (1.1.2) puede escribirse como

$$\frac{du}{dt} = Lu + f(u),$$

donde L es un operador lineal, f es polinomial y se ha eliminado la dependencia en a . Supóngase que para alguna a cerca de a_0 , L tiene valores propios de la forma $\alpha(a) \pm i\beta(a)$, donde $\alpha(a_0) = 0$ y $\beta(a_0) \neq 0$.

Sea η tal que $L\eta = \lambda\eta$, con $\eta \in \mathbb{C}^2$, $\lambda = \lambda(a) = \alpha - i\beta$, entonces $L\bar{\eta} = \bar{\lambda}\bar{\eta}$, por lo que, como $\lambda \neq \bar{\lambda}$, ($\beta(a_0) \neq 0$) se tiene que $\bar{\eta}$ es vector propio de L . Como dos valores propios diferentes no pueden tener vectores propios iguales, $\eta, \bar{\eta}$ son linealmente independientes y constituyen una base de \mathbb{C}^2 ; como $u \in \mathbb{R}^2$ puede pensarse como $u \in \mathbb{C}^2$, u puede expresarse como

$$u = z\eta + z_1\bar{\eta},$$

con $z, z_1 \in \mathbb{C}$. Como $u = \bar{u}$ se tiene que $z_1 = \bar{z}$. De la misma forma puede expresarse f como combinación lineal de η y $\bar{\eta}$ por lo que se tiene

$$f = g\eta + \bar{g}\bar{\eta}$$

$$u = z\eta + \bar{z}\bar{\eta},$$

donde por ser f polinomial, $g(z, \bar{z}) = \sum_{p+q \geq 2} g_{pq} z^p \bar{z}^q$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= Lu + f(u) \\ &= z'\eta + \bar{z}'\bar{\eta} \\ &= L(z\eta + \bar{z}\bar{\eta}) + g(z, \bar{z})\eta + \bar{g}(z, \bar{z})\bar{\eta} \\ &= \lambda z\eta + \bar{\lambda}\bar{z}\bar{\eta} + g\eta + \bar{g}\bar{\eta} \end{aligned}$$

Como η y $\bar{\eta}$ son linealmente independientes se concluye que

$$z' = \lambda z + g(z, \bar{z}, a)$$

$$\bar{z}' = \bar{\lambda}\bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z}, a).$$

Considérese ahora la transformación

$$x = z + \sum_{p+q \geq 2} \gamma_{pq} z^p \bar{z}^q. \quad (1.1.4)$$

Por el Teorema de la Función Implícita se tiene que

$$z = x + \sum_{p+q \geq 2} \beta_{pq} x^p \bar{x}^q, \quad (1.1.5)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{dt} + \sum_{p+q \geq 2} \gamma_{pq} (pz^{p-1} \bar{z}^q \frac{dz}{dt} + qz^p \bar{z}^{q-1} \frac{d\bar{z}}{dt}) \\ &= \lambda x + \sum_{m+n \geq 2} g_{nm} z^n \bar{z}^m + \sum_{\substack{p+q \geq 2 \\ n+m \geq 2}} \gamma_{pq} (g_{nm} pz^{p-1+n} \bar{z}^{q+m} + \bar{g}_{nm} qz^{p+m} \bar{z}^{q-1+n}) \\ &\quad + \sum_{p+q \geq 2} \gamma_{pq} (p\lambda z^p \bar{z}^q + q\bar{\lambda} z^p \bar{z}^q) \\ &= \lambda x + \sum_{p+q \geq 2} (g_{pq} + \gamma_{pq}(p\lambda + q\bar{\lambda})) z^p \bar{z}^q + \sum_{p+q \geq 3} h_{pq} z^p \bar{z}^q, \end{aligned}$$

donde h_{pq} depende de $\gamma_{p'q'}$, $g_{p'q'}$ con $p' + q' < p + q$. Por (1.1.4) se tiene que

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + \sum_{p+q \geq 2} (g_{pq} + \gamma_{pq}(\lambda(p-1) + \bar{\lambda}q)) z^p \bar{z}^q + \sum_{p+q \geq 3} h_{pq} z^p \bar{z}^q,$$

o escrito de otra forma

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + \sum_{p+q \geq 2} (g_{pq} + \gamma_{pq}(\lambda(p-1) + \bar{\lambda}q) + h_{pq}) z^p \bar{z}^q.$$

Por (1.1.5) lo anterior es igual a

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + \sum_{p+q \geq 2} (g_{pq} + \gamma_{pq}(\lambda(p-1) + \bar{\lambda}q) + \bar{h}_{pq}) z^p \bar{z}^q,$$

donde \bar{h}_{pq} depende de $g_{p'q'}$, $\gamma_{p'q'}$, con $p' + q' < p + q$.

Para el valor del parámetro a_0 se tiene que $\lambda = i\beta$, entonces

$$\gamma_{pq}(\lambda(p-1) + \bar{\lambda}q) + g_{pq} + \bar{h}_{pq} \rightarrow \gamma_{pq}(i\beta)(p-1-q) + g_{pq} + \bar{h}_{pq}.$$

Si $p \neq q+1$ por el Teorema de la Función Implícita puede escogerse γ_{pq} tal que esa expresión sea 0. En forma inductiva puede hacerse lo mismo para las demás \bar{h}_{pq} . Lo que se tiene entonces es

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + \sum_{p \geq 1} c_{2p} |x|^{2p} x$$

o de otra forma

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + c_2 |x|^2 x + \text{residuo.}$$

Separando partes real e imaginaria se obtiene

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 + \beta y_1 + c_2 x_1 (x_1^2 + y_1^2) + O(|x|^4)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\beta x_1 + \alpha y_1 + c_2 y_1 (x_1^2 + y_1^2) + O(|x|^4).$$

Sin pérdida de generalidad pueden tomarse $\alpha = 1$ (dividiendo todo entre α) y $c_2 = 1$, ya que si es diferente de 1 se toma $\bar{x}_1 = \mu x_1$, $\bar{y}_1 = \mu y_1$ con $\mu^2 = 1/c_2$. Esta es la forma normal.

§ 1. DERIVACIÓN DEL PROBLEMA CANÓNICO

Despreciando términos de orden $O(|x|^4)$ y escribiendo $\zeta_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ lo anterior puede escribirse como

$$\zeta_1' = K\zeta + r_1^2\zeta,$$

donde $K = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$ y $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$.

Supóngase ahora que se acoplan dos osciladores, cada uno gobernado por (1.1.2). Sean $c = (c_1, c_2)$, $f = (f_1, f_2)$. Si los superíndices denotan al oscilador, el sistema obedece las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dc^1}{dt} &= f(c^1, a) + F(c^1, c^2) \\ \frac{dc^2}{dt} &= f(c^2, a) + F(c^2, c^1). \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Se supondrá que el acoplamiento es conservativo o antisimétrico (i.e. $F(c^2, c^1) = -F(c^1, c^2)$ o $F(c^1, c^1) = 0$), lo cual implica que existen soluciones estacionarias de (1.1.6) de la forma (c^*, c^*) donde c^* es solución de (1.1.3). Sea c^* dicha solución y escríbase

$$u^i = c^i - c^*.$$

Si F es suficientemente suave (1.1.6) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{du^1}{dt} &= Lu^1 + Q(u^1) + \dots + F_1 u^1 + F_2 u^2 + \\ &\quad + F_{11}(u^1, u^1) + F_{12}(u^1, u^2) + F_{22}(u^2, u^2) + \dots \\ \frac{du^2}{dt} &= Lu^2 + Q(u^2) + C(u^2) + \dots + F_1 u^2 + F_2 u^1 + \\ &\quad + F_{11}(u^2, u^2) + F_{12}(u^2, u^1) + F_{22}(u^1, u^1) + \dots, \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

donde

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{\partial F}{\partial c^i}(c^*, c^*), \quad i = 1, 2, \\ F_{ij} &= \frac{2}{i!j!} \frac{\partial^2 F}{\partial c^i \partial c^j}(c^*, c^*), \quad i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Por ser F antisimétrica debe satisfacer

$$\begin{aligned} F_1 u^2 + F_2 u^1 + F_{11}(u^2, u^2) + F_{12}(u^2, u^1) + F_{22}(u^1, u^1) = \\ = -F_1 u^1 - F_2 u^2 - F_{11}(u^1, u^1) - F_{12}(u^1, u^2) - F_{22}(u^2, u^2) + \dots \end{aligned}$$

para toda u^1, u^2 . Se concluye entonces que

$$\begin{aligned} F_1 u^2 = -F_2 u^1; \quad F_2 u^1 = -F_1 u^2 \\ F_{11}(u^2, u^2) = -F_{22}(u^2, u^2); \quad F_{22}(u^1, u^1) = -F_{11}(u^1, u^1) \\ F_{12}(u^2, u^1) = F_{12}(u^1, u^2) = 0, \end{aligned}$$

de donde (1.1.7) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{du^1}{dt} &= Lu^1 + Q(u^1) + C(u^1) + \dots + \tilde{D}(u^2 - u^1) + F_{22}(u^2, u^2) - F_{22}(u^1, u^1) + \dots \\ \frac{du^2}{dt} &= Lu^2 + Q(u^2) + C(u^2) + \dots + \tilde{D}(u^1 - u^2) + F_{22}(u^1, u^1) - F_{22}(u^2, u^2) + \dots, \end{aligned}$$

donde \bar{D} es la matriz F_2 . Ahora hay que reducir este sistema acoplado a la forma normal.

Lo que se hará es tomar acoplamiento lineal, que es la primera aproximación al acoplamiento por difusión a primeros vecinos. En este caso se puede usar la misma transformación que antes para reducir la parte no acoplada a la forma canónica y como sólo se agregan términos lineales con el acoplamiento y estos no cambian a primer orden con las transformaciones hechas se tiene que el problema canónico para dos osciladores acoplados linealmente está dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{d\xi^1}{dt} &= (K - r_1^2 I)\xi^1 + \delta D(\xi^2 - \xi^1) \\ \frac{d\xi^2}{dt} &= (K - r_2^2 I)\xi^2 + \delta D(\xi^1 - \xi^2),\end{aligned}\quad (1.1.8)$$

donde

$$\xi^i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \quad r_i^2 = (x_i^2 + y_i^2), \quad D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}.$$

Nótese que aun si la matriz original de acoplamiento \bar{D} es diagonal, D no lo es en general ya que la transformación a la forma canónica introduce acoplamiento fuera de la diagonal. Sin embargo, como el campo es invariante bajo rotaciones, el campo vectorial para el sistema acoplado es equivalente bajo una transformación ortogonal a uno en que la matriz de acoplamiento está dada por $D = \text{diag}(D_1, D_2)$; si $\xi = \bar{P}x$ donde \bar{P} es una matriz de rotación entonces

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (\bar{P}^T K \bar{P} - r^2 I)x + \bar{P}^T D \bar{P}(x^1 - x^2) \\ &= (K - r^2 I)x + \bar{P}^T D \bar{P}(x^1 - x^2).\end{aligned}$$

Lo que se hará es ver cómo cambia la estructura del conjunto de bifurcación cuando la matriz de acoplamiento D va de $\text{diag}(2, 2)$ a $\text{diag}(2, -2)$ pasando por todas las posibles matrices diagonales (módulo un rescalamiento). Obsérvese que los casos en que un valor propio es negativo no corresponden a problemas "reales". Además se tomará $D_1 = 2$ y $D_2 = 2(1 - 2\epsilon)$, con $\epsilon \in [0, 1]$, es decir $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2(1 - 2\epsilon) \end{pmatrix}$. Las ecuaciones (1.1.1) se escriben entonces como

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 + \beta y_1 - x_1(x_1^2 + y_1^2) + 2\delta(x_2 - x_1) \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\beta x_1 + y_1 - y_1(x_1^2 + y_1^2) + 2\delta(1 - 2\epsilon)(y_2 - y_1) \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 + \beta y_2 - x_2(x_2^2 + y_2^2) + 2\delta(x_1 - x_2) \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\beta x_2 + y_2 - y_2(x_2^2 + y_2^2) + 2\delta(1 - 2\epsilon)(y_1 - y_2).\end{aligned}\quad (1.1.9)$$

Tomando $z_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ las ecuaciones pueden escribirse en forma más compacta como

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= K z_1 - z_1 |z_1|^2 + \delta D(z_2 - z_1) \\ \frac{dz_2}{dt} &= K z_2 - z_2 |z_2|^2 + \delta D(z_1 - z_2),\end{aligned}$$

donde nuevamente $K = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$.

10 1. DERIVACIÓN DEL PROBLEMA CANÓNICO

Estas son las ecuaciones que se estudiarán en este trabajo. Para $\epsilon = 0$, $D = \text{diag}(2, 2)$, para $\epsilon = 1/2$, $D = \text{diag}(2, 0)$ y para $\epsilon = 1$, $D = \text{diag}(2, -2)$.

1.2 REPASO DE TEORÍA DE FLOQUET

En los capítulos siguientes se usaran mucho los llamados multiplicadores de Floquet y algunos otros elementos de la teoría de Floquet, por lo que a continuación se presenta un breve repaso del tema. Para un tratamiento más completo se recomienda consultar [Jo] capítulo 6.

La teoría de Floquet estudia ecuaciones de la forma

$$\dot{y} = A(t)y, \quad (1.2.1)$$

donde $y \in \mathbb{R}^n$ y $A(t)$ es periódica con período mínimo p , es decir, p es el menor número positivo tal que

$$A(t+p) = A(t), \quad -\infty < t < \infty.$$

Las soluciones no son necesariamente periódicas, como puede observarse al considerar por ejemplo la ecuación $\dot{y} = (1 + \sin t)y$, cuyas soluciones están dadas por $y = ce^{t - \cos t}$ donde c es una constante; sólo la solución $y = 0$ es periódica. Sin embargo puede decirse mucho acerca de las soluciones.

Obsérvese que si $y(t)$ es una solución de la ecuación entonces $y(t+p)$ también es una solución, ya que si $y'(t) = A(t)y(t)$ entonces

$$y'(t+p) = A(t+p)y(t+p) = A(t)y(t+p).$$

Esto implica que si $Y(t)$ es una matriz fundamental, $Y(t+p)$ también lo es, y como un conjunto completo de soluciones es combinación lineal de cualquier otro se tiene que existe una matriz constante no singular Ω tal que

$$Y(t+p) = Y(t)\Omega.$$

Poniendo $t = 0$ se observa que Ω está dada por

$$\Omega = Y^{-1}(0)Y(p).$$

Si se escoge otra matriz fundamental $Z(t) = Y(t)C$ entonces

$$Z^{-1}(0)Z(p) = C^{-1}Y^{-1}(0)Y(p)C = C^{-1}\Omega C,$$

es decir se obtiene una matriz similar. Esto implica que los valores propios de Ω no dependen de la matriz fundamental que se escoja; estos valores propios se conocen como *multiplicadores de Floquet*. Si se escoge la matriz fundamental tal que $Y(0) = I$ entonces los multiplicadores de Floquet son los valores propios de $Y(p)$.

Se tratará ahora de caracterizar las soluciones de la ecuación (1.2.1). Supóngase que puede encontrarse una matriz *real* C tal que $\Omega = e^{pC}$. Defínase

$$P(t) = Y(t)e^{-tC}.$$

$P^{-1}(t)$ existe porque $Y(t)$ tiene determinante diferente de cero y e^{-tC} también, esta última por ser una matriz fundamental para la ecuación $x' = -Cx$. Además $P(t)$ es periódica pues

$$P(t+p) = Y(t+p)e^{-(t+p)C} = Y(t)\Omega e^{-tC} = P(t).$$

La matriz fundamental puede entonces escribirse como

$$Y(t) = P(t)e^{tC},$$

donde $P(t)$ es periódica y C es constante. Cualquier solución es de la forma $y(t) = P(t)e^{tC}\xi$. Obsérvese que la sustitución $y(t) = P(t)z(t)$ transforma la ecuación (1.2.1) en $z' = Cz$, una ecuación con coeficientes constantes. Como $P(t)$ es periódica, el comportamiento de las soluciones depende únicamente de los valores propios, λ , de la matriz C .

Para todo esto se supuso que existía una matriz real C tal que $\Omega = e^{pC}$. Como $\omega = 0$ no es un valor propio de Ω , siempre puede encontrarse una matriz compleja C que cumpla con la condición mencionada tomando $C = (\log \Omega)/p$, donde $\log z$ se define como una función analítica univaluada en el plano complejo cortado a lo largo de un rayo que no contenga ningún valor propio de Ω . El problema es que para el estudio de las ecuaciones diferenciales no lineales es necesario que C sea real.

Obsérvese que si Ω no tiene valores propios negativos entonces C puede escogerse real definiendo $\log z$ en el plano complejo cortado a lo largo del eje real negativo con $\log(1) = 0$. Entonces si Γ es una trayectoria simétrica con respecto al eje real se tiene que

$$\log \Omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\zeta I - \Omega)^{-1} \log \zeta d\zeta$$

es real, ya que $\log \bar{\zeta} = \overline{\log \zeta}$ y Ω es real. El problema ocurre cuando Ω tiene valores propios negativos; en algunos casos puede de todas maneras encontrarse una C real tal que $\Omega = e^{pC}$, pero puede demostrarse que si k es un real mayor que cero y el espacio nulo de $\Omega - kI$ es unidimensional entonces la ecuación $\Omega = e^{pC}$ no tiene soluciones reales para Ω real. Sin embargo se tiene el siguiente lema:

Lema: Si Ω es real y no singular existe una matriz real C tal que $\Omega^2 = e^{2pC}$.

Si se usa esta C en la transformación $P(t) = Y(t)e^{-tC}$ los resultados no cambian, lo único que pasa es que ahora $P(t)$ tiene el doble del período que antes.

Prueba: Como la aseveración es invariante bajo transformaciones de similitud puede suponerse que Ω está en una forma de Jordan real. Además pueden etiquetarse los valores propios de manera que

$$\Omega = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

donde A es una matriz real en forma de Jordan sólo con valores propios negativos y B es una matriz real, también en forma de Jordan, sin valores propios negativos. Por lo que se dijo antes, $B = e^{p\beta}$ para alguna matriz real β . Pero $\Omega^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & B^2 \end{pmatrix}$, y A^2 sólo tiene valores propios reales positivos, por lo que puede encontrarse una matriz real α tal que $A^2 = e^{2p\alpha}$, y entonces

$$\Omega^2 = e^{2p} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Si se toma $C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ se tiene que $\Omega^2 = e^{2pC}$.

CAPÍTULO 2

2. SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA δ PEQUEÑA

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se verá cuáles de las soluciones que existen cuando $\delta = 0$ subsisten cuando $\delta \neq 0$ y pequeña.

Un oscilador gobernado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x + \beta y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= -\beta x + \alpha y - y(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

tiene un ciclo límite asintóticamente estable $\Omega_0 = (\cos \beta t, -\text{sen } \beta t)$.

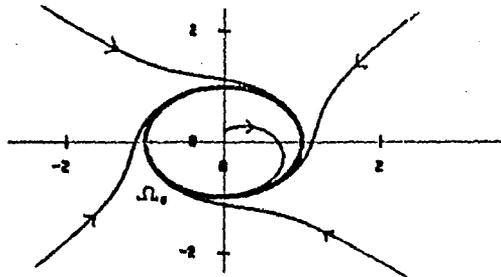


Figura 2.1.1

Por lo tanto cuando $\delta = 0$ en las ecuaciones (1.1.9), es decir, se consideran dos osciladores con la forma de arriba y desacoplados, se tiene un toro invariante atractivo T_0^2 generado por el producto $\Omega_0 \times \Omega_0$ de los ciclos límite. T_0^2 está cubierto por una familia biparamétrica de soluciones periódicas y cada miembro de la familia está determinado por un par de ángulos de fase iniciales. Como el sistema es autónomo y el origen del tiempo puede entonces colocarse arbitrariamente, sólo hay un parámetro esencial, la diferencia de fase inicial. Todas las soluciones periódicas sobre el toro son degeneradas ya que cada una tiene dos multiplicadores de Floquet iguales a uno, como se verá más adelante, por lo que no puede esperarse que toda la familia uniparamétrica subsista cuando se introduce un acoplamiento pequeño. Es necesario determinar si alguna solución persiste y cuál.

Además del ciclo límite mencionado arriba se tiene para cada oscilador la solución estacionaria $x = y = 0$. Estas dos son todas las soluciones posibles para $\delta = 0$, como se demostrará abajo.

Como $z_1^T z_1 = r_1^2$ se tiene que

$$\frac{1}{2} \frac{dr_1^2}{dt} = r_1^2 - r_1^4 = r_1^2(1 - r_1^2),$$

de donde se concluye que si para algún t_0 se tiene $r_1(t_0) = 1$ entonces por unicidad $r_1 \equiv 1$. Si $r_1(t_0) < 1$ entonces $r_1(t) < 1 \forall t$ y si $r_1(t_0) > 1$ entonces $r_1(t) > 1 \forall t$, por lo que no hay soluciones periódicas más que para $r_1 \equiv 0$ o $r_1 \equiv 1$, es decir, las únicas soluciones periódicas para un oscilador son $\eta(t) = (\cos \beta t, -\sin \beta t)^T$, $\eta(t + \theta)$ o 0 . Se concluye entonces que para los dos osciladores, en $\delta = 0$ las posibles soluciones periódicas son: $(0, 0)$, $(\eta(t), 0)$, $(0, \eta(t))$, $(\eta(t), \eta(t + \theta))$, para toda θ . En la sección 2.2 se estudian las ramas de soluciones estacionarias y las bifurcaciones que aparecen en ellas. En la sección 2.3 se definen las órbitas hiperbólicas y la estabilidad estructural y se demuestra que las soluciones $(\eta, 0)$ y $(0, \eta)$ subsisten para δ pequeña. En las últimas secciones del capítulo se tratan las soluciones (η, η_θ) , utilizando lo que se conoce como reducción de orden. Se demuestra que de esta familia uniparamétrica las únicas soluciones que subsisten cuando el acoplamiento es diferente de cero son aquella en que los osciladores están en fase y aquella en que están π radianes fuera de fase.

2.2 SOLUCIONES ESTACIONARIAS

La solución estacionaria de las ecuaciones (1.1.9) está dada por $z_1 = z_2 = 0$. Si se escribe $w_1 = \frac{z_1 + z_2}{2}$, $w_2 = \frac{z_1 - z_2}{2}$ entonces las ecuaciones (1.1.9) tienen la forma

$$\frac{dw_1}{dt} = K w_1 - (|w_1|^2 + |w_2|^2) w_1 - 2(w_1, w_2) w_2 \quad (2.2.1)$$

$$\frac{dw_2}{dt} = K w_2 - (|w_1|^2 + |w_2|^2) w_2 - 2(w_1, w_2) w_1 - 2\delta D w_2, \quad (2.2.2)$$

donde $K = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2(1 - 2\epsilon) \end{pmatrix}$. Al linealizar las ecuaciones anteriores cerca de $(0, 0)$ lo que se obtiene es

$$\frac{dw_1}{dt} = K w_1$$

$$\frac{dw_2}{dt} = K w_2 - 2\delta D w_2.$$

K tiene valores propios $1 \pm i\beta$ por lo que las soluciones estacionarias tienen $w_1 = 0$. Entonces el comportamiento de las soluciones estacionarias está determinado por los valores propios de $(K - 2\delta D)$. Si esa matriz es invertible entonces la única solución estacionaria es $w_2 \equiv 0$; si tiene un valor propio que pase por cero, en ese punto la matriz no es invertible y por lo tanto se tienen soluciones estacionarias diferentes de la trivial, es decir, cuando un valor propio pasa por cero se tiene una bifurcación de estados estacionarios; si tiene un par de valores propios complejos conjugados que crucen el eje imaginario entonces, se tendrá una bifurcación de Hopf. Obsérvese que debido a los valores propios de K , las soluciones estacionarias son inestables.

Bifurcación de Hopf

(Véase [Lz] pp. 13-15). Considérese la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \delta),$$

14 2. SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA δ PEQUEÑA

con $x \in \mathbb{R}^n$, δ un parámetro real. Supóngase que se tienen soluciones estacionarias de la forma $(x(\delta), \delta)$ (se tomará $x(\delta) = 0$) y lo que se quiere es buscar soluciones periódicas vecinas a las soluciones estacionarias.

$$f(0, \delta) = 0 \Rightarrow f(x, \delta) = A(\delta)x + g(x, \delta),$$

donde A es lineal en x y $g(x, \delta) = o(|x|)$. La ecuación puede escribirse entonces como

$$\frac{dx}{dt} = A(\delta)x + g(x, \delta).$$

Las soluciones de la parte lineal son $e^{A(\delta)t}x_0$. Para la ecuación completa las soluciones son

$$x(t) = e^{A(\delta)t}x_0 + \int_0^t e^{A(\delta)(t-s)}g(x(s), \delta) ds,$$

donde $x(0) = x_0$.

Para sistemas autónomos, $x(t)$ es solución periódica de período $T \iff x(T) = x(0)$, debido a la unicidad de la solución, es decir que la solución es periódica de período T si y sólo si

$$(I - e^{A(\delta)T})x_0 - \int_0^T e^{A(\delta)(T-s)}g(x(s), \delta) ds = 0.$$

Nótese que en la ecuación anterior se tienen dos parámetros, δ y el período T . La integral es $o(|x_0|)$ porque $T < \infty$ y por lo tanto si $(I - e^{A(\delta)T})$ es invertible entonces la única solución es la trivial $x_0 = 0$, y la condición necesaria para tener soluciones no triviales es entonces que $(I - e^{A(\delta)T})$ no sea invertible, es decir, $1 \in \sigma(e^{A(\delta)T}) = e^{\sigma(A(\delta)T)}$, donde $\sigma(L)$ denota el espectro del operador L . Se tiene entonces que la condición necesaria para que haya bifurcación de Hopf es que exista $\mu \in \sigma(A(\delta)T)$ con $e^\mu = 1$, es decir $\mu = 2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Estas son condiciones necesarias para que haya una bifurcación. Algunas condiciones de suficiencia se prueban en el apéndice 2.

Lo que se hará entonces es calcular los valores propios y ver si muestran alguno de los comportamientos mencionados arriba. Los valores propios están dados por

$$\begin{aligned} 0 = \det(K - 2\delta D - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1 - 4\delta - \lambda & \beta \\ -\beta & 1 - 4\delta(1 - 2\epsilon) - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 - 4\delta - \lambda)(1 - 4\delta - \lambda + 8\delta\epsilon) + \beta^2 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda(1 - 4\delta + 4\delta\epsilon) + (1 - 4\delta)^2 + 8\delta\epsilon(1 - 4\delta) + \beta^2, \end{aligned}$$

de donde se concluye que los valores propios son

$$\lambda_{1,2} = 1 - 4\delta(1 - \epsilon) \pm (16\delta^2\epsilon^2 - \beta^2)^{1/2}.$$

Si $\beta > 4|\delta\epsilon|$ entonces los valores propios son conjugados con parte real $1 - 4\delta(1 - \epsilon)$ y se tiene bifurcación de Hopf cuando la parte real se vuelve cero, es decir, cuando $\delta = 1/4(1 - \epsilon)$. Para que los valores propios sigan siendo complejos cuando su parte real se vuelve cero es necesario que $\beta > \epsilon/(1 - \epsilon)$, es decir, siempre que $\beta > \epsilon/(1 - \epsilon)$ se tiene una bifurcación de Hopf en $\delta = 1/4(1 - \epsilon)$.

Por otro lado, si $\beta < 4|\delta\epsilon|$ entonces los valores propios son reales y están dados por

$$\lambda_1 = 1 - 4\delta(1 - \epsilon) - (16\delta^2\epsilon^2 - \beta^2)^{1/2},$$

$$\lambda_2 = 1 - 4\delta(1 - \epsilon) + (16\delta^2\epsilon^2 - \beta^2)^{1/2}.$$

En este caso se tiene $\lambda_1 = 0$ si $16\delta^2\epsilon^2 - \beta^2 = (1 - 4\delta(1 - \epsilon))^2$, es decir, si

$$f(\delta) = 16(1 - 2\epsilon)\delta^2 - 8\delta(1 - \epsilon) + 1 + \beta^2 = 0.$$

Si $\epsilon = 1/2$ el coeficiente de δ^2 es cero y se obtiene $\delta = (1 + \beta^2)/4$, y si $\epsilon \neq 1/2$ entonces se encuentra que los valores de δ para los cuales se tienen bifurcaciones de estados estacionarios son

$$\delta = \frac{4(1 - \epsilon) \pm (16(1 - \epsilon)^2 - 16(1 - 2\epsilon)(1 + \beta^2))^{1/2}}{16(1 - 2\epsilon)},$$

o simplificando,

$$\delta = \frac{1}{4(1 - 2\epsilon)}(1 - \epsilon \pm (\epsilon^2 - (1 - 2\epsilon)\beta^2)^{1/2}).$$

Esto es real siempre que $\epsilon^2 \geq (1 - 2\epsilon)\beta^2$.

Si se toman ϵ, β fijos y se hace variar δ se tiene que para $|\delta|$ suficientemente grande, β es siempre menor que $4|\delta\epsilon|$ y como en ese caso 1 y β^2 son despreciables se tiene que $\lambda_1 \rightarrow \mp\infty$ siempre que $\delta \rightarrow \pm\infty$ y como $\lambda_2 \sim 4\delta(2\epsilon - 1)$ cuando $|\delta|$ es grande, se tiene que λ_2 se comporta como λ_1 si $\epsilon < 1/2$ y $\lambda_2 \rightarrow \pm\infty$ cuando $\delta \rightarrow \pm\infty$ si $\epsilon > 1/2$. En cualquier caso ambos valores propios cruzan el eje imaginario por lo que deben tenerse necesariamente bifurcaciones de Hopf o bifurcaciones de estados estacionarios o ambas.

En los diagramas de bifurcación, \blacksquare representa una bifurcación de Hopf y \square una bifurcación de estados estacionarios. En resumen se tiene:

$\epsilon > 1/2$

a) $\beta > \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ En este caso, los valores propios hacen lo que se muestra en la figura 2.2.1 y $f(\delta)$ se comporta como se ve en la figura 2.2.2, es decir, se tiene una bifurcación de Hopf y dos bifurcaciones de estados estacionarios, como se observa en la figura 2.2.3.

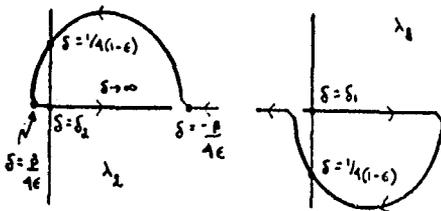


Figura 2.2.1

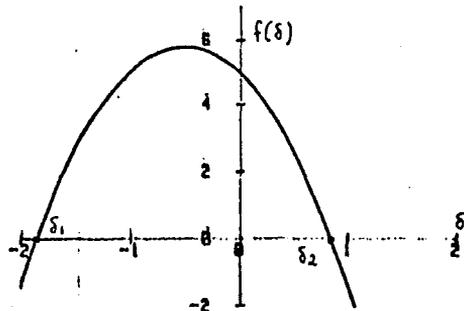


Figura 2.2.2

16 2. SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA δ PEQUEÑA

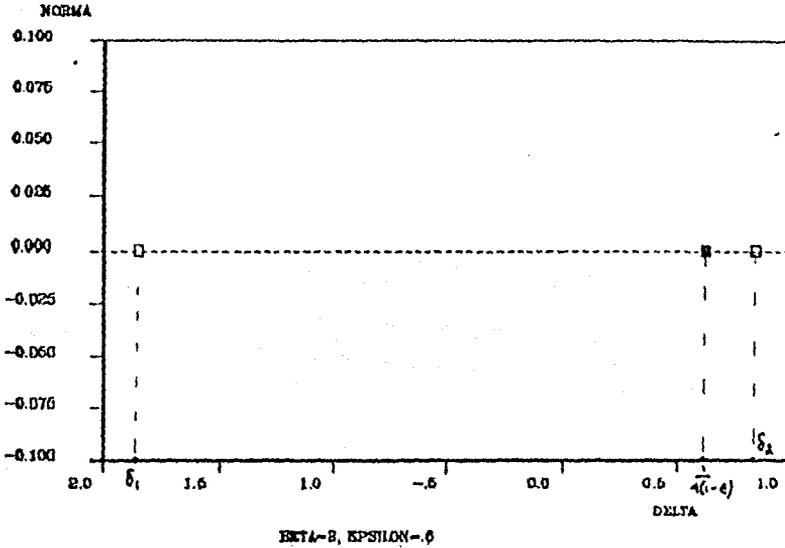


Figura 2.2.3

b) $\beta < \frac{1}{1-\epsilon}$ En este caso $f(\delta)$ es muy parecida al caso anterior, pero los valores propios ya no cruzan el eje imaginario como complejos conjugados (Figura 2.2.4) y por lo tanto ya no se tiene bifurcación de Hopf pero se tienen dos bifurcaciones de estados estacionarios. El diagrama de bifurcación se muestra en la figura 2.2.5.

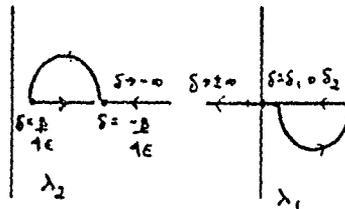


Figura 2.2.4

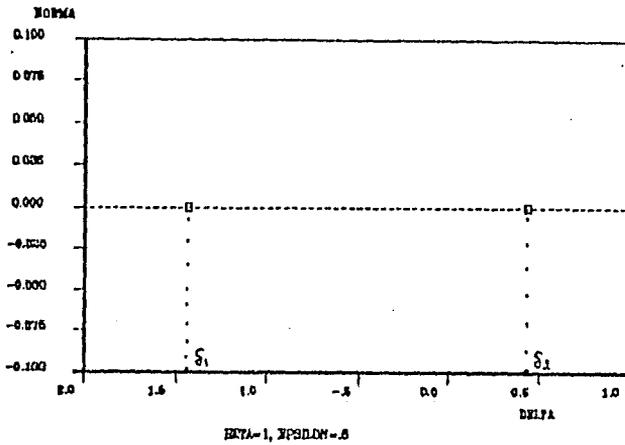


Figura 2.2.5

$\epsilon = 1/2$ Aquí $f(\delta)$ es lineal, tiene una sola raíz (Figura 2.2.6) y por lo tanto hay sólo una bifurcación de estados estacionarios en $\delta = (1 + \beta^2)/4$.

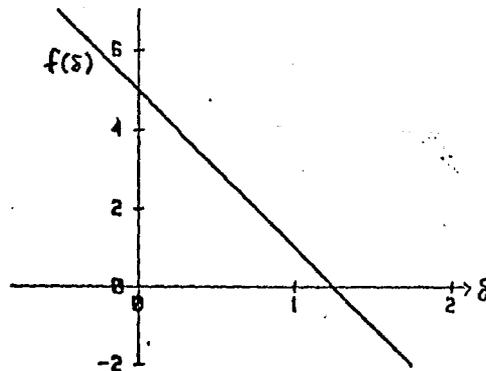


Figura 2.2.6

Si $\beta > 1$ entonces los valores propios cruzan el eje imaginario como complejos conjugados (Figura 2.2.7) y se tiene una bifurcación de Hopf en $\delta = 1/2$. Aquí $\lambda_1 \rightarrow -\infty$ cuando $\delta \rightarrow -\infty$ y $\rightarrow 1$ cuando $\delta \rightarrow \infty$; $\lambda_2 \rightarrow 1$ cuando $\delta \rightarrow -\infty$ y $\rightarrow -\infty$ cuando $\delta \rightarrow \infty$.

Si $\beta < 1$ un valor propio no cruza el eje imaginario y el otro se vuelve real antes de cruzar ese eje, (Figura 2.2.8), por lo que no hay bifurcación de Hopf. Aquí $\lambda_1 \rightarrow 1$ cuando $\delta \rightarrow \infty$ y $\lambda_2 \rightarrow 1$ cuando $\delta \rightarrow -\infty$.

Los diagramas de bifurcación correspondientes se muestran en las figuras 2.2.9 y 2.2.10.

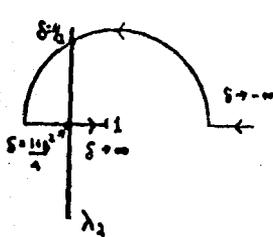


Figura 2.2.7

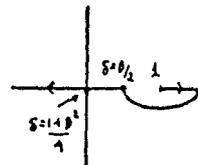
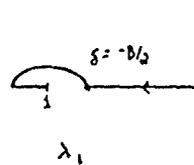
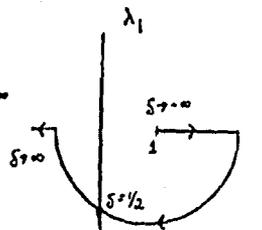


Figura 2.2.8

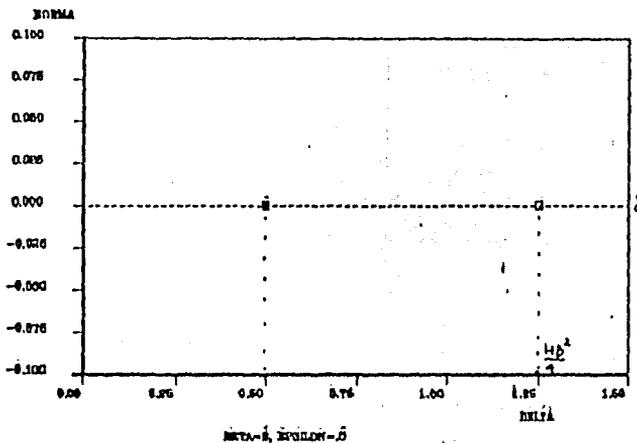


Figura 2.2.9

$\epsilon < 1/2$

a) $\beta^2 > \frac{\epsilon^2}{1-2\epsilon}$ Los valores propios cruzan el eje imaginario sólo como complejos conjugados (Figura 2.2.11), $f(\delta)$ no tiene raíces reales (Figura 2.2.12) y por lo tanto en el diagrama de bifurcación aparece solamente una bifurcación de Hopf en $\delta = 1/4(1 - \epsilon)$ (Figura 2.2.13).

b) $\frac{\epsilon^2}{(1-\epsilon)^2} < \beta^2 < \frac{\epsilon^2}{1-2\epsilon}$. Aquí los valores propios cruzan el eje imaginario una vez como complejos conjugados y después uno de ellos cruza dos veces sobre el eje real antes de ir a $-\infty$ (Figura 2.2.14) y $f(\delta)$ tiene 2 raíces reales (Figura 2.2.15). El correspondiente diagrama de bifurcación se muestra en la figura 2.2.16.

c) $\beta^2 < \frac{\epsilon^2}{(1-\epsilon)^2}$. Los valores propios no cruzan el eje imaginario como complejos conjugados (Figura 2.2.17) y $f(\delta)$ tiene dos raíces reales, por lo que se tienen únicamente dos bifurcaciones de estados estacionarios (Figura 2.2.19).

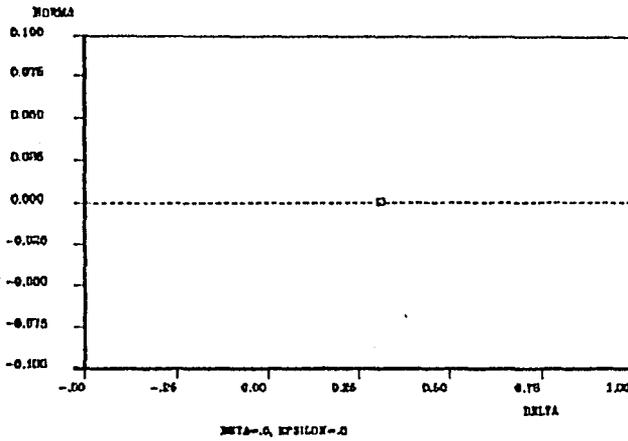


Figura 2.2.10

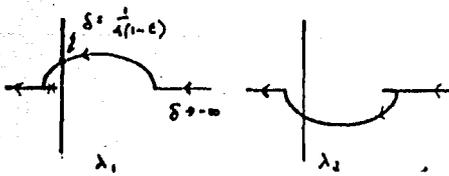


Figura 2.2.11

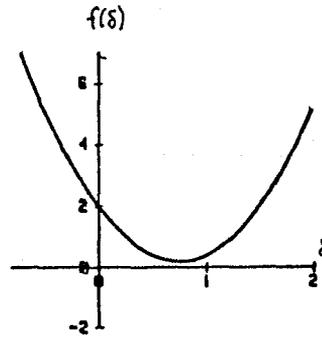


Figura 2.2.12

20 2. SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA δ PEQUEÑA

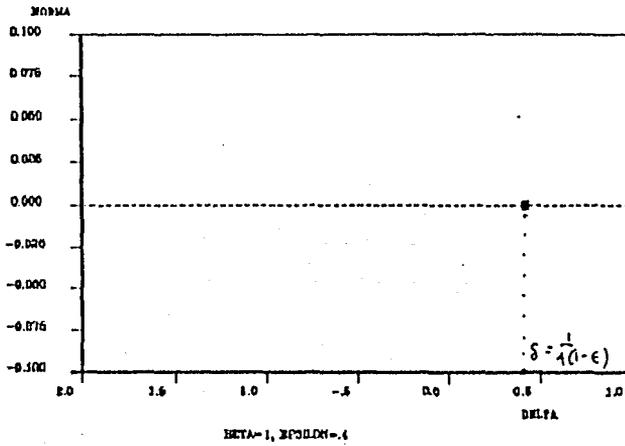


Figura 2.2.13

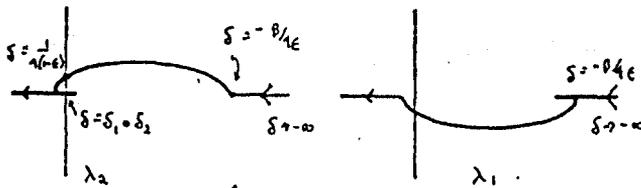


Figura 2.2.14

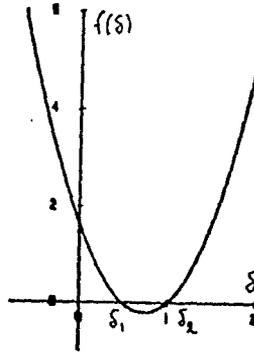


Figura 2.2.15

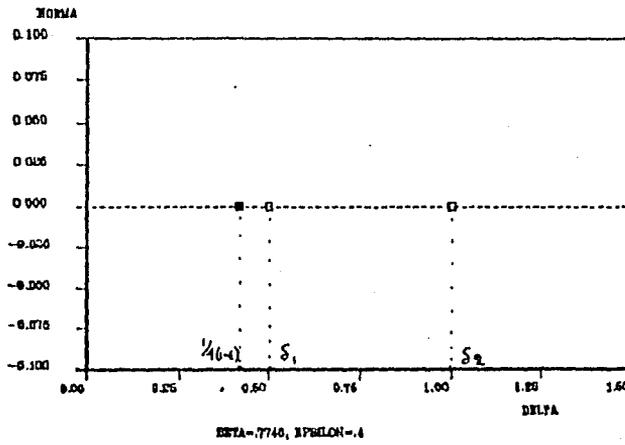
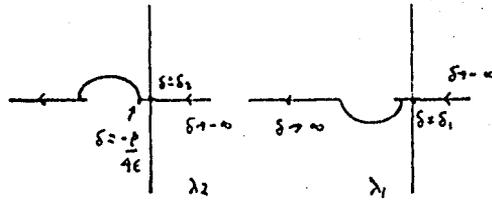


Figura 2.2.16

22 2. SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA δ PEQUEÑA



2.2.17

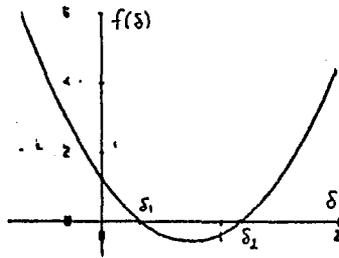


Figura 2.2.18

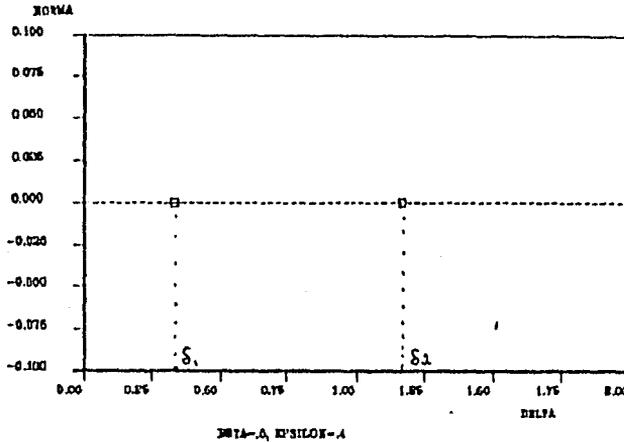


Figura 2.2.19

Debe tenerse cierto cuidado al hacer los diagramas de bifurcación con AUTO ya que si el tamaño del paso es demasiado grande puede no ser claro si los valores propios cruzan el eje imaginario como reales o como complejos conjugados (es decir, si la bifurcación es de estados estacionarios o de Hopf.) En esos casos no aparece ningún tipo de bifurcación en los diagramas.

2.3 LA SOLUCIÓN $(\eta, 0)$

En el estudio de las ecuaciones diferenciales no lineales se utiliza mucho la llamada ecuación variacional asociada al problema (véase [Ha]). En general si se tiene una función $F(t, x, \lambda)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}^k$, y F tiene primeras derivadas continuas con respecto a (x, λ) para (t, x) en cierto dominio D y λ en un abierto G de \mathbb{R}^k , entonces la solución $x(t, t_0, x_0, \lambda)$, $x(t_0; t_0, x_0, \lambda) = x_0$ de la ecuación

$$\dot{x} = F(t, x, \lambda)$$

es continuamente diferenciable con respecto a t, t_0, x_0, λ en su dominio de definición y por lo tanto la matriz $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0, \lambda), \frac{\partial x}{\partial x_0}(t_0, t_0, x_0, \lambda) = I$ satisface la ecuación variacional (lineal)

$$\dot{y} = \frac{\partial F(t, x(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)}{\partial x} y. \tag{2.3.1}$$

Para estudiar la solución $(\eta, 0) = (\cos \beta t, -\text{sen } \beta t, 0, 0)^T$ de (1.1.9) escríbase $x_1 = \eta + y_1, x_2 = y_2$. Como

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{d\eta}{dt} + \frac{dy_1}{dt} \\ &= K\eta + Ky_1 - (|\eta|^2 + |y_1|^2 + 2\eta \cdot y_1)(\eta + y_1) \\ &= K\eta - \eta + Ky_1 - y_1 - (2\eta \cdot y_1)\eta + \dots \end{aligned}$$

24 2. SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA δ PEQUEÑA

se tiene que en estas coordenadas las ecuaciones variacionales son

$$\frac{dy_1}{dt} = (K - I)y_1 - 2(\eta \cdot y_1)\eta \quad (2.3.2)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = Ky_2. \quad (2.3.3)$$

De la segunda ecuación se encuentra que

$$y_2(t) = e^{Kt}y_2(0).$$

Como los valores propios de K son $(1 \pm i\beta)$, al evaluar en el período que es $2\pi/\beta$ se tiene que los multiplicadores de Floquet asociados a la segunda ecuación son $e^{\frac{2\pi}{\beta}(1 \pm i\beta)} = e^{\frac{2\pi}{\beta}} > 1$.

Para la primera ecuación se usará el hecho de que como

$$\eta = \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix}, \quad \eta' = \begin{pmatrix} -\beta \sin \beta t \\ -\beta \cos \beta t \end{pmatrix},$$

η y η' son vectores linealmente independientes del plano para cada t . Además $(K - I)\eta = \eta'$ y $(K - I)\eta' = \eta''$, por lo que si $y_1(t)$ denota la posición del oscilador que está en movimiento, para cada t se tiene

$$y_1(t) = a(t)\eta(t) + b(t)\eta'(t). \quad (2.3.4)$$

De (2.3.2) y (2.3.4) se obtiene

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a'\eta + a\eta' + b'\eta' + b\eta'' \\ &= (K - I)(a\eta + b\eta') - 2a\eta \\ &= a\eta' + b\eta'' - 2a\eta \end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que $a'\eta + b'\eta' = -2a\eta$ y por ser η y η' linealmente independientes, $a' = -2a$ y $b' = 0$, es decir $b = 0$, $a = e^{-2t}$ y $y_1(t) = e^{-2t}\eta$ es solución a la ecuación variacional. Una matriz fundamental es entonces

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -e^{-2t} \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $\Phi(0) = I$ y

$$\Phi\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{4\pi}{\beta}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que los multiplicadores de Floquet asociados a la primera ecuación son $e^{-\frac{4\pi}{\beta}}$ y 1.

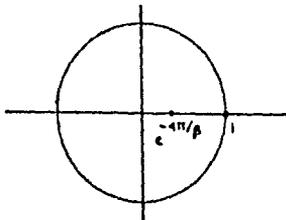


Figura 2.3.1

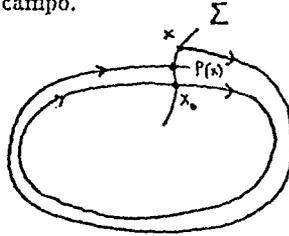
Estabilidad de $(\eta, 0)$

Como hay un solo multiplicador igual a 1 la órbita es hiperbólica y por lo tanto por el Teorema de la Función Implícita se concluye que bajo perturbación en δ se obtiene una rama de soluciones periódicas con período vecino a $2\pi/\beta$ si δ es pequeña. Más formalmente (véase [P.M.]), si X es un campo vectorial C^r , se tiene

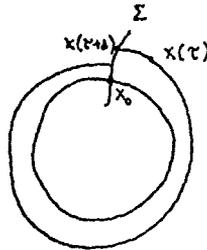
Definición Sea $p \in \mathbb{R}^n$ un punto fijo de f , f un difeomorfismo C^r . Se dice que p es un punto fijo hiperbólico si $Df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo hiperbólico, es decir, si Df_p no tiene valores propios con módulo 1.

Definición Sea $p \in \gamma$ donde γ es una órbita cerrada de X . Sea Σ una sección transversal a X en el punto p . Se dice que γ es una órbita cerrada hiperbólica de X si p es un punto fijo hiperbólico del mapeo de Poincaré $P : V \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$.

Definición Sea γ una órbita cerrada de un campo vectorial X diferenciable. Considérese la sección transversal Σ al campo X en el punto $x_0 \in \gamma$. La órbita que pasa por x_0 regresa a intersectar a Σ en un tiempo τ , donde τ es el período de γ . Por la continuidad del flujo de X , la órbita que pasa por un punto $x \in \gamma$ suficientemente cercano a x_0 también regresa a intersectar a Σ en un tiempo cercano a τ . Entonces si $V \subset \Sigma$ es una vecindad suficientemente chica de x_0 puede definirse un mapeo $P : V \rightarrow \Sigma$ que a cada punto $x \in V$ le asocia $P(x)$, el primer punto donde la órbita de x regresa a intersectar a Σ . A este mapeo se le conoce como *Mapeo de Poincaré* asociado a la órbita γ . Puede demostrarse que P es un difeomorfismo local de la misma clase que el campo.



Como se dijo arriba, la órbita que pasa por x tarda un tiempo cercano a τ en regresar a Σ . Por otro lado, para encontrar los multiplicadores de Floquet se considera la solución después de un tiempo τ , por lo que a primera vista el espectro de P no tiene por qué coincidir con los multiplicadores de Floquet.



Sin embargo, puede demostrarse ([P.M.] p.96) que es posible encontrar una reparametrización

26 2. SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA δ PEQUEÑA

trización que haga que efectivamente coincida el espectro del mapeo de Poincaré con los multiplicadores de Floquet. La solución $(\eta, 0)$ sí es entonces una órbita cerrada hiperbólica.

Para demostrar que cerca de $(\eta, 0)$ hay una rama de soluciones periódicas con período cercano al de $(\eta, 0)$ basta entonces demostrar que los puntos fijos hiperbólicos de mapeos son estructuralmente estables, lo cual es parte del teorema de Hartman-Grobman (véase [Ch.H.] p. 108.)

Definición Si f es un difeomorfismo C^r entonces se dice que f es *estructuralmente estable* si existe una vecindad V de f en el espacio de difeomorfismos C^r tal que toda g en V sea *conjugada* de f , es decir, que para toda g en V exista un homeomorfismo $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $h \circ f = g \circ h$.

Sea A una matriz no singular de $n \times n$. Supóngase que $\mathbb{R}^n = W^s \oplus W^u$, donde W^s, W^u son subespacios invariantes bajo A . Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, sea $x = x_s + x_u$, con $x_s \in W^s, x_u \in W^u$. Si $A_s = A|W^s, A_u = A|W^u$, supóngase que los valores propios de A_s tienen módulo menor que 1 y los de A_u tienen módulo mayor que 1; si el mapeo es hiperbólico no hay valores propios que no cumplan alguna de estas dos condiciones. Escogiendo un sistema de coordenadas apropiado en W^s, W^u puede suponerse que

$$|A_s| < 1, |A_u^{-1}| < 1,$$

y por lo tanto A_s es una contracción y A_u es una expansión.

Sea C^j el espacio de funciones de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuyas derivadas hasta orden j son acotadas y uniformemente continuas. La norma $|\cdot|_j$ en C^j se toma como la norma sup usual de todas las derivadas hasta orden j .

Teorema: Existe $\mu_0 > 0$ tal que para cualquier $f \in C_{\mu_0}^1 = \{f \in C^1 : |f|_1 < \mu_0\}$ existe un único homeomorfismo $h = h(f)$ en C^0 , continuo en f , con $h(0) = I$, tal que

$$h \circ (A + f) = A \circ h.$$

Prueba: Sea $a = \max(|A_s|, |A_u^{-1}|) < 1$ y escójase μ_0 tal que $a - \mu_0 > 0$ y para toda $f \in C_{\mu_0}^1, (A+f)^{-1}$ existe y es C^1 . Si $f \in C_{\mu_0}^1$ la ecuación $h \circ (A + f) = A \circ h$ es equivalente a

$$\begin{aligned} h_s &= A \circ h \circ (A + f)^{-1} \\ h &= A^{-1} \circ h \circ (A + f). \end{aligned}$$

Se usará la primera ecuación para definir h_s y la segunda para definir h_u .

Para cualquier $h \in C^0, f \in C_{\mu_0}^1$ defínase $T(h, f) = T(h, f)_s + T(h, f)_u$ por

$$\begin{aligned} T(h, f)_s &= h_s - A_s \circ h_s \circ (A + f)^{-1} \\ T(h, f)_u &= h_u - A_u^{-1} \circ h_u \circ (A + f). \end{aligned}$$

Puede verificarse que $T: C^0 \times C_{\mu_0}^1 \rightarrow C^0$ es continua en h, f y $T(I, 0) = 0$. Además, $D_h T(h, f)$ existe y es continua en h, f con

$$\begin{aligned} [D_h T(h, 0)]_s &= g_s - A_s \circ g_s \circ A^{-1} \\ [D_h T(h, 0)]_u &= g_u - A_u^{-1} \circ g_u \circ A. \end{aligned}$$

Para cualquier $w \in C^0$, la ecuación $D_h T(h, 0)g = w$ tiene una única solución acotada por arriba por $(1-a)^{-1}|w|$, por lo que $D_h T(h, 0)$ es un isomorfismo. El Teorema de la Función Implícita

implica que existe la función $h = h(f)$, continua en $f \in C_{\mu_0}^1$ (puede tener que tomarse μ_0 más chica para lograr esto), $h(0) = I$ y $T(h(f), f) = 0$.

Falta demostrar que h es un homeomorfismo. Para ello considérese la ecuación $(A+f) \circ g = g \circ A$ para $g \in C^0$, $f \in C^1$. Puede repetirse el argumento de arriba para obtener una única función $g = g(f) \in C^0$, $f \in C_{\mu_0}^1$ tal que $g(f)$ es continua en f , $g(0) = I$ y $(A+f) \circ g = g \circ A$. De las definiciones de $g(f)$, $h(f)$ y de la unicidad se sigue que $g(f) = h^{-1}(f)$. ■

Se concluye entonces que las soluciones $(\eta, 0)$, $(0, \eta)$ subsisten para $\delta \neq 0$ y pequeña.

2.4 LA SOLUCIÓN (η, η_0)

En $\delta = 0$ esta solución es

$$\begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\operatorname{sen} \beta t \\ \cos(\beta + \theta)t \\ -\operatorname{sen}(\beta + \theta)t \end{pmatrix} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

y por lo que se vio en la sección anterior, los multiplicadores de Floquet son 1 y $e^{-4\pi/\beta}$, ambos dobles. Por ser 1 multiplicador doble el núcleo de la sección de Poincaré tiene dimensión 1 por lo que no se puede aplicar el Teorema de la Función Implícita como se hizo en la sección anterior. Lo que se hará es utilizar un proceso de reducción basado en la construcción de un sistema de coordenadas que rota junto con la órbita periódica. (Véase [Ur])

Sistema ortonormal a lo largo de una órbita cerrada

Si se tiene una solución periódica es natural estudiar las soluciones cercanas a ella tomando un sistema de coordenadas que se mueva a lo largo de la órbita.

Un sistema local de coordenadas puede construirse fácilmente y uniendo estos sistemas paso a paso puede construirse un sistema que se mueva junto con la órbita cerrada. El problema es que con esta construcción no se regresa necesariamente al primer sistema después de dar una vuelta completa a la órbita, lo cual es poco conveniente. Se construirá entonces un sistema en movimiento tal que se pueda asociar unívocamente con los puntos de una vecindad de la órbita cerrada. Se mostrará que esto es posible para el sistema autónomo

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (2.4.1)$$

donde $F(x)$ satisface una condición de Lipschitz local.

Lema 1

Si $n \geq 3$ y $\nu(\theta)$ es un vector unitario en \mathbb{R}^n con período ω y que satisface una condición de Lipschitz entonces existe un vector unitario e_1 (independiente de θ) tal que $\nu(\theta) \neq \pm e_1 \forall \theta$.

Prueba: El conjunto $x = (\nu(\theta), |\nu(\theta)|) = 1, 0 \leq \theta \leq \omega$ es una curva en la esfera unitaria S^{n-1} en \mathbb{R}^n . Como $\nu(\theta)$ satisface una condición de Lipschitz, la curva es rectificable y una curva rectificable en una esfera en \mathbb{R}^n con $n \geq 3$ cubre un conjunto de medida cero. Por lo tanto siempre existe un vector e_1 en S^{n-1} que no está en esta curva ni en la curva definida por $-\nu(\theta)$.

Otra manera de demostrarlo es la siguiente: si S es cualquier conjunto sobre la esfera unitaria en \mathbb{R}^n de diámetro menor que d entonces existe una constante K (independiente de S) y un casquete esférico S_c tal que $S \subset S_c$ y el área de S_c es menor que Kd^{n-1} (para la deducción de la fórmula para el área de S^n véase Courant y John vol 2 p.513). Si M es la constante de Lipschitz para ν , es decir $|\nu(\theta) - \nu(\theta')| \leq M|\theta - \theta'|$ y si el intervalo $[0, \omega]$ se divide en n partes iguales, entonces la curva definida por $\nu(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \omega$ puede ser cubierta por

28 2. SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA δ PEQUEÑA

casquetes esféricos cuya área total es menor que la misma cantidad. Como $n \geq 3$ esta cota superior para el área tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$, lo cual implica que el vector e_1 se puede escoger de casi cualquier lugar en la esfera unitaria.

En particular puede tomarse $\nu(\theta) = F(x) = F(x)/|F(x)|$, ya que para x en la órbita $F(\phi(t)) \neq 0$ porque se supuso que la órbita no es un punto estacionario; por la unicidad de la solución si $F(\phi(t_0)) = 0 \Rightarrow F(\phi(t)) = 0 \forall t$. Sea C una órbita cerrada del sistema (2.4.1) y $x = \phi(t)$ su ecuación. En el problema que se está tratando, la dimensión n del espacio fase es mayor que dos y por lo tanto, por el lema de arriba se puede tomar un vector unitario e_1 tal que $F(\phi(t)) = F(\phi(t))/|F(\phi(t))|$ no coincida nunca con $\pm e_1$. Empezando con este e_1 se construye un sistema ortonormal constante arbitrario $\{e_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Tómese

$$e_i^T F(\phi(t)) = \cos \theta_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, n.) \quad (2.4.2)$$

De (2.4.2) se tiene que

$$F(\phi(t)) = \sum_{i=1}^n \cos \theta_i \cdot e_i,$$

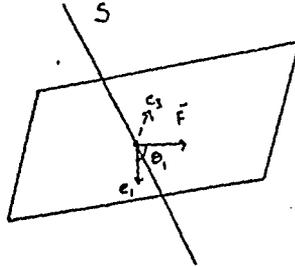
esto es F es la suma de sus proyecciones sobre cada uno de los elementos del sistema ortonormal. Como F tiene norma uno y $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ esto implica que

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \theta_i = 1.$$

Como $F \neq \pm e_1$,

$$\cos \theta_1 \neq \pm 1. \quad (2.4.3)$$

Rótese ahora el sistema ortonormal $\{e_i\}$ alrededor del subespacio $(n-2)$ -dimensional S perpendicular a e_1 y a $F(\phi(t))$ hasta que e_1 coincida con $F(\phi(t))$.



Escríbanse e_ν ($\nu = 2, 3, \dots, n$) en la forma

$$e_\nu = \bar{e}_\nu + \lambda_\nu e_1 + \mu_\nu F,$$

donde $F = F(\phi(t))$ y \bar{e}_ν es la componente de e_ν en S , por lo que $\bar{e}_\nu \perp e_1, F$. De la ortogonalidad de $\{e_i\}$ y de la forma dada arriba se tiene que $(e_\nu, e_1) = 0 = \lambda_\nu + \mu_\nu \cos \theta_1$. También $(e_\nu, F) = \cos \theta_\nu = \lambda_\nu \cos \theta_1 + \mu_\nu$, por lo que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta_1 \\ \cos \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_\nu \\ \mu_\nu \end{pmatrix},$$

es decir

$$\begin{pmatrix} \lambda_\nu \\ \mu_\nu \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \cos^2 \theta_1} \begin{pmatrix} 1 & -\cos \theta_1 \\ -\cos \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta_\nu \end{pmatrix},$$

de donde

$$\lambda_\nu = \frac{-\cos \theta_1 \cos \theta_\nu}{\text{sen}^2 \theta_1}$$

$$\mu_\nu = \frac{\cos \theta_\nu}{\text{sen}^2 \theta_1}.$$

La posición final ξ_ν de e_ν después de la rotación puede escribirse como

$$\xi_\nu = \bar{e}_\nu + \lambda'_\nu e_1 + \mu'_\nu F.$$

Haciendo lo mismo que arriba se encuentra que

$$\begin{pmatrix} \lambda'_\nu \\ \mu'_\nu \end{pmatrix} = \frac{1}{\text{sen}^2 \theta_1} \begin{pmatrix} 1 & -\cos \theta_1 \\ -\cos \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\xi_\nu, e_1) \\ (\xi_\nu, F) \end{pmatrix}.$$

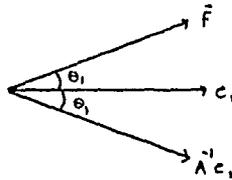
Falta determinar cómo se ven los miembros de la última matriz en términos de algo conocido. Si A es la rotación tal que $Ae_1 = F$, entonces $\xi_\nu = Ae_\nu$ y por lo tanto

$$(\xi_\nu, F) = (Ae_\nu, F) = (e_\nu, A^{-1}F) = (e_\nu, e_1) = 0,$$

y

$$(\xi_\nu, e_1) = (e_\nu, A^{-1}e_1).$$

Ahora, $A^{-1}e_1$ está en el plano generado por e_1 y F por lo que puede escribirse como $A^{-1}e_1 = \alpha e_1 + \beta F$ y entonces $(e_\nu, A^{-1}e_1) = \beta \cos \theta_\nu$.



Para determinar α y β se usa

$$\alpha + \beta \cos \theta_1 = (A^{-1}e_1, e_1) = (e_1, Ae_1) = (e_1, F) = \cos \theta_1$$

y

$$(A^{-1}e_1, F) = \cos 2\theta_1 = \alpha \cos \theta_1 + \beta.$$

Se tiene entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos \theta_1 \\ \cos \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \cos 2\theta_1 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \theta_1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \lambda'_\nu \\ \mu'_\nu \end{pmatrix} = \frac{1}{\text{sen}^2 \theta_1} \begin{pmatrix} -\cos \theta_\nu \\ \cos \theta_1 \cos \theta_\nu \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mu_\nu \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}.$$

30 2. SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA δ PEQUEÑA

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\xi_\nu &= (e_\nu - \lambda_\nu e_1 - \mu_\nu F) + \lambda'_\nu e_1 + \mu'_\nu F \\ &= e_\nu + (\lambda'_\nu - \lambda_\nu) e_1 + (\mu'_\nu - \mu_\nu) F \\ &= e_\nu - \frac{\cos \theta_\nu}{\text{sen}^2 \theta_1} (1 - \cos \theta_1) e_1 + (\cos \theta_1 - 1) \frac{\cos \theta_\nu}{\text{sen}^2 \theta_1} F \\ &= e_\nu - \frac{\cos \theta_\nu}{1 + \cos \theta_1} (e_1 + F).\end{aligned}\tag{2.4.4}$$

De (2.4.3) y (2.4.4) se observa que $\xi_\nu = \xi_\nu(t)$ son continuas y periódicas en t con el mismo período que $\phi(t)$. El conjunto

$$\{F(\phi(t)), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)\} = \{F(\phi(t)), \Psi(t)\}\tag{2.4.5}$$

es el sistema ortonormal deseado:

$$(\xi_\nu, \xi_\mu) = (Ae_\nu, Ae_\mu) = (e_\nu, e_\mu) = \delta_{\nu\mu},$$

$$(\xi_\nu, F) = (Ae_\nu, Ae_1) = (e_\nu, e_1) = 0,$$

donde $\delta_{\mu\nu}$ es la delta de Kronecker.

En el caso $n = 2$ puede tomarse $\xi_2(t) = (-F_2(t), F_1(t))$, donde $F(\phi(t)) = (F_1(t), F_2(t))$.

Si $F(x)$ es p veces continuamente diferenciable en una vecindad de la órbita cerrada C entonces $F(\phi(t))$ es p veces continuamente diferenciable con respecto a t , lo mismo que $\xi_\nu(t)$ como se observa de (2.4.4).

Si la órbita tiene período mínimo T entonces la matriz $\Psi(t)$ de $n \times (n-1)$ satisface

$$\begin{aligned}\Psi(t+T) &= \Psi(t) \\ \Psi^T(t)\Psi(t) &= I_{(n-1) \times (n-1)} \\ F^T(\phi(t))\Psi(t) &= 0_{1 \times (n-1)}\end{aligned}\tag{2.4.6}$$

para toda t . Se dirá que $\Psi(\cdot)$ es admisible para una pareja $(F, \phi(\cdot))$ si $\Psi(\cdot)$ satisface las condiciones (2.4.6).

En el caso considerado aquí, cada sub-sistema del sistema desacoplado tiene la solución periódica

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\text{sen } \beta t \end{pmatrix},$$

y puede verificarse directamente que una $\Phi(\cdot)$ admisible para el subsistema está dada por

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} \cos \beta s \\ -\text{sen } \beta s \end{pmatrix},$$

que es ortogonal al vector tangente a $\eta(s)$.

2.5 ECUACIONES DE ÓRBITAS CON RESPECTO AL SISTEMA ORTONORMAL

La construcción que se hizo en la sección anterior puede hacerse en forma análoga si en vez de (2.4.1) se tiene la ecuación

$$\dot{x} = F(x, \delta), \quad F(x, 0) = F_0. \tag{2.5.1}$$

Supóngase que $F(x, \delta)$ de (2.5.1) es continuamente diferenciable en D . Sea $C : x = \phi_0(s)$ una órbita cerrada de (2.5.1) con dominio en D . Entonces, como se vio en la sección anterior, existe un sistema ortonormal continuamente diferenciable $\{F[\phi_0(s)], \Psi\} = \{F[\phi_0(s)], \xi_2, \dots, \xi_n(s)\}$ a lo largo de C . Sea C' una órbita cercana a C . Entonces, (véase [Ha]) C' cruza cualquier hiperplano normal a C en una vecindad de C . Por lo tanto, cualquier punto $x = x(t)$ de C' puede expresarse como

$$x(t) = \phi_0(s) + \Psi(s)y, \tag{2.5.2}$$

donde ϕ_0 es solución de $\dot{x} = F_0(x)$.

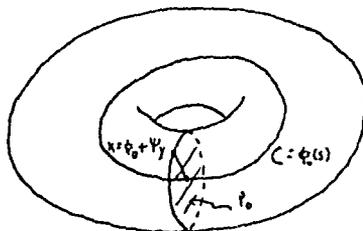


Figura 2.5.1

(véase la figura 2.5.1). Aquí t es el tiempo necesario para llegar al hiperplano normal a C en el punto $x = \phi_0(s)$ a lo largo de C' desde algún hiperplano fijo de C . Como C' también es una órbita de (2.5.1), la función $x(t)$ satisface la ecuación

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), \delta), \tag{2.5.3}$$

Si se escribe

$$G(t, y_1, \dots, y_n, s) = x(t) - \phi_0(s) - \Psi(s)y,$$

entonces

$$\frac{\partial G}{\partial t} = F(x(t)), \quad \frac{\partial G}{\partial y_\nu} = -\xi_\nu(s), \quad (\nu = 2, 3, \dots, n). \tag{2.5.3}$$

Si C' está suficientemente cerca de C , $|y_\nu|$ ($\nu = 2, 3, \dots, n$) son pequeñas y $x(t)$ está cerca de $\phi_0(s)$ como puede verse de (2.5.1). Por las condiciones que cumplen las matrices admisibles se tiene que

$$\frac{\partial(G_1, \dots, G_n)}{\partial(t, y_2, \dots, y_n)} \neq 0 \tag{2.5.4}$$

para C' suficientemente cercana a C , donde G_i ($i = 1, \dots, n$) son las componentes del vector $G(t, y_2, \dots, y_n, s)$. Como $G(t, y_2, \dots, y_n, s) = 0$ y C es compacta, por (2.5.4) se puede aplicar el

§2 2. SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA δ PEQUEÑA

Teorema de la Función Implícita un número finito de veces para concluir que $t = t(s)$, $y_\nu = y_\nu(s)$ ($\nu = 2, 3, \dots, n$) están determinadas de manera única y estas funciones son continuamente diferenciables con respecto a t .

Sustituyendo (2.5.1) en (2.5.2) se obtiene

$$\frac{d\phi_0}{ds} + \Psi'y + \Psi \frac{dy}{ds} = F(\phi_0(s) + \Psi(s)y, \delta) \frac{dt}{ds},$$

o de otra forma,

$$F_0(\phi_0(s)) + \Psi'(s)y + \Psi \frac{dy}{ds} = [F(\phi_0(s) + \Psi(s)y, \delta)] \frac{dt}{ds}. \quad (2.5.5)$$

Multiplicando la última ecuación por $F_0^T(\phi_0(s))$ se tiene

$$\frac{dt}{ds} = \frac{F_0^T(\phi_0(s)) [F_0(\phi_0(s)) + \Psi'(s)y]}{F_0^T(\phi_0(s)) F(\phi_0(s) + \Psi(s)y, \delta)} = r(s, y, \delta) \quad (2.5.6)$$

y multiplicando (2.5.5) por $\Psi^T(s)$ se obtiene

$$\frac{dy}{ds} = \Psi^T(s) [r(s, y, \delta) F(\phi_0(s) + \Psi(s)y, \delta) - \Psi'(s)y] = Y(s, y, \delta). \quad (2.5.7)$$

Desarrollando $F(\phi_0(s) + \Psi(s)y, \delta)$ en series de Taylor se tiene

$$F(\phi_0(s) + \Psi(s)y, \delta) = F_0(\phi_0(s)) + DF_0(\phi_0(s))\Psi(s)y + o(\|y\|) \quad (y \rightarrow 0),$$

por lo que (2.5.7) puede escribirse como

$$\frac{dy}{ds} = P(s)y + o(\|y\|) \quad (2.5.8)$$

donde $P(s) = \Psi^T(s) [DF_0(\phi_0(s))\Psi(s) - \Psi'(s)]$.

Las ecuaciones (2.5.6) y (2.5.7) son equivalentes a

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \delta) \quad (2.5.9)$$

en el siguiente sentido: si $x_0 \in P_0$, $y_0 = \Psi(0)^T[x_0 - \phi_0(0)]$ y $t(s)$ satisface (2.5.6) con $t(0) = 0$ entonces

$$y(s, y_0, \delta) = \Psi(s)^T[\phi(t(s)), x_0, \delta] - \phi_0(s),$$

donde $y(s, y_0, \delta)$ es solución de (2.5.7) con $y(0, y_0, \delta) = y_0$. Inversamente, si $r(s, y(s, y_0, \delta), \delta) > 0$, es decir, si $t(s)$ es invertible para toda s y si $x_0 = \phi_0(0) = \Psi(0)y_0$, entonces la solución de (2.5.9) es

$$\phi(t, x_0, \delta) = \phi_0(s(t)) + \Psi(s(t))y(s(t), y_0, \delta),$$

donde $s(t)$ es la inversa de $t(s)$.

Aplicación a dos osciladores acoplados

Ahora se aplicará lo anterior a un sistema de dos osciladores acoplados, cada uno en \mathbb{R}^2 , con ecuación

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (2.5.10)$$

y una solución periódica hiperbólica no constante $\eta(t)$ con período mínimo T . Se puede hacer exactamente lo mismo si $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $m \neq 2$ y puede generalizarse todo al caso de N osciladores acoplados.

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

defínase $F: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ por

$$F(x, \delta) = \begin{pmatrix} f(z_1) + \delta g_1(z_1, z_2, \delta) \\ f(z_2) + \delta g_2(z_1, z_2, \delta) \end{pmatrix},$$

donde $g_1, g_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y considérese la ecuación

$$\dot{z} = F(z, \delta). \tag{2.5.11}$$

El sistema desacoplado, i.e. con $\delta = 0$, tiene una familia uniparamétrica de soluciones

$$\phi_0(t, \theta) = \begin{pmatrix} \eta(t) \\ \eta(t + \theta) \end{pmatrix}$$

parameterizada por $\theta \in [0, T)$. La familia $\{\phi_0(t, \theta) | \theta \in [0, T), t \in \mathbb{R}\}$ define un toro bidimensional T_0^2 que es invariante bajo el flujo en $\delta = 0$.

Si $\Phi(\cdot)$ es una matriz admisible para $(f, \eta(\cdot))$, entonces una matriz admisible para $(F, \phi(\cdot, \theta))$ (que es una matriz de 4×3) está dada por

$$\Psi(s, \theta) = \begin{pmatrix} \alpha(s, \theta) & \Phi(s) & 0 \\ b(s, \theta) & 0 & \Phi(s + \theta) \end{pmatrix},$$

donde

$$\alpha(s, \theta) = -\frac{|f(\eta(s + \theta))|}{|f(\eta(s))| \sqrt{|f(\eta(s))|^2 + |f(\eta(s + \theta))|^2}} f(\eta(s)) = -\alpha(s, \theta) f(\eta(s)),$$

$$b(s, \theta) = \frac{|f(\eta(s))|}{|f(\eta(s + \theta))| \sqrt{|f(\eta(s))|^2 + |f(\eta(s + \theta))|^2}} f(\eta(s + \theta)) = \beta(s, \theta) f(\eta(s + \theta)),$$

ya que se satisfacen las condiciones (2.4.6).

El sistema acoplado (2.5.11) tiene una solución periódica en una vecindad de la órbita $\phi(\cdot, \theta_0)$ para alguna θ_0 fija si y sólo si para alguna θ cercana a θ_0 , la ecuación

$$\frac{dy}{ds} = Y(s, y, \theta, \delta) \tag{2.5.12}$$

tiene una solución periódica. La función Y , como se vio antes (ecuación (2.5.7)), está dada por

$$Y(s, y, \theta, \delta) = \Psi(s, \theta)^T [\tau(s, y, \theta, \delta) F(\phi_0(s, \theta) + \Psi(s, \theta)y, \delta) - \Psi'(s, \theta)y],$$

donde

$$\tau(s, y, \theta, \delta) = \frac{F_0(\phi_0(s, \theta))^T [F_0(\phi_0(s, \theta)) + \Psi'(s, \theta)y]}{F_0(\phi_0(s, \theta))^T F(\phi_0(s, \theta) + \Psi(s, \theta)y, \delta)}.$$

Como se dijo antes, (2.5.12) puede escribirse como

$$\frac{dy}{ds} = P(s, \theta)y + Q(s, y, \theta) + \delta G(s, y, \theta, \delta), \tag{2.5.13}$$

34 2. SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA δ PEQUEÑA

donde $P(s) = \Psi(s)^T [DF_0(\phi_0(s))\Psi(s) - \Psi'(s)]$. Ahora,

$$\begin{aligned} DF_0(\phi_0(s))\Psi(s) &= \begin{pmatrix} Df(\eta(s)) & 0 \\ 0 & Df(\eta(s+\theta)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(s,\theta) & \Phi(s) & 0 \\ b(s,\theta) & 0 & \Phi(s+\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Df(\eta(s))a(s,\theta) & Df(\eta(s))\Phi(s) & 0 \\ Df(\eta(s+\theta))b(s,\theta) & 0 & Df(\eta(s+\theta))\Phi(s+\theta) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que si se escribe $\Lambda(\cdot) = Df(\eta(\cdot))\Phi(\cdot) - \Phi'(\cdot)$ y $\Gamma_a(s,\theta) = Df(\eta(s))a(s,\theta)$, $\Gamma_b(s,\theta) = Df(\eta(s+\theta))b(s,\theta)$, entonces

$$\begin{aligned} P(s) &= \begin{pmatrix} a(s,\theta)^T & b(s,\theta)^T \\ \Phi(s)^T & 0 \\ 0 & \Phi(s+\theta)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Df(\eta(s))a(s,\theta) - a'(s,\theta) & \Lambda(s) & 0 \\ Df(\eta(s+\theta))b(s,\theta) - b'(s,\theta) & 0 & \Lambda(s+\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^T(s,\theta)[\Gamma_a(s,\theta) - a'(s,\theta)] + b^T(s,\theta)[\Gamma_b(s,\theta) - b'(s,\theta)] & a(s,\theta)^T \Lambda(s) & b(s,\theta)^T \Lambda(s+\theta) \\ \Phi(s)^T [Df(\eta(s))a(s,\theta) - a'(s,\theta)] & \Phi(s)^T \Lambda(s) & 0 \\ \Phi(s+\theta)^T [Df(\eta(s+\theta))b(s,\theta) - b'(s,\theta)] & 0 & \Phi(s+\theta)^T \Lambda(s+\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} Df(\eta(s))a(s,\theta) - a'(s,\theta) &= -\alpha(Df(\eta(s))f(\eta(s)) - Df(\eta(s))\eta') + \alpha'f(\eta(s)) \\ &= \alpha'f(\eta(s)) \end{aligned}$$

es ortogonal a $\Phi(s)$ por (2.4.6), lo anterior puede escribirse como

$$P(s) = \begin{pmatrix} P_{11}(s,\theta) & P_{12}(s,\theta) \\ P_{21}(s,\theta) & P_{22}(s,\theta) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} P_{11}(s,\theta) &= -\alpha\alpha'|f(\eta(s))|^2 - \beta\beta'|f(\eta(s+\theta))|^2 \\ &= -(\alpha' + \beta')/(\alpha + \beta) \\ &= \frac{d}{ds} \left(\ln \sqrt{\frac{|f(\eta(s))|^2 \cdot |f(\eta(s+\theta))|^2}{|f(\eta(s))|^2 + |f(\eta(s+\theta))|^2}} \right), \end{aligned}$$

$$P_{12}(s,\theta) = (a(s,\theta)^T \Lambda(s), b(s,\theta)^T \Lambda(s+\theta)),$$

$$P_{21} \equiv 0$$

y

$$P_{22}(s,\theta) = \begin{pmatrix} \Phi(s)^T \Lambda(s) & 0 \\ 0 & \Phi(s+\theta)^T \Lambda(s+\theta) \end{pmatrix}.$$

Debido a la forma de $P(s)$, la matriz fundamental $\Omega(s,\theta)$ del sistema variacional

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \frac{dy}{ds} = P(s,\theta)y = \begin{pmatrix} P_{11} & c & d \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

con $\Omega(0,\theta) = I$ tiene la forma

$$\Omega(s,\theta) = \begin{pmatrix} \Omega_{11}(s,\theta) & \Omega_{12}(s,\theta) \\ 0 & \Omega_{22}(s,\theta) \end{pmatrix},$$

donde

$$\Omega_{11}(s, \theta) = \sqrt{\frac{|f(\eta(0))|^2 + |f(\eta(\theta))|^2}{|f(\eta(0))|^2 \cdot |f(\eta(\theta))|^2}} \sqrt{\frac{|f(\eta(s))|^2 \cdot |f(\eta(s+\theta))|^2}{|f(\eta(s))|^2 + |f(\eta(s+\theta))|^2}}$$

$$\Omega_{12}(s, \theta) = \int_0^s \Omega_{11}(s, \theta) \Omega_{11}^{-1}(u, \theta) P_{12}(u, \theta) \Omega_{22}(u, \theta) du$$

$$\Omega_{22}(s, \theta) = \begin{pmatrix} V(s) & 0 \\ 0 & V(s+\theta)V^{-1}(\theta) \end{pmatrix}$$

y $V(s)$ es la matriz fundamental de

$$\frac{dv}{ds} = \Phi(s)^T \lambda(s) v$$

con $V(0) = I$. En efecto, la solución de este sistema es

$$y_2(s) = y_2(0) e^{\int_0^s m(\xi) d\xi}, \quad y_3(s) = y_3(0) e^{\int_0^s n(\xi) d\xi},$$

$$y_1(s) = y_1(0) e^{\int_0^s P_{11}(\xi) d\xi} + \int_0^s e^{\int_0^\xi P_{11}(\tau) d\tau} (c(\xi)y_2(\xi) + d(\xi)y_3(\xi)) d\xi.$$

$\Omega_{11}(kT, \theta) = 1$, y se supondrá que $\Omega_{12}(kT, \theta) = 0$, ya que siempre puede escogerse un sistema de coordenadas en el que esto sea cierto y esta elección no afecta el hecho de que $P_{21}(s, \theta) \equiv 0$. No se demostrará esto en el caso general, pero se verá más adelante que esta hipótesis se cumple en el problema particular considerado. Además, como P_{22} es la suma directa de las matrices $P(s)$ asociadas con cada oscilador, el hecho de que la órbita η sea hiperbólica implica que $\Omega_{22}(kT, \theta)$ no tiene valores propios con módulo 1.

En el sistema acoplado la primera coordenada de y es de "fase" ya que mide la distancia ortogonal a la órbita $\phi_0(s, \theta)$ en el espacio tangente a T_0^2 . Las otras 2 coordenadas son coordenadas normales y resulta conveniente separar y en estos dos tipos de coordenadas,

$$y = \begin{pmatrix} \varphi \\ r \end{pmatrix},$$

donde φ es la primera componente y r el vector que consiste en las últimas dos componentes de y . De la misma forma sean

$$Q(s, y, \theta) = \begin{pmatrix} Q_1(s, \varphi, r, \theta) \\ Q_2(s, \varphi, r, \theta) \end{pmatrix},$$

$$G(s, y, \theta, \delta) = \begin{pmatrix} G_1(s, \varphi, r, \theta, \delta) \\ G_2(s, \varphi, r, \theta, \delta) \end{pmatrix}.$$

La ecuación (2.5.13) puede escribirse entonces como

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{ds} &= P_{11}(s, \theta)\varphi + P_{12}(s, \theta)r + Q_1(s, \varphi, r, \theta) + \delta G_1(s, \varphi, r, \theta, \delta) \\ \frac{dr}{ds} &= P_{22}(s, \theta)r + Q_2(s, \varphi, r, \theta) + \delta G_2(s, \varphi, r, \theta, \delta) \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

La solución de este sistema homogéneo y T -periódico que satisface la condición inicial

$$\begin{aligned} \varphi(0, r_0, \theta, \delta) &= 0 \\ r(0, r_0, \theta, \delta) &= r_0 \end{aligned}$$

36 2. SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA δ PEQUEÑA

se denotará

$$y(s, r_0, \theta, \delta) = \begin{pmatrix} \varphi(s, r_0, \theta, \delta) \\ r(s, r_0, \theta, \delta) \end{pmatrix}$$

Para determinar si alguna de las soluciones del sistema desacoplado puede continuarse para $\delta \neq 0$, se buscan soluciones de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \varphi(kT, r_0, \theta, \delta) &= 0 \\ r(kT, r_0, \theta, \delta) - r_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

para alguna k positiva. En efecto, la homogeneidad y la T -periodicidad de (2.5.15) garantizan que cualquier solución de (2.5.16) genera una solución kT -periódica.

Como $y \equiv 0$ es solución de (2.5.13) cuando $\delta = 0$, $(r_0, \delta) = (0, 0)$ satisface (2.5.16) para toda $\theta \in [0, T)$. Ahora, como Ω_{22} es matriz fundamental de $dr/ds = P_{22}r$ con $\Omega_{22}(0, \theta) = I$, por la fórmula de variación de parámetros y la ecuación (2.5.15b) se tiene que

$$r(s) = \Omega_{22}(s, \theta)r_0 + \Omega_{22}(s, \theta) \int_0^s \Omega_{22}^{-1}(u)(Q_2 + \delta G_2) du,$$

por lo que, en r_0, δ_0 ,

$$\frac{\partial}{\partial r_0} [r(kT, r_0, \theta, \delta) - r_0] = \Omega_{22}(kT, \theta) - I.$$

Como se dijo en la página anterior, Ω_{22} no tiene valores propios con módulo 1, por lo que esta matriz es invertible y el Teorema de la Función Implícita implica que hay una $R_k(\theta, \delta)$ suave definida para toda $\theta \in [0, T)$ y δ pequeña, con la propiedad de que

$$r(kT, R_k(\theta, \delta), \theta, \delta) - R_k(\theta, \delta) = 0$$

y $R_k(\theta, \delta) \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Entonces se satisface la ecuación

$$\varphi(kT, R_k(\theta, \delta), \theta, \delta) = 0 \quad (2.5.17)$$

en $\delta = 0$ para toda $\theta \in [0, T)$. Esto implica que hay una función C^{n-1} si f es C^n que se denotará $h_k(\theta, \delta)$ tal que

$$\varphi(kT, R_k(\theta, \delta), \theta, \delta) = \delta h_k(\theta, \delta),$$

y para $\delta \neq 0$ esto es equivalente a la ecuación

$$h_k(\theta, \delta) = 0, \quad (2.5.18)$$

donde $h_k(\theta, \delta)$ se encuentra resolviendo (2.5.15 a) por la fórmula de variación de parámetros, derivando con respecto a δ y evaluando en $\delta = 0$. A (2.5.18) se le conoce como ecuación de bifurcación. Si $h_k(\theta, \delta)$ tiene un cero simple en θ_0 (i.e. $\partial h_k(\theta, 0)/\partial \theta|_{\theta_0} \neq 0$) puede aplicarse el Teorema de la Función Implícita para concluir que la ecuación (2.5.12) tiene soluciones periódicas cercanas a $\phi_0(\cdot, \theta_0)$ con período cercano a kT para δ chica.

Como

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \Omega_{11}^{-1} & -\Omega_{11}^{-1}\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1} \\ 0 & \Omega_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(s, r_0, \theta, \delta) &= \Omega_{12}(s, \theta)r_0 + \int_0^s [\Omega_{11}(s, \theta)\Omega_{11}^{-1}(u, \theta)(Q_1 + \delta G_1) \\ &\quad - (\Omega_{11}(s, \theta)\Omega_{11}^{-1}(u, \theta)\Omega_{12}(u, \theta) - \Omega_{12}(s, \theta))\Omega_{22}^{-1}(u, \theta)(Q_2 + \delta G_2)] du. \end{aligned}$$

Para $s = kT$, con las hipótesis sobre Ω : $\Omega_{11}(kT, \theta) = 1$, $\Omega_{12}(kT, \theta) = 0$,

$$\delta h_k(\theta, \delta) = \int_0^{kT} \Omega_{11}^{-1}(u, \theta) (Q_1 + \delta G_1 - \Omega_{12}(u, \theta) \Omega_{22}^{-1}(Q_2 + \delta G_2)) du.$$

Como $y(s, h_k(\theta, \delta), \theta, \delta) = O(\delta)$, los términos en Q_1 y Q_2 , que son por lo menos cuadráticos en y , desaparecen en el cálculo de $h_k(\theta, 0)$, y

$$h_k(\theta, 0) = \int_0^{kT} \Omega_{11}^{-1}(u, \theta) (G_1(u, 0, \theta, 0) - \Omega_{12}(u, \theta) \Omega_{22}^{-1}(u, \theta) G_2(u, 0, \theta, 0)) du.$$

Reemplazando $\Omega_{12}(u, \theta)$ por su valor,

$$h_k(\theta, 0) = \int_0^{kT} \{ \Omega_{11}^{-1}(u, \theta) G_1(u, 0, \theta, 0) - \left(\int_0^u \Omega_{11}^{-1}(v, \theta) P_{12}(v, \theta) \Omega_{22}(v, \theta) dv \right) \Omega_{22}^{-1}(u, \theta) G_2(u, 0, \theta, 0) \} du.$$

La doble integral se puede escribir como

$$\int_0^{kT} \left(\int_0^u (\dots) dv \right) du = \int_0^{kT} \left(\int_v^{kT} (\dots) du \right) dv = \int_0^{kT} \int_0^{kT} (\dots) du dv - \int_0^{kT} \left(\int_0^v (\dots) du \right) dv.$$

La primera integral es $\Omega_{11}^{-1}(kT, \theta) \Omega_{12}(kT, \theta) \int_0^{kT} \Omega_{22}^{-1}(u, \theta) G_2(u, 0, \theta, 0) du = 0$, y al cambiar u por v en la segunda se encuentra que

$$\begin{aligned} h_k(\theta, 0) &= \int_0^{kT} \Omega_{11}^{-1}(u, \theta) \{ P_{12}(u, \theta) \int_0^u \Omega_{22}(u, \theta) \Omega_{22}^{-1}(v, \theta) G_2(v, 0, \theta, 0) dv + G_1(u, 0, \theta, 0) \} du \\ &= \int_0^{kT} H(u) du. \end{aligned}$$

Al calcular $\int_T^{2T} H(u) du = \int_0^T H(w+T) dw$ se observa que por la periodicidad de Ω_{11} , P_{12} , G_1 y G_2 , el término en G_1 no cambia y el término en G_2 es

$$\int_0^T \Omega_{11}^{-1}(w) P_{12}(w) \int_0^{w+T} \Omega_{22}(w+T) \Omega_{22}^{-1}(v) G_2(v) dv dw.$$

Como $\Omega_{22}(w+T) = \Omega_{22}(w) \Omega_{22}(T)$ y

$$\int_0^T \Omega_{11}^{-1}(w) P_{12}(w) \Omega_{22}(w) dw = \Omega_{12}(T, \theta) = 0,$$

el término en G_2 puede escribirse como

$$\begin{aligned} &\int_0^T \Omega_{11}^{-1}(w) P_{12}(w) \int_0^w \Omega_{22}(w) \Omega_{22}^{-1}(v) G_2(v) dv dw \\ &\left(\int_w^{w+T} \Omega_{22}(w+T-v) G_2(v) dv = \int_0^T \Omega_{22}(w-u) G_2(u) du, \right. \end{aligned}$$

por la periodicidad de G_2). Esto implica que

$$h_k(\theta, 0) = k h_1(\theta, 0).$$

38 2. SOLUCIONES PERIODICAS PARA δ PEQUEÑA

Se concluye entonces que $h_k(\theta, 0)$ y $h_1(\theta, 0)$ tienen los mismos ceros y dan las mismas soluciones periódicas:

Proposición 1

Supóngase que la órbita periódica $\eta(t)$ del sistema desacoplado es hiperbólica y que la ecuación de bifurcación

$$h_1(\theta, 0) = \int_0^T \Omega_{11}^{-1}(u, \theta) [P_{12}(u, \theta) \int_0^u \Omega_{22}(u, \theta) \Omega_{22}^{-1}(v, \theta) G_2(v, 0, \theta, 0) dv + G_1(u, 0, \theta, 0)] du,$$

tiene un cero simple en θ_0 . Entonces dada una vecindad arbitraria \mathcal{N} de la órbita $\phi_0(\cdot, \theta_0)$ existe una $\delta_0 > 0$ tal que para toda $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$, (2.5.1) tiene una solución periódica ϕ_δ que es una función suave de δ , cuya órbita está contenida en \mathcal{N} y cuyo período es cercano a T . Además si δ es suficientemente pequeña hay una vecindad de la órbita de $\phi_0(\cdot, \theta_0)$ en la cual no hay soluciones periódicas de (2.5.1) cuyo período mínimo esté cercano a kT para alguna $k > 1$.

Esbozo de un método alternativo

En el caso particular que se está considerando, puede probarse que el toro invariante persiste para acoplamiento pequeño y puede usarse este hecho para encontrar qué soluciones periódicas son las que persisten cuando hay acoplamiento. Sin embargo, las superficies invariantes no siempre persisten, eso depende de la velocidad de convergencia a la superficie invariante comparada con la velocidad de acercamiento a conjuntos atractores en la superficie invariante [Fe].

Sabiendo que el toro persiste, puede determinarse qué soluciones periódicas lo hacen también usando una aproximación asintótica para la ecuación que gobierna la evolución de la diferencia de fase de los osciladores en el límite de acoplamiento débil (véase [A.D.O.]). Esta ecuación puede llevarse a una forma en la que se le puede aplicar el método de promedios; los puntos críticos de la ecuación promediada corresponden a las soluciones periódicas buscadas.

Como se dijo antes, el toro persiste para acoplamiento débil, pero se sabe que desaparece para acoplamiento grande. Hasta ahora no se sabe cómo desaparece.

2.6 BIFURCACIONES DE (η, η_θ)

En esta sección se darán los detalles de la construcción que se acaba de esbozar para el caso particular considerado, en el que

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x + \beta y - x(x^2 + y^2) \\ -\beta x + y - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix},$$

por lo que

$$Df = \begin{pmatrix} 1 - 3x^2 - y^2 & \beta - 2xy \\ -\beta - 2xy & 1 - 3y^2 - x^2 \end{pmatrix},$$

$$Df(\eta) = \begin{pmatrix} -2 \cos^2 \beta t & \beta + 2 \cos \beta t \sin \beta t \\ -\beta + 2 \cos \beta t \sin \beta t & -2 \sin^2 \beta t \end{pmatrix},$$

$$\eta(s) = \begin{pmatrix} \cos \beta s \\ -\sin \beta s \end{pmatrix} = \Phi(s).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Lambda(s) &= Df(\eta(s))\Phi(s) - \Phi'(s) \\ &= \begin{pmatrix} -2\cos^2\beta_s & \beta + 2\cos\beta_s\operatorname{sen}\beta_s \\ -\beta + 2\cos\beta_s\operatorname{sen}\beta_s & -2\operatorname{sen}^2\beta_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta_s \\ -\operatorname{sen}\beta_s \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\beta_s \\ \cos\beta_s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\cos^3\beta_s - 2\cos\beta_s\operatorname{sen}^2\beta_s \\ 2\cos^2\beta_s\operatorname{sen}\beta_s + 2\operatorname{sen}^3\beta_s \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} -\cos\beta_s \\ \operatorname{sen}\beta_s \end{pmatrix} \\ &= -2\eta(s) = -2\Phi(s). \end{aligned}$$

Como $a(s, \theta)$, $b(s, \theta)$ son múltiplos de $f(\eta(s))$ y de $f(\eta(s + \theta))$ respectivamente y

$$\begin{aligned} f(\eta(s)) &= \begin{pmatrix} dx_1/ds \\ dy_1/ds \end{pmatrix} \\ &= \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \cos\beta_s \\ -\operatorname{sen}\beta_s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\beta\operatorname{sen}\beta_s \\ -\beta\cos\beta_s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entonces $a^T\Lambda(s) = 0 = b^T\Lambda(s + \theta)$ por lo que $P_{12} \equiv 0$. Por otro lado $\Phi(\cdot)^T\Lambda(\cdot) = -2|\Phi(\cdot)|^2 = -2$, es decir $P_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. La matriz $\Psi(s, \theta)$ está entonces dada por

$$\Psi(s, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\beta_s & \cos\beta_s & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta_s & -\operatorname{sen}\beta_s & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\beta(s + \theta) & 0 & \cos\beta(s + \theta) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta(s + \theta) & 0 & -\operatorname{sen}\beta(s + \theta) \end{pmatrix}.$$

Por otro lado $dv/ds = \Phi(s)^T\Lambda(s)v = -2v$ por lo que $V(s) = e^{-2s}I$. Se calculará ahora $Y(s, y, \theta, \delta)$ que está dada por la ecuación (2.5.7). A pesar de la longitud de las fórmulas, se da un desarrollo detallado de los cálculos para que el lector pueda seguirlos más fácilmente.

$$Y(s, y, \theta, \delta) = \Psi(s, \theta)^T [r(s, y, \theta, \delta)F(\phi_0(s, \theta) + \Psi(s, \theta)y, \delta) - \Psi'(s, \theta)y]$$

donde

$$r(s, y, \theta, \delta) = \frac{F_0(\phi_0(s, \theta))^T [F_0(\phi_0(s, \theta)) + \Psi'(s, \theta)y]}{F_0(\phi_0(s, \theta))^T F(\phi_0(s, \theta) + \Psi(s, \theta)y, \delta)}.$$

Puede escribirse

$$\Psi(s, \theta) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix},$$

en donde

$$\Psi_1 = K_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\beta_s & \cos\beta_s \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta_s & -\operatorname{sen}\beta_s \end{pmatrix},$$

$$\Psi_2 = K_{1,\theta} \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad K_{1,\theta} = K_1(s + \theta).$$

40 2. SOLUCIONES PERIODICAS PARA δ PEQUEÑA

Con esta notación, $\eta_\theta = \eta(s + \theta)$ y

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} f(\eta + \Psi_1) &= f\left(\eta + K_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= K\eta - \eta + KK_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - K_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - 2y_2\left(\eta + K_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) - |\Psi_1|^2\eta - |\Psi_1|^2\Psi_1 \end{aligned}$$

porque $\Psi_1^T \eta = \eta^T \Psi_1 = y_2$. El término de acoplamiento $\delta D(z_2 - z_1)$ es en este caso

$$\delta D(\eta_\theta - \eta + K_{1,\theta} \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - K_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}).$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} |\Psi_1|^2 &= (K_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix})^T K_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^T K_1^T K_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}y_1^2 + y_2^2 \end{aligned}$$

Además $K\eta - \eta = f(\eta) = -\beta \begin{pmatrix} \text{sen } \beta s \\ \text{cos } \beta s \end{pmatrix}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} &F(\phi_0(s, \theta) + \Psi(s, \theta)y, \delta) = \\ &= \begin{pmatrix} f(\eta) + (KK_1 - K_1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - 2y_2\left(\eta + K_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) - |\Psi_1|^2\eta - |\Psi_1|^2\Psi_1 + \\ &\quad + \delta D(\eta_\theta - \eta + K_{1,\theta} \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - K_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) \\ f(\eta_\theta) + (KK_{1,\theta} - K_{1,\theta}) \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - 2y_2(\eta_\theta + K_{1,\theta} \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) - |\Psi_2|^2\eta_\theta - |\Psi_2|^2\Psi_2 + \\ &\quad - \delta D(\eta_\theta - \eta + K_{1,\theta} \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - K_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $D = 2I - 4\epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I - 4\epsilon A$.

Por otro lado, $f(\eta)^T f(\eta + \Psi_1)$ involucra términos de la forma

$$f(\eta)^T KK_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (K_1^T K^T f(\eta))^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\beta^2} \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$f(\eta)^T K_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (K_1^T f(\eta))^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$f(\eta)^T \eta = 0, \quad f(\eta)^T \eta_\theta = -f(\eta_\theta)^T \eta = \beta \text{sen } \beta \theta,$$

$$f(\eta)^T K_{1,\theta} = (K_{1,\theta}^T f(\eta))^T = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\sqrt{2}} \text{cos } \beta \theta \\ \beta \text{sen } \beta \theta \end{pmatrix}^T,$$

$$f(\eta_\theta)^T K_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\sqrt{2}} \text{cos } \beta \theta \\ -\beta \text{sen } \beta \theta \end{pmatrix}^T,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
F_0(\phi_0(s))^T F_0(\phi_0(s)) &= 2\beta^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta^2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta^2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}y_1^2 + y_2^2\right) \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}y_1^2 + y_3^2\right) \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} + \sqrt{2}\beta y_1(y_2 - y_3) + 2\delta\beta \operatorname{sen} \beta\theta(y_3 - y_2) + \\
&\quad 4\beta\delta\epsilon(\cos \beta\theta - 1) \operatorname{sen} \beta(2s + \theta) + 4\beta\delta\epsilon(\cos \beta(s + \theta) - \cos \beta s) \times \\
&\quad \times \left[\frac{y_1}{\sqrt{2}}(\cos \beta s + \cos \beta(s + \theta)) - y_2 \operatorname{sen} \beta s + y_3 \operatorname{sen} \beta(s + \theta) \right] \\
&= 2\beta^2 + (y_2 + y_3)\left[\beta^2 + \frac{\beta}{\sqrt{2}}y_1(y_2 - y_3)\right] + \\
&\quad + 4\beta\delta\epsilon[(\cos \beta\theta - 1) \operatorname{sen} \beta(2s + \theta) + \cos \beta(s + \theta) - \cos \beta s] \left(\frac{y_1}{\sqrt{2}}(\cos \beta s + \right. \\
&\quad \left. + \cos \beta(s + \theta)) - y_2 \operatorname{sen} \beta s + y_3 \operatorname{sen} \beta(s + \theta)\right) + \sqrt{2}\beta y_1(y_2 - y_3) + \\
&\quad + 2\delta\beta \operatorname{sen} \beta\theta(y_3 - y_2).
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$F_0(\phi_0(s))^T [F_0(\phi_0(s)) + \Psi'(s)y] = 2\beta^2 + \beta^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \beta^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} = 2\beta^2 + \beta^2(y_2 + y_3).$$

Se concluye que

$$r(s, y, \theta, \delta) = \frac{2\beta^2 + \beta^2(y_2 + y_3)}{d},$$

donde

$$\begin{aligned}
d &= 2\beta^2 + (y_2 + y_3)\left(\beta^2 + \frac{\beta}{2}y_1(y_2 - y_3)\right) + \sqrt{2}\beta y_1(y_2 - y_3) + 4\beta\delta\epsilon[(\cos \beta\theta - 1) \operatorname{sen} \beta(2s + \theta) + \\
&\quad + (\cos \beta(s + \theta) - \cos \beta s)] \left(\frac{y_1}{\sqrt{2}}(\cos \beta s + \cos \beta(s + \theta)) - y_2 \operatorname{sen} \beta s + y_3 \operatorname{sen} \beta(s + \theta)\right) + \\
&\quad + 2\delta\beta \operatorname{sen} \beta\theta(y_3 - y_2).
\end{aligned}$$

Además $\Psi^T \Psi' = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K_1^T K K_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -\beta/\sqrt{2} \\ \beta/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$, $K_1^T K_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K_1^T \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, por lo que las primeras dos componentes de $\Psi^T F(\phi_0(s) + \Psi y, \delta)$ están dadas por

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -\beta/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1/2 & -\beta/\sqrt{2} \\ \beta/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - |\Psi_1|^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1(y_2 + y_3) \\ 2y_2(1 + y_2) \end{pmatrix} \\
& - |\Psi_1|^2 \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 2\delta \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \beta\theta \\ \cos \beta\theta - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos \beta\theta & -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \beta\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \beta\theta & \cos \beta\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} \right. \\
& \left. - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] - 4\epsilon\delta \left[(\operatorname{sen} \beta s - \operatorname{sen} \beta(s + \theta)) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \beta s \\ -\operatorname{sen} \beta s \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos \beta s \cos \beta(s + \theta) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \beta(s + \theta) \cos \beta s \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \beta s \cos \beta(s + \theta) & \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \beta(s + \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos^2 \beta s & -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \beta s \cos \beta s \\ -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \beta s \cos \beta s & \operatorname{sen}^2 \beta s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \beta/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \beta/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} |\Psi_2|^2 + \\
& - 2\delta \left(\frac{\operatorname{sen} \beta\theta}{\sqrt{2}} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \beta\theta \\ \operatorname{sen} \beta\theta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) + \\
& \frac{-4\epsilon}{\sqrt{2}} \left(\cos \beta(s + \theta) (\operatorname{sen} \beta s - \operatorname{sen} \beta(s + \theta)) + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 \beta(s + \theta) \\ -\operatorname{sen} \beta(s + \theta) \cos \beta(s + \theta) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) + \\
& - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \beta s \cos \beta(s + \theta) \\ -\operatorname{sen} \beta s \cos \beta(s + \theta) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
& = \frac{\beta}{\sqrt{2}} (y_3 - y_2) - \frac{y_1}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - y_1 (y_2 + y_3) + \frac{\beta}{\sqrt{2}} y_1 - \left(\frac{y_1^2}{2} + y_2^2 \right) - 2y_2 (1 + y_2) + \\
& 2\delta \left(\frac{-\sqrt{2} \operatorname{sen} \beta\theta - y_1 - \cos \beta\theta y_1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \beta\theta y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \beta\theta y_3}{\cos \beta\theta - 1 - y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \beta\theta y_1 + \cos \beta\theta y_3} \right) - 4\epsilon\delta \times \\
& \times \left(\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{sen} \beta s - \operatorname{sen} \beta(s + \theta)) (\cos \beta s + \cos \beta(s + \theta)) + (\cos \beta s + \cos \beta(s + \theta)) [-\cos \beta s + \\ \cos \beta(s + \theta)] \frac{y_1}{2} + + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \beta s y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \beta(s + \theta) y_3 \\ -\operatorname{sen} \beta s (\operatorname{sen} \beta s - \operatorname{sen} \beta(s + \theta)) + \operatorname{sen} \beta s \left[\frac{\cos \beta(s + \theta)}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{\cos \beta s}{2} y_1 + \operatorname{sen} \beta(s + \theta) y_2 - \operatorname{sen} \beta s y_2 \right] \end{array} \right).
\end{aligned}$$

La tercera componente de $\Psi(s)^T F(\phi_0 + \Psi(s)y)$ está dada por

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \beta/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} - |\Psi_2|^2 - |\Psi_2|^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} + \\
& - 2y_3 (1 + y_3) - 2\delta \left[1 - \cos \beta\theta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \beta\theta \\ \cos \beta\theta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] + \\
& + 4\epsilon\delta \left(-\operatorname{sen} \beta(s + \theta) (\operatorname{sen} \beta(s + \theta) - \operatorname{sen} \beta s) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \beta(s + \theta) \operatorname{sen} \beta(s + \theta) \\ \operatorname{sen}^2 \beta(s + \theta) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. - \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \beta s \operatorname{sen} \beta(s + \theta) \\ \operatorname{sen} \beta s \operatorname{sen} \beta(s + \theta) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \\
& = -y_1 \frac{\beta}{\sqrt{2}} - \left(\frac{y_1^2}{2} + y_3^2 \right) (1 + y_3) - 2\delta (1 - \cos \beta\theta + y_3 + y_1 \frac{\operatorname{sen} \beta\theta}{\sqrt{2}} - y_2 \cos \beta\theta) + \\
& - 2y_3 (1 + y_3) + 4\epsilon\delta \left(-\operatorname{sen} \beta(s + \theta) (\operatorname{sen} \beta(s + \theta) - \operatorname{sen} \beta s) + \frac{y_1}{\sqrt{2}} (\operatorname{sen} \beta(s + \theta) (\cos \beta(s + \theta) + \cos \beta s)) \right. \\
& \quad \left. - \operatorname{sen} \beta(s + \theta) \operatorname{sen} \beta s y_2 + \operatorname{sen}^2 \beta(s + \theta) y_3 \right).
\end{aligned}$$

Se concluye entonces que si $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)^T$ entonces

$$Y_1 = \frac{\beta}{\sqrt{2}}(y_3 - y_2)(r - 1) - r y_1(y_2 + y_3) - r \frac{y_1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + 2\delta r(-\sqrt{2} \operatorname{sen} \beta\theta - y_1(1 + \cos \beta\theta) + \\ - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \beta\theta y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \beta\theta y_3) - 4\epsilon\delta r(\cos \beta s + \cos \beta(s + \theta))\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{sen} \beta s - \operatorname{sen} \beta(s + \theta)) + \right. \\ \left. - (\cos \beta s + \cos \beta(s + \theta))\frac{y_1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \beta s y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \beta(s + \theta) y_3\right),$$

$$Y_2 = \frac{\beta}{\sqrt{2}} y_1(r - 1) - \left(\frac{y_1^2}{2} + y_2^2\right)r + 2\delta(\cos \beta\theta - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \beta\theta y_1 - y_2 + \cos \beta\theta y_3)r - 2r y_2(1 + y_2) + \\ - 4\epsilon\delta r \operatorname{sen} \beta s(\operatorname{sen} \beta(s + \theta) - \operatorname{sen} \beta s + \frac{\cos \beta(s + \theta)}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{\cos \beta s}{2} y_1 + \operatorname{sen} \beta(s + \theta) y_2 - \operatorname{sen} \beta s y_2),$$

$$Y_3 = -y_1 \frac{\beta}{\sqrt{2}}(r - 1) - r\left(\frac{y_1^2}{2} + y_2^2\right)(1 + y_3) - 2\delta r(1 - \cos \beta\theta + y_1 \frac{\operatorname{sen} \beta\theta}{\sqrt{2}} - y_2 \cos \beta\theta + y_3) - 2r y_3(1 + y_3) + \\ + 4\epsilon\delta r \operatorname{sen} \beta(s + \theta)(\operatorname{sen} \beta s - \operatorname{sen} \beta(s + \theta) + \frac{y_1}{\sqrt{2}}(\cos \beta(s + \theta) + \cos \beta s) - \operatorname{sen} \beta s y_2 + \operatorname{sen} \beta(s + \theta) y_3).$$

Esto implica que

$$\delta G_1(s, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, \theta) = 2\delta r_0(-\sqrt{2} \operatorname{sen} \beta\theta) - \frac{4\epsilon\delta r_0}{\sqrt{2}}(\cos \beta s + \cos \beta(s + \theta))(\operatorname{sen} \beta s - \operatorname{sen} \beta(s + \theta)),$$

donde

$$r_0 = \frac{2\beta^2}{2\beta^2 + 4\beta\delta\epsilon(\cos \beta\theta - 1) \operatorname{sen} \beta(2s + \theta)}.$$

Se tiene entonces

$$G_1(s, 0, 0, 0, \theta) = \frac{r_0}{\sqrt{2}}(-4 \operatorname{sen} \beta\theta - 4\epsilon(\cos \beta s + \cos \beta(s + \theta))(\operatorname{sen} \beta s - \operatorname{sen} \beta(s + \theta))) \\ = \frac{r_0}{\sqrt{2}}(-4 \operatorname{sen} \beta\theta - 2\epsilon \operatorname{sen} 2\beta s + 2\epsilon \operatorname{sen} 2\beta(s + \theta) + 4\epsilon \operatorname{sen} \beta\theta).$$

Cuando $\delta = 0$, $r_0 = 1$, y en ese caso se obtiene

$$G_1(s, 0, 0, 0, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-4 \operatorname{sen} \beta\theta - 2\epsilon \operatorname{sen} 2\beta s + 2\epsilon \operatorname{sen} 2\beta(s + \theta) + 4\epsilon \operatorname{sen} \beta\theta).$$

Para encontrar los valores de θ para los cuales se bifurcan soluciones de (η, η_θ) hay ahora que sustituir lo encontrado en la ecuación de bifurcación. Como $P_{12} = 0$ se tiene

$$h_1(\theta, 0) = \int_0^{2\pi/\beta} G_1(u, 0, 0, \theta) du = \frac{-4\sqrt{2}(1 - \epsilon)\pi}{\beta} \operatorname{sen} \beta\theta.$$

Esto tiene dos ceros simples, $\theta_0 = 0$ y $\theta_0 = \pi/\beta$ y por lo tanto, por la Proposición 1 se sabe que hay soluciones con período cercano a $2\pi/\beta$ que se bifurcan de $\theta_0 = 0$ y de $\theta_0 = \pi/\beta$. Como

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} \eta(s) \\ \eta(s + \theta) \end{pmatrix}, \quad \eta(s) = \begin{pmatrix} \cos \beta s \\ -\operatorname{sen} \beta s \end{pmatrix},$$

44 2. SOLUCIONES PERIODICAS PARA δ PEQUEÑA

cuando $\theta_0 = 0$ se tienen soluciones en fase y cuando $\theta_0 = \pi/\beta$,

$$\eta(s + \theta) = \begin{pmatrix} \cos \beta(s + \frac{\pi}{\beta}) \\ -\sin \beta(s + \frac{\pi}{\beta}) \end{pmatrix} = -\eta(s),$$

es decir, se tienen soluciones fuera de fase. A las primeras se les llamará ω_0 y a las segundas ω_π .

Por lo dicho arriba, la órbita de ω_0 está en el subespacio O dado por

$$O = \{(z_1, z_2) | z_1 = z_2\}$$

y la de ω_π en el subespacio

$$\Pi = \{(z_1, z_2) | z_1 = -z_2\}.$$

Estos dos subespacios son subespacios invariantes ya que si $z_1 = z_2$ o $z_1 = -z_2$ en $t = 0$ entonces $z_1 = z_2$ o $z_1 = -z_2$ para todo tiempo, como puede comprobarse directamente de las ecuaciones del sistema desacoplado, es decir, para $\delta = 0$.

La proposición 1 y el desarrollo que se ha llevado a cabo son un caso particular de un argumento de Melnikov. Para más detalles sobre este tema véase [G.H.].

CAPÍTULO 3

3. LA SOLUCIÓN EN FASE

En este capítulo se demuestra que los multiplicadores de Floquet asociados a ω_0 , la solución en fase, están dentro del círculo unitario cuando $\delta > 0$. Esto implica, por el teorema 2 demostrado en este capítulo, que ω_0 es estable para esos valores de δ . Se demuestra también que ω_0 es inestable si $\delta < 0$ y los otros dos parámetros están en determinados rangos.

3.1 ESTABILIDAD Y BIFURCACIONES DE ω_0

En O las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= f(z_1) + \delta D(z_2 - z_1) \\ \frac{dz_2}{dt} &= f(z_2) + \delta D(z_1 - z_2)\end{aligned}$$

se convierten en

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= f(z_1) \\ \frac{dz_2}{dt} &= f(z_2)\end{aligned}$$

que es independiente de δ , y por lo tanto ω_0 existe para toda $\delta \in \mathbb{R}$. Para estudiar las soluciones en O o en Π es conveniente definir

$$w_1 = \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad w_2 = \frac{z_1 - z_2}{2}.$$

En estos términos la ecuación de arriba se escribe como

$$\begin{aligned}\frac{dw_1}{dt} &= \frac{1}{2}[f(w_1 + w_2) + f(w_1 - w_2)] = Kw_1 - (|w_1|^2 + |w_2|^2)w_1 - 2(w_1, w_2)w_2 \\ \frac{dw_2}{dt} &= \frac{1}{2}[f(w_1 + w_2) - f(w_1 - w_2)] - 2\delta Dw_2 = Kw_2 - (|w_1|^2 + |w_2|^2)w_2 - 2(w_1, w_2)w_1 - 2\delta Dw_2,\end{aligned}$$

$O = \{w_1, w_2 = 0\}$, $\Pi = \{w_1 = 0, w_2\}$, y ω_0 está dada por

$$w_1(t) = \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix}, \quad w_2(t) \equiv 0.$$

(Esto está en O .) En estas mismas coordenadas la ecuación variacional en O (es decir $w_1 \rightarrow \eta + w_1$, $w_2 \rightarrow 0$) es la misma que se obtuvo para $(\eta, 0)$:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = (K - I)\xi_1 - 2(\eta, \xi_1)\eta.$$

46 3. LA SOLUCIÓN EN FASE

Como se vio en la sección 2.3, los multiplicadores de Floquet correspondientes a esta ecuación son 1 y $e^{4\pi/\beta}$ por lo que no hay bifurcaciones de soluciones periódicas sobre ω_0 en \mathcal{O} . Sin embargo, tomando variaciones también en Π las ecuaciones obtenidas son

$$\begin{aligned}\frac{dw_1}{dt} &= (K - I)w_1 - 2(\eta, w_1)\eta + \dots \\ \frac{dw_2}{dt} &= (K - I)w_2 - 2(\eta, w_2)\eta - 2\delta Dw_2 + \dots\end{aligned}$$

ya que $\eta' + w_1' = K\eta + Kw_1 - (|\eta|^2 + |w_1|^2 + 2(\eta, w_1) + |w_2|^2)(\eta + w_1) - 2(\eta + w_1, w_2)w_2$ y $w_2' = Kw_2 - 2(\eta + w_1, w_2)(\eta + w_1) - (1 + |w_1|^2 + 2(\eta, w_1) + |w_2|^2)w_2 - 2\delta Dw_2$.

La ecuación para w_2 puede escribirse como

$$\frac{dw_2}{dt} = (K - I - 2\delta D)w_2 - 2(\eta, w_2)\eta. \quad (3.1.1)$$

Para resolver esta ecuación se utilizará nuevamente el hecho de que η, η' forman una base de \mathbb{C}^2 . Escribáse $w_2 = a\eta + b\eta'$, entonces por la ecuación (3.1.1) se tiene

$$a'\eta + b'\eta' + a\eta' + b\eta'' = a(K - I)\eta + b(K - I)\eta' - 2a\eta - 2\delta(aD\eta + bD\eta'). \quad (3.1.2)$$

Como se vio antes, $(K - I)\eta = \eta'$, $(K - I)\eta' = \eta''$, $D = 2I - 4cA$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por lo que

$$A\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ -\operatorname{sen} \beta t \end{pmatrix} \quad A\eta' = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta \cos \beta t \end{pmatrix}$$

Para expresar lo anterior en términos de η, η' escribáse

$$A\eta = \alpha\eta + \gamma\eta', \quad A\eta' = \alpha_1\eta + \gamma_1\eta'.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\alpha &= (A\eta, \eta) = \operatorname{sen}^2 \beta t, \quad \gamma = (A\eta, \eta') \frac{1}{|\eta'|^2} = \frac{1}{\beta} \operatorname{sen} \beta t \cos \beta t, \\ \alpha_1 &= \beta \operatorname{sen} \beta t \cos \beta t, \quad \gamma_1 = \cos^2 \beta t.\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.1.2) se obtiene

$$\begin{aligned}a'\eta + b'\eta' &= -2a\eta - 4\delta a\eta - 4\delta b\eta' + 8\delta\epsilon a(\operatorname{sen}^2 \beta t \eta + \frac{\operatorname{sen} \beta t \cos \beta t}{\beta} \eta') \\ &\quad + 8\delta\epsilon b(\beta \operatorname{sen} \beta t \cos \beta t \eta + \cos^2 \beta t \eta')\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}a' &= -2a - 4\delta a + 8\delta\epsilon(a \operatorname{sen}^2 \beta t + b\beta \operatorname{sen} \beta t \cos \beta t) \\ &= -(2 + 4\delta(1 - \epsilon))a + 4\delta\epsilon(-\cos 2\beta t a + \beta \operatorname{sen} 2\beta t b) \\ b' &= -4\delta b + 8\delta\epsilon(\frac{a}{\beta} \operatorname{sen} \beta t \cos \beta t + b \cos^2 \beta t) \\ &= -4\delta(1 - \epsilon)b + 4\delta\epsilon(\frac{\operatorname{sen} 2\beta t}{\beta} a + \cos 2\beta t b).\end{aligned}$$

Para resolver estas ecuaciones defínase

$$\tilde{a} = e^{(2+4\delta(1-\epsilon))t} a, \quad \tilde{b} = -\beta e^{4\delta(1-\epsilon)t} b.$$

Las ecuaciones para \bar{a} , \bar{b} pueden escribirse como

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix}' = -4\delta\epsilon \begin{pmatrix} \cos 2\beta t & e^{2t} \operatorname{sen} \beta t \\ e^{-2t} \operatorname{sen} 2\beta t & -\cos 2\beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix}. \quad (3.1.3)$$

El caso $\epsilon = 0$ se estudiará en el capítulo 6. Para $\epsilon \neq 0$ se harán estimaciones que permitan determinar la estabilidad de ω_0 y si hay bifurcaciones sobre esa rama.

Si $\Phi(t)$ es matriz fundamental de $\Phi'(t) = A_1(t)\Phi(t)$ entonces

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(0) e^{\int_0^t \operatorname{traza} A_1(s) ds}$$

(véase [C.L.] p. 28.)

Por otro lado si $W(t)$ es solución de $W'(t) = A_1(t)W(t)$ entonces

$$W^T W' = W^T A_1 W = \frac{1}{2}(W^T A_1 W + W^T A_1^T W),$$

por lo que $|W|^2 = W^T(A_1 + A_1^T)W = 2(W^T S W)$, donde $S = (A_1 + A_1^T)/2$. Si se denota por λ_i a los valores propios de S , $\mu = \min\{\lambda_i\}$, $\nu = \max\{\lambda_i\}$ entonces por lo dicho arriba,

$$2\mu(t)|W|^2 \leq |W|^2 \leq 2\nu(t)|W|^2,$$

y por lo tanto

$$e^{2\int_0^t \mu(s) ds} |W(0)|^2 \leq |W|^2 \leq e^{2\int_0^t \nu(s) ds} |W(0)|^2,$$

$$e^{\int_0^t \mu(s) ds} |W(0)| \leq |W| \leq e^{\int_0^t \nu(s) ds} |W(0)|.$$

En el caso de dos dimensiones, sea W_0 vector propio de $\Phi(T)$ con valor propio $\lambda(T) \in \mathbb{R}$, es decir, $\Phi(T)W_0 = \lambda W_0$. Además $W(t) \equiv \Phi(t)W_0$ es solución de $W' = A_1 W$ con $W(0) = \Phi(0)W_0(0) = W_0$ (si $\Phi(0) = I$), por lo que

$$e^{\int_0^T \mu(s) ds} \leq |\lambda(T)| \leq e^{\int_0^T \nu(s) ds}.$$

En el caso de dos dimensiones, si $\lambda \in \mathbb{C}$ es valor propio, $\bar{\lambda}$ también lo es, y entonces

$$\lambda \bar{\lambda} = \det \Phi(T) = e^{\int_0^T \operatorname{traza} A_1} = e^{\int_0^T \operatorname{traza} S},$$

(traza $S = \mu + \nu$) y entonces $2\mu(s) \leq \operatorname{traza} A_1 \leq 2\nu(s)$, y la desigualdad anterior sigue siendo válida.

La ecuación que se quiere resolver es (3.1.1), en la que

$$\begin{aligned} A_1 w_2 &= (K - I - 2\delta D)w_2 - 2(\eta, w_2)\eta \\ &= \begin{pmatrix} -4\delta & \beta \\ -\beta & -4\delta(1 - 2\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - 2(\cos \beta t u - \operatorname{sen} \beta t v) \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\operatorname{sen} \beta t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

entonces

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4\delta - 2\cos^2 \beta t & \beta + 2\operatorname{sen} \beta t \cos \beta t \\ -\beta + 2\operatorname{sen} \beta t \cos \beta t & -4\delta(1 - 2\epsilon) - 2\operatorname{sen}^2 \beta t \end{pmatrix},$$

y traza $A_1 = -8\delta(1 - \epsilon) - 2$, por lo que $\lambda_1 \lambda_2 = e^{-2(1+4\delta(1-\epsilon))T}$,

$$S = \begin{pmatrix} -4\delta - 2\cos^2 \beta t & 2\operatorname{sen} \beta t \cos \beta t \\ 2\operatorname{sen} \beta t \cos \beta t & -4\delta(1 - 2\epsilon) - 2\operatorname{sen}^2 \beta t \end{pmatrix}.$$

48 3. LA SOLUCIÓN EN FASE

Los valores propios de S están dados por

$$\lambda^2 + \lambda(8\delta(1-\epsilon) + 2) + 4\delta(4\delta + 2) - 32\delta^2\epsilon - 16\delta\epsilon \cos^2 \beta t,$$

es decir,

$$\lambda_{1,2} = -(4\delta(1-\epsilon) + 1) \pm (1 + 16\delta^2\epsilon^2 - 8\delta\epsilon + 16\delta\epsilon \cos^2 \beta t)^{1/2}.$$

Como

$$(1 - 4\delta\epsilon)^2 \leq 1 + 16\delta^2\epsilon^2 - 8\delta\epsilon + 16\delta\epsilon \cos^2 \beta t \leq (1 + 4\delta\epsilon)^2 \text{ si } \delta\epsilon > 0,$$

$$(1 + 4\delta\epsilon)^2 \leq 1 + 16\delta^2\epsilon^2 - 8\delta\epsilon + 16\delta\epsilon \cos^2 \beta t \leq (1 - 4\delta\epsilon)^2 \text{ si } \delta\epsilon < 0,$$

entonces

$$e^{-(4\delta(1-\epsilon)+1)-|(1-4\delta\epsilon)|}T \leq \lambda(T) \leq e^{-(4\delta(1-\epsilon)+1)+|(1+4\delta\epsilon)|}T.$$

Se concluye que

$$\begin{aligned} 4\delta\epsilon \geq 1 &\Rightarrow e^{-4\delta T} \leq |\lambda| \leq e^{(-4\delta+8\delta\epsilon)T}, \\ 0 \leq 4\delta\epsilon \leq 1 &\Rightarrow e^{(-4\delta+8\delta\epsilon-2)T} \leq |\lambda| \leq e^{(-4\delta+8\delta\epsilon)T}, \\ -1 \leq 4\delta\epsilon \leq 0 &\Rightarrow e^{(-4\delta-2)T} \leq |\lambda| \leq e^{-4\delta T}, \\ 4\delta\epsilon \leq -1 &\Rightarrow e^{(-4\delta+8\delta\epsilon)T} \leq |\lambda| \leq e^{-4\delta T}, \end{aligned}$$

o puesto de otra forma,

$$\begin{aligned} \delta \geq 0 &\begin{cases} 4\delta\epsilon \geq 1 & \Rightarrow e^{-4\delta T} < |\lambda| < e^{-4\delta(1-2\epsilon)T} \\ 0 \leq 4\delta\epsilon \leq 1 & \Rightarrow e^{-4\delta(1-2\epsilon)T-2T} < |\lambda| < e^{-4\delta(1-2\epsilon)T} \end{cases} \\ \delta \leq 0 &\begin{cases} -1 \leq 4\delta\epsilon \leq 0 & \Rightarrow e^{-4\delta T-2T} < |\lambda| < e^{-4\delta T} \\ 4\delta\epsilon \leq -1 & \Rightarrow e^{-4\delta(1-2\epsilon)T} < |\lambda| < e^{-4\delta T}. \end{cases} \end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que si $\delta > 0$ y $0 < \epsilon \leq 1/2$ entonces los dos valores propios están dentro del círculo unitario, i.e. todos los multiplicadores de Floquet no triviales están dentro del círculo unitario y por lo tanto, como se demostrará en la sección 3.2, ω_0 es estable y no tiene bifurcaciones de soluciones periódicas.

Si $\delta < 0$ y $\epsilon \leq 1/2$ entonces si $-1 \geq 4\delta\epsilon$, los dos multiplicadores están fuera del círculo unitario; si $4\delta < -1/(1-\epsilon)$, $\lambda_1\lambda_2 > 1$ y por lo tanto al menos un valor propio está fuera del círculo unitario; si $4\delta\epsilon \geq -1$ y $4\delta \leq -2$ hay dos multiplicadores fuera del círculo unitario; en todos estos casos la solución es inestable. Parece que no puede demostrarse que de hecho ω_0 es inestable para toda β , ϵ siempre que $\delta < 0$ pero hay fuerte evidencia numérica de que eso efectivamente sucede.

En la siguiente sección se demostrará que en general una solución periódica es estable en cierto sentido si todos sus multiplicadores de Floquet excepto uno (que está sobre el círculo unitario y es el que hace que haya solución periódica) están dentro del círculo unitario e inestable si al menos un multiplicador está fuera del círculo unitario.

3.2 ESTABILIDAD ORBITAL DE SOLUCIONES PERIODICAS

En esta sección se discutirá la estabilidad orbital de la solución periódica $x = \phi(s)$ del sistema general n -dimensional

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \delta), \quad F(x, 0) = F_0 \quad (3.2.1)$$

usando el sistema ortonormal introducido antes (véase [Ur] cap.6.)

Definición Si M es un conjunto en \mathbb{R}^n , $U_\eta(M) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \text{dist}(x, M) < \eta\}$, se dice que un conjunto invariante de la ecuación

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.2.1}$$

es estable si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier x^0 en $U_\delta(M)$, la solución $x(t, x^0)$ está en $U_\epsilon(M) \forall t \geq 0$. Se dice que el conjunto es *asintóticamente estable* si es estable y además existe $b > 0$ tal que para toda $x^0 \in U_b(M)$ la solución $x(t, x^0)$ tiende a M cuando $t \rightarrow \infty$. Si $u(t)$ es una solución periódica no constante de (3.2.1) se dice que $u(t)$ es *orbitalmente estable (asintóticamente orbitalmente estable)* si la correspondiente curva cerrada invariante Γ generada por u es estable (asintóticamente estable). Se dice que una solución periódica es *asintóticamente orbitalmente estable con fase asintótica* si es asintóticamente orbitalmente estable y existe $b > 0$ tal que para toda x_0 con $\text{dist}(x_0, \Gamma) < b$, existe $\tau = \tau(x_0)$ tal que $|x(t, x_0) - u(t, \tau)| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Se supondrá que $F(x)$ es continuamente diferenciable en un dominio D que contiene a la órbita cerrada C representada por la solución periódica $x = \phi(s)$. Sea

$$\{F, \Psi\} = \{F[\phi(s)] = \frac{F[\phi(s)]}{\|F[\phi(s)]\|}, \xi_2(s), \dots, \xi_n(s)\} \tag{3.2.2}$$

un sistema ortonormal continuamente diferenciable a lo largo de C . Entonces, como se vio en la sección 2.5, cualquier punto $x = x(s)$ de cualquier órbita de (3.2.1) cercana a C se escribe como

$$x(s) = \phi(s) + \Psi(s)y \tag{3.2.3}$$

y para t y y_ν ($\nu = 2, 3, \dots, n$) se tienen las ecuaciones

$$\frac{dt}{ds} = r(s, y, \delta) = \frac{F_0(\phi_0(s))^T [F_0(\phi_0(s)) + \Psi'(s)y]}{F_0(\phi_0(s))^T F(\phi_0(s) + \Psi(s)y, \delta)} \tag{3.2.4}$$

$$\frac{dy}{ds} = Y(s, y, \delta) = \Psi(s)^T [r(s, y, \delta)F(\phi_0(s) + \Psi(s)y, \delta) - \Psi'(s)y]. \tag{3.2.5}$$

La ecuación (3.2.5) puede escribirse como

$$\frac{dy}{ds} = P(s)y + o(\|y\|) \quad (y \rightarrow 0) \tag{3.2.6}$$

donde el vector $n - 1$ -dimensional y representa el incremento normal de la órbita. Para $s = s_0$ fija supóngase que

$$x(t_0) = \phi(s_0) + \Psi(s_0)y \tag{3.2.7}$$

y sea

$$\sigma(s) = [x(t_0) - \phi(s)]^T [x(t_0) - \phi(s)], \tag{3.2.8}$$

es decir, $\sigma(s)$ es el cuadrado de la distancia entre el punto $x(t_0)$ y el punto $\phi(s)$ en C . Como

$$\frac{d\phi(s)}{ds} = F[\phi(s)],$$

de (3.2.8) se tiene

$$\sigma(s_0) = \|y_0\|^2 \tag{3.2.9a}$$

$$\frac{d\sigma}{ds}(s_0) = -2F[\phi(s_0)]^T [x(t_0) - \phi(s_0)] = 0 \tag{3.2.9b}$$

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2}(s_0) = -2F[\phi(s_0)]F_x[\phi(s_0)]^T [x(t_0) - \phi(s_0)] + 2\|F[\phi(s_0)]\|^2 \tag{3.2.9c}$$

50 3. LA SOLUCIÓN EN FASE

De (3.2.9c) se observa que $d^2\sigma/ds^2(s_0) > 0$ si $\|y_0\|$ es suficientemente pequeña. De (3.2.9b) se tiene que $\sigma(s) > \sigma(s_0)$ si $s \neq 0$, es decir

$$\|y(s)\| = \text{dist}\{x(t_0), C\}. \quad (3.2.10)$$

Como s_0 es un valor arbitrario de s , lo anterior implica que

$$\|y(s)\| = \text{dist}\{x(t(s)), C\}.$$

Como $y = y(s)$ satisface el sistema (3.2.6) y por definición una órbita C es orbitalmente estable con respecto a una familia \mathcal{F} de soluciones si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta$ y $T \geq t_0$ tales que para toda solución $x = \phi(t) \in \mathcal{F}$,

$$\text{dist}\{\phi(t), C_0\} < \epsilon$$

(donde C_0 es la curva cerrada correspondiente a $x = \phi_0(t)$) para $t \geq T$ si $|\phi(t_0) - \phi_0(t_0)| < \delta$, se concluye que la estabilidad orbital de C se decide por la estabilidad de la solución trivial $y = 0$ de (3.2.6). Se demostrará primero:

Teorema 1

Si se tiene el sistema

$$\frac{dx}{dt} = A(t) + X(t, x) \quad (3.2.11)$$

donde $A(t)$ es una matriz continua y periódica y $X(t, x)$ satisface

i) $X(t, x)$ es continua y satisface una condición de Lipschitz con respecto a x en la región

$$D: |x| < H, \quad t_0 \leq t < \infty \quad (H > 0);$$

ii) $X(t, 0) = 0$

iii) $X(t, x) = o(|x|)$ uniformemente en $[t_0, \infty)$ cuando $x \rightarrow 0$, entonces la solución trivial de (3.2.11) es asintóticamente estable si los exponentes característicos del sistema lineal homogéneo

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y$$

tienen todas parte real negativa.

De aquí se concluirá el teorema 2:

Teorema 2

Supóngase que el sistema (3.2.1) tiene una solución periódica no constante $x = \phi(t)$ y que $F(x)$ es continuamente diferenciable en el dominio D que contiene a la órbita cerrada C representada por la solución periódica $x = \phi(t)$. Entonces la solución periódica $x = \phi(t)$ es asintóticamente orbitalmente estable si $n-1$ exponentes característicos de la primera ecuación variacional de (3.2.1) con respecto a $x = \phi(t)$ tienen partes reales negativas.

Prueba (del teorema 1)

Se demostrará primero que si se tiene un sistema de la forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax + X(t, x) \quad (3.2.12)$$

donde A es una matriz constante y $X(t, x)$ satisface (3.2.9) entonces la solución trivial $x = 0$ de (3.2.12) es asintóticamente estable si los valores propios de la matriz A tienen todas parte real negativa. Después se usará una transformación para reducir el caso no constante al caso constante.

Sea $x = \phi(t)$ una solución arbitraria de (3.2.12) tal que $|\phi(t_0)| < H$. Tal solución existe para $t (\geq t_0)$ suficientemente cercana a t_0 y puede continuarse siempre que $|\phi(t)| < H$. Para dicha solución se tiene

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = A\phi(t) + X[t, \phi(t)],$$

por lo que

$$\phi(t) = e^{(t-t_0)A} \phi(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} X[s, \phi(s)] ds \quad (3.2.13)$$

en el intervalo en el que $x = \phi(t)$ existe y $|\phi(t)| < H$.

Ahora, puede demostrarse a partir de la forma canónica de Jordan que los elementos de la matriz e^{tA} son de la forma

$$\sum_i e^{t\lambda_i} P_i(t), \quad (3.2.14)$$

donde λ_i son los valores propios de A y $P_i(t)$ son polinomios en t . Como los λ_i tienen parte real negativa por hipótesis, existe una constante positiva σ tal que $\text{Re}(\lambda_i) < -\sigma$ y por lo tanto

$$e^{t\sigma} \sum_i e^{t\lambda_i} P_i(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty.$$

Dicho de otra forma, para cualquier número positivo ℓ , hay un número $\tau \geq 0$ tal que

$$|e^{t\sigma} \sum_i e^{t\lambda_i} P_i(t)| < \ell \forall t \geq \tau.$$

Esto implica que $e^{t\sigma} \sum_i e^{t\lambda_i} P_i(t)$ es acotado en $[0, \infty)$. Se concluye entonces que existe una constante positiva K tal que

$$|e^{tA}| \leq K e^{-\sigma t} \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2.15)$$

Sea η un número positivo arbitrario menor que σ . Entonces, por la suposición (3.2.9c) hay un número positivo $\delta < H$ tal que

$$|X(t, x)| \leq \frac{\eta}{H} |x| \quad (3.2.16)$$

en $[t_0, \infty)$ siempre que $|x| \leq \delta$.

Sea $x = \phi(t)$ una solución arbitraria de (3.2.12) tal que

$$|\phi(t_0)| < \delta/K < \delta.$$

Se mostrará que tal solución $x = \phi(t)$ existe para $t \geq t_0$ suficientemente cercana a t_0 y puede continuarse siempre que $|\phi(t)| < H$. Supóngase que la solución $x = \phi(t)$ existe en el intervalo $[t_0, t_1]$ y que

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &< \delta \text{ en } [t_0, t_1], \\ |\phi(t_1)| &= \delta. \end{aligned}$$

Entonces de (3.2.13), por (3.2.15) y (3.2.16) se tiene que

$$|\phi(t)| \leq K e^{-\sigma(t-t_0)} |\phi(t_0)| + \eta \int_{t_0}^t e^{-\sigma(t-s)} |\phi(s)| ds \quad (3.2.17)$$

para $t \in [t_0, t_1]$. Sean

$$\begin{aligned} e^{\sigma(t-t_0)} |\phi(t)| &= u(t), \\ \int_{t_0}^t e^{\sigma(s-t_0)} |\phi(s)| ds &= v(t), \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

52 3. LA SOLUCIÓN EN FASE

entonces (3.2.17) puede escribirse como

$$u(t) \leq K|\phi(t_0)| + \eta v(t), \quad (3.2.19)$$

(Desigualdad de Gronwall). Como $dv(t)/dt = u(t)$ lo anterior puede reescribirse como

$$\frac{dv(t)}{dt} - \eta v(t) \leq K|\phi(t_0)|.$$

Esto puede intergarse multiplicando por $e^{-\eta t}$ ambos lados. Lo que se obtiene es

$$e^{-\eta t} v(t) \leq K|\phi(t_0)| \frac{1}{\eta} (e^{-\eta t_0} - e^{-\eta t}),$$

es decir

$$v(t) \leq \frac{K}{\eta} |\phi(t_0)| [e^{\eta(t-t_0)} - 1].$$

Sustituyendo en (3.2.19) se tiene

$$u(t) \leq K|\phi(t_0)| e^{\eta(t-t_0)},$$

y por (3.2.18),

$$|\phi(t)| \leq K|\phi(t_0)| e^{-(\sigma-\eta)(t-t_0)}. \quad (3.2.20)$$

Esto es válido para toda $t \in [t_0, t_1]$, es decir para $t = t_1$ se tiene

$$|\phi(t_1)| < \delta e^{-(\sigma-\eta)(t_1-t_0)} < \delta \quad (3.2.21)$$

ya que $\eta < \sigma$ por hipótesis. Esto contradice el hecho de que $|\phi(t_1)| = \delta$ y por lo tanto se concluye que $x = \phi(t)$ existe en el intervalo $[t_0, \infty)$ y en todo el intervalo $|\phi(t)| < \delta$. Se tiene entonces que (3.2.20) es válida para toda $t \in [t_0, \infty)$. Entonces, como $\eta < \sigma$, para toda $\epsilon > 0$,

$$|\phi(t)| < \epsilon \text{ en } [t_0, \infty),$$

si $|\phi(t_0)| < K^{-1} \min(\delta, \epsilon)$. Por definición esto significa que la solución trivial $x = 0$ es estable. De (3.2.20) se tiene también que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t)| = 0,$$

es decir, la solución trivial es asintóticamente estable.

Si ahora se tiene el mismo sistema

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + X(t, x) \quad (3.2.22)$$

donde $A(t)$ es continua y periódica de período ω , la idea es reducirse al caso anterior.

Sea $\phi(t)$ una matriz fundamental de $dx/dt = A(t)x$. Procediendo como se mostró en la sección de repaso de teoría de Floquet puede construirse una matriz constante B' tal que

$$\phi(t + 2\omega) = \phi(t)e^{2\omega B'},$$

y que la matriz $\phi(t)e^{-tB'} = P_1(t)$ es periódica en t de período 2ω . Usando la transformación

$$x = P_1(t)z \quad (3.2.23)$$

en (3.2.22) se obtiene

$$\frac{dz}{dt} = B'z + Z'(t, z), \quad (3.2.24)$$

donde $Z(t, z) = P_1^{-1}(t)X[t, P_1(t)z]$.

Como $P_1(t)$ es periódica, $|P_1^{-1}|$ y $|P_1(t)|$ son acotadas en $(-\infty, \infty)$ y por lo tanto $Z'(t, z)$ también satisface las condiciones (3.2.9) del teorema. Por otro lado, los valores propios de B' son iguales a los exponentes característicos del sistema $dy/dt = A(t)y$ en sus partes reales. (Si λ_i son los multiplicadores, μ_i los exponentes característicos del sistema y μ'_i los valores propios de la matriz B' se tiene $\lambda_i^2 = \exp[2\omega\mu'_i]$. Por otro lado $\lambda_i = e^{\omega\mu_i}$ y por lo tanto

$$\lambda_i^2 = \exp[2\omega\mu'_i] = \exp[2\omega\mu_i],$$

por lo que

$$\operatorname{Re}(\mu'_i) = \operatorname{Re}(\mu_i).$$

Se tiene entonces que por hipótesis los valores propios de B' tienen parte real negativa. Por lo que se vio arriba la solución trivial $z = 0$ de (3.2.24) es asintóticamente estable porque $|P_1(t)|$ y $|P_1^{-1}(t)|$ son ambos acotados en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Teorema 3

Se verá ahora que si se cumplen las condiciones del teorema 2, la solución periódica $x = \phi(t)$ es no sólo asintóticamente orbitalmente estable sino que además cuando $t \rightarrow \infty$, todas las soluciones cercanas $x = x(\tau)$ de $dx/dt = F(x)$ tienden a la solución periódica $x = \phi(t)$ excepto por diferencias de fase, es decir $x = \phi(t)$ tiene fase asintótica.

Prueba

Por el teorema 1, para cualquier órbita cercana C' hay dos constantes positivas K y α tales que

$$|y(t)| \leq Ke^{-\alpha t} \quad (3.2.25)$$

para $t \geq 0$. Se tenía que

$$\frac{dt}{ds} = r(s, y, \delta) = \frac{F_0(\phi_0(s))^T [F_0(\phi_0(s)) + \Psi'(s)y]}{F_0(\phi_0(s))^T F(\phi_0(s) + \Psi(s)y, \delta)},$$

por lo que

$$\begin{aligned} |t(s^{**}) - s^{**}| - |t(s^* - s^*)| &= \int_{s^*}^{s^{**}} (r(s, y, \delta) - 1) ds \\ &= \int_{s^*}^{s^{**}} \frac{F_0(\phi_0(s))^T \Psi'(s)y - DF_0(\phi_0(s))\Psi(s)y - F_0(\phi_0(s))^T u(s, y)}{F_0(\phi_0(s))^T F(\phi_0(s) + \Psi(s)y, \delta)} ds, \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

donde

$$\begin{aligned} u(s, y) &= F(\phi_0(s) + \Psi(s)y, \delta) - F_0(\phi_0(s)) - DF_0(\phi_0(s))\Psi(s)y \\ &= \int_0^1 DF_0(\phi_0(s) + \theta\Psi(s)y) - DF_0(\phi_0(s)) d\theta \cdot \Psi(s)y. \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.2.25) en (3.2.26) se tiene

$$\| |t(s^{**}) - s^{**}| - |t(s^* - s^*)| \| \leq K_1 \int_{s^*}^{s^{**}} e^{-\alpha s} ds < \frac{K_1}{\alpha} e^{-\alpha s^*},$$

54 3. LA SOLUCIÓN EN FASE

donde K_1 es una constante positiva. Como $c^{-as^*} \rightarrow 0$ cuando $s^* \rightarrow \infty$, la igualdad de arriba implica que existe s_0 tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |t(s) - s| = s_0. \quad (3.2.27)$$

Para C' ,

$$x[t(s)] - x(s + s_0) = \int_{s+s_0}^{t(s)} F[x(t)] dt, \quad (3.2.28)$$

y $F[x(t)]$ está acotada para t grande ya que C' está en una vecindad de C para t grande. Se tiene entonces de (3.2.28) que

$$|x[t(s)] - x(s + s_0)| \leq K_2 |t(s) - (s + s_0)|$$

para s grande, donde K_2 es otra constante positiva. Por (3.2.27) esto implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x[t(s)] - \phi(s)| = 0,$$

es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(s + s_0) - \phi(s)| = 0,$$

por lo que se concluye que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \phi(t - s_0)| = 0.$$

Se ha demostrado que

Proposición 2

Si $\delta > 0$ y $\epsilon \leq 1/2$, ω_0 es asintóticamente orbitalmente estable con fase asintótica y no tiene bifurcaciones de soluciones periódicas.

Si $\delta < 0$ y $\epsilon \leq 1/2$ entonces si $-1 \geq 4\delta\epsilon$ o $4\delta < -1/(1-\epsilon)$ o $4\delta\epsilon \geq -1$ y $4\delta \leq -2$ entonces ω_0 es inestable.

CAPÍTULO 4

4. LA SOLUCIÓN FUERA DE FASE

En este capítulo se estudia la solución w_π utilizando una transformación (válida sólo en cierta región del espacio $(\beta, \delta, \epsilon)$ que convierte a las soluciones periódicas en círculos. Se encuentra el período de la órbita y se ve dónde se vuelve órbita heteroclínica. Se encuentra la forma explícita de w_π (en ciertas coordenadas) y se ve una región en la que esta solución es inestable. Además de unos bosquejos de las soluciones analíticas, se muestran los diagramas de bifurcación obtenidos con AUTO.

4.1 REGION DE EXISTENCIA

En las coordenadas w_1, w_2 se vio al principio del capítulo 3 que las ecuaciones eran

$$\begin{aligned}\frac{dw_1}{dt} &= \frac{1}{2}[f(w_1 + w_2) + f(w_1 - w_2)] \\ \frac{dw_2}{dt} &= \frac{1}{2}[f(w_1 + w_2) - f(w_1 - w_2)] - 2\delta Dw_2.\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

Como f es impar, una solución (no es la única) es $w_1 \equiv 0$ y w_2 tal que satisface

$$\frac{dw_2}{dt} = f(w_2) - 2\delta Dw_2.$$

Escribiendo w_2 como w para simplificar la notación, la ecuación anterior tiene la forma

$$\frac{dw}{dt} = Kw - |w|^2 w - 2\delta Dw = (K - |w|^2 I - 2\delta D)w.\tag{4.1.2}$$

Es razonable esperar que las soluciones periódicas de esta ecuación sean especies de elipses y por lo tanto se va a buscar un cambio de coordenadas de tal forma que las soluciones periódicas en esas coordenadas sean círculos. Un cambio de coordenadas es una matriz invertible que puede siempre expresarse en la forma MR_ϕ donde

$$M = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}, \quad R_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Si se pone $\begin{pmatrix} P(t) \cos \zeta(t) \\ P(t) \text{sen } \zeta(t) \end{pmatrix} = X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = MR_\phi w$ entonces

$$\begin{aligned}X' &= MR_\phi w' \\ &= MR_\phi (K - |w|^2 I - 2\delta D)w \\ &= MR_\phi (K - |w|^2 I - 2\delta D)R_{-\phi} M^{-1} X \\ &= MR_\phi AR_{-\phi} M^{-1} X,\end{aligned}$$

56 4. LA SOLUCIÓN FUERA DE FASE

donde $A = K - |w|^2 I - 2\delta D$. Ahora,

$$\begin{aligned} |w|^2 &= w^T w = X^T (M^{-1}) R_\phi R_{-\phi} M^{-1} X = X^T (M^{-1})^2 X \\ &= (P \cos \zeta, P \operatorname{sen} \zeta) \begin{pmatrix} 1/k_1^2 & 0 \\ 0 & 1/k_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \cos \zeta \\ P \operatorname{sen} \zeta \end{pmatrix} \\ &= \frac{P^2}{k_1^2} \cos^2 \zeta + \frac{P^2}{k_2^2} \operatorname{sen}^2 \zeta = \rho^2, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4\delta & 0 \\ 0 & 4\delta(1-2\epsilon) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\rho^2-4\delta & \beta \\ -\beta & 1+\rho^2-4\delta(1-2\epsilon) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si se escribe

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} MR_\phi AR_{-\phi} M^{-1} &= \\ &= \begin{pmatrix} a \cos^2 \phi + d \operatorname{sen}^2 \phi + (b+c) \operatorname{sen} \phi \cos \phi & \frac{k_1}{k_2} [(d-a) \operatorname{sen} \phi \cos \phi + b \cos^2 \phi - c \operatorname{sen}^2 \phi] \\ \frac{k_2}{k_1} [(d-a) \operatorname{sen} \phi \cos \phi - b \operatorname{sen}^2 \phi + c \cos^2 \phi] & a \operatorname{sen}^2 \phi + d \cos^2 \phi - (b+c) \operatorname{sen} \phi \cos \phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $P^2 = x^2 + y^2$ y $\tan \zeta = y/x$ se tiene que $PP' = xx' + yy'$ y $\zeta' = (y'x - x'y)/P^2$, es decir,

$$\begin{aligned} P' &= P[a(\cos^2 \phi \cos^2 \zeta + \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \zeta) + d(\operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \zeta + \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \zeta) + (b+c) \operatorname{sen} \phi \cos \phi (\cos^2 \zeta + \\ &\quad - \operatorname{sen}^2 \zeta) + \cos \zeta \operatorname{sen} \zeta (d-a) \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 k_2} \operatorname{sen} \phi \cos \phi + b \cos \zeta \operatorname{sen} \zeta (\frac{k_1}{k_2} \cos^2 \phi - \frac{k_2}{k_1} \operatorname{sen}^2 \phi) + \\ &\quad + c \cos \zeta \operatorname{sen} \zeta (\frac{k_2}{k_1} \cos^2 \phi - \frac{k_1}{k_2} \operatorname{sen}^2 \phi)] \\ \zeta' &= [(d-a) \operatorname{sen} \phi \cos \phi (\frac{k_2}{k_1} \cos^2 \zeta - \frac{k_1}{k_2} \operatorname{sen}^2 \zeta) - \operatorname{sen} \zeta \cos \zeta \cos 2\phi] - b(\frac{k_2}{k_1} \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \zeta + \frac{k_1}{k_2} \cos^2 \phi \cdot \\ &\quad \cdot \operatorname{sen}^2 \zeta) + c(\frac{k_2}{k_1} \cos^2 \phi \cos^2 \zeta + \frac{k_1}{k_2} \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \zeta) - 2(b+c) \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen} \zeta \cos \zeta]. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de a, b, c, d se obtiene

$$\begin{aligned} P' &= P[1-4\delta - \rho^2 + \beta \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2} \cos \zeta \operatorname{sen} \zeta + 8\delta\epsilon[(\operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \zeta + \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \zeta) \\ &\quad + \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 k_2} \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen} \zeta \cos \zeta]] \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$\begin{aligned} \zeta' &= -8\delta\epsilon(\operatorname{sen} \phi \cos \phi (\frac{k_2}{k_1} \cos^2 \zeta - \frac{k_1}{k_2} \operatorname{sen}^2 \zeta) - \operatorname{sen} \zeta \cos \zeta \cos 2\phi) \\ &\quad - \beta(\frac{k_2}{k_1} \cos^2 \zeta + \frac{k_1}{k_2} \operatorname{sen}^2 \zeta) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Como $\rho^2 = P^2(\frac{\cos^2 \zeta}{k_1^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \zeta}{k_2^2}) = \frac{P^2}{2}(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} + \cos 2\zeta(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2}))$, entonces la ecuación para P' puede reescribirse como

$$\begin{aligned} P' &= P[1-4\delta - \frac{P^2}{2}(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2}) + 4\delta\epsilon - (4\delta\epsilon \cos 2\phi + (\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2}) \frac{P^2}{2}) \cos 2\zeta + \\ &\quad + \frac{\operatorname{sen} 2\zeta}{2k_1 k_2} (\beta(k_1^2 - k_2^2) + 4\delta\epsilon(k_1^2 + k_2^2) \operatorname{sen} 2\phi)]. \end{aligned}$$

Se quiere expresar a P' como producto de una función sólo de ζ por una función sólo de P , $P' = g(\zeta)f(P)$ y para eso es necesario eliminar los términos en $\text{sen } 2\zeta$ y factorizar los términos en $\text{cos } 2\zeta$ para que queden en la forma deseada, es decir

$$1 - 4\delta(1 - \epsilon) - \frac{P^2}{2} \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) - (4\delta\epsilon \cos 2\phi + \left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2} \right) \frac{P^2}{2}) \cos 2\zeta = (1 + \gamma \cos 2\zeta)(m + nP^2) \quad (4.1.4)$$

$$\beta(k_1^2 - k_2^2) + 4\delta\epsilon(k_1^2 + k_2^2) \text{sen } 2\phi = 0. \quad (4.1.5)$$

De la primera ecuación, comparando términos independientes y coeficientes de P^2 se obtiene $m = 1 - 4\delta(1 - \epsilon)$, $n = -\frac{1}{2} \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1^2 k_2^2}$. Igualando coeficientes de $\text{cos } 2\zeta$ y coeficientes de $P^2 \text{cos } 2\zeta$ se tiene

$$\begin{aligned} \gamma m &= -4\delta\epsilon \cos 2\phi \\ \gamma n &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2} \right), \end{aligned}$$

de donde

$$\gamma = \frac{-4\delta\epsilon \cos 2\phi}{1 - 4\delta(1 - \epsilon)} = \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1^2 + k_2^2}.$$

Nótese que para que esto sea válido es necesario que $4\delta(1 - \epsilon) \neq 1$. De las ecuaciones (4.1.4) y (4.1.5) se concluye también que

$$\begin{aligned} \text{sen } 2\phi &= \frac{\beta(k_2^2 - k_1^2)}{4\delta\epsilon(k_1^2 + k_2^2)} \\ \text{cos } 2\phi &= -\frac{(1 - 4\delta(1 - \epsilon))(k_2^2 - k_1^2)}{4\delta\epsilon(k_1^2 + k_2^2)} \\ \tan 2\phi &= -\frac{\beta}{1 - 4\delta(1 - \epsilon)}. \end{aligned}$$

Como $|\text{sen } 2\phi| \leq 1$ y $|\text{cos } 2\phi| \leq 1$ entonces

$$|\beta(k_2^2 - k_1^2)| \leq 4|\delta\epsilon|(k_1^2 + k_2^2)$$

$$\frac{|k_2^2 - k_1^2|}{k_1^2 + k_2^2} \leq \frac{|4\delta\epsilon|}{|1 - 4\delta(1 - \epsilon)|}.$$

Sustituyendo los valores de $\text{sen } 2\phi$ y $\text{cos } 2\phi$ en (4.1.3) se encuentra

$$\begin{aligned} \zeta' &= \frac{-\beta}{k_1 k_2} (k_2^2 \cos^2 \zeta + k_1^2 \text{sen}^2 \zeta) + 4\delta\epsilon \left[\frac{\beta(k_2^2 - k_1^2)}{4\delta\epsilon(k_1^2 + k_2^2)} \frac{k_2^2 \cos^2 \zeta - k_1^2 \text{sen}^2 \zeta}{k_1 k_2} + \right. \\ &\quad \left. - \text{sen } 2\zeta \frac{(1 - 4\delta(1 - \epsilon))}{4\delta\epsilon(k_1^2 + k_2^2)} (k_2^2 - k_1^2) \right] \\ &= \frac{-\beta}{2k_1 k_2} (k_1^2 + k_2^2) + (k_2^2 - k_1^2) \text{cos } 2\zeta + \beta \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{2k_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2)} (k_2^2 - k_1^2 + (k_2^2 + k_1^2) \text{cos } 2\zeta) + \\ &\quad - (1 - 4\delta(1 - \epsilon)) \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{k_1^2 + k_2^2} \text{sen } 2\zeta \\ &= \frac{-2\beta k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} - (1 - 4\delta(1 - \epsilon)) \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{k_1^2 + k_2^2} \text{sen } 2\zeta. \end{aligned}$$

58 4. LA SOLUCIÓN FUERA DE FASE

Como $\text{sen}^2 2\phi + \text{cos}^2 2\phi = 1$ entonces

$$\frac{(k_2^2 - k_1^2)^2 (\beta^2 + (1 - 4\delta(1 - \epsilon))^2)}{(k_1^2 + k_2^2)^2 (4\epsilon\delta)^2} = 1.$$

Además no se cambia nada con un rescalamiento uniforme, $k_1 \rightarrow \alpha k_1$, $k_2 \rightarrow \alpha k_2$. Para poder comparar resultados con [O.W.] se tomará $k_1^2 + k_2^2 = 2$. En este caso

$$k_1^2 - k_2^2 = \frac{8\delta\epsilon}{\sqrt{\beta^2 + (1 - 4\delta(1 - \epsilon))^2}} = 2k,$$

y por lo tanto

$$k_1 = \sqrt{1+k}, \quad k_2 = \sqrt{1-k}.$$

De aquí se observa que es necesario que $|k| < 1$.

En estos términos, las ecuaciones para P y ζ tienen la forma

$$P' = P(1 - k \cos 2\zeta)(1 - 4\delta(1 - \epsilon) - \frac{P^2}{1 - k^2})$$

$$\zeta' = -\beta\sqrt{1 - k^2} + k(1 - 4\delta(1 - \epsilon)) \text{sen } 2\zeta.$$

Ahora, $|k| < 1$ implica

$$f(\delta) = (4\delta)^2(1 - 2\epsilon) - 2(1 - \epsilon)4\delta + \beta^2 + 1 > 0,$$

es decir que la transformación sólo es válida en la región del espacio $(\beta, \delta, \epsilon)$ que cumple con la desigualdad de arriba. Fuera de esa región podría también haber soluciones periódicas pero no pueden estudiarse por medio de esta transformación. La función $f(\delta)$ es la misma que se encontró en la sección 2.2, y como se vio ahí, sus raíces son $\delta = (\beta^2 + 1)/4$ si $\epsilon = 1/2$ y

$$\delta = \frac{1 - \epsilon \pm (\epsilon^2 - \beta^2(1 - 2\epsilon))^{1/2}}{4(1 - 2\epsilon)} = \delta_{1,2}$$

si $\epsilon \neq 1/2$. La región del espacio $(\beta, \delta, \epsilon)$ en la que es válida la transformación es entonces:

- $\epsilon < 1/2$: Si $\beta^2 > \epsilon^2/(1 - 2\epsilon)$ es válida en todo el espacio;
- Si $\beta^2 \leq \epsilon^2/(1 - 2\epsilon)$: es válida si $\delta < \delta_1$ o si $\delta > \delta_2$.
- $\epsilon = 1/2$: es válida si $\delta < (\beta^2 + 1)/4$.
- $\epsilon > 1/2$: es válida si $\delta_1 < \delta < \delta_2$.

Para poder tener una solución periódica es necesario que

$$P = ((1 - k^2)(1 - 4\delta(1 - \epsilon))^{1/2} = P_0 = [f(\delta)(1 - 4\delta(1 - \epsilon))/(\beta^2 + (1 - 4\delta(1 - \epsilon))^2)]^{1/2}$$

($\Rightarrow 1 - 4\delta(1 - \epsilon) > 0$ ya que si $1 - 4\delta(1 - \epsilon) \leq 0$ entonces $P' < 0$ y todas las órbitas van hacia $P = 0$.) Si $(1 - 4\delta(1 - \epsilon)) - \frac{P^2}{1 - k^2} > 0$ en t_0 entonces P es creciente y si $(1 - 4\delta(1 - \epsilon)) - \frac{P^2}{1 - k^2} < 0$ en t_0 entonces P es decreciente, por lo que P_0 es globalmente atractor.

Además para tener un ciclo límite (todo el círculo) es necesario que ζ' no cambie de signo ya que entonces tendría que ser 0 en algún punto y por unicidad sería 0 siempre. Esto implica que

$$-\beta\sqrt{1 - k^2} + |k|(1 - 4\delta(1 - \epsilon)) < 0$$

$$\Rightarrow |4\delta\epsilon|(1 - 4\delta(1 - \epsilon)) < \beta(\beta^2 + (1 - 4\delta(1 - \epsilon))^2 - (4\delta\epsilon)^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \beta^2(\beta^2 - (4\delta\epsilon)^2) + (\beta^2 - (4\delta\epsilon)^2)(1 - 4\delta(1 - \epsilon))^2 > 0$$

$$\Rightarrow \beta^2 > (4\delta\epsilon)^2 \Rightarrow |4\delta| < \beta/\epsilon.$$

Además, como $1 - 4\delta(1 - \epsilon) > 0$ se tiene que $4\delta < 1/(1 - \epsilon)$.

Como el círculo es una curva cerrada, se tiene una órbita periódica con período $T_1 = \int_0^{2\pi} 1/(d\zeta/dt) d\zeta$, es decir

$$T_1(\delta, \beta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\zeta}{\beta\sqrt{1 - k^2} + [1 - 4\delta(1 - \epsilon)]k \operatorname{sen} 2\zeta}.$$

Ahora, en general

$$\int \frac{dx}{a + b \operatorname{sen} x} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \frac{a \tan \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} & \text{si } a > b \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{a \tan \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a \tan \frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2 - a^2}} & \text{si } b > a, \end{cases}$$

donde si se tiene $\arctan[B + C \tan f(x)]$ se usa la rama de \arctan sobre la cual está $f(x)$ para una x particular.

Sea $2\zeta = x$, entonces

$$T_1(\delta, \beta) = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \frac{dx}{a + b \operatorname{sen} x}$$

con $a = \beta\sqrt{1 - k^2}$, $b = [1 - 4\delta(1 - \epsilon)]k$. Se encuentra entonces que

$$\begin{aligned} T_1(\delta, \beta) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} (\arctan \frac{a \tan 2\pi + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \arctan \frac{a \tan 0 + b}{\sqrt{a^2 - b^2}}) \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= \beta^2(1 - k^2) - [1 - 4\delta(1 - \epsilon)]^2 k^2 \\ &= \beta^2 - k^2(\beta^2 + [1 - 4\delta(1 - \epsilon)]^2) \\ &= \beta^2 - (4\delta\epsilon)^2. \end{aligned}$$

Se concluye que

$$T_1(\delta, \beta) = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - (4\delta\epsilon)^2}}.$$

De aquí se observa que cuando $\delta > 0$ y $\beta < \epsilon/(1 - \epsilon)$ o cuando $\delta < 0$, el período $T_1 \rightarrow \infty$ cuando $\delta \rightarrow \pm\beta/4\epsilon$ y un par de puntos fijos aparecen en ω_π , es decir aparece una órbita heteroclínica.

Tomando $\phi = 0$, $k_1 = k_2 = 1$ en (4.1.2) y (4.1.3) se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\beta + 4\epsilon\delta \operatorname{sen} 2\theta \\ \frac{d\rho}{dt} &= \rho(1 - 4\delta - \rho^2 + 8\delta\epsilon \operatorname{sen}^2 \theta). \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Estas fórmulas se utilizarán más adelante.

Si $|4\delta| > \beta/\epsilon$ (y $1 - 4\delta(1 - \epsilon) > 0$) entonces las órbitas sobre P_0 tienden a los puntos en los que $\zeta' = 0$, que están dados por

$$\operatorname{sen} 2\zeta = \beta\sqrt{1 - k^2}/k(1 - 4\delta(1 - \epsilon)) = \operatorname{sen} 2\zeta_0,$$

es decir, $\zeta = \zeta_0, \zeta_0 + \pi, \pi/2 - \zeta_0, 3\pi/2 - \zeta_0$. Como $\operatorname{sen} 2\zeta = -1$ para $4\delta = -\beta/\epsilon$ y $\operatorname{sen} 2\zeta = 1$ para $4\delta = \beta/\epsilon$, dos de los puntos críticos son estables y dos son inestables (Figura 4.1.1)

60 4. LA SOLUCIÓN FUERA DE FASE

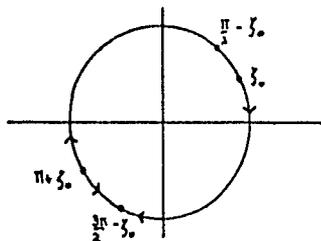
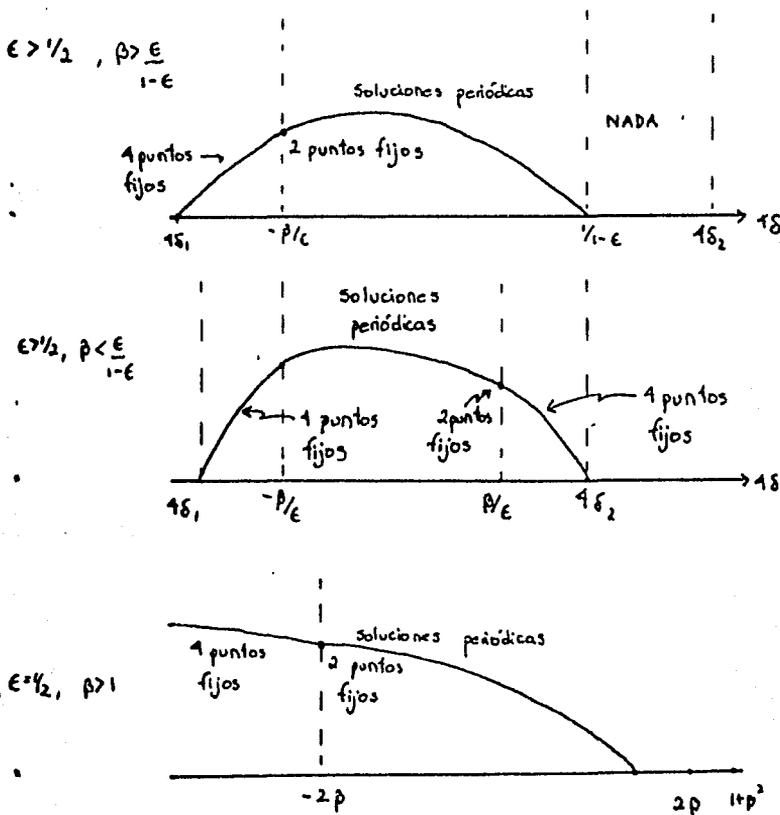
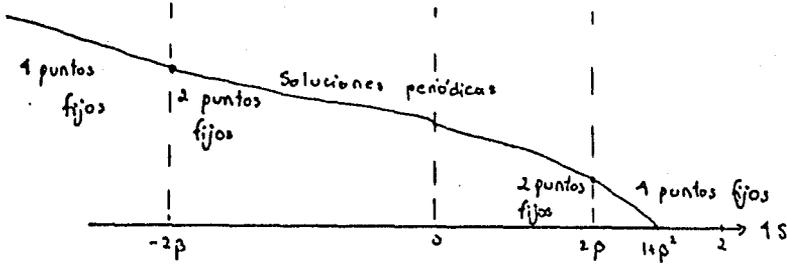


Figura 4.1.1

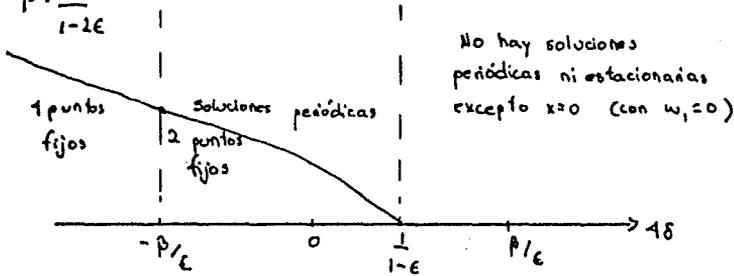
Nótese que P se anula sólo para $\delta = \delta_1$ o para $\delta = (1 - \epsilon)/4$, si estos valores están en el rango de validez de la transformación. Por otra parte, para $\epsilon < 1/2$, $P \sim (-4\delta(1 - 2\epsilon)/(1 - \epsilon))^{1/2}$ cuando $\delta \rightarrow -\infty$ y por lo tanto $P \rightarrow \infty$. Para $\epsilon = 1/2$, $P \sim \sqrt{2}$ cuando $\delta \rightarrow -\infty$. Calculando $f(1/4(1 - \epsilon)) = \beta^2 - \epsilon^2/(1 - \epsilon)^2$, se observa que si $\epsilon > 1/2$, $1/4(1 - \epsilon)$ está entre las raíces δ_1 y δ_2 si $\beta > \epsilon/(1 - \epsilon)$ y es más grande que δ_2 en el caso contrario. Para $\epsilon = 1/2$, $1/2$ está en el dominio de validez de la transformación sólo si $\beta > 1$. Para $\epsilon < 1/2$, $1/4(1 - \epsilon) < \delta_1$ si $\beta > \epsilon/(1 - \epsilon)$, y $1/4(1 - \epsilon)$ está entre las raíces δ_1, δ_2 (donde la transformación no es válida) en el caso contrario. La información que se ha encontrado hasta ahora puede resumirse en las siguientes gráficas:



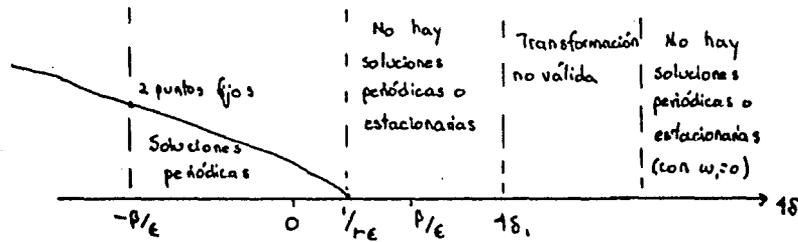
$\epsilon = 1/2, \beta < 1$



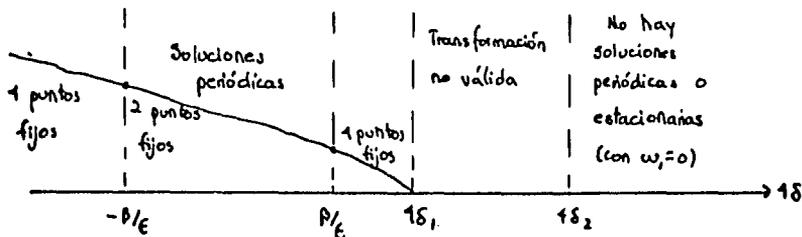
$\epsilon < 1/2, \beta^2 > \frac{\epsilon^2}{1-2\epsilon}$



$\epsilon < 1/2, \frac{\epsilon^2}{(1-\epsilon)^2} < \beta^2 < \frac{\epsilon^2}{1-2\epsilon}$



$\epsilon < 1/2, \beta^2 < \frac{\epsilon^2}{(1-\epsilon)^2}$



62 4. LA SOLUCIÓN FUERA DE FASE

Estos diagramas son válidos en el plano (P, ζ) y la transformación es singular en δ_1 . En el plano w se tiene que, como $\rho^2 = P^2(\frac{1}{k_1^2} \cos^2 \zeta + \frac{1}{k_2^2} \sin^2 \zeta) = \frac{P^2}{2}(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} + \cos 2\zeta(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2})) = \frac{P^2}{1-k^2}(1 - k \cos 2\zeta)$, entonces para $P_0 = ((1 - k^2)(1 - 4\delta(1 - \epsilon)))^{1/2}$, $\rho_0^2 = (1 - 4\delta(1 - \epsilon))(1 - k \cos 2\zeta(t))$. Ahora,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{1+k} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{1+k}(\cos \phi u + \sin \phi v) \\ \sqrt{1-k}(-\sin \phi u + \cos \phi v) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si $u = \cos \theta$, $v = \sin \theta$,

$$\begin{aligned} \tan \zeta &= \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{1-k}(-\sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta)}{\sqrt{1+k} \cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta} \\ &= \frac{\sqrt{1-k} \sin(\theta - \phi)}{\sqrt{1+k} \cos(\theta - \phi)} \\ &= \frac{\sqrt{1-k}}{\sqrt{1+k}} \tan(\theta - \phi). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\cos 2\zeta = \frac{1 - \tan^2 \zeta}{1 + \tan^2 \zeta} = \frac{1 - \tan^2(\theta - \phi) + k(1 + \tan^2(\theta - \phi))}{1 + \tan^2(\theta - \phi) + k(1 - \tan^2(\theta - \phi))},$$

por lo que

$$1 - k \cos 2\zeta = \frac{(1 + \tan^2(\theta - \phi))(1 - k^2)}{1 + \tan^2(\theta - \phi) + k(1 - \tan^2(\theta - \phi))} = \frac{(1 - k^2)}{1 + k \cos 2(\theta - \phi)},$$

y finalmente,

$$\rho_0^2 = \frac{(1 - 4\delta(1 - \epsilon))(1 - k^2)}{1 + k \cos 2(\theta(t) - \phi)}.$$

Este es el ciclo límite en coordenadas ρ, θ . En estas coordenadas

$$\omega_\pi = (w_1, w_2) = (\rho_0 \cos(\theta(t)), \rho_0 \sin(\theta(t))).$$

Ahora, para los puntos fijos, es decir, las soluciones estacionarias con $4|\delta| > \beta/\epsilon$,

$$\sin 2\zeta = \frac{\beta \sqrt{1 - k^2}}{k(1 - 4\delta(1 - \epsilon))}$$

con $\zeta = \zeta_0, \zeta_0 + \pi, \pi/2 - \zeta_0, 3\pi/2 - \zeta_0$. Esto implica que

$$\begin{aligned} \cos 2\zeta &= \pm \cos 2\zeta_0 = \pm(1 - \sin^2 2\zeta)^{1/2} \\ &= \pm \left(1 - \frac{\beta^2(1 - k^2)}{k^2(1 - 4\delta(1 - \epsilon))^2}\right)^{1/2} \\ &= \pm \frac{1}{k(1 - 4\delta(1 - \epsilon))} (k^2(1 - 4\delta(1 - \epsilon))^2 - \beta^2(1 - k^2))^{1/2}. \end{aligned}$$

Como $k^2(1 - 4\delta(1 - \epsilon))^2 - \beta^2(1 - k^2) = (4\delta\epsilon)^2 - \beta^2$, se tiene que

$$1 - k \cos 2\zeta = \frac{1 - 4\delta(1 - \epsilon) \pm ((4\delta\epsilon)^2 - \beta^2)^{1/2}}{1 - 4\delta(1 - \epsilon)},$$

y por lo tanto

$$\rho_0^2 = 1 - 4\delta(1 - \epsilon) \pm ((4\delta\epsilon)^2 - \beta^2)^{1/2} = \lambda_1, \lambda_2.$$

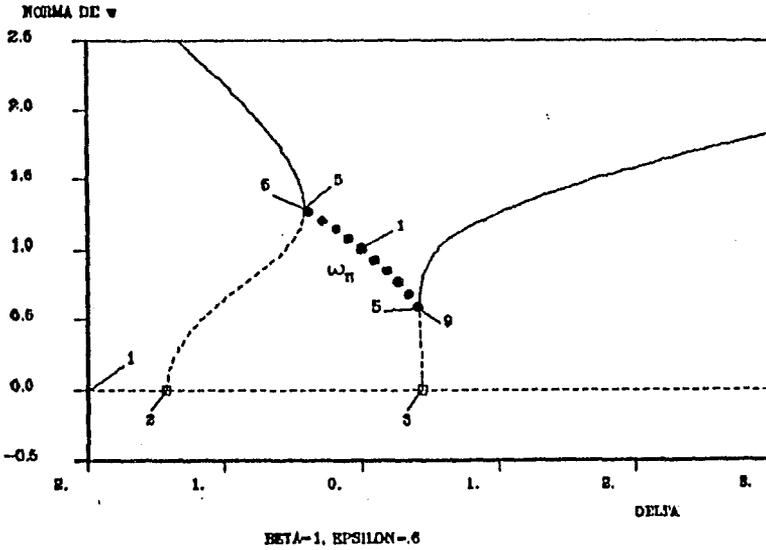
Estos son los valores propios de la matriz $K - 2\delta D$ que se encontró antes y dan la norma de los puntos fijos. Esto explica el desdoblamiento de las ramas estacionarias cuando $\delta \rightarrow \delta_1$.

Esto proporciona todas las soluciones estacionarias o periódicas con $w_1 = 0$ en el rango de validez de la transformación. Hay que recordar que como la ecuación es impar, si w_2 es solución, también lo es $-w_2$.

A continuación se muestran los resultados numéricos obtenidos con AUTO.

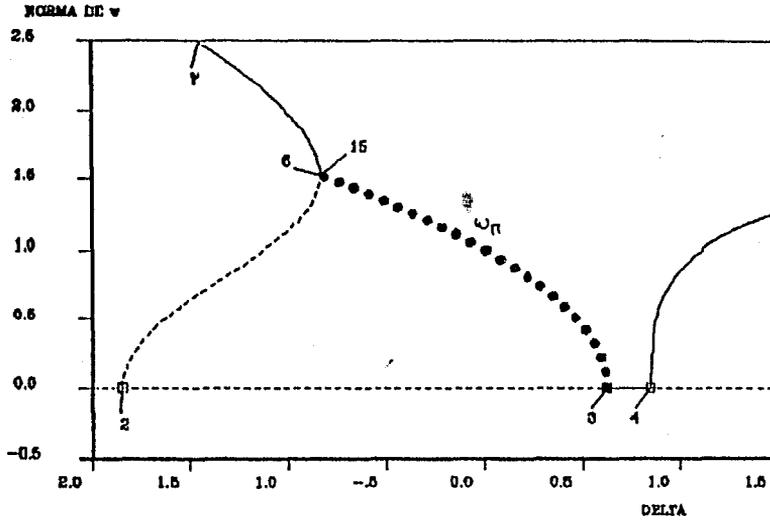
- Soluciones periódicas estables
- Soluciones periódicas inestables
- Estados estacionarios estables
- - - Estados estacionarios inestables
- Bifurcación de Hopf
- Bifurcación de estados estacionarios

(Las estabilidades son en Π , no en \mathbb{R}^4 .)



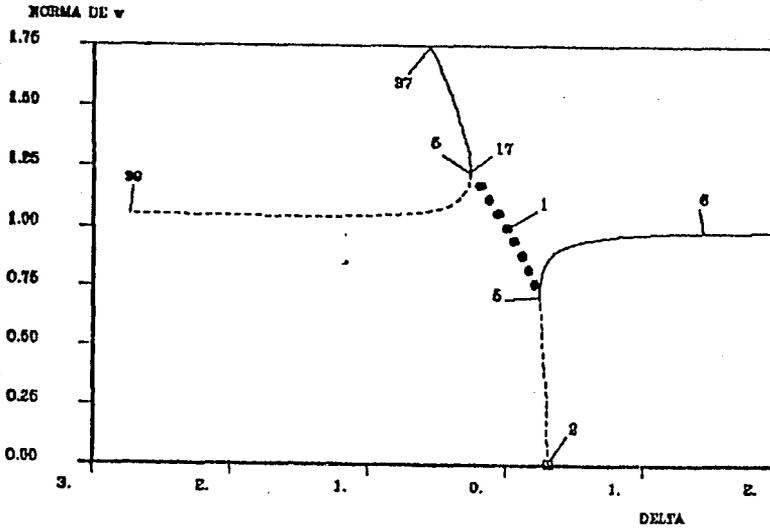
$$\epsilon > 1/2, \beta < \epsilon/(1 - \epsilon)$$

64 4. LA SOLUCIÓN FUERA DE FASE



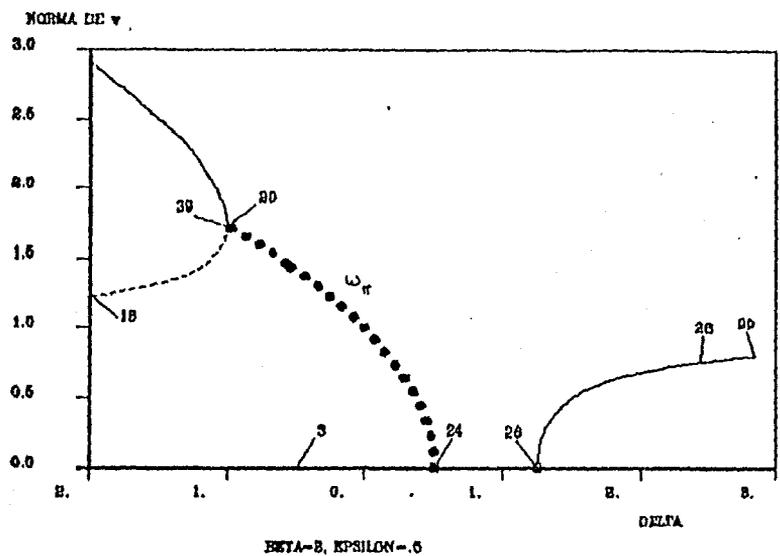
BETA=2, EPSILON=.6

$$\epsilon > 1/2, \beta > \epsilon/(1-\epsilon)$$

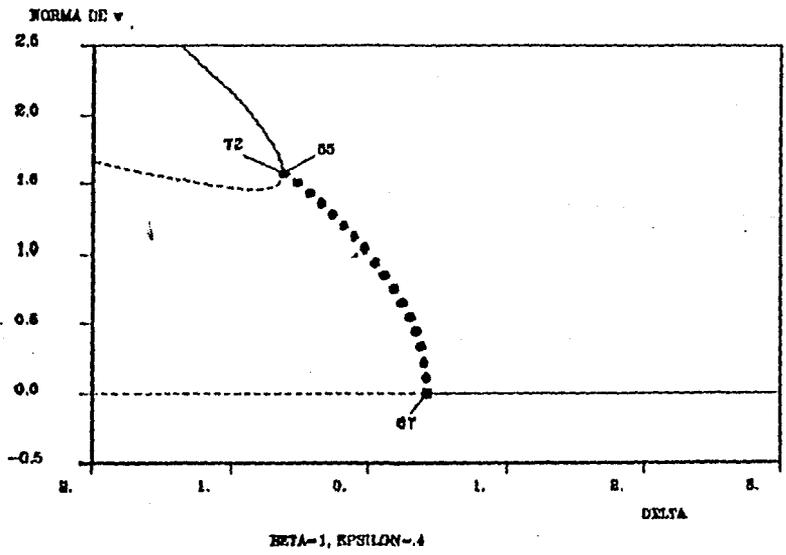


BETA=.5, EPSILON=.6

$$\epsilon = 1/2, \beta < 1$$

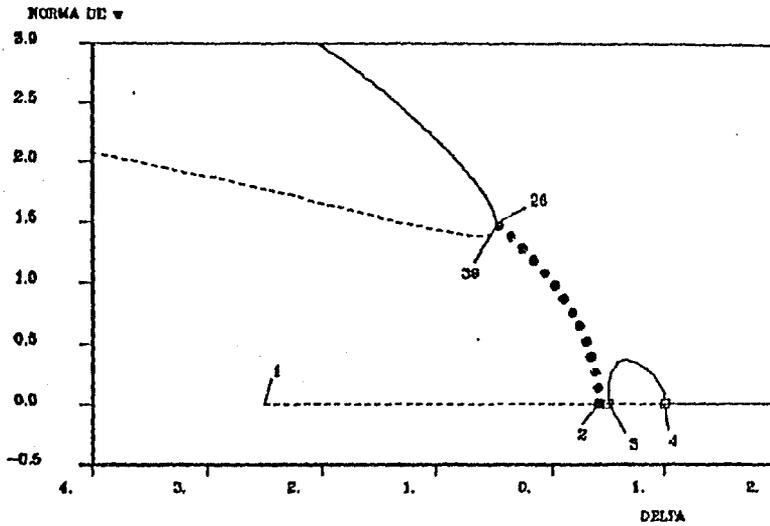


$\epsilon = 1/2, \beta > 1$



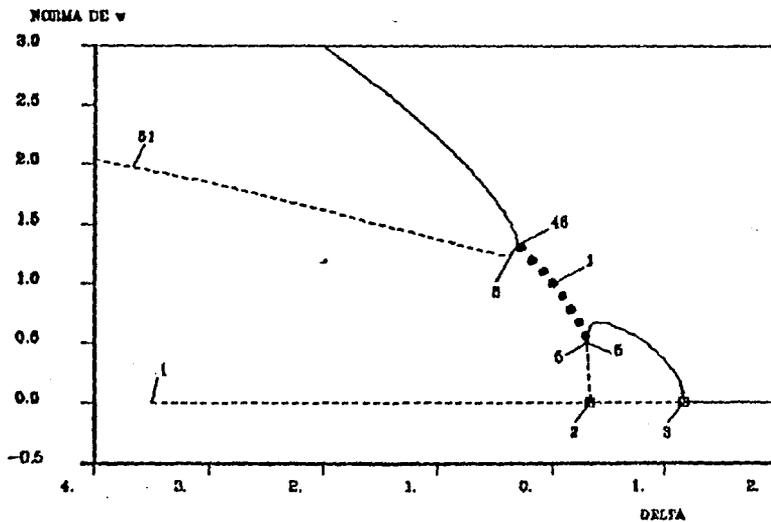
$\epsilon < 1/2, \beta^2 > \epsilon^2 / (1 - 2\epsilon)$

66 4. LA SOLUCIÓN FUERA DE FASE



BETA = -0.7746, EPSILON = 4

$$\epsilon < 1/2, \epsilon^2/(1-\epsilon)^2 < \beta^2 < \epsilon^2/(1-2\epsilon)$$



BETA = -0.5, EPSILON = 4

$$\epsilon < 1/2, \beta^2 < \epsilon^2/(1-\epsilon)^2$$

4.2 ESTABILIDAD

La ecuación que debe considerarse para estudiar la estabilidad es

$$\frac{d\xi}{dt} = A(t)\xi,$$

donde $A(t)$ es el jacobiano de $f(x, y)$ evaluado en $\omega_\pi = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \operatorname{sen} \theta(t))$, es decir

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 - 2\rho^2(t) - \rho^2(t) \cos 2\theta & \beta - \rho^2(t) \operatorname{sen} 2\theta \\ -\beta - \rho^2(t) \operatorname{sen} 2\theta & 1 - 2\rho^2(t) + \rho^2(t) \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Como

$$e^{\int_0^t \mu(s) ds} \leq |\text{multiplicadores}| \leq e^{\int_0^t \nu(s) ds},$$

donde μ, ν son los valores propios de

$$\frac{A(t) + A(t)^T}{2} = \begin{pmatrix} 1 - 2\rho^2 - \rho^2 \cos 2\theta & -\rho^2 \operatorname{sen} 2\theta \\ -\rho^2 \operatorname{sen} 2\theta & 1 - 2\rho^2 + \rho^2 \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene valores propios λ que satisfacen

$$\lambda^2 - 2\lambda(1 - 2\rho^2) + (1 - 2\rho^2)^2 - \rho^4 = 0,$$

es decir,

$$\lambda = 1 - 2\rho^2 \pm ((1 - 2\rho^2)^2 - (1 - 2\rho^2)^2 + \rho^4)^{1/2} = 1 - 2\rho^2 \pm \rho^2,$$

de donde $\mu = 1 - 3\rho^2$, $\nu = 1 - \rho^2$. Entonces, como

$$\rho^2 = \frac{(1 - 4\delta(1 - \epsilon))(1 - k^2)}{1 + k \cos 2(\theta - \phi)}$$

se tiene que

$$\frac{(1 - 4\delta(1 - \epsilon))(1 - k^2)}{1 + k} \leq \rho^2 \leq \frac{(1 - 4\delta(1 - \epsilon))(1 - k^2)}{1 - k},$$

$$(1 - 4\delta(1 - \epsilon))(1 - k) \leq \rho^2 \leq (1 - 4\delta(1 - \epsilon))(1 + k).$$

Esto implica que si $\delta < 0$, $k < 0$, $(1 - 4\delta(1 - \epsilon))(1 - k) > 1$ y por lo tanto $|\lambda_i| < 1$, es decir, ω_π es estable para $\delta < 0$ y no hay bifurcación de soluciones periódicas sobre ω_π para $\delta < 0$.

Para $\delta > 0$, si $\rho^2 < 1/3$ entonces por la desigualdad de arriba se tiene que ω_π es inestable. Ahora se verá para qué valores de los parámetros se cumple $\rho^2 < 1/3$. Para que ω_π exista se requiere que $4\delta < 1/(1 - \epsilon)$. Si $\rho^2 < 1/3$ entonces $(1 - 4\delta(1 - \epsilon))(1 + k) < 1/3$,

$$k < \frac{1}{3(1 - 4\delta(1 - \epsilon))} - 1 = \frac{2(6\delta(1 - \epsilon) - 1)}{3(1 - 4\delta(1 - \epsilon))}.$$

Como $k > 0$ para $\delta > 0$ se necesita $6\delta > 1/(1 - \epsilon)$. Entonces para que ρ^2 sea menor que $1/3$ se requiere que

$$(\beta^2 + (1 - 4\delta(1 - \epsilon))^2)^{1/2} > \frac{6\delta\epsilon(1 - 4\delta(1 - \epsilon))}{6\delta(1 - \epsilon) - 1},$$

es decir,

$$\beta^2 > (1 - 4\delta(1 - \epsilon))^2 \left(\frac{(6\delta\epsilon)^2}{(6\delta(1 - \epsilon) - 1)^2} - 1 \right) = \frac{(1 - 4\delta(1 - \epsilon))^2}{(6\delta(1 - \epsilon) - 1)^2} ((6\delta - 1)(1 - 6\delta(1 - 2\epsilon))).$$

De todo esto se concluye que ω_π es inestable si (δ, β) están en las regiones mostradas en las figuras 4.2.1 a 4.2.3.

68 4. LA SOLUCIÓN FUERA DE FASE

$$\epsilon > \frac{1}{2}$$

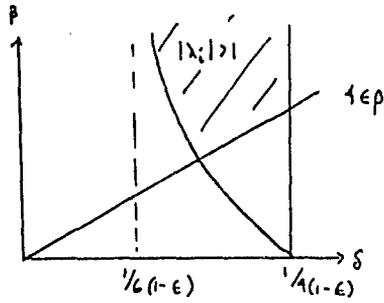


Figura 4.2.1

$$\frac{1}{4} < \epsilon < \frac{1}{2}$$

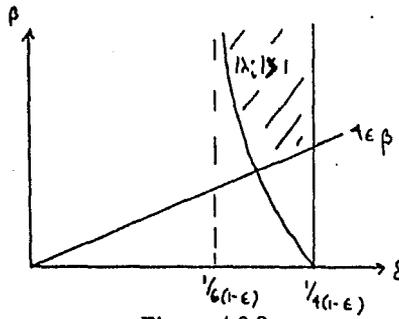


Figura 4.2.2

$$\epsilon < \frac{1}{4}$$

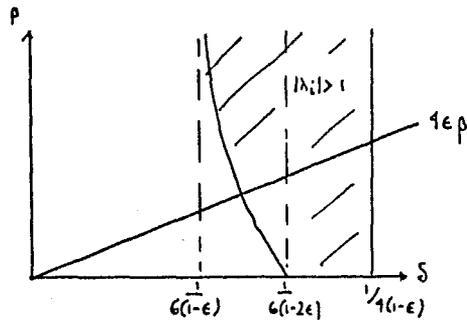


Figura 4.2.3

5.1 ESTABILIDAD DE ω_π

En este capítulo se analiza cómo varía la estabilidad de ω_π con β , δ y ϵ usando, además de los multiplicadores de Floquet, lo que se conoce como número de rotación. Se encuentra que ω_π es estable (en cierto sentido) en un subconjunto bastante complicado del espacio de parámetros.

Recuérdese que en las coordenadas w_1, w_2 las ecuaciones que se tienen son

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dt} &= \frac{1}{2} [f(w_1 + w_2) + f(w_1 - w_2)] \\ &= Kw_1 - (|w_1|^2 + |w_2|^2)w_1 - 2(w_1, w_2)w_2, \\ \frac{dw_2}{dt} &= \frac{1}{2} [f(w_1 + w_2) - f(w_1 - w_2) - 2\delta Dw_2] \\ &= Kw_2 - 2(w_1, w_2)w_1 - (|w_1|^2 + |w_2|^2)w_2 - 2\delta Dw_2. \end{aligned}$$

Si se toman $w_1 = \xi_1$, $w_2 = \omega_\pi + \xi_2$, es decir, variaciones de ω_π en O y en Π , entonces se obtiene la ecuación variacional

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= K\xi_1 - |\omega_\pi|^2 \xi_1 - 2(\xi_1, \omega_\pi)\omega_\pi + \dots \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= K\xi_2 - |\omega_\pi|^2 \xi_2 - 2(\xi_2, \omega_\pi)\omega_\pi - 2\delta D\xi_2 + \dots \end{aligned}$$

Ahora, como $|\omega_\pi|^2 = \rho^2$ y

$$(\omega_\pi, \xi_1)\omega_\pi = \begin{pmatrix} \rho^2 \cos^2 \theta & \rho^2 \sin \theta \cos \theta \\ \rho^2 \sin \theta \cos \theta & \rho^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\rho^2}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 1 - \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

entonces si se define

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 - 2\rho^2(t) - \rho^2(t) \cos 2\theta(t) & \beta - \rho^2(t) \sin 2\theta(t) \\ -\beta - \rho^2(t) \sin 2\theta(t) & 1 - 2\rho^2(t) + \rho^2(t) \cos 2\theta(t) \end{pmatrix}, \tag{5.1.1}$$

la ecuación variacional con respecto a ω_π puede escribirse como

$$\frac{d\xi_1}{dt} = A(t)\xi_1 \tag{5.1.2}$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = [A(t) - 2\delta D]\xi_2. \tag{5.1.3}$$

70 5. CAMBIOS EN LA ESTRUCTURA DE RESONANCIA

La ecuación (5.1.3) es la ecuación variacional para ω_π con $w_1 = 0$, y ya se vio que en este caso la solución periódica es atractora: un multiplicador es uno por ser el sistema autónomo y el otro está dentro del círculo unitario (si no, la solución periódica no sería un atractor.) Esto implica que $(\sigma_3, \sigma_4) = (0, -1)$ en la firma de Floquet de ω_π , por lo que basta ver cómo cambian $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, los valores propios de $A(t)$, con β, δ, ϵ .

Por la fórmula de Liouville, se tiene que

$$\lambda_1 \lambda_2 = \exp\left(\int_0^{T_\epsilon(\delta, \beta)} \operatorname{tr} A(s) ds\right).$$

Se demostrará abajo que esta integral puede evaluarse explícitamente y el resultado es

$$\lambda_1 \lambda_2 = \exp\left\{\frac{4\pi[8(1-\epsilon)\delta - 1]}{\sqrt{\beta^2 - (4\epsilon\delta)^2}}\right\}.$$

Prueba

$$\begin{aligned} \int_0^{T_\epsilon(\delta, \beta)} \operatorname{tr} A(s) ds &= 2 \int_0^{T_\epsilon(\delta, \beta)} (1 - 2\rho^2(\theta(s))) ds \\ &= 4 \int_0^{T_\epsilon/2} (1 - 2\rho^2(\theta(s))) ds, \end{aligned}$$

donde $T_\epsilon/2$ es el período de $A(s)$. Como $\dot{\theta} \neq 0$ para $\delta < \beta/4\epsilon$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{T_\epsilon/2} (1 - 2\rho^2(\theta(s))) ds &= \int_0^\pi \frac{1 - 2\rho^2(\theta)}{-\beta + 4\epsilon\delta \sin 2\theta} d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{d\theta}{-\beta + 4\epsilon\delta \sin 2\theta} + 2 \int_0^\pi \frac{\rho^2(\theta) d\theta}{\beta - 4\epsilon\delta \sin 2\theta} \\ &= I_1 + 2I_2. \end{aligned}$$

Para resolver la primera integral se usa el cambio de variables $x = \tan \theta$, $dx = (1+x^2)d\theta$, $\sin 2\theta = 2x/(1+x^2)$, $\cos 2\theta = (1-x^2)/(1+x^2)$. Además $\int_0^\pi = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^\pi$, i.e. $\int_0^\pi(\cdot) d\theta = \int_0^\infty(\cdot) dx + \int_{-\infty}^0(\cdot) dx = \int_{-\infty}^\infty(\cdot) dx$. Entonces

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{-\beta(x^2 - \frac{4\epsilon\delta}{\beta}x + 1)} \\ &= -\frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x - \frac{4\epsilon\delta}{\beta})^2 + 1 - (\frac{4\epsilon\delta}{\beta})^2} \\ &= -\frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^\infty \frac{dy}{y^2 + 1 - (\frac{4\epsilon\delta}{\beta})^2} \\ &= -\frac{1}{\beta\sqrt{1 - (\frac{4\epsilon\delta}{\beta})^2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{z^2 + 1} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\beta^2 - (4\epsilon\delta)^2}} \arctan z \Big|_{-\infty}^\infty \\ &= \frac{-\pi}{\sqrt{\beta^2 - (4\epsilon\delta)^2}}. \end{aligned}$$

Para la segunda integral sean $a = k \cos \phi$, $b = k \sin \phi$. Entonces la integral se escribe como

$$[1 - 4\delta(1 - \epsilon)](1 - k^2) \int_0^{2\pi} \frac{dz}{(\beta - 4\epsilon\delta \sin z)(1 + k \cos(z - \phi))}.$$

El integrando puede escribirse como

$$A \frac{d}{dz} \ln \frac{\beta - 4\epsilon\delta \sin z}{1 + a \cos z + b \sin z} + \frac{B}{\beta - 4\epsilon\delta \sin z} + \frac{C}{1 + a \cos z + b \sin z}.$$

Igualando coeficientes de $\sin z$, $\cos z$ y términos independientes se encuentra que A , B , C satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} Aa\beta + Bb - 4C\epsilon\delta &= 0 \\ -4A\epsilon\delta - A\beta b + Ba &= 0 \\ -4A\epsilon\delta a + B + C\beta &= 1, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{4\epsilon\delta a}{(4\epsilon\delta)^2(1 - a^2) + 8\epsilon\delta\beta b + \beta^2(a^2 + b^2)} \\ B &= \frac{A(4\epsilon\delta + \beta b)}{a} \\ C &= \frac{b + A(4\epsilon\delta b + a\beta)}{\beta b + 4\epsilon\delta}. \end{aligned}$$

Si se separa I_2 en 3 integrales usando las constantes encontradas arriba, la única que es diferente de cero es

$$[1 - 4\delta(1 - \epsilon)](1 - k^2) \int_0^{2\pi} \frac{B}{\beta - 4\epsilon\delta \sin z} dz.$$

Puede demostrarse que $(1 - k^2)B = 1$, y por lo tanto se obtiene el resultado deseado. ■

Se tiene entonces que

$$\lambda_1 \lambda_2 \begin{cases} < 1 & \text{si } \delta < 1/8(1 - \epsilon) \\ = 1 & \text{si } \delta = 1/8(1 - \epsilon) \\ > 1 & \text{si } \delta > 1/8(1 - \epsilon), \end{cases}$$

por lo que ω_π es inestable si $\delta > 1/8(1 - \epsilon)$ (recuérdese que ω_π existe para $4\delta < \min(1/(1 - \epsilon), \beta/\epsilon)$) y asintóticamente estable si $\delta < 1/8(1 - \epsilon)$ y $|\lambda_1|, |\lambda_2|$ son ambas menores que 1; esto último sucede en particular si λ_1, λ_2 son complejos conjugados, en cuyo caso $|\lambda_1| = |\lambda_2|$. Para ver si esto realmente pasa, se estudiará de nuevo la ecuación variacional (5.1.2), con $A(t)$ dada por (5.1.1). Defínase

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} R \cos \Psi/2 \\ R \sin \Psi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \Theta = 2\theta, \quad \Psi = 2\psi.$$

De la ecuación (5.1.2), usando el hecho de que $RR' = uu' + vv'$ y $\Psi'/2 = (v'u - u'v)/R^2$, agregando la ecuación (4.1.6a) para Θ para tener un sistema cerrado se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt} &= -2(\beta - 4\epsilon\delta \sin \Theta) \\ \frac{d\Psi}{dt} &= -2[\beta - S(\Theta) \sin(\Psi - \Theta)] \\ \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} &= [1 - 2S(\Theta) - S(\Theta) \cos(\Psi - \Theta)], \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

72 5. CAMBIOS EN LA ESTRUCTURA DE RESONANCIA

donde $S(\Theta) = \rho^2 = \frac{1-4(1-\epsilon)\delta|(1-k^2)}{1+k\cos(\Theta-\Phi)}$, $\Phi = \arctan \frac{-\beta}{1-4\epsilon(1-\epsilon)}$.

Si $\beta > |4\epsilon\delta|$, $\Theta \neq 0$ y por lo tanto puede usarse Θ como variable independiente en (5.1.4) para obtener

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\Theta} &= \frac{\beta - S(\Theta)\text{sen}(\Psi - \Theta)}{\beta - 4\epsilon\delta \text{sen} \Theta} \\ \frac{dR}{d\Theta} &= -\frac{R[1 - 2S(\Theta) - S(\Theta)\cos(\Psi - \Theta)]}{2(\beta - 4\epsilon\delta \text{sen} \Theta)}. \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Sea $\Psi(\Theta, \Theta_0, \Psi_0, \delta, \beta)$ la solución de (5.1.5) que satisface $\Psi(\Theta_0, \Theta_0, \Psi_0, \delta, \beta) = \Psi_0$. Como el lado derecho de (5.1.5) es 2π -periódico en Θ y Ψ , el flujo de la ecuación define un mapeo de Poincaré \mathcal{C} de la sección $\Theta = \Theta_0$ del toro \mathcal{T} en sí misma. El número de rotación

$$r(\delta, \beta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Psi(\Theta_0 + 2k\pi, \Theta_0, \Psi_0, \delta, \beta) - \Psi_0}{2k\pi}$$

del mapeo está definido y es continuo en $D_\epsilon = \{(\delta, \beta) \mid -\beta/4\epsilon < \delta < (1-\epsilon)/4, \beta > 4\epsilon\delta\}$ (donde los denominadores de (5.1.5) no se anulan), y es independiente de Θ_0 y de Ψ_0 . (Véase el apéndice 1.)

El siguiente lema da la relación entre los valores propios de $W_1(T_\epsilon(\delta, \beta)/2)$, la matriz fundamental de (5.1.2), y el número de rotación.

Lema 1: $W_1(T_\epsilon(\delta, \beta)/2)$ tiene un valor propio real si y sólo si existen Θ_0 y Ψ_0 para las cuales

$$\Psi(\Theta_0 + 2\pi, \Theta_0, \Psi_0, \delta, \beta) = \Psi_0 + 2n\pi,$$

para algún $n \in \mathbb{N}$.

Como $r(\delta, \beta)$ es independiente de Θ_0 y de si las "vueltas" se dan para un lado o para el otro del toro, r puede definirse equivalentemente como

$$r(\delta, \beta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Psi(-(2k-1)\pi, \Psi_0, \delta, \beta) - \Psi_0}{2k\pi}.$$

En esta forma el número de rotación mide el promedio de cambio en Ψ cuando Θ corre una vez alrededor de \mathcal{T} de $\Theta = \pi$ a $\Theta = -\pi$.

Se demostrará que $W_1(T_\epsilon(\delta, \beta)/2)$ tiene un valor propio real $\mu \neq 0 \iff$ (5.1.5) tiene una solución $\Psi = \Psi(\Theta)$ tal que

$$\Psi(-\pi) - \Psi(\pi) = 2k\pi,$$

para alguna $k \in \mathbb{N}$. De hecho $\mu = (-1)^k \tilde{R}(-\pi)$, donde \tilde{R} es la integral de

$$\frac{d}{d\Theta} \ln R = \frac{-1 + 2S(\Theta) + S(\Theta)\cos(\Psi - \Theta)}{2(\beta - 4\epsilon\delta \text{sen} \Theta)} \quad (5.1.6)$$

Prueba

Supóngase que $\mu \neq 0$ es un valor propio real de $W_1(T_\epsilon/2)$ y sea ζ un vector propio normalizado, que puede escribirse como

$$\zeta = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2} \Psi_0 \\ \text{sen} \frac{1}{2} \Psi_0 \end{pmatrix}.$$

Sea $\xi = \xi(t)$ la solución de $\dot{\xi} = A(t)\xi$ con $\xi(0) = \zeta$. En coordenadas (R, Ψ) esa solución está dada por

$$\xi(t) = R(\Theta(t)) \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2} \Psi(\Theta(t)) \\ \text{sen} \frac{1}{2} \Psi(\Theta(t)) \end{pmatrix},$$

donde $\Theta = \Theta(t)$ es la solución de (5.1.4a) con $\Theta(0) = \pi$, $\Psi(\Theta)$ es la solución de (5.1.4b) con $\Psi(\pi) = \Psi_0$ y $R(\Theta)$ es la integral de (5.1.4c) con $\Psi = \Psi(\Theta)$ y $R(\pi) = 1$. Puede escribirse también $\xi(t) = W_1(t)\zeta$; como $\Theta(T_e/2) = -\pi$, se tiene

$$\xi(T_e/2) = R(-\pi) \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\Psi(-\pi) \\ \operatorname{sen} \frac{1}{2}\Psi(-\pi) \end{pmatrix} = W_1(T_e/2)\zeta = \mu \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\Psi_0 \\ \operatorname{sen} \frac{1}{2}\Psi_0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $|\mu| = R(-\pi)$ y Ψ debe satisfacer las ecuaciones

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2}\Psi(-\pi) &= \frac{\mu}{R(-\pi)} \cos \frac{1}{2}\Psi_0 \\ \operatorname{sen} \frac{1}{2}\Psi(-\pi) &= \frac{\mu}{R(-\pi)} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\Psi_0. \end{aligned}$$

Como se supuso μ real entonces $\mu = \pm R$. Si $\mu = R$ las ecuaciones se satisfacen sólo si $\Psi(-\pi) = \Psi_0 + 4j\pi$ y si $\mu = -R$ se satisfacen sólo si $\Psi(-\pi) = \Psi_0 + (2j-1)2\pi$ para alguna $j \in \mathbb{N}$.

Inversamente, si $\Psi = \Psi(\Theta)$ es una solución de

$$\frac{d\Psi}{d\Theta} = \frac{\beta - S(\Theta) \operatorname{sen}(\Psi - \Theta)}{(\beta - 4\epsilon\delta \operatorname{sen} \Theta)} \quad (5.1.7)$$

que satisface

$$\Psi(-\pi) - \Psi(\pi) = 2k\pi \quad (5.1.8)$$

para alguna $k \in \mathbb{N}$ y $R = \tilde{R}(\Theta)$ es la integral de (5.1.6) con $\tilde{R}(\pi) = 1$ entonces

$$W_1(T_e/2) \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\Psi(\pi) \\ \operatorname{sen} \frac{1}{2}\Psi(\pi) \end{pmatrix} = \tilde{R}(-\pi) \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\tilde{\Psi}(-\pi) \\ \operatorname{sen} \frac{1}{2}\tilde{\Psi}(-\pi) \end{pmatrix} = (-1)^k \tilde{R}(-\pi) \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\tilde{\Psi}(\pi) \\ \operatorname{sen} \frac{1}{2}\tilde{\Psi}(\pi) \end{pmatrix},$$

por lo que $\mu = (-1)^k \tilde{R}(-\pi)$ es un valor propio de $W_1(T_e/2)$.

Nótese que si se cumple (5.1.8) entonces

$$\begin{aligned} r(\delta, \beta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Psi(-(2N-1)\pi, \Psi_0, \delta, \beta) - \Psi_0}{2N\pi} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N2k\pi}{2N\pi} \\ &= k. \end{aligned}$$

Una manera equivalente de enunciar el lema es entonces:

La matriz $W_1(T_e/2)$ tiene un valor propio real $\mu \neq 0 \iff$ el mapeo de Poincaré \mathcal{C} tiene un punto fijo.

De la prueba se observa que el resultado es aplicable a cualquier sistema lineal periódico bidimensional.

Si $r(\delta, \beta)$ no es un entero, $\Psi(\Theta_0 + 2\pi, \Theta_0, \Psi_0, \delta, \beta) \neq \Psi_0 + 2k\pi$ por lo que los valores propios de $W_1(T_e/2)$ son complejos conjugados (en particular si son reales deberán ser iguales) y por lo tanto en ese caso $\lambda_1 \lambda_2 < 1 \Rightarrow |\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$. Se ha demostrado entonces la siguiente proposición:

Proposición 3

Si $(\delta, \beta) \in \mathcal{D}_e \cap \{(\delta, \beta) | \delta < \frac{1}{8(1-\epsilon)}\}$ y $r(\delta, \beta)$ NO es un entero, entonces ω_π es asintóticamente orbitalmente estable con fase asintótica.

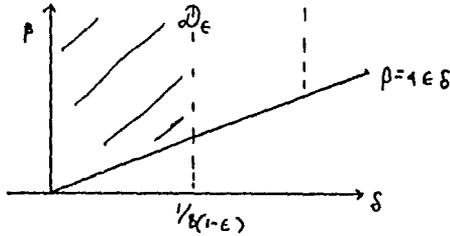


Figura 5.1.1

Falta investigar para qué valores de los parámetros no es $r(\delta, \beta)$ un entero para saber si realmente hay una región de estabilidad de ω_π y cómo es. Se demostrará que para δ suficientemente chica o β suficientemente grande, el número de rotación es siempre menor que 2. Más específicamente,

Lema 2: Sea

$$D_{\epsilon,1} = \{(\delta, \beta) \in D_\epsilon \mid \frac{4\epsilon\delta}{1-4(1-\epsilon)\delta} \leq 1 - |k|\}.$$

Entonces $\forall (\delta, \beta) \in D_{\epsilon,1}$, $r(\delta, \beta) = 1$.

Prueba Sea $\lambda = \Psi - \Theta$ y rescríbese (5.1.7) en la forma

$$\frac{d\lambda}{d\Theta} = \frac{d\Psi}{d\Theta} - 1 = \frac{4\epsilon\delta \operatorname{sen} \Theta - S(\Theta) \operatorname{sen} \lambda}{\beta - 4\epsilon\delta \operatorname{sen} \Theta} \quad (5.1.9).$$

Una solución periódica de (5.1.9) con período mínimo 2π genera un punto fijo del mapeo de Poincaré C con número de rotación 1. Para toda $\beta_0 \in \mathbb{R}^+$, se tiene que

$$\lim_{(\delta, \beta) \rightarrow (0, \beta_0)} S(\Theta) = 1$$

uniformemente con respecto a $\Theta \in \mathbb{R}$ y por lo tanto

$$\frac{d\lambda}{d\Theta} = -\frac{1}{\beta} \operatorname{sen} \lambda \quad (5.1.10)$$

para $(\delta, \beta) = (0, \beta_0)$. Esta ecuación tiene las soluciones independientes de Θ , $\lambda_\ell = \ell\pi \forall \ell \in \mathbb{Z}$ y como $\lambda = \Psi - \Theta$, estas soluciones corresponden a puntos fijos del mapeo de Poincaré C con $r(0, \beta_0) = 1$. Se verá que para δ suficientemente chica, las soluciones λ_ℓ se convierten en soluciones 2π periódicas y dependientes de Θ de (5.1.9).

Si $(\delta, \beta) \in D_{\epsilon,1}$, $\delta > 0$ y por lo tanto

$$D_{\epsilon,1} = \{(\delta, \beta) \in D_\epsilon \mid \frac{4\epsilon\delta}{1-4(1-\epsilon)\delta} \leq 1 - |k|\}.$$

En $D_{\epsilon,1}$ puede definirse $\lambda = \lambda(\delta, \beta) \in (0, \pi/2)$ como

$$\operatorname{sen} \lambda = \frac{4\epsilon\delta}{(1-4\delta(1-\epsilon))(1-k)}.$$

Como $S(\Theta) \geq S(\Psi) = [1-4\delta(1-\epsilon)](1-k)$, entonces $\operatorname{sen} \lambda \geq \frac{4\epsilon\delta}{S(\Theta)} > \frac{4\epsilon\delta \operatorname{sen} \Theta}{S(\Theta)}$ para toda $\Theta \in \mathbb{R} \setminus (4\ell+1)\pi/2$, $\ell \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces que

$$\frac{d\lambda}{d\Theta} \Big|_{\lambda=\ell\pi+\lambda} \begin{cases} > 0 & \text{si } \ell \text{ es impar} \\ < 0 & \text{si } \ell \text{ es par} \end{cases}$$

$$\left. \frac{d\lambda}{d\Theta} \right|_{\lambda=\ell\pi-\lambda} \begin{cases} < 0 & \text{si } \ell \text{ es impar} \\ > 0 & \text{si } \ell \text{ es par} \end{cases}$$

(usando el hecho de que $\frac{d\lambda}{d\Theta} < \frac{S(\Theta)\text{sen}\lambda - S(\Theta)\text{sen}\lambda}{\beta - 4\epsilon\delta\text{sen}\Theta}$ y $S(\Theta)\text{sen}\lambda \geq 4\epsilon\delta$.)

Para toda $(\delta, \beta) \in D_{\epsilon,1}$ y ℓ impar, las trayectorias de (5.1.9) no pueden salir de la franja $|\lambda - \ell\pi| \leq \lambda(\delta, \beta)$ para Θ decreciente (Figura (5.1.2)).

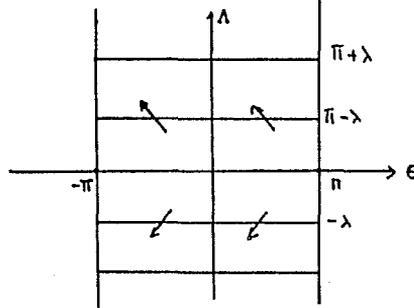


Figura 5.1.2

Entonces el flujo mapea al segmento cerrado $[\ell\pi - \lambda, \ell\pi + \lambda]$ en $\Theta = \pi$ en el segmento abierto $(\ell\pi - \lambda, \ell\pi + \lambda)$ en $\Theta = -\pi$. Se concluye que el mapeo de Poincaré inducido, C , tiene un punto fijo $\lambda_\ell \in (\ell\pi - \lambda, \ell\pi + \lambda)$ con $r(\delta, \beta) = 1$, i.e. si $\lambda_\ell = \lambda(\Theta; \delta, \beta, \lambda_\ell)$ es la solución de (5.1.9) con $\lambda(\pi) = \lambda_\ell$ entonces $\lambda(-\pi; \delta, \beta, \lambda_\ell) = \lambda_\ell$, esto es, la solución es 2π -periódica.

Un argumento similar con el mapeo inverso C^{-1} muestra la existencia de soluciones 2π -periódicas cerca de $\lambda = \ell\pi$ para ℓ par.

Lema 3 Sea

$$D_{\epsilon,2} = \{(\delta, \beta) \in D_\epsilon, 0 \leq \delta \leq \frac{1}{4(1-\epsilon)}, \beta > \frac{4}{1-\epsilon}\}.$$

Entonces $r(\delta, \beta) < 2$ si $(\delta, \beta) \in D_{\epsilon,2}$.

Prueba Considérese nuevamente la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\Theta} &= \frac{\beta - S(\Theta)\text{sen}(\Psi - \Theta)}{\beta - 4\epsilon\delta\text{sen}\Theta} \\ &= 1 + \frac{1}{\beta} \left(\frac{4\epsilon\delta\text{sen}\Theta - S(\Theta)\text{sen}(\Psi - \Theta)}{1 - \frac{4\epsilon\delta}{\beta}\text{sen}\Theta} \right), \end{aligned}$$

con

$$S(\Theta) = \frac{(1 - 4(1-\epsilon)\delta)(1 - k^2)}{1 + k\cos(\Theta - \Phi)}, \quad k = \frac{4\epsilon\delta}{(\beta^2 + (1 - 4\delta(1-\epsilon))^2)^{1/2}}.$$

Para $0 \leq \delta \leq 1/(4(1-\epsilon))$, $k \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}/\beta$ (ya se vio que k es creciente como función de δ .) Si se toma $\beta \geq 2\epsilon/(1-\epsilon)$ entonces $k \leq 1/2$ y

$$\Psi(\Theta) = \Psi(0) + \Theta + \frac{1}{\beta} \int_0^\Theta f(\Theta, \Psi) d\Theta$$

donde $f(\Theta, \Psi)$ es continua y acotada, por lo que

$$\frac{\Psi(2k\pi) - \Psi(0)}{2k\pi} = 1 + \frac{1}{2k\pi\beta} \int_0^{2k\pi} f(\Theta) d\Theta.$$

76 5. CAMBIOS EN LA ESTRUCTURA DE RESONANCIA

Como $S(\Theta) \leq 2$ entonces $|f(\Theta)| \leq 2\left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon} + 2\right) \leq \frac{4}{1-\epsilon}$. Esto implica que el número de rotación en $\mathcal{D}_{\epsilon, 2}$ es estrictamente menor que 2.

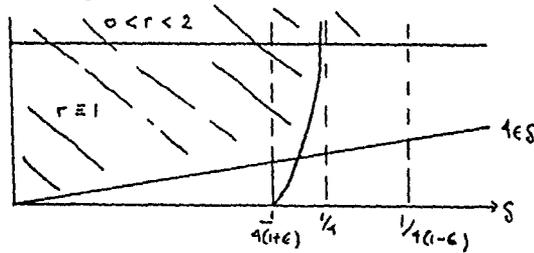


Figura 5.1.3

5.2 NUMERO DE ROTACION CERCA DE LA RECTA DE BIFURCACIONES DE HOPF

Ahora se verá cómo se comporta el número de rotación cerca de la semirecta $\mathcal{L} = \{(\delta, \beta) | \delta = 1/(4(1-\epsilon)), \beta > \epsilon/(1-\epsilon)\}$ que como se vio, es donde ocurren las bifurcaciones de Hopf. Para $\beta > \epsilon/(1-\epsilon)$, sea $\mu = 1 - 4\delta(1-\epsilon)$. La ecuación (5.1.9) puede escribirse como

$$\frac{d\Psi}{d\Theta} = \frac{\beta(1-\epsilon)}{\beta(1-\epsilon) - \epsilon \operatorname{sen} \Theta} + \mu f(\Psi, \Theta, \mu), \tag{5.2.1}$$

con

$$f(\Psi, \Theta, \mu) = -(1-\epsilon) \frac{\{(1-k^2) \operatorname{sen}(\Psi - \Theta)(\beta(1-\epsilon) - \epsilon \operatorname{sen} \Theta) + \beta(1+k \cos(\Theta - \Phi))\}}{(1+k \cos(\Theta - \Phi))(\beta(1-\epsilon) - \epsilon(1-\mu) \operatorname{sen} \Theta)(\beta(1-\epsilon) - \epsilon \operatorname{sen} \Theta)},$$

2π -periódica en Ψ y Θ y función suave de sus argumentos.
Para $\mu = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \Psi(\Theta) &= \Psi(\pi) - \int_{\Theta}^{\pi} \frac{\beta(1-\epsilon)}{\beta(1-\epsilon) - \epsilon \operatorname{sen} \Theta} d\Theta \\ &= \Psi(\pi) - \frac{2\beta(1-\epsilon)}{\sqrt{\beta^2(1-\epsilon)^2 - \epsilon^2}} \operatorname{Arctan} \frac{\beta(1-\epsilon) \tan \frac{\Theta}{2} - \epsilon}{\sqrt{\beta^2(1-\epsilon)^2 - \epsilon^2}} \Big|_{\Theta}^{\pi}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\Psi(\pi) - \Psi(-\pi) = 2\pi \frac{\beta(1-\epsilon)}{\sqrt{\beta^2(1-\epsilon)^2 - \epsilon^2}},$$

y entonces

$$r(1/(4(1-\epsilon)), \beta) = \frac{\beta(1-\epsilon)}{\sqrt{\beta^2(1-\epsilon)^2 - \epsilon^2}} > 1, \text{ si } \epsilon > 0.$$

Además $S(\Theta) = 0$ para $\mu = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \ln R = 1, \Rightarrow R = R_0 e^t, \frac{d\Psi}{dt} = -2\beta \Rightarrow \Psi(t) = -2\beta t + k$. Esto implica, tomando $k = 0$, que

$$\xi_1 = R_0 e^t \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\operatorname{sen} \beta t \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\xi}_1 = R_0 e^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix},$$

para $k = \pi$. Es decir,

$$\Phi(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos \beta t & \operatorname{sen} \beta t \\ -\operatorname{sen} \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix},$$

$\Phi(\frac{2\pi}{\beta}) = \epsilon^{2\pi/\beta} I$, y por lo tanto los multiplicadores son $\epsilon^{2\pi/\beta}$. Esto implica que para $4\delta \sim 1/(1-\epsilon)$, la solución periódica ω_π es inestable en una vecindad (si existe, es decir, si $\beta > \epsilon/(1-\epsilon)$).

El flujo $\Psi - \theta$ es periódico si y sólo si $r(1/(4(1-\epsilon)), \beta)$ es racional. La pregunta es si esas soluciones periódicas pueden continuarse para $\mu > 0$.

Puede mostrarse ([Bu]) que el conjunto

$$H_p = \{(\delta, \beta) \in D_\epsilon \mid r(\delta, \beta) = p, p \text{ racional}\}$$

es una región en forma de cúspide con frontera continua, ángulo no cero y con vértice en

$$(\delta, \beta) = \left(\frac{1}{4(1-\epsilon)}, \frac{\epsilon p}{(1-\epsilon)\sqrt{p^2-1}} \right),$$

ya que

$$r(\delta, \beta) = p = \frac{\beta(1-\epsilon)}{(\beta^2(1-\epsilon)^2 - \epsilon^2)^{1/2}}$$

implica que

$$\beta = \frac{\epsilon p}{(1-\epsilon)\sqrt{p^2-1}}.$$

De lo anterior y de la proposición 3 se tiene que si el conjunto

$$(D_\epsilon \setminus \cup_{n=2}^{\infty} H_n) \cap \{(\delta, \beta) \mid \delta < 1/8(1-\epsilon)\}$$

no es vacío entonces ω_π es estable para algunos $(\delta, \beta) \in D_\epsilon$. Por la continuidad del número de rotación, H_1 no interesa para $\epsilon > 0$. El caso $\epsilon = 0$ se estudiará en el capítulo 6.

A los conjuntos $H_n, n = 2, 3, \dots$ se les llamará cuernos de resonancia por el parecido que tienen con las regiones de resonancia paramétrica ([A.1] secc. 25): para la ecuación

$$\ddot{x} = -\omega^2(1 - \epsilon \cos t)x, \quad \epsilon \ll 1$$

puede mostrarse que las zonas sombreadas de la figura 5.2.1

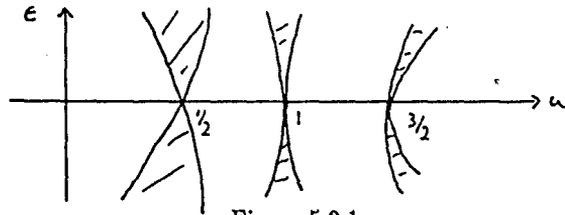


Figura 5.2.1

son zonas en las que el cero es punto de equilibrio inestable. Esto explica por qué si uno se agacha y se levanta en un columpio con la frecuencia adecuada, el columpio comienza a oscilar cada vez con mayor amplitud, como sucede cuando un oscilador entra en resonancia por causa de una fuerza externa. Falta determinar el comportamiento de los cuernos de resonancia en D_ϵ .

5.3 COMPORTAMIENTO DE LOS CUERNOS DE RESONANCIA

Como el número de rotación es una función continua de (δ, β) en D_ϵ , un cuerno no puede terminar en D_ϵ , ya que si así fuera sería posible conectar un punto en $\delta = 1/4(1-\epsilon)$ con $r \in (n-1, n)$ con otro en $\delta = 1/4(1-\epsilon)$ con $r \in (n, n+1)$ por medio de un camino Γ a lo largo del cual r nunca vale n , contradiciendo la continuidad de r sobre Γ (véase la figura 5.3.1).

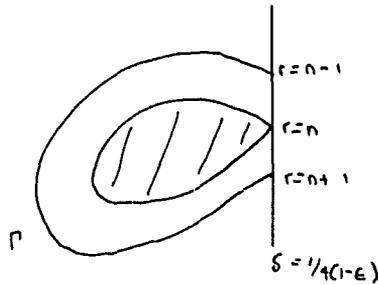


Figura 5.3.1

Por la unicidad del número de rotación, diferentes cuernos no pueden intersectarse. Por los lemas 2 y 3, H_n debe permanecer en la región $E = (D_\epsilon \setminus D_{\epsilon,1}) \cap (D_\epsilon \setminus D_{\epsilon,2})$. Pero

$$D_\epsilon = \{(\delta, \beta) \in D_\epsilon \mid \frac{(1-4\delta(1-\epsilon))\sqrt{|(4\epsilon\delta)^2 - (1-4\delta)^2|}}{(1-4\delta)} \leq \beta, \frac{1}{4(1+\epsilon)} \leq \delta < \frac{1}{4}\} \cup \{(\delta, \beta) \in D_\epsilon \mid \delta \in [0, \frac{1}{4(1-\epsilon)}], \beta \geq 4\epsilon\delta\},$$

y por lo tanto E es como se muestra en la figura 5.3.2.

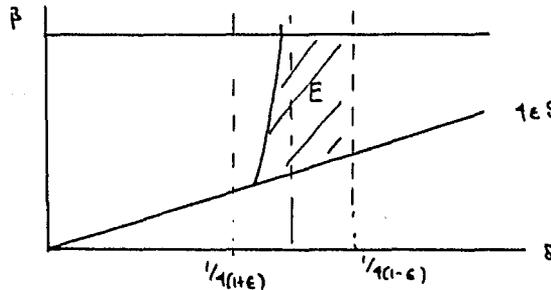


Figura 5.3.2

Esto implica que los cuernos cruzan la recta $\beta = 4\epsilon\delta$ en alguna $\delta \in (\delta_\epsilon^*, 1/4(1-\epsilon))$, donde δ_ϵ^* es el valor de δ para el cual $\partial D_{\epsilon,1}$ intersecta a la recta $\beta = 4\epsilon\delta$. Además se verá que $r(\delta, \beta_0) \rightarrow \infty$ cuando $\delta \rightarrow \beta_0/4\epsilon \forall \beta_0 \in (\epsilon, \epsilon/(1-\epsilon))$, (i.e. $\delta \in (1/4, 1/4(1-\epsilon))$), y por lo tanto los cuernos deben terminar en el abierto $I = \{(\delta, \beta) \mid \beta = 4\epsilon\delta, \delta_\epsilon^* < \delta < 1/4\}$.

Lema 4

$r(\delta, \beta_0) \rightarrow \infty$ si $\delta \rightarrow \beta_0/4\epsilon \forall \beta_0 \in (\epsilon, \epsilon/(1-\epsilon))$.

Prueba Escríbase la ecuación (5.1.5) como

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\Theta} &= \frac{W(\Theta, \Psi, \delta, \beta, \epsilon)}{\beta - 4\epsilon\delta \operatorname{sen} \Theta} \\ \frac{d}{d\Theta} \ln R &= -\frac{1}{2} \frac{Z(\Theta, \Psi, \delta, \beta, \epsilon)}{\beta - 4\epsilon\delta \operatorname{sen} \Theta}, \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

5.3 COMPORTAMIENTO DE LOS CUERNOS DE RESONANCIA 79

donde

$$W(\Theta, \Psi, \delta, \beta, \epsilon) = \beta - S(\Theta) \operatorname{sen}(\Psi - \Theta),$$

$$Z(\Theta, \Psi, \delta, \beta, \epsilon) = 1 - 2S(\Theta) - S(\Theta) \cos(\Psi - \Theta),$$

y como antes,

$$S(\Theta) = \frac{(1 - 4\delta(1 - \epsilon))(1 - k^2)}{1 + k \cos(\Theta - \Phi)}, \quad \Phi = \arctan \frac{-\beta}{1 - 4\delta(1 - \epsilon)}, \quad k = \frac{4\delta\epsilon}{(\beta^2 + (1 - 4\delta(1 - \epsilon))^2)^{1/2}}.$$

Sea $W_0(\Psi) = W(\pm\pi, \Psi, \beta_0/4\epsilon, \beta_0, \epsilon)$. Ahora, en $4\delta = \beta/\epsilon$,

$$k = \frac{\beta}{(\beta^2 + (1 - \frac{\beta(1-\epsilon)}{\epsilon})^2)^{1/2}},$$

$$1 - k^2 = \frac{(1 - \frac{\beta(1-\epsilon)}{\epsilon})^2}{(\beta^2 + (1 - \frac{\beta(1-\epsilon)}{\epsilon})^2)},$$

$$\Phi = -\arctan \frac{\beta}{1 - \frac{\beta}{\epsilon}(1 - \epsilon)},$$

de donde

$$\cos \Phi = \frac{1}{(1 + \tan^2 \Phi)^{1/2}} = \frac{1 - \frac{\beta}{\epsilon}(1 - \epsilon)}{(\beta^2 + (1 - \frac{\beta(1-\epsilon)}{\epsilon})^2)^{1/2}}.$$

$$\dagger + k \cos(\pm\pi - \Phi) = 1 - k \cos \Phi \Rightarrow S(\pm\pi) = \frac{(1 - \frac{\beta(1-\epsilon)}{\epsilon})^2}{\beta^2 + (1 - \frac{\beta(1-\epsilon)}{\epsilon})^2 - \beta(1 - \frac{\beta}{\epsilon}(1 - \epsilon))}.$$

Esto implica que

$$W_0(\Psi) \geq \beta - \frac{(1 - \frac{\beta}{\epsilon}(1 - \epsilon))^2}{\beta^2 + (1 - \frac{\beta}{\epsilon}(1 - \epsilon))^2 - \beta(1 - \frac{\beta}{\epsilon}(1 - \epsilon))}.$$

El denominador no tiene raíces y tiene un mínimo en $\beta = (2 - \epsilon)\epsilon/(\epsilon^2 - \epsilon + 1)$ con valor 1. Entonces

$$W_0(\Psi) \geq \beta - (1 - \frac{\beta}{\epsilon}(1 - \epsilon))^2,$$

y por lo tanto

$$W_0(\Psi) \geq \epsilon(1 - \epsilon^2).$$

De aquí se deduce, por continuidad, que existe $\eta = \eta(\beta_0)$ tal que

$$W(\Theta, \Psi, \delta, \beta, \epsilon) \geq \frac{\epsilon}{2}(1 - \epsilon^2) = C_1(\beta_0, \epsilon), \quad (5.3.2)$$

si $|\Theta - (\pm\pi)| < \eta$ y $(\delta, \beta) = (\beta_0/4\epsilon, \beta_0)$. De (5.3.1) y (5.3.2) se concluye que

$$\Psi(\pi) - \Psi(\pi - \eta) \geq \frac{C_1(\beta_0, \epsilon)}{\sqrt{\beta^2 - (4\delta\epsilon)^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\frac{\beta - 4\delta\epsilon}{\beta + 4\delta\epsilon}} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2}\right) \right]$$

$$\Psi(-\pi + \eta) - \Psi(-\pi) \geq \frac{C_1(\beta_0, \epsilon)}{\sqrt{\beta^2 - (4\delta\epsilon)^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\frac{\beta - 4\delta\epsilon}{\beta + 4\delta\epsilon}} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2}\right) \right].$$

80 5. CAMBIOS EN LA ESTRUCTURA DE RESONANCIA

Por otro lado existe $C_2(\beta_0, \epsilon)$ tal que

$$\frac{d\Psi}{d\Theta} \geq -C_2$$

si $\Theta \in [-\pi + \eta, \pi - \eta]$. Se tiene entonces que para toda β_0 fija en $(\epsilon, \epsilon/(1-\epsilon))$,

$$\Psi(\pi) - \Psi(-\pi) \geq \frac{C_1}{\sqrt{\beta^2 - (4\delta\epsilon)^2}} |\pi - 2 \arctan \sqrt{\frac{\beta - 4\delta\epsilon}{\beta + 4\delta\epsilon}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2}\right)| - 2\pi C_2,$$

y por lo tanto,

$$r(\delta, \beta) \rightarrow \infty \text{ cuando } (\delta, \beta) \rightarrow (\beta_0/4\epsilon, \beta_0) \text{ con } \beta_0 \in (\epsilon, \epsilon/(1-\epsilon)).$$

Si los cuernos se acumularan sobre la recta $\beta = 4\delta\epsilon$ en otro punto que no fuera $(\delta, \beta) = (1/4, \epsilon)$ habría una región en la que $r(\delta, \beta)$ no podría tomar ningún valor (figura 5.3.2)

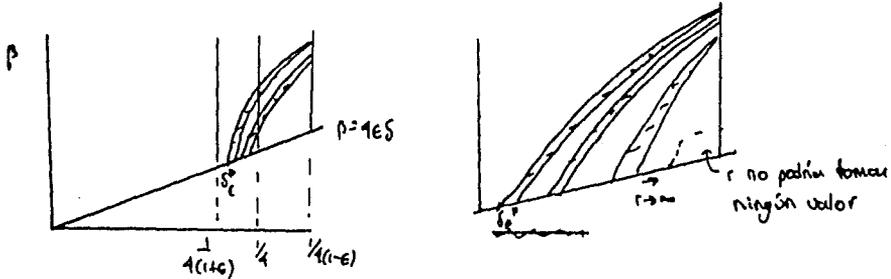


Figura 5.3.2

y por lo tanto se acumulan sólo en $(\delta, \beta) = (1/4, \epsilon)$. Por otro lado, $I_0 = I \cap \{(\delta, \beta) | \beta > 0, 0 < \delta < 1/8(1-\epsilon)\}$ coincide con I cuando $\epsilon = 1/2$ pero está estrictamente contenida en I para cualquier $\epsilon < 1/2$ y contiene a I para $\epsilon > 1/2$, por lo que sólo un número finito de cuernos de resonancia intersectan la región del plano (δ, β) en la cual $\lambda_1 \lambda_2 < 1$ (i.e. donde ω_π tiene posibilidad de ser estable) para cualquier $\epsilon < 1/2$. Además para $\epsilon < 1/3$, $1/8(1-\epsilon) < 1/4(1+\epsilon) < \delta_1^*$, es decir, $I_0 = \emptyset$ es vacía, por lo que todos los cuernos de resonancia están confinados a la región en la que ω_π es inestable (lo que no impide que ω_π pueda ser estable en algún subconjunto de D). Puede verse también, por continuidad con respecto al caso $\epsilon = 1/2$, que si δ_1 es la coordenada δ para la cual la frontera izquierda de H_2 intersecta a I , entonces existe ϵ_1 tal que $\delta_1 < 1/8(1-\epsilon)$ cuando $\epsilon \in]\epsilon_1, 1[$. Resumiendo:

Proposición 4:

Para toda $\epsilon \in]\epsilon_1, 1[$ hay un abierto en D_ϵ en el cual ω_π es asintóticamente orbitalmente estable con fase asintótica. Como ω_0 es estable para toda $\delta > 0$ esta región es de biestabilidad.

Para toda $\epsilon \in [0, 1]$, ω_π es inestable $\forall \delta > 1/8(1-\epsilon)$.

Cuando $\epsilon \rightarrow 0$, $E = (D_\epsilon \setminus D_{\epsilon,1}) \cap (D_\epsilon \setminus D_{\epsilon,2})$ tiende al punto $(\delta, \beta) = (1/4, 0)$ y los cuernos se colapsan a un punto, como se observa de lo siguiente:

Para $\epsilon = 0$,

$$\frac{d\Psi}{d\Theta} = 1 - \frac{(1-4\delta)}{\beta} \text{sen}(\Psi - \Theta),$$

de donde

$$\frac{d(\Psi - \Theta)}{d\Theta} = -\frac{(1-4\delta)}{\beta} \text{sen}(\Psi - \Theta),$$

$$\ln \tan\left(\frac{\Psi - \Theta}{2}\right) = -\frac{(1 - 4\delta)}{\beta} \Theta,$$

por lo que

$$\Psi = \Theta + 2 \arctan\left(e^{-\frac{(1-4\delta)\Theta}{\beta}}\right),$$

y entonces

$$\frac{\Psi(2k\pi) - \Psi(0)}{2k\pi} = 1 + h,$$

donde $h \rightarrow 0$ cuando $\Theta \rightarrow \infty$. Se concluye que para $4\delta \leq 1$, $r(\delta, \beta) = 1$ y por lo tanto no hay cuernos de resonancia. ■

En el sistema desacoplado

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f(x_1) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f(x_2)\end{aligned}$$

tiene aparte de las soluciones periódicas ω_0 y ω_π , dos en que uno de los osciladores se mueve mientras el otro está en reposo: $(0, 0) \times (\eta(t))$ y $(\eta(t)) \times (0, 0)$, donde

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\text{sen } \beta t \end{pmatrix}.$$

Resultados numéricos (Figuras 6.1.1, 6.1.2 y [A.D.O.]) muestran que cuando $\epsilon = 1/2$ las continuaciones de este par de soluciones para $\delta > 0$ se conectan con ω_π para alguna $\delta \in (0, 1/2)$ o terminan en una órbita heteroclínica. En este capítulo se demostrará que para $\epsilon = 0$ (i.e. la matriz de acoplamiento es un múltiplo de la identidad y se tiene acoplamiento isotrópico), las continuaciones de las soluciones mencionadas se conectan por un lado con ω_π y por el otro con ω_0 . Este resultado analíticamente para $\epsilon = 0$, i.e. cuando la matriz de acoplamiento es un múltiplo de la identidad. Además se obtendrá una solución completa del problema.

6.1 LA SOLUCIÓN ω_0

Se estudiarán primero las bifurcaciones de ω_0 para el caso $\epsilon = 0$. Para eso se utilizarán las ecuaciones (3.1.3) que tienen la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{a}} \\ \dot{\tilde{b}} \end{pmatrix} = -4\delta\epsilon \begin{pmatrix} \cos 2\beta t & e^{2t} \text{sen } 2\beta t \\ e^{-2t} \text{sen } 2\beta t & -\cos 2\beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{pmatrix}.$$

En $\epsilon = 0$, $\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones. Esto implica que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-(2+4\delta)t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\beta} e^{-4\delta t} \end{pmatrix}$$

y por lo tanto una matriz fundamental está dada por

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-(2+4\delta)t} \cos \beta t & e^{-4\delta t} \text{sen } \beta t \\ -e^{-(2+4\delta)t} \text{sen } \beta t & e^{-4\delta t} \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

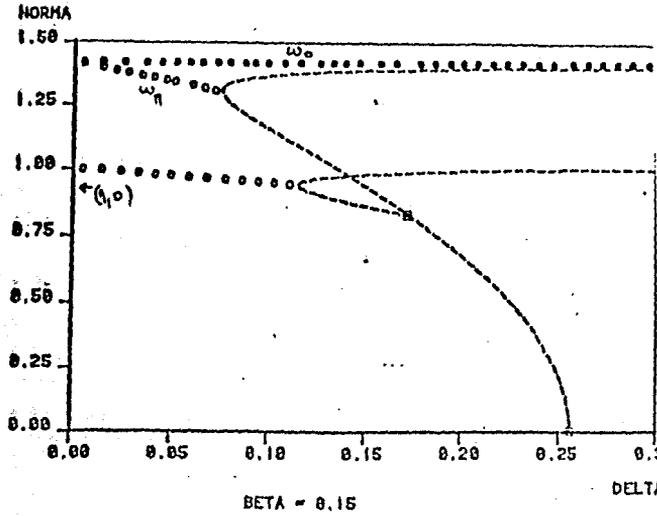


Figura 6.1.1

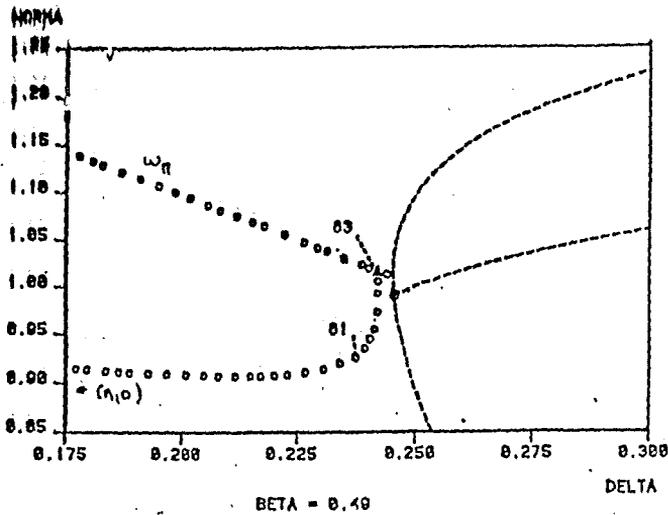


Figura 6.1.2

Como $\Phi(0) = I$,

$$\Phi(2\pi/\beta) = \begin{pmatrix} e^{-2(1+2\delta)2\pi/\beta} & 0 \\ 0 & e^{-2\delta\pi/\beta} \end{pmatrix},$$

Esto implica que los multiplicadores de Floquet asociados a ω_0 son 1, $e^{-4\pi/\beta}$ (correspondientes a ω_1) y $e^{-2(1+2\delta)2\pi/\beta}$, $e^{-2\delta\pi/\beta}$ (correspondientes a ω_2). Se concluye entonces que si $\delta > 0$ los multiplicadores de Floquet no están fuera del círculo unitario y ω_0 es estable; si $\delta < -1/2$ dos multiplicadores están fuera del círculo unitario y si $-1/2 < \delta < 0$ hay uno fuera: en ambos

84 6. EL CASO $\epsilon = 0$

casos ω_0 es inestable.

Esto implica que en $\delta = 0$ y en $\delta = -1/2$ hay bifurcaciones de soluciones periódicas con período cercano a $2\pi/\beta$. En $\delta = 0$ la rama bifurcada tiene $\omega_1 = (\eta + \eta_0)/2$, $\omega_2 = (\eta - \eta_0)/2$, es decir se tiene el toro que se había mencionado para $\delta = 0$ (Figura 6.1.3). La solución que se bifurca de $\delta = -1/2$ no está en el plano $\omega_1 = 0$.

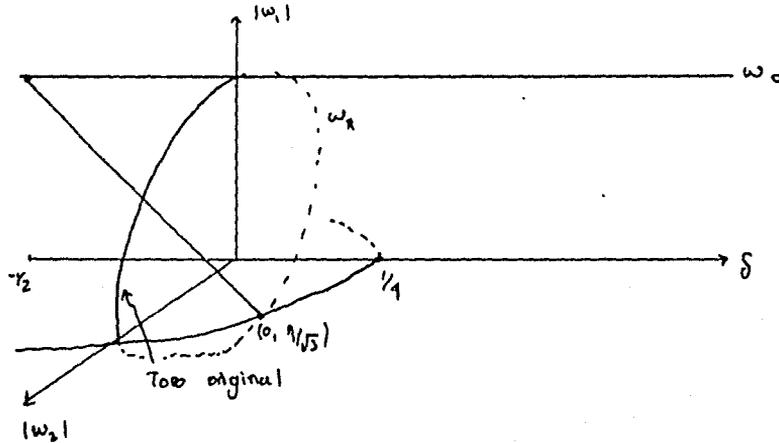


Figura 6.1.3

6.2 LA SOLUCIÓN ω_π

En el subespacio Π la ecuación (2.2.1) es $\omega_1 \equiv 0$ y la ecuación (2.2.2), escribiendo w_2 como w es

$$\frac{dw}{dt} = Kw - |w|^2 w - 2\delta Dw.$$

Si $\eta = (\cos \beta t, -\text{sen } \beta t)^T$, $\tilde{\eta} = (\text{sen } \beta t, \cos \beta t)^T$, entonces $\eta, \tilde{\eta}$ forman una base de \mathbb{C}^2 y por lo tanto w puede escribirse como

$$w = a\eta + b\tilde{\eta}.$$

Puede verse directamente que η y $\tilde{\eta}$ satisfacen

$$(K - I)\eta = \eta', \quad (K - I)\tilde{\eta} = \beta\tilde{\eta} = \tilde{\eta}'.$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} a'\eta + b'\tilde{\eta} + a\eta' + b\tilde{\eta}' &= aK\eta + bK\tilde{\eta} - (a^2 + b^2)(a\eta + b\tilde{\eta}) - 2\delta(aD\eta + bD\tilde{\eta}) \\ &= a(\eta + \eta') + b(\tilde{\eta} + \tilde{\eta}') - (a^2 + b^2)a\eta - (a^2 + b^2)b\tilde{\eta} - 2\delta(aD\eta + bD\tilde{\eta}), \end{aligned}$$

donde, como antes $D = 2I - 4\epsilon A$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como

$$\begin{aligned} A\eta &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\text{sen } \beta t \end{pmatrix} \\ &= \alpha\eta + \beta\tilde{\eta}, \end{aligned}$$

$$A\bar{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \beta t \end{pmatrix} \\ = \zeta \eta + \sigma \bar{\eta},$$

y

$$\alpha = (A\eta, \eta) = \text{sen}^2 \beta t, \quad \beta = (A\eta, \bar{\eta}) = -\text{sen} \beta t \cos \beta t,$$

de donde

$$A\eta = \text{sen}^2 \beta t \eta - \text{sen} \beta t \cos \beta t \bar{\eta}.$$

De la misma forma

$$\zeta = (A\bar{\eta}, \eta) = -\text{sen} \beta t \cos \beta t, \quad \sigma = (A\bar{\eta}, \bar{\eta}) = \cos^2 \beta t,$$

de donde

$$A\bar{\eta} = -\text{sen} \beta t \cos \beta t \eta + \cos^2 \beta t \bar{\eta}.$$

De lo anterior se deduce que

$$a' = a - a(a^2 + b^2) - 4\delta a + 8\delta \epsilon (a \text{sen}^2 \beta t - b \text{sen} \beta t \cos \beta t) \\ b' = b - b(a^2 + b^2) - 4\delta b + 8\delta \epsilon (-a \text{sen} \beta t \cos \beta t + b \cos^2 \beta t).$$

Para el caso $\epsilon = 0$ las expresiones anteriores se reducen a

$$a' = a(1 - 4\delta - (a^2 + b^2)) \\ b' = b(1 - 4\delta - (a^2 + b^2)),$$

de donde se obtiene,

$$aa' + bb' = (a^2 + b^2)(1 - 4\delta - (a^2 + b^2)) = r^2(1 - 4\delta - r^2) = \frac{1}{2}(r^2)'$$

Si se escribe $r^2 = x$ se tiene la ecuación

$$x' = 2x(1 - 4\delta - x),$$

que es una ecuación logística cuya solución se ve como se muestra en la figura 6.2.4.

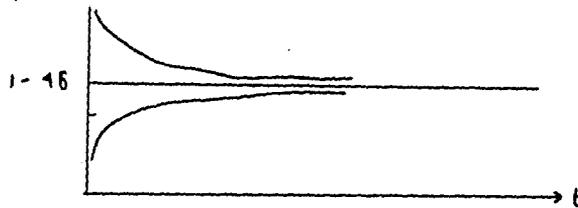


Figura 6.2.4

Por lo tanto para tener una solución periódica es necesario que $x = 1 - 4\delta = r^2$, es decir,

$$r = \sqrt{1 - 4\delta}, \quad 4\delta < 1.$$

Esto implica que $a' = 0$, $b' = 0$. Pueden tomarse $b = 0$, $a = \sqrt{1 - 4\delta}$ (otros valores dan la misma solución), y por lo tanto, para $\epsilon = 0$, $\omega_n = \sqrt{1 - 4\delta}\eta$. (Véase la figura 6.2.5.)

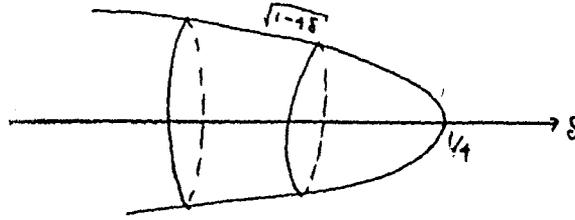


Figura 6.5.5

Para estudiar la estabilidad de w_π , que para $\epsilon = 0$ está dada por $w_1 = 0$, $w_2 = \eta\sqrt{1-4\delta}$, se linealizarán las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.2) alrededor de esta solución: $w_1 = \xi_1$, $w_2 = \sqrt{1-4\delta}\eta + \xi_2$. Entonces

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{d\xi_1}{dt} = K\xi_1 - (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + (1-4\delta) + 2\sqrt{1-4\delta}(\eta, \xi_2))\xi_1 - 2(\xi_1, \sqrt{1-4\delta}\eta + \xi_2)(\sqrt{1-4\delta}\eta + \xi_2),$$

y a primer orden

$$\frac{d\xi_1}{dt} = K\xi_1 - (1-4\delta)\xi_1 - 2(\xi_1, \eta)(1-4\delta)\eta. \quad (6.2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw_2}{dt} = \frac{d\xi_2}{dt} + \sqrt{1-4\delta}\eta' &= K(\sqrt{1-4\delta}\eta - (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + (1-4\delta) + 2\sqrt{1-4\delta}(\eta, \xi_2))(\xi_2 + \sqrt{1-4\delta}\eta) \\ &\quad - 2(\xi_1, \sqrt{1-4\delta}\eta + \xi_2)\xi_1 - 4\delta(\sqrt{1-4\delta}\eta + \xi_2) + K\xi_2 \\ &= K\sqrt{1-4\delta}\eta - 4\delta\sqrt{1-4\delta}\eta + K\xi_2 - (1-4\delta)\xi_2 - 4\delta\xi_2 + \\ &\quad - (1-4\delta)\sqrt{1-4\delta}\eta - 2(1-4\delta)(\eta, \xi_2)\eta + \dots, \end{aligned}$$

de donde, a primer orden,

$$\frac{d\xi_2}{dt} = (K-1)\xi_2 - 2(1-4\delta)(\eta, \xi_2)\eta. \quad (6.2.2)$$

Ahora, escribiendo ξ_2 como $\xi_2 = a\eta + b\tilde{\eta}$ se tiene

$$a'\eta + b'\tilde{\eta} + a\eta' + b\tilde{\eta}' = (K-1)a\eta + (K-1)b\tilde{\eta} - 2(1-4\delta)a\eta.$$

Por otro lado, $\eta' = -\beta\tilde{\eta}$, $\tilde{\eta}' = \beta\eta$, $K\eta = \eta + \eta'$, $K\tilde{\eta} = \tilde{\eta} + \tilde{\eta}'$. Entonces

$$\begin{aligned} a' &= -2(1-4\delta)a \\ b' &= 0, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} a &= e^{-2(1-4\delta)t}a(0) \\ b &= b(0). \end{aligned}$$

Tomando $a(0) = 1$, $b(0) = 0$ y $a(0) = 0$, $b(0) = 1$, se encuentra que

$$\xi_2 = e^{-2(1-4\delta)t}\eta \quad \text{o} \quad \xi_2 = \tilde{\eta},$$

de donde una matriz fundamental para (6.1.2) está dada por

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{-2(1-4\delta)t} \cos \beta t & \text{sen } \beta t \\ -e^{-2(1-4\delta)t} \text{sen } \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix},$$

$$W\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} e^{-2(1-4\delta)\frac{2\pi}{\beta}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y dos de los multiplicadores de Floquet son 1 y $e^{-2(1-4\delta)\frac{2\pi}{\beta}}$.

Para ξ_1 se tiene que como $\xi_1 = a\eta + b\bar{\eta}$,

$$a'\eta + b'\bar{\eta} + a\eta' + b\bar{\eta}' = aK\eta + bK\bar{\eta} - (1-4\delta)(a\eta + b\bar{\eta}) - 2a(1-4\delta)\eta,$$

por lo que

$$\begin{aligned} a' &= a - (1-4\delta)a - 2a(1-4\delta) = -2a(1-6\delta) \\ b' &= b - (1-4\delta)b = 4\delta b, \end{aligned}$$

y resolviendo,

$$\begin{aligned} a &= e^{-2(1-6\delta)t} a(0) \\ b &= e^{4\delta t} b(0). \end{aligned}$$

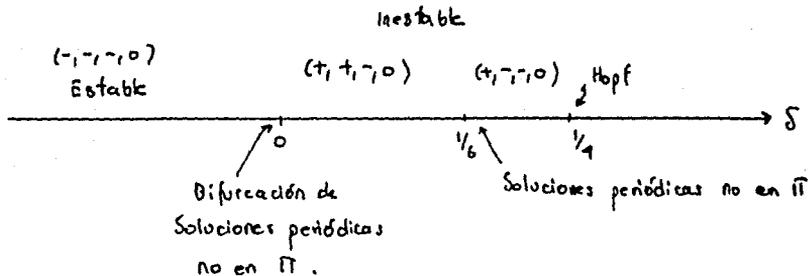
Si se toman $a(0) = 1, b(0) = 0$ entonces $\xi_1 = e^{-2(1-6\delta)t}\eta$; y si se toman $a(0) = 0, b(0) = 1$, entonces $\xi_1 = e^{4\delta t}\bar{\eta}$. Esto implica que una matriz fundamental para (6.1.1) es

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{-2(1-6\delta)t} \cos \beta t & e^{4\delta t} \operatorname{sen} \beta t \\ -e^{-2(1-6\delta)t} \operatorname{sen} \beta t & e^{4\delta t} \cos \beta t \end{pmatrix},$$

$$W\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} e^{-2(1-6\delta)\frac{2\pi}{\beta}} & 0 \\ 0 & e^{4\delta\frac{2\pi}{\beta}} \end{pmatrix}.$$

Se concluye entonces que los otros dos multiplicadores son $e^{-2(1-6\delta)\frac{2\pi}{\beta}}$ y $e^{4\delta\frac{2\pi}{\beta}}$.

Como se demuestra en el apéndice 2, cuando un multiplicador de Floquet pasa por 1, se tiene una bifurcación de una rama de soluciones periódicas. Aquí un multiplicador de Floquet pasa por 1 en $\delta = 0, 1/6, 1/4$, pero como ω_n está dada por $\eta(\sqrt{1-4\delta})$, en $\delta = 1/4$ lo que se tiene es una bifurcación de Hopf. Además, ω_n es estable si todos los multiplicadores de Floquet están dentro del círculo unitario e inestable si al menos uno está fuera, como se demostró en capítulo 3. Se tiene entonces para ω_n :



6.3 OTRAS SOLUCIONES

En esta sección se verá que además de ω_0, ω_π las únicas soluciones periódicas para el caso $\epsilon = 0$ son las que coinciden en $\delta = 0$ con $(\eta, 0)$ y $(0, \eta)$. A estas dos soluciones se les denomina $x_\delta^{1,2}$.

Considérense las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.2) en $\epsilon = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{dw_1}{dt} &= Kw_1 - (|w_1|^2 + |w_2|^2)w_1 - 2(w_1, w_2)w_2 \\ \frac{dw_2}{dt} &= Kw_2 - (|w_1|^2 + |w_2|^2)w_2 - 2(w_1, w_2)w_1 - 4\delta w_2.\end{aligned}$$

Como w_1, w_2 pueden escribirse en la forma $w_1 = a_1\eta + b_1\bar{\eta}$, $w_2 = a_2\eta + b_2\bar{\eta}$, y $K\eta = \eta + \eta'$, $K\bar{\eta} = \bar{\eta} + \bar{\eta}'$, si se escribe

$$a_i^2 + b_i^2 = r_i^2, \quad r_1^2 + r_2^2 = \rho^2, \quad a_1a_2 + b_1b_2 = k, \quad (6.3.1)$$

entonces

$$a_1'\eta + b_1'\bar{\eta} + a_1\eta' + b_1\bar{\eta}' = a_1K\eta + b_1K\bar{\eta} - \rho^2(a_1\eta + b_1\bar{\eta}) - 2k(a_2\eta + b_2\bar{\eta}),$$

por lo que

$$\begin{aligned}a_1' &= a_1 - \rho^2 a_1 - 2ka_2 \\ b_1' &= b_1 - \rho^2 b_1 - 2kb_2 \\ a_2' &= a_2(1 - 4\delta) - \rho^2 a_2 - 2ka_1 \\ b_2' &= b_2(1 - 4\delta) - \rho^2 b_2 - 2kb_1.\end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\rho^2)' &= a_1a_1' + b_1b_1' + a_2a_2' + b_2b_2' = r_1^2 + r_2^2(1 - 4\delta) - \rho^4 - 4k^2 \\ &= \rho^2(1 - 4\delta - \rho^2) + 4\delta r_1^2 - 4k^2.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}k' &= a_1'a_2 + a_1a_2' + b_1'b_2 + b_1b_2' \\ &= 2k(1 - 2\delta - 2\rho^2),\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(k^2)' = 2k^2(1 - 2\delta - 2\rho^2),$$

entonces

$$\frac{1}{2}(r_i^2)' = (1 - 4\delta)r_i^2 - \rho^2 r_i^2 - 2k^2, \quad \frac{1}{2}(r_1^2)' = r_1^2(1 - \rho^2) - 2k^2.$$

Ahora, sea θ_i el ángulo dado por $A_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = r_i \begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$. Entonces

$$\begin{aligned}\theta_1' &= \frac{a_1b_1' - a_1'b_1}{r_1^2} = \frac{-2k}{r_1^2}(a_1b_2 - a_2b_1) \\ \theta_2' &= \frac{a_2b_2' - a_2'b_2}{r_2^2} = \frac{2k}{r_2^2}(a_1b_2 - a_2b_1).\end{aligned}$$

Además $(a_1b_2 - a_2b_1)' = 2(1 - 2\delta - \rho^2)(a_1b_2 - a_2b_1)$, o de otra forma,

$$m' = 2(1 - 2\delta - \rho^2)m. \quad (6.3.3)$$

Si ϕ es el ángulo entre A_1 y A_2 se tiene

$$k = r_1 r_2 \cos \phi, \quad m = r_1 r_2 \sin \phi, \quad z = \frac{m}{k} = \tan \phi,$$

con

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{m'k - k'm}{k^2} = \frac{2(1 - 2\delta - \rho^2)mk - 2mk(1 - 2\delta - 2\rho^2)}{k^2} \\ &= 2z\rho^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x(t) = x(0)e^{2 \int_0^t \rho^2(s) ds}$. Esta solución es única siempre que $x(0) \neq 0, \pm\infty$. De esta fórmula se ve que $x(t)$ está definida para toda t (si $|x(0)| < \infty$) y para que la solución sea T -periódica debe tenerse

$$x(T) = x(0),$$

es decir, el ángulo $\phi(t)$ no puede pasar por los valores $k\pi/2$, (a menos que éste sea su valor en $t = 0$) debe permanecer en el mismo cuadrante y regresar al ángulo inicial. Pero esto es imposible a menos que $\rho(t) \equiv 0$: para tener soluciones periódicas es necesario ya que $\rho \equiv 0$ (correspondiente a la solución estacionaria $w_1 = w_2 = 0$) o que $\phi(0) = k\pi/2 \equiv \phi(t)$ (tomando $x(0) = 0$ o escribiendo la ecuación para k/m), es decir, m o k son siempre cero. En ambos casos $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ son constantes.

Si $k \equiv 0$ y $m \neq 0$ (i.e. A_1 es ortogonal a A_2) entonces

$$\frac{1}{2}(r_2^2)' = (1 - 4\delta - \rho^2)r_2^2 = \left(\frac{m'}{2m} - 2\delta\right)r_2^2,$$

es decir

$$\frac{d}{dt} \ln(r_2^2/|m|) = -4\delta.$$

Integrando sobre un período (usando que $r_2^2/|m|$ es periódico y que $m(t) = m(0)e^{2 \int_0^t (1 - 2\delta - \rho^2(s)) ds}$ tiene el signo de $m(0)$), se encuentra que

$$0 = -4\delta T,$$

lo cual es imposible para toda $\delta \neq 0$.

Esto implica que $m \equiv 0$, r_1 o r_2 son cero.

Si $r_1 \equiv 0$, $\frac{1}{2}(r_2^2)' = (1 - 4\delta - r_2^2)r_2^2$, que es una ecuación logística con únicas soluciones $r_2 = 0$ o $r_2^2 = 1 - 4\delta$.

Si $r_2 \equiv 0$, $\frac{1}{2}(r_1^2)' = (1 - r_1^2)r_1^2$, con únicas soluciones periódicas $r_1 = 0$ y $r_1 = 1$.

Además si $R_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$ es una rotación con ángulo constante ϕ , entonces las ecuaciones (6.3.2) pueden escribirse como

$$\begin{aligned} (R_\phi A_1)' &= (1 - \rho^2)R_\phi A_1 - 2kR_\phi A_2 \\ (R_\phi A_2)' &= (1 - 4\delta - \rho^2)R_\phi A_2 - 2kR_\phi A_1, \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

donde $k = A_1 \cdot A_2$. Si (A_1, A_2) es solución de (6.3.3) entonces $(R_\phi A_1, R_\phi A_2)$ también lo es ya que $R_\phi A_1 \cdot R_\phi A_2 = A_1 \cdot A_2$.

Si $r_1 \equiv 0$, $r_2^2 \equiv 1 - 4\delta = \rho^2$, $\theta_2(t) = \theta_0$, $A_2 = \text{constante}$, se puede tomar ϕ tal que $\phi = -\theta_0$, en cuyo caso $a_2 = \sqrt{1 - 4\delta}$, $b_2 = 0$, y esa solución corresponde a ω_+ .

Si $r_1 \equiv 1 = \rho^2$, $r_2 = 0$, entonces $\theta_1(t) = \theta_0$, $A_1 = \text{constante}$ y haciendo una rotación $\phi = -\theta_0$ se tiene $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, que corresponde a ω_0 .

90 6. EL CASO $\epsilon = 0$

Si $m \equiv 0$, entonces A_1 y A_2 son colineales, $\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta_1(0) = \theta_2(0)$ ya que los ángulos son constantes, o $\theta_1(t) = \theta_2(t) + \pi = \theta_1(0)$ si A_1 y A_2 son opuestos. En el primer caso $k = r_1 r_2 > 0$, en el segundo $k = -r_1 r_2 < 0$ (el caso $k \equiv 0$ ya fue estudiado).

En el caso $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$, tomando $\phi = -\theta_0$ se tiene que $R_\phi A_1$ y $R_\phi A_2$ tienen ángulo polar cero, es decir, $b_1 = b_2 = 0$, $r_1 = a_1$, $r_2 = a_2$. En este caso las ecuaciones (6.3.2) se reducen a

$$\begin{aligned} a_1' &= a_1 - \rho^2 a_1 - 2a_1 a_2^2 = a_1(1 - a_1^2 - 3a_2^2) \\ a_2' &= a_2(1 - 4\delta - \rho^2) - 2a_1^2 a_2 = a_2(1 - 4\delta - 3a_1^2 - a_2^2). \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Las únicas soluciones estacionarias de estas ecuaciones son $a_1 = 0$, $r_2^2 = 1 - 4\delta$; $r_1^2 = 1$, $a_2 = 0$ (correspondientes a $k \equiv 0$) y $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 4\delta \end{pmatrix}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 \\ 3/8 & -1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 4\delta \end{pmatrix}.$$

y tomando en cuenta que $a_1 = r_1 > 0$, $a_2 = r_2 > 0$,

$$a_1 = \frac{\sqrt{1-6\delta}}{2}, \quad a_2 = \frac{\sqrt{1+2\delta}}{2}, \quad b_1 = b_2 = 0.$$

Esto implica que

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1-6\delta}}{2} \eta \\ \frac{\sqrt{1+2\delta}}{2} \eta \end{pmatrix},$$

y en las coordenadas originales,

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ w_1 - w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sqrt{1-6\delta} + \sqrt{1+2\delta}) \\ (\sqrt{1-6\delta} - \sqrt{1+2\delta}) \end{pmatrix} \frac{\eta}{2} = z_1^*.$$

En el caso en que A_1 y A_2 son opuestos, como $(R_\phi A_1, R_{\phi+\pi} A_2)$ también es solución (porque $R_\phi A_1 \cdot R_{\phi+\pi} A_2 = -A_1 \cdot A_2$), entonces

$$\begin{aligned} -2A_1 \cdot A_2 R_\phi A_2 &= -2(R_\phi A_1 \cdot R_{\phi+\pi} A_2) R_{\phi+\pi} A_2 \\ -2A_1 \cdot A_2 R_{\phi+\pi} A_1 &= -2(R_\phi A_1 \cdot R_{\phi+\pi} A_2) R_\phi A_1. \end{aligned}$$

Tomando $\theta_1 = \theta_2 + \pi = \theta_0$ y $\phi = -\theta_0$, $R_\phi A_1$, $R_{\phi+\pi} A_2$ tienen ángulo polar cero, por lo que en las ecuaciones (6.3.2) se tiene $b_1 = b_2 = 0$, $r_1 = a_1$, $r_2 = -a_2$, $k = -r_1 r_2 = a_1 a_2$ y se obtiene de nuevo el sistema (6.3.5) cuyas únicas soluciones estacionarias son (con $a_1 > 0$, $a_2 < 0$):

$$\begin{aligned} b_1 = b_2 = 0, \quad a_1 &= \frac{\sqrt{1-6\delta}}{2}, \quad a_2 = -\frac{\sqrt{1+2\delta}}{2}, \\ w &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1-6\delta}}{2} \eta \\ -\frac{\sqrt{1+2\delta}}{2} \eta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de donde

$$z = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1-6\delta} - \sqrt{1+2\delta}}{2} \eta \\ \frac{\sqrt{1-6\delta} + \sqrt{1+2\delta}}{2} \eta \end{pmatrix} = z_2^*.$$

Estas soluciones coinciden en $\delta = 1/6$ con w_π y en $\delta = -1/2$ con w_0 ; en $\delta = 0$, z_1^* es igual a $(\eta, 0)$ y z_2^* a $(0, \eta)$.

6.3 OTRAS SOLUCIONES 91

Para probar que el sistema (6.3.5) no tiene soluciones periódicas definidas en $x_1 = a_1, x_2 = a_2$. El sistema se escribe entonces como

$$\begin{aligned}x_1' &= 2x_1(1 - x_1 - 3x_2) \\x_2' &= 2x_2(1 - 4\delta - 3x_1 - x_2).\end{aligned}$$

Este sistema se estudia examinando el plano fase para $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Del análisis del flujo y del teorema de Poincaré-Bendixon se concluye que no hay más soluciones periódicas del problema original que las que corresponden a las soluciones estacionarias ya encontradas.

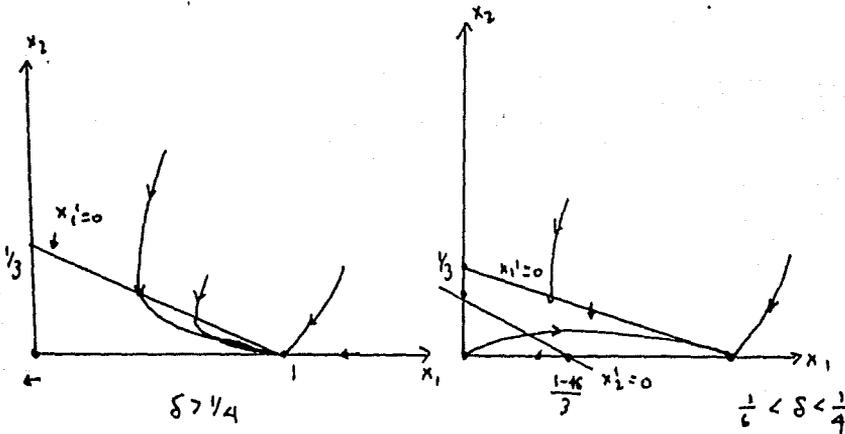


Figura 6.3.1

Figura 6.3.2

Para $\delta > 1/4$ los únicos puntos fijos son $(0, 0)$ y $(1, 0)$, el primero inestable y el segundo estable; no hay soluciones periódicas.

Para $1/6 < \delta < 1/4$ se tienen 3 puntos fijos: $r_1^2 = 0, r_2^2 = 1 - 4\delta$ que es inestable, $x_1 = 1, x_2 = 0$ que es estable y el origen también inestable. Además hay una curva heteroclínica entre el origen y $(1, 0)$. No hay soluciones periódicas.

Para $-1/2 < \delta < 1/6$ no hay soluciones periódicas; hay 4 puntos fijos: $(0, 0)$ que corresponde a la solución estacionaria del problema original y es inestable, $(1, 0)$ que corresponde a ω_0 y es estable, $(0, 1 - 4\delta)$ que corresponde a ω_π y es estable y $((1 - 6\delta)/4, (1 + 2\delta)/4)$ que corresponde a s_1^2 que es inestable.

Para $\delta < -1/2$ no hay soluciones periódicas y hay 3 puntos fijos: $(0, 0)$ y $(1, 0)$ que son inestables y $(0, 1 - 4\delta)$ que es estable.

El único caso en el que hay un punto estacionario con $x_1 > 0, x_2 > 0$ es para $-1/2 < \delta < 1/6$, y este punto es hiperbólico, por lo que no puede haber un ciclo límite a su alrededor.

Nótese que estas estabilidades no son para las soluciones ω_0, ω_π etc. porque x_1, x_2 son cuadrados de a_1 y a_2 .

6.4 ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES BIFURCADAS

Para estudiar la estabilidad de las soluciones $x_1^{1,2}$ sea $\epsilon = \pm 1$ y escribanse $w_1 = (a_1 + \xi_1)\eta + \zeta_1\bar{\eta}$, $w_2 = (\epsilon a_2 + \xi_2)\eta + \zeta_2\bar{\eta}$. Como se vio en la sección anterior $a_1 = \sqrt{1-6\delta}/2$, $a_2 = \epsilon\sqrt{1+2\delta}/2$. Por (6.3.1) se tiene que

$$k = (a_1 + \xi_1)(\epsilon a_2 + \xi_2) + \zeta_1 \zeta_2 = \epsilon a_1 a_2 + a_1 \xi_2 + \epsilon a_2 \xi_1 + \dots$$

$$\rho^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1 \xi + \epsilon a_2 \xi_2) + \xi_1^2 + \zeta_1^2 + \xi_2^2 + \zeta_2^2,$$

a primer orden en ξ_i y en ζ_i . Sustituyendo en (6.3.2) se encuentra que

$$\xi_1' = (a_1 + \xi_1)(1 - a_1^2 - a_2^2 - 2(a_1 \xi_1 + \epsilon a_2 \xi_2)) - 2(\epsilon a_1 a_2 + a_1 \xi_2 + \epsilon a_2 \xi_1)(\epsilon a_2 + \xi_2) + \dots$$

$$= \xi_1(1 - 3(a_1^2 + a_2^2)) - 6\epsilon a_1 a_2 \xi_2 + \dots$$

$$\zeta_1' = \zeta_1(1 - a_1^2 - a_2^2) - 2\epsilon a_1 a_2 \zeta_2$$

$$\xi_2' = (a_2 + \xi_2)(1 - 4\delta - a_1^2 - a_2^2 - 2(a_1 \xi_1 + \epsilon a_2 \xi_2)) - 2(\epsilon a_1 a_2 + a_1 \xi_2 + \epsilon a_2 \xi_1)(a_1 + \xi_1) + \dots$$

$$= \xi_2(1 - 4\delta - 3(a_1^2 + a_2^2)) - 6\epsilon a_1 a_2 \xi_1$$

$$\zeta_2' = \zeta_2(1 - 4\delta - a_1^2 - a_2^2) - 2\epsilon a_1 a_2 \zeta_1.$$

Sean $\rho_0^2 = a_1^2 + a_2^2 = (1 - 2\delta)/2$, $k_0 = \epsilon a_1 a_2 = \epsilon\sqrt{1+2\delta}\sqrt{1-6\delta}/4$, entonces las ecuaciones de arriba pueden escribirse como

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 - 3\rho_0^2 & -6k_0 \\ -6k_0 & 1 - 4\delta - 3\rho_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$= A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 - \rho_0^2 & -2k_0 \\ -2k_0 & 1 - 4\delta - \rho_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

$$= B \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}.$$

A y B son matrices simétricas y constantes por lo que si $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, con λ_i valores propios y x_i vectores propios entonces $x_1(t) = e^{\lambda_1 t} x_1$ y $x_2(t) = e^{\lambda_2 t} x_2$ son soluciones de $x' = Ax$ y cualquier solución puede escribirse como $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$. Deben encontrarse entonces los valores propios de A.

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda(1 - 2\delta - 3\rho_0^2) + (1 - 3\rho_0^2)(1 - 4\delta - 3\rho_0^2) - 36k_0^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda(1 - 2\delta) - 2(1 + 2\delta)(1 - 6\delta)$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda\rho_0^2 - 32k_0^2,$$

$$\lambda_{1,2} = -\rho_0^2 \pm (\rho_0^4 + 32k_0^2)^{1/2}.$$

En la misma forma

$$\det(B - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda(4\rho_0^2 - 2\rho_0^2) + (1 - 4\delta - \rho_0^2)(1 - \rho_0^2) - 4k_0^2$$

$$= \lambda^2 - 2\rho_0^2 \lambda = \lambda(\lambda - 2\rho_0^2),$$

de donde

$$\lambda_3 = 0, \lambda_4 = 2\rho_0^2.$$

94 6. EL CASO $\epsilon = 0$

Ahora,

$$x_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \Rightarrow w^1(t) = (\alpha_1 e^{\lambda_1 t} \eta, \beta_1 e^{\lambda_1 t} \eta)$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow w^2(t) = (\alpha_2 e^{\lambda_2 t} \eta, \beta_2 e^{\lambda_2 t} \eta)$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \Rightarrow w^3(t) = (\alpha_3 \bar{\eta}, \beta_3 \bar{\eta})$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \beta_4 \end{pmatrix} \Rightarrow w^4(t) = (\alpha_4 e^{\lambda_4 t} \bar{\eta}, \beta_4 e^{\lambda_4 t} \bar{\eta})$$

son soluciones linealmente independientes, es decir forman una matriz fundamental:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \cos \beta t & \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \cos \beta t & \alpha_3 \cos \beta t & \alpha_4 e^{\lambda_4 t} \cos \beta t \\ -\alpha_1 e^{\lambda_1 t} \sin \beta t & -\alpha_2 e^{\lambda_2 t} \sin \beta t & \alpha_3 \sin \beta t & \alpha_4 e^{\lambda_4 t} \sin \beta t \\ \beta_1 e^{\lambda_1 t} \cos \beta t & \beta_2 e^{\lambda_2 t} \cos \beta t & \beta_3 \cos \beta t & \beta_4 e^{\lambda_4 t} \cos \beta t \\ -\beta_1 e^{\lambda_1 t} \sin \beta t & -\beta_2 e^{\lambda_2 t} \sin \beta t & \beta_3 \sin \beta t & \beta_4 e^{\lambda_4 t} \sin \beta t \end{pmatrix}.$$

Como

$$\Phi(T = 2\pi/\beta) = \Phi(0) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_4 T} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos \beta t & \alpha_1 \cos \beta t & \alpha_3 \sin \beta t & \alpha_4 \sin \beta t \\ -\alpha_1 \sin \beta t & -\alpha_2 \sin \beta t & \alpha_3 \cos \beta t & \alpha_4 \cos \beta t \\ \beta_1 \cos \beta t & \beta_2 \cos \beta t & \beta_3 \sin \beta t & \beta_4 \sin \beta t \\ -\beta_1 \sin \beta t & -\beta_2 \sin \beta t & \beta_3 \cos \beta t & \beta_4 \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & 1 & \\ & & & e^{\lambda_4 t} \end{pmatrix}.$$

Esto implica que los multiplicadores de Floquet son

$$(e^{\lambda_1 T}, e^{\lambda_2 T}, 1, e^{\lambda_4 T}) = (e^{-\rho_0^2 + (\rho_0^4 + 32k_0^2)^{1/2}}, e^{-\rho_0^2 - (\rho_0^4 + 32k_0^2)^{1/2}}, 1, e^{2\rho_0^2}).$$

La firma de Floquet para $x_1^{1,2}$ es entonces $(+, -, 0, +)$ y por lo tanto esas soluciones son inestables.

Se estudió, como en [O.W.], un sistema de dos osciladores, cada uno con ciclo límite, acoplados con acoplamiento lineal. Las ecuaciones son de la forma

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= f(z_1) + \delta D(z_2 - z_1) \\ \dot{z}_2 &= f(z_2) + \delta D(z_1 - z_2),\end{aligned}$$

donde D es una matriz diagonal de la forma

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2(1-2\epsilon) \end{pmatrix}.$$

En [O.W.] se estudió el rango $\epsilon \in [0, 1/2]$. En este trabajo se trató el rango $\epsilon \in (0, 1)$ (nótese que para $\epsilon \in (1/2, 1)$ uno de los elementos de la diagonal es negativo, lo cual no corresponde a casos físicos.)

Se observó que de todas las soluciones que existen cuando $\delta = 0$, las únicas que subsisten cuando el acoplamiento es diferente de cero son por una parte las estacionarias, aquellas en que un oscilador se mueve mientras el otro permanece en reposo, y por otra parte, 2 en que ambos osciladores se mueven: en una lo hacen en fase y en la otra fuera de fase. Para poder demostrar que estas últimas soluciones subsistían se tuvo que introducir un método de reducción, ya que, como se tienen dos multiplicadores de Floquet en 1 no es posible aplicar el Teorema de la Función Implícita (secciones 2.4-2.6).

Las soluciones estacionarias se estudiaron en la sección 2.2, donde se vio que eran inestables y se encontraron todas las posibles bifurcaciones, de Hopf y de estados estacionarios, del $(0,0)$.

Las soluciones en que un oscilador se mueve y el otro no, se estudiaron analíticamente sólo en el caso $\epsilon = 0$; en algunos otros casos se hicieron diagramas de bifurcación con AUTO (véanse las figuras al final de este resumen.)

Se demostró (capítulo 3) que la solución en fase es estable para $\delta > 0$ si $\epsilon \leq 1/2$. La evidencia numérica sugiere que esa solución es inestable siempre que $\delta < 0$, pero sólo se probó analíticamente para ciertos valores de los demás parámetros- sería bueno probarlo para todos.

La solución fuera de fase se comporta de manera interesante y que va un poco contra la intuición (capítulos 4 y 5): cuando el acoplamiento es isotrópico, es decir, la matriz de acoplamiento es un múltiplo de la identidad (lo cual sucede para $\epsilon = 0$), ω_π es inestable para toda $\delta > 0$ y estable para toda $\delta < 0$. Sin embargo, una pequeña anisotropía en el acoplamiento estabiliza a ω_π por un mecanismo de resonancia paramétrica en un subconjunto abierto y bastante complicado del espacio de parámetros (capítulo 5). Este comportamiento es parecido al del péndulo invertido (figura 1)

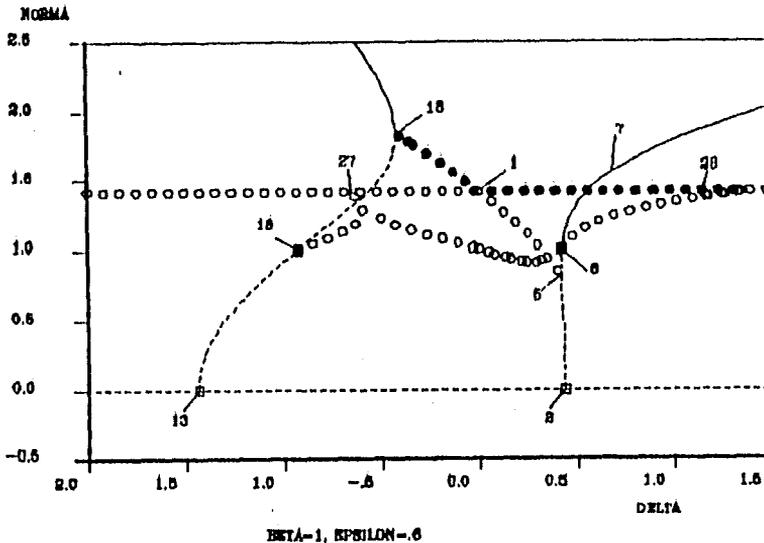
Figura 1

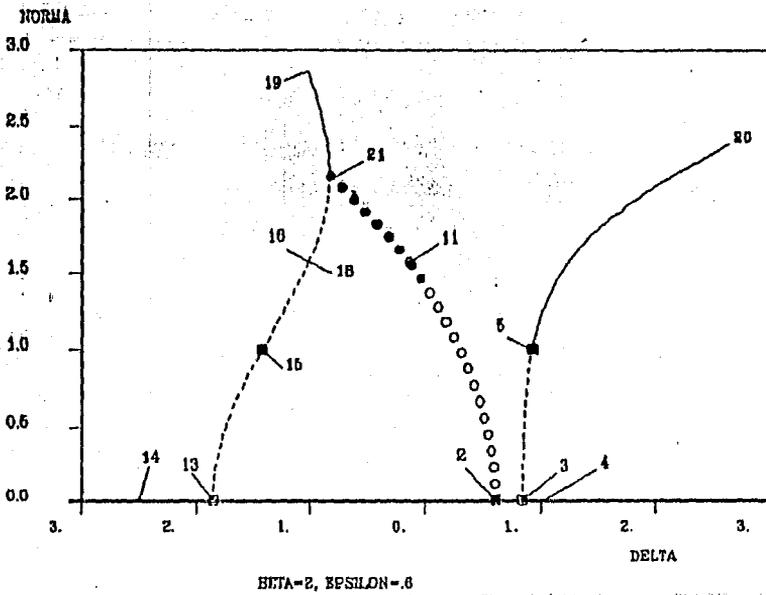
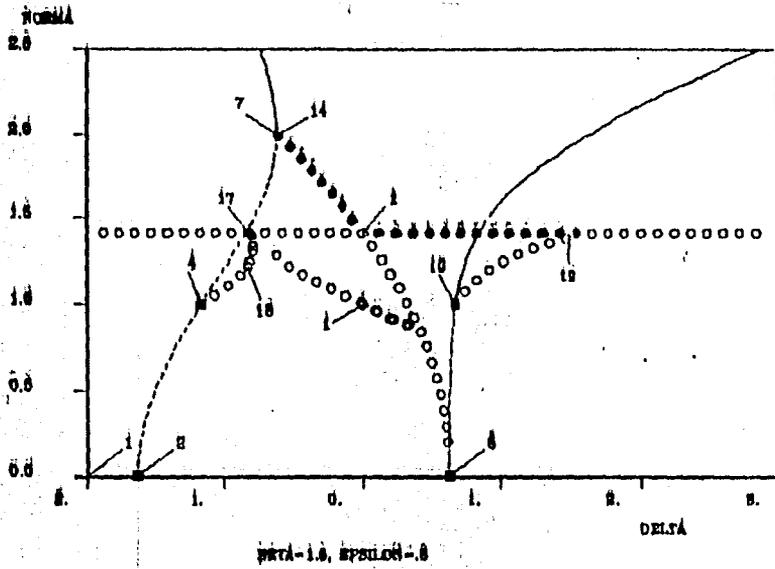
En general el punto $\theta = \pi$ para el péndulo es un punto de equilibrio inestable, pero si se hace vibrar el soporte del péndulo con la frecuencia y amplitud adecuadas, el punto se vuelve estable también por un mecanismo de resonancia paramétrica. En el caso considerado en este trabajo la situación es un poco más complicada porque es toda una órbita la que se estabiliza por la anisotropía del acoplamiento. Hay también casos biológicos en lo que se observa el mismo fenómeno. Algunas colonias de bacterias, si se aíslan del medio ambiente eventualmente desaparecen (aún teniendo suficiente comida), pero si se permite que entren pequeñas perturbaciones del medio la colonia sobrevive.

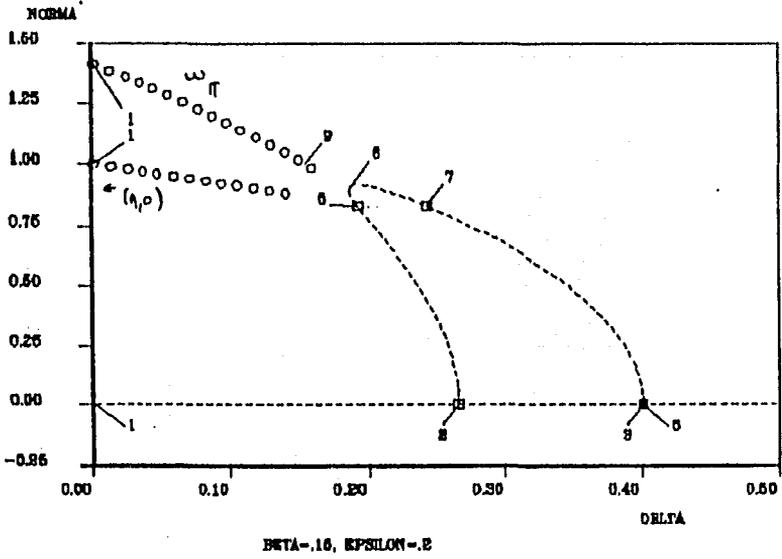
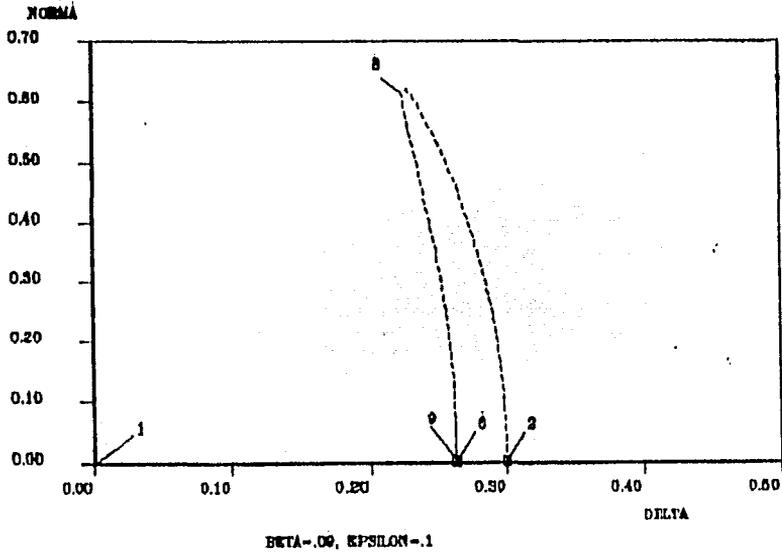
En el caso $\epsilon = 0$ se encontró la misma solución que en [O.W.] pero por un método más corto y además se demostró que la solución encontrada era completa.

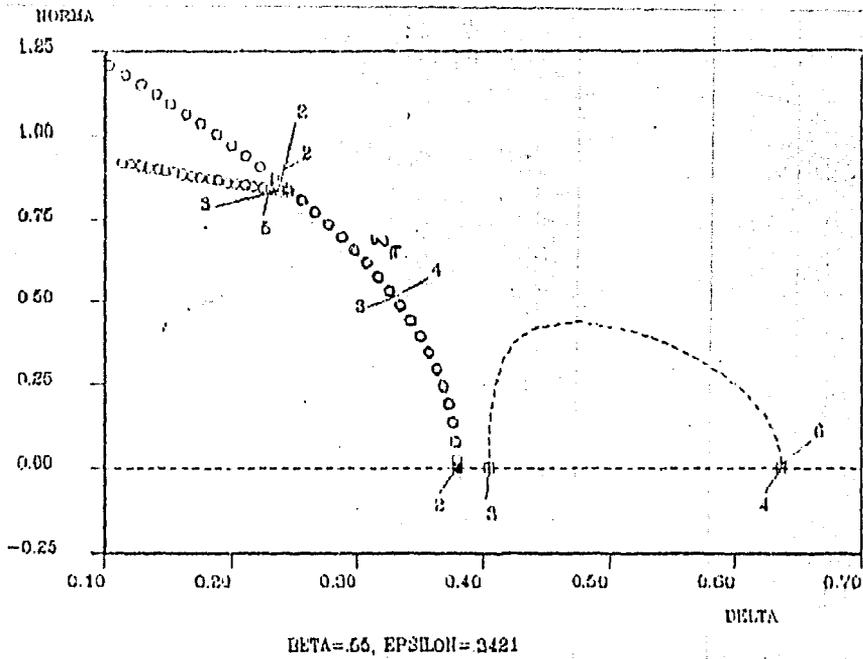
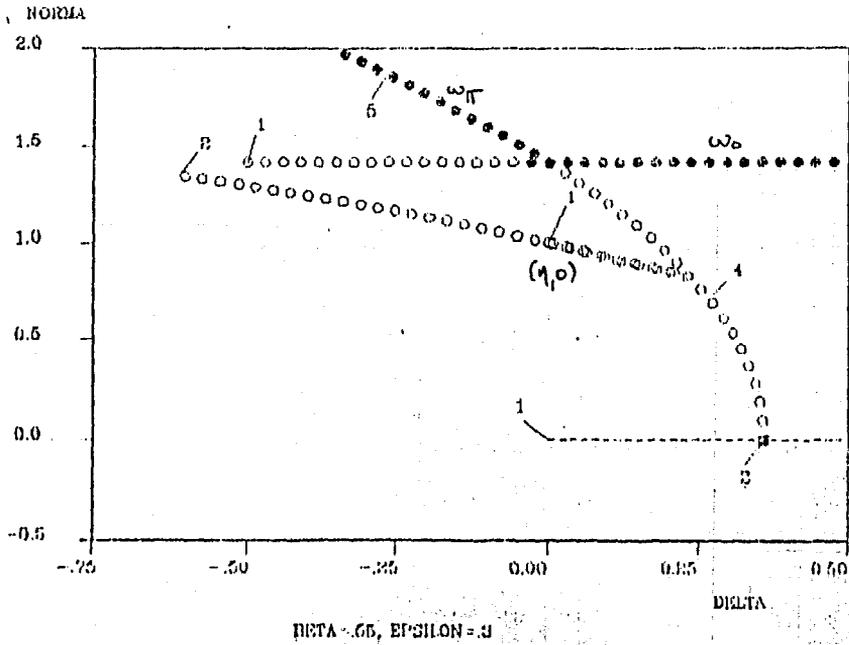
Se agregaron diagramas de bifurcación, algunos al final de este resumen, que a veces plantearon problemas interesantes y ayudaron a visualizar las soluciones.

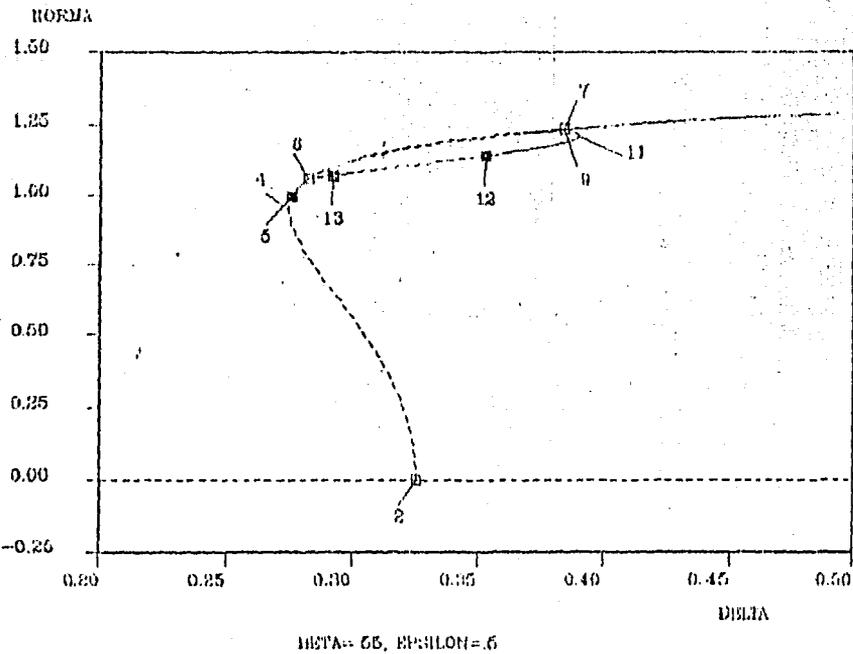
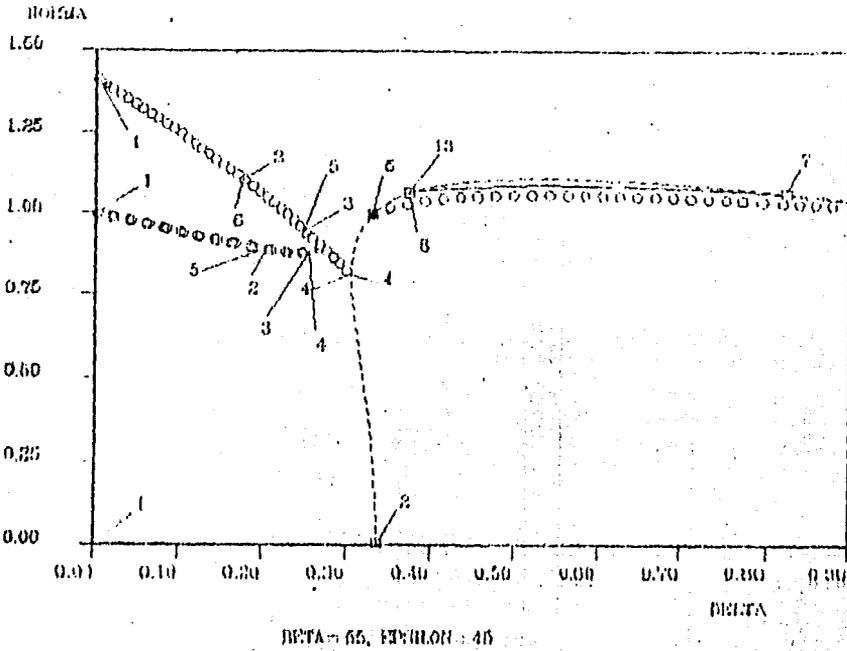
A continuación se muestran algunos diagramas de bifurcación para $\epsilon = .6$, es decir, en el rango $(1/2, 1)$ no estudiado en [O.W.], y algunos para $\epsilon \in (0, 1/2)$, en los que se trata de ver, entre otras cosas, cómo se comportan las soluciones $z_j^{1,2}$ encontradas para $\epsilon = 0$.











APENDICE 1

A1. NUMERO DE ROTACION

En este apéndice se definirá lo que es el número de rotación y se demostrarán algunas de sus propiedades (véase [A].)

Mapeo de Poincaré y Función Angular

Considérese la ecuación

$$\dot{z} = w(z), \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad w(z) = w(z + \pi).$$

Debido a la periodicidad de w , el sistema puede pensarse como un sistema sobre el toro. Si el campo $w(z)$ no tiene puntos críticos y $w_1 \neq 0$, la ecuación se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(x, y),$$

donde $\lambda = w_2/w_1$. Las soluciones de esta ecuación pueden prolongarse indefinidamente porque el segundo miembro es acotado.

El mapeo de Poincaré va del eje y en sí mismo y manda al punto $(0, y_0)$ al valor de la solución que pasa por ese punto en $x = 2\pi$. Puede también verse como un mapeo A de un meridiano del toro en sí mismo que le asocia a un punto el valor de la solución que pasa por él, después de una vuelta. (Figuras A1.1 y A1.2.)

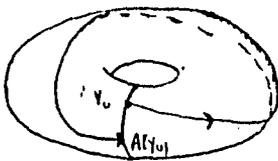


Figura A1.1

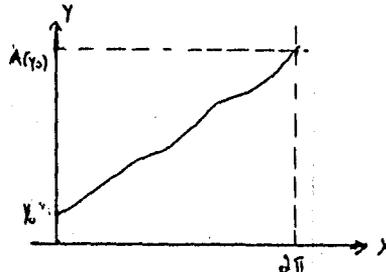


Figura A1.2

El mapeo de Poincaré es periódico $A(y + 2\pi) = A(y) + 2\pi$ y de acuerdo con el teorema de diferenciabilidad de la solución con respecto a las condiciones iniciales, A y A^{-1} son diferenciables.

102 A1. NUMERO DE ROTACION

Usando el mapeo de Poincaré, el estudio de soluciones a ecuaciones sobre el toro se convierte en el estudio de difeomorfismos del círculo en sí mismo. Si el difeomorfismo del círculo tiene un punto fijo, le corresponde sobre el toro una curva integral cerrada y toda curva integral cerrada corresponde a un punto fijo del difeomorfismo o de una potencia de éste.

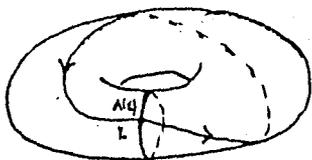


Figura A1.3



Figura A1.4

El mapeo de Poincaré es un difeomorfismo del círculo que preserva la orientación.

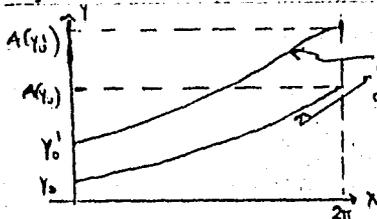


Figura A1.5

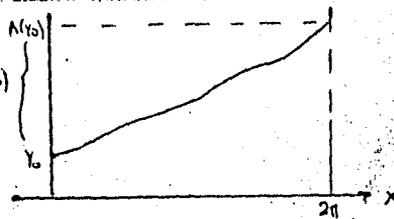


Figura A1.6

y por lo tanto puede escribirse como $A(y) = y + a(y)$, donde $a(y + 2\pi) = a(y)$ y $a^{-1}(y) > -1$. A la función $a(y)$ se le conoce como función angular.

Número de rotación

El número de rotación da la pendiente promedio de las soluciones de ecuaciones sobre el toro. Para el caso sencillo de la ecuación $dy/dx = \lambda$, el número de rotación es λ . Para una ecuación genérica sobre el toro, el número de rotación se define como

$$\mu \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(z)}{z}$$

donde $\phi(z)$ es una solución sobre el plano.

Entre el número de rotación y la función angular se tiene la relación

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(y) + a(Ay) + \dots + A(A^{k-1}y)}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(A^k y) - y}{2k\pi}$$

Esta última definición se aplica a cualquier difeomorfismo del círculo que preserve la orientación.

Teorema

El límite de la definición anterior de número de rotación existe y no depende del punto inicial. Es racional si y sólo si una potencia del difeomorfismo posee un punto fijo (es decir, cuando la ecuación diferencial tiene una trayectoria cerrada.)

Prueba

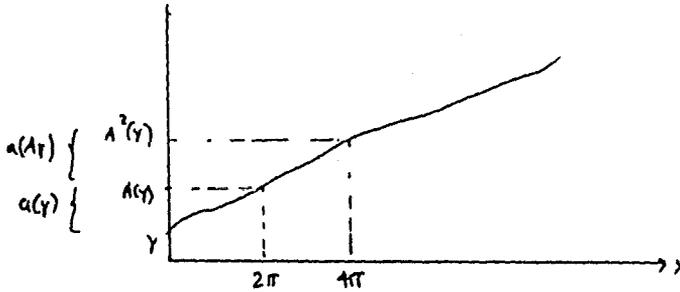


Figura A1.7

Considérese el ángulo que rota el punto al aplicársele la potencia k de un difeomorfismo. Denótese este ángulo por

$$a_k(y) = a(y) + a(Ay) + \dots + a(A^{k-1}y).$$

Se tiene que $|a_k(y_1) - a_k(y_2)| < 2\pi$ para cualesquiera y_1, y_2 ; para $|y_1 - y_2| < 2\pi$ es claro ya que las imágenes de segmentos de longitud 2π bajo las aplicaciones A^k son segmentos de longitud 2π . Pero la función a_k es 2π -periódica y por lo tanto puede modificarse y_2 por un múltiplo entero de 2π de manera que $a_k(y_2)$ no varíe y que la distancia entre y_1 y y_2 se vuelva menor que 2π .

Sea m_k un entero tal que $2\pi m_k \leq a_k(0) < 2\pi(m_k + 1)$. Se verá que para toda y , y para toda ℓ entera,

$$\left| \frac{a_{k\ell}(y)}{2\pi k \ell} - \frac{m_k}{k} \right| < 2/k.$$

En efecto, como

$$\begin{aligned} |a_k(y) - 2\pi m_k| &= |a_k(y) - a_k(0) + a_k(0) - 2\pi m_k| \\ &\leq |a_k(y) - a_k(0)| + |a_k(0) - 2\pi m_k| < 4\pi, \end{aligned}$$

se tiene

$$\left| \frac{a_k(y)}{2\pi k} - \frac{m_k}{k} \right| < 2/k, \quad \forall y.$$

Como $a_{k\ell}(y)/2\pi k \ell$ es la media aritmética de las cantidades $a_k(y_i)/2\pi k$, donde $y_i = A^i y$, $i = 0, \dots, \ell - 1$, se tiene

$$\left| \frac{a_{k\ell}(y)}{2\pi k \ell} - \frac{m_k}{k} \right| < 2/k.$$

Sea σ_k el intervalo $[\frac{m_k-2}{k}, \frac{m_k+2}{k}]$. Se ha mostrado que $a_{k\ell}(y)/2\pi k \ell$ pertenece tanto a σ_k como a σ_ℓ . Se tiene entonces que los intervalos σ_k tienden a cero y se intersectan dos a dos. Se concluye entonces que tienen un punto de intersección único que es el número de rotación. Se ha mostrado entonces que el límite que define al número de rotación existe y no depende del punto inicial.

Supóngase ahora que A^q posee un punto fijo en el círculo. Entonces la imagen de ese punto bajo A^q sobre la recta se desplaza un múltiplo de 2π , digamos $a_q(y) = 2\pi p$. En este caso el número de rotación $\mu = p/q$ es racional. Después de q vueltas se regresa módulo 2π al punto inicial.

Si $\mu = p/q$ entonces si para toda y se tiene que $a_q(y) > 2\pi p$ entonces para alguna $\epsilon > 0$ se tendría $\mu < p/q$. Si $a_q(y) < 2\pi p$ para toda y se concluye de la misma forma que $\mu < p/q$, y por lo tanto $a_q - 2\pi p$ cambia de signo, i.e. $a_q(y) = 2\pi p$ para alguna y , es decir, A^q tiene un punto fijo.

APÉNDICE 2

BIFURCACIÓN DE SOLUCIONES PERIÓDICAS

En este trabajo se han usado varios resultados de bifurcación de soluciones periódicas, sea a partir de una solución estacionaria (bifurcación de Hopf) sea a partir de una solución periódica. En este apéndice se darán pruebas de estos resultados. No se demuestran los casos más generales (que pueden verse en las referencias dadas en la bibliografía) sino aquellos que efectivamente se usan en el trabajo.

A2.1 BIFURCACIÓN DE HOPF

Supóngase que el sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tiene una solución estacionaria conocida $x(\lambda)$, que puede sin pérdida de generalidad tomarse como $x(0) = 0$. Se quieren buscar soluciones periódicas vecinas a esta curva de soluciones estacionarias. Linealizando la ecuación cerca de $x(\lambda)$ se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = A(\lambda)x + g(x, \lambda) \quad (\text{A2.1.1})$$

con $g(x, \lambda) = o(|x|)$ y C^∞ , A lineal.

Como se vio en la sección 2.2, las soluciones periódicas son aquellas que satisfacen

$$(I - e^{A(\lambda)T})x_0 - \int_0^T e^{A(\lambda)(T-s)}g(x(s), \lambda) ds = 0, \quad (\text{A2.1.2})$$

con $x(t) = e^{A(\lambda)t}x_0 + \int_0^t e^{A(\lambda)(t-s)}g(x(s), \lambda) ds$.

En la sección 2.2 se vio que una condición necesaria para que existan soluciones con x_0 vecino a 0 (pero diferente de cero) y λ vecino a cero es que existan un valor propio μ de $A(0) = A_0$ y una $T > 0$ tales que $\mu T = 2k\pi i$.

Supóngase además que se cumplen las siguientes hipótesis (lo cual es cierto en este trabajo):

(1) $\mu(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\beta(\lambda)$ es un valor propio algebraicamente simple de $A(\lambda)$ tal que $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = \beta_0 > 0$, con α, β diferenciables y $\alpha'(0) \neq 0$ para λ cercana a 0.

(2) $A(\lambda)$ no tiene otros valores propios puramente imaginarios para λ cerca de 0 excepto $\mu(\lambda)$ y $\bar{\mu}(\lambda)$ (condición de no resonancia).

Bajo estas hipótesis existe un cambio de coordenadas $P(\lambda)$ tal que $P^{-1}(\lambda)A(\lambda)P(\lambda)$ tiene la forma

$$\Lambda(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) & 0 \\ -\beta(\lambda) & \alpha(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & O(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(\lambda) & 0 \\ 0 & O(\lambda) \end{pmatrix},$$

donde $O(\lambda)$ no tiene valores propios sobre el eje imaginario. Escribiendo $x = P(\lambda)y$ y multiplicando la ecuación (A2.1.1) por $P^{-1}(\lambda)$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \Lambda(\lambda)y + P^{-1}(\lambda)g(P(\lambda)y, \lambda) \\ &= \Lambda(\lambda)y + h(y, \lambda), \end{aligned}$$

donde h tiene las mismas propiedades que g . Tomando $y = (u, v)^T$, $h = (k, l)^T$ la ecuación (A2.1.2) se transforma en

$$\begin{aligned} (I - e^{B(\lambda)T})u_0 - \int_0^T e^{B(\lambda)(T-s)}k(u(s), v(s), \lambda) ds &= 0 \\ (I - e^{O(\lambda)T})v_0 - \int_0^T e^{O(\lambda)(T-s)}l(u(s), v(s), \lambda) ds &= 0 \end{aligned} \tag{A2.1.3}$$

La segunda ecuación es de la forma $F(u_0, v_0, \lambda, T) = 0$, $(u(s)$ y $v(s)$ están dadas en forma única a partir de las variables u_0, v_0, λ resolviendo el problema de valores iniciales y son funciones tan diferenciables de las otras variables como $\Lambda(\lambda)$ y $h(y, \lambda)$.

Además $F(0, 0, \lambda, T) = 0$ y $DF_{v_0}(0, 0, \lambda, T) = I - e^{O(\lambda)T}$, ya que $Dl_v(0, 0, \lambda) = 0$ y $u(s), v(s) = 0$ para $u_0 = 0, v_0 = 0$. Por lo tanto para $T > 0, \lambda$ vecino a $0, I - e^{O(\lambda)T}$ es invertible y el Teorema de la Función Implícita da una única solución $v_0(u_0, \lambda, T)$ de la ecuación (A2.1.3b), con $v_0(0, \lambda, T) = 0, D_{u_0}v_0(0, \lambda, T) = 0$ (porque $l(y) = O(|y|^2)$). Recordando que

$$e^{B(\lambda)T} = e^{\alpha(\lambda)T} \begin{pmatrix} \cos \beta(\lambda)T & \text{sen } \beta(\lambda)T \\ -\text{sen } \beta(\lambda)T & \cos \beta(\lambda)T \end{pmatrix}$$

y tomando u_0 de la forma $(\rho, 0), \rho > 0$, la ecuación (A2.1.3a) puede escribirse como

$$\begin{aligned} 1 - e^{\alpha(\lambda)T} \cos \beta(\lambda)T - q(\rho, \lambda, T)/\rho &= 0 \\ e^{\alpha(\lambda)T} \text{sen } \beta(\lambda)T - r(\rho, \lambda, T)/\rho &= 0, \end{aligned}$$

donde q y r son de orden ρ^2 (debido a la forma de k) y por lo tanto q/ρ y r/ρ son diferenciables para $\rho = 0$. Llamando $G(\rho, \lambda, T)$ a este sistema, se tiene

$$G(0, 0, 2\pi/\beta_0) = 0,$$

$$DG_{(\lambda, T)}(0, 0, 2\pi/\beta_0) = \begin{pmatrix} -\alpha'(0) & 0 \\ \beta'(0)2\pi/\beta_0 & 2\pi/\beta_0 \end{pmatrix}.$$

Como $\alpha'(0) \neq 0$, el Teorema de la Función Implícita permite resolver de manera única esta ecuación como $\lambda(\rho), T(\rho)$ generando soluciones periódicas con período $T(\rho)$, con $T(0) = 2\pi/\beta_0, \lambda(0) = 0$.

Ahora bien, si $u_0 = R_\theta \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}$, R_θ una rotación de ángulo θ , multiplicando (A2.1.3a) por R_θ^{-1} se tiene

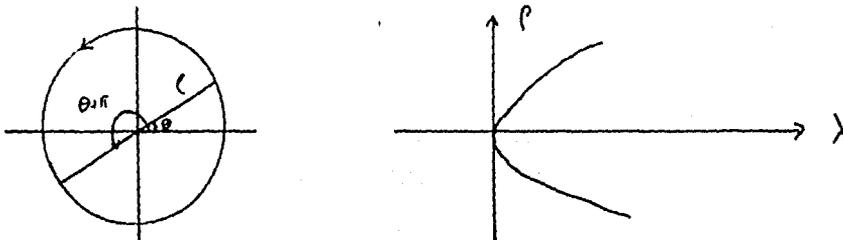
$$(I - e^{R_\theta^{-1}B(\lambda)R_\theta T}) \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix} = R_\theta^{-1} \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} (R_\theta \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda, T) = \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{r} \end{pmatrix} (\rho, \lambda, T).$$

106 BIFURCACIÓN DE SOLUCIONES PERIÓDICAS

Como $R_\theta^{-1}B(\lambda)R_\theta = B(\lambda)$, el mismo argumento de función implícita dará una única solución $\lambda(R_\theta \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix})$, $T(R_\theta \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix})$.

Para ver que se trata de la misma órbita, sea $\rho > 0$ fijo y sea $(u(s), v(s))$ la órbita periódica generada por $(\rho, 0)$. Para s_0 fijo sea $u(s_0) = (\rho(s_0) \cos \theta(s_0), \rho(s_0) \sin \theta(s_0))$ un punto sobre esa órbita. A partir de $u(s_0)$ existe una única órbita periódica (por el argumento anterior), pero como $(u(s), v(s))$ es también periódica y pasa por $(u(s_0), v(s_0))$, entonces la solución periódica generada por $u(s_0)$ es $(u(s), v(s))$. Esto quiere decir que el haber escogido u_0 de la forma $(\rho, 0)$ no viola la unicidad de la órbita.

Nótese que $\lambda(\rho)$, $T(\rho)$ son tan diferenciables como $\mu(\lambda)$, $G(\lambda)$ y $h(y, \lambda)$; en particular son analíticas en caso de que estas funciones lo sean. Además queda claro que $T(\rho)$ es el período mínimo ya que para $T < T(\rho)$, $I - e^{B(\lambda)T}$ es invertible. Finalmente la bifurcación es de un solo lado en términos de λ ya que $-\rho \simeq u(s_0)$ para algún s_0 y por lo tanto $\lambda(-\rho) \simeq \lambda(\rho)$ (figura A2.1.2).



Se ha probado el clásico:

Teorema de Bifurcación de Hopf

Bajo las hipótesis (1) y (2) existe una única familia de soluciones periódicas $(u(\rho, t), v(\rho, t))$ con $u(\rho, 0) = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}$, con período mínimo $T(\rho)$ correspondiente a $\lambda(\rho)$, con una diferenciableidad en ρ igual a la de las hipótesis.

A2.2 BIFURCACIÓN A PARTIR DE UNA FAMILIA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS

Si el sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda) \quad (A2.2.1)$$

tiene una familia de soluciones periódicas $x(\lambda, t)$ con período $T(\lambda)$ (aquí ω_0 y ω_*), se quiere saber si pueden existir otras soluciones periódicas vecinas a esta familia con período vecino. Cambiando t por $tT(0)/T(\lambda)$ se puede suponer que $T(\lambda) \equiv T(0) = T_0$ (esto multiplica a f por el factor $T(\lambda)/T(0)$). Sea $G(\lambda, t, x_0)$ la solución de (A2.2.1) con valor inicial x_0 . Como $x(\lambda, t)$ es una solución válida para todo t (puesto que es periódica), $G(\lambda, t, x_0)$ existe para x_0 cercana a $x(\lambda, t)$ para t tan grande como sea necesario.

Sea $x(t) = x(\lambda, t) + y(t)$, entonces:

$$\frac{dy}{dt} = f(x(\lambda, t) + y, \lambda) - f(x(\lambda, t), \lambda) = Df(x(\lambda, t), \lambda)y + g(y, \lambda, t)$$

A2.2 BIFURCACIÓN A PARTIR DE UNA FAMILIA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS 107

$$\frac{dy}{dt} = A(\lambda, t)y + g(y, \lambda, t) \quad (A2.2.2)$$

con A y g periódicas de período T_0 y $g(y, \lambda, t) = O(|y|^2)$. Sea $\Phi(\lambda, t)$ la matriz fundamental de

$$\frac{dy}{dt} = A(\lambda, t)y$$

con $\Phi(\lambda, 0) = I$.

Recuérdese que los valores propios de $\Phi(\lambda, T_0)$ son los multiplicadores de Floquet y que 1 es siempre uno de ellos ya que derivando la ecuación

$$\frac{dx(\lambda, t)}{dt} = f(x(\lambda, t), \lambda)$$

se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} x(\lambda, t) \right) = A(\lambda, t) \frac{d}{dt} x(\lambda, t)$$

y por lo tanto

$$\frac{d}{dt} x(\lambda, t) = \Phi(\lambda, t) \frac{d}{dt} x(\lambda, 0).$$

Pero como $x(\lambda, t)$ es periódica,

$$\frac{d}{dt} x(\lambda, t) = \frac{d}{dt} x(\lambda, 0)$$

y $(d/dt)x(\lambda, 0)$ es un vector propio de $\Phi(\lambda, T_0)$ asociado a 1. Usando la fórmula de variación de parámetros, la solución al problema de valores iniciales (A2.2.2) es

$$\begin{aligned} y(t) &= \Phi(\lambda, t)y_0 + \Phi(\lambda, t) \int_0^t \Phi^{-1}(\lambda, s)g(y(s), \lambda, s) ds \\ &= z(t) - z(\lambda, t) \\ &= G(\lambda, t, z(\lambda, 0) + y_0) - G(\lambda, t, z(\lambda, 0)). \end{aligned}$$

De estas fórmulas y del hecho de que $g(y(s), \lambda, s) = o(|y(s)|^2)$ se ve que $DG_{z_0}(\lambda, t, z(\lambda, 0)) = \Phi(\lambda, t)$.

Las soluciones periódicas son las que satisfacen $z(T) = z(0)$ (por ser (A2.2.1) autónoma), es decir,

$$y(T) = y(0) - (z(\lambda, T) - z(\lambda, 0))$$

o de otra forma

$$(I - \Phi(\lambda, T))y_0 - \int_0^T \Phi(\lambda, T-s)g(y(s), \lambda, s) ds - (z(\lambda, T) - z(\lambda, 0)) = 0 \quad (A2.2.3)$$

$$F(\lambda, T, y_0) = 0,$$

con $F(\lambda, T_0, 0) = 0$, $D_{y_0} F(\lambda, T_0, 0) = I - \Phi(\lambda, T_0)$. Como $x(\lambda, T_0) = z(\lambda, 0)$, el término

$$z(\lambda, T) - z(\lambda, 0) = \frac{d}{dt}(z(\lambda, T_0))(T - T_0) + O((T - T_0)^2)$$

y

$$D_T F(\lambda, T_0, 0) = -\frac{d}{dt}(z(\lambda, T_0)).$$

Por lo tanto

$$D_{(x, y_0)} F(\lambda, T_0, 0)(\mu, y_0) = (I - \Phi(\lambda, T_0))y_0 - \mu \frac{d}{dt}(z(\lambda, T_0)).$$

Esta aplicación lineal de \mathbb{R}^{n+1} a \mathbb{R}^n tiene a $(0, \frac{d}{dt}(z(\lambda, T_0)))$ en su núcleo. Si se considera el subespacio $E(\lambda)$ de \mathbb{R}^{n+1} generado por un complemento de $\frac{d}{dt}(z(\lambda, T_0)) = f(x(\lambda, T_0), \lambda)$ (por ejemplo dado por $(\xi_1(T_0), \dots, \xi_n(T_0))$ construido en la sección 2.4), entonces $D_{(x, y_0)} F : \mathbb{R} \times E(\lambda) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo si y sólo si 1 es un valor algebraicamente simple de $\Phi(\lambda, T_0)$ (figura A2.2.1).

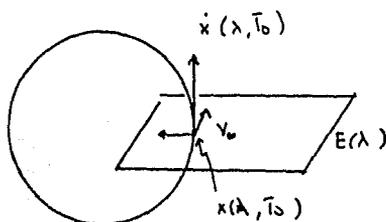


Figura A2.2.1

En efecto, si

$$(I - \Phi(\lambda, T_0))y_0 = \mu \frac{d}{dt}(x(\lambda, T_0)) \tag{A2.2.4}$$

entonces $(I - \Phi(\lambda, T_0))^2 y_0 = 0$, es decir $y_0 \in \ker(I - \Phi(\lambda, T_0))^2 \supset \ker(I - \Phi(\lambda, T_0)) \supseteq \left\{ \frac{d}{dt}(x(\lambda, T_0)) \right\}$. 1 NO es simple si y sólo si una de estas inclusiones es estricta: en ese caso existen μ y y_0 tales que la relación (A2.2.4) se cumple, mientras que si 1 es simple, entonces y_0 es un múltiplo de $\frac{d}{dt}(x(\lambda, T_0))$ y puede tomarse $\mu = 0$. Como la dimensión de $\mathbb{R} \times E(\lambda)$ es n esto implica el isomorfismo.

En el caso en que 1 es un valor propio algebraicamente simple, el Teorema de la Función Implícita permite resolver de manera única (A2.2.3) para $y_0(\lambda)$, $T(\lambda)$. Como $F(\lambda, T_0, 0) = 0$ entonces $y_0(\lambda) = 0$, $T(\lambda) = T_0$ y no hay bifurcación de soluciones periódicas, ya que el mapeo de Poincaré (retorno a $E(\lambda)$ en el tiempo T) no tiene más puntos fijos que $x(\lambda, T_0)$. Por lo tanto una condición necesaria para la bifurcación es que en $\lambda = \lambda_0$, 1 NO sea algebraicamente simple.

Nótese que este argumento puede modificarse para probar la estabilidad de $x(\lambda, t)$ (véase la sección 3.2), en caso de que la órbita sea hiperbólica, es decir, si no hay multiplicadores con norma 1 (excepto 1).

Supóngase ahora que $\det(\Phi(\lambda, T_0) - \nu) = (I - \nu)(a(\lambda) - \nu)Q(\lambda, \nu)$ con $a(\lambda_0) = 1$, $a'(\lambda_0) \neq 0$, $Q(\lambda, 1) \neq 0$, $Q(\lambda, a(\lambda)) \neq 0$, es decir, 1 y $a(\lambda)$ son de multiplicidad algebraica 1 para $\lambda \neq \lambda_0$ y 1 es de multiplicidad algebraica 2 para $\lambda = \lambda_0$.

Teorema 1

Existe una única rama de soluciones periódicas $x(t, \lambda(\beta))$ con período $T(\beta)$, $T(0) = T_0$, $\lambda(0) = \lambda_0$ con $x(t, \lambda_0) = x(t, \lambda_0)$. Nótese primero que este teorema no es el más general en esta área (pero es la versión que se necesita aquí) y se verá que es un caso particular de bifurcación en un parámetro.

Prueba:

$I - \Phi(\lambda_0, T_0)$ tiene a 0 como valor propio de multiplicidad algebraica 2, es decir,

$$\ker(I - \Phi(\lambda_0, T_0)) = \left\{ \frac{d}{dt}(x(\lambda_0, 0)), \xi \right\} \equiv \{ \dot{x}(\lambda_0), \xi \}$$

(multiplicidad geométrica 2), o

$$\ker(I - \Phi(\lambda_0, T_0))^2 = \left\{ \frac{d}{dt}(x(\lambda_0, 0)), \xi \right\}$$

con $(I - \Phi(\lambda_0, T_0))\xi = \dot{x}(\lambda_0)$ (multiplicidad geométrica 1). Nótese que en ambos casos se puede escoger ξ ortogonal a $\dot{x}(\lambda_0)$. Sea $E(\lambda_0) = \{ \xi, \xi_s, \dots, \xi_n \}$, ξ_s, \dots, ξ_n cualquier complemento

A2.2 BIFURCACIÓN A PARTIR DE UNA FAMILIA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS 109

ortogonal, y considérese $F(\lambda, T, y_0) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E(\lambda_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(\lambda, T_0, 0) = 0$, $D_{(T, y_0)} F(\lambda, T_0, 0)(\mu, y_0) = (I - \Phi(\lambda, T_0))y_0 - \mu \frac{d}{dt}(x(\lambda, 0))$. Así que si (μ, y_0) anulan esta expresión para $\lambda \neq \lambda_0$ entonces

$$y_0 \in \ker(I - \Phi(\lambda, T_0))^2 = \ker(I - \Phi(\lambda, T_0))$$

es decir, $\mu \frac{d}{dt}x(\lambda, 0) = 0$, por lo tanto $\mu = 0$, y_0 es proporcional a $\frac{d}{dt}(x(\lambda, 0)) \equiv \dot{x}(\lambda)$. Pero como la proyección de $\frac{d}{dt}x(\lambda, 0)$ sobre $\frac{d}{dt}x(\lambda_0, 0)$ es casi 1 (por continuidad) y la proyección de y_0 sobre este último vector es cero si y_0 está en $E(\lambda_0)$, esto implica que $y_0 = 0$ y el jacobiano es invertible para $\lambda \neq \lambda_0$. Para $\lambda = \lambda_0$ se tiene $y_0 = \alpha \dot{x}(\lambda_0) + \beta \xi$ (α debe ser 0 si y_0 está en $E(\lambda_0)$), y

$$(I - \Phi(\lambda_0, T_0))\beta \xi - \mu \dot{x}(\lambda_0) = 0.$$

En el caso de multiplicidad geométrica 2 se tiene $\mu = 0$ y $(0, \xi)$ es el único vector propio de $D_{(T, y_0)} F(\lambda_0, T_0, 0)$ (en $\mathbb{R} \times E(\lambda_0)$). En el caso de multiplicidad geométrica 1, se tiene $\beta = \mu$ y $(1, \xi)$ genera el núcleo de $D_{(T, y_0)} F(\lambda_0, T_0, 0)$. Ahora, podemos escoger una base de \mathbb{R}^n tal que:

$$\Phi(\lambda_0, T_0) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

con A e $I - A$ invertibles, $\epsilon = 0$ en el primer caso y $\epsilon = 1$ en el segundo, es decir, $\dot{x}(\lambda_0)^T = (1, 0, \dots, 0)$, $\xi^T = (0, 1, 0, \dots, 0)$, escalando la primera variable para que $|\dot{x}(\lambda_0)| = 1$. Entonces

$$\Phi(\lambda, T_0) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & a(\lambda) \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & A(\lambda) \end{pmatrix} + B(\lambda),$$

con $B(\lambda_0) = 0$, $A(\lambda_0) = A$, y $\dot{x}(\lambda) = \dot{x}(\lambda_0) + C(\lambda)$, donde $C(\lambda_0) = 0$, $C(\lambda)^T = (C_1, C_2, C_3)$. Desarrollando en serie de Taylor se obtiene

$$F(\lambda, T, y_0) = F(\lambda, T_0, 0) + (I - \Phi(\lambda, T_0))y_0 - (T - T_0)\dot{x}(\lambda) + O(|y_0|^2 + (T - T_0)^2).$$

Tómese $\mu = T - T_0$, $y_0^T = (0, \beta, z)$, y sean $P(\lambda)$ una matriz tal que $P(\lambda)\dot{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $P(\lambda)y_0 = y_0$,

es decir

$$P^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + C_1 & 0 & 0 \\ C_2 & 1 & 0 \\ C_3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} (1 + C_1)^{-1} & 0 \\ -C_2(1 + C_1)^{-1} & \mathbf{I} \\ -C_3(1 + C_1)^{-1} & \end{pmatrix}.$$

Multiplicando F por $P(\lambda)$ se obtiene:

$$P(\lambda)F = (I - P(\lambda)\Phi(\lambda, T_0)P(\lambda)^{-1})P(\lambda)y_0 - \mu P(\lambda)\dot{x}(\lambda) + P(\lambda)O(|y_0|^2 + \mu^2).$$

La primera columna de $P\Phi P^{-1}$ es esta matrix aplicada a $(1, 0, \dots, 0)^T$. Para las siguientes columnas, como $P(\lambda)y_0 = y_0$, sólo se modifica el primer renglón con términos que valen cero cuando $\lambda = \lambda_0$. Se puede suponer entonces que $\Phi(\lambda, T_0)$ tiene como primera columna $(1, 0, \dots, 0)^T$ y que $C(\lambda) = 0$.

$$\Phi(\lambda, T) = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon + b_1(\lambda) & B_1(\lambda) \\ 0 & a(\lambda) + b_2(\lambda) & B_2(\lambda) \\ 0 & b_3(\lambda) & A(\lambda) + B_3(\lambda) \end{pmatrix},$$

110 BIFURCACIÓN DE SOLUCIONES PERIÓDICAS

$$\begin{aligned}\mu + \epsilon\beta + b_1(\lambda)\beta + B_1(\lambda)z + h_1(\beta, z, \mu, \lambda) &= 0 \\ (a(\lambda) - 1)\beta + b_2(\lambda)\beta + B_2(\lambda)z + h_2(\beta, z, \mu, \lambda) &= 0 \\ (A(\lambda) - I)z + b_3(\lambda)\beta + B_3(\lambda)z + h_3(\beta, z, \mu, \lambda) &= 0,\end{aligned}$$

donde $b_i(\lambda_0) = 0$, $B_i(\lambda_0) = 0$, $C_i(\lambda_0) = 0$, $h_i(\beta, z, \mu, \lambda) = O(\beta^2 + |z|^2 + \mu^2)$. Para la primera y la tercera ecuación, se tiene un jacobiano con respecto a (μ, z) en $(\mu = 0, z = 0, \beta = 0, \lambda = \lambda_0)$ de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A(\lambda_0) - I \end{pmatrix},$$

es decir, una matriz invertible. Por el Teorema de la Función Implícita se pueden resolver estas ecuaciones de manera única como $\mu = \mu(\beta, \lambda)$, $z = z(\beta, \lambda)$. Para $\beta = 0$, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & B_1(\lambda) \\ 0 & A(\lambda) - I + B_3(\lambda) \end{pmatrix}$$

es invertible para λ pequeña, y $h_1(0, z, \mu, \lambda)$, $h_3(0, z, \mu, \lambda)$ son de orden $|z|^2 + |\mu|^2$. Por la unicidad de la solución, se tiene que $\mu(0, \lambda) = 0$, $z(0, \lambda) = 0$ y por lo tanto $z(\beta, \lambda) = \beta O(|\beta| + |\lambda|)$, $\mu(\beta, \lambda) = -\epsilon\beta + \beta O(|\beta| + |\lambda|)$. Dividiendo la segunda ecuación entre β se tiene:

$$a(\lambda) - 1 + b_2(\lambda) + B_3(\lambda)z(\beta, \lambda)/\beta + h_2(\beta, z(\beta, \lambda), \mu(\beta, \lambda), \lambda)/\beta = 0 \quad (A2.2.5)$$

con $z(\beta, \lambda)/\beta = O(|\beta| + |\lambda|)$, $h_2(\beta, z(\beta, \lambda), \mu(\beta, \lambda), \lambda)/\beta = \beta O(|\beta|)$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\det(P(\lambda)\Phi(\lambda, T_0)P(\lambda)^{-1} - \nu I) &= \det(\Phi(\lambda, T_0) - \nu I) \\ &= (1 - \nu)\det(C(\lambda) - \nu I),\end{aligned}$$

con

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) + b_2(\lambda) & B_2(\lambda) \\ b_3(\lambda) & A(\lambda) + B_3(\lambda) \end{pmatrix}.$$

$\det(C(\lambda) - \nu I) = (a(\lambda) - \nu)Q(\lambda, \nu)$ con $Q(\lambda, 1) \neq 0$, $Q(\lambda, a(\lambda)) \neq 0$. En particular

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}(\det(C(\lambda) - \nu I))|_{\lambda_0, \nu=1} &= a'(\lambda_0)Q(\lambda_0, 1) \\ &= \det \begin{pmatrix} a'(\lambda_0) + b_2'(\lambda_0) & 0 \\ b_3'(\lambda_0) & A(\lambda_0) - \nu I \end{pmatrix} + \sum_{j=2}^n \det \begin{pmatrix} 1 - \nu & 0 & B_{1j}'(\lambda_0) & 0 \\ 0 & D(\lambda_0) - \nu & & \end{pmatrix},\end{aligned}$$

donde en la suma se deriva una columna a la vez. Lo anterior es igual a

$$(a'(\lambda_0) + b_2'(\lambda_0))\det(A(\lambda_0) - \nu I) + (1 - \nu)R(\nu)$$

en $\nu = 1$ se tiene $a'(\lambda_0)Q(\lambda_0, 1) = (a'(\lambda_0) + b_2'(\lambda_0))\det(A(\lambda_0) - I)$, es decir $a'(\lambda_0) + b_2'(\lambda_0)$ no se anula si $a'(\lambda_0)$ no lo hace. Regresando a la ecuación (A2.2.5) se ve que su derivada con respecto a λ en λ_0 y $\beta = 0$ es $a'(\lambda_0) + b_2'(\lambda_0) \neq 0$. Por el Teorema de la Función Implícita se obtiene una única solución $\lambda = \lambda(\beta)$, $\mu(\beta) = -\epsilon\beta + \beta O(\beta)$, $z(\beta) = \beta O(\beta)$, y otro único punto fijo del mapeo de Poincaré, generando la solución $x(t, \lambda(\beta))$. En el caso tratado aquí, se vio que para $\epsilon = 0$, la bifurcación a partir de ω_0 y ω_π es de un solo lado con respecto a δ .

Si T_0 no es el período mínimo de la primera familia $x(\lambda, t)$, pero es un múltiplo, por ejemplo $2T_{\min}$, entonces al trabajar cerca de T_0 se consideran dos vueltas del mapeo de Poincaré. Como $\Phi(\lambda, 2T_{\min}) = \Phi(\lambda, T_{\min})^2$ y el espectro de $\Phi(\lambda, T_0)$ es el cuadrado del espectro de $\Phi(\lambda, T_0/2)$, se puede tener la situación en que el valor propio $a(\lambda) = b(\lambda)^2$ es tal que $b(\lambda) < 0$, $b(\lambda_0) = -1$. En

A2.2 BIFURCACIÓN A PARTIR DE UNA FAMILIA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS 111

ese caso si $\Phi(\lambda_0, T_0/2)$ no tiene multiplicadores con valor 1 (excepto el trivial), entonces no hay soluciones periódicas que bifurquen con período vecino a $T_0/2$ (primera parte de esta sección) pero si hay (una única rama) con período vecino a T_0 . Este fenómeno se llama *doblamiento de período*. Para múltiplos más altos de T_{\min} , los posibles valores propios de $\Phi(\lambda, kT_{\min})$ cruzando por 1 serían de multiplicidad más alta, provenientes de complejos conjugados, o repitiendo el caso $k=2$, para los cuales este teorema no se aplica. Sin embargo, usando técnicas más refinadas se puede probar en ciertos casos la bifurcación de un toro de soluciones (no de soluciones periódicas). En este trabajo no se estudiaron analíticamente ni doblamientos de período ni toros de soluciones. Sin embargo, la evidencia numérica reportada en [A.D.O] parece indicar que en el caso $\epsilon = 1/2$ existen estos fenómenos, de hecho hay cascadas de doblamientos de período y probablemente regimenes caóticos.

Este argumento prueba que si $x(\lambda, t)$ es una órbita hiperbólica (sin multiplicadores con módulo 1) y $x(\lambda_0, t)$ tiene un solo multiplicador con valor 1 y ningún otro sobre el círculo unitario, entonces las soluciones periódicas bifurcadas tienen período mínimo $T(\beta)$.

Nótese finalmente que no es difícil modificar este argumento para probar la existencia de una rama de soluciones periódicas en una vecindad de una órbita periódica. Esto se probó de otra manera en la sección 3.2.

BIBLIOGRAFÍA

- [A] V.I. Arnold, *Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires*, Éditions Mir, Moscou, 1980.
- [A1] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [A.D.O.] D.G. Aronson, E.J. Doedel, H.G. Othmer, *An analytical and numerical study of the bifurcations in a system of linearly-coupled oscillators*, *Physica D*, octubre 1986.
- [A.D.O.1] D.G. Aronson, E.J. Doedel, H.G. Othmer, *Bistable Behaviour in Coupled Oscillators*, en *Nonlinear Oscillations in Biology and Chemistry*, (H.G. Othmer, ed.), *Lect. Notes in Biomathematics*, 66 Springer-Verlag, New York (1986). [Bu] L. Bushard, *Periodic solutions and locking-in on the periodic surface*, *Int. J. Nonlinear Mech.*, 8, (1973), 129.
- [C.J] R. Courant, F. John, *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, Limusa, México (1984).
- [C.L.] E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw-Hill, New York (1955).
- [Ch.H.] S-N Chow, J. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [E.H.T.] G.B. Ermentrout, S.P. Hastings, Troy
- [Er] B. Ermentrout, *Loosing Amplitude and Saving Phase*.
- [Fe] N. Fenichel, *Ind. Univ. Math. J.* 21 (1971), 193
- [Ha] J. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley (1969).
- [Iz] J. Ize, *Teoría de Bifurcación*, *Comunicaciones Técnicas*, Serie Verde No. 19, IIMAS, UNAM, 1981.
- [Jo] Fritz John, *Ordinary Differential Equations*, notes. M. Balch, M. Braun. New York, Courant Institute of Math. Science, 1965
- [O.W.] H. Othmer, M. Watanabe, *On the Collapse of the Resonance Structure in a Three-Parameter Family of Coupled Oscillators*.
- [P.M.] Palis, de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Nueva York 1982.
- [S.M.] I. Schreiber, M. Marek. *Strange Attractors in Coupled Oscillators*.

- [Ur] M. Urabe, *Nonlinear Autonomous Oscillations*, Academic Press, New York (1967).
[W] A. Winfree, *The Geometry of Time*, Springer-Verlag, New York (1980).