

01170  
2ej. 4

ESTIMACION DE ESTADO EN SISTEMAS DE POTENCIA

JUAN MANUEL RAMIREZ ARREDONDO

TESIS

Presentada a la División de Estudios de

Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERIA

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener

el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA

( ELECTRICA )

CIUDAD UNIVERSITARIA , a 15 de Agosto de 1988



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

## RESUMEN.

Para poder llevar a cabo estudios de seguridad ó contingencias en sistemas de potencia , y aplicaciones tales como Control de Generación ó Despacho Económico de Carga , es necesario contar con una base de datos confiable que dé información acerca del estado y estructura del sistema. Tal base de datos se obtiene por medio de un Estimador de Estado.

El método de estimación analizado en este trabajo , es un estimador estático basado en el trabajo de Schweppe ( 1970 ).

Además del estimador , se analiza el problema de Observabilidad ; cuyo resultado nos indica si con un conjunto de mediciones dado es posible obtener una solución única para el estimador.

El método de Observabilidad utilizado es el de Monticelli - Wu ( 1985 ).

# INDICE

PAG.

INTRODUCCION .....	1
<b>CAPITULO 1.: ESTIMACION DE ESTADO EN SISTEMAS DE POTENCIA</b>	
Introducción .....	9
Modelo .....	13
Estimación no-lineal por mínimos cuadrados .....	15
Estimador desacoplado .....	18
<b>CAPITULO 2.: FORMACION DE LA MATRIZ JACOBIANA</b>	
Estructura de la matriz jacobiana .....	22
Derivadas parciales de la matriz F .....	24
<b>CAPITULO 3 : DETECCION E IDENTIFICACION DE ERRORES</b>	
Definición del problema .....	31
Identificación estadística .....	32
Identificación de errores .....	39
Hacia una configuración óptima de medidores .....	41
Otro método de detección de errores .....	42
<b>CAPITULO 4 : EL PROBLEMA DE LA OBSERVABILIDAD</b>	
Introducción .....	45
Método de Monticelli - Wu .....	49
Prueba del teorema .....	53
Determinación de estados no-observables .....	56
Algoritmo de colocación de mediciones .....	60
<b>CONCLUSIONES</b> .....	64
<b>RECOMENDACIONES PARA FUTUROS TRABAJOS</b> .....	65

	PAG
BIBLIOGRAFIA .....	65 a
APENDICE I : DERIVACION DE LAS ECUACIONES DE MINIMOS CUADRADOS .....	66
APENDICE II : ENUNCIADOS ESTADISTICOS .....	73
APENDICE III : RENOVACION DE LOS FACTORES TRIANGULARES ...	86
APENDICE IV : CONCEPTOS DE LA OPERACION Y CONTROL DEL SISTEMA INTERCONECTADO MEXICANO ...	91

## INTRODUCCION

## INTRODUCCIÓN<sup>(1), (2)</sup>

La estimación de estado es el núcleo del análisis de seguridad en-línea de la red. Otros problemas relacionados con la estimación de estado incluyen, Análisis de la Observabilidad de la red, Identificación de datos falsos, y el Modelado de la red. En el presente trabajo se ha incluido el método de estimación más robusto, por considerar que si se conoce bien éste, será más fácil conocer algún otro. De igual modo, se trata con un método específico de observabilidad, porque arroja buenos resultados y su programación es relativamente fácil.

Se penso que el trabajo sirva como una fuente a toda persona interesada en el tema. Nunca se penso en crear un método de estimación original, ni en crear un programa para producción.

### Análisis de seguridad y control

Hay tres elementos básicos del análisis de seguridad y control, a saber : Monitoreo, Estimación, y Control. Esto se enlaza en el siguiente marco:

1. Monitoreo. Usando mediciones en tiempo real, identificar si el sistema opera normal o no. Si el sistema está en una emergencia, va al paso 4. Si se ha perdido carga, va al paso 5.
2. Estimación. Si el sistema se encuentra normal, determinar si es seguro o no, con respecto al conjunto de "siguientes contingencias".
3. Control Preventivo. Si es inseguro, esto es, hay al menos una contingencia que puede causar una emergencia, determinar qué acción correctiva deberá tomarse para hacer seguro el sistema.
4. Control de Emergencia. Ejecutar acciones correctivas propias, para hacer que el sistema llegue a la normalidad.
5. Control Restaurativo. Reestablecer el servicio a las cargas del



sistema.

El análisis de seguridad y control ha sido implementado como un paquete de software en los centros de control modernos. Las mayores componentes del análisis de seguridad en tiempo real se muestran en la *fig. 1*. La parte de monitoreo empieza desde las mediciones en tiempo real, de las cantidades físicas del sistema de potencia tales como, flujos de potencia en líneas, inyecciones de potencia, magnitudes de voltaje, así como el status de switches e interruptores. Los datos medidos en el lugar, son mandados a la computadora del centro de control. Datos falsos notorios son rechazados, al filtrar los datos transmitidos a través de un chequeo simple de su razonabilidad y consistencia. Primero, los datos son sistemáticamente procesados para determinar la configuración del sistema, o "*topología de la red*". Luego, los datos disponibles son procesados para obtener una estimación de las variables de estado del sistema (*magnitudes de voltaje y ángulos de fase*).

Antes de la estimación de estado, a uno le gustaría saber (i) si es posible la estimación de estado (*si la red es observable*), (ii) si no, para qué parte del sistema, es todavía posible la estimación. A uno le gustaría también saber si hay algún dato falso presente, y si es así, cuál es el malo, y descartarlo. El análisis de observabilidad y la detección e identificación de datos falsos, son parte de la estimación de estado.

Para fijar si un estado de operación es seguro o no, se necesita un conjunto de contingencias. La selección de contingencias emplea un esquema adaptativo para seleccionar un conjunto de disturbios importantes y posibles. La estimación de la seguridad, corrientemente involucra un análisis de flujos de carga.

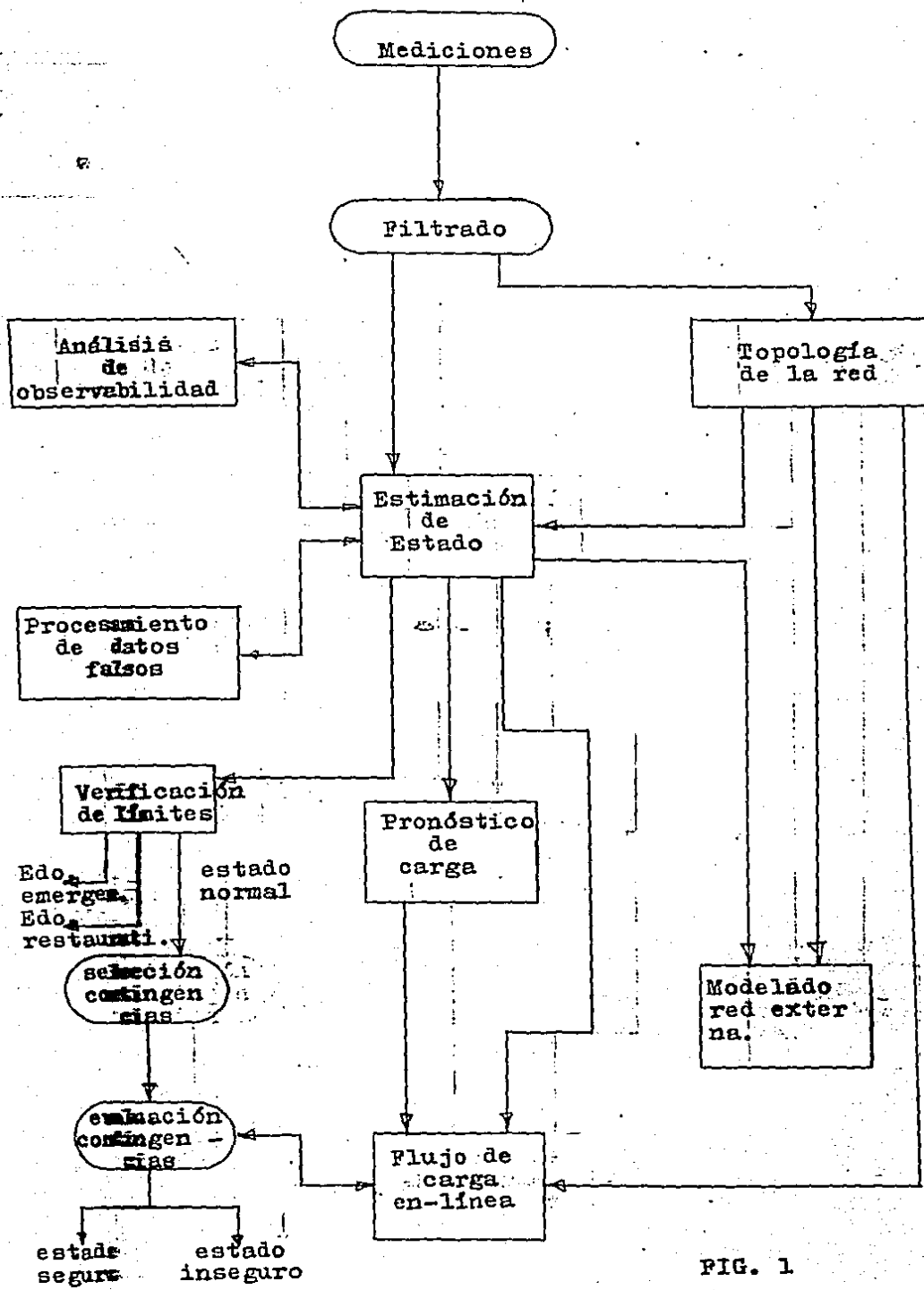


FIG. 1

en estado estable; las restricciones de estabilidad, se expresan en términos de los límites sobre los flujos de línea. Por lo tanto, para estimar la respuesta del sistema a las contingencias, se lleva a cabo la *evaluación de contingencias*, usando el *flujo de carga en-línea*.

El objetivo del presente trabajo, está enfocado hacia los problemas de observabilidad, estimación de estado, y la detección e identificación de errores.

### Observabilidad

Si el conjunto de mediciones, es suficiente en número y bien distribuido geográficamente, la estimación de estado dará un estimado del sistema ( esto es, *las ecuaciones de estimación de estado tienen solución* ). Por lo tanto, al diseñar, surgen las siguientes cuestiones, respecto al conjunto de mediciones:

- a. Son suficientes las mediciones, para hacer posible la estimación de estado ?
- b. Si no, dónde deberían de colocarse medidores adicionales, de modo que la estimación de estado sea posible?

Si el conjunto de mediciones es suficiente para hacer posible la estimación de estado, decimos que *la red es observable* . La observabilidad depende del número de mediciones disponibles, y de su distribución geográfica. La primera cuestión surgida aquí, se relaciona con la *prueba de observabilidad*. La segunda cuestión, es la *colocación de medidores para la observabilidad*.

Un sistema se diseña para ser observable, en la mayoría de las condiciones de operación. Puede ocurrir una inobservabilidad temporal, debido a cambios anticipados de la topología de la red, o a fallas en los sistemas de telecomunicación.

El análisis de observabilidad, que incluye la prueba de

observabilidad, identificación de islas observables y colocación de mediciones, deberá desarrollarse antes de la estimación de estado.

### Estimación de estado

Hay tres tipos de mediciones en el sistema : (i) Las mediciones analógicas, que incluyen flujos de potencia real y reactiva, en las líneas de transmisión; inyecciones de potencia real y reactiva en los buses ( generación o demanda ), magnitudes de voltajes de bus, y flujos de corriente de línea; (ii) Las mediciones lógicas, que consisten de los status de switches e interruptores; (iii) Las pseudomediciones, que pueden incluir pronósticos de cargas y generaciones.

Las mediciones analógicas y lógicas, son enviadas al centro de control. En los datos puede haber errores y ruido. Las fuentes de error incluyen : fallas en los equipos de medición, o telemedición; errores en la instrumentación de medición; ruido en el sistema de comunicación; retardo en la transmisión de datos.

La estimación de estado es un procedimiento matemático, para calcular el mejor estimado de las variables de estado del sistema de potencia, basado en los datos con "ruido". Una vez que las variables de estado se han estimado, otras cantidades, por ejemplo flujo en líneas, pueden obtenerse rápidamente.

El módulo topología de la red , procesa las mediciones lógicas para determinar la configuración de la red.

El estimador de estado, usa el conjunto de mediciones analógicas, junto con la configuración de la red, parámetros de red ( como impedancia de líneas ), y quizá algunas pseudomediciones, para hacer su estimación.

Dejemos que  $z$  denote el conjunto de mediciones;  $x$  el vector

de variables de estado;  $h$  la relación matemática entre las variables de estado y las variables medidas; y  $w$ , el vector de error de las mediciones. Tenemos

$$z = h(x) + w \quad (a)$$

La estimación del vector de estado  $x$ , se obtiene por medio de la minimización de la función de mínimos ponderados (apéndice A):

$$J(x) = [z - h(x)]^T W [z - h(x)] \quad (b)$$

donde,  $W$  es una matriz diagonal, cuyos elementos son los factores de ponderación de las mediciones. Los errores de medición, se consideran variables aleatorias con media cero. La varianza del error proporciona una indicación de la exactitud de la medición. Grandes varianzas indican que la medición correspondiente es menos exacta.

Generalmente, hay tres enfoques para resolver (b):

A. Enfoque de ecuación normal.

Este es el método de solución para estimación de estado que ha ganado amplia aceptación. La estimación se resuelve por medio de un esquema iterativo, que calcula las correcciones  $\Delta x$  en cada iteración al resolver

$$G(x) \Delta x = H^T(x) W \Delta z \quad (c)$$

donde

$$\Delta z = z - h(x) \quad (d)$$

$$H(x) = \frac{\partial h}{\partial x} = \text{Matriz jacobiana} \quad (e)$$

$$G(x) = H^T(x) W H(x) = \text{Matriz de ganancia} \quad (f)$$

$x = x^k$ , en la  $k$ -ésima iteración.

Las ecuaciones (c), son de hecho, las así llamadas "ecuaciones normales" del problema de mínimos cuadrados ponderados.

Las ecuaciones normales (c), son resueltas al desarrollar primero la factorización triangular de la matriz de ganancia:

$$G = U^T U \quad (g)$$

La factorización se lleva a cabo normalmente por el método de Cholesky.

Básicamente, hay tres variaciones en el enfoque de ecuaciones normales, para la estimación de estado WLS :

1. Método ~~LS~~ básico. Las ecuaciones normales son resueltas honestamente en cada iteración, lo que significa que, ya que la matriz jacobiana H y la matriz de ganancia G son funciones de  $x^k$  en cada iteración, H y G son formadas y factorizadas en cada iteración.

2. Método G constante. La misma H se usa por varias iteraciones, antes de recalcularse.

3. Método desacoplado. Después de dividir las mediciones de potencia real y reactiva, se usa una H constante para las ecuaciones normales en todas las iteraciones.

B. Enfoque de transformación ortogonal.<sup>[19]</sup>

Se ha observado en la práctica y reportado en la literatura, que las ecuaciones normales pueden llegar a "mal-condicionarse".

Un enfoque alternativo para la estimación de estado, basado en transformaciones ortogonales se ha propuesto; es numéricamente más estable al resolver el problema WLS. El método está basado en la factorización de la matriz jacobiana H, por medio de transformación ortogonal (Householder o Givens).

De manera similar al enfoque de ecuaciones normales, hay tres métodos de implementación: básico, G constante, y desacoplado. Aunque mejora la robustez de la estimación de estado, el enfoque de transformación ortogonal puede presentar una muy seria pérdida

de dispersidad.

### C. Enfoque híbrido.

Los métodos de transformación ortogonal para estimación de estado, han mejorado el comportamiento numérico, pero generalmente su dispersidad sufre cuando la redundancia de medición es alta. Se ha propuesto un enfoque híbrido, que tiene la robustez numérica de los métodos ortogonales, y al mismo tiempo retiene la dispersidad de las ecuaciones normales. El método híbrido resuelve iterativamente las ecuaciones normales, donde la factorización triangular se lleva a cabo usando transformaciones ortogonales. Nuevamente, el método híbrido puede implementarse en tres versiones : básico, G constante, y desacoplado.

### Detección e Identificación de datos falsos

Implicitamente se ha asumido en la formulación del problema, que los errores son pequeños. Ocasionalmente ocurren grandes errores, debido a falla de medidores u otras razones. Es muy importante (i) detectar la presencia de tales datos, (ii) identificar cuáles mediciones son falsas, y (iii) remover todos los datos falsos, de modo que no corrompan los resultados de la estimación de estado. Uno de los mayores beneficios de la estimación de estado, ha sido la identificación de datos falsos en el sistema.

Intuitivamente, si hay datos falsos presentes o errores estructurales, los residuos  $r_i = z_i - h_i(x)$  o el error WLS (  $J(x)$  ), será grande. Esto sugiere una manera de detectar datos falsos. Puede usarse un análisis de técnicas estadísticas de prueba de hipótesis, para determinar si el error es muy grande. Se ha mostrado que para uno solo, o múltiples datos falsos, el residual normalizado más grande, corresponde a la medición falsa.

Este hecho ha sido usado como una base para un algoritmo de identificación de datos falsos, esto es :

Paso 1. Seleccionar la medición con el residual normalizado más grande.

Paso 2. Remover la medición.

Paso 3. Estimación de estado.

Paso 4. Detección de datos falsos. Si existen, ir a 1.

Se requiere una prueba de observabilidad, para asegurar que al remover la medición sospechosa, no se haga la red inobservable.

Hasta aquí he presentado un panorama del campo en el que se mueve el problema de la estimación de estado. En los siguientes capítulos se presenta cada uno de los tópicos con más detalle.



## INTRODUCCION<sup>(a)</sup>

La influencia de la teoría de control moderna en la operación de los sistemas de potencia, ha crecido rápidamente durante los últimos años, esto debido a:

a. La expansión que han tenido los sistemas de potencia, requieren más y más esquemas de monitoreo y control, para ayudar a mantenerlo en un modo de operación seguro y eficiente.

b. La instalación de grandes computadoras, permiten la implementación de esquemas de control avanzado en tiempo real.

La disponibilidad de un sistema de datos confiable, es un paso necesario para la satisfacción de estas ayudas. El conocimiento completo de la situación pasada y presente del sistema, es un prerequisite indispensable para el operador y la computadora; esto, para garantizar una distribución y generación de energía eléctrica económica y confiable.

Debido a la incertidumbre inherente de las mediciones, el sistema de datos no puede ser suficientemente confiable para uso inmediato. Por lo tanto, se requiere procesar los datos usando una computadora digital, para presentar al operador sólo aquella información que es relevante para el problema que debe resolver en cada instante de tiempo. El objeto de este trabajo es discutir el problema del procesamiento de datos en el sistema de potencia.

La teoría de control moderna tiene dos características principales:

a. El enfoque de variables de estado; donde el número mínimo de variables se selecciona para describir completamente al sistema.

b. Modelar matemáticamente las incertidumbres internas y externas del sistema.

La figura 2, sirve como una ilustración de los problemas

resueltos por la teoría de control moderna. El sistema físico, es modelado junto a su medio ambiente. Las variables de estado del sistema  $x$ , son afectadas por disturbios aleatorios  $w$ . En general, las variables de estado  $x$ , no son todas directamente accesibles. El sistema de medición, sólo produce una selección de las cantidades requeridas para describir el estado del sistema. Además, las mediciones  $z$  están contaminadas por errores de observación  $v$ . Así, las cantidades  $z$ , pueden ser insatisfactorias para fijar el desarrollo del sistema.

Desde el punto de vista de ingeniería de control, hay dos problemas básicos por resolver:

1. La teoría de estimación proporciona los antecedentes, para determinar un estimado  $\hat{x}$  del estado del sistema  $x$ .
2. La teoría de control, trata con el problema de calcular las variables control  $u$ , de modo que el sistema se comporte de una manera prescrita.

De acuerdo a la fig. 2, el estimador produce un valor aproximado  $\hat{x}$  del estado del sistema  $x$ , usando observaciones "ruidosas"  $z$  como variables de entrada.

*Definición:* Un estimador de estado estático, es un algoritmo de procesamiento de datos, que transforma las lecturas medidas en el tiempo presente y otras informaciones, en un estimado del estado del sistema  $\hat{x}$  vector de estado estático en el tiempo presente.

Por supuesto, se desarrollan a menudo cálculos de flujos de carga para obtener el estado del sistema. La principal diferencia entre cálculos de flujos de carga y los métodos de estimación de estado, se muestran en la fig. 3.

Los cálculos de flujos de carga dependen de la suposición de que los datos de entrada ( esto es, las  $n$  inyecciones de buses ) son

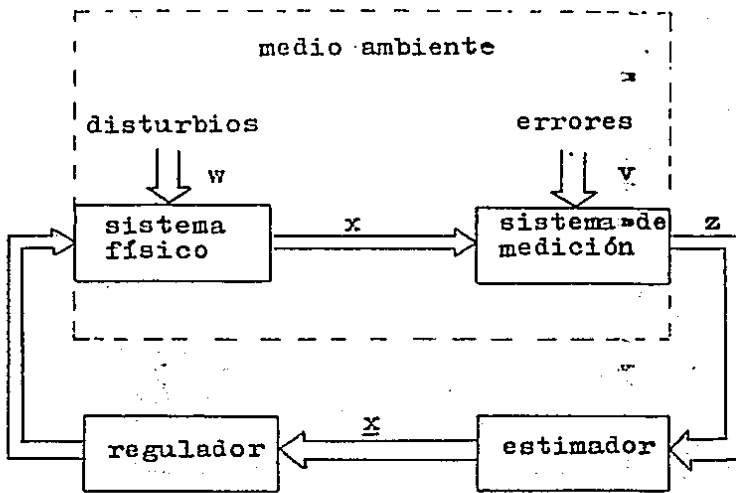


Fig. 2

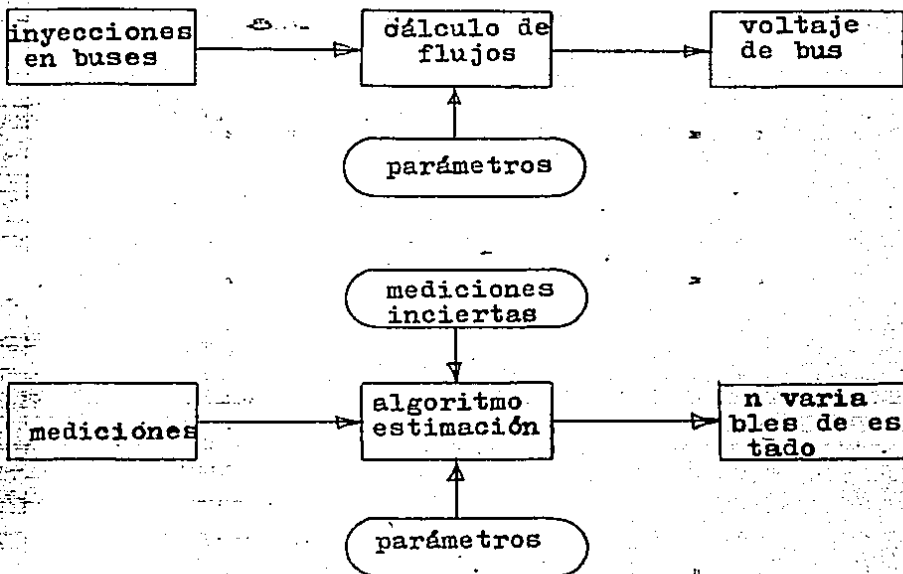


Fig. 3

sin errores de observación. También, el número de cantidades dadas es igual al número de voltajes de bus desconocidos. Por otro lado, la teoría de estimación toma en cuenta los errores de observación. Para obtener una mejor solución, los datos de entrada deberían contener redundancia, esto es, el número de datos de entrada  $m$ , debería ser mayor que el número de incógnitas  $n$ . La salida  $\hat{x}$  del estimador, da información completa acerca del estado del sistema.

La operación del sistema de potencia depende de muchos sistemas de control diferentes (p. ej. gobernadores de turbina, reguladores de voltaje, controles de caldera, control carga-frecuencia, despacho económico). Las técnicas de estimación de estado involucran los mismos conceptos fundamentales, pero con ecuaciones diferentes, que pueden aplicarse para estimar variables y parámetros de cada uno de esos sistemas de control. En este estudio, la estimación de estado se limita para servir a las funciones de control asociadas con la operación del sistema, bajo condiciones de estado estable o variaciones lentas. El modelo matemático correspondiente está representado por las bien conocidas ecuaciones de red. Las variables de interés son:

- 1) Las inyecciones  $P$  y  $Q$ , de potencia real y reactiva en los nodos.
- 2) Las magnitudes de voltaje y ángulos de fase  $V$  y  $\theta$  en los nodos.
- 3) Los flujos  $P_{ij}$  y  $Q_{ij}$ , de potencia real y reactiva en los ramales.

Aquí, las variables de estado son  $V$  y  $\theta$ . Una vez conocidas, todas las otras variables eléctricas de la red pueden calcularse directamente.

Las mediciones y pseudomediciones, podían consistir de cualquiera

sin errores de observación. También, el número de cantidades dadas es igual al número de voltajes de bus desconocidos. Por otro lado, la teoría de estimación toma en cuenta los errores de observación. Para obtener una mejor solución, los datos de entrada deberían contener *redundancia*, esto es, el número de datos de entrada  $m$ , debería ser mayor que el número de incógnitas  $n$ . La salida  $\hat{y}$  del estimador, da información completa acerca del estado del sistema.

La operación del sistema de potencia depende de muchos sistemas de control diferentes (p. ej. gobernadores de turbinas, reguladores de voltaje, controles de caldera, control carga-frecuencia, despacho económico). Las técnicas de estimación de estado involucran los mismos conceptos fundamentales, pero con ecuaciones diferenciales, que pueden aplicarse para estimar variables y parámetros de cada uno de esos sistemas de control. En este estudio, la estimación de estado se limita para servir a las funciones de control asociadas con la operación del sistema, bajo condiciones de estado estable o variaciones lentas. El modelo matemático correspondiente está representado por las bien conocidas ecuaciones de red. Las variables de interés son:

- 1) Las inyecciones  $P$  y  $Q$ , de potencia real y reactiva en los nodos.
- 2) las magnitudes de voltaje y ángulos de fase  $V$  y  $\theta$  en los nodos.
- 3) Los flujos  $P_{ij}$  y  $Q_{ij}$ , de potencia real y reactiva en los ramales.

Aquí, las variables de estado son  $V$  y  $\theta$ . Una vez conocidas, todas las otras variables eléctricas de la red pueden calcularse directamente.

Las mediciones y pseudomediciones, podían consistir de cualquiera

de las variables, pero en la práctica, son predominantemente del tipo  $P$ ,  $Q$ , y  $P_{ij}$ .

La figura (a) 4, ilustra las entradas y salidas del estimador de estado, donde :

$z$  = mediciones con " ruido "

$z^*$  = mediciones sin ruido, como podrían obtenerse de un sensor perfecto.

$w$  = ruido por telemedición.

$\hat{x}$  = estado estimado, consistiendo de magnitud de voltaje y ángulo de fase en cada nodo.

$\hat{z}$  = medición procesada; si la redundancia proporcionada es suficiente, ocurre un efecto de filtrado y el error de  $\hat{z}$  es menor que el de  $z$ .

$z - \hat{z}$  = residual o diferencia entre la medición real y estimada; el residual se usa para detectar anomalías.

$R$  = matriz de covarianza del ruido; el elemento diagonal  $R_{ii}$  es el error promedio de la componente  $w_i$ .

La salida del estimador de estado constituye una base de datos, de la cual se llevan a cabo las funciones del centro de control. Esta base de datos es óptima en el sentido de que toda la información disponible ya fué procesada, como para proporcionar una estimación más exacta del estado del sistema.

Un sistema de  $N$  nodos, tiene  $2N - 1$  variables de estado, apareciendo en las  $2N$  ecuaciones de flujo, a saber,  $N - 1$  ángulos  $\theta$ , y  $N$  voltajes  $V$ . Esas  $2N - 1$  variables de estado pueden calcularse de  $2N - 1$  variables medidas, a saber,  $N - 1$  inyecciones  $P$ , y  $N$  inyecciones  $Q$ . En adición, hay numerosas variables que también se miden, por ejemplo, flujos  $P_{ij}$  y  $Q_{ij}$ . Cuando se miden solo  $2N - 1$  variables; el estimador de estado se

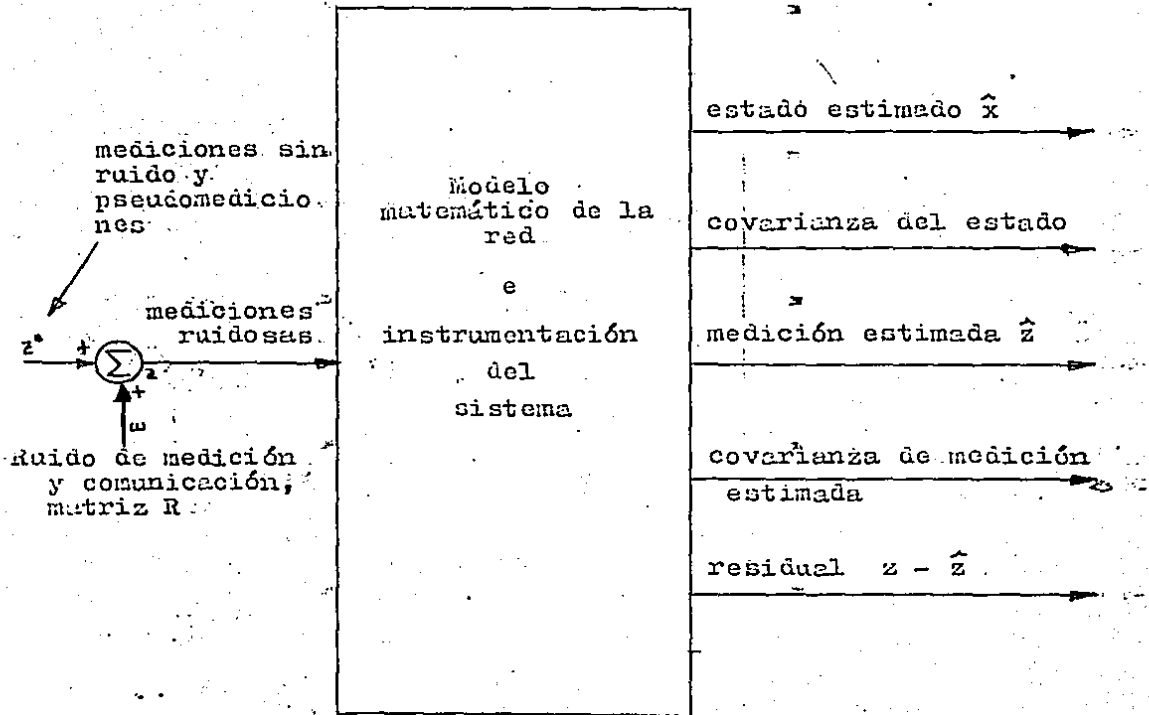


Fig. 4

Entradas y salidas del estimador de estado

reduce a un flujo de carga en tiempo real, excepto por el cálculo de la covarianza. Cuando se miden más de  $2N - 1$  variables, la redundancia permite un filtrado del ruido de las mediciones, esto es, una reducción en el error de estimación.

Ya que el número de mediciones realmente mandadas al centro de control será probablemente menor que  $2N - 1$ , en grandes sistemas, se usa mucho la pseudomedición, esto es:

1) Voltajes conocidos; 2) generación conocida; 3) carga pronosticada.

### MODELO<sup>(7)</sup>

El modelo estructural estático está dado por la matriz de admitancia  $Y$ , que incluye sólo los elementos importantes del sistema. Todas las mediciones son modeladas como:

$$z = f(x_{true}) + \varepsilon \quad (1)$$

donde,  $x$  es el estado del modelo estructural estático;  $f(x)$ , se determina por las leyes de Kirchoff y la matriz de admitancia  $Y$ ;  $\varepsilon$ , es el error y se modela como un vector aleatorio con media cero y  $E(\varepsilon \varepsilon^t) = \sigma$ .

En lo que sigue, el modelo se asume perfecto ( $Y$ ,  $f(x)$ ,  $\varepsilon$ ). Obviamente, el modelo en sí mismo a menudo es erróneo: no todos los elementos de la red se incluyen al calcular  $Y$ , Si por ejemplo, se pierde inesperadamente una línea,  $Y$ , y por lo tanto,  $f(x)$ , serán erróneas; las admitancias reales de las líneas no se conocen perfectamente; puede haber errores de modelado por datos falsos, resultado de fallas de medidores, comunicación, o al entrar a la computadora. Los datos falsos se ven como un error en el modelado de  $\sigma$ , ya que son mediciones con errores mucho más grandes que los asumidos al modelar  $\varepsilon$ .

Los errores de modelado se manejan por medio de la detección e

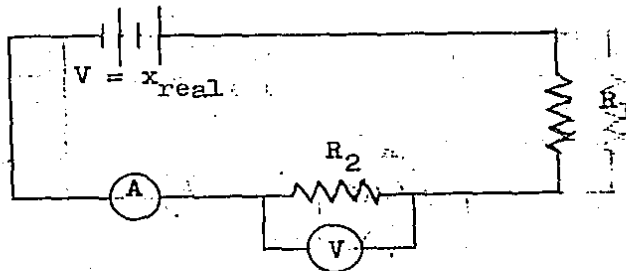


Identificación: la detección se relaciona con reconocer la existencia de errores de modelado, mientras la identificación se relaciona con localizar el error.

Ejemplo

Determinar el voltaje de la batería, dadas las mediciones de corriente y voltaje, así como los valores de los resistores indicados en la Fig. 5.

Fig. 5



El modelo que relaciona las distintas cantidades es:

$$Z_{\text{medidor}} = Z_{\text{ideal}} + \epsilon_{\text{medidor}} \quad (a)$$

$$Z_{\text{ideal}} = f(x_{\text{real}}) \quad (b)$$

$x$ , es el voltaje  $V$  de la batería.

La función  $f$ , que relaciona  $Z$  y  $x$  de acuerdo a la ley de Ohm es, para el amperímetro

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

$$Z_1 = f_1(x) = \frac{x}{R_1 + R_2} \quad (c)$$

Para el voltaje:

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V$$

$$z_2 = f_2(x) = \frac{R_2 x}{R_2 + R_1} \quad (d)$$

Las funciones (c) y (d) son lineales y, por lo tanto, fáciles de manejar. Se considera que los errores son variables aleatorias independientes, con media cero y varianzas  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

La función J(x), será

$$J(x) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\sigma_k} (z_k - f_k(x))^2 \quad (e)$$

Diferenciando con respecto a x, e igualando a cero, resulta el mejor estimado  $\hat{x}$ :

$$\hat{x} = \frac{\frac{R_1 + R_2}{\frac{1}{\sigma_1} + \frac{R_2^2}{\sigma_2}} \left[ \frac{z_1}{\sigma_1} + \frac{R_2 z_2}{\sigma_2} \right]}{\quad} \quad (f)$$

La ecuación (f), es una fórmula directa para la estimación de mínimos cuadrados de x, a partir de las mediciones  $z_1$  y  $z_2$ , los parámetros  $R_1$  y  $R_2$ , y las varianzas  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

Obsérvese que los pesos relativos dados a las mediciones, dependen inversamente de las varianzas de los errores y de los parámetros del circuito. (V. apéndice A)

#### Estimación no lineal de mínimos cuadrados (6)

Sean las varianzas de errores, elementos de una matriz R tal que:

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & & & \\ & r_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & r_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

La ecuación (e), se puede escribir como

$$J(x) = (z - f(x))^T R^{-1} (z - f(x)) \quad (3)$$

$f(x)$  es, en general, una función no lineal. Se linealiza expandiéndola en una serie de Taylor, como sigue:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots$$

Defínase

$$F = f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} ; F_0 = f'(x_0)$$

$$F_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta z = z - f(x_0)$$

Así que

$$f(x) = f(x_0) + F_0 \Delta x$$

Sustituyendo en (3), se tiene

$$J(x) = (\Delta z - F_0 \Delta x)^T R^{-1} (\Delta z - F_0 \Delta x) \quad (4)$$

$J(x)$  se minimiza diferenciando con respecto a  $x$ , igualando el resultado a cero, y resolviendo para  $\Delta x$ :

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x} = - (\Delta z - F_0 \Delta x)^T R^{-1} F_0 = 0$$

$$(F_0^T R^{-1} F_0) \Delta x = F_0^T R^{-1} \Delta z \quad (5)$$

$$\Delta x = (F_0^T R^{-1} F_0)^{-1} F_0^T R^{-1} \Delta z \quad (6)$$

$x$  se corrige haciendo

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

Dado que se utiliza una aproximación lineal de  $f(x)$ ,  $x = x_1$  no minimiza  $J(x)$  en forma exacta, y la ecuación (6), se utiliza en un proceso iterativo como:

$$\Delta x_k = (F_k^T R^{-1} F_k)^{-1} F_k^T R^{-1} (z - f(x_k)) \quad (7)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k \quad (8)$$

Dado que  $F_k^T R^{-1} F_k$  es una matriz grande ( número de buses para los que se realiza la estimación ), no se obtiene su inversa en forma explícita, sino que se resuelve el sistema de ecuaciones (9) para  $\Delta x$ , realizando una factorización y sustituciones hacia adelante y hacia atrás, explotando la dispersidad de la matriz.

$$( F_k^T R^{-1} F_k ) \Delta x = F_k^T R^{-1} ( z - f(x_k) ) \quad (9)$$

Existe un problema asociado con (9), y es su tendencia inherente a "mal condicionarse". Esto puede verificarse al examinar el "número condición" de la matriz<sup>(13)</sup>.

El número condición de una matriz C se define como:

$$\text{Cond}(C) = \frac{\sigma_M}{\sigma_m} \quad (10)$$

donde,  $\sigma_M^2$  denota el máximo eigenvalor de  $C^T C$ , y  $\sigma_m^2$  es el mínimo eigenvalor de  $C^T C$ . El número condición de C puede interpretarse como una medición de cuánto, una pequeña perturbación sobre los elementos de C, afectan la exactitud de un sistema lineal, cuya matriz de coeficientes es C.

Asuma por un momento que  $R = I$ , la matriz identidad ( esto no implica pérdida de generalidad, ya que  $R^{-1}$  podría haber sido descompuesta en sus factores triangulares, y cada uno de ellos asociados con F ). Entonces, puede mostrarse que el número condición  $\text{Cond}(F^T F)$ , es el cuadrado de  $\text{cond}(F)$ . Esto significa que si F no está bien condicionada,  $F^T F$  estará mal condicionada, lo cual influye para mal en los resultados finales, sin ninguna indicación de advertencia.

Por lo anterior, se han desarrollado otros enfoques para

resolver los problemas de mínimos cuadrados, cuyas características son " superiores " a las de la solución con las ecuaciones normales (9). Los procedimientos, son capaces de reducir significativamente los problemas de mal-condicionamiento, asegurando así un nivel más alto de exactitud para las soluciones iterativas.

#### Estimador desacoplado<sup>(11)</sup>

El desacoplamiento activo/reactivo introduce en los estimadores las mismas ventajas computacionales que en el cálculo de flujos de carga. Ello reduce el tiempo de cálculo por iteración, y el almacenaje. Usando aproximaciones para tener una matriz de ganancia constante, la convergencia es rápida y confiable. Sea

$$G = F_k^T R^{-1} F_k$$

Se sabe que  $G$  no cambia mucho de iteración a iteración. Por lo tanto, en implementaciones prácticas, se usan los mismos factores de la matriz de ganancia para algunas iteraciones, con poca pérdida de rapidez de convergencia o confiabilidad, y con considerables ahorros en la construcción y retriangularización de  $G$ . Las aproximaciones en la matriz de ganancia afectan la convergencia y el tiempo de cómputo, pero no el punto de solución.

Las principales características de los estimadores de estado desacoplados son :

- Desacoplamiento activo/reactivo
- El uso de matrices constantes ( $G$  y/o  $F$ ), que son función de las admitancias de la red solamente

A continuación se presenta un resumen de las ecuaciones usadas en estimadores desacoplados.

El vector de estado  $x$ , se define como

$$x = ( e , v ) \quad (11)$$

El vector de mediciones  $z$ , se divide como sigue:

$$z = ( T, I, U, K, E ) \quad (12)$$

donde, las componentes de los vectores  $T, I, U, K$ , y  $E$  son:

$$T_i = \frac{P_{lm}}{V_l} ; P_{lm} = \text{flujo de potencia activa, del bus } l \text{ al } m$$

$$I_l = \frac{P_l}{V_l} ; P_l = \text{inyección de potencia activa en el bus } l$$

$$U_l = \frac{Q_{lm}}{V_l} ; Q_{lm} = \text{flujo de potencia reactiva, del bus } l \text{ al } m$$

$$K_l = \frac{Q_l}{V_l} ; Q_l = \text{inyección de potencia reactiva en el bus } l$$

$$E_l = V_l ; V_l = \text{magnitud de voltaje en el bus } l$$

La matriz jacobiana está dada por

$$F(\theta, V) = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde,  $F_{11}$  corresponde a las mediciones activas ( $T$  e  $I$ ), y  $F_{21}$  corresponde a las mediciones reactivas ( $U, K$ , y  $E$ ).

La matriz de ganancia, puede dividirse como sigue:

$$G(\theta, V) = \begin{bmatrix} G_{PE} & G_{PV} \\ G_{QE} & G_{QV} \end{bmatrix} \quad (14)$$

donde, las matrices de ganancia  $G_{PE}, G_{PV}, G_{QE}, G_{QV}$  pueden escribirse como funciones de las submatrices jacobianas  $F_{ij}$ .

Se hacen las siguientes aproximaciones, para obtener el

estimador de estado desacoplado:

- (a) Perfil de voltaje plano, esto es,  $V = 1$  p.u., y  $\theta = 0$  rad
- (b) Se ignoran las submatrices  $F_{12}$  y  $F_{21}$  (desacoplamiento)
- (c) Se desprecian las resistencias de las líneas de transmisión, al formar la submatriz  $F_{11}$  (Esta es la misma aproximación usada al obtener la matriz  $B'$ , en el flujo de carga desacoplado rápido).

Implementando las aproximaciones precedentes, las matrices  $F$  y  $G$  toman la forma desacoplada:

$$F^0 = \begin{bmatrix} F_{11}^0 & 0 \\ 0 & F_{22}^0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$G^0 = \begin{bmatrix} G_{p\theta}^0 & 0 \\ 0 & G_{qv}^0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

donde,

$$G_{p\theta}^0 = (F_{11}^0)^t W_1 F_{11}^0 \quad (17)$$

$$G_{qv}^0 = (F_{22}^0)^t W_2 F_{22}^0$$

Introduciendo (15) y (16) al proceso iterativo (9), se sigue que

$$G_{p\theta}^0 \Delta\theta = (F_{11}^0)^t W_1 \begin{bmatrix} \Delta T (e_k, v_k) \\ \Delta I (e_k, v_k) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$e_{k+1} = e_k + \Delta e_k$$

$$G_{\Delta V}^0 \Delta V_k = (F_{22}^0)^T W_2 \begin{bmatrix} \Delta U(\theta_{k+1}, V_k) \\ \Delta K(\theta_{k+1}, V_k) \\ \Delta E_k \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$V_{k+1} = V_k + \Delta V_k$$

donde,  $W_1$  es la matriz de ponderación para las mediciones activas, y  $W_2$  es la matriz de ponderación para las mediciones reactivas (incluyendo magnitud de voltaje).



## CAPITULO 2

### FORMACION DE LA MATRIZ JACOBIANA

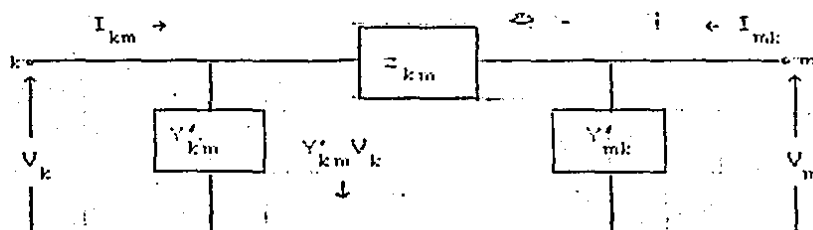
## ESTRUCTURA DE LA MATRIZ JACOBIANA <sup>(16)</sup>

La matriz  $F$  es en realidad una matriz jacobiana, cuyos elementos son las primeras derivadas de las funciones  $f$  con respecto a las variables de estado. Tienen, por lo tanto, una estructura bastante similar a la del jacobiano de un flujo de carga por *Nenton-Raphson*. Existen, sin embargo, algunas diferencias, ya que  $F$  no es cuadrada si existe redundancia en las mediciones ( existirán más filas que columnas ).

Enseguida se analizan los elementos distintos de cero en  $F$ , producidos por mediciones en líneas y buses.

### i) Mediciones de flujo de potencia en líneas.

Estas mediciones son las más abundantes y las más útiles en estimación de estado. Considérese la línea de transmisión de la *Fig. 6*:



*Fig. 6* Circuito  $\pi$  equivalente de una línea de transmisión

La potencia compleja  $S_{km}$  es función de  $V_k$  y  $V_m$ . Definiendo:

$$V = V e^{j\delta}$$

$$S = P + jQ$$

se tendrán derivadas parciales distintas de cero para  $P_k$  y  $Q_k$ , con respecto a cuatro variables reales  $V_k$ ,  $\delta_k$ ,  $V_m$  y  $\delta_m$ . Las derivadas con respecto a todos los demás voltajes son iguales a

Columnas para buses k y m

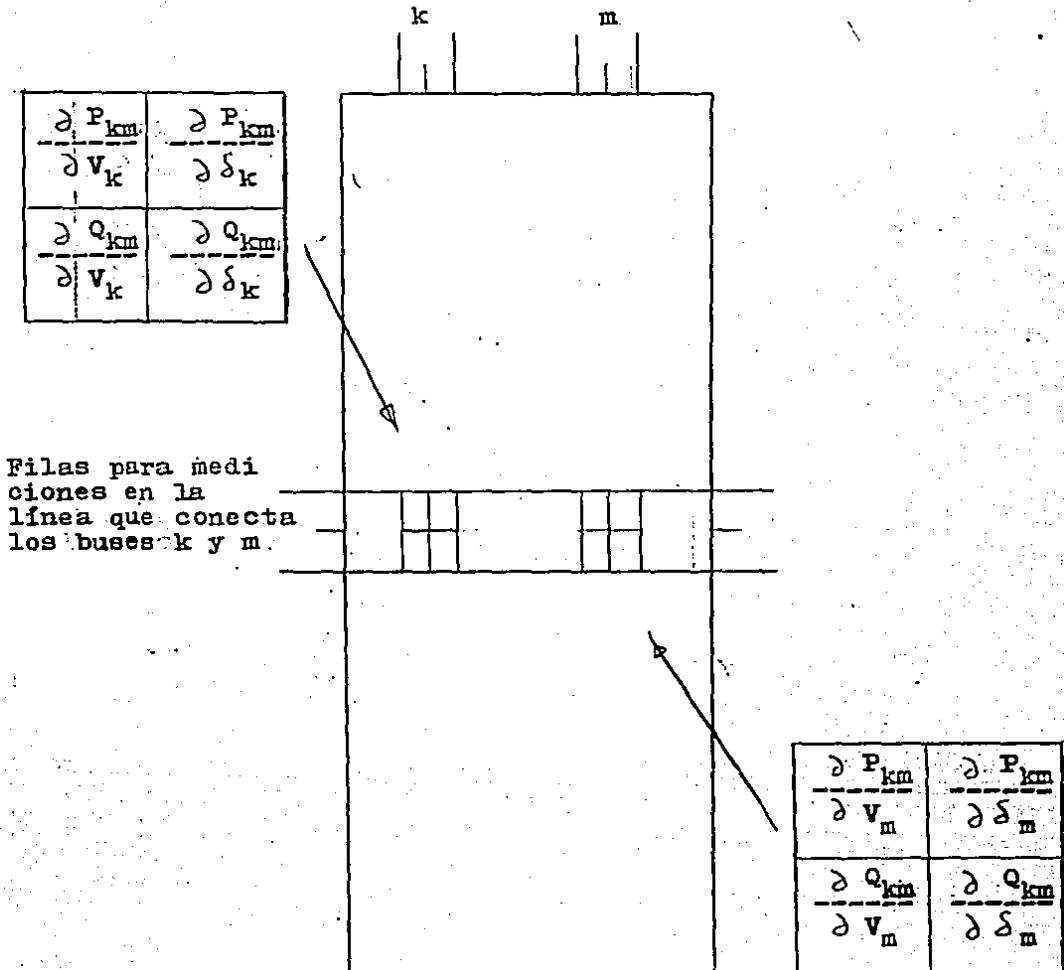
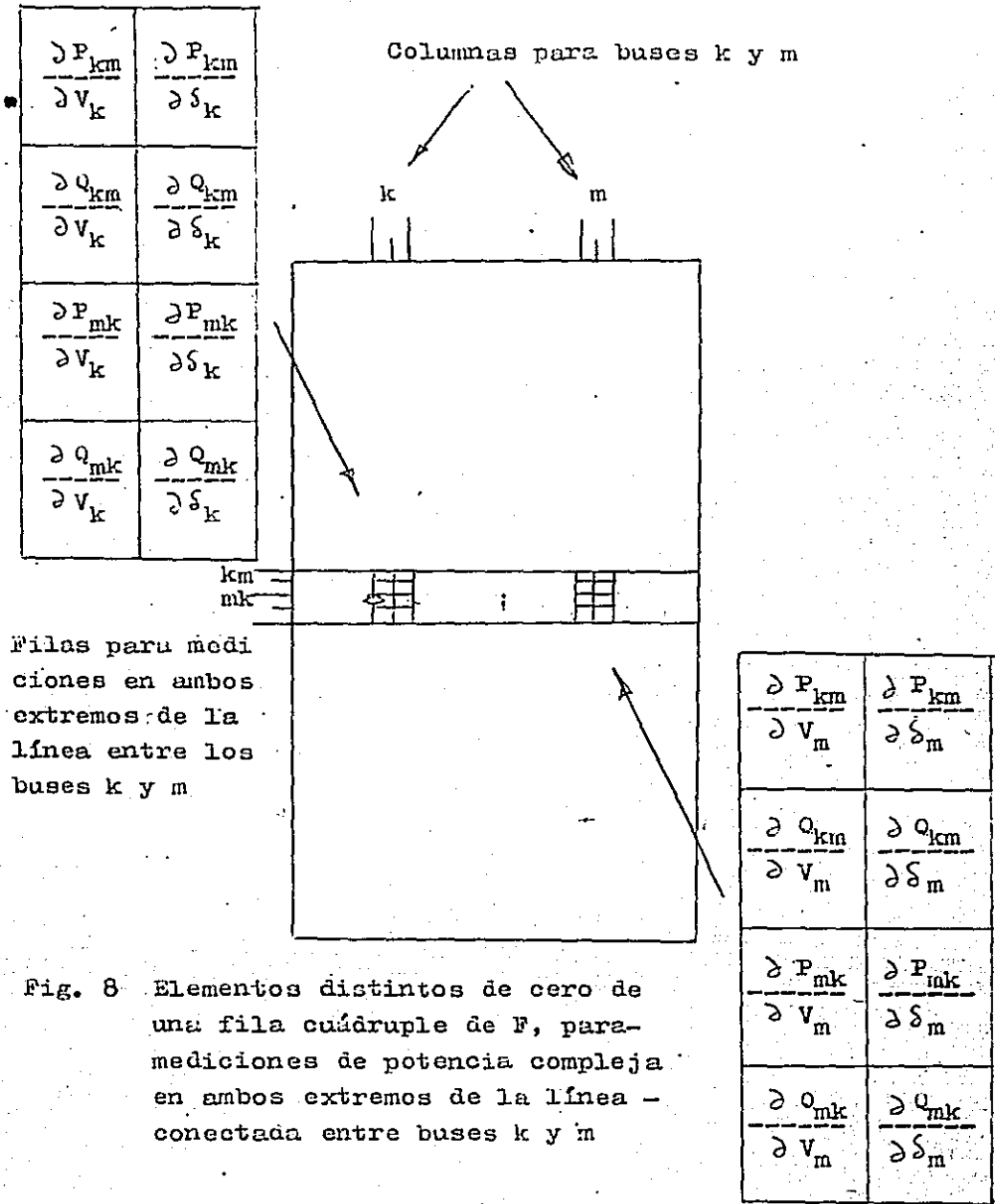


Fig. 7 Elementos distintos de cero de una fila doble de  $F$ , para una medición de potencia compleja en la línea que conecta los buses  $k$  y  $m$ .



cero.

La fig 7, muestra las dos filas de  $F$  correspondientes a la medición  $S_{km}$ . Si se efectúan mediciones en ambos extremos de la línea, la estructura de  $F$  será la mostrada en la fig 8.

ii) Mediciones de voltaje de bus

Existe una correspondencia uno a uno entre las mediciones de voltaje de bus, y la magnitud de voltaje a estimar. La fila de  $F$  para una medición de voltaje tiene un uno en la columna correspondiente al bus, y un cero en todas las otras posiciones. Estas mediciones no dan información alguna acerca de la estructura del sistema.

iii) Mediciones de inyecciones de potencia de bus.

En la fig 9, se muestra un modelo para un bus  $k$ , y la ecuación de inyección de potencia.

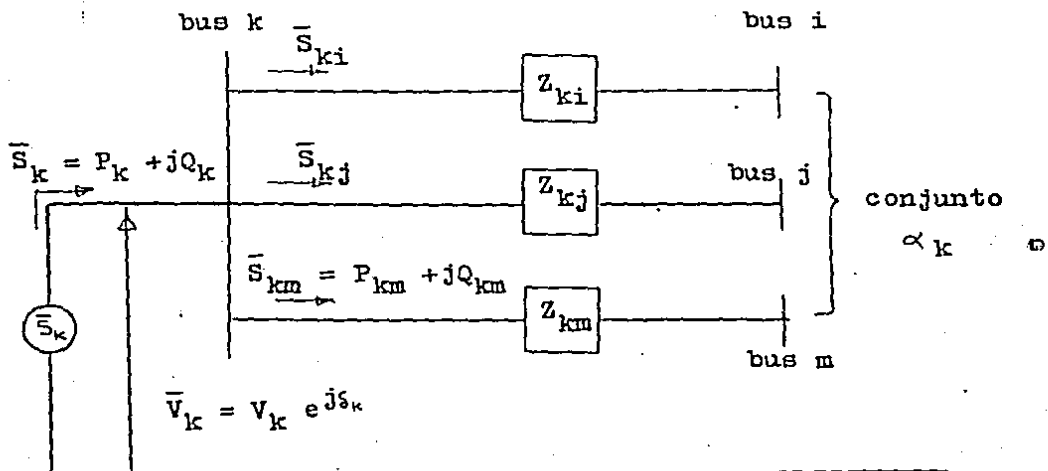
Siendo  $S_k$  función de  $V_k$ ,  $V_m$ ,  $i_m$  e  $\alpha_k$ ,  $F$  tendrá elementos diferentes de cero para cada una de estas variables.

En la fig 10, se muestra la estructura parcial de  $F$  para un bus conectado directamente a otros tres buses. Considerando el caso de una red completa, fig. 11, la fig. 12 muestra la estructura de la matriz  $F$  completa para un sistema de 30 nodos.

Esta matriz corresponde a las siguientes mediciones: a) una medición de potencia compleja para cada línea, b) medición de magnitud de voltaje en cada bus, c) medición de todas las inyecciones de potencia en los buses.

Más que la estructura de  $F$ , es importante la de la matriz  $C = F^L R^{-1} F$ , ya que es la que se factoriza.

Dado que  $R$  es diagonal, no afecta la estructura de  $C$ , por lo que la atención se debe centrar en  $F^L F$ . Se observa que las mediciones de inyección de potencia en los buses producen un incremento de



$$\vec{S}_k = P_k + jQ_k = \sum_{m \in \alpha_k} \vec{S}_{km}$$

$$= Y_{kk}^* V_k^2 + \vec{V}_k \sum_{m \in \alpha_k} \vec{Y}_{km}^* \vec{V}_m^*$$

Fig. 9 Modelo de inyección de potencia compleja en el bus k.

Columnas para los buses en el conjunto

Columnas para el bus k

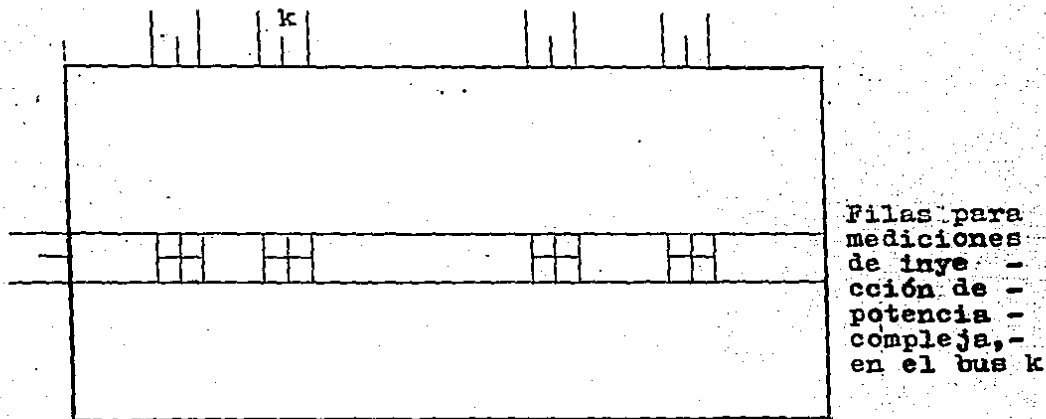


Fig. 10 Elementos distintos de cero para una fila doble de F, para una medición de flujos de potencia compleja de la inyección en bus k

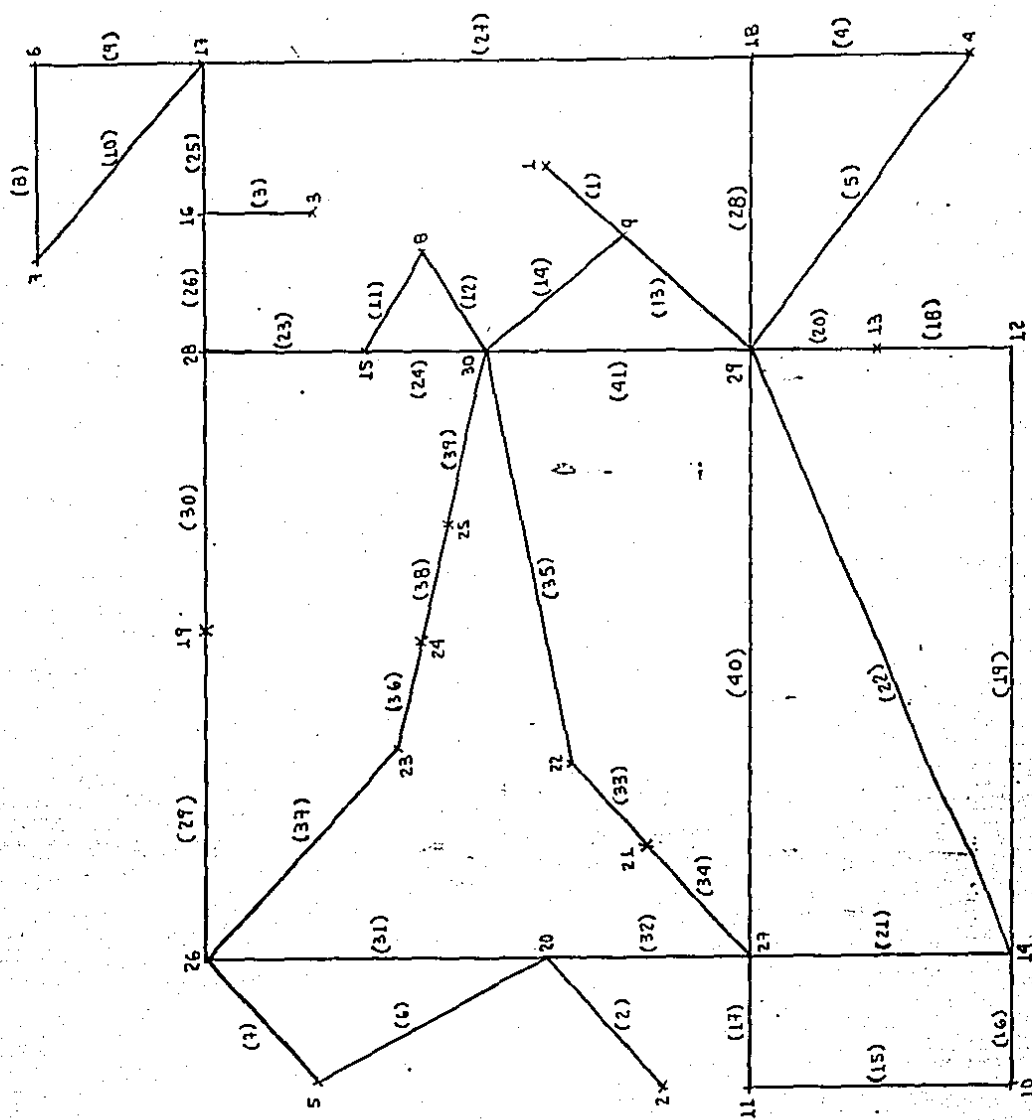


Fig. 11 Ejemplo de la red de 30 buses

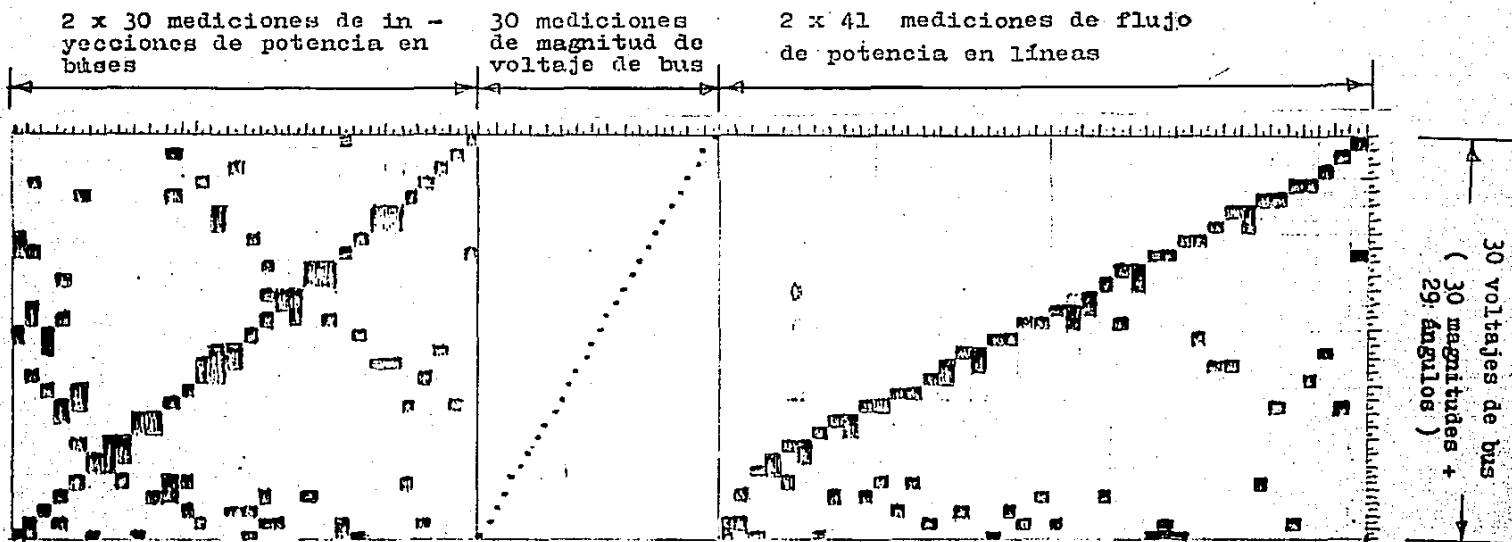


Fig. 12 Elementos distintos de cero de  $F$ , para la red ejemplo con mediciones de :

- a) Flujos de potencia en ambos extremos de todas las líneas
- b) Todos los voltajes de bus
- c) Todas las inyecciones de potencia de bus



densidad en la matriz, debido a elementos nuevos que conectan vecinos secundarios de la red original.

En el caso de la matriz de la fig 11, la densidad de los elementos distintos de cero es aproximadamente 30%. Para sistemas más grandes, este valor puede disminuir un poco, pero aún resulta prohibitivo para almacenamiento tradicional.

Los requerimientos de almacenamiento, y en gran medida, de tiempo para la estimación de estado, están determinados no por la matriz  $F^t R^{-1} F$ , sino por sus factores.

Definiendo:

$$C = F^t R^{-1} F$$

C se puede factorizar como LDU, donde:

$$L ; l_{ij} = \begin{cases} 0 & , i < j \\ 1 & , i = j \end{cases}$$

$$U ; u_{ij} = \begin{cases} 0 & , i > j \\ 1 & , i = j \end{cases}$$

$$D ; d_{ij} = 0 , i \neq j$$

Dado que C es simétrica,  $L = U^t$ , por lo que sólo es necesario calcular y almacenar U o L. La diagonal de U es unitaria y, por lo tanto, se conoce implícitamente; esto implica que no hay que almacenar dichos elementos.

#### Derivadas parciales de la matriz F

Los elementos de la matriz F son las derivadas parciales de tres tipos de mediciones, con respecto a las variables de estado. A continuación se muestran las expresiones analíticas de tales elementos.

Mediciones de flujo de potencia en líneas

De la fig 6, se puede obtener la siguiente expresión para la corriente que va del nodo k al m :

$$I_{km} = \frac{V_k - V_m}{z_{km}} + Y'_{km} V_k \quad (1)$$

$$S_{km} = P_{km} + j Q_{km} = V_k \left[ \frac{V_k^* - V_m^*}{z_{km}^*} + Y'_{km} V_k^* \right] \quad (2)$$

Considérense las siguientes definiciones:

$$V_k = V e^{j\delta}$$

$$z = r + j x$$

$$Y = \frac{r - j x}{r^2 + x^2} = g + j b$$

$$Y' = g' + j b'$$

De estas definiciones, se tiene

$$V_k V_k^* = V^2$$

$$V_k V_m^* = V_k e^{j\delta_k} V_m e^{-j\delta_m} = V_k V_m [\cos(\delta_k - \delta_m) + j \sin(\delta_k - \delta_m)]$$

$$S_{km} = \left( \frac{1}{z_{km}^*} + Y'_{km} \right) V_k^2 - \frac{V_k V_m^*}{z_{km}^*} [\cos(\delta_k - \delta_m) + j \sin(\delta_k - \delta_m)]$$

como  $\frac{1}{z_{km}^*} = g_{km} - j b_{km}$  y  $Y'_{km} = g'_{km} - j b'_{km}$

$$Q_{km} = F(g_{km} + g'_{km}) - j(b_{km} + b'_{km}) V_k^2 - (g_{km} - jb_{km}) [ \cos(\delta_k - \delta_m) + j \sin(\delta_k - \delta_m) ] V_k V_m \quad (13)$$

Separando la ecuación (13) en partes real e imaginaria, resulta:

$$P_{km} = (g_{km} + g'_{km}) V_k^2 - [g_{km} \cos(\delta_k - \delta_m) + b_{km} \sin(\delta_k - \delta_m)] V_k V_m \quad \dots (14)$$

$$Q_{km} = -(b_{km} + b'_{km}) V_k^2 - [g_{km} \sin(\delta_k - \delta_m) - b_{km} \cos(\delta_k - \delta_m)] V_k V_m \quad \dots (15)$$

Los elementos del jacobiano  $F$ , se obtienen de las derivadas parciales de (14) y (15), con respecto a las cuatro variables  $\delta_k$ ,  $V_k$ ,  $\delta_m$ ,  $V_m$ .

Para simplificar los términos del jacobiano, las derivadas parciales con respecto a  $V$ , se multiplican por  $V$ .

$$\frac{\partial P_{km}}{\partial \delta_k} = H_{km,k} = [g_{km} \sin(\delta_k - \delta_m) - b_{km} \cos(\delta_k - \delta_m)] V_k V_m$$

Usando (15), se tiene

$$\frac{\partial P_{km}}{\partial \delta_k} = H_{km,k} = -Q_{km} - (b_{km} + b'_{km}) V_k^2 \quad (16)$$

$$V_k \frac{\partial P_{km}}{\partial V_k} = N_{km,k} = 2(g_{km} + g'_{km}) V_k^2 - [g_{km} \cos(\delta_k - \delta_m) + b_{km} \sin(\delta_k - \delta_m)] V_k V_m$$

Usando (14), se tiene:

$$V_k \frac{\partial P_{km}}{\partial V_k} = N_{km,k} = P_{km} + (g_{km} + g'_{km}) V_k^2 \quad (17)$$

$$\frac{\partial P_{km}}{\partial \delta_m} = H_{km,m} = -E_{km} \sin(\delta_k - \delta_m) - b_{km} \cos(\delta_k - \delta_m) \frac{V_k V_m}{k} \quad (15)$$

de (15) y (16),

$$\frac{\partial P_{km}}{\partial \delta_m} = H_{km,m} = -H_{km,k} = Q_{km} + (b_{km} + b'_{km}) \frac{V_k^2}{k} \quad (18)$$

$$\frac{\partial P_{km}}{\partial V_m} = N_{km,m} = -[V_{km} \cos(\delta_k - \delta_m) + b_{km} \sin(\delta_k - \delta_m)] \frac{V_k V_m}{k} \quad (17)$$

de (14),

$$\frac{\partial P_{km}}{\partial V_m} = N_{km,m} = P_{km} - \frac{P_{km}}{k} - \frac{V_k^2}{k} \quad (19)$$

En forma análoga, las derivadas parciales de  $Q_{km}$ , con respecto a las cuatro variables de estado, resultan:

$$\frac{\partial Q_{km}}{\partial \delta_k} = J_{km,k} = P_{km} - (b_{km} + b'_{km}) \frac{V_k^2}{k} = J_{km,m} \quad (20)$$

$$\frac{\partial Q_{km}}{\partial V_k} = L_{km,k} = Q_{km} - (b_{km} + b'_{km}) \frac{V_k^2}{k} \quad (21)$$

$$\frac{\partial Q_{km}}{\partial \delta_m} = J_{km,m} = -P_{km} + (b_{km} + b'_{km}) \frac{V_k^2}{k} = -J_{km,k} \quad (22)$$

$$\frac{\partial Q_{km}}{\partial V_m} = L_{km,m} = H_{km,m} = H_{km,k} + (b_{km} + b'_{km}) \frac{V_k^2}{k} \quad (23)$$

#### Mediciones de conductancias de estado de bus

Las derivadas parciales para este tipo de mediciones son triviales, ya que:

$$\frac{\partial V_k}{\partial V_k} = 1$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial V_m} = 0, \quad k \neq m$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial \delta_m} = 0, \quad \text{todo } m$$

Dado que en la formulación, las variables de voltaje que se usan

son  $\frac{\Delta V_k}{V_k}$ , los coeficientes son

$$V_k \frac{\partial V_k}{\partial V_k} = V_k \quad (24)$$

#### Mediciones de inyecciones de potencia de bus

Las expresiones de las derivadas parciales para estas mediciones, son ampliamente conocidas, puesto que son los elementos del jacobiano de un programa de flujos por el método de Newton.

De acuerdo a la Fig. 9 y las definiciones dadas, se tiene :

$$S_k = P_k + jQ_k = Y_{kk}^* V_k^2 + V_k \sum_m \sum_{\alpha_k} Y_{km}^* V_m^*$$

$$= (G_{kk} - jB_{kk}) V_k^2 + \sum_m \sum_{\alpha_k} (G_{km} - jB_{km}) [V_k V_m \cos(\delta_k - \delta_m) + j V_k V_m \sin(\delta_k - \delta_m)] \quad (25)$$

Donde  $Y_{km}$  y  $Y_{km}$  son los elementos de la matriz de admitancias de

bus. De acuerdo a la notación establecida :

$$Y_{km} = G_{km} + jB_{km} = - (g_{km} + j b_{km}) \quad (26)$$

$$Y_{kk} = G_{kk} + j B_{kk} = (g'_{kk} + j b'_{kk}) + \sum_{m \in \alpha_k} [(g_{km} + g'_{km}) + j(b_{km} + b'_{km})] \quad (27)$$

Donde  $g'_{kk}$  y  $b'_{kk}$  son admitancias a tierra en el bus  $k$ , que no están asociadas a alguna línea o transformador incidente en el bus  $k$ .

Separando partes real e imaginaria de (25), resulta

$$P_k = G_{kk} V_k^2 + \sum_{m \in \alpha_k} [G_{km} \cos(\delta_k - \delta_m) + B_{km} \sin(\delta_k - \delta_m)] V_k V_m \quad (28)$$

$$Q_k = -B_{kk} V_k^2 + \sum_{m \in \alpha_k} [G_{km} \sin(\delta_k - \delta_m) - B_{km} \cos(\delta_k - \delta_m)] V_k V_m \quad (29)$$

Diferenciando estas ecuaciones, se obtienen las componentes de  $F$ , correspondientes a las inyecciones.

Después de ciertas simplificaciones se obtiene:

$$\frac{\partial P_k}{\partial \delta_k} = H_{kk} = -Q_k - B_{kk} V_k^2 \quad (30)$$

$$V_k \frac{\partial P_k}{\partial V_k} = N_{kk} = P_k + G_{kk} V_k^2 \quad (31)$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial \delta_m} = H_{km} = [G_{km} \sin(\delta_k - \delta_m) - B_{km} \cos(\delta_k - \delta_m)] V_k V_m \quad \dots (32)$$

$$V_m \frac{\partial P_k}{\partial V_m} = N_{km} = [G_{km} \cos(\delta_k - \delta_m) + B_{km} \sin(\delta_k - \delta_m)] V_k V_m \quad \dots (33)$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \delta_k} = J_{kk} = P_k - G_{kk} V_k^2 \quad (34)$$

$$V_k \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = L_{kk} = Q_k - B_{kk} V_k^2 \quad (35)$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \delta_m} = J_{km} = - [G_{km} \cos(\delta_k - \delta_m) + B_{km} \sin(\delta_k - \delta_m)] V_k V_m \quad (36)$$

$$V_m \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} = L_{km} = [G_{km} \sin(\delta_k - \delta_m) - B_{km} \cos(\delta_k - \delta_m)] V_k V_m \quad \dots (37)$$

CAPITULO 3

DETECCION E IDENTIFICACION DE ERRORES



## Definición del problema

La capacidad para detectar e identificar mediciones falsas es extremadamente valiosa en la operación de los sistemas de potencia. Tales tipos de datos pueden surgir, generalmente por:

- i) Mediciones (errores de medición y comunicación, aleatorios),
- ii) Parámetros (incertidumbre en los parámetros del modelo, tales como admitancias de línea),
- iii) Datos sesgados (errores sistemáticamente grandes de medición y comunicación).

En este trabajo se aborda el problema desde el punto de vista residual.

Para detectar la presencia de mediciones falsas, se trabaja con la noción intuitiva de que para una configuración dada, el residual  $J(x)$ , calculado después que el algoritmo de estimación convergió, será más pequeño si no hay mediciones falsas. Cuando  $J(x)$  es pequeño, se ha encontrado un vector  $x$  (esto es, magnitudes y ángulos de voltaje) que causa que todos los flujos e inyecciones concuerden razonablemente con todas las mediciones. Generalmente, en la presencia de mediciones falsas, el valor de  $J(x)$  será más grande de lo esperado.

El proceso de identificación de errores puede dividirse en dos partes principales:

Parece lógico asumir que la medición con error con la que tiene el residual más grande

$$\text{residual}_i = z_{m_i} - c_i$$

donde

$$z_{m_i} = \text{el valor medido}$$

$$c_i = \text{el valor calculado}$$

Desafortunadamente, esto no puede ser tratado así ya que, debido al efecto de *contaminación* que ocurre en el proceso de estimación, por lo tanto, debe usarse un proceso más sofisticado para identificar las cantidades erróneas. Una vez localizada el error, sería muy útil saber qué ha causado el error. Para los propósitos de estimación el procedimiento más fácil es sacar la medición errónea y desarrollar otra estimación.

Es importante notar que, ya que todas las mediciones hechas en el sistema son función de los parámetros de línea, cualquier error grande en ellas, causará una discrepancia entre el valor medido y el valor calculado, en aquellas cantidades afectadas por los parámetros falsos. Ya que los errores en la configuración de la red pueden considerarse como grandes errores, sus efectos serán también grandes. La conclusión es que, cualquier tipo de error grande, será visto por el *análisis* como un error de medición.

#### Identificación estadística <sup>(10)</sup>

El proceso aquí usado, se basa en probar la validez estadística de los resultados del *análisis*, por medio de una prueba de hipótesis. Como ya hemos visto, las ecuaciones de medición siempre pueden escribirse como una función lineal del estado, por medio de una linealización alrededor del punto de operación:

$$z_m = F x_t + e \quad (1)$$

dónde

$z_m$  = vector de cantidades medidas

$x_t$  = vector de valores verdaderos de las variables de estado

$e$  = vector de errores de medición aleatorios

En el proceso de identificación, será asumido que  $e$  es un conjunto de variables aleatorias independientes, mutuamente distribuidas,

con la siguiente propiedad:

$$E(\varepsilon) = 0 \quad (1)$$

$$y \quad E(\varepsilon \varepsilon^t) = W \quad (2)$$

donde,  $W$  = matriz diagonal

La suposición de la normalidad de los errores, puede ser justificada parcialmente, ya que las componentes de  $\varepsilon$  son la suma de varios errores aleatorios. Por lo tanto, bajo el *teorema del límite central*, la distribución de las componentes de  $\varepsilon$ , es aproximadamente normal (Véase apéndice B).

Valor esperado de  $z_m$  y  $\hat{z}_m$

El valor esperado de  $z_m$  puede obtenerse directamente de la ec. (1) como :

$$\begin{aligned} E(z_m) &= F x_t + E(\varepsilon) \\ &= F x_t = z_t \end{aligned} \quad (3)$$

donde,  $z_t$  = vector de valores calculados de las cantidades medidas.

El valor calculado de las cantidades medidas, está dado por:

$$\hat{z} = F \hat{x} \quad (4)$$

Tomando valor esperado en ambos lados de (4), el valor esperado de  $\hat{z}$  puede expresarse como:

$$E(\hat{z}) = F E(\hat{x}) \quad (5)$$

De la teoría de mínimos cuadrados, el estimado de  $x_t$  puede escribirse como:

$$\hat{x} = (F^t W^{-1} F)^{-1} F^t W^{-1} z_m \quad (6)$$

Por lo tanto,

$$E(\hat{x}) = (F^t W^{-1} F)^{-1} F^t W^{-1} E(z_m) = x_t \quad (7)$$

Sustituyendo este resultado en ec. (5), da

$$E(\hat{z}) = F x_t = z_t \quad (8)$$

Esto es,  $\hat{z}$  es un estimado insesgado de  $z_t$ .

Varianza y esperanza de  $\hat{R}$

De ec. (7), definimos

$$M = (F^T W^{-1} F)^{-1} F^T W^{-1}$$

La matriz de covarianza del estado puede calcularse fácilmente; este cálculo requiere el valor esperado del producto de cada uno de los parámetros desconocidos, tomados por pares, siendo corregidos después por sus valores medidos.

Así, queremos

$$E\left\{(\hat{R} - x)(\hat{R} - x)^T\right\} = E\left\{\begin{bmatrix} (\hat{R}_1 - x_1)(\hat{R}_1 - x_1) & \dots & (\hat{R}_1 - x_1)(\hat{R}_n - x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\hat{R}_n - x_n)(\hat{R}_1 - x_1) & \dots & (\hat{R}_n - x_n)(\hat{R}_n - x_n) \end{bmatrix}\right\}$$

De ec. (7)

$$\hat{R} = M(Fx + \epsilon) = x + M\epsilon \tag{10}$$

$$\hat{R} - x = M\epsilon \tag{10a}$$

entonces,

$$\begin{aligned} E\left\{(\hat{R} - x)(\hat{R} - x)^T\right\} &= E\left\{(M\epsilon)(M\epsilon)^T\right\} \\ &= E\left\{M\epsilon\epsilon^T M^T\right\} \\ &= ME\left\{\epsilon\epsilon^T\right\}M^T \end{aligned} \tag{11}$$

Después de sustituir el valor esperado de  $\epsilon\epsilon^T$  en la ec. (11) y simplificar, llegamos a:

$$E\left\{(\hat{R} - x)(\hat{R} - x)^T\right\} = (F^T W^{-1} F)^{-1} \tag{12}$$

Las varianzas de los parámetros desconocidos son los elementos diagonales de la matriz (12).

Esperanza y varianza de  $\hat{z}$

Desarrollamos los mismos cálculos para  $z$ :

$$\hat{z} - z_m = F(\hat{R} - x) + \epsilon \tag{13}$$

Tomando valor esperado

$$E \left\{ \left( \hat{z} - z_m \right) \right\} = 0 \quad \left\{ \hat{R} - R \right\} = 0 \quad (10)$$

De la ec. (9),  $E \left\{ \hat{z} \right\} = z$

Similaresmente:

$$E \left\{ \left( \hat{z} - z_m \right) \left( \hat{z} - z_m \right)^t \right\} = E \left\{ \left[ F \left( \hat{R} - R \right) - \varepsilon \right] \left[ F \left( \hat{R} - R \right) - \varepsilon \right]^t \right\}$$

Desarrollando

$$= E \left\{ F \left( \hat{R} - R \right) \left( \hat{R} - R \right)^t F^t - F \left( \hat{R} - R \right) \varepsilon^t - \varepsilon \left( \hat{R} - R \right)^t F^t + \varepsilon \varepsilon^t \right\}$$

$$= F E \left\{ \left( \hat{R} - R \right) \left( \hat{R} - R \right)^t \right\} F^t - F E \left\{ \varepsilon \varepsilon^t \right\} - E \left\{ \varepsilon \varepsilon^t \right\} M^t F^t +$$

$$E \left\{ \varepsilon \varepsilon^t \right\}$$

$$= F \left( F^t W^{-1} F \right)^{-1} F^t + F \left( F^t W^{-1} F \right)^{-1} F^t W^{-1} W$$

$$+ W^{-1} F + F^t W^{-1} F \right)^{-1} F^t - \varepsilon$$

$$= F \left( F^t W^{-1} F \right)^{-1} F^t$$

(11)

De los resultados obtenidos hasta ahora, puede decirse que cuando la solución de la estimación es aceptada, la probabilidad de fijar los valores calculados, más cerca a los <sup>o</sup>valores verdaderos, que los valores medidos, es alta.

La fig<sup>(6)</sup> 13 muestra las distribuciones de  $z_m$  y  $\hat{z}$ , para una solución aceptable.

Definamos

$$Y = z_m - \hat{z}$$

La fig 14 muestra las distribuciones de  $z_m$ ,  $\hat{z}$ , y  $Y$  para diferentes casos que pueden surgir. Los casos (c) y (d), son casos extremos. En (c) no se dispone de redundancia de mediciones, por lo tanto, no es posible filtrar errores de medición. En (d), el filtrado de errores es completo y se muestra la mejor solución posible. Los casos (a) y (b), son los típicos.

Como se muestra en la ec. (21) del apéndice D<sup>(a),(b)</sup>, si no hay datos falsos y los errores de medición tienen distribución normal, el índice  $J(\hat{R})$  seguirá una distribución Chi-cuadrada

Fig. 13

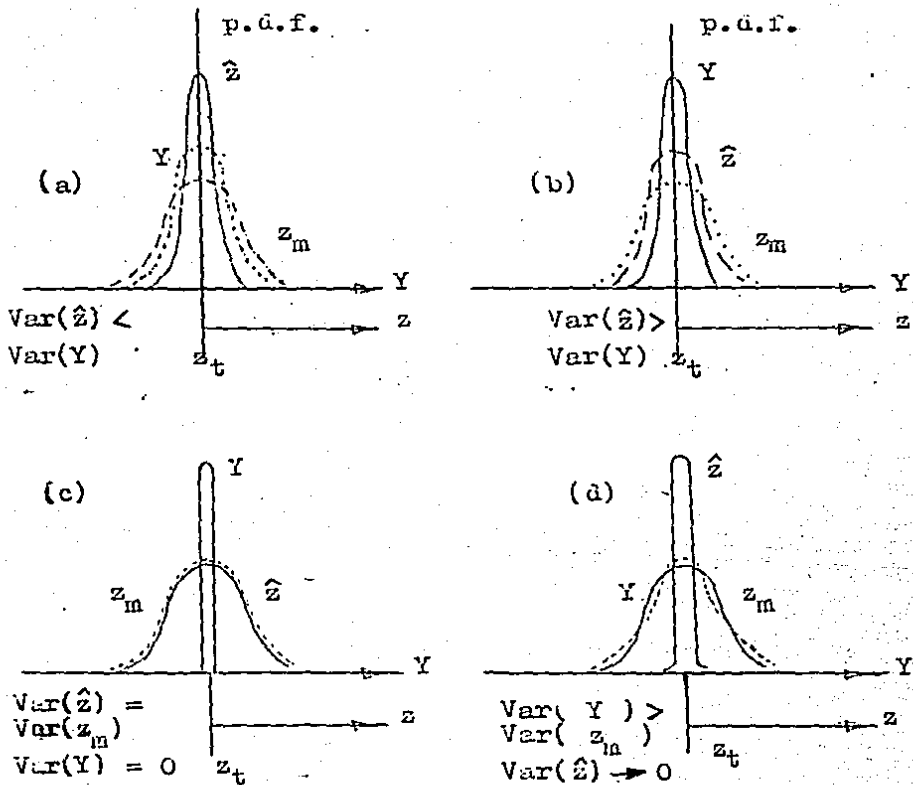
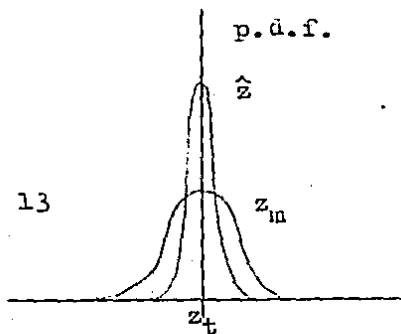


Fig. 14

con  $(m - n)$  grados de libertad. Como se mencionó al principio del capítulo, la detección de datos falsos generalmente se efectúa a través de una prueba estadística, consistiendo en probar si

$$J(\hat{x}) > \chi_{m-n, \beta}^2 \quad (15)$$

donde  $\beta$  es la probabilidad de falsa alarma.

Para nuestro siguiente análisis, definimos:

$$\Sigma_x = (F^T W^{-1} F)^{-1} \quad (15a)$$

De las eqs. (10a) y (12), obtenemos el vector de residuales expresado como:

$$\hat{r} = z - \hat{z} = h(x) + \varepsilon - h(\hat{x}) = V \varepsilon \quad (16)$$

con la matriz de sensibilidad residual  $V$ ,

$$V = I - F \Sigma_x F^T W^{-1}$$

Sustituyendo  $\hat{r}$  de (16) en  $J(x)$ , con  $x = \hat{x}$ , resulta

$$\begin{aligned} J(\hat{x}) &= [z - h(\hat{x})]^T W^{-1} [z - h(\hat{x})] \\ &= [V \varepsilon]^T W^{-1} [V \varepsilon] = \varepsilon^T W^{-1} V \varepsilon \end{aligned} \quad (17)$$

porque  $V^T W^{-1} V = W^{-1} V$ .

Si  $\varepsilon$  es normal, entonces  $J(\hat{x})$  tiene una distribución  $\chi^2$  con  $K = m - n$  grados de libertad. Cuando  $K$  es grande ( $K \geq 30$ ), las variables aleatorias estandarizadas

$$\xi_1 = \frac{J(\hat{x}) - K}{\sqrt{2K}} \quad \text{y} \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{2J(x)}{K}} - \sqrt{2} \quad \dots \dots (18)$$

ambas llegan a ser variables aleatorias normales con media cero y varianza unitaria.

Para un dato falso en la misma medición de  $z$ , el error  $\varepsilon$  será ahora

$$\varepsilon = \varepsilon + \varepsilon_0 \quad (19)$$

$\alpha_i^1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ , el  $i$ -ésimo en la  $i$ -ésima posición  
 $\alpha$  = tamaño del dato (11)

Sustituyendo (19) en (16), los residuales toman la forma

$$r = V\varepsilon + V e_i \alpha \quad (20)$$

$J(\hat{\beta})$  llega a ser, en lugar de (17),

$$J(\hat{\beta}) = (V\varepsilon + V e_i \alpha)^t W^{-1} (V\varepsilon + V e_i \alpha) \\
= \varepsilon^t W^{-1} V\varepsilon + 2\alpha e_i^t W^{-1} V\varepsilon + \alpha^2 e_i^t W^{-1} V e_i \quad \dots (21)$$

Donde, el primer término se distribuye como  $\chi^2$ , el segundo término tiene distribución normal, y el tercero es constante.

Cuando  $K$  es grande,  $J(\hat{\beta})$  en (21) se aproxima a una distribución normal con media  $\mu_j$  y varianza  $\sigma_j^2$  de acuerdo a:

(Aquí, uso el hecho de que la suma de normales, es normal con media  $\mu_1 + \mu_2 + \dots$ , y varianza  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots$ )

$$E(\chi^2) = K = \text{número de grados de libertad}$$

$$\text{Var}(\chi^2) = 2K$$

$$E(\varepsilon) = 0$$

$$\text{Var}(\varepsilon) = W$$

$$E(C = \text{constante}) = C$$

$$\text{Var}(C) = 0$$

$$\text{Var}(C \times) = C^2 \text{Var}(x)$$

Usando estas relaciones, encontramos que

$$\mu_j = K + \frac{\alpha^2}{\sigma_i^2} u \quad (22)$$

$$\sigma_j^2 = 2K + \frac{\alpha^2}{\sigma_i^2} u$$



donde  $\xi_{1j}$  es el  $j$ -ésimo ítem de la muestra de sensibilidad  
 (figura 2). Así, las variables estandarizadas  $\xi_1$  y  $\xi_2$  de (19),  
 llegan a ser :

$$\xi_1 \sim N \left[ \frac{\mu_j - K}{\sqrt{2K}}, \frac{\sigma_j^2}{2K} \right] \quad (23)$$

$$\xi_2 \sim N \left[ \sqrt{2\mu_j} - \sqrt{2K}, \frac{\sigma_j^2}{2\mu_j} \right]$$

Al hacer la prueba de  $J(\hat{\Omega})$ , la hacemos con dos hipótesis :  
 $H_0$  : ningún dato falso ;  $H_1$  :  $H_0$  no es verdad. Con un parámetro  
 preespecificado  $\gamma$  ( el umbral de la prueba ) uno tiene

$$\xi_i \begin{cases} < \gamma & \text{acepto } H_0 \\ > \gamma & \text{rechazo } H_0 \end{cases} ; \text{ para } i = 1, 2 \quad (24)$$

Sean

$P_e$  = probabilidad de falsa alarma, esto es, la probabilidad de  
 rechazar  $H_0$ , cuando  $H_0$  es verdad.

$P_d$  = probabilidad de detección, esto es, probabilidad de aceptar  
 $H_1$  cuando  $H_1$  es verdad.

La elección de  $\gamma$  determina  $P_e$ . Por ejemplo, cuando  $s$  es normal,  $K$   
 es grande y  $H_0$  es verdad, entonces  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son  $N(0,1)$ , así, si  $\gamma$   
 = 1.65, corresponde a  $P_e = 0.05$ .

Es posible calcular la función de potencia de la prueba  $J(\hat{\Omega})$ ;  
 esto es, para una probabilidad de falsa alarma  $P_e$  dada, se puede  
 calcular la probabilidad  $P_d$  de detección de datos falsos como una  
 función del tamaño de tales datos usando (22), con  $\alpha = 0$  para la

hipótesis nula  $H_0$ , y  $\alpha \neq 0$  para la hipótesis alternativa  $H_1$ . La Fig. 15 muestra una función de potencia típica, esto es, la probabilidad de detectar un dato falso en alguna medición de la red.

Como muestra (27), la probabilidad de detección  $P_d$  depende de la matriz de sensibilidad  $V$ , que a su vez depende de la exactitud en la estimación de los datos.

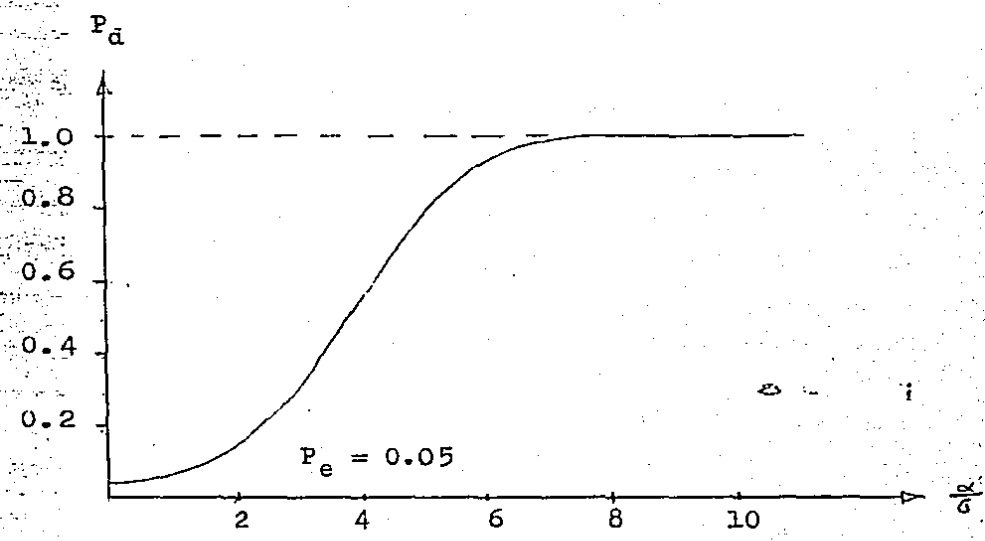


Fig. 15 Función de potencia de la prueba  $\gamma(x)$ , indicando la probabilidad de detección como una función del tamaño del dato - falso  $\alpha / \sigma$ .

Identificación de errores

Si se detectan errores de medición y se decide que la estimación  $\hat{\theta}$  no es útil, es necesario repetir el proceso de estimación eliminando las mediciones erróneas.

La identificación de una medición errónea (2) no varía con  $\alpha$ , ya

que el residuo  $r_i$  de (14) es el correspondiente al mayor de los  $m$  residuos normalizados. Por ello, es necesario analizar las covarianzas normalizadas

$$\rho_{ii} = \frac{r_i}{\sqrt{P_{ii}}} \quad i, i = 1, 2, \dots, m \quad (25)$$

donde  $\rho_{ii}$  es el elemento correspondiente de la diagonal de la matriz de covarianza de los residuos  $r_i$ , en (14).

El mayor de los residuos normalizados corresponde, con alta probabilidad a la medición en error.

Antes de suprimir la medición correspondiente al mayor residuo normalizado, es necesaria una segunda prueba estadística para poder afirmar que la medición es efectivamente errónea<sup>(4)</sup>. Debemos darnos cuenta que  $e_i$  tiene una distribución *t-Student* con  $(m-n)$  grados de libertad, bajo las hipótesis hechas.

La aceptación o rechazo de la hipótesis, se obtiene comparando el valor de  $e_i$  con el valor teórico de la distribución *t* con  $(m-n)$  grados de libertad, para una probabilidad  $\beta$  pre fijada  $\beta$ :

$$|e_i| < t_{m-n, \beta} \quad (26)$$

Los residuos con un valor que exceda el valor teórico de la distribución, son candidatos a que la observación correspondiente tenga un error. Como el rango de valores que puede ser asignado varía entre los elementos, los  $e_i$  más altos, con los  $\rho_{ii}$  más altos, son las más probables que estén en error. Sin embargo, como en un momento dado no se sabe cuántos puntos hay en error, sólo se recomienda identificar un error a la vez, y se reestima el estado.

Para calcular los elementos diagonales de  $\rho_{ii}^2$  de la ec. (14), los únicos elementos de  $\Sigma_x$  (ec. 15a) que se necesitan, son aquellos que ocupan las mismas posiciones que los elementos no cero de la propia  $\Sigma_x^{-1}$ . Por lo tanto, puede aplicarse el método

de Broussolle<sup>(5)</sup> con gran ventaja.

### Hacia una configuración óptima de medidores.

Implementar esquemas de estimación de estado para monitoreo del sistema de potencia y para propósitos de control, requiere dos decisiones fundamentales: 1) qué cantidades pueden y debieran medirse (con qué exactitud)?, 2) qué algoritmo de estimación es apropiado para el conjunto de medición dado? Obviamente, la respuesta a este problema no puede darse enteramente sobre una base teórica, porque hay siempre un número de restricciones técnicas que pueden dictar la aplicación de un algoritmo. Mientras para un sistema de transmisión de potencia, las mediciones de línea complejas son una elección natural, desde un punto de vista de operación, un sistema que aproveche mejor la capacidad de generación, combinara mediciones de flujo en líneas e inyecciones.

El funcionamiento del algoritmo de estimación depende de la redundancia  $\eta$  de las mediciones, y de sus relaciones con los voltajes de bus. Generalmente, una redundancia grande conduce a una estimación mejorada, tanto con respecto a la "perfección", como a la confiabilidad de los resultados. En la práctica, una redundancia entre  $1.8 \leq \eta \leq 2.8$ , se ha encontrado útil. Si se eligen valores pequeños de  $\eta$ , los errores de medición son inadecuadamente filtrados. Además, hay contingencias en las mediciones, interaccionen significativamente con el proceso de estimación. Por otro lado, investigaciones numéricas han mostrado que no se requiere muy alta redundancia, con tal que los datos medidos, y el sistema de transmisión, sean suficientemente confiables. Además, una alta redundancia significa una gran inversión.

Se ha encontrado que el índice  $\eta_k$  es solo notable en su propia vecindad; no se dispersa sobre el total de la red. Así, la redundancia local  $\eta_k = m_k / n_k$  contiene más información que  $\eta$ ;  $m_k$  es el número de mediciones en el bus  $k$ , más todas las mediciones de hasta un bus vecino; mientras  $n_k$  es el número correspondiente de incógnitas.

#### Otro método de detección de errores<sup>(12)</sup>

Cuando no hay datos falsos el índice  $J(\hat{R})$  sigue una distribución chi-cuadrada. El valor calculado de  $J(\hat{R})$  es comparado con una constante calculada de la distribución  $\chi^2$  (umbral de detección). Si  $J(\hat{R})$  excede al umbral, se asume que está presente un dato falso. El umbral de detección se calcula assuming una cierta probabilidad de falsa alarma (probabilidad de un dato falso, cuando no hay). Para el nivel de probabilidad de falsa alarma generalmente asumido, puede determinarse que entre 5 y 10 desviaciones estándar (esto es, entre 5 y 10 desviaciones estándar) no son afectados por la prueba  $J(\hat{R})$ . Por otro lado, si se baja el umbral de detección, entonces puede incrementarse considerablemente el número de falsas alarmas. Esto representa una deficiencia severa de la prueba  $J(\hat{R})$ .

Se presenta aquí un método nuevo utilizado con una excelente eficiencia computacional, a través del uso de análisis de sensibilidad. Este nuevo enfoque de detección se basa en el concepto de medición falsa: una medición que no se fija al resto de las mediciones. La idea básica del nuevo método es comparar el valor medido  $x_k$  de la variable que presenta el residual normalizado más grande, con el valor calculado  $\hat{x}_k$  de la misma variable, obtenido usando un nuevo conjunto de mediciones en el

cual se ignora la medición  $z_i$ .

El estimado  $\hat{x}_i$  puede calcularse usando un análisis de sensibilidad, y está dado por :

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{\sigma_i^2}{\rho_{ii}^2} r_i \quad (27)$$

donde,  $\sigma_i$  es la desviación standard;  $\rho_{ii}^2$  es el (i,i)-ésimo elemento de la matriz de covarianza (ver. 14); y  $r_i$  es el residual.

Si  $z_i$  es el único dato falso,  $\hat{z}_i$  será un buen estimado del valor verdadero  $h_i(x_i)$ , y una estimación del error (en desviaciones standard) estará dado por

$$\hat{b}_i = \frac{z_i - \hat{z}_i}{\sigma_i} = \frac{\sigma_i}{\rho_{ii}^2} r_i \quad (28)$$

Si hay suficiente redundancia, el estimado  $\hat{b}_i$  dará resultados confiables, aún cuando haya más de un dato falso. Note que la ec. (28) da una evaluación de la coherencia entre la medición  $z_i$  y el resto del sistema de medición.

Es sabido que, por ejemplo, 99.7% de las mediciones desarrolladas con el medidor i, deberían de caer dentro del rango de  $\pm 3\sigma_i$ . Si  $\hat{b}_i\sigma_i$  es abanderado fuera de este rango, entonces es probable que éste medidor no funcione bien. Un umbral de detección de  $c = 4\sigma_i$ , se ha adoptado con éxito en las pruebas desarrolladas.

#### Algoritmo total.

1. Determine el estimado  $\hat{x}$ , con el método adecuado.
2. Calcule los residuales normalizados

$$r_j^N = \frac{r_j - \hat{b}_j}{\rho_{jj}} \quad (29)$$

para todas las mediciones  $j$ .

3. Encuentre la medición  $i$  que tiene el residual normalizado más grande (valor absoluto  $|r_i^N|$ ).
4. Determine el error estimado  $\hat{b}_i$  dado por:

$$\hat{b}_i = \frac{\sigma_i}{\rho_{ii}} r_i^N \quad (30)$$

5. Checar si la medición  $x_i$  es un dato falso:
  - (a) Si  $|\hat{b}_i| > \sigma$ , ir al paso 6;  $x_i$  es dato falso
  - (b) De otra manera, la estimación es completa
6. Borrar  $x_i$  del sistema de medición e ir al paso 1.

Se han comparado exitosamente resultados numéricos de este método con los del método  $J(\hat{\mathbf{x}})$ . La *fig. 16*, muestra claramente porque se dice que el nuevo enfoque (curva lineal) es más confiable que la prueba  $J(\hat{\mathbf{x}})$  (curva cuadrática): si el umbral de detección de  $J(\hat{\mathbf{x}})$  es alto (correspondiente a baja probabilidad de falsa alarma), entonces, los grandes como 20 desviaciones estándar (o más), no serán detectados; por otro lado, si el umbral de detección es bajo, la probabilidad de falsa alarma será alta, y será frecuente la detección de datos falsos no existentes.

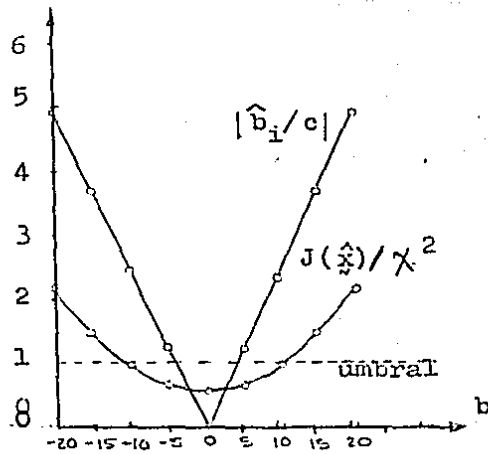


Fig. 16 Curvas típicas



CAPITULO 4

EL PROBLEMA DE LA OBSERVABILIDAD

## INTRODUCCION

Uno de los primeros estudios publicados sobre observabilidad en sistemas de potencia, está la referencia (1), que fue de gran trascendencia en estudios posteriores sobre el tema. Dicho trabajo pertenece al campo de la observabilidad topológica, y a continuación presento un resumen de sus conclusiones.

Si se intenta la estimación de estado de un sistema, el algoritmo de observación no podrá realizarse, a causa de la singularidad de la matriz de coeficientes.

Si tenemos una red con condiciones de flujo en líneas únicamente, una condición necesaria y suficiente para la observabilidad, es que el conjunto de líneas medidas sea capaz de formar un árbol de la red. Esto puede verse de la forma siguiente:

Consideremos la expresión para el flujo en una línea

$$S_{ij} = |V_i^2| Y_{ij}^* - V_i^* V_j^2 (Y_{ij}^* + YS_{ij})$$

donde,

$V_i$  = voltaje complejo del nodo  $i$

$Y_{ij}$  = impedancia serie de la línea

$YS_{ij}$  = admitancia shunt de la línea

Si se conoce el voltaje complejo en un extremo de la línea, entonces se podrá determinar el del otro extremo. Asumamos, por simplicidad, que el bus de referencia tiene medición de magnitud de voltaje. En consecuencia, el voltaje complejo es determinado.

Ahora, por cada línea se obtiene un extremo de todas las líneas medidas, las cuales forman un árbol, pueden determinarse. Este procedimiento puede ser repetido para las líneas restantes, si el conjunto de mediciones forma un árbol de la red, incluso las líneas no medidas serán determinadas y, por lo tanto, el sistema

voltajes de línea pueden ser medidos.

En el caso que se considere un sistema de líneas de transmisión observable e independiente de las demás variables. Una isla observable es un conjunto de buses de la red entre los cuales pueden determinarse los flujos de línea.

Consideremos ahora una red en la cual están presentes sólo mediciones de inyección de potencia, y una magnitud de voltaje.

Un sistema de  $N$  buses, tiene un vector de estado de dimensiones  $2N - 1$ , y como resultado, es necesario que haya mediciones de inyección de potencia compleja en al menos  $N - 1$  de los buses, de modo que haya al menos tantas mediciones como incógnitas.

Asumamos, sin pérdida de generalidad, que la magnitud de voltaje se mide en el bus 1, y además, que hay mediciones en los buses del 2 al  $N$ . La inyección de potencia en el bus 1 viene dada por

$$S_1 = V_1 \sum_{j=1}^N Y_{1j}^* V_j^*$$

$$S_1 = V_1 \left[ \sum_{j=2}^N Y_{1j}^* V_j^* + Y_{11}^* V_1^* \right]$$

En notación matricial, tenemos

$$S = (\text{diag } V) (Y^* V^* + Y_1^* V_1^*)$$

Parece razonable por lo tanto, que existirá una relación única entre  $S$  y  $V$ . En otras palabras, dos vectores diferentes de  $V$  no pueden producir el mismo conjunto de inyecciones complejas. Por lo tanto,  $V$  se determina únicamente por  $S$  y viceversa.

En lugar que continúen estudiando, tanto de flujo como de inyecciones, los flujos de potencia pueden determinarse a partir de los flujos, se usan para estudiar a las no observables. Luego, una observación de flujo en un bus no observable que llegará

... mediciones observadas, y el flujo generado. Determinados las relaciones observadas.

Como una conclusión, podemos decir que existe una correspondencia uno a uno, entre las leyes de la red y el conjunto de mediciones.

En 1980, la referencia [18], provoca una fuerte tendencia por la observabilidad topológica. A continuación se presenta un resumen de este trabajo.

Se consideran mediciones de magnitud de voltaje, flujo real y reactivo en líneas, e inyecciones de potencia real y reactiva en buses. La red medida, consistiendo del sistema de potencia, junto con un conjunto especificado de mediciones, se dice observable si las ecuaciones no-lineales de estimación pueden resolverse iterativamente, para dar un estimado  $x$  de voltajes de bus. El cálculo de  $x$  generalmente requiere que, en cada iteración, la matriz jacobiana de  $h(x)$  sea de rango completo. Una deficiencia en el conjunto de medición, por lo tanto, se exhibe con una matriz jacobiana de menor rango.

Ahora, el punto de arranque usual para el cálculo iterativo de la estimación de estado, es aquel que supone todos los ángulos en cero, y todas las magnitudes de voltajes igual a la unidad. Adicionalmente, durante las iteraciones, los estados estimados permanecen en la vecindad de los puntos de arranque. Consecuentemente, generalmente es suficiente examinar el rango de la matriz jacobiana en el punto de arranque. El jacobiano de  $h(x)$  puede aproximarse a:

$$\frac{dh}{dx} \approx \begin{bmatrix} H_{\delta} & 1 \\ 0 & H_V \end{bmatrix} \quad (1)$$

Esta aproximación, se basa en el desacoplamiento E-S / E-V, y es válido para redes con líneas que tienen una alta relación X/R y admitancias a tierra despreciables. El valor de esta aproximación se basa en la observación de que la estructura de las matrices  $H_G$  y  $H_V$  se determina solamente por la topología de la red, y los tipos y localizaciones de las mediciones. Esta observación hace posibles ideas una prueba combinatoria de los rangos de  $H_G$  y  $H_V$  que es puramente combinatoria; esto es, las pruebas involucran cálculos sin punto flotante.

Con cada una de las matrices  $H_G$  y  $H_V$ , se puede asociar una red medida  $X = [B(X), H(X)]$ , que consiste de una gráfica  $G(X)$  y un conjunto  $H(X)$  de nodos y ramos de  $G(X)$ , en los cuales están localizadas las mediciones. En el caso de la matriz de mediciones de potencia real  $H_G$ , la gráfica  $G(X)$  consiste del diagrama unifilar del sistema de potencia, y el conjunto de mediciones  $H(X)$  consiste de cada nodo en el cual hay una medición de inyección de potencia real, y cada rama  $(i, j)$  en la cual hay mediciones de flujo de potencia. Cuando una rama  $(i, j)$  dispone de mediciones de potencia compleja, real y reactiva, la presencia de una medición de voltaje, o de potencia compleja, en  $H_V$  es suficiente para probar el rango de  $H_G$ .

Para establecer la conexión entre la teoría combinatoria de observabilidad y la matriz de medición  $H$ , se requieren varias definiciones.

Un árbol es una subgráfica de  $G(X)$  que tiene los mismos que el número de componentes (nodos conectados) de  $G(X)$ . El árbol es un árbol si cada rama  $(i, j)$ , que es el árbol, árbol

de extensión completa, o un árbol que contiene todo rango de X.

El resultado final de la investigación observabilidad presentada en este trabajo, puede describirse así:

*Proposición 1.* La red semica X es observable si y sólo si, X contiene un árbol de extensión completa de rango completo.

En resultado final, involucra la noción de medición crítica; una medición se dice crítica, si su pérdida causa que el rango de la matriz de medición se disminuya. Así, una medición crítica proporciona información independiente que no puede corroborarse con otras mediciones.

#### Metodo de observabilidad de localización (20), (21)

En la etapa de diseño, surgen naturalmente las siguientes cuestiones, respecto al problema de localización:

(1) Hay mediciones suficientes para hacer posible la estimación de  $\theta$ ?

(2) Si no, ¿cómo debería ser la red a diseñar adicional, de modo que sea posible la estimación de estado?

La observabilidad depende del número de mediciones y de su distribución geográfica. La primera cuestión expuesta aquí, se relaciona con la prueba de observabilidad. La segunda cuestión, es la colocación de mediciones para hacer que una red no observable, se vuelva observable.

Los algoritmos para la prueba de observabilidad, basados en enfoques heurísticos que se resumieron al principio, resultaron ser computacionalmente muy complejos, por lo que este método resulta más atractivo.

#### El problema de estado largo plazo

Aquí, discutiremos el problema de estado largo plazo, que tiene las

algunas características que el flujo de carga DC ( $\mathbf{e} = \mathbf{F}$ ).

Pueden usarse las mismas aproximaciones al obtener la matriz  $\mathbf{B}'$  del flujo de carga desacoplado rápido (o la matriz  $\mathbf{B}$  del flujo de carga DC), para simplificar la matriz jacobiana  $\mathbf{H}_{PE}$  (estimador desacoplado), así como la matriz de ganancia  $\mathbf{G}_e$ :

- a) Perfil de voltaje plano, esto es,  $V = 1.0$  p.u.;  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$
- b) Susceptancias de líneas aproximadas por  $1/x$ , donde  $x$  es la reactancia de la línea.

Llamemos  $\mathbf{G}_e^0$  la matriz de ganancia resultante.

El estimador de estado DC, calcula los ángulos del voltaje, al resolver la ecuación:

$$\mathbf{G}_e^0 \mathbf{e} = \mathbf{H}_{PE}^t \mathbf{W}_P \mathbf{z}_P \quad (2)$$

que básicamente corresponde a desarrollar la primera  $\mathbf{e}$ -iteración del estimador de estado desacoplado rápido.

El estimador de estado linealizado (2), es equivalente a un problema de mínimos cuadrados lineales. Escribamos  $\mathbf{H} = \mathbf{W}_P^{0.5} \mathbf{H}_{PE}$  y  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{W}_P^{0.5} \mathbf{z}_P$ . Entonces, (2) es equivalente a la solución del siguiente problema de mínimos cuadrados: determinar un vector  $\mathbf{e}$  que minimiza la suma de cuadrados del vector residual  $\mathbf{r}$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{PE}^t \mathbf{W}_P^{0.5} \mathbf{W}_P^{0.5} \mathbf{H}_{PE} \end{bmatrix} \mathbf{e} = \mathbf{H}_{PE}^t \mathbf{W}_P^{0.5} \mathbf{W}_P^{0.5} \mathbf{z}_P$$

$$\mathbf{H}^t \mathbf{H} \mathbf{e} = \mathbf{H}^t \boldsymbol{\xi} \quad (3)$$

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{H} \mathbf{e} \quad (4)$$

La teoría de observabilidad que se presenta aquí, se basa en el estimador de estado linealizado (3). Puede hacerse lo mismo aproximadamente para  $\mathbf{W}_P$  y  $\mathbf{V}$  en el caso de un sistema de potencia realista.

Para la potencia real, nos interesan los flujos de potencia en la red; los flujos de potencia en ella. Dado un vector de estado  $e$ , el flujo de potencia a través de la línea que conecta los buses  $k$  y  $m$  es igual a:  $(e_k - e_m) / \delta_l$ . Para la observabilidad, sólo nos interesa el hecho de si el flujo es cero o no, no el valor numérico real del flujo, cuando es no-cero. Por lo tanto, por simplicidad tomamos  $\delta_l = 1$ , y el flujo será igual a la diferencia  $(e_k - e_m) / \delta_l$ . Usando la matriz de incidencia de la red  $A$ , el conjunto de flujos  $\delta$ , puede escribirse como:

$$\delta = A^t e \quad (1)$$

Así,

$$\delta_l = \begin{matrix} & k & & m \\ \begin{matrix} 1 & & & -1 \end{matrix} & & & \end{matrix} e \quad (6)$$

Por otro lado, dado el vector de estado  $e$ , el conjunto de mediciones se escribe como:

$$z = H e \quad (7)$$

Para la potencia real, hay dos tipos de mediciones:

i) Flujo de línea. Si la medición  $i$  es el flujo en la línea que va del bus  $k$  al  $m$ , entonces:

$$z_i = \begin{matrix} & k & & m \\ \begin{matrix} h_i & & & -h_i \end{matrix} & & & \end{matrix} e \quad (8)$$

ii) Inyección. Si la medición  $i$  es la inyección en el bus  $k$ , donde el bus  $k$  es la conectada a los buses  $m, n, l$ , entonces:

$$z_i = \frac{e_k - e_l}{h_{kl}} + \frac{e_k - e_m}{h_{km}} + \frac{e_k - e_n}{h_{kn}}$$



$$\zeta_l = \begin{bmatrix} h_l & \Sigma & -h_m & -h_n \end{bmatrix} e \quad (9)$$

donde,  $\Sigma = h_m + h_l + h_n$

Para el modelo de potencia reactiva hay un tipo adicional de medición, que es la medición de magnitud de voltaje. La correspondiente al modelo de potencia real, sería la medición del ángulo de voltaje. Aunque esta medición no está disponible realmente, es útil imaginársela.

iii) Voltaje. Si la medición  $i$  es la  $i$ -ésima del voltaje en el bus  $i$ , entonces:

$$\zeta_i = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} e \quad (10)$$

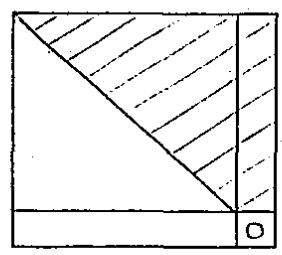
Indicativamente, llamaremos una red *observable*, si cualquier flujo en la red puede ser observado por algún tipo de medición en un instante de tiempo, o en otros períodos, siempre que en cualquier flujo presente en la red, al menos una de las mediciones debería leer cero. Esta es equivalente a decir que la red es observable si, siempre que todas las mediciones sean igual a cero, implica que todos los flujos son cero. Cuando una red es *no observable*, significa que es posible tener todas las mediciones cero, sin embargo, flujos no-cero en la red. En tales casos, aquellas ramas que tienen flujo no-cero serán llamadas *ramas inobservables*.

**Definiciones.** Una red es tipo observable si para todo  $e$ , tal que  $h^l e = 0$ ,  $h^m e = 0$ . Cualquier vector  $e^*$ , para el cual  $h^l e^* = 0$ ,  $h^m e^* \neq 0$ , es a veces llamado *vector inobservable*.

**Teorema.** Dadas que cualquier medición de voltaje en un bus  $i$  es

siguientes enunciados de equivalencia:

- (i) La matriz  $A$  es invertible.
- (ii) Siempre  $\bar{B}$  es obtenida de  $\bar{H}$  al ignorar cualquier columna, entonces  $\bar{H}$  es de rango completo.
- (iii) La factorización triangular reduce la matriz de ganancia  $G = H^T H$  a la siguiente forma.



donde, el área sombreada corresponde a posibles elementos no-cero.

Prueba.

Postulado:  $A^T e = 0$

$$A^T e = 0 \iff e = \alpha e$$

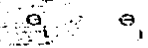
donde,  $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ ,  $\alpha =$  cualquier número real.

Si  $e = \alpha e$ , entonces:

$$\begin{aligned} \leftarrow A^T e &= A^T (\alpha e) = \alpha A^T e \\ &= \alpha (0) = 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$  Si  $A^T e = 0$ , implica que si tengo una línea de transmisión

$i-j$ :



1) para toda  $e$ ,  $A^T e = 0$  que  $e = 0$ , se tiene que

$$A^T e = 0$$

2) para toda  $e$ ,  $A^T e = 0$  que  $e = 0$ , se tiene que

$$e = \alpha e$$

$$\iff A^T e = 0 \iff e = \alpha e$$

Quando quitamos la  $n$ -ésima columna

$$\bar{H} \bar{e} = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_{n-1} \end{bmatrix} = 0$$

Esto es idéntico a tener :

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Por lo sé que

$$e = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \phi = 0$$

Tenemos que

$$H e = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_n \end{bmatrix} = 0$$

que equivale a

$$\bar{H} \bar{e} = h_n e_n = 0$$

Por lo tanto,  $e_n = 0$  (lo que implica que  $\phi_n = 0$ )

$$\bar{H} \bar{e} = -h_n$$

$$\bar{H} e_{n-1} = -h_n$$

$e_{n-1}$ , es igual a  $e$ , excepto que sólo contiene  $n-1$  componentes.

Enunciado :  $H$  es de rango completo

$$\bar{H} \bar{e} = 0 \Rightarrow \bar{e} = 0$$

Si  $\bar{H}$  es de rango completo  $\bar{H}^t \bar{H}$  es matriz no-singular.

$\bar{H}$  es de orden  $m \times (n-1)$

$\bar{H}^t \bar{H}$  es de orden  $(n-1) \times (n-1)$

Demostración :

$$\left[ \bar{H}^t \bar{H} \right] \beta = 0 \quad (a)$$

$\beta$  es un vector de  $(n-1)$  componentes.

Suponga que existe solución (de (a)) con  $\beta \neq 0$ ; entonces,

premultiplicando por  $\beta^t$  :  $\beta^t \bar{H}^t \bar{H} \beta = 0$ ;  $(\bar{H}\beta)^t (\bar{H}\beta) = 0$

pero se que

$y^t y$  es sólo una suma de cuadrados, por lo que

$$y^t y = 0, \Rightarrow y = 0$$

Por lo tanto,

$$\bar{H} \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

o sea que la combinación es linealmente independiente.

Así que  $\bar{H}^t \bar{H}$  es no-singular.

Teníamos que

$$\bar{H} e_{n-1} = -h_n$$

Premultiplicando :

$$\begin{aligned} \bar{H}^t \bar{H} e_{n-1} &= -\bar{H}^t h_n \\ e_{n-1} &= -(\bar{H}^t \bar{H})^{-1} \bar{H}^t h_n \end{aligned} \quad (b)$$

Suponga que

$$H e = 0$$

$$\bar{H} \bar{e} + h_n e_n = 0$$

entonces,

$$\bar{H} \bar{e} = -h_n e_n$$

que puede convertirse en

$$\bar{e} = -(C^T H)^{-1} H^T h_n e_n$$

Usando (b) :

$$e = e_{n-1} e_n$$

Por lo tanto, a es cierto.

Sea  $H = (\bar{H}, h_n)$

$$\begin{aligned} G = H^T H &= \begin{bmatrix} \bar{H}^T \\ h_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H} & h_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{H}^T \bar{H} & \bar{H}^T h_n \\ h_n^T \bar{H} & h_n^T h_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como  $\bar{H}^T \bar{H}$  es no-singular, al triangularizar la matriz  $G$ , tomará la forma que muestra (iii).

Nótese que si  $\bar{H}^T \bar{H}$  es no-singular, es exactamente la condición que se necesita para que el estimador (3) tenga una solución única. Así, el teorema implica que una red es observable si y sólo si, el problema de estimación de estado puede resolverse con una solución única.

### Determinación de estados no-observables

Cuando la red es no-observable, procedemos a encontrar un estado inobservable, que es una solución de  $H e = 0$ . La solución de  $H e = 0$  es sensitiva a los valores numéricos de los elementos de  $H$ . Esto es altamente indeseable. El lema de a continuación proporciona una manera alternativa de resolver  $H e = 0$ .

Leema.  $H e = 0$ , si y sólo si  $(H^T H) e = 0$

Prueba. ( $\Rightarrow$ ) Premultiplicando  $H e = 0$  por  $H^T$ .

( $\Leftarrow$ ) Premultiplicando  $(H^T H) e = 0$  por  $e^T$ , resulta en

$$\| H e \|^2 = 0, \text{ que implica que } H e = 0.$$

Cuando la red dada es no-observable, la factorización triangular reduce  $G = H^{-1}H$  a la forma siguiente:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{[Matriz superior triangular]} & \\ \hline \text{[Matriz inferior triangular]} & 0 \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

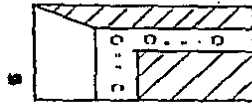
Para cualquier  $e_b$  arbitrario, por ejemplo,  $e_b = (0, 1, 2, \dots)^t$ , resolver la mitad superior de (11) para un  $e_a$ , entonces  $(e_a, e_b)$  es un estado inobservable.

Una manera alternativa de obtener el mismo estado inobservable  $(e_a, e_b)$  en (11) es: (i) reemplazar los elementos diagonales de la matriz inferior derecha por  $1$ 's, y (ii) reemplazar el lado derecho correspondiente de (11) por  $(0, 1, \dots)^t$ , (iii) resolver la ecuación resultante:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{[Matriz superior triangular]} & \\ \hline \text{[Matriz inferior triangular]} & \text{[Matriz inferior triangular con 1's]} \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} e_a \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{[Matriz inferior triangular con 1's]} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Note que (12) es idéntica a la ecuación de estimación de estado (3), con las pseudomediciones de los ángulos de voltaje en los buses correspondientes a  $e_b$ , y todas las otras mediciones puestas en cero.

**Teorema.** En la factorización triangular de la matriz de potencia  $G$ , si se encuentra un pivote cero, entonces el resto del renglón y la columna son ceros; es decir,  $G$  es de la forma:

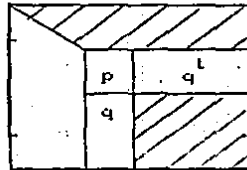


Prueba. Sea  $H = [H_1 \ H_2 \ H_3] \in \mathbb{R}^{n \times 3}$  donde  $h_2$  es una columna.

$$G = H^t H = \begin{bmatrix} H_1^t \\ H_2^t \\ H_3^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} H_1^t H_1 & H_1^t h_2 & H_1^t H_3 \\ h_2^t H_1 & h_2^t h_2 & h_2^t H_3 \\ H_3^t H_1 & H_3^t h_2 & H_3^t H_3 \end{bmatrix}$$

La factorización triangular reduce  $G$  a :



donde,

$$p = h_2^t h_2 - h_2^t H_1 (H_1^t H_1)^{-1} H_1^t h_2$$

$$q = h_2^t H_3 - h_2^t H_1 (H_1^t H_1)^{-1} H_1^t H_3$$

La situación aquí, es que tenemos  $p = 0$ . Se prueba primero la siguiente aseveración :

$$H_1^t H_1 \text{ no singular, y}$$

si y sólo si

Las columnas de  $H_1$  son linealmente independientes, y  $h_2 = H_1 \alpha$ , para algún vector  $\alpha$ .

← Al sustituir  $h_2 = H_1 \alpha$  en la expresión de  $p$ , obtenemos 0.

⇒ Suponga que las columnas de  $(H_1 \ h_2)$  son linealmente independientes entonces, la matriz

$$\begin{bmatrix} H_1^t H_1 & H_1^t h_2 \\ h_2^t H_1 & h_2^t h_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

es no singular. El determinante de la matriz (13), es igual al producto del  $\det(H_1^t H_1)$  del  $(p)$ . Ya que  $H_1^t H_1$  es no singular,  $p \neq 0$ . Hemos llegado a una contradicción. Por lo tanto, se prueba la aserción. Usando el resultado de que  $p = 0$ , implica  $h_2 = H_1 \alpha$ , sustituyendo en  $q$ , se obtiene  $q = 0$ .

La implicación de este teorema es que siempre que se encuentra un pivote cero, durante el proceso de factorización triangular de  $G$ , el correspondiente  $e$  pertenece a  $e_0$ , y puede serle asignado un valor arbitrario en la obtención de un estado no observable; o equivalentemente, se adiciona una  $e$ -pseudomedición a ese nodo. En otras palabras, el pivote cero en  $G$  se reemplaza por un  $\epsilon$ , y el correspondiente lado derecho  $g$ , se reemplaza por el valor asignado a la  $e$ -pseudomedición. La factorización triangular puede entonces continuar. Una red es observable, si y sólo si, hay un sólo pivote cero, que pertenece a  $e_0$ , y que es que cuando la red es no observable, se encuentra un pivote cero en la factorización de  $G$ .



adicionales para hacer la observación deseada. La medición que desarrolla un observador, puede ser una pseudomedición a la vez, los pseudosdatos para pseudosmediciones adicionales, para hacer la red totalmente observable, con las mediciones de inyección en nodos que pertenecen a diferentes islas observables. La pseudomedición adicional, si no es redundante, hará que algunas ramas inobservables se vuelvan observables; así, se van agrandando las islas. Para garantizar que la nueva medición de inyección no sea redundante, deberá seleccionarse en un nodo en el cual, la potencia de inyección calculada ( estimada ) sea no-cero. Así, se puede diseñar un algoritmo para colocación de mediciones, que mezcle en sí mismo los conceptos básicos del algoritmo de observabilidad. El algoritmo presentado enseguida es una expresión concreta de tal idea. El requerimiento computacional del algoritmo depende de un esquema eficiente para renovar los factores triangulares de la matriz de ganancia, después que se adiciona una nueva medición. Este se da en el apéndice C.

1. Formar la matriz de ganancia  $G_0$ .
2. Desarrollar la factorización triangular de  $G_0$ , introduciendo e-pseudomediciones siempre que se encuentre un pivote cero. Si sólo ocurre un pivote cero, termina.
3. Resolver la ec. del estimador DC para  $e$ , considerando todos los valores medidos igual a cero, excepto para las e-pseudomediciones que asumen los valores  $e_k = 0, 1, 2, \dots$ .
4. Determine el conjunto de nodos que no tengan medición de inyección, y cuyos ramos adyacentes tienen al menos un flujo no-cero. Estos nodos son candidatos a tener pseudomedición de

- ing. 5. Introducir una pseudocondición de supresión en uno de los mediciones candidatas, y renovar los factores  $L D L^T$  de  $G_e$ , usando el algoritmo del apéndice C.
6. Resolver el estimador BC para  $e$ , como en 3. Calcular los residuos  $e_k^{(m)} - e_k$  para todas las pseudocondiciones con residual no-cero. Renovar los factores  $L D L^T$  de  $G_e$  usando el algoritmo del apéndice C.
7. Regresar al paso 3.

### Ejemplo.

Considere la red inobservable de la fig. 17.

1. La matriz de ganancia es:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 10 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Por eliminación Gaussiana, tenemos:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow e_5 \\ \leftarrow e_6 \end{matrix}$$

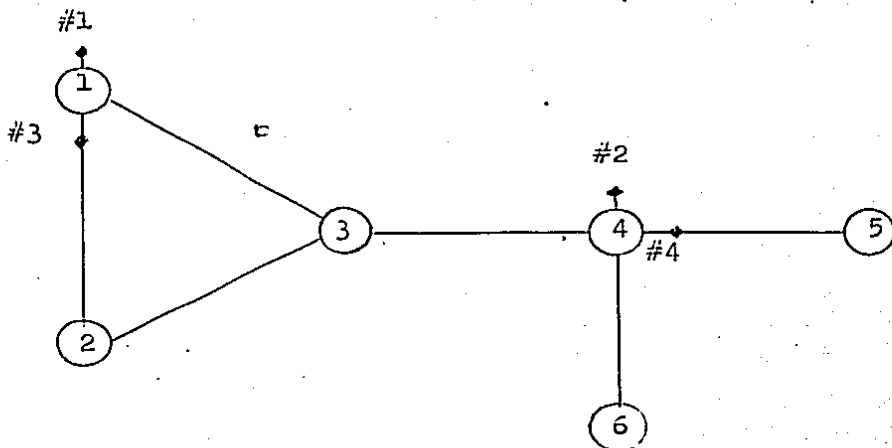


Fig. 17 Red de seis nodos del ejemplo

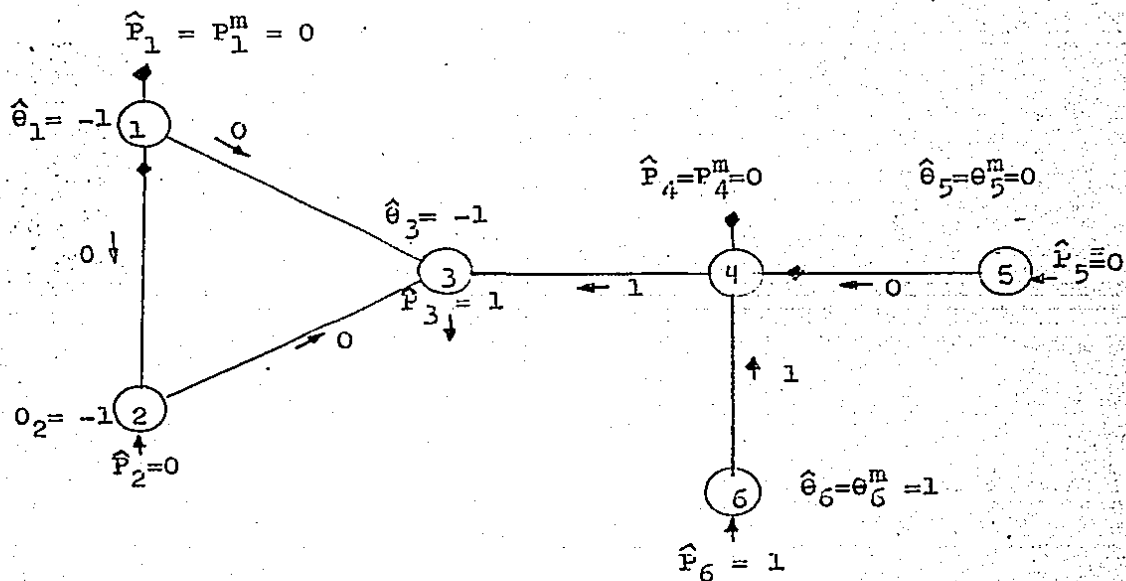


Fig. 16 Estado de la red durante la primera iteración



$$\hat{\theta} = (1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 3, 4)$$

Los observados son  $e_9^m = 0, e_{10}^m = 1/4$  y  $e_{11}^m = e_{12}^m = 1/4$ .

Se remueve la pseudomedición  $e_9^m$ . Los nuevos factores  $L, D, L^t$  son los mismos que en el paso 3, excepto  $D(6,6) = 1/3$ .

3. Resolver  $\hat{\theta} \theta = H^t P_p^m P_p^m$  para  $\hat{\theta}$ , considerando  $F_1^m = F_4^m = P_6^m = F_{1,2}^m = F_{4,5}^m = 0$  y  $e_9^m = 0$ , se tiene

$$\hat{\theta} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

4. La red es observada.

Las características principales del algoritmo de observabilidad presentada son:

- Simpleza
- Usa subrutinas ya presentes en el programa de estimación por ajuste
- Es numéricamente estable y robusto



## Recomendaciones para trabajos futuros.

Durante la elaboración de éste trabajo se programó un algoritmo de estimación desacoplado , utilizando algunas recomendaciones generales para desacoplar, lográndose hacer converger la estimación con resultados muy aproximados a los obtenidos con el programa mostrado aquí cuando la relación  $X / R$  es grande.

Sería conveniente trabajar todos los métodos de la referencia ( 11. ) sobre el problema de estimación desacoplado , y abordar la detección e identificación de errores como lo propone tal referencia.

También dentro del ámbito de Estimación , podría investigarse con algún sistema de potencia grande ( para lo que se requeriría un programa que utilice técnicas apropiadas de programación ) el problema del " mal condicionamiento" de las ecuaciones normales , y trabajar con algún método de evitar ése problema.

En lo referente al problema de Observabilidad , todavía hay mucho por hacer , ya que siguen publicándose nuevos métodos sobre los que se podría trabajar , P. 23 , IEEE T-PWRS mayo 1987 , pp. 331 - 336 .

Por otro lado , una vez teniendo la base de datos que proporciona un estimador , puede investigarse sobre aplicaciones posibles , tales como Análisis de Seguridad , Estudios de Contingencias , Despacho Económico de Carga , ó Control Automático de Generación.

Con los programas aquí listados , se podría hacer mucho -  
en la manera de hacerlos interactivos , sobre todo pensan  
do que se pueden utilizar con fines didácticos , apoyando  
a alguna materia de la maestría.

También sería muy interesante conocer hasta dónde ha lle-  
gado Comisión Federal de Electricidad en la implementa -  
ción de técnicas modernas de operación y control del sis-  
tema de potencia.



## BIBLIOGRAFIA

- 1.- Ilustración de conceptos básicos de estimación de estado.  
F. Aboytes  
CENACE, Feb 1967
- 2.- A unified approach to on-line network modeling for security analysis  
A. Monticelli & F. F. Wu  
IFAC Electric Energy Systems  
Rio de Janeiro, Brasil 1985
- 3.- Real time data processing using state estimation in electric power systems  
E. Handschin  
Real time control of electric power systems, Chap. 2  
Elsevier, Amsterdam 1972
- 4.- Un método eficiente para eliminar errores anómalos de medición en el proceso de estimación de estado  
Eduardo Arriola V., Rafael Lopez L., Mauricio Mier M.  
MEXICON 81
- 5.- State estimation in power systems : detecting bad data through the sparse inverse matrix method  
F. Brucicolle  
IEEE Trans. on PAS, Vol. 97, No. 3 May/June 1978
- 6.- Estimación de estado en sistemas eléctricos de potencia  
F. Aboytes  
Univ. Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco  
México, D.F., Nov. 1978
- 7.- Power system Static-State estimation, part I-II  
Fred C Schweppe

- 8.- State estimation in power systems, part I-II  
Robert E. Larson, W. F. Tinney & J. Peschon  
IEEE Trans on PAS, Vol 89, No. 3, Mar 1970
- 9.- Bad data analysis for power systems state estimation  
E. Handschin, F. C. Schweppe, J. Kohlas  
IEEE Trans on PAS, Vol 94, No. 2, Mar/Apr 1975
- 10.- State estimation for power systems : detection & identification of gross measurement errors  
J. F. Dopazo, O. A. Kilitin, A. M. Sasseon  
PICA 1975
- 11.- Fast decoupled state estimation and bad data processing  
A. Garcia, A. Monticelli, F. Abreu  
IEEE Trans. on PAS, Vol 98, No. 5, Sep/Oct 1979
- 12.- Reliable bad data processing for real time state estimation  
A. Monticelli, A. Garcia  
IEEE Trans. on PAS, Vol 102, No. 5, May 1983
- 13.- A robust numerical technique for power system state estimation  
A. Simoes-Costa, V. E. Courtes  
IEEE Trans. on PAS, Vol. 100, No. 2, Feb 1981
- 14.- Introduction to mathematical statistics  
Hogg - Craig  
The McMillan Company
- 15.- Probability, Random variables and Stochastic processes  
A. Papoulis  
McGraw - Hill
- 16.- Apuntes elaborados en el Instituto de Investigaciones

Electricidad, sobre estimación de estado.

División : Sistema de Potencia

- 17.- An algorithm for observability determination in power system state estimation

K. A. Clements, B. F. Wollenberg

IEEE PES Summer Meeting 1975

- 18.- Power system observability : a practical algorithm using network topology

G. R. Krumholz, K. A. Clements, P. W. Davis

IEEE Trans. on PAS, Vol 99, No. 4, Jul/Ago 1980

- 19.- Power system topological observability using a direct graph-theoretic approach

IEEE Trans. on PAS, Vol 101, No. 3, Mar 1982

- 20.- Network observability : theory

A. Monticelli & Felix F. Wu

IEEE Trans. on PAS, Vol. 103, No. 5, May 1985

- 21.- Network observability : identification of observable islands and measurement placement

A. Monticelli & Felix F. Wu

Idem.

- 22.- Linear Models

S. R. Searle

John Wiley & Sons

APENDICE I

1 - i

DERIVACION DE LAS ECUACIONES DE MINIMOS CUADRADOS

## Derivación de las ecuaciones de mínimos cuadrados

A menudo uno se enfrenta con problemas en los que se han obtenido datos, por medio de mediciones o tomando muestras de algún proceso. Además, las cantidades medidas son función de otras variables que deseamos estimar. Esas otras variables, serán llamadas las *variables de estado*, y designadas por  $x$ , donde el número de variables de estado es  $N$ . Las mediciones serán llamadas  $z$ . Asumiremos aquí que el proceso que nos interesa puede modelarse usando un *modelo lineal*. Entonces, decimos que cada medición  $z_i$  es una función lineal de los estados  $x_i$ , esto es,

$$z_i = h_i(x) = h_{i1}x_1 + h_{i2}x_2 + \dots + h_{iN}x_N \quad (\text{A.1})$$

Podemos escribir todas las ecuaciones de medición en una forma compacta :

$$z = H x \quad (\text{A.2})$$

donde,

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$$
$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mN} \end{bmatrix}$$

Con  $m$  mediciones pueden presentarse tres casos; esto es,  $N$  (el número de estados) es menor que  $m$ ; igual a  $m$ ; o mayor que  $m$ .

### El caso sobredeterminado ( $m \geq N$ )

En este caso tenemos más mediciones que variables de estado, por lo tanto, podemos escribir más ecuaciones  $h_i(x)$ , que nuestras incógnitas  $x_j$ . Una manera de estimar las  $x_j$ 's es minimizar la suma de cuadrados de la diferencia entre los valores medidos y los

estimados; que a su vez, son función de los estimados  $x_i$ . Esto es, deseamos minimizar,

$$J(x) = \sum_{i=1}^M [z_i - h_i(x_1, x_2, \dots, x_N)]^2 \quad (\text{A.3})$$

Esta ecuación puede escribirse como

$$J(x) = \sum_{i=1}^M [z_i - h_i^t(x)]^2 \quad (\text{A.4})$$

y esto puede escribirse también como

$$J(x) = (z - Hx)^t (z - Hx) \quad (\text{A.5})$$

Si deseamos encontrar el valor de  $x$ , que minimiza  $J(x)$ , podemos tomar la primera derivada de  $J(x)$  con respecto a cada  $x_j$  e igualar esas derivadas a cero. Esto es,

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x_j} = 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, N \quad (\text{A.6})$$

Tenemos que  $\nabla_x J(x) =$

$$\nabla_x J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial J(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial J(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Entonces, la meta de forzar cada derivada a cero puede escribirse como:

$$\nabla_x J(x) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Para resolver este problema, primero expandamos (A.5)

$$\begin{aligned} J(x) &= (z - Hx)^t (z - Hx) \\ &= z^t z - x^t H^t z - z^t Hx + x^t H^t Hx \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

el segundo y tercer término de (A.9) son idénticos:

$$J(x) = z^t z - 2z^t Hx + x^t H^t Hx \quad (\text{A.10})$$

Antes de proceder, derivemos unas relaciones.

El *gradiente*, es siempre un vector de primeras derivadas, de una función escalar que es en sí misma una función de un vector. Así, si definimos  $F(y)$  como una función escalar, entonces su gradiente  $\nabla_y F$  es :

$$\nabla_y F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Definiendo como  $F$  :

$$F = y^t b = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

donde,  $b$  es un vector de constantes  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; tenemos que  $F$  puede expandirse como

$$F = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla_y F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial y_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = b \quad (\text{A.13})$$

Es obvio que

$$F = b^t y = y^t b \quad (\text{A.14})$$

Por lo tanto :

$$\nabla_y F (b^t y) = b$$

Suponga que escribimos el vector  $b$  como el producto de una matriz  $A$  y un vector  $u$ .

$$b = A u$$

Entonces, de eq. (A.11),

$$F = y^t b = y^t A u$$

Podemos decir que

$$\nabla_y F = A u \quad (A.15)$$

Similarmente, podemos definir

$$b^t = u^t A$$

Si tomamos F como se muestra en (A.14)

$$F = b^t y = u^t A y$$

entonces

$$\nabla_y F = A^t u \quad (A.16)$$

Finalmente, vemos que F es una función escalar que es cuadrática, a saber,

$$F = y^t A y$$
$$= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$
$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N y_i a_{ij} y_j \quad (A.17)$$

Entonces

$$\nabla_y F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_{11}y_1 + 2a_{12}y_2 + \dots \\ 2a_{21}y_1 + 2a_{22}y_2 + \dots \\ \vdots \\ \dots \end{bmatrix}$$



$$= 2 A y \quad (A.18)$$

En suma, tenemos

$$\begin{array}{ll} 1. & F = y^t b & \nabla_y F = b \\ 2. & F = b^t y & \nabla_y F = b \\ 3. & F = y^t A u & \nabla_y F = A u \\ 4. & F = u^t A y & \nabla_y F = A^t u \\ 5. & F = y^t A y & \nabla_y F = 2 A y \end{array} \quad (A.19)$$

Usemos ahora la ec. (A.19) para derivar el gradiente de  $J(x)$  que muestra la ec. (A.10). El primer término,  $z^t z$  no es función de  $x$ , así que puede descartarse. El segundo término es de la misma forma que (4.) en ec. (A.19), de modo que

$$\nabla_x ( -2 z^t H x ) = -2 H^t z \quad (A.20)$$

El tercer término es igual a (5.) en ec. (A.19), con  $H^t H$  reemplazando a  $A$ , entonces

$$\nabla_x ( x^t H^t H x ) = 2 H^t H x \quad (A.21)$$

De ecuaciones (A.20) y (A.21) :

$$\nabla_x J = -2 H^t z + 2 H^t H x \quad (A.22)$$

o

$$x = ( H^t H )^{-1} H^t z \quad (A.23)$$

Si hubiéramos querido poner un peso diferente  $w_i$  a cada medición, podríamos haber escrito la ec. (A.4) como

$$J(x) = \sum_{i=1}^M w_i [ z_i - h_i^t(x) ]^2 \quad (A.24)$$

que puede escribirse como :

$$J(x) = ( z - H x )^t W ( z - H x )$$

donde,  $W$  es una matriz diagonal. Entonces :

$$J(x) = z^t W z - x^t H^t W z - z^t W H x + x^t H^t W H x$$

Si volvemos a usar la ec. (A.19), obtendremos

$$\nabla_x J = -2 H^t W z + 2 H^t W H x$$

y

$$\nabla_x J = 0$$

nós da

$$x = (H^t W H)^{-1} H^t W z \quad (A.25)$$

### Caso m = N

En este caso, el número de mediciones es igual al número de variables de estado, y puede ser resuelto para  $x$  directamente al invertir  $H$ :

$$x = H^{-1} z \quad (A.26)$$

### Caso indeterminado (m < N)

En este caso tenemos menos mediciones que variables de estado. En tal caso, es posible resolver para muchas soluciones  $x^{est}$  que causan que  $J(x)$  sea cero. La técnica de solución usual es encontrar el  $x^{est}$  que minimiza la suma de los valores solución. Esto es, encontramos una solución tal que

$$\sum_{j=1}^N x_j^2 \quad (A.27)$$

sea minimizado. Para hacer esto, tratamos el problema como uno de minimización restringida, y usamos multiplicadores de Lagrange.

Formulamos el problema como:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{j=1}^N x_j^2 \quad (A.28)$$

$$\text{Sujeto a} \quad z_i = \sum_{j=1}^N h_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, M$$

Este problema de optimización puede escribirse así:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & x^t x \\ \text{Sujeto a} \quad & z = H x \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

El Lagrangiano para este problema es :

$$L = x^t x + \lambda^t (z - H x) \quad (\text{A.30})$$

Debemos encontrar el gradiente de L, con respecto a x y λ.

Puede demostrarse que :

$$\nabla_x L = 2x - H^t \lambda = 0$$

que da

$$x = \frac{1}{2} H^t \lambda$$

y

$$\nabla_\lambda L = z - H x = 0$$

que da

$$z = H x$$

Entonces

$$z = \frac{1}{2} H H^t \lambda$$

o

$$\lambda = 2 (H H^t)^{-1} z$$

y, finalmente :

$$x = H^t (H H^t)^{-1} z \quad (\text{A.31})$$

El lector debe darse cuenta que la matriz inversa mostrada en (A.25), (A.26) y (A.31) puede no ser posible. Esto es, que  $(H^t H)$  sea singular en (A.25);  $H$  sea singular en (A.26);  $(H H^t)$  sea singular en (A.31). En los dos primeros casos, la singularidad implica lo que es conocido como un sistema *no-observable*. En el caso indeterminado ( $m < N$ ), la singularidad implica que no hay una solución única al problema.

APENDICE II

ENUNCIADOS ESTADISTICOS

## Enunciados estadísticos <sup>(110), (114), (115)</sup>

1. El teorema del límite central establece que si un término de error tal como  $\epsilon$ , es una suma de errores de varias fuentes entonces, no importa cual sea la distribución de probabilidad de los errores individuales, su suma  $\epsilon$  tenderá a una distribución que tenderá más y más a la distribución normal en tanto el número de componentes se incrementa.

2. Cuando  $x$  es  $N(0,1)$  entonces  $\sum_{i=1}^n x_i^2$  tiene la distribución  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad. Así, cuando

$x$  es  $N(0,1)$  y  $u = \sum_{i=1}^n x_i^2 = x^T x$ , entonces  $u$  es  $\chi^2$ .

La función de densidad es :

$$f(u) = \frac{u^{0.5n-1} e^{-0.5u}}{2^{0.5n} \Gamma(0.5n)} \quad \text{para } u > 0$$

donde,  $\Gamma(0.5n)$  es la función gamma con argumento  $1/2 n$ .

Para un entero positivo  $n$ ,  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . La función generadora de momentos correspondiente es :

$$M(t) = (1 - 2t)^{-0.5n}$$

por lo que la media y la varianza de  $u$  son  $n$  y  $2n$ , respectivamente.

3. Una variable aleatoria igual a una combinación lineal de variables aleatorias normales, se distribuye normalmente.

4. La relación de una variable distribuida normalmente a una que tiene una distribución  $\chi^2$ , es la base de la distribución  $t$ -Student. Así, cuando  $x$  es  $N(0,1)$  y  $u$  es  $\chi_n^2$ , independiente de  $x$ , entonces

$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$  se distribuye como  $t_{n-1}$

la distribución  $t$  con  $n$  grados de libertad. Su función de densidad es :

$$f(z) = \frac{\Gamma(0.5n + 0.5)}{\sqrt{n\pi} \Gamma(0.5n)} \left[ 1 + \frac{z^2}{n} \right]^{-0.5(n+1)}, \quad -\infty < z < \infty$$

con media cero y varianza  $n/(n-2)$ .

### Análisis de regresión <sup>(22)</sup>

El análisis de regresión está diseñado para situaciones donde una variable, se piensa está relacionada con una o más mediciones hechas generalmente sobre el mismo objeto. Un propósito del análisis, es usar datos o valores observados de las variables y para obtener la forma de esta relación. Un ejemplo, sería usar información sobre utilidades y el número de años de escolaridad, para estimar el grado en el que la utilidad anual de un hombre, está relacionada a sus años de escolaridad. Una posibilidad sería, que para un hombre que ha tenido cero años de escuela anticipemos su utilidad como  $a + a$ ; y por cada año de escolaridad que haya tenido, esperaríamos que su utilidad aumentara en  $b$ . Así, para un hombre que tiene  $x$  años de escolaridad, esperamos que sus ganancias sean  $\$ (a + bx)$ . Si  $y$  denota la utilidad, escribimos la ganancia esperada :

$$E(y) = a + bx \quad (6.1)$$

El modelo aquí, es lineal, porque consideramos a  $E(y)$  como una combinación lineal de las incógnitas  $a$  y  $b$ . Hay, por

supuesto, un sin fin de modelos que pudiéramos probar; sin embargo, el modelo lineal ha recibido gran atención tanto en teoría como en la práctica.

Ya que nuestro modelo ha salido de los papeles, a y b nunca podrán ser conocidas, y lo mejor que podemos hacer es obtener estimaciones de ellas a partir de los datos: datos que acumulos son una muestra aleatoria de alguna población para la cual deseamos aplicar la ecuación. El modelo es a menudo llamado un *modelo de regresión*, y ya que su ecuación es lineal, es más correctamente llamado *regresión lineal*.

Al acumular datos, la utilidad de cada hombre con x años de escolaridad no será exactamente  $a + b \cdot x$  (con a y b iguales para todos los hombres). De hecho, esto se reconoce ya, al escribir la ecuación del modelo como  $E(y) = a + b \cdot x$ ,

$$y = a + b \cdot x$$

Así, si  $y_i$  es la utilidad para un hombre con  $x_i$  años de escolaridad, escribimos:

$$E(y_i) = a + b \cdot x_i \quad (b.2)$$

donde,  $E(y_i)$  no es igual a  $y_i$ . La diferencia  $y_i - E(y_i)$  representa la *desviación de lo observado*  $y_i$  de su valor *esperado*  $E(y_i)$ , y se escribe como:

$$e_i = y_i - E(y_i) = y_i - a - b \cdot x_i$$

Por lo tanto,  $y_i = a + b \cdot x_i + e_i$  (b.3)

que tiene como ecuación del modelo.

Estas ecuaciones se aplican a *n* muestras (i) observaciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Las  $e_i$  incluyen todas las causas de discrepancias entre las observaciones  $y_i$  y sus valores esperados; por ejemplo, incluyen errores de medición en  $y_i$  (su valor de registro podría no ser exactamente la utilidad del hombre).

incluyen deficiencias en el modelo mismo (por ejemplo, la edad del hombre puede también incluir en sus utilidades). De esta manera las  $e_i$  se son consideradas *variables aleatorias*.

Para completar la descripción de nuestro modelo en términos de la ec. (b.3), deben especificarse las características de las  $e_i$ . Generalmente, se especifica que el valor esperado de  $e_i$  es cero y su variancia es  $\sigma^2$ , para toda  $i$ ; y que las covarianzas entre pares de  $e_i$  son cero.

Hay varios métodos bien reconocidos que pueden usarse para estimar  $a$  y  $b$ . El más frecuentemente usado es conocido como mínimos cuadrados, y es el que delineamos aquí.

La estimación por mínimos cuadrados, involucra la minimización de la suma de cuadrados de las desviaciones entre los valores observados y esperados. La suma de cuadrados es:

$$e'e = \sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - E(y_i)]^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - a - bx_i]^2$$

(aunque  $a$  y  $b$  son valores fijos (pero desconocidos), pensemos en ellos por el momento como variables. Entonces, sus valores que minimizan la expresión, son los *estimadores* de  $a$  y  $b$ . Serán denotados  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$ . La minimización se logra diferenciando con respecto a  $b$  y  $a$ , e igualando a cero:

$$\frac{\partial (e'e)}{\partial a} = -2 \sum (y_i - a - bx_i) \quad (b.4)$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial (e'e)}{\partial b} = -2 \sum (y_i - a - bx_i) x_i \quad (b.5)$$

Las sumatorias son sobre  $i$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ . Igualando a cero:



$$N \hat{\beta} = \hat{\beta} \sum x_i = \sum y_i \quad \text{y} \quad \hat{\beta} \sum x_i^2 + \hat{\alpha} \sum x_i = \sum (x_i y_i) \quad \dots (b.6)$$

La solución para (b.6) puede escribirse de la siguiente forma familiar :

$$\hat{\beta} = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (b.7)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{(\sum x^2)(\sum y) - (\sum x)(\sum xy)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (b.8)$$

### Caso general

Suponga que en el estudio de la utilidad anual y los años de escolaridad, consideramos también la edad de los hombre, como un factor que afecta la utilidad. El modelo considerado en (b.1) se extiende a :

$$E(y_i) = a + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2}$$

donde  $x_1$  representa años de escolaridad y  $x_2$  la edad. Así, para el  $i$ -ésimo hombre de nuestros datos, que ha tenido  $x_{i1}$  años de escolaridad y cuya edad es  $x_{i2}$ , la ec. (b.3) podría ser :

$$y_i = a + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + e_i$$

Hacemos un cambio de notación : en lugar de  $a$  escribiremos  $b_0$ , y entonces, para  $b_0$  escribiremos  $b_0 x_{i0}$  con todos los valores de  $x_{i0}$  igual a la unidad. Esto da

$$y_i = b_0 x_{i0} + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + e_i \quad (b.9)$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Definamos los siguientes vectores y variables :

$$X = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ x_{20} & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N0} & x_{N1} & \dots & x_{Nk} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, el conjunto completo de ecuaciones representado por (b.9) es :

$$y = Xb + e, \quad \text{con} \quad E(y) = Xb \quad (b.10)$$

La extensión a más de dos variables es clara para  $k$  variables :

$$X = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ x_{20} & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N0} & x_{N1} & \dots & x_{Nk} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} \quad (b.11)$$

$y$  y  $e$  permanecen sin cambio. La ec. (b.10) tampoco cambia, y representa el modelo, no importa cuántas variables haya, siempre que sean menos que el número de observaciones  $N$ , esto es,  $k < N$ .

Definamos las propiedades del vector  $e$  :

$$E(e) = 0$$

$$\text{var}(e) = E[(e - E(e))(e - E(e))^t] = E(ee^t) = \sigma^2 I_N$$

La derivación del estimador de mínimos cuadrados de  $b$  sigue el mismo procedimiento que el usado al establecer (b.6), a saber, la minimización de la suma de cuadrados de los residuales :

$$\begin{aligned} e^t e &= (y - E(y))^t (y - E(y)) = (y - Xb)^t (y - Xb) \\ &= y^t y - 2b^t X^t y + b^t X^t X b \end{aligned}$$

Eligiendo el estimador de  $b$  que minimice la suma de cuadrados  $e^t e$ , derivando  $e^t e$  con respecto a los elementos de  $b$ , igualando  $\partial(e^t e) / \partial b = 0$  y resolviendo las ecuaciones resultantes en el sentido de  $\hat{b}$ , encontramos que

las ecuaciones son:

$$X^t \hat{b} = X^t y$$

y sus soluciones como "ecuaciones normales". Como sea que  $X^t X^{-1}$  exista, tendrán solución única para  $\hat{b}$ ,

$$\hat{b} = (X^t X)^{-1} X^t y \quad (b.13)$$

Por la naturaleza de  $X$  mostrada en (b.11),  $X^t X$  es cuadrada de orden  $(k+1)$ , con elementos que son sumas de cuadrados y productos sumados sobre  $i$ , para  $i = 1, 2, \dots, k$ :

$$X^t X = \begin{bmatrix} \sum x_{i0}^2 & \sum x_{i0}x_{i1} & \dots & \sum x_{i0}x_{ik} \\ \sum x_{i0}x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \dots & \sum x_{i1}x_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_{i0}x_{ik} & \sum x_{i1}x_{ik} & \dots & \sum x_{ik}^2 \end{bmatrix} \quad (b.14)$$

Y  $X^t y =$

$$\begin{bmatrix} \sum x_{i0}y_i \\ \sum x_{i1}y_i \\ \dots \\ \sum x_{ik}y_i \end{bmatrix} \quad (b.15)$$

Al derivar el estimador  $\hat{b} = (X^t X)^{-1} X^t y$  respecto al procedimiento de mínimos cuadrados, se obtiene el método bien conocido de estimación de mínimos cuadrados. Existen otros métodos de estimación los cuales, aunque difieren en conceptos básicos, todos conducen al mismo resultado, bajo ciertas suposiciones usadas. Algunos métodos típicamente usados son:

- a. *Mínimos cuadrados ordinarios*
- b. *Mínimos cuadrados generalizados*: Este método involucra la matriz de covarianza  $W$ ; la minimización será sobre

$$(y - Xb)^t W^{-1} (y - Xb)$$

con respecto a  $b$ . En (b.14) conduce a:

$$\hat{b} = (X^t W^{-1} X)^{-1} X^t W^{-1} y$$

Este es el método utilizado al resolver el problema de estimación de estado en sistemas de potencia.

c. *Máxima probabilidad*

Consecuencias de la estimación

Ya que  $b = (X^t X)^{-1} X^t y$ , tenemos que

$$E(b) = E[(X^t X)^{-1} X^t y] = (X^t X)^{-1} X^t X b = b$$

Así, el valor esperado de  $b$  es  $b$ , y se dice que  $b$  es un *estimador insesgado*.

La matriz de covarianza de  $b$  es:

$$\begin{aligned} \text{Var}(b) &= E[(b - E(b)) (b - E(b))^t] \\ &= E[(X^t X)^{-1} X^t (y - E(y)) (y - E(y))^t X (X^t X)^{-1}] \\ &= (X^t X)^{-1} X^t E(e e^t) X (X^t X)^{-1} \\ &= (X^t X)^{-1} \sigma^2 \end{aligned} \quad (b.16)$$

Es conveniente usar el símbolo  $\hat{y}$  para  $E(y)$ , el vector de valores estimados de  $y$ , correspondiente al vector de observaciones  $y$ ; esto es,

$$\hat{y} = E(y) = X b$$

El vector de desviaciones entre los valores observados y los valores predichos es:

$$y - \hat{y} = y - X b = y - X (X^t X)^{-1} X^t y = [I - X (X^t X)^{-1} X^t] y \quad \dots (b.16a)$$

La matriz involucrada aquí es idempotente, y además:

$$\begin{aligned} I - X (X^t X)^{-1} X^t &\text{ es simétrica} \\ [I - X (X^t X)^{-1} X^t] X &= 0 \end{aligned} \quad (b.17)$$

La suma de cuadrados de las desviaciones, entre los valores observados y los valores esperados estimados, se conoce generalmente como el *residual*, o error suma de cuadrados, y se usa el símbolo SSE. Así:

$$SSE = (y_i - \hat{y}_i)^2 = (y - \hat{y})^t (y - \hat{y}) \quad (b.18)$$

Para calcular SSE, se usa (b.16) y (b.12) en (b.13). Esto da:

$$\begin{aligned} \text{SSE} &= y^t [ I - X(X^t X)^{-1} X^t ] y \\ &= y^t y - y^t X(X^t X)^{-1} X^t y \\ &= y^t y - \hat{b}^t X^t y \end{aligned} \quad (b.19)$$

porque  $\hat{b}^t = y^t X(X^t X)^{-1}$ .

En (b.19) SSE se escribió como una forma cuadrática en  $y$ :

$$\text{SSE} = y^t ( I - X(X^t X)^{-1} X^t ) y$$

Por lo tanto, con  $y$  distribuido como  $( Xb, I\sigma^2 )$  el valor esperado de SSE es ( SSE es un escalar ):

$$\begin{aligned} E(\text{SSE}) &= \text{tr} ( I - X(X^t X)^{-1} X^t ) I\sigma^2 + \\ &\quad b^t X^t ( I - X(X^t X)^{-1} X^t ) X b \end{aligned}$$

Para ver esto, se enuncia el teorema siguiente:

Cuando  $x$  es  $N(\mu, W)$ , y cualquier  $n \times 1$  vector:

$$E(x^t A x) = \text{tr}(A W) + \mu^t A \mu$$

Prueba: Con  $E(x) = \mu$  y  $\text{var}(x) = W$  tenemos:

$$E(x x^t) = W + \mu \mu^t$$

Por lo tanto:  $E(x^t A x) = E[\text{tr}(A x x^t)]$

$$= \text{tr}[A E(x x^t)]$$

$$= \text{tr}(A W + A \mu \mu^t)$$

$$= \text{tr}(A W) + \mu^t A \mu$$

Una vez visto esto, al utilizar (b.17) y el hecho de que la traza de una matriz idempotente es igual a su rango, tenemos:

$$\begin{aligned} E(\text{SSE}) &= n [ I - X(X^t X)^{-1} X^t ] \sigma^2 \\ &= [ n - r(X) ] \sigma^2 \end{aligned}$$

por lo que un estimador insesgado de  $\sigma^2$  es

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{N - r(X)} \quad (b.20)$$

### Propiedades

Asumimos que  $e$  se distribuye normalmente :

$$N(0, \sigma^2 I)$$

a. De  $y = Xb + e$  tenemos :  $y - Xb = e$ , por lo tanto,

$$y \sim N(Xb, \sigma^2 I)$$

b.  $b$  es una función lineal de  $y$ , por lo tanto, se distribuye normalmente :

$$\hat{b} = (X^T X)^{-1} X^T y \sim N[b, (X^T X)^{-1} \sigma^2]$$

c. Tenemos que

$$\hat{b} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$y \quad SSE = y^T (I - X(X^T X)^{-1} X^T) y$$

Pero, por (b.17)

$$(X^T X)^{-1} X^T (I - X(X^T X)^{-1} X^T) y = 0$$

por lo que las estadísticas de  $\hat{b}$  y  $\hat{\sigma}^2$  se distribuyen independientemente.

d. Prueba de que suma de normales al cuadrado, se distribuye como Chi-cuadrada :

dejemos que  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , denoten variables aleatorias mutuamente independientes que son  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ . Entonces

$$Q = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_i)^2 / \sigma_i^2 \text{ es } \chi^2(n).$$

La función de densidad conjunta de las v.a.'s  $x$ 's es :

$$\frac{1}{(2\pi)^{0.5n} \sqrt{|W|}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^T W^{-1} (x - \mu)}{2} \right],$$

donde, la matriz de covarianza  $W$  es definida positiva. Tenemos que la función generadora de momentos  $M(t)$  de  $Q$  es :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int \frac{1}{(2\pi)^{0.5n} \sqrt{|W|}} \\
 & \times \exp \left[ -\frac{(x-\mu)^t W^{-1} (x-\mu)}{2} \right] dx_1 \dots dx_n \\
 = & \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int \frac{1}{(2\pi)^{0.5n} \sqrt{|W|}} \\
 & \times \exp \left[ -\frac{(x-\mu)^t W^{-1} (x-\mu) (1-2t)}{2} \right] dx_1 \dots dx_n
 \end{aligned}$$

Con  $W^{-1}$  definida positiva, la integral existirá para todo  $t \dots$   
 $t < 0.5$ . Además,  $(1-2t) W^{-1}$ ,  $t < 0.5$ , es una matriz  
 definida positiva y, ya que  $| (1-2t) W^{-1} | = (1-2t)^n |W^{-1}|$ ,  
 por lo que:

$$\frac{1}{(2\pi)^{0.5n} \sqrt{|W|} (1-2t)^n} \exp \left[ -\frac{(x-\mu)^t W^{-1} (x-\mu) (1-2t)}{2} \right]$$

puede tratarse como una función multivariada. Si multiplicamos  
 nuestro integrando por  $(1-2t)^{0.5n}$ , tendremos esta función  
 multivariada. Así, la función generadora de momentos de  $\theta$  está  
 dada por:

$$H(t) = \frac{1}{(1-2t)^{0.5n}}, \quad t < 0.5 \tag{b.21}$$

y,  $\theta$  es  $x^2$ , como desearíamos mostrar.

Sabemos que

$$SEC = y^t (I - X(X^t X)^{-1} X^t) y = y^t B y$$

definiendo P como :  $P = I - X (X^t X)^{-1} X^t$  (b.22)

Ahora,  $SSE / \sigma^2 = y^t (I / \sigma^2) P y$ , por lo que

$$\frac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2 [ r(I - X(X^t X)^{-1} X^t), b^t X^t (I - X(X^t X)^{-1} X^t) X b / 2\sigma^2 ]$$

que por (b.17) se reduce a

$$SSE / \sigma^2 \sim \chi^2_{n-r}, \text{ donde } r = r(X)$$

e. Sobre las bases de la normalidad que hemos visto,  $b$  tiene una distribución normal :

$$\frac{\hat{b}_i - b_i}{\sqrt{a_{ii} \sigma^2}} \sim N(0,1) \quad (b.23)$$

para  $i = 0, 1, 2, \dots, k$ , donde por (b.16),  $a_{ii}$  es la  $i$ -ésima diagonal de  $(X^t X)^{-1}$ .

Reemplazando  $\sigma^2$  por  $\hat{\sigma}^2$ , tenemos

$$\frac{\hat{b}_i - b_i}{\sqrt{a_{ii} \hat{\sigma}^2}} \sim t_{n-r}, \text{ distribución t-Student}$$



APENDICE III

RENOVACION DE LOS FACTORES TRIANGULARES

Factorización de una Matriz Simétrica Positiva Definita

Sea  $A$  una matriz simétrica positiva definida, cuyo elemento triangular inferior es  $A = D L^t$  con  $D$  diagonal, y sea  $\tilde{A}$  una matriz dada por

$$\tilde{A} = A + \alpha v v^t \quad (c.1)$$

donde,  $v$  es un vector de  $n \times 1$  y  $\alpha$  es un escalar. Queremos determinar los factores triangulares  $\tilde{A} = \tilde{D} \tilde{L}^t$  de la matriz modificada  $\tilde{A}$ , como una función de los factores triangulares de la matriz original.

La matriz  $A$  puede factorizarse como

$$A = L D L^t \quad (c.2)$$

donde  $L$  es una matriz triangular inferior, dada por

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_{n-1}^{-1} \quad (c.3)$$

y  $D$  es una matriz diagonal dada por

$$D = D_1^{-1} D_2^{-1} \dots D_n^{-1} \quad (c.4)$$

La matriz elemental  $L_j$  puede escribirse como

$$L_j = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & -l_{j,j} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad (c.5)$$

donde  $l_j$  es un vector  $(n - j + 1)$ , dado por

$$l_j^t = [l_{j+1,j}, l_{j+2,j}, \dots, l_{n,j}] \quad (c.6)$$

donde  $l_{ij}$  es el  $ij$ -ésimo elemento de  $L$ .

La matriz diagonal  $\tilde{D}_j$  es idéntica a una matriz unitaria, excepto por el  $(j,j)$ -ésimo elemento que es igual a  $d_j^{-1}$ , donde  $d_j$  es el  $(j,j)$ -ésimo elemento de  $D$ .

Señala que podemos transformar  $\tilde{A}$  en una matriz unitaria:

$$L_1^{-1} \tilde{A}^{(1)} L_1^t \tilde{D}_1 = \tilde{A}^{(1)}$$

$$L_2^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = L_2^{(2)}$$

$$L_{n-1}^{(n-2)} L_{n-1}^{(n-1)} D_{n-1} = D_{n-1}^{(n-1)}$$

$$A^{(n-1)} D_n = I_n$$

Consideremos la primera transformación de (c.7) con más detalle:

$$L_1^{(0)}$$

1	$\emptyset$
$-I_1$	$I_{n-1}$

$a_{11}^{(0)}$	$a_{12}^{(0)}$
$a_{12}^{(0)}$	$a_{22}^{(0)}$

$a_{11}^{(0)}$	$a_{12}^{(0)}$
$\emptyset$	$-I_1 a_{12}^{(0)} + a_{22}^{(0)}$

(c.8)

$$L_1^t D_1$$

1	$-I_1^t$
$\emptyset$	$I_{n-1}$

$I_1^{-1}$	$\emptyset$
$\emptyset$	$I_{n-1}$

$I_1^{-1}$	$-I_1^t$
$\emptyset$	$I_{n-1}$

$$A_1^{(1)} = L_1 A^{(0)} L_1^t D_1$$

1	$\emptyset$
$\emptyset$	$a_{11}^{(1)} \quad a_{12}^{(1)} \quad I_1^t$ $+ a_{22}^{(0)}$

(c.9)

$$a_{11}^{(0)} = a_{11}^{(1)}$$

$$a_{12}^{(0)} = a_{12}^{(1)}$$

$$a_{22}^{(0)} = a_{22}^{(1)} + a_{11}^{(1)} + a_{12}^{(1)}$$

que significa que podemos expresar el vector de origen  $\tilde{a}^{(0)}$  como combinación lineal de los vectores  $\tilde{a}^{(1)}$  y  $\tilde{a}^{(2)}$  es la matriz reducida por pivoteo alíneado de  $A^{(0)}$ .

Usando la misma clase de partición como en (c.8), e introduciendo la expresión (c.9), (c.1) puede reescribirse como sigue:

$$\tilde{A}^{(0)} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}^{(0)} & \tilde{a}_{12}^{(0)} \\ \tilde{a}_{12}^{(0)} & \tilde{a}_{22}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & d_1 l_1^t \\ d_1 l_1 & A_{22}^{(1)} + d_1 l_1 l_1^t \end{bmatrix}$$

$$+ \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \alpha v v^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & | & v_2^t \end{bmatrix} \quad (c.10)$$

Dejemos que  $\tilde{L}_1$  sea la matriz elemental

$$\tilde{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & 0^t \\ -\tilde{l}_1 & & I_{n-1} \end{bmatrix} \quad (c.11)$$

Pre-multiplicando (c.10) por  $\tilde{L}_1$  y post-multiplicando por  $\tilde{L}_1^t$ ,

conseguimos

$$\tilde{L}_1 A^{(0)} + \tilde{L}_1 \alpha v v^t = \begin{bmatrix} 1 & & 0^t \\ -\tilde{l}_1 & & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & d_1 l_1^t \\ d_1 l_1 & & A_{22}^{(1)} + d_1 l_1 l_1^t \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & & 0^t \\ -\tilde{l}_1 & & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & | & v_2^t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & \\ -d_1 \tilde{l}_1 & \\ + & \\ d_1 \tilde{l}_1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \tilde{l}_1^t \\ -d_1 \tilde{l}_1^t \tilde{l}_1^t \\ A_{22}^{(1)} + d_1 \tilde{l}_1 \tilde{l}_1^t \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 \tilde{l}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^t \\ v_2^t \\ v_1^t \tilde{l}_1^t \end{bmatrix}$$

$$\tilde{L}_1 A^{(1)} \tilde{L}_1^t + \tilde{L}_1 \alpha v v^t \tilde{L}_1^t = \begin{bmatrix} d_1 & \\ d_1 (1 - \tilde{l}_1) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 (1 - \tilde{l}_1)^t & \\ A_{22}^{(1)} + & \\ d_1 (1 - \tilde{l}_1) \tilde{l}_1^t & \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 \tilde{l}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^t & \\ v_2^t & \\ v_1^t \tilde{l}_1^t & \end{bmatrix} \quad (c.12)$$

Del (1,1)-ésimo elemento tenemos

$$\tilde{d}_1 = d_1 + \alpha v_1^2 \quad (c.13)$$

Del (1,i)-ésimo elemento, para  $i = 2, \dots, n$ , tenemos

$$0 = d_1 (1 - \tilde{l}_1) + \alpha v_1 (v_2 - v_1 \tilde{l}_1) \quad (c.14)$$

$$\tilde{l}_1 = [d_1 \tilde{l}_1 + \alpha v_1 v_2] / \tilde{d}_1 \quad (c.15)$$

del (i,j)-ésimo elemento, para  $i = 2, \dots, n$  y  $j = 2, \dots, n$ ,

tenemos:

$$\tilde{A}_{22}^{(1)} = A_{22}^{(1)} + d_1 (1 - \tilde{l}_1) (1 - \tilde{l}_1)^t + \alpha (v_2 - v_1 \tilde{l}_1) (v_2 - v_1 \tilde{l}_1)^t \quad (c.16)$$

Introduciendo (c.14) en (c.16) y simplificando:

$$\tilde{A}_{22}^{(1)} = A_{22}^{(1)} + \alpha^{(1)} v_2^{(1)} v_2^{(1)t} \quad (c.17)$$

donde,

$$\alpha^{(1)} = \alpha \tilde{d}_1 / d_1 \quad (c.18)$$

$$v_2^{(1)} = v_2 - v_1 \tilde{l}_1 \quad (c.19)$$

Así,  $\tilde{l}_1$  y  $\tilde{l}_1^t$  pueden ser eliminados de (c.13) y (c.19) como

$d_1$ ,  $\tilde{v}_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  y  $\gamma_1$  se calculan a partir de  $d_0$  y  $\tilde{v}_0$  de la ecuación (17). Como la misma ecuación del sistema original (a.1), lo cual significa que puede usarse el mismo procedimiento para determinar  $d_2$  y  $\tilde{v}_2$ , y así sucesivamente.

El algoritmo siguiente, puede usarse para renovar L y D:

para  $j = 1, 2, \dots, n$

$$\beta = d_j$$

$$d_j \leftarrow d_j + \alpha^{(j-1)} v_j^2$$

termina si  $j = n$

(c.20)

$$\gamma = \alpha^{(j-1)} v_j / d_j$$

para  $i = j+1, \dots, n$

$$v_i \leftarrow v_i - v_j L(i, j)$$

$$L(i, j) \leftarrow L(i, j) - \gamma v_i$$

$$\alpha^{(j)} = \alpha^{(j-1)} \beta / d_j$$

APENDICE IV

CONCEPTOS DE LA OPERACION Y CONTROL DEL SISTEMA  
INTERCONECTADO MEXICANO.

## OPERACION Y CONTROL DEL SISTEMA INTERCONECTADO MEXICANO

**RESUMEN:** Se presenta una breve historia de la evolución del sistema interconectado mexicano (SIME); se enumeran las principales características y problemas de operación; y se describe el control jerárquico de dicho sistema.

### INTRODUCCION

La Comisión Federal de Electricidad (CFE) es la empresa eléctrica nacional a cargo de la producción, construcción e instalación de los sistemas de potencia nacional, entre otras funciones, es responsable de la operación y control de potencia en los niveles de generación, transmisión y distribución.

El sistema de potencia mexicano es el resultado de una evolución que empezó alrededor de los comienzos de los años cuarenta de la última década del siglo pasado (antes de la interconexión de seis sistemas aislados de potencia en el sistema cubre un área de 2 millones km<sup>2</sup>, tiene una capacidad instalada de 15 GW (1983), y sirve aproximadamente a 17 millones de usuarios (1983).

Antes de la interconexión de los sistemas de potencia aislados fue coordinado y operado por un organismo de despacho nacional, que al final pasó a ser el Centro de Control de la CFE, donde se apoyó en las decisiones de operación relacionadas con las plantas generadoras y las restricciones físicas del sistema a cabo por teléfono.

Como un resultado de la interconexión entre sistemas en 1977 se integró el Centro Nacional de Control, que cubre siete millones de usuarios eléctricos por completo en diecisiete departamentos de



SENER, sus principales actividades son: la coordinación en el uso de recursos energéticos; análisis y supervisión de la red interconectada; la especificación e implementación de sistemas computarizados, para facilitar la operación y mejorar la seguridad del SEF.

La coordinación entre el centro nacional de control y los centros de control de área se efectúa de manera directa vía telefónica. También se usa un sistema de cómputo de tiempo compartido usado para intercambiar datos entre el SENER y los AEE's para propósitos de planeamiento.

Actualmente se están preparando las especificaciones del sistema de cómputo en tiempo real para el SENER y los AEE's que actualmente están operando.

#### OPERACION

Considerando la gran variedad de tipos de plantas de potencia instaladas, las condiciones de operación cambiantes de la carga y, además un amplio rango de diversidad en recursos de generación, comportamiento de carga, efecto del clima sobre la demanda, localización de centros de generación y carga, y los efectos sobre la estabilidad del sistema.

Seis regiones de operación están interconectadas, dejando sólo aisladas las penínsulas de Yucatán y Baja California.

Las principales cargas están localizadas en las grandes ciudades del país. Además, las principales plantas hidro que tienen una contribución importante bajo demanda máxima, están lejos de los centros de carga, especialmente de la ciudad de México donde se consume el 35% de la demanda diaria máxima. El sistema de

potencia resultante es típicamente longitudinal, con muchos problemas operacionales que requieren una supervisión muy cuidadosa. Así, lo extenso del territorio, la gran separación entre los dispersos centros de producción y consumo de energía eléctrica, la baja densidad de potencia instalada  $100 \text{ MW} / \text{km}^2$  y de consumo  $1000 \text{ kWh} / \text{habitante}$ , han dado lugar a un sistema eléctrico débilmente interconectado. La debilidad del sistema eléctrico se manifiesta en capacidades de transferencia bajas. En la red troncal del SIN se tienen capacidades de CC de  $0,5 - 1 \text{ MW}$ .

A pesar de que el SIN está interconectado débilmente, se han logrado aprovechar aunque sea parcialmente las tres ventajas fundamentales de interconectar sistemas eléctricos:

a. Apoyo mutuo en emergencias.

b. Diversidad: la demanda máxima total es menor que la suma de las demandas máximas individuales.

c. Operación más económica: el costo de producción se reduce al aprovechar los recursos de generación más eficientes en función de su disponibilidad, independiente de la localización.

La operación de un sistema de energía longitudinal requiere una supervisión muy cuidadosa de todos los sistemas. La falta de un solo elemento puede provocar serios problemas de desbalance de potencia, sobrecargas o exceder límites operativos en otros elementos. En el SIN se ha conseguido la aplicación de compensadores estáticos de potencia reactiva para el control del voltaje, mediante la inyección o absorción de potencia reactiva, a través de tiristores que realizan un control continuo

o directamente por la generación (compensación de reactivos / capacitores)

La disponibilidad de energía hidro es uno de los principales factores considerados en la determinación de políticas de generación. Dada la naturaleza estocástica de los influjos de agua, se usan procedimientos estadísticos para producir la hidroenergía del año.

Desde la salida del sistema de transmisión, y la instalación de plantas generadoras, se dispone de compensación serie y paralelo en varias líneas de transmisión y subestaciones; adicionalmente se implementan controles suplementarios para mejorar el flujo de potencia en estabilidad transitoria y el perfil de voltaje en las líneas de 400-765 KV.

Son típicas las condiciones de carga extremas en la operación diaria, donde se requiere de transmisión máxima bajo condiciones de carga pico, y una excesiva cantidad de potencia reactiva durante la descompensación de varias líneas bajo condiciones de carga mínima; debido a muy altas velocidades se reconoce que en este tipo de sistema de potencia, los problemas de voltaje y estabilidad transitoria son muy comunes y críticos.

En la operación práctica de los sistemas de operación, las guías principales seguidas en las políticas de operación son: la utilización óptima de energía hidroeléctrica, que cuenta 25% de la energía total; mejorar la seguridad del sistema vía medidas de control supratensión y soporte de potencia reactiva; esquemas de roles; reserva de generación distribuida, y un esquema de tiro

de control coordinado para disturbios mayores .

La seguridad y economía son los dos principales objetivos a lograr a través de decisiones manuales o de control automático . Sin embargo , esos objetivos exigen una gran variedad de funciones que hay que desarrollar y a las cuales las unidades encarga.

Siendo todas las áreas partes de la misma empresa , la seguridad y economía se evalúan considerando el sistema interconectado total .

En este caso el tipo de información que se debe tener al nivel más alto de la jerarquía ( NCC ) siempre está disponible. En el NCC no hay control directo sobre el sistema de potencia ; todos los cambios requeridos deben ser implementados a través del siguiente nivel en el control jerárquico ( RCC ). El nivel más bajo en el control jerárquico se compone de las oficinas de operación en ciudades grandes o subáreas; la principal función en este nivel es la supervisión de equipos operando en las áreas grandes .

## SOFTWARE

La estructura jerárquica de control y las funciones relacionadas a la operación económica y segura del sistema interconectado , se desarrollan al nivel NCC y los procedimientos serán implementados en los RCC para la implementación de el sistema de potencia .

### Funciones de seguridad y control

1. - Operaciones de seguridad : Alando condiciones en tiempo real , identificar si el sistema está normal o no ; si el sistema está en una emergencia va al paso 4 ; si el sistema ha perdido carga , va al paso 5 .

2. - Regulación de seguridad : Si el sistema está normal ,

determinar si el sistema continuará en el estado A en conjunto de condiciones dadas.

3. Como el problema es de estado discreto, esto es, hay un número finito de contingencias que pueden causar una emergencia, determine qué acción preventiva debería tomarse para hacer seguro el sistema.

4. (control correctivo) Ejecutar acciones correctivas apropiadas para hacer normal al sistema.

5. (control reactivo) Restaurar el servicio a normal.

La parte de monitoreo supervisa desde las mediciones en tiempo real, así como el status de interruptores, las perturbaciones se transmiten al lugar de la computadora del control del control (sup) de acuerdo a los requerimientos por medio del filtrado, eliminando aquellos que no consisten en los datos se procesan directamente para el control de emergencia. El sistema o topología de red.

Además, los datos disponibles se procesan para obtener un estimado de las variables de estado del sistema, con datos como en general, obtenidos por medio de los resultados del estimador de estado de Kalman. El sistema de control de emergencia se relaciona.

Antes de la instalación de sistema, se debe determinar si el sistema es observable y si se puede controlar. Si el sistema es observable, se puede observar el estado del sistema, para qué parte del sistema se estimaría el estado de Kalman.

El sistema de control de emergencia puede hacer el control de emergencia.

El sistema se encuentra en un estado normal, en el estado de emergencia y debiendo intentar llevar a cabo acciones correctivas de acuerdo a la posibilidad de restablecer carga.

En caso de que el sistema este en estado normal, puede procederse a evaluar la seguridad del sistema bajo una configuración de generación contra la disipación. Una contingencia puede incluir: salida de líneas de transmisión, transformadores, generadores y cargas, o combinación de ellas. El análisis se lleva a cabo por tramos de carga en línea. Se han buscado maneras de reducir el número de contingencias a estudiar tratando de que se simulan sólo aquellas cuya consecuencia se considera que podría tener mayor impacto sobre el sistema. Esto puede hacerse automáticamente al ser de indicar su severidad, en los que se nota la severidad de la contingencia sobre las reservas totales. Ve que las contingencias con reservas fuertes, se necesitan un pronóstico de carga en línea.

Lista de las principales aplicaciones que se le da a la base de datos formada está:

- 1. Despacho económico restringido, cuyo objetivo es minimizar el costo, mientras se satisfacen la generación, transmisión y restricciones de reserva.

- 2. Control de generación automática: Cada AGC será responsable de este control dentro de su área. El problema principal aquí, es mantener la frecuencia y el intercambio de potencia dentro de los límites establecidos por el sistema.

- 3. Tráfico de carga futuro a corto plazo. También es posible pronosticar carga horaria para todos los días del año.

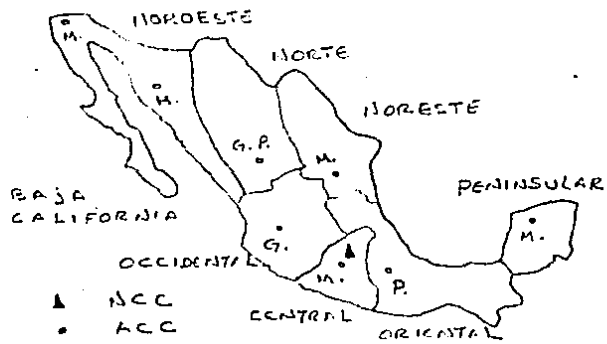


FIG. 1

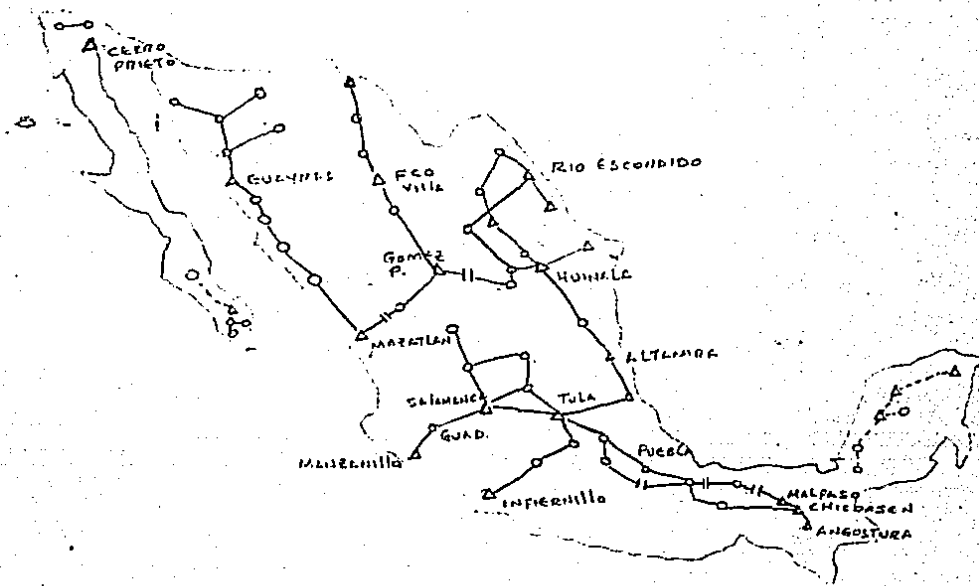


FIG. 2