UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

"MODELOS PROBABILISTICOS EN LA INGENIERIA CIVIL"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

I N G E N I E R O   C I V I L

P R E S E N T A :

VICTOR MANUEL ESPERON VILCHIS

Ciudad Universitaria México, D. F.   1988

INDICE

INTRODUCCION

Esta tesis es parte de una serie de trabajos que se realizan en la Facultad de Ingeniería de acuerdo con los planes de estudio del departamento de sistemas y planeación de la carrera de ingeniero civil y el objetivo principal de este trabajo es proporcionar una guia de estudio o bien un libro de texto que le pueda ser util como complemento a los profesores y estudiantes de la materia de Ingeniería de Sistemas II.

Este trabajo se desarrollo siguiendo el plan de estudios que se encuentra en el nuevo planteamiento de programas del departamento, con lo que se pretende que los alumnos obtengan un mejor aprovechamiento de los temas que se incluyen en este plan de estudios.

En este trabajo se pretende que los alumnos cuenten con un texto explícito y simplificado de la investigación de sistemas enfocando estos temas a la aplicación que pueden tener en ingeniería civil.

I. INTRODUCCION A LAS TECNICAS DE LA INVESTIGACION DE SISTEMAS DE INGENIERIA CIVIL.

Este capítulo proporciona una visión general y las bases fundamentales de los estudios de investigación de sistemas. Aunque aquí no es posible detallar todas las partes de la investigación de sistemas, el objetivo es presentar un tratamiento unificado de la materia que puede ser utilizado como una guía general para resolver problemas de la investigación de sistemas en la ingeniería civil.

Arte de modelar.

Un estudio de investigación de sistemas consiste en diseñar un modelo de la situación física y se define como una representacion idealizada (simplificada) de un sistema de la vida real. Este sistema puede ser todavia una idea en espera de ejecución. En el primer caso el objetivo del modelo es analizar el comportamiento del sistema a fin de mejorar su funcionamiento. En el segundo caso , el objetivo es visualizar la mejor estructura del sistema futuro.

La complejidad de un sistema real resulta del gran numero de elementos (variables) que controlan el comportamiento del mismo.

Esto a su vez dicta una dificultad táctica al recomendar cursos específicos de acción para cada una de las variables. Generalmente una pequeña fracción de estas variables realmente domina el comportamiento del sistema. Por consiguiente, la simplificación del sistema real en términos de un modelo se concentra principalmente en la identificación de las variables y relaciones dominantes que lo gobiernan.

La figura 1.1 muestra los niveles de abstracción que llevan a la construcción de un modelo de una situación de la vida real. El sistema real supuesto se abstrae de la situación real concentrando las variables dominantes que controlan el comportamiento del sistema real supuesto, identifica y simplifica las relaciones entre las variables en una forma accesible al análisis.

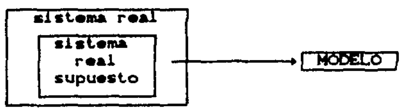


FIGURA 1.1

En general no existen reglas fijas para efectuar los niveles de abstracción. La reducción de las variables que controlan al sistema a un número relativamente pequeño de variables dominantes y la abstracción de un modelo de la vida real supuesto, constituyen más un arte que una ciencia. La validez del modelo al representar el sistema real depende principalmente de la creatividad e imaginación del ingeniero de investigación de sistemas y del equipo que trabaja en el proyecto. Tales cualidades individuales o personales no pueden ser reguladas por el establecimiento de reglas fijas sobre como deberá construirse un modelo. Puede ser útil presentar ideas sobre tipos de modelos posibles de investigación de sistemas, sus estructuras generales y sus características generales.

Tipos de modelos de investigación de sistemas.

El tipo más importante de modelos de investigación de sistemas es el modelo matemático. Al formular este tipo de modelo se supone que todas las variables están relacionadas con las funciones matemáticas apropiadas para describir el comportamiento del sistema; luego la solución del modelo se logra por la manipulación matemática apropiada.

Además de los modelos matemáticos, se emplean los modelos de simulación, que imitan el comportamiento del sistema en un período. Esto se logra especificando ciertos eventos, los cuales son puntos en el tiempo, en cuya ocurrencia puede recolectarse la información importante perteneciente al comportamiento del sistema . Una vez que se definen tales eventos es necesario prestar atención al sistema únicamente cuando ocurre un evento. La información que mide el funcionamiento del sistema se acumula en observaciones estadísticas, las cuales se actualizan en cuanto cada elemento tiene lugar.

Dado que los modelos de simulación no necesitan funciones matemáticas explícitas para relacionar las variables, usualmente es posible simular sistemas complejos que no pueden modelarse o resolverse matemáticamente. Además, tal flexibilidad permite una representación más aproximada del sistema. La principal falla de la simulación consiste en que el análisis es equivalente a realizar experimentos y por consiguiente está sujeto a errores experimentales. Esto lleva a las dificultades usuales de diseñar (estadísticamente) el experimento, recolectar observaciones y entonces ejecutar las pruebas estadísticas necesarias de inferencia.

Estructura de los modelos matemáticos.

A diferencia de los modelos de simulación donde no pueden sugerirse estructuras físicas fijas, el modelo matemático incluye tres modelos básicos de elementos.

1. Variables de decisión y parámetros. Las variables de decisión son las incógnitas que deben determinarse con la solucion del modelo. Los parámetros representan las variables controlables del sistema. En general los parametros del modelo pueden ser deterministicos o probabilisticos.

2. Restricciones. Para tomar en cuenta las limitaciones físicas del sistema, el modelo debe incluir restricciones que limitan las variables de decisión a sus valores factibles (o permisibles). Esto usualmente se expresa en la forma de funciones matemáticas restrictivas. Por ejemplo, sean X_1 y X_2 el número de unidades que van a producirse de los productos (variables de decisión), a_1 y a_2 sus respectivos requerimientos por unidad de materia prima, sea A la restricción de materia prima, la función correspondiente es:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq A.$$

3. Función objetivo. Define la medida de efectividad del sistemacomo una función matemática de sus variables de decisión. Por ejemplo, si el objetivo del sistema es maximizar el beneficio total, la función objetivo debe especificar el beneficio en función de las variables de decisión. En general la solución óptima del modelo se obtiene cuando los valores correspondientes de las variables de decisión proporcionan el mejor valor de la función objetivo satisfaciendo todas las restricciones. Esto significa que la función objetivo actúa como un indicador para el logro de la solución óptima.

Los modelos matemáticos en investigación de sistemas, pueden verse generalmente como sigue:

Determinar los valores de las variables de decisión x_j, $j=1,2,3,\ldots,n$, los cuales optimizarán a:

$$x_o = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

con sujeción a:

$$g_o(x_1, x_2, \ldots . x_n) \le b_i, \qquad i = 1,2,\ldots,m$$
$$x_i \ge 0, \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

La función f es la función objetivo mientras que $g_i \le b_i$ representa la i-ésima restricción, donde b_i es una constante conocida. Las restricciones $x_j \ge 0$, se conocen como las restricciones de no negatividad, las cuales restringen las variables a valores de cero o positivos solamente. En la mayoria de los sistemas de la vida real las restricciones de no negatividad aparecen como un requisito natural.

Solución Optima.

La discusión anterior indica que un modelo matemático busca *optimizar* una función objetivo sujeta a un conjunto de restricciones. Dos ingenieros trabajando independientemente en un mismo problema, pueden proporcionar dos modelos diferentes con criterios objetivos diferentes. Por ejemplo, un ingeniero puede preferir maximizar el beneficio, mientras que el otro ingeniero puede preferir minimizar el costo. Los dos criterios no son equivalentes en el sentido de que, con las mismas restricciones, los dos modelos pueden no producir la misma solución óptima. Esto puede ser claro en tanto que los costos puedan estar bajo el control inmediato de la organización para la cual se hace el estudio. El beneficio pudiera ser el resultado de factores incontrolables, tales como la situación de mercado dictada por los competidores.

La principal conclusión en este punto es que la solución óptima de un modelo es la mejor relacionada solamente a este modelo. En otras palabras no se debe pensar que este óptimo es el mejor para el proble- ma de consideración. En lugar de esto, es el mejor solamente si el criterio especificado puede ser justificado como una representación real de las metas de la organización completa donde existe el problema.

En la práctica resulta dificil incluir todos los objetivos (posiblemente en conflicto) en un solo criterio, ya sea por que esto pueda resultar en una función matemática compleja, para la cual ninguna técnica de solución puede aplicarse facilmente, o por que algunos objetivos son demasiado intangibles para permitir su cuantificación razonable. Por ejemplo, al determinar el nivel óptimo de inventario de algun material, el criterio objetivo real debe incluir las metas en conflicto de los departamentos de producción, ventas y finanzas. Que estas metas estan en conflicto se refleja por que el departamento de ventas requiere un cierto nivel de almacenamiento que minimice la escasez de la demanda, independientemente de si el departamento de producción puede o no lograr tal requerimiento. Cuando el criterio objetivo del modelo representa algunas , pero no todas las metas en conflicto, esto lleva a lo que se conoce como una solución subóptima, una situacion que puede no servir al mejor interés de la organización completa.

Naturalmente el ingeniero trataria de minimizar las consecuencias de la subóptimidad. Una posibilidad es la inclusión del principal criterio en conflicto en una función objetivo, asignando valores razonables a cada criterio y luego sumandolos juntos. Estos valores reflejan la consideración del ingeniero acerca de la importancia relativa de cada criterio. Cuando algunos de estos criterios no pueden incluirse en la función objetivo, la solución subóptima debe instrumentarse teniendo en mente el criterio faltante.

Fases de un estudio de Investigación de Sistemas.

Un estudio de investigación de sistemas no puede ser realizado y controlado por el ingeniero de investigación de sistemas solamente, aunque puede ser un experto en modelos y técnicas de solución, posi- blemente no será un perito en todas las areas donde surgen los problemas. Consecuentemente, un equipo de investigación de sistemas deberá incluir a los miembros de la organización directamente responsables de las funciones donde ocurre el problema, así como para la ejecución e implantación de la solución recomendada. En otras palabras, el ingeniero comete un grave error si supone que puede resolver problemas sin la cooperación de aquellos que implantaran sus recomendaciones.

Las principales fases a través de las cuales pasaría el equipo a fin de efectuar un estudio de investigación de sistemas, son:

1. Definición del problema.
2. Diseño y construcción del modelo.
3. Validación del modelo.
4. Operación o solución del modelo.
5. Implantación de los resultados del sistema.

La primera fase del estudio requiere una definición del problema. Desde el punto de vista de investigación de sistemas esto implica tres aspectos principales:

a).- Una descripción de la meta o el objetivo del estudio.

b).- Una identificación de las alternativas de decisión del sistema.

c).- Un reconocimiento de las limitaciones, restricciones y requisitos del sistema.

Una descripción del objetivo del estudio debe reflejar una representación aproximada del interés total del sistema. Una falla comun en este aspecto es identificar algunas metas representando solamente una porción entera. En forma semejante, un estudio que no toma en cuenta todas las alternativas y limitaciones de decisión del sistema es probable que proporcione una solución no apropiada.

La segunda fase del estudio corresponde a la construcción del modelo. Dependiendo de la definición del sistema del problema, el equipo de investigación de sistemas deberá decidir sobre el modelo más adecuado para representar el sistema. Tal modelo deberá especificar expresiones cuantitativas para el objetivo y las restricciones del problema en función de sus variables de decisión. Si el modelo resultante se ajusta a uno de los modelos matemáticos comunes (por ejemplo la programación lineal), puede obtenerse una solución conveniente mediante técnicas matemáticas, si las relaciones matemáticas del modelo son demasiado complejas para permitir soluciones analíticas. Puede ser más apropiado un modelo de simulación. Algunos casos pueden requerir el uso de una combinación de modelos matemáticos y de simulación.

La tercera parte en estudio corresponde a la operación o solución del modelo. En modelos matemáticos esto se logra usando técnicas de optimización bien definidas y se dice que el modelo proporciona una solución adecuada. Si se emplean los modelos de simulación, el concepto de optimidad no queda bien definido, y la solución en estos casos se emplea para obtener evaluaciones aproximadas de las medidas del sistema.

La cuarta fase busca la validación del modelo. Un modelo es válido si, independientemente de sus inexactitudes al representar el sistema, puede dar una predicción confiable del funcionamiento del mismo. Un método común para probar la validez de un modelo es comparar su funcionamiento con algunos datos pasados disponibles del sistema actual. El modelo sera válido si bajo condiciones similares de entrada puede reproducir el funcionamiento pasado del sistema. El problema se presenta cuando no existe seguridad de que el funcionamiento futuro del sistema continuará duplicando su historia. También, ya que el modelo está basado en el examen cuidadoso de datos anteriores, esta comparación deberá siempre revelar resultados favorebles.

La fase final en el estudio trata sobre la implantación de los resultados probados del modelo. Esto basicamente implicaría la traducción de estos resultados en instrucciones de operación detallada emitidas en una forma comprensible a las personas que administrarán y operarán el sistema posteriormente . La interacción del equipo de investigación de sistemas y el personal de operación llega a su máximo en esta fase. La comunicación entre los dos grupos puede mejorarse buscando la participación del personal de operación y desarrollar el plan de implantación. En esta forma ninguna consideración práctica, se dejará de analizar. Mientras tanto, pueden verificarse las modificaciones o ajustes posibles en el sistema por el personal de operación para la factibilidad práctica. En otras palabras es imperativo que la fase de implantación se ejecute mediante la cooperación de equipo de investigación y de aquellos que serán responsables de la administración y operación del sistema.

II. MUESTREO

En este capítulo se estudirá la importancia de tomar una muestra reprsentativa para el desarrollo del modelo que se encuentra en estudio. En los problemas de ingenieria se puede presentar el caso de elegir una muestra, de un conjunto de observaciones para lo cual el ingeniero debe de considerar las distintas variables que actuan en la solución del problema y de acuerdo a estas, elegir la muestra más apropiada y el tamaño de esta. Tal es el caso de conocer por ejemplo la resistencia promedio de un lote de 5000 varillas que se emplearán en una construcción. No es posible economicamente hablando hacer una prueba a cada varilla, por lo que se deberá tomar la muestra de unas cuantas varillas (a consideración del ingeniero encargado) para conocer o bien estimar la resistencia de estas.

2.1 IMPORTANCIA Y NATURALEZA.

En la ingeniería civil uno de los elementos más importantes en el diseño es el equilibrio costo-beneficio del proyecto. Para lograr un bajo costo en proyectos que requieren de experimentos u observaciones, se deberá tener un menor número de muestras. Sin embargo, para llegar a el equilibrio entre el costo y el beneficio, las muestras que se tengan deberán ser las minimas para poder hacer un modelo de simulación o matemático que se acerque a los resultados que produciría el sistema si estuviera en operación; por lo tanto, se requiere que el ingeniero analista estudie el sistema y determine si son necesarias las muestras y cuantas se requieren para el desarrollo del modelo.

La mayor parte de los estudios de investigación de sistemas se refiere, en mayor o menor grado, a variables aleatorias cuyas medidas y distribuciones no se pueden conocer precisamente. Aunque a menudo se supone un valor particular para la media para poder probar el efecto de un cambio en alguna variable controlable, en nada contribuye a la comprensión del proceso y nunca es un punto fuerte del estudio. El papel de la teoría de muestreo en la investigación de sistemas consiste en sistematizar, en cuanto sea posible, las suposiciones que deben hacerse con respecto a las medidas y las distribuciones de las variables aleatorias relevantes.

Puesto que la distribucuón misma queda fuera del alcance de medidas discretas, se deben hacer inferencias con base en la información proporcionada por los datos. Los datos pueden considerarse como medidas directas de los elementos correspondientes en la población descrita mediante la inaccesible distribución. Estas inferencias se pueden considerar solamente si los datos son representativos, esto es, si los elementos de la muestra se pueden considerar como seleccionados en forma insesgada de la población total.

Como ejemplo de las fases de inferencia que pudieran hacerse basados en una muestra representativa, se puede mencionar la estimación de la velocidad de la corriente del cauce de un río, si los datos de la prueba se han tomado en la superficie del agua; la contaminación que produce una fábrica si las muestras de contaminación se toman a tres kilómetros de la chimenea; la suceptibilidad de licuefacción en la ciudad de México, si la mayoria de las muestras se toman de la zona de las Lomas, zona boscosa alejada del centro de la ciudad.

La teoría de muestreo proporciona guías para la selección de una muestra representativa de un tamaño dado. En una situación típica, la inferencia puede ser una estimación de la *media* de la distribución teórica, y el grado de confiabilidad en esta estimación se expresa como la raíz cuadrada del cuadrado medio de la diferencia entre la media estimada y la media verdadera.

Espacio muestral.

Se denomina espacio muestral a la colección de todos los posibles resultados de un experimento. Los elementos del conjunto S de este espacio se denomina puntos muestrales, cada uno de ellos asociado con uno y sólo un resultado distinto. La precisión para distiguir resultados es cosa de criterio, que dependerá en la práctica de la utilización que se le dará al modelo.

Por ejemplo, supongase que un ingeniero en transporte se dirige a un cruce particular de calles, exactamente al medio día todos los dias de la semana y espera que el semáforo cumpla un ciclo: registra el número de vehiculos con determinada dirección que se detienen antes de que el semáforo cambie a verde. Si la longitud minima del vehiculo es de 5 metros y la de la cuadra 100 metros, el número máximo de vehículos en la fila es de 20. Si le interesa sólo el número total de vehiculos, el espacio muestral de este experimento es un conjunto de 21 puntos designados por $E_0, E_1, \ldots, E_{20}$ asociado cada uno con el número de vehículos observados. Este conjunto se puede representar como en la figura 2.1. Ahora bien, si el ingeniero necesita otra información, puede hacer una distinción entre automóviles y camiones, y registrar el número de los que se detienen. El espacio muestral del experimento sería entonces bidimensional, con puntos muestrales E_{ij} donde los subindices i representan automóviles y los j camiones, de modo que el máximo valor de $i+j$ sea 20, como se muestra en la figura 2.2.

Fig. 2.1 Espacio muestral elemental-$E_{i,j}$, significa i vehículos observados.

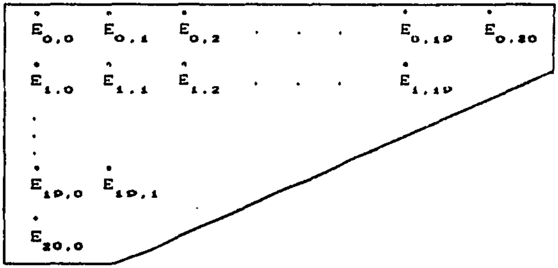


Fig. 2.2 Espacio muestral elemental para automóviles y camiones.

Existe un tipo de espacio muestral que es de gran interés en la ingeniería civil, el cual es llamado espacio muestral condicional, y es el que de acuerdo a ciertas especificaciones o bien de acuerdo a experimentos realizados anteriormente, reduce el espacio unicamente a los resultados que con seguridad se podrán obtener.

En el ejemplo anterior, si se observa unicamente un camión, el espacio muestral condicional en el experimento del semáforo, es el conjunto de sucesos $E_{0,1}$, $E_{1,1}$, $E_{2,1}$, ... , $E_{10,1}$, suponiendo que a lo más dos camiones se pueden observar. El espacio muestral condicional se ilustra en la figura 2.3.

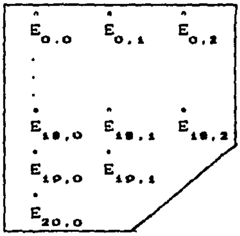


fig. 2.3 Espacio muestral discreto condicionado.

Ejemplo 1.

Un ingeniero está diseñando una gran alcantarilla para conducir el gasto de dos áreas separadas. La cantidad de agua del área A puede ser 0,10,20,30 m^3 y la de B 0,20,40,60 m^3. Representar el espacio muestral de A y B conjuntamente.

Solución:

$E_{i,j}$ = Elemento del espacio muestal

i = Gasto del área A en m^3

j = Gasto del área B en m^3

Espacio muestral del experimento

$E_{0,0}$	$E_{0,20}$	$E_{0,40}$	$E_{0,60}$
$E_{10,0}$	$E_{10,20}$	$E_{10,40}$	$E_{10,60}$
$E_{20,0}$	$E_{20,20}$	$E_{20,40}$	$E_{20,60}$
$E_{30,0}$	$E_{30,20}$	$E_{30,40}$	$E_{30,60}$

2.2 TIPOS DE MUESTREO.

El diseño de la muestra implica la determinación de cuántas y cuáles observaciones particulares se deben de realizar. La exactitud y precisión (sesgo y varianza) de las estimaciones derivadas de las muestras depende tanto del tamaño como del tipo de la muestra . El costo por observación también depende de estas variables. De aquí que el objetivo de los ingenieros investigadores debe ser diseñar una muestra tal, que la suma de los costos de las observaciones sea tan pequeña como sea posible.

Para resolver este tipo de problemas aunque sea aproximadamente, es necesario algún conocimiento de la teoría del muestreo. Aquí se mencionan los tipos de diseño de muestreo con los que debe estar familiarizado un ingeniero de investigación de sistemas y se citan sus principales ventajas y desventajas.

1. **Muestreo aleatorio sencillo (no restringido).**

A) Descripción breve.

Se obtiene únicamente numerando cada elemento de la población y utilizando una tabla de números aleatorios para seleccionar los n números, en consecuencia los n elementos que se van a observar. En este muestreo todas las muestras de tamaño n tienen la misma probabilidad de ser seleccionadas, al igual que todos los elementos de la población.

B) Ventajas.

- Requiere a priori de un conocimiento mínimo de la población.
- No tiene posibles errores de clasificación.
- Facilidad para analizar los datos y calcular los errores

C) Desventajas.

- No utiliza el conocimiento que de la población pudiera tener el ingeniero.

- Da errores mayores para un mismo tamaño de muestra que el muestreo estratificado.

2. Muestreo aleatorio sistemático.

A) Descripción breve.

En principio se determina la fracción de la población que se va a estudiar (1/k) y luego se selecciona cada k-ésimo miembro de la lista ordenada de la población completa. Para introducir la aletoriedad entre 1 y k (por ejemplo x) y la muestra, se forma con miembros de la población cuyos números son x, x+k, x+2k,...x+nk. Sobre está base , antes de seleccionar x, cada miembro de la población tiene la misma probabilidad de ser incluido en la muestra.

Cuando la población está o puede ser dividida en subgrupos, se pueden utilizar en el diseño de la muestra.

B) Ventajas.

- Si la población se ordena con respecto a la propiedad adecuada, da el efecto de la estratificación, y de aquí que reduzca la variabilidad comparado con el muestreo aleatorio simple.

- Simplicidad para extraer la muestra; facil de verificar.

C) Desventajas.

- Si el intervalo de muestreo está relacionado con el ordenamiento períodico de la población, se puede introducir la variabilidad incrementada

- Las estimaciones del error probablemente son altas donde existe el efecto de estratificación.

3. Muestreo aleatorio de multiples etapas.

A) Descripción breve.

Se obtiene seleccionando primero una muestra aleatoria de subgrupos y extrayendo de cada subgrupo seleccionando una muestra aleatoria de sus miembros.

B) Ventajas.

- Se requieren listas de muestreo, identificación, y numeración sólo para los miembros de las unidades de muestreo seleccionadas en la muestra.

- Si las unidades de muestreo están definidas geográficamente, disminuye los costos de campo.

- Si se hace con probabilidad proporcional al tamaño de la población se reduce la variabilidad.

C) Desventajas.

- Los errores probablemente son mayores que en el muestreo aleatorio simple y el muestreo sistemático para el mismo tamaño de la muestra.

- Los errores aumentan al disminuir el número seleccionado de unidades de muestreo.

4. Muestreo aleatorio estratificado.

A) Descripción breve.

Trata de hacer que la muestra sea representativa de cada subgrupo seleccionando muestras aleatorias de tamaños prescritos a partir de cada subgrupo. Las muestras de los subgrupos pueden ser proporcionales en tamaño al número de ellos. Si son proporcionales al tamaño y a la desviación estándar dentro de ellos, la muestra es representativa, debido a que la población media total tiene la menor varianza de muestreo posible para un tamaño de muestra dado.

B) Ventajas.

- Asegura la representatividad con respecto a la propiedad que forma la base de la clasificación de las unidades; por lo tanto produce menos variabilidad que el muestreo aleatorio simple y el muestreo de múltiples etapas.

- Disminuye la probabilidad de fallar al incluir miembros de la población debido al proceso de clasificación

- Se pueden estimar las características de cada estrato, y de aquí que se puedan hacer comparaciones.

C) Desventajas.

- Requiere información exacta con respecto a la proporción de la población en cada estrato, de otra manera aumenta el error.

- Si no se dispone de las listas estratificadas, puede resultar muy costoso prepararlas; posibilidad de clasificar incorrectamente y por consecuencia aumento de la variabilidad.

5. Muestreo en racimo.

A) Descripción breve.

Se obtiene seleccionando todos los elementos de una muestra aleatoria de subgrupos.

B) Ventajas.

- Si los racimos se definen geográficamente, producen costos de campos menores.

- Requiere solamente listados individuales en los racimos seleccionados.

- Se pueden estimar las características tanto de los racimos como de la población.

- Se puede utilizar para muestras subsecuentes, puesto que se seleccionan racimos no elementos y se permite la sustitución de elementos.

C) Desventajas.

- Mayores errores que en otros tipos de muestreo para tamaños comparables.

- Requiere habilidad para asignar a cada miembro de la población únicamente a un racimo; si esta no se tiene, puede dar como resultado la duplicación u omisión de elementos.

6. Muestreo en racimo estratificado.

A) Descripción breve.

Se obtiene seleccionando una muestra aleatoria de todos los subgrupos en la primera etapa y luego en otra etapa todos los elementos de los subgrupos seleccionados anteriormente. En este diseño se involucran al menos tres etapas; entre más etapas intervengan en el diseño, son posibles un mayor número de combinaciones de diferantes tipos de muestreo.

B) Ventajas.

- Reduce la variabilidad del muestro en racimo simple.

C) Desventajas.

Puesto que las propiedades de los racimos pueden variar, se puede reducir la desventaja de la estratificación y hacer inútil la muestra para una investigación posterior.

7. Muestreo repetitivo (o múltiple).

A) Descripción breve.

Se obtiene seleccionando una muestra aleatoria, cuyo análisis se utiliza para diseñar una segunda muestra aleatoria; el proceso puede continuar infinitamente. En el límite se hace una observación en ese tiempo y después se toma cada decisión como si se continuara o no el muestreo. Este se llama muestreo secuencial.

B) Ventajas.

- Proporciona estimaciones de las características de la población que facilitan la planeación eficiente de la muestra siguiente, por lo que reduce el error de la estimación final.
- A la larga reduce el número de observaciones requeridas.

C) Desventajas.

- Complica la administración o el trabajo de campo.
- Se requieren más calculos y analisis que en el muestreo no repetitivo.
- El muestreo secuencial se puede utilizar solamente donde una muestra pequeña puede aproximar la representatividad y donde

el número de observaciones se puede incrementar convenientemente en cualquier etapa de la investigación.

Estos tipos de muestro implican un conteo completo, y una muestra aleatoria sistemática en cada etapa. Si se representan dichos procedimientos de muestreo, las estimaciones variarán pero es posible determinar la magnitud de la variación a partir de datos contenidos en una sola muestra. Esto es posible únicamente debido a que el diseño de la muestra, especifica (ó implica) la probabilidad de que cualquier elemento dado de la población esté incluido en la muestra. Por tal razón tales diseños se llaman muestras de probabilidad.

En algunos casos el ingeniero puede seleccionar un subgrupo que represente a la población sobre la base de un criterio que considere como valor representativo del subgrupo. Dicho criterio de muestreo requiere suposiciones mucho más fuertes que el muestreo de probabilidad, para justificarlo. Los errores de estimación que se derivan de estas muestras se pueden calcular sólo en el caso en que se tenga disponible un registro de los estimadores que se obtienen a partir de muestras anteriores junto con el conocimiento de los valores verdaderos que se obtienen en cada caso.

Ejemplo 2.

Una industria que produce elementos estructurales prefabricados de concreto tiene 20 lotes con 150 secciones cada una, para la construcción de entrepisos. Se desea conocer la resistencia promedio de los elementos estructurales, para lo cual el ingeniero encargado ha decidido que con 15 pruebas que se tengan es suficiente. Obtener los elementos de la muestra por el método aleatorio simple.

Solución:

El primer paso será ordenar todos los elementos estructurales asignando el número que corresponda a cada elemento de la muestra, se tendran entonces 3000 elementos en la población.

Empleando la tabla 2.4 de números aleatorios de cuatro cifras, se selecciona a los elementos de la muestra, en la que quedarán entonces los siguientes elementos de la población para ser muestreados:

1306	2296	2630
0422	1134	1374
2961	1403	1572
1428	1137	0882
1330	0995	0006

estos serán entonces los elementos que integren la muestra para la obtencion del resultado del experimento.

Ejemplo 3.

Para el ejemplo de los elementos estructurales prefabricados obtener la muestra por el método sistemático.

Solución:

Para este metodo la muestra será diferente al método aleatorio simple. El tamaño de la muestra se referirá a una fracción que se considere representativa de acuerdo al tamaño de la población.

El ingeniero encargado decide que la fracción que representa a los elementos estructurales es de 1% (1/100, donde k=100), el tamaño de la muestra será entonces:

$$3000 \times 0.01 = 30$$

En este método el primer miembro de la muestra es elegido por el ingeniero análista y deberá estar entre el primer elemento ordenado y el número k que en este caso es de 100. El ingeniero encargado escoge al azar el número 13 para tener el primer elemento de la muestra. Los siguientes elementos de la muestra son

$$\begin{aligned} 13 + k &= 13 + 100 = 113 \\ 13 + 2k &= 13 + 2(100) = 213 \\ 13 + 3k &= 13 + 3(100) = 313 \\ &\vdots \\ 13 + 29k &= 13 + 29k = 2913 \end{aligned}$$

en resumen los elementos ordenados que integran la muestra, requerida para la obtención de la resistencia, son:

0013	0513	1013	1513	2013	2513
0113	0613	1113	1613	2113	2613
0213	0713	1213	1713	2213	2713
0313	0813	1313	1813	2313	2813
0413	0913	1413	1913	2413	2913

Ejemplo 4.

Para el ejemplo de los elementos prefabricados de concreto obtener la muestra correspondiente por el metodo de muestreo aleatorio de multiples etapas.

Solución:

La solución elegida por el ingeniero analista es de una proporción de 0.005 veces el tamaño de la muestra. El tamaño de la muestra es:

$$0.005 \times 3000 = 15$$

entonces, de los 20 subgrupos se escogerán 15 elementos de la muestra eligiendo primero por un metodo aleatorio los quince subgrupos de los que se escogerá un elemento para ser muestreado. Empleando la tabla 2.2 , se tiene que los subgrupos que se seleccionaron son:

13	02	15
09	11	12
18	20	16
10	04	06
19	03	07

de cada uno de los subgrupos obtenidos se escoge un elemento en formaaleatoria; en este caso se escogeran con la tabla de números aleatorios (tabla 2.3) , se seleccionan en este caso con la tabla los siguientes elementos para ser muestreados:

Subgrupo	elemento	Subgrupo	elemento
13	006	04	150
09	060	03	027
18	005	15	110
10	094	12	082
19	013	16	086
02	102	06	103
11	124	07	036
20	133		

Ejemplo 5.

Siguiendo con el ejemplo de los elementos estructurales prefabricados, el colado de los elementos se hace de cinco en cinco. Obtener la muestra representativa por el método de muestreo estratificado proporcional.

Solución:

Como son colados los elementos de cinco en cinco, se considera que la unidad para este caso sera de cinco elementos estructurales. En este caso para el método se tomará una unidad para ser muestreada de cada subgrupo, es decir, se probarán cinco elementos de cada subgrupo sin importar cual elemento se prueba, por lo tanto el ingeniero analista escogerá fisicamente los elementos para ser muestreados.

Ejemplo 6.

Del ejemplo de los elementos estructurales prefabricados, obtener la muestra por el método de muestreo en racimo.

Solución:

Para este método la unidad que se escoge para cada subgrupo debe ser aleatoria. Tomando los valores de la tabla 2.3, se tiene que la unidad para cada subgrupo es:

Subgrupo	Unidad	Subgrupo	Unidad
01	008	11	110
02	060	12	082
03	005	13	086
04	094	14	103
05	013	15	036
06	102	16	149
07	124	17	068
08	133	18	084
09	150	19	017
10	027	20	067

Las unidades que se mencionan anteriormente son las que forman la muestra y deberán ser escogidos por el ingeniero encargado.

Ejemplo 7.

Del ejemplo de los elementos estructurales prefabricados, obtener una muestra por el método de muestreo en racimo estratificado.

Solución:

Para este método se escogen aleatoriamente de la muestra obtenida por el método por racimo las unidades en que se tiene el número de elementos que se debe muestrear o probar. Empleando la tabla 2.2 para la obtención de la muestra se llega a la siguiente muestra

Subgrupo	Unidad muestral	elementos muestrales
01	006	02
02	060	13
03	005	02
04	094	13
05	013	13
06	102	13
07	124	13
08	133	13
09	150	13
10	027	13
11	110	13
12	082	13
13	086	13
14	103	13
15	036	13
16	149	13
17	068	13
18	084	13
19	017	13
20	067	13

Ejemplo 9.

Del ejemplo de los elementos estructurales prefabricados obtener una muestra o dar un criterio de selección para la obtención de la muestra.

Solución:

El ingeniero puede considerar que una muestra de muchos elementos es antieconómica para este caso y si se selecciona una muestra pequeña no seria representativa de los elementos que se tienen, por lo que el tamaño de la muestra dependerá de la experiencia que el ingeniero tenga para determinar la solución. En este caso el ingeniero puede escoger un elemento muestral por cada 40 elementos estructurales que se tengan, con lo cual se forma una muestra de 10 elementos.

2.3 TAMAÑO DE LA MUESTRA.

Cuando se emplea la simulación para estudiar un sistema estocástico se representan una o más variables en el modelo de probabilidad del cual se va a obtener la muestra. La pregunta más frecuente que surge en los ingenieros de sistemas es: ¿Cuántas muestras se deberán tener para obtener una estadística significante? Desafortunadamente no se conoce la respuesta de está pregunta, poco se conoce de está información, lo cual se deberá tener presente para la decisión del muestreo. Si el muestreo se hace con numeros aleatorios, se tendrán algunos grados de imprecisión en el resultado, el cual depende del tamaño de la muestra, por que, mientras mas grande es el tamaño de la muestra, menor es el error debido a que se tiene un registro que se apega más al comportamiento del sistema.

El escoger el tamaño apropiado de muestreo para diseñar con cierta precisión y para minimizar el costo de análisis del modelo es de extrema dificultad y es algo muy importante. Desafortunadamente, el tamaño de la muestra que se tome estara en función de la inversión que se requiera para la investigación y el desarrollo del modelo. Sin embargo, como se tiene poca información como base para encontrar la relación entre el sistema real y el modelo desarrollado , se requiere que la información con que se cuenta sea correcta y lo mas precisa posible, o bien se necesitará conocer el grado de imprecisión que se tiene en el desarrollo del modelo. Por lo que, se concluye que es necesario conocer el tamaño de la muestra requerido para que se tengan los datos representativos del sistema real que se está analizando.

En la simulación de un sistema se tiene que es mas facil de analizar un sistema ya establecido que sólo se tiene que modificar, que un sistema que apenas se va a poner en funcionamiento.

El tamaño de la muestra puede ser determinado en dos formas: (1) "apriori" e independiente de la operación del sitema; (2) durante laoperación del sistema y basado en los resultados que se van obteniendo de este modificando así el modelo que se tiene.

Esto justifica el uso de ciertas formas de analisis "apriori" basadas en el conocimiento del modelo. Muchos ingenieros se basan en la suposición de que la solución del problema puede ser parecida a la de otros sistemas similares y con la misma distribución de probabilidad. En la mayoria de los casos es ajustable el modelo a la distribución normal, lo que se justifica por el teorema del limite central.

Si se conoce σ (desviación estandar), el tamaño de la muestra, que garantizan un error E (diferencia entre $\overline{X}$, valor medio de la muestra , y μ, valor medio real de la población) con un grado de confianza α, se puede obtener el tamaño de la muestra con la siguiente fórmula:

$$n = \left[\frac{k_{\alpha}\sigma}{E}\right]^2 \qquad \text{(Ec. 2.1)}$$

Un proceso similar se tiene para determinar el tamaño de la muestra que garantice que una proporción real de la población tiene ciertas caracteristicas o propiedades. Para un error dado E (diferencia entre la proporción real y p la proporción estimada), y un grado de confianza α, el tamaño de la muestra se obtiene con la siguiente fórmula:

$$n = \frac{k_{\alpha}^{2}}{4E^{2}} \qquad \text{(Ec. 2.2)}$$

Ejemplo 9.

En una planta potabilizadora se emplea una substancia química para purificar el agua , después de la mezcla se analiza el agua que ha sido procesada. ¿Que número de muestras se deben analizar para que, con un nivel de confianza 99%, el error no exceda de un 15%, cuando se desea que la varianza de contenido de cloro sea menor de 2 mililitros.

Solución:

Empleando la ecuación 2.1 se tiene:

$$n = \left[\frac{k_{\alpha}^{2}}{E}\right]^{2}$$

donde $k_{99} = 2.575$ obtenido de la tabla 2.5. sustituyendo valores

$$n = \left[\frac{2.575\ \sqrt{2}}{0.15}\right]^{2}$$

n = 589.39 muestras

n = 589 muestras.

Ejemplo 10.

Una fábrica de acero desea estimar con un 99% de confianza y con una proporción de 5% el número de perfiles que se fabrican con baja resistencia. ¿Cuántos perfiles tendrán que ser probados para poder determinar lo deseado?

Solución:

Empleado la ecuacion 2.2

$$n = \frac{k_{\alpha}^{2}}{4E^{2}}$$

donde k_{99} = 2.575 obtenido de la tabla 2.5, sustituyendo valores

$$n = \frac{(2.575)^2}{4(0.05)^2}$$

n = 663.06 piezas

n = 663 piezas.

TABLA 2.5 *Valores de coeficientes de confianza.*

% de confianza	k* para un límite del intervalo	k* para dos límites del intervalo
90	1.280	1.645
92	1.405	1.750
94	1.555	1.880
95	1.645	1.960
96	1.750	2.055
98	2.055	2.325
99	2.325	2.575

Problemas propuestos.

1. Se va a diseñar un sistema de pisos para una bodega que soportará cajas de cartón llenas de alimentos empacados. Las cajas son de forma cubica, de medio metro de lado y 100 kilogramos de peso. Considere que las cajas pueden amontonarse hasta una altura de 5 metros.

a) Representar el espacio muestral para el peso total de un área de base de medio metro al cuadrado si está cargado por una pila de cajas.

b) ¿Como cambiaria este espacio muestral, si dicha area se puede cargar con la mitad del peso de cada una de las pilas de cajas?

c) Representar el espacio muestral de la carga total en dos areas de base adyacentes, de un metro por un metro. suponiendo que cada una de tales áreas soporta una sola pila de cajas.

2. Se contarán y pesarán los vehiculos que pasan por un puente en un instante dado; soló será registrado el número total y el peso total de los vehiculos. El número máximo de vehículos que se pueden observar dentro del puente es cinco; el peso maximo de un soló vehículo es 5 toneladas y el mínimo es 2 toneladas. Representar el espacio muestral del experimento.

3. Se selecciona un pilote de madera de un surtido de longitudes L, de las cuales la mayor es de 20 metros. El pilote será clavado en la tierra en un área donde el estrato de apoyo de roca sólida está a una profundidad variable D cuyo máximo es de 20 metros. Representar el espacio muestral del experimento.

4. Una cuenca cuenta con 17 estaciones climatológicas, en las cuales se tiene un registro diario que ha sido tomado durante 180 dias Se desea obtener el nivel de precipitación, para lo cual el ingeniero encargado ha decidido que no es necesario emplear todos los datos con que se cuenta y solo empleará una muestra representativa.

a) Obtener la muestra por el método aleatorio simple (60 elementos muestrales).

b) Obtener la muestra por el método sistemático.

c) Obtener la muestra por el método aleatorio de multiples etapas.

d) Obtener la muestra por el método estratificado proporcional (proporción de 0.01).

e) Obtener la muestra por el método en racimo.

f) Obtener la muestra por el método en racimo estratificado.

5. Se han obtenido las deflexiones de 14 columnas de concreto reforzado que sostienen un puente, las lecturas han sido tomadas durante 145 dias. Se desea obtener la deflexión de las columnas, suponiendo que esta es la misma para todas. El ingeniero encargado piensa reducir el trabajo y tomar solamente una muestra representativa de los datos que se tienen.

a) Obtener una muestra por el método aleatorio simple (50 elementos muestrales).

b) Obtener la muestra por el método sistemático.

c) Obtener la muestra por el método aleatorio de multiples etapas.

d) Obtener la muestra por el método estratificado proporcional (con una proporción de 0.01).

e) Obtener la muestra por el método en racimo.

f) Obtener la muestra por el método en racimo estratificado.

6. En un laboratorio de resistencia de materiales se desea obtener la resistencia de un suelo con un 95% de confianza en el resultado y se requiere que el erro no exceda de un 8% proporcionalmente de la resistencia real.

7. En una fábrica de concreto se está diseñando un nuevo cemento para lograr una resistencia mayor y con una mejor

calidad. Si se desea obtener el valor de la resistencia con una confianza de 94%, el error que no exceda de un 10% y que la varianza en el contenido de cemento no exceda de 30 gramos. ¿Cual será el tamaño de la muestra para el experimento?

8. En la reconstrucción de una unidad habitacional se desea optimizar el suministro de agua, para lo cual sera necesario tomar medidas del consumo diario que satisfaga las necesidades de los habitantes de la unidad. Si se desea que en los valores obtenidos se tenga una confianza de 96%, que el error en las medidas no exceda de un 15% del valor real y que la varianza en el gasto sea menor de 0.5 litros. ¿Cuántos dias será necesario tomar lectura del gasto?

9. En la carretera que va de Reynosa, Tamaulipas al poblado de China, Nuevo Leon, se está realizando un analisis para determinar si es necesario que se amplie la carretera o si esta satisface la demanda tal como se encuentra. El ingeniero hara lecturas a diferentes horas del dia, observando la cantidad de automóviles que transitan en ambas direcciones. Se desea que la confiabilidad de los resultados sea de un 90%, un error de 12% y se tenga como máximo una varianza de 10 carros. ¿Cuantas lecturas deberá tomar el ingeniero encargado?

10. En un edificio de 15 pisos que será rehabilitado por haber sido dañado por un sismo, se desea obtener la resistencia de sus elementos con una confianza de 99% y un error en proporción que no exceda de un 5% de la resistencia real. ¿Cuántas muestras serán necesarias para lograr lo deseado?

TABLA 2.2 *Números aleatorios (dos dígitos)*

13	95	96	10	41	03	12	60	58	46
76	75	67	82	20	98	45	33	88	78
47	56	48	28	04	23	70	80	91	14
22	97	63	77	42	34	29	50	39	05
61	36	18	19	57	99	55	07	35	25
93	53	92	84	90	00	69	66	24	01
87	27	71	30	43	72	73	32	17	89
68	49	26	83	81	94	16	64	85	44
40	86	37	02	38	59	06	52	62	31
09	65	51	11	54	15	21	08	74	79

TABLA 2.3 *Números aleatorios (tres dígitos)*

422	239	197	972	264	625	357	640	046	463
995	449	402	353	082	416	498	446	585	519
882	538	166	318	680	649	059	088	947	276
006	359	094	303	086	204	811	111	277	873
568	762	553	332	293	641	568	181	424	884
551	237	764	260	717	725	730	456	627	769
956	830	472	133	127	195	549	037	093	098
755	854	013	878	562	151	092	738	883	000
649	318	852	708	683	084	708	156	900	962
406	325	410	150	103	648	367	294	711	698
539	005	432	974	441	514	123	349	594	382
586	254	480	027	190	843	008	797	015	928
587	407	276	110	036	017	478	214	611	199
060	756	812	563	723	612	260	002	945	162
190	618	336	832	149	265	319	118	283	107
393	940	787	926	449	067	515	200	979	025
877	304	102	978	068	038	651	272	998	516
441	584	124	312	814	401	431	813	742	829
435	937	885	741	200	179	990	224	384	007
967	868	473	279	559	034	560	304	753	526

TABLA 2.4 *Números aleatorios (cuatro dígitos)*

1306	1189	5731	3968	5606	5084	8947	3897	1636	7810
0422	2431	0649	8085	5053	4722	6598	5044	9040	5121
6597	2022	6168	5060	8656	6733	6364	7649	1871	4328
7965	6541	6645	6243	7658	6903	9911	5740	7824	8520
7695	6937	0406	8894	0441	8135	9797	7285	5905	9539
5160	7851	8464	6789	3938	4197	6511	0407	9239	9232
2961	0551	0539	8288	7478	7565	5581	5771	5442	8761
1428	4183	4312	5445	4854	9157	9158	5218	1464	3634
3666	5642	4539	1561	7849	7520	2547	0756	1206	2033
6543	6799	7454	9052	6689	1946	2574	9386	0304	7945
9975	6080	6080	7423	9377	6951	6519	8287	8994	5532
4866	0956	7545	7723	8085	4948	2228	9583	4415	7065
8239	7068	6694	5168	3117	1586	0237	6160	9585	1133
8722	9191	3386	3443	0434	4586	4150	1224	6204	0937
1330	9120	8785	8382	2929	7089	3109	6742	2468	7025
2296	2952	4764	9070	6356	9192	4012	0618	2219	1109
3582	7052	3132	4519	9250	2486	0830	8472	2160	7046
5872	9207	7222	6494	8973	3545	6967	8490	5264	9821
1134	6324	6201	3792	5651	0538	4676	2064	0584	7996
1403	4497	7390	6503	8239	4236	8022	2914	4368	4529
3393	7025	3381	3553	2128	1021	8353	6413	5161	8583
1137	7896	3602	0060	7850	7626	0854	6565	4260	6220
7437	5198	8772	6927	8527	6851	2709	5992	7383	1071
8414	8820	3917	7238	9821	6073	6658	1280	9643	7761
8398	5224	2749	7311	5740	9771	7826	9533	3800	4553
0995	8935	2939	3092	2496	0359	0318	4697	7181	4035
6657	0755	9685	4017	6581	7292	5643	5064	1142	1297
8875	8369	7868	0190	9278	1709	4253	9346	4335	3769
8399	6702	0586	6428	7985	2979	4513	1970	1989	3105
6703	1024	2064	0393	6815	8502	1375	4171	6970	1201
4730	1653	9032	9855	0957	7366	0325	5178	7959	5371
8400	6834	3187	8688	1079	1480	6776	9888	7585	9998
3647	8002	6726	0877	4552	3238	7542	7804	3933	9475
6789	5197	8037	2354	9262	5497	0005	3986	1767	7981
2630	2721	2810	2185	6323	5679	4931	8336	6662	3566
1374	8625	1644	3342	1587	0762	6057	8011	2666	3759
1572	7625	9110	4409	0239	7059	3415	5537	2250	7292
9678	2877	7579	4935	0449	8119	6969	5383	1717	6719
0882	6781	3538	4090	3092	2365	6001	3446	9985	6007
0006	4205	2389	4365	1981	8158	7784	6256	3842	5603
4611	9861	7916	9305	2074	9462	0254	4827	9198	3974
1093	3784	4190	6332	1175	8599	9735	8584	6581	7194
3374	3545	6865	8819	3342	1676	2264	6014	5012	2458
3650	9676	1436	4374	4716	5548	8276	6235	6742	2154
7292	5749	7977	7602	9205	3599	3880	9537	4423	2330

Copiado de ***Handbook of statical***, de Addison-Wesley, tablas de D. B. Owen 1972.

Tabla 2.5 *Desviaciones aleatorias normales.*

0.464	0.137	2.456	-0.323	0.068	0.296	-0.288
0.060	-2.526	-0.531	-0.940	0.543	-1.558	0.187
1.486	-0.354	-0.634	0.697	0.926	1.375	0.785
1.022	0.472	1.279	3.521	0.571	-1.851	0.194
1.394	-0.555	0.046	0.321	2.945	1.974	-0.258
0.906	-0.513	0.525	0.595	0.881	0.934	1.579
1.179	-1.055	0.007	0.769	0.971	0.712	1.090
-1.501	-0.488	-0.162	-0.136	1.033	0.203	0.448
-0.690	0.756	-1.618	-0.445	-0.511	-2.051	-0.457
1.372	0.225	0.378	0.761	0.181	0.736	0.960
-0.482	1.677	-0.057	-1.229	-0.486	0.856	-0.491
-1.376	-0.150	1.356	-0.561	-0.256	0.212	0.219
-1.010	0.598	-0.918	1.598	0.065	0.415	-0.169
-0.005	-0.899	0.012	-0.725	1.147	-0.121	-0.096
1.393	-1.163	-0.911	1.231	-0.199	-0.246	1.239
-1.787	-0.261	1.237	1.046	-0.508	-1.630	-0.146
-0.105	-0.357	-1.384	0.360	-0.992	-0.116	-1.698
-1.339	1.827	-0.959	0.424	0.969	-1.141	-1.041
1.041	0.535	0.731	1.377	0.983	-1.330	1.620
0.279	-2.056	0.717	-0.873	-1.096	-1.396	1.047
-1.805	-2.008	-1.633	0.542	0.250	0.166	0.032
-1.186	1.180	1.114	0.882	1.265	-0.202	0.151
0.658	-1.141	1.151	1.210	0.927	0.425	0.290
-0.439	0.358	-1.939	0.891	-0.227	0.602	0.973
1.398	-0.230	0.385	-0.649	-0.577	0.237	-0.289
0.199	0.208	-1.083	0.219	-0.291	1.221	1.119
0.159	0.272	-0.313	0.084	-2.828	-0.439	-0.392
2.273	0.606	0.606	-0.747	0.247	1.291	0.063
0.041	-0.307	0.121	0.790	-0.584	0.541	0.484
-1.132	-2.098	0.921	0.145	0.446	-2.661	1.045
-0.768	0.079	-1.473	0.034	-2.127	0.665	0.084
0.375	-1.658	-0.851	0.234	-0.656	0.340	-0.086
-0.513	-0.344	0.210	-0.736	1.041	0.008	0.427
0.292	-0.521	1.296	-1.206	-0.899	0.110	-0.528
1.026	2.990	-0.574	-0.491	-1.114	1.297	-1.433
-1.334	1.278	-0.568	-0.109	-0.515	-0.566	2.923
-0.287	-0.144	-0.254	0.574	-0.451	-1.181	-1.190
0.161	-0.886	-0.921	-0.509	1.410	0.518	0.192
-1.346	0.193	-1.202	0.394	-1.045	0.843	0.942
1.250	-0.199	-0.288	-1.810	1.378	0.534	1.216

III. MODELOS PROBABILISTICOS

En la primera parte del capítulo se describe el modelo de las líneas de espera, sin tratar profundamente la deducción de fórmulas. Se presentan las fórmulas empleadas para las aplicaciones en la ingeniería civil; este subcapítulo se describe en dos partes, la primera se refiere a líneas de espera con una estación de servicio y la segunda trata las lineas de espera con varias estaciones de servicio.

La segunda parte del capítulo describe el proceso estocástico, que es un proceso de análisis matemático para un conjunto de elementos que se puede aplicar a los sistemas de inventarios. Los procesos que se analizan estan relacionados con los teoremas de Marckov para procesos estocasticos, en el que el sistema depende unicamente de las propiedades actuales sin importar el comportamiento anterior; este tema se desarrolla en la última parte, y se describen las etapas que se presentan en el proceso y las características que tiene el proceso.

2.1 LINEAS DE ESPERA

La linea de espera , en su concepto más simple, se forma por la llegada aleatoria de clientes que entran a un establecimiento a solicitar un sevicio proporcionado por un servidor. La naturaleza de los clientes, el establecimiento y los servicios varían con la organización que tenga el servidor.

Si el tiempo que se utiliza para servir a un cliente es mayor que el que transcurre entre la llegada consecutiva de dos clientes, se formarán las líneas de espera. En cambio, si el servicio es más rápido que la llegada de clientes, no se formarán líneas de espera.

La teoría de líneas de espera tiene los siguientes objetivos:

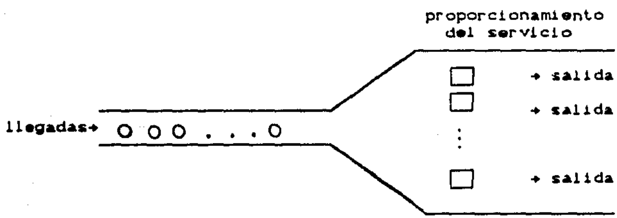
a) Caracterizar cualitativa y cuantitativamente una cola o línea de espera.
b) Determinar los niveles adecuados de ciertos parámetros del sistema que balancean el costo social de la espera con el costo asociado al consumo de recursos .

La cuantificación de una linea de espera se puede hacer a través de un análisis matemático que requiere de suposiciones muy estrictas en cuanto a la naturaleza de las llegadas de clientes.

el tipo de servicio, el número de servidores y la estructura del sistema.

Estructura de las lineas de espera.

Una línea de espera está constituida por un cliente que requiere de un servicio (proporcionado por un servidor) en un determinado periodo. Los clientes entran aleatoriamente al sistema y forman una o varias colas (líneas de espera) para ser atendidos. Si el servidor está desocupado, de acuerdo a ciertas reglas preestablecidas conocidas como disciplina del servicio, se proporciona el servicio a los elementos de la cola. El cliente será atendido en un periodo determinado de tiempo, llamado tiempo de servicio. Al finalizar el cliente abandona el sistema. Si se conocen las leyes que gobiernan las llegadas, entonces la naturaleza de está situación puede estructurarse y analizarse matemáticamente.



La estructura física de un sistema de líneas de espera consiste de tres componentes:

- Una o varias fuentes de llagada.
- Una o varias fuentes de llegada.
- Una instalación de servicio formada por una ovarias estaciones de servicio.

La teoría de las líneas de espera tambien se refiere a la forma en que se escogen las llegadas para recibir servicio. Se considera que las unidades conforme llegan ocupan su lugar en el instante en que llegan a la cola. Se reconoce que alguna prioridad podrá cambiar ese patrón de servicio. Sin embargo en este trabajo no se considera dicha prioridad.

Las llegadas pueden ser uniformes durante cierto periodo, o pueden ser aleatorias . La tasa de llegadas puede tomar la forma de empleados que llegan a la caseta de herramientas de la empresa, o bien representar el número de autos que llegan a una caseta de cobro de una autopista.Generalmente la tasa de llegadas se expresa como arribos por unidad de tiempo. En las situaciones en que las llegadas se distribuyen en forma aleatoria puede utilizarse su promedio si este se registra durante un periodo suficientemente prolongado.

Cuando el ingeniero se enfrenta a fenómenos de lineas de espera y los costos que surgen de ellos, el que toma las decisiones utiliza sus conocimientos de las caracteristicas medias de las colas para intentar reducir los costos. Algunos de los cambios que se pueden recomendar serian por ejemplo, incrementar o reducir las estaciones de servicio según sea el caso, cambiar el tipo de sevicio en una o más estaciones para reducir el tiempo de espera, dividir una línea de espera o fusionar varias de ellas.

Se hace notar que las lineas de espera se hallan en función de variables aleatorias que pueden describirse matemáticamente con una cierta distribución de probabilidad. Las distribuciones que se ajustan comúnmente a los problemas de lineas de espera, son la distribución de Poisson para las llegadas y la distribución exponencial para el servicio.

Modelo de llegadas (distribución de Poisson).

Una distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta que pronostica el número de llegadas en un tiempo dado. La distribución de Poisson incluye la probabilidad de que ocurra una llegada en un cierto periodo de tiempo y es independiente de lo que haya ocurrido en observaciones precedentes. Es semejante a una distribución normal sólo que esta ultima está sesgada hacia un lado. esta distribución indica que las llegadas ocurren en forma aleatoria y se representa por medio de la constante λ. Esta constante representa el número de llegadas por unidad de tiempo (tasa promedio de llegadas), mientras que $1/\lambda$ es la longitud del intervalo de tiempo entre dos llegadas consecutivas (t y t+1), tambien llamada tiempo medio de llegadas.

La distribución de Poisson (curva con parámetro λt), donde n es el número de llegadas dentro del intervalo t, el parámetro λ es la probabilidad de una llegada, y t es el tiempo total considerado. En este caso se tiene:

$$f_t(n) = P[n \text{ llegadas en el tiempo } t] = \frac{(\lambda t)^n \, e^{-\lambda t}}{n\,!} \qquad \text{(Ec. 3.1)}$$

El simbolo (!) que se encuentra después de la n, indica factorial de n, mientras que e (con valor de 2.71828) es la base de los logaritmos naturales. La expresión de la distribución exponencial (función densidad de t), es:

$$g(t) = \text{función de densidad de } t = \lambda e^{-\lambda t} \qquad \text{(Ec. 3.2)}$$

Como los modelos de líneas de espera emplean una distribución de Poisson, se puede probar la suposición de que las llegadas siguen una distribución Poisson, lo que se logra buscando un intervalo fijo de tiempo y contando el número de unidades que llegan en ese intervalo, lo que se hace con una muestra de las llegadas, y calculando así el número medio de las llegadas. Los datos observados pueden trazarse en forma de un histograma o diagrama de barras. Puede utilizarse una prueba apropiada de calidad de ajuste para determinar si los datos se apegan a una distribución de Poisson.

Modelo de servicio (distribución exponencial).

En el modelo de servicio se tiene un parámetro μ, que es el número de servicios realizados por unidad de tiempo, mientras que la constante promedio de tiempo de servicio ($1/\mu$) es el número de unidades de tiempo por cada cliente servido. El tiempo de servicio suministrado se da por medio de una distribución exponencial (que muchos autores llaman distribución exponencial negativa), cuando el tiempo de servicio ocurre entre el tiempo t y el tiempo t+1. Hay que notar que la distribución Poisson, no puede aplicarse al servicio.

Generalmente hay un tiempo ocioso por parte del prestador del servicio. La distribución de Poisson se aplica a un intervalo de tiempo fijo de servicio continuo, pero nunca se puede estar seguro de que esto ocurra en cualquir situación, por lo que se utiliza la distribución exponencial. Cuando esta distribución se traza tendrá una pendiente hacia abajo y hacia la derecha de su máximo.

Si se substituye μ por λ en la ecuación 3.1 y se designa con n al número de servicios potenciales que puedan suministrarse en el intervalo T, la fórmula de Poisson para una tasa de servicio es la siguiente:

$$f_t(n) = P(n \text{ servicios en el tiempo } t) = \frac{(\mu t)^n e^{-\mu t}}{n\ !} \qquad \text{(Ec. 3.3)}$$

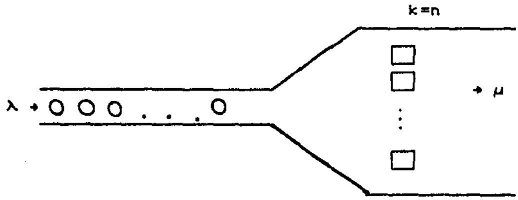
Remplazando μ por λ en la ecuación 3.2, la probabilidad de que se complete el servicio de una unidad en el tiempo t para la distribución exponencial, sera:

$$g(t) = \mu e^{-\mu t} \qquad \text{(Ec. 3.4)}$$

Con el fin de comprobar la suposición de que los tiempos de servicio se distribuyen en forma exponencial, se obtienen datos con métodos normales de estudios de tiempo, y se emplea una prueba estadistica apropiada.

Ecuaciones básicas que gobiernan las líneas de espera.

Las relaciones recursivas que se presentan a continuación, se aplican en el caso general de k estaciones de servicio, cada una con tasa media de servicio μ. Estas k estaciones de servicio, se alimentan de una misma cola, con tasa media de llegadas λ.



Sea: n = número de unidades en el sistema

P_n = probabilidad de que haya n unidades en el sistema

k = número de estaciones de servicio

Las P_i pueden calcularse sucesivamente en términos de P_0 mediante las siguientes expresiones

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda + (n-1)\mu}{n\mu} P_{n-1} - \frac{\lambda}{n\mu} P_{n-2} \qquad n = 2,3,4,\ldots,k$$

$$P_n = \frac{\lambda + k\mu}{k\mu} P_{n+1} - \frac{\lambda}{k\mu} P_{n-2} \qquad n \geq k+1 \qquad \text{(Ecs. 3.5)}$$

Una vez que las ecuaciones P_n se han expresado todas en términos de P_o, la evaluación de P_o se obtiene mediante el uso de la siguiente relación:

$$\sum_{n=o}^{\infty} P_n = 1 \qquad \text{(Ec. 3.6)}$$

que es lo mismo que:

$$P_o + P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1$$

3.1.1 LINEAS DE ESPERA CON UNA ESTACION DE SERVICIO.

Para el caso de una estación de servicio, con llegadas tipo Poisson (con tasa media de llegadas λ) y tiempos exponenciales de servicio (con tasa media de servicio μ), las ecuaciones 3.5 se comvierten en:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_o$$

$$P_n = \frac{\lambda + \mu}{\mu} P_{n+1} - \frac{\lambda}{\mu} P_{n+2} \qquad n \geq 2 \qquad \text{(Ecs. 3.7)}$$

Una fácil deducción permite llegar a:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_o^n \qquad n \geq 0 \qquad \text{(Ec. 3.8)}$$

y con el uso de la condición:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

se llega finalmente a la siguiente ecuación:

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \qquad n \geq 0 \qquad \text{(Ec. 3.9)}$$

Esta ecuación es válida solamente cuando la tasa media de servicio μ excede a la tasa media de llegadas λ.

Para la solución práctica de problemas de líneas de espera se necesitan la distribución de variables aleatorias tales como el tiempo de espera de una unidad antes de que reciba servicio (variable aleatoria w) y el tiempo total de una llegada en el sistema (denotada por v;v=w más el tiempo de servicio).

Puesto que hay una probabilidad positiva $1-(\lambda/\mu)=P_o$ de que una llegada no tenga que esperar antes de recibir servicio, la distribución de w es en parte discreta (cuando w=0) y en parte continua (cuando w >0). Si $\varphi(w)dw$ es la probabilidad de la parte continua {w<tiempo de espera < $w+\partial w$}, la distribución resultante para w es:

$$P(w=0) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \qquad \text{(Ec. 3.10)}$$

y

$$\varphi(w)dw = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) \lambda e^{(\lambda-\mu)w} dw \qquad w>0$$

Nótese que $\int_0^\infty \varphi(w)$ tiene el valor de λ/μ y no la unidad, puesto que el evento {w>0} no es un evento que ocurra con certeza.

Para la función de densidad condicional del tiempo de espera, dado que una persona tiene que esperar, se divide $\varphi(w)$ entre P{w>0}, con lo que se obtiene:

$$\varphi(w/w>0) = \mu-\lambda e^{(\lambda-\mu)w} \qquad \text{(Ec. 3.11)}$$

$$\int_0^\infty \varphi(w/w>0)\, \partial w = 1$$

La densidad $\theta(v)$ del tiempo total que una llegada pasa en el sistema (el tiempo de espera más el tiempo de servicio) se puede calcular de una manera semejante, y resulta ser idéntica á la ecuación 3.11, esto es:

$$e(v) = (\mu-\lambda)e^{(\lambda-\mu)v} \qquad \text{(Ec. 3.12)}$$

A partir de las ecuaciones 3.9, 3.10, 3.11 y 3.12 se pueden calcular las esperanzas (en el sentido matemático) de las diversas variables aleatorias. Los resultados que se obtienen son los siguientes:

longitud media de la cola:

$$E(m) = \frac{\lambda^2}{\lambda(\mu-\lambda)} \qquad \text{(Ec. 3.13)}$$

longitud media de colas no vacias:

$$E(m|m>0) = \frac{\mu}{\mu-\lambda} \qquad \text{(Ec. 3.14)}$$

número medio de unidades en el sistema:

$$E(n) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad \text{(Ec. 3.15)}$$

tiempo medio de espera de una unidad antes de recibir servicio:

$$E(w) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad \text{(Ec. 3.16)}$$

tiempo medio de espera de una llegada dado que tiene que esperar:

$$E(w \mid w>0) = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad \text{(Ec. 3.17)}$$

tiempo medio que una unidad pasa en el sistema:

$$E(v) = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad \text{(Ec. 3.18)}$$

Ejemplo 1.

Un banco de material petréo cuenta con un cargador frontal, con un tiempo de servicio de 15 minutos distribuido exponencialmente. Los camiones de volteo llegan para ser cargados , con un tiempo medio de 30 minutos distribuidos según Poisson.

a) ¿Cuál es el tiempo de espera para un camión?

b) ¿Cuál es el tiempo medio desocupado del cargador en un turno de 8 horas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un camión que llega no tenga que esperar para ser cargado?

d) ¿Cuál es el tiempo medio de permanencia de un camión en el banco de materiales?

Solución:

número de estaciones de servicio k=1

tasa promedio de llegadas

$$\lambda = \frac{1}{t_\lambda} = \frac{1}{30 \text{ min}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ hora}} = 2 \text{ cam/hora}$$

tasa promedio de servicio:

$$\mu = \frac{1}{t_{\mu}} = \frac{1}{15 \text{ min}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ hora}} = 4 \text{ cam/hora}$$

$$\emptyset = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

a) tiempo medio de espera de un camión, con la ec. 3.16

$$E(w) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{2}{4(4-2)} = \frac{2}{8} = 0.25 \text{ horas}$$

$$E(w) = 15 \text{ minutos.}$$

b) tiempo desocupado del cargador

probabilidad de que se quede desocupado el cargador:

$$P_o = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \emptyset = 1 - \frac{1}{2} = 0.5$$

tiempo medio desocupado del cargador:

$$T = P_o \times \text{horas de trabajo}$$

$$T = 0.5 \times 8 \text{ horas} = 4.0 \text{ horas}$$

$$T = 4.0 \text{ horas.}$$

c) probabilidad de que un camión tenga que esperar para ser cargado. Esta probabilidad es de que se encuentre desocupado el cargador.

$$P_o = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1-0 = 1-0.5 = 0.5$$

$$P_o = 50\%$$

d) tiempo medio de permanencia de un camión en el banco de materiales

$$E(v) = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{4-2} = \frac{1}{2}$$

$$E(v) = 0.5 \text{ horas.}$$

Ejemplo 2.

Un aeropuerto tiene capacidad para atender 3 aviones en 2 minutos (aterrizajes y despegues) denominados en este caso llegadas, distribuidos en forma exponencial.

a) ¿Cuál debe ser el tiempo medio entre llegadas para asegurar que el tiempo medio de espera sea de 5 minutos ó menos?

b) ¿Cuál es el tiempo medio en que un avión en despegue o aterrizaje) pasa por la pista?

Solución:

número de estaciones de servicio (pistas) $k = 1$

a) Sustituyendo $E(w)=5$ en la ecuación 3.16 se tiene:

$$E(w) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$5 = \frac{\lambda}{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - \lambda\right)}$$

despejando λ

$$\lambda = 5\left[\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - \lambda\right)\right]$$

$$\lambda = \frac{45}{4} - \frac{15}{2}\lambda$$

$$\lambda = \frac{45/4}{17/2} = \frac{45}{34} = 1.3235 \text{ aviones/minuto}$$

tiempo medio de llegadas

$$t_{m\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{34}{45}$$

$$t_{m\lambda} = 0.755 \text{ minutos.}$$

b) tiempo medio de servicio

$$E(v) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{45}{34}}$$

$$E(v) = 5.66 \text{ minutos.}$$

Ejemplo 3.

La empresa paraestatal Petróleos Mexicanos estudia la utilización de la gasolinería que se encuentra en el Km. 70 de la carretera estatal Toluca-Valle de Bravo, en el estado de México. La gasolinería tiene 6 bombas, 4 para gasolina nova, una para gasolina extra y otra para diesel.

Las llegadas de autobuses que cargan diesel muestran una distribución que se aproxima a la de Poisson, mientras que el servicio muestra una distribución exponencial.

El promedio de llegadas a la bomba diesel es de 5 autobuses por hora mientras que los servicios promedio en esa bomba son de 7 por hora.

Encuentre los parámetros que describen cuantitativamente la bomba diesel.

Solución:

Se tiene $\lambda = 5$ autobuses/hora

$\mu = 7$ autobuses/hora

La probabilidad de encontrar la bomba vacia, empleando la ecuación 3.10, es:

$$P_o = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_o = 1 - \frac{5}{7}$$

$$P_o = 0.29$$

la probabilidad de encontrar un autobús cargando y otros dos esperando, empleando la ecuación 3.8, es

$$P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_o$$

$$P_3 = \left(\frac{5}{7}\right)^3 (0.29)$$

$$P_3 = 0.11$$

el número promedio de autobuses en la cola, empleando la ecuación 3.13, es

$$E(m) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$E(m) = \frac{(5)^2}{7(7-5)}$$

$$E(m) = 1.79 \text{ autobuses.}$$

el número promedio de autobuses esperado en el sistema, empleando la ecuación 3.15, es

$$E(n) = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)}$$

$$E(n) = \frac{5}{(7-5)}$$

$$E(n) = 2.5 \text{ autobuses.}$$

el tiempo de espera en la cola, empleando la ecuación 3.16, es

$$E(w) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$E(w) = \frac{5}{7(7-5)}$$

$$E(w) = 0.36 \text{ horas.}$$

casi 22 minutos, mientras que el tiempo promedio para salir del sistema (cargar diesel y abandonar la gasolineria), empleando la ecuación 3.18, es

$$E(v) = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$E(v) = \frac{1}{7-5}$$

$$E(v) = 0.50 \text{ horas.}$$

Ejemplo 4.

En la construcción de una presa se va a contratar un mecánico para que repare la máquinaria empleada, la cual se descompone a razón de tres por semana siguiendo una distribución aproximada a la de Poisson, el tiempo no productivo de una máquina cualquiera se considera que le cuesta a la compañía $ 500,000.00 por semana. La compañía ha limitado la decisión a uno de dos mecánicos, el A cobra $ 100,000.00 por semana y arregla exponencialmente 4 por semana; el B cobra $ 200,000.00 por semana y compone también exponencialmente 6 por semana. Se trabaja de lunes a sábado y la jornada es de 8 horas. ¿Cuál que mecánico deberá contratarse?

Solución:

Para el macánico A se tiene:

$$\lambda = 3 \text{ máquinas/semana}$$

$$\mu = 4 \text{ máquinas/semana}$$

El número de maquinas que se mantienen improductivas, empleando la ecuación 3.15, es:

$$E(n) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$E(n) = \frac{3}{4-3}$$

$$E(n) = 3 \text{ maq/hora.}$$

se tiene una pérdida de:

$$\text{Perdidas} = 3 \times \$\ 500,000.00 = \$\ 1,500,000.00\ /\ \text{semana.}$$

el costo del mecánico es:

$$\text{Costo} = \$\ 100,000.00$$

el costo total usando el mecánico A es:

$$CT = 1,500,000.00 + 100,000.00 = \$\ 1,600,000.00$$

Para el mecánico B, se tiene:

$$\lambda = 3 \text{ máquinas/semana}$$

$$\mu = 6 \text{ máquinas/semana}$$

el número de máquinas que se espera esten improductivas, empleando la ecuación 3.15 es:

$$E(n) = \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$$

$$E(n) = \frac{3}{8-3}$$

$$E(n) = 1 \text{ maq/semana.}$$

se tiene una perdida de:

$$\text{Perdidas} = 1 \times \$\ 500{,}000.00 = \$\ 500{,}000.00$$

el costo del mecánico es:

$$\text{Costo} = \$\ 200{,}000.00$$

el costo total usando el mecánico B es

$$CT = 500{,}000.00 + 200{,}000.00 = \$\ 700{,}000.00$$

Se tendra que contratar el mecánico B por ser más económico el sistema que el del mecánico A.

Ejemplo 5.

En un puerto que cuenta con un sólo muelle se tiene que la tasa media de llegadas de los buques es de 4 horas y el tiempo medio de servicio (carga o descarga del barco) es de 2 horas y 30 minutos.

a) ¿Cuántos barcos en promedio permanecen fondeados el altamar esperando un lugar para atracar?

b) Tiempo promedio que pasa un buque en el sistema

Solución:

Se tiene

$$\lambda = 1/4 = 0.25 \text{ buques/hora}$$

$$\mu = 1/2.5 = 0.4 \text{ Buques/hora}$$

a) el número de buques en el sistema, empleando la ecuación 3.13, es:

$$E(m) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$E(m) = \frac{(0.25)^2}{0.4(0.4-0.25)}$$

$$E(m) = 1.04 \text{ buques.}$$

b) el promedio de tiempo que pasa un buque en el sistema, empleando la ecuación 3.18, es

$$E(v) = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$E(v) = \frac{1}{0.4-0.25}$$

$$E(v) = 6.67 \text{ horas.}$$

3.1.2 LINEAS DE ESPERA CON VARIAS ESTACIONES DE SERVICIO.

El estudio que se hace es para k estaciones de servicio, cada una con tasa de servicio μ, alimentadas por una cola que se compone de llegadas con tasa media λ. Las ecuaciones 3.5 conducen a las siguientes expresiones de la serie de probabilidades P_n en términos de P_o:

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_o \qquad n = 1,2,3,\ldots,k-1$$

$$P_n = \frac{1}{k!\,k^{n-k}} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_o \qquad n \geq k \qquad \text{(Ecs. 3.19)}$$

La secuencia P_n se observa que se compone de dos partes, una si k<n y la otra si k≥n; la expresión resultante para P_o no es simple. Por esta razón, es conveniente enunciar las propiedades de la cola en términos de P_o, asi como λ, μ y k, con lo que se llega a la siguiente expresión:

$$P_o = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{k\mu}{k\mu-\lambda}} \qquad \text{(Ec. 3.20)}$$

la cual es válida si $k\mu>\lambda$. Si $k\mu\leq\lambda$, entonces ninguno de los resultados de esta sección es aplicable, puesto que en ese caso la cola crece indefinidamente y nunca alcanza la estabilidad en el tiempo.

La probabilidad de que una unidad que entra al sistema tenga que esperar es precisamente la probabilidad de que en ese instante haya k unidades en el sistema tanto esperando como recibiendo servicio. Partiendo de la ecuación 3.19, se puede calcular esta probabilidad:

$$P\{n \geq k\} = \sum_{n=k}^{\infty} P_n = \frac{1}{(k-1)!(k\mu-\lambda)} P_o \qquad \text{(Ec. 3.21)}$$

Las fórmulas para la longitud media de la cola, el número mediode unidades en el sistema, el tiempo medio de espera antes de recibir servicio, y el tiempo medio que pasa una unidad en el sistema, se presenta a continuación.

longitud media de la cola:

$$E(m) = \frac{\lambda\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2} P_o \qquad \text{(Ec. 3.22)}$$

número promedio de unidades en el sistema:

$$E(n) = \frac{\lambda\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2} P_o + \frac{\lambda}{\mu} \qquad \text{(Ec. 3.23)}$$

tiempo medio de espera de una llegada antes de recibir servicio:

$$E(w) = \frac{\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2} P_o \qquad \text{(Ec. 3.24)}$$

tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema:

$$E(v) = \frac{\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2} + \frac{1}{\mu} \qquad \text{(Ec. 3.25)}$$

Ejemplo 6.

Un estudio estadístico ha demostrado que las llegadas de aviones a un aeropuerto tienen distribución de Poisson con una relación media de llegadas de 27 aviones por hora, y que los tiempos de ocupación de una pista tienen distribución exponencial con una media de 2 minutos.

¿Cuantas pistas de aterrizaje deberán tenerse en el aeropuerto si se desea que la probabilidad de que un avión tenga que esperar pista sea menor que 0.1 y en este caso cuál será el tiempo medio de espera?

Solución:

a) λ = 27 aviones/hora

$$\frac{1}{\mu} = 2 \text{ min} \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2 \text{ min}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ hora}}$$

μ = 30 servicios/hora

$$\theta = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{27}{30} = 0.9$$

para calcular el número de pistas se deberá ir variando k de uno en uno hasta que la probabilidad de que el avión tenga que esperar sea menor que 0.1. Se comienza por saber cual es la probabilidad de espera con el sistema tal como se encuentra (una pista).

$$P(n \geq 1) = 1 - P\{\text{no tenga que esperar}\}$$

$$P(n \geq 1) = 1 - P_o = 1 - (\frac{\lambda}{\mu}) = 1 - (1 - \theta) = \theta$$

$$P(n \geq) = 0.9$$

como 0.9 > 0.1 se concluye que se necesitan más pistas de una que es la que se tiene por lo que se probará con dos pistas; la probabilidad de que el avión que solicita servicio no tenga que esperar utilizando la ecuación 3.20 es:

$$P_o = \frac{1}{[\frac{1}{0!}(0.9)^0 + \frac{1}{1!}(0.9)^1] + [\frac{1}{2!}(0.9)^2 \frac{2\times 30}{(2\times 30)-27}}$$

$$P_o = \frac{1}{[1 + 0.9] + [0.736]}$$

$$P_o = 0.379$$

empleando la ecuación 3.21, para obtener la probabilidad de que el sistema esté desocupado, se tiene:

$$P(n\geq 2) = \frac{30(0.9)^2}{(2-1)![(2\times 30)-27]} 0.379$$

$$P(n\geq 2) = 0.279 > 0.1$$

entonces, se necesitan más de dos pistas; por lo que se analizará con tres pistas, igual que en el inciso anterior empleando las ecuaciones 3.20 y 3.21 en el mismo orden

$$P_o = \frac{1}{\left[\frac{1}{0!}(0.9)^0 + \frac{1}{1!}(0.9)^1 + \frac{1}{2!}(0.9)^2\right] + \left[\frac{1}{3!}(0.9)^3 \frac{3\times 30}{3\times 30-27}\right]}$$

$$P_o = \frac{1}{[1 + 0.9 + 0.405] + 0.17}$$

$$P_o = 0.403$$

la probabilidad de que un avión tenga que esperar es:

$$P(n\geq 3) = \frac{30(0.9)^3}{(3-1)![(3\times 30)-27]} (0.403)$$

$$P(n\geq 3) = 0.07 < 0.1$$

se tiene que con tres pistas la probabilidad de que el avion tenga que esperar es menor que la pedida (0.1), por lo que con tres pistas se soluciona este problema de líneas de espera.

b) En este caso (k=3) el tiempo medio de espera de un avion que llega se obtiene empleando la ecuación 3.24:

$$E(w) = \frac{30\ (0.9)^{3}}{(3-1)!\ [(3x30)-27]^{2}}\ (0.403)$$

$$E(w) = 0.00111 \text{ horas}$$

$$E(w) = (0.00111 \text{ hrs.})\left(\frac{60 \text{ min}}{1 \text{ hora}}\right)$$

$$E(w) = 0.06 \text{ minutos.}$$

el tiempo de espera con tres pistas es de 0.06 minutos

Ejemplo 7.

En el cruce fronterizo de México y E.E.U.U., localizado en las poblaciones de Piedras Negras, Coahuila y Eagle Pass, Texas existe un puente sobre el Río Bravo con dos Carriles de tránsito, una en dirección de México a E.E.U.U. y la otra en sentido contrario. La linea de tráfico de E.E.U.U. a México se bifurca a cinco garitas de inspección migratoria y aduanera.

Supongase que las llegadas de automóviles siguen una distribución de Poisson igual a 15 llegadas por hora, y que el número de servicios sigue una distribución exponencial con media igual a 8 servicios por hora.

Por decreto gubernamental no existe prioridad de trato, por lo que las garitas migratorias y aduaneras proporcionan servicio en la medida que se desocupan, y se atiende en primer término al primer automóvil de la cola y así sucesivamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil que llega no tenga que esperar?

b) ¿Cuál es la longitud promedio de la cola?

c) ¿Cuál es el tiempo de espera en la cola?

d) ¿Cuál es el tiempo que pasa un automóvil en el sistema?

Solución:

a) Empleando la ecuación 3.20 para encontrar P_o, se tiene

$$P_o = \frac{1}{\left[\frac{1}{4!}\left(\frac{15}{8}\right)^4 + \frac{1}{3!}\left(\frac{15}{8}\right)^3 + \frac{1}{2!}\left(\frac{15}{8}\right)^2 + \frac{1}{1!}\left(\frac{15}{8}\right)^1\right] + \left[\frac{1}{5!}\left(\frac{15}{8}\right)^5 \frac{5\times8}{5\times8-15}\right]}$$

$$P_o = \frac{1}{[0.514 + 1.098 + 1.757 + 1.875] + [0.308]}$$

$$P_o = 0.180$$

Se tiene una probabilidad de que se encuentre desocupada una garita de 18% al llegar un automóvil al sistema.

b) Empleando la ecuación 3.22:

$$E(m)=\frac{15 \times 8 \times (15/8)^5}{4!\ [(5\times 8)-15]^2}(0.180)$$

$$E(m) = 0.33 \text{ automóviles.}$$

La longitud promedio de la cola que se forma es de 0.33 automóviles por minuto.

c) Empleando la ecuación 3.24, se tiene:

$$E(w) = \frac{8\ (15/8)^5}{4!\ (40-15)^2}(0.180)$$

$$E(w) = 0.0022 \text{ horas}$$

$$E(w)=0.0022h\left(\frac{3600 \text{ seg}}{1 \text{ h}}\right)$$

$$E(w) = 8 \text{ segundos.}$$

El tiempo de espera en la cola es de 8 segundos.

d) Empleando la ecuación 3.25, se tiene:

$$E(v) = \frac{8\ (15/8)^5}{4!\ (40-15)^2}(0.18) + \frac{1}{8}$$

$$E(v)=0.127 \text{ horas}$$

$$E(v)=0.127h\left(\frac{3600 \text{ seg}}{1 \text{ h}}\right)$$

$$E(v) = 38 \text{ segundos.}$$

El tiempo que pasa en el sistema cada automóvil es de 38 segundos.

Ejemplo 8.

Continuando con los datos del ejemplo anterior, el Director General de Egresos de la Secretaría de Hacienda y Crédito publico, experto en sistemas, sospecha que se puede lograr un considerable ahorro económico, si en ves de 5 garitas en el cruce fronterizo de Piedras Negras, Coahuila se fusionan 2 en una y 3 en otra, sin que esto cause graves problemas al turismo ¿Estará en lo cierto?

Solución:

La probabilidad de que un automóvil que llega tenga que esperar, con la ecuación 3.20 es:

$$P_o = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \right] + \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{k\mu}{k\mu - \lambda}}$$

$$P_o = \frac{1}{\left[\frac{1}{0!}\left(\frac{15}{8}\right)^0 + \frac{1}{1!}\left(\frac{15}{8}\right)^1 \right] + \frac{1}{2!}\left(\frac{15}{8}\right)^2 \frac{2(8)}{2(8)-15}}$$

$$P_o = 0.03226$$

la longitud de la cola, con la ecuación 3.22, es:

$$E(m) = \frac{\lambda\mu \; (\lambda/\mu)^k}{(k-1)! \; (k\mu-\lambda)^2}$$

$$E(m) = \frac{15(8)\;(15/8)^2}{1! \; (2x8-5)} (0.03226)$$

$$E(m) = 13.61 \text{ automóviles}$$

el tiempo promedio de espera, con la ecuacuión 3.24, es:

$$E(w) = \frac{\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)! \; (k\mu-\lambda)^2} P_o$$

$$E(w) = \frac{8(15/8)^2}{1! \; (2x8-15)^2} (0.03226)$$

$$E(w) = 0.9075 \text{ de hora}$$

el tiempo que pasaría un automóvil en el sistema, con la ecuación 3.25, es:

$$E(v) = \frac{\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)! \; (k\mu-\lambda)^2} P_o + \frac{1}{\mu}$$

$$E(v) = \frac{8(15/8)^2}{1! \; (2x8-15)^2} (0.03226) + \frac{1}{8}$$

$$E(v) = 1.032 \text{ horas}$$

Así, por un lado la medida de reducción de 5 a 2 garitas podría ahorrarle al país el salario y el mantenimiento de 3 garitas, por otro lado provocaría pérdidas al turismo, ya que, en promedio cada automóvil que cruce por el puente fronterizo espera más de una hora realizando trámites, por lo que es más conveniente dejar funcionando las 5 garitas tal como se hallan.

Ejemplo 9.

Una compañía constructora desea calcular el número necesario de cargadores frontales para que un camión no tenga que esperar más del 15% de las veces en que llegue al banco de material. Se estima que los camiones siguen una distribución de Poisson con un promedio de 15 por hora. Un cargador frontal carga un camión según una distribución exponencial en un tiempo medio de 5 minutos.

Solución:

Se tiene $\lambda = 15$ camiones/hora

$$\mu = \frac{60}{5} = 12 \text{ camiones/hora}$$

Analizando el sistema con 3 cargadores, la probabilidad de encontrar vacio el sistema, con la ecuación 3.20, es:

$$P_o = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{k\mu}{k\mu - \lambda}}$$

$$P_o = \frac{1}{\left[\frac{1}{0!}\left(\frac{15}{12}\right)^0 + \frac{1}{1!}\left(\frac{15}{12}\right)^1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{15}{12}\right)^2\right] + \frac{1}{3!}\left(\frac{15}{12}\right)^3 \frac{3\times 12}{3\times 12-15}}$$

$$P_o = 0.2786$$

La probabilidad de que un camión que llega tenga que esperar, empleando la ecuación 3.21, es:

$$P_s = \frac{\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!\ (k\mu-\lambda)}\ P_o$$

$$P_s = \frac{(15/12)\ 12}{2!\ \ (3\times 20-15)}\ (0.2786)$$

$$P_s = 0.1554 \approx 0.15.$$

$\therefore$ con 3 cargadores se soluciona el problema de espera.

Ejemplo 10.

En la construcción de una carretera se tienen dos retroexcavadoras para llenar los camiones para transporte de material. Si una retroexcavadora carga un camión en 4 minutos y los camiones llegan al lugar con una distribución de Poisson a razón de 10/hora; obtener:

a) La probabilidad de que un camión que llega tenga que esperar para recibir servicio.

b) Longitud promedio de camiones esperando servicio.

c) El tiempo que pasa un camión en el sistema.

Solución:

Se tiene: λ = 10 camiones por hora

μ = 60/4 = 15 camiones por hora

a) La probabilidad de encontrar vacío el sistema, con la ecuación 3.20, es:

$$P_o = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{k\mu}{k\mu-\lambda}}$$

$$P_o = \frac{1}{\left[\frac{1}{0!}\left(\frac{10}{15}\right)^0 + \frac{1}{1!}\left(\frac{10}{15}\right)^1\right] + \frac{1}{2!}\left(\frac{10}{15}\right)^2 \frac{2\times15}{2\times15-10}}$$

$$P_o = 0.5$$

La probabilidad de que se encuentre desocupada alguna de las dos estaciones de servicio, empleando la ecuacuación 3.21, es:

$$P_2 = \frac{\mu\ (\lambda/\mu)^k}{(k-1)!\ (k\mu-\lambda)} P_o$$

$$P_2 = \frac{15\ (10/15)^2}{1!\ (2\times 15-10)} (0.1667)$$

$$P_2 = 0.1667.$$

b) El número promedio de camiones esperando servicio, empleando la ecuación 3.22, es:

$$E(m) = \frac{\lambda\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!\ (k\mu-\lambda)^2} P_o$$

$$E(m) = \frac{10\times 15\ (10/15)^2}{1!\ (2\times 15-10)^2} (0.5)$$

$$E(m) = 0.08 \text{ camiones.}$$

c) el tiempo que pasa el camión en el sistema, empleando la ecuación 3.25, es:

$$E(v) = \frac{\mu\ (\lambda/\mu)^k}{(k-1)!\ (k\mu-\lambda)^2} P_o + \frac{1}{\mu}$$

$$E(v) = \frac{15\ (10/15)^2}{1!\ (2\times 15-10)^2} (0.5) + \frac{1}{15}$$

$$E(v) = 0.75 \text{ horas.}$$

3.2 PROCESOS ESTOCASTICOS.

Un proceso estocástico se define simplemente como una coleccion de variables aleatorias con indice. $\{X_t\}$. en donde el indice t recorre un conjunto dado T. Comunmente se toma a T como el conjunto de los enteros no negativos y X representa una caracteristica mensurable de interés en el instante t. Por ejemplo, el proceso estocástico compuesto por $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots;$ puede representar la colección de niveles semanarios (o mensuales) de inventario de un producto para la construcción. o bien puede representar la colección de demandas semanales (o mensuales) de ese producto.

La consideración del comportamiento de un sistema que opera durante un cierto período a menudo conduce al análisis de un proceso estocástico con la estructura que se describe a continuación.

En puntos particulares del tiempo t, denominados 0.1....., o estados, mutumente excluyentes y exahustivos denominados 0.1.....M. Los puntos en el tiempo pueden estar igualmente espaciados, o bien, su espaciamiento puede depender del comportamiento global del sistema físico en el que el proceso estocastico está incluido. Por ejemplo. el tiempo entre ocurrencias de algun fenómeno de interes. aun cuando los estados pueden construir una caracterizacion cualitativa. asi como cuantitativa del sistema. no se ocasiona perdida de generalidad alguna por las denominaciones numericas 0,1,....,M que se usan para denotar los estados del sistema. Por tanto, la representacion matematica del sistema fisico es el de un proceso estocastico $\{X_t\}$, en el que se observan variables aleatorias en el tiempo t=0,1,2,.... , y en el que cada variable aleatoria puede tomar cualquier valor entre los (M+1) enteros 0,1,2,....,M. Estos numeros son una caracterización de los (M+1) estados en proceso.

Como un ejemplo considerese el problema de inventario que sigue. Una bodega de una constructora tiene en almacen cemento que es pedido semanalmente, representando por $D_1, D_2, \ldots$ la demanda de cemento la primera semana, la segunda semana,...., respectivamente. Se supone que las D_t son variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas que tienen una distribución aplicable a las conocidas en probabílidad. Donde X_0 representa el numero de toneladas de cemento que se tienen disponibles al principio, X_1 el numero de toneladas de cemento con que se cuenta al final de la primera semana, X_2 el numero de toneladas de cemento en almacen de la segunda semana, y asi sucesivamente.

La politica de pedidos (s,S) que se emplea en el proceso en general es de revisión periodica que requiere de que se haga un pedido de hasta *S* unidades, siempre que el nivel de inventario caiga por debajo de *s* (S≥s) o mayor, entonces no se hace pedido alguno.

Supongase que $X_o=3$. el sabado por la noche la compañia hace el pedido de cemento para cuando comiencen las actividades el lunes. La compañia aplica la politica de pedidos (s.S) siguiente: si el numero de toneladas de cemento con que se cuenta al final de la semana es menor de s=1 (ninguna tonelada de cemento en almacen), la compañia hace un pedido de hasta S=3 toneladas.

De lo contrario la compañia no pide cemento a la fabrica. Se supone que se pierde tiempo y por lo tanto dinero si la demanda en la construcción es mayor que el inventario con que se cuenta. Por tanto $\{X_t\}$ para t=0.1.2..... es un proceso estocastico de la forma antes descrita. Las variables aleatorias X_t obviamente son independientes y se pueden evaluar de manara iterativa por medio de la expresión

$$X_{t+1} = \begin{bmatrix} \max\{(3-D_{t+1}),0\}, \text{ si } X_t < 1 & \text{para } t=0.1.2.... \\ \max\{(X_t-D_{t+1}),0\}, \text{ si } X_t \geq 1 & \end{bmatrix}$$

3.3 CADENAS DE MARKOV.

Es necesario establecer ciertas hipótesis referentes a la distribución conjunta de $X_o,X_1,\ldots$ con el fin de obtener resultados analiticos. Una de las suposiciones que conduce a la probabilidad de un tratamiento analitico es que el proceso estocastico es una cadena de Markov. que tiene la siguiente propiedad clave: se dice que un proceso estocástico $\{X_t\}$ tiene la probabilidad markoviana si $P\{X_{t+1}=j \mid X_0=k_0, X_1=k_1, \ldots, X_{t-1}=k_{t-1}, X_t=i\}$ para $t=0,1,\ldots,$ y toda sucesión $i,j,k_0,k_1,\ldots,k_{t-1}$. Se puede demostrar que la probabilidad condicional de cualquier evento futuro, dado cualquier evento pasado y el estado presente $X_t=i$, es independiente del evento pasado y depende tan sólo del evento presente del proceso. Las probabilidades condicionales $P\{X_{t+1}=j \mid X_t=i\}$ se conocen como probabilidades de transición. Si para cada i y j

$$P\{X_{t+1}=j \mid X_t=i\}=P\{X_1=j \mid X_0=i\}, \text{ para toda } t=0,1,\ldots,$$

entonces se dice que las probabilidades de transición (en un paso) son estacionarias y, comunmente se denotan por P_{ij}. Así entonces, se tiene probabilidades de transición que no cambian respecto al tiempo. La existencia de probabilidades estacionarias de transición también implica que, para cada i, j, n $(n=0,1,2,\ldots)$,

$$P\{X_{t+n}=j \mid X_t=i\}=P\{X_n=j \mid X_0=i\} \quad \text{para toda } t=0,1,\ldots$$

por lo común estas probabilidades se denotan por $P_{ij}^{(n)}$ y reciben el nombre de probabilidades de transición en n pasos (unidades de tiempo).

Como $P_{ij}^{(n)}$ son probabilidades condicionales, deben satisfacer las siguientes propiedades

$$P_{ij}^{(n)} \geq 0, \text{ para toda } i \text{ , } j, \text{ y } n=0,1,2,...$$

$$\sum_{j=0}^{M} P_{ij}^{(n)} = 1, \text{ para toda } i \text{ y } n=0,1,2,...$$

Una notación conveniente para representar las probabilidades de transición es la forma matricial:

$$P^{(n)} = \begin{array}{c|ccccc} \text{Estado} & 0 & . & . & . & M \\ \hline 0 & P_{00} & . & . & . & P_{0M} \\ 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ M & P_{M0} & . & . & . & P_{MM} \end{array}$$

para n=0,1,2,..., o bien se puede expresar como la matriz cuadrada equivalente

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} P_{00} & . & . & . & P_{0M} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ P_{M0} & . & . & . & P_{00} \end{bmatrix}$$

Ahora es posible definir una cadena de Markov, se dice que un proceso estocástico $\{X_t\}$ (para $t = 0,1,...$) es una cadena de Markov si cumple con las siguientes condiciones:

1. Un número finito de estados.

2. La probabilidad markoviana.

3. Probabilidades de transición estacionarias.

4. Un conjunto de probabilidades iniciales $P\{X_0=j\}$ para toda i.

5. La suma de los elementos de un renglón de la matríz representa un evento seguro, por tanto la suma del renglón deberá ser igual a 1.

Regresando al ejemplo del inventario mencionado anteriormente, se tiene la matríz de transición de un paso:

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0.000 & 0.000 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0.000 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.

La probabilidad de transición en n pasos, $P_{ij}^{(n)}$, puede resultar útil cuando el proceso se encuentra en el estado i y se desea la probabilidad de que el proceso se encuentre en un estado futuro *j* después de *n* períodos de tiempo. Las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov proporcionan un método para calcular las probabilidades de transición en *n* pasos:

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{m} P_{ik}^{(v)} P_{kj}^{(n-v)}, \qquad \text{para toda } i,j,n \text{ y } 0 \le v \le n \qquad \text{(Ec 3.28)}$$

Estas ecuaciones simplemente señalan que al pasar del estado i al estado j, en n pasos, el proceso se encontrará en algun estado k, después del estado v (menor que n) pasos. Por tanto, $P_{ik}^{(v)} P_{kj}^{(n-v)}$ es simplemente la probabilidad condicional de que, partiendo del estado i, el proceso pase al estado k en v pasos y a continuación, al estado j en n-v pasos. Por tanto, sumando estas probabilidades condicionales, sobre todos los k posibles, debe llegarse a $P_{ij}^{(n)}$. Los casos especiales de v=1 y v=n-1 conducen a las expresiones siguientes:

$$P_{ij} = \sum_{k=0}^{M} P_{ik} P_{kj}^{(n-1)}$$

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} P_{ik}^{(n-1)} P_{kj} \qquad \text{para todos los i, j, n} \qquad \text{(Ec. 3.27)}$$

para todos los i,j,n. Resulta evidente que puede obtenerse las probabilidades de transición en n pasos a partir de las probabilidades de transición en un paso, de manera recurrente. Para n=2, estas expresiones quedan como:

$$P_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^{M} P_{ik} \; P_{kj} \qquad \text{para todos los i,j.}$$

Los $P_{ij}^{(2)}$ son los elementos de la matriz $P^{(2)}$. Sin embargo, tambien debe hacerse notar que se obtienen estos elementos

$$\sum_{k=0}^{M} P_{ik} \, P_{kj}$$

multiplicando la matriz de las probabilidades de transición en un solo paso por si misma, es decir

$$P^{(2)} = P \cdot P = P^{2}$$

Probabilidades de transición.

Las probabilidades de transición para las distintas etapas en proceso se pueden obtener elevando a la potencia *n* la matriz de probabilidad de transición de un paso, obteniendo la siguiente expresión:

$$P^{(n)} = P \cdot P \ldots P = \cdot P \cdot P^{(n-1)} = P^{(n-1)} \cdot P \qquad \text{(Ec. 3.28)}$$

Se puede obtener la matríz de las probabilidades de transición en *n* pasos, calculando la n-ésima potencia de la matríz de probabilidades de transición en un paso. Para valores de *n* que no sean demasiado grandes, se puede calcular la matriz de transición de la manera anteriormente vista, tales calculos con frecuencia son tediosos y, ademas, los errores por redondeo pueden provocar inexactitudes.

Como ejercicio se tomaran los datos del ejemplo anterior relativo al inventariode bultos de cemento. La matriz de transición en dos pasos está dada por:

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.352 & 0.000 & 0.000 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0.000 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.362 & 0.352 & 0.000 & 0.000 \\ 0.264 & 0.388 & 0.368 & 0.000 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.388 \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \\ 0.283 & 0.252 & 0.233 & 0.233 \\ 0.351 & 0.319 & 0.233 & 0.097 \\ 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \end{bmatrix}$$

En esta matríz ya se encuentran algunos errores de redondeo correspondientes a este nuevo estado. De la matríz resultante se tiene, si queda una tonelada de cemento en existencia al final de la primera semana, la probabilidad de que no se tenga cemento en almacén dos semanas más tarde es de 0.283 ($P_{10}^{(2)}$=0.283). Análogamente se tiene, que si en la primera semana quedan 2 toneladas de cemento, la probabilidad de que se tengan 3 toneladas en almacén dos semanas más tarde es de 9.7% ($P_{23}^{(2)}$=0.097).

Distribuciones de probabilidad.

Las distribuciones de probabilidad dependen de las probabilidades de transición del proceso descritas anteriormente. En particular se denotan por $f_{ij}^{(n)}$, que indica la probabilidad de pasar del estado i al j por primera vez en n pasos. Se acostumbra llamar al intervalo de tiempo para ir del estado i al j por primera vez, tiempo de primer paso; cuando $i=j$, es decir que se regresa al estado i por primera vez, se llama tiempo de recurrencia del estado i.

La relación de recurrencia de las probabilidades $f_{ij}^{(n)}$, son los siguientes:

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)} = p_{ij} \qquad \text{(Ecs. 3.29)}$$

$$f_{ij}^{(2)} = p_{ij}^{(2)} - f_{ij}^{(1)} p_{jj}$$

$$f_{ij}^{(3)} = p_{ij}^{(3)} - f_{ij}^{(2)} p_{jj} - f_{ij}^{(1)} p_{jj}$$

$$\vdots$$

$$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - f_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(n-1)} - f_{ij}^{(2)} p_{jj}^{(n-2)} - \ldots - f_{ij}^{(n-1)} p_{jj}$$

Por lo tanto puede calcularse la probabilidad de un tiempo de primer paso del estado i al j, en n pasos, de manera recurrente a partir de la probabilidad de transicion en un paso. En el ejemplo del inventario, la distribucion de probabilidad de ir del estado 3 al estado 0 se obtiene del modo siguiente

$f_{30}^{(1)} = 0.080$

$f_{30}^{(2)} = (0.249) - (0.080)(0.080) = 0.243$

$\vdots$

para i y j fijos, las $f_{ij}^{(n)}$ son números no negativos tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1 \qquad \text{(Ec. 3.30)}$$

Por tanto, se puede tener el caso de que $j = i$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1 \qquad \text{(Ec. 3.31)}$$

que es el caso en que el estado i regresa al estado i llamado estado recurrente. Un caso especial del estado recurrente es el estado absor- vente , si la probabilidad de transición (en un paso) P_{ii} es igual a 1.

Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1 \qquad \text{(Ec. 3.32)}$$

se tiene un estado transitorio. por que esto implica que el proceso se encuentre en un estado i, existiendo una probabilidad positiva de que nunca regresa al estado i.

Parte estable del sistema.

La parte estable del sistema se presenta cuando se tiene en la cadena de Markov que el $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ existe y es independiente de i. además,

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

en donde las π_j. son las probabilidades del estado estable y tienen les siguientes propiedades.

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$$

y

$$0 < \pi_j < 1$$

y debe satisfacer las ecuaciones

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i P_{ij} \qquad \text{para } j=0,1,\ldots,M$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1 \qquad \text{(Ecs. 3.33)}$$

Estas ecuaciones (M+2) constan de M+1 incógnitas. como tienen una solución única, al menos una de las ecuaciones debe ser redundante y por lo tanto, puede eliminarse una ecuación. La ecuación que se elimina en ningun caso debera ser

$$\sum_{i=0}^{M} \pi_i = 1 \qquad \text{(Ec. 3.34)}$$

por que $\pi_i = 0$ para todos lo valores de i, deberá satisfacer las otras (M+1) ecuaciones.

Para el ejemplo del inventario, las ecuaciones del estado establepueden expresarse como se muestra a continuación:

$$\pi_0 = \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} + \pi_2 P_{20} + \pi_3 P_{30}$$

$$\pi_1 = \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} + \pi_3 P_{31}$$

$$\pi_2 = \pi_0 P_{02} + \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} + \pi_3 P_{32}$$

$$\pi_3 = \pi_0 P_{03} + \pi_1 P_{13} + \pi_2 P_{23} + \pi_3 P_{33}$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

Sustituyendo en estas ecuaciones los valores correspondientes a los P_{ij} dadas en la matríz de primer paso, se tiene:

$$\pi_0 = (0.080)\pi_0 + (0.632)\pi_1 + (0.368)\pi_2 + (0.080)\pi_3$$

$$\pi_1 = (0.184)\pi_0 + (0.368)\pi_1 + (0.368)\pi_2 + (0.184)\pi_3$$

$$\pi_2 = (0.368)\pi_0 + (0.000)\pi_1 + (0.368)\pi_2 + (0.368)\pi_3$$

$$\pi_3 = (0.368)\pi_0 + (0.000)\pi_1 + (0.000)\pi_2 + (0.368)\pi_3$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

resolviendo las ultimas cuatro ecuaciones se obtiene la solución simultánea:

$$\pi_0 = 0.0285$$
$$\pi_1 = 0.285$$
$$\pi_2 = 0.264$$
$$\pi_3 = 0.166$$

Para comprobar los resultados obtenidos se puede encontrar la matríz estable, para el ejemplo la matríz estable es la de ocho pasos

$$P^8 = P^2\ P^2\ P^2\ P^2$$

$$P^8 = \begin{bmatrix} 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.285 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \end{bmatrix}$$

Se puede observar que se tienen aproximadamente los mismos resultados, aunque se observa un pequeño error debido al redondeo de los decimales.

El tiempo esperado de recurrencia, o bien, el tiempo esperado para pasar del estado i, y regresar a este estado, está dado por:

$$\pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}} \qquad \text{para } i=0,1,\ldots,M \qquad \text{(Ec 3.35)}$$

donde μ_{ii} es el tiempo esperado de recurrencia.

Para el caso del ejemplo del inventario los tiempos de recurrencia son:

$$\mu_{00} = \frac{1}{0.286} = 3.51 \text{ semanas}$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{0.285} = 3.51 \text{ semanas}$$

$$\mu_{22} = \frac{1}{0.264} = 3.79 \text{ semanas}$$

$$\mu_{33} = \frac{1}{0.166} = 6.02 \text{ semanas}$$

Para el caso del inventario, se tiene que, tardara 6.02 semanas para tener 3 toneladas de cemento en almácen, al final de la semana.

Ejemplo 11

Una presa de uso multiple tiene una capacidad de 3 unidades. La distribución de probabilidad de la cantidad de agua que fluye hacia la presa durante el mes t para t=0,1,2,... es:

$$X_0 = 1/6$$
$$X_1 = 1/3$$
$$X_2 = 1/3$$
$$X_3 = 1/6$$

Si el agua en la presa excede a su capacidad se deja que el agua sobrante escurra por los vertedores. Para la generación eléctrica se requieren dos unidades de agua que se dejan escurrir al final de cada mes. Si se tienen menos de dos unidades almacenadas entonces se deja escurrir toda el agua almacenada.

Si se supone que inicialmente (n=0) la presa está vacía calcule la fracción del tiempo en que la presa está vacía.

Solución:

Si X_n designa a la cantidad de agua almacenada en el instante t despues de que el agua ha escurrido entonces:

$$X_{n+1} = \min \{ 1,(X_n+X_{n+1}-2) \}, \qquad n=0,1,2...$$

Además:

$P_{ij} = P[X_{n+1}=j \mid X_n = i]$

$P_{ij} = P[X_n + X_{n+1} - 2 = j \mid X_n = i]$

Si la presa está vacia para t=0, continuará vacía para t=1 si sólo fluyen a la presa dos o menos unidades de agua, ya que en este caso toda ella se deja fluir por el vertedor, luego

$$P_{00} = P[n \leq 2] = X_0 + X_1 + X_2$$
$$P_{00} = 1/3 + 1/3 + 1/6$$
$$P_{00} = 5/6$$

Si la presa tiene una unidad de agua almacenada entonces estaría vacia una etapa después si sólo fluye a la presa una o menos unidades de agua; esto es:

$$P_{10} = P[n \leq 1]$$
$$P_{10} = X_0 + X_1$$
$$P_{10} = 1/6 + 1/3$$
$$P_{10} = 1/2$$

y de la misma manera se obtiene

$P_{10} = P[n=3] = X_3 = 1/6$

$P_{11} = P[n+1 \geq 2] = X_3 + X_2 = 1/3 + 1/6 = 1/2$

Observese que sólo se tienen los estados 0 y 1 ya que estando vacía la presa, para t=0 no puede haber una unidad de agua almacenada después de que el agua ha escurrido. Luego X_t es una cadena de Markov con probabilidades de transición dadas por la matríz:

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Para calcular las probabilidades límite se encuentra la probabilidad para el estado estable, empleando las ecuaciones 3.33 y 3.34, se tiene

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 5/6\ \pi_0 + 1/2\ \pi_1 \\ \pi_1 &= 1/6\ \pi_0 + 1/2\ \pi_1 \\ 1 &= \pi_0 + \pi_1 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\pi_0 = 3/4 \qquad y \qquad \pi_1 = 1/4$$

En promedio la presa estará vacía 75% de las veces que se observe o, en otras palabras, si ha transcurrido un lapso suficientemente largo a partir del inicio del funcionamiento de la presa, entonces la probabilidad de que se encuentre vacía en cualquier época es de 75%.

Ejemplo 12.

Para realizar el colado de una gran losa a dos aguas de un edificio se trata de describir el comportamiento del sistema de lluvia en esa ciudad mediante dias en que llueve y dias en que no llueve, durante la temporada de Diciembre a Enero, la descripción de este comportamiento puede hacerse mediante un proceso Markoviano de dos estados. Se parte del conocimiento del comportamiento de las lluvias durante cierto número de años de observación estadística. Esta estadística se resume en la siguiente tabla:

	No llueve	Si llueve	Total
No llueve	1094	350	1399
Si llueve	351	687	1038

Considerando las frecuencias relativas como las probabilidades de transición en un paso:

a) Obtener la matríz P de probabilidad de transición en 1 paso.

b) Obtener la probabilidad de pasar del estado *sí llueve* al mismo estado en 5 dias.

c) Obtener la matríz estable.

Solución:

a) de los datos se tiene

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1049}{1399} & \frac{350}{1399} \\ \frac{351}{1038} & \frac{687}{1038} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.34 & 0.66 \end{bmatrix}$$

b) partiendo del estado inicial, y empleando las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, se tiene:

$$P^{(2)} = P.P = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.34 & 0.66 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.34 & 0.66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6475 & 0.3525 \\ 0.4794 & 0.5206 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = P^2 . P^2 = \begin{bmatrix} 0.6475 & 0.3525 \\ 0.4794 & 0.5206 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.6475 & 0.3525 \\ 0.4794 & 0.5206 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5882 & 0.4118 \\ 0.5600 & 0.4400 \end{bmatrix}$$

$$P^5 = P^4 \; P^1 = \begin{bmatrix} 0.5882 & 0.4118 \\ 0.5600 & 0.4400 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.34 & 0.66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5812 & 0.4118 \\ 0.5696 & 0.4304 \end{bmatrix}$$

c) empleando el sistema de ecuaciones 3.33 y 3.34 para encontrar la matríz estable, se tiene:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} \\ \pi_1 &= \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} \\ 1 &= \pi_0 + \pi_1 \end{aligned}$$

sustituyendo valores se tiene:

$$\pi_0 = \pi_0(0.75) + \pi_1(0.25)$$
$$\pi_1 = \pi_0(0.34) + \pi_1(0.66)$$
$$1 = \pi_0 + \pi_1$$

la solución de este sistema es:

$$\pi_0 = 0.5763 \qquad y \qquad \pi_1 = 0.4237$$

$\therefore$ la matríz estable es:

$$\begin{bmatrix} 0.5763 & 0.4237 \\ 0.5763 & 0.4237 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 13.

Cada año el dueño de una compañía constructora cambia su tractor por uno nuevo. Escoge siempre entre las marcas Komatzu, Caterpillar y Tracsa. Se ha visto que sigue la siguiente política: si tiene Komatzu escoge Caterpillar; si tiene Caterpillar le da igual comprar otro Caterpillar, un Komatzu o un Tracsa; si tiene un Tracsa lo cambia por cualquiera de los otros dos.

a) ¿Es este proceso una cadena de Markov?

b) Si es, encuentre la probabilidad de que tenga un Komatzu en 1975, Caterpillar en 1976 y Tracsa en 1974, si se sabe que en 1973 tiene Komatzu.

Solución:

a) Las probabilidades de transición son estacionarias pues la probabilidad de escoger un Komatzu, un Caterpillar o un Tracsa dado que tiene una de esas marcas, no cambia de un año a otro.

La propiedad Markoviana se cumple. El que escoja una marca determinada sólo depende del tractor que tiene este año y no de los que tuvo en años anteriores.

Se pueden definir las probabilidades iniciales como:

$P(X_o=K) = 1, \qquad P(X_o=C) = 0, \qquad P(X_o=T) = 0.$

donde K=Komatzu, C=Caterpillar, T=Tracsa.

b) La matríz de transición es:

$$\begin{array}{c} \\ K \\ C \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} K & C & T \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para encontrar las probabilidades en el año 1975 se tiene que encontrar el proceso en la segunda etapa, para esto se tiene:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 5/18 & 11/18 & 1/9 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Para encontrar las probabilidades en el año 1976 se tiene que encontrar el proceso en la tercera etapa, para esto se tiene:

$$P^3 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 5/18 & 11/18 & 1/9 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/18 & 11/29 & 1/9 \\ 14/54 & 29/54 & 11/54 \\ 11/36 & 17/36 & 2/9 \end{bmatrix}$$

De estos resultados se tiene:

P(Komatzu en 1975/Komatzu en 1973) $= P^2_{KK} = 1/3$

P(Caterpillar en 1976/Komatzu en 1973) $= p^3_{Kc} = 1/9$

P(Tracsa en 1974/Komatzu en 1973) $= P^1_{KT} = 0.$

Ejemplo 14.

Un consorcio de la industria de la construcció ha comprado cada vez un tractor de las marcas A, B o C según se ve en las estadísticas de las ultimas 26 compras que se muestran en la siguiente tabla, en la cual se ha señalado con una X la marca del tractor que se adquirio cada vez.

No. DE COMPRA	MARCA DE TRACTOR A	B	C
1		X	
2	X		
3			X
4	X		
5	X		
6		X	
7			X
8		X	
9	X		
10	X		
11		X	
12			X
13		X	
14	X		
15			X

No. DE COMPRA	MARCA DE TRACTOR		
	A	B	C
16		X	
17	X		
18		X	
19			X
20		X	
21	X		
22		X	
23			X
24	X		
25			X
26			X

Se trata de un proceso markoviano de tres estados, para el que se pide: Obtener la matríz UPU de probabilidades de transición en un paso.

solución:

a) De los datos se tiene el siguiente cuadro, en el que se han señalado las veces que una compra cambio de una marca a otra o se quedo esa misma marca.

		COMPRO		
		A	B	C
TENIENDO	A	2	4	3
	B	5	0	4
	C	2	4	1

Tomando las frecuencias relativas como probabilidades se tiene la siguiente matríz de probabilidades de transición de un paso:

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 2/9 & 4/9 & 3/9 \\ B & 5/9 & 0 & 4/9 \\ C & 2/7 & 4/7 & 1/7 \end{array}$$

Problemas propuestos.

1. En un carril de una avenida para dar vuelta a la izquierda y considerando que el ciclo del semáforo es de 90 segundos y que el número de automóviles que arrivan al carril de vuelta durante el ciclo del semáforo tiene distribución de Poisson con un parámetro de 6 automóviles por ciclo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen 4 automóviles en un ciclo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo que transcurre entre la llegada al carril de un vehículo y el siguiente sea mayor de 30 segundos?

c) ¿Cuál es la longitud promedio de automóviles en espera para dar vuelta a la izquierda?

2. En un aeropuerto internacional aterrizan 7 aviones cada 25 minutos, las llegadas de los aviones estan definidas por un proceso de Poisson.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el aeropuerto no se reciben solicitudes de aterrizaje en 5 minutos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se tengan 6 solicitudes en 20 minutos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el aeropuerto tenga una espera de más de 6 minutos para una solicitud de aterrizaje?

3. Diez vagonesde ferrocarril están siendo atendidas por una sola grúa que descarga cada vagón y lo provee de una nueva carga tomada de un área de funcionamiento adyacente. El tiempo de maquinado por carga se supone exponencial con media de 30 minutos. El tiempo desde el momento en que la grúa pone a trabajar una máquina hasta que le trae una nueva carga es exponencial con una media de 10 minutos.

a) Encuentre el porcentaje del tiempo que la grúa esta ociosa.

b) ¿Cuál es el número esperado de máquinas que se espera estén formadas esperando servicio?

c) ¿Cuál es el tiempo que espera una máquina antes de recibir la carga?

4. Los automóviles llegan a una caseta de pago de una autopista según una distribución de Poisson con una media de 90 por hora. El tiempo promedio para pasar por la caseta es de 38 segundos. Los choferes se quejan de un largo tiempo de espera. Las autoridades están dispuestas a disminuir a 30 segundos el tiempo de paso por la caseta introduciendo un nuevo mecanismo automático. Esto puede justificarse si con el nuevo sistema el numero de automóviles que esperan excede a 5, y además el porcentaje de tiempo ocioso de la caseta con el nuevo sistema no deberá ser más del 10% ¿Podra justificarse la nueva disposición?

5. En una obra la ventanilla de paga para los trabajadores está operada por una persona. Treinta trabajadores llegan a cobrar cada hora siguiendo una distribución de Poisson. El tiempo necesario para pagarle a cada trabajador sigue una distribución exponencial con un promedio de 90 segundos.

a) ¿Cuántos trabajadores se tienen en promedio en el sistema?

b) ¿Cuántos trabajadores esperan servicio?

c) ¿Cuánto tiempo pasa un trabajador en el sistema?

d) ¿Cuánto tiempo pasa un trabajador en la cola?

6. Un sistema aeroportuario cuenta con dos pistas en paralelo que trabajan en forma independiente. Se ha visto que los aviones llegan según la distribución de Poisson con una tasa media de 15 por hora. El tiempo de aterrizaje se distribuye exponencialmente con una media de 5 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un avión que llega tenga que esperar para eterrizar?

b) ¿Cuál debe ser el número de pistas si se desea que la probabilidad de que un avión tenga que esperar para aterrizar sea menor que 0.20?

c) En el caso del inciso anterior ¿Cuál será el tiempo desocupado de las pistas?

7. Una estación de autobuses tiene 3 andenes en la que los vehículos llegan a razón de 2 cada hora, por otra parte el pasaje

aborda el camión a un ritmo promedio de 1 cada minuto. Se considera que los autobuses tienen capacidad para 35 personas por lo que cada camión sale lleno.

a) ¿Qué tiempo deberá permanecer cada autobús en la estación?

b) ¿Quá tiempo pasará entre la llegada de cada autobús a la estación y el momento que se coloca en el andén?

c) ¿Cuál deberá ser la capacidad de los autobuses de la estación para alojar a los que llegan y a los que están en el andén?

8. Una empresa de consultoria en ingenieria civil tiene dos terminales de computadora para realizar sus cálculos. El trabajo de computo promedio requiere 20 minutos de tiempo en la terminal, y cada ingeniero necesita realizar algunos cálculos alrededor de una vez cada 2 horas, o sea que el tiempo medio entre solicitudes de servicio es cada 2 horas. Se puede suponer que estas solicitudes están distribuidas según una distribución de Poisson; si son seis ingenieros en el grupo determinar:

a) El número estimado de ingenieros que esperan emplear una terminal.

b) El tiempo total perdido diariamente de los ingenieros en la esperando se desocupe una terminal.

9. El proceso de descarga de camiones de volteo se realiza por medio de una pala mecánica. El tiempo medio entre llegadas es

de 30 minutos siguiendo una distribución de Poisson. La tasa de descarga es de 3 por hora. El costo de la pala y el operador es de 700 unidades monetarias por hora. El tiempo ocioso de un camión y su conductor es de 1000 unidades monertarias por hora ¿Cuántas palas deberán usarse para mejorar el sistema?

10. Una terminal de autos de alquiler de un aeropuerto da servicio a tres tipos de pasajeros: los que llegan de areas rurales, los que llegan de areas suburbanas y los viajeros de tránsito que cambian de avión en el aeropuerto. La distribución de llegadas para cada uno de los tres grupos se supone de Poisson con tasa media de 10, 5 y 7 por hora, respectivamente. Suponiendo que todos los clientes requieren el mismo tipo de servicio en la terminal y que el tiempo de servicio es exponencial con una tasa media de 10 por hora ¿Cuántos puestos de servicio deberan tenerse en la terminal de acuerdo a las siguientes condiciones?

a) El tiempo promedio en el sistema por cliente no excedera de 15 minutos.

b) El numero de clientes en espera en el sistema será a lo más 10.

c) La probabilidad de que todos los puestos o terminales de servicio no excedan de 11.

11. El total de agua que fluye a una presa cada año n es una variable aleatoria Y_t con la siguiente distribución discretizada de probabilidad. La variable es:

unidades de agua	1	2	3	4	5
P_n	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

La unidad usada es un tercio de la capacidad de la presa. Se intenta proporcionar dos unidades de agua por año a las tierras de cultivo cercanas a la presa siempre que sea posible. De no existir la presa es claro que el 40% de los años no se dispondrá de dicha cantidad de agua pero en el 30% de los años llegaría agua a la presa agua en exceso y tambien se deja escurrir hacia las tierras circundantes.

a) Calcule a largo plazo ¿Cuál porcentaje del tiempo la presa está llena, a 2/3 de su capacidad, a 1/3 de su capacidad y vacía?

b) Determine la distribución del tiempo t en que la presa esté vacía por primera vez dado que inicialmente se encuentra llena.

12. Un consorcio de la construcción posee 300 millones de pesos. Participa cada vez en un proyecto con un tercio de probabilidad de ganar 200 millones y con 2/3 de probabilidad de perder 100 millones. Deja de participar si gana por lo menos 400 millones o si pierde todo su dinero.

a) Describa la matriz de probabilidad es de transiciónen un paso.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que participe en más de 4 proyectos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al final del cuarto proyecto posea más de 400 millones?

13. Se desea conservar una carretera . Los estados en los que puede estar la carretera son los siguientes:

condiciones de proyecto nueva

transitable

deteriorada

Suponiendo que el sistema queda descrito por la siguiente matríz de probabilidad es de transición en un paso;

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.0 & 0.6 \\ 0.0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array}$$

considerando como indíce de tiempo el mes. Si se parte de que la trayectoria del sistema se inicia en el estado 1 se pide:

a) Encontrar la probabilidad de que el sistema se encuentre deteriorado al final del tercer mes de su trayectoria.

b) Para el caso de que el mantenimiento que se acostumbra dar al sistema permita suponer que durante el tercer mes se va a pasar de deteriorado a transitable, calcular la probabilidad de que apartir del cuarto mes el sistema siga la trayectoria T→P→D o T→D→D.

c) Calcular la probabilidad de que el sistema sólo pase por el estado transitable una sola vez en los primeros tres meses de la trayectoria.

d) Calcular la esperanza del número de veces en que el sistema se encontrará en el estado transitable durante los tres meses de su trayectoria.

IV. SIMULACION.

Los procesos de simulacion son posiblemente las herramientas más poderosas, utiles y populares en la investigación de sistemas para la toma de decisiones. Para ello se análizan algunos modelos por medio de la simulación.

En este capitulo se presentan los diferentes métodos de generación de numeros aleatorios, fundamentos de la simulación los pasos a seguir y su aplicación en algunas areas de la ingenieria civil.

La simulación es una técnica numérica para llevar a cabo expe.imentos sobre modelos matemáticos y logicos que describen el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo, con el objeto de estudiar el sistema, , sintener que actuar sobre el prototipo o sobre el sistema real.

La simulacion digital es un proceso numerico diseñado para experimentar el comportamiento de un sistema en una computadora digital, a traves del tiempo. El comportamiento del sistema se presenta en base de modelos matematicos y lógicos, diseñados para tal fin. Se puede simular el comportamiento de sistemas económicos, sociales, administrativos, industriales, físicos, químicos, biológicos, etc. Los procesos de simulación se pueden realizar especialmente en una computadora digital.

La simulación es muy útil cuando se dificulta o imposibilita la solución del modelo analítico requerido de un determinado problema.

Comparados con los modelos analíticos y numéricos, los procesos de simulación presentan ventajas y desventajas.

La simulación permite estudiar el sistema real sin deformarlo, situación contraria a los modelos analíticos o numéricos que requieren la simplificación del sistema real en estudio, a fin de que se apegue a las condiciones que fundamentan la teoría del sistema en uso, por lo que muchos modelos analíticos y numéricos resuelven un sistema deformado muy lejano del sistema real bajo estudio.

Sin embargo, los procesos de simulación no producen resultados óptimos, sino simplemente buenos. Son procesos muy costosos en cuanto al requerimiento de tiempo de computadora, necesitan por lo general de equipo electrónico sofisticado. Se consume mucho tiempo en el diseño, prueba y verificación de un modelo de simulación y se requiere de estudios de campo intensivos para familiarizarse con el sistema real en estudio, además de necesitarse ingenieros con gran experiencia en esta area.

4.1 DEFINICION Y OBJETIVO.

Aunque el concepto de sistema ya se manejó anteriormente, no se le dió una definición formal. Por sistema se entiende, un conjunto de componentes que interactúan entre si, como una unidad, para la concecución de un propósito explícito o implícitamente definido.

En un proceso de simulación se deberán definir como mínimo los parámetros, componentes, atributos, actividades y estado del sistema, los cuales son:

Componente: se le llama a cualquier parte importante del sistema (un sistema puede tener varias componentes).

Atributo: se refiere a las propiedades de cualquier componente del sistema (una componente puede tener varios atributos).

Actividad: cualquier proceso que causa cambios en el sistema.

Estado del sistema: descripción de los componentes, sus atributos y actividades de un sistema en un determinado período de tiempo.

El objetivo de la simulación es emplear una técnica que permita conocer el funcionamiento de un sistema sin tener que construirlo, a la vez que ofrece la oportunidad de probar diferentes alternativas de solución y adoptar la más conveniente. En casos de sistemas ya existentes nos permite proponer cambios a los mismos sin necesidad de experimentar directamente sobre ellos, lo cual en algunos casos es imposible y en otros es hasta peligroso.

En las técnicas de simulación no se trata de obtener soluciones análiticas de problemas, sino que, se trata de seguir el comportamiento numérico de una serie de elementos representativos del sistema a lo largo del tiempo usando sus iteracciones perfectamente definidas. En general se puede decir que la simulación usa los modelo matemático y lógicos como un laboratorio de experimentación.

La forma de efectuar estos estudios depende de la naturaleza de los mismos y en general puede ser de tres tipos:

1. Análisis de sistemas. Se estudia sobre el modelo el comportamiento de un sistema existente o propuesto; la simulación ideal sería realizar el análisis sobre el sistema real, lo cual en la mayoría de los casos no es posible, dado que la simulación es una herramienta adecuada para investigar el comportamiento del sistema.

2. Diseño de sistemas. El objetivo es dimensionar o

establecer un sistema que cumpla con ciertas condiciones o restricciones y que además, sirva a su propósito. El Ingeniero propone ciertos elementos constitutivos y estudia su comportamiento por medio de la simulación, si esta es adecuada y cumple con las restricciones y especificaciones propuestas se acepta y en caso contrario se corrige y vuelve a someterse a consideración.

3. Postulación de sistemas. Es usado principalmente en las ciencias económicas y politicas donde se conoce el comportamiento del sistema pero no los procesos que producen ese comportamiento. Se hacen hipótesis y se establece un modelo tratando en este caso de ajustarlo a la realidad por medio de una serie de parámetros. Una vez realizado el postulado se puede entender mejor el funcionamiento del sistema, predecir eventos y formular hipótesis más refinadas.

4.2 MODELOS.

Con el objeto de poder estudiar el comportamiento de un sistema, el primer paso que debe darse es representarlo por medio de un modelo. Los modelos no deben ser tan complejos ni difíciles como el sistema real, pues no se tendría ninguna ventaja. Se deben análizar modelos más simples que el sistema real, sin embargo, se deben representar adecuadamente las características del sistema.

No existen modelos únicos que representen a la realidad. De hecho el modelo depende del ingeniero que lo diseñe y por consecuencia de los aspectos que intervienen en el estudio del sistema.

La calidad del modelo depende de su simplicidad y su apego a la realidad; para lograrlo se requiere de imaginación y creatividad del grupo de ingenieros.

No es posible elaborar un manual para la construcción de modelos, y de existir, dicho manual sería contraproducente, ya que se restringiría la creatividad del ingeniero especializado en diseño. Existe una serie de patrones basados en experiencias anteriores que permiten dar ideas básicas para el establecimiento de sistemas.

Se define modelo, como el conjunto de información relativa a un sistema que permite su estudio. Una clasificación de modelos puede ser la siguiente:

Modelos
- Determinísticos
- Estocásticos
- Estáticos
- Dinámicos
- Iconicos
- Analogicos
- Simbólicos

1. Modelos determinísticos.- Donde el resultado queda descrito completamente en términos de los datos de entrada, es decir, las relaciones están perfectamente establecidas entre las variables y ninguna de ellas es aleatoria. Su solución más adecuada es por medio de técnicas análiticas. Por ejemplo: los problemas de programación lineal.

2. Modelos estocásticos.- Donde cuando menos una de las caracteristicas está dada por una función de probabilidad. En este caso el uso de técnicas análiticas es muy compleja requiriendose el uso de la simulación para su solución. Por ejemplo: los problemas probabilisticos dinámicos.

3. Modelos estáticos.- Son aquellos en los que la variable tiempo no interviene explicitamente. Las aplicaciones de programación lineal y no lineal caen en ésta categoria. La mayoría de los modelos estáticos son determinísticos, por lo que, se pueden resolver analíticamente.

4. Modelos dinámicos.- Es donde se manejan interacciones en el tiempo. Pueden resolverse con modelos análiticos en algunos casos sencillos. Los fenómenos económicos y demograficos requieren este tipo de modelos.

5. Modelos icónicos.- Son imagenes a escala cuyo problema se quiere resolver. Por ejemplo las fotografías, las maquetas, dibujos y modelos a escala de barcos, autómoviles, aviones, canales, etc.

6. Modelos analógicos.- Se basan en la representación de las propiedades de un sistema cuyos problemas se pueden resolver utilizando otro sistema cuyas propiedades son equivalentes. Por ejemplo las propiedades de un sistema hidráulico son equivalentes a las de un sistema eléctrico o inclusive económico.

7. Modelos simbólicos.- Son conceptualizaciones abstractas del problema real a base del uso de letras, signos, números, variables y ecuaciones. Este tipo de modelos son faciles de manipular y se puede hacer con ellos un gran número de experimentos. Un ejemplo de este tipo de modelos lo constituyen los diagramas de flujo de los programas de computación.

4.3 PROCESO DE SIMULACION.

Planificar un proceso de simulación requiere de los siguientes pasos:

a) Formulación del problema.

b) Recolección y procesamiento de la información requerida.

c) Formulación del modelo matemático.

d) Evaluación de las características de la información requerida.

e) Formulación de un modelo computacional.

f) Validación del modelo computacional.

g) Diseño del experimento de simulación.

h) Análisis de resultados y validación de la simulación.

A continuación se resumen las principales caracteristicas asociadas a cada paso.

Formulación del problema.

Para formular un problema se requiere identificar las condiciones necesarias para que éste exista. Si se dan estas condiciones, se empieza un proceso dialéctico iterativo entre quienes tienen el problema y los que van a construir el modelo.

Se comienza por identificar en este proceso dialéctico los objetivos y propósitos de las personas que tienen el problema. Estos objetivos pueden definirse mediante los siguientes puntos:

a) Preguntas que deben contestarse. La formulación del problema se realiza con un conjunto refinado de preguntas inteligentes que requieren una secuencia lógica. Por ejemplo, ¿Se necesita un nuevo aeropuerto en la ciudad de México? ¿Donde debe construirse ese aeropuerto?

b) Hipótesis que deben ser verificadas o refutadas. La formulación del problema se efectúa aceptando o refutando un conjunto de hipótesis. Por ejemplo, ¿La construcción de un nuevo aeropuerto en la ciudad de México acelerará el deterioro en la calidad de vida de sus habitantes?

c) Efectos que deben estimarse. La formulación del problema se realiza estimando los efectos que tienen las actividades en el sistema en estudio. Por ejemplo, ¿Cómo afectará al transporte foráneo el hecho de que el nuevo aeropuerto en la ciudad de México se localice en Toluca, Puebla o Cuernavaca?

En este paso, la participación activa de quienes tienen el problema, esto es, los que toman las decisiones en el sistema en estudio, es una condición necesaria que incrementa la verosimilitud de la formulación correcta.

Recolección y procesamiento de información requerida.

Recolección de información es el proceso de capturar los datos disponibles que se requieren para la simulación del comportamiento del sistema. Por procesamiento se comprenden las actividades requeridas para transformar los datos en información.

Sin información es imposible simular un sistema. Cuando la información es oportuna, veraz, relevante y confiable, se pueden mejorar y actualizar los modelos de simulación que se diseñan para un sistema dado.

Existen tres posibles fuentes para generar la información: datos históricos o series de tiempo, opiniones de expertos y estudios de campo.

Las series históricas o de tiempo que han sido limpiadas de irrelevancias, son datos útiles y de rápido procesamiento para convertirlos en información. La desventaja es que su grado de detalle puede estar limitado y por lo tanto su utilidad es solamente parcial.

La opinión de expertos es generalmente información subjetiva, carente de detalle y de utilidad mínima, pero es una manera barata y rápida de obtener cierto tipo de información complementaria.

Los estudios de campo son el método más efectivo, costoso y tardado, de obtener la información requerida. Esta estrategia requiere del diseño de una muestra estadísticamente representativa del universo bajo estudio de un cuestionario que asegura la relevancia y confiabilidad de los mismos y de personal capacitado para este trabajo. Este tema fué analizado en el capítulo II de este trabajo.

Formulación del modelo matemático.

Modelar es más un arte que una técnica. Resulta imposible proporcionar reglas mediante las cuales se puedan construir modelos matemáticos. Se puede, sin embargo, proporcionar algunos marcos de referencia, que más que definir los pasos de la modelación, dan criterios para discriminar la información que se utilizará en el modelo.

Al modelar se caracterizan matemáticamente las relaciones que gobiernan la interacción de las componentes del sistema y de sus actividades.

Evaluación de las características de la información procesada.

Los modelos de simulación discutidos en este capítulo se refieren por lo general, a sistemas discretos estocásticos; por lo tanto, la información requerida para simular esos sistemas tendrá características aleatorias. Esto conduce a averiguar, entre otras cosas, el tipo de distribución probabilística que se ajusta a la información.

Por ejemplo si el sistema que se simula es una línea de espera, se requiere verificar si las llegadas de clientes o los servicios proporcionados tienen una distribución teórica Poisson con media λ, y exponencial con media μ o bien, si tiene una distribución empírica diferente a las teóricas clásicas.

Para averiguar lo anterior se requiere de la realización de una serie de pruebas estadísticas para analizar si existen diferencias significativas entre la distribución empírica observada y la distribución teórica supuesta. De no existir diferencias estadística- mente significativas, se utiliza la distribución teórica que generalmente ya viene tabulada en manuales. De lo contrario, el comportamiento del sistema debe hacerse en base a la distribución empírica observada, lo cual acarrea cierta complejidad.

Las diferentes pruebas auxiliares para analizar estas diferencias estadísticas son:

a) Pruebas referentes a valores medios (diferencia entre medias).
b) Pruebas referentes a variaciones (ji-cuadrada)
c) Pruebas referidas a conteo de datos (proporciones, tabla de contingencias, pruebas de corrida e intervalos).
d) Pruebas no paramétricas (rango, medianas, correlación, Kolmogorov-Smirnov).

Formulación de un modelo computacional.

Los pasos a seguir para formular un modelo computacional son:

a) Elaborar un diagrama de flujo que muestre el efecto de las diferentes actividades sobre las componentes importantes de un sistema.
b) Diseñar la programación con algún lenguaje especial (GPSS, SIMSCRIPT, GASP, DYNAMO, etc.) o en lenguajes FORTRAN o BASIC que son los más universales.
c) Probar el modelo computacional hasta eliminar todos los errores lógicos y no lógicos.
d) Generar resultados.

En la formulación de un modelo computacional, se deben especificar las condiciones con que se empezará a simular el comportamiento del sistema. Esto es importante, por que en el proceso de simulación se distinguen 2 fases: una no estable al principio del proceso y una estable al finalizar éste. Para validar un modelo de simulación se requiere analizar estadísticamente los resultados de la parte estable del proceso en todas las simulaciones del mismo.

Los formatos de los resultados de las diferentes simulaciones del modelo computacional en un proceso de simulación, se deberán diseñar en función de la comunicación que se tendrá con los usuarios. La presentación de los resultados debe ser relevante, inteligible y clara.

Validación del modelo computacional.

Validar un modelo computacional (generalmente formado por uno o varios programas), verificar o refutar la existencia de diferencias estadisticamente significativas entre los resultados de las multiples pruebas de un experimento de simulacion. Paralelamente se comparan los resultados de la simulación con series históricas existentes y se verifica la exactitud del pronóstico generado por medio de la simulación.

Diseño de experimentos de simulación.

Una vez validado el modelo computacional, se entra a la fase de diseño de los experimentos que se requieren simular. Deben definirse las variables y las estructuras funcionales que las relacionan.

Se eligen las distribuciones probabilisticas adecuadas a los parámetros aleatorios y se generan los números aleatórios que de acuerdo a las distribuciones, representan parte del sistema en estudio.

Esta fase ésta intimamente ligada con el análisis de variancia de los resultados de la simulación , que mide el grado de asociación lineal entre variables.

Se debe tener cuidado de no introducir errores aleatorios en el diseño de los experimentos.

Análisis de resultados y validación de la simulación.

El análisis de resultados consiste en recolectar sistemáticamente los datos producidos por la simulación, cálcular ciertas estadísticas, y por ultimo, interpretarlas.'

La validación de la simulación se lleva a cabo comparando tanto la similitud entre los resultados y las posibles series históricas que se poseen, como el uso que los decisores le den a ésta herramienta. De hecho, la utilización del modelo por parte de los decisores es la validación crucial; de otra forma el modelo se archiva o se desecha.

4.4 GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS.

Los numeros aleatorios son aquellos que tienen la misma probabilidad de ocurrencia que cualquier otro.

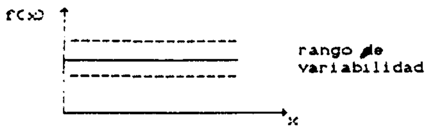


figura 4.1

En los procesos de simulación se han venido usando dos métodos alternativos para generar las sucesiones de números aleatorios, estos son:

1. Metodos manuales.
2. Tablas de números aleatorios
3. Métodos computacionales.

Los métodos manuales, son los más simples y los menos usados por ser muy lentos en el proceso y avaces muy caros y difícultosos, los dispositivos usados son: dados, monedas, barajas, ruletas, urnas, tombolas y combinaciones de estos. En consecuencia se han elaborado programas de cómputo para generar lo que se llama numeros pseudoaleatorios. Los numeros generados por medio de una computadora no son totalmente aleatorios por que se obtienen de fórmulas preestablecidas que cumplen con una serie de pruebas estadisticas de aleatoriedad; por está razón a estos numeros se les llama pseudoaleatorios.

Se puede obtener también números aleatorios tomandolos de las tablas de números aleatorios, los cuales sosn creados usando mecanismos electromecánicos. Su dificultad esriba en que no se pueden guardar en los dispositivos magneticos de memoria de las computadoras, dado que consumen mucho "espacio" en la misma.

La mayoría de los métodos para generar números aleatorios son iterativos. Obteniendo un número pseudoaleatorio se genera el posterior.

Se llama período del método al número de elementos generados que se obtienen hasta repetir la semilla. Es deseable que el período sea lo más grande posible para que noexista una repetición ciclica de los números dentro de un proceso de simulación. La semilla es el número seudoaleatorio con que se inicia el proceso.

Algunas técnicas para generar números se describen a continuación.

Método del cuadrado medio.

Este método es muy simple de aplicar y se pueden obtener números de 2 a 8 digitos dependiendo del requerimiento para la simulación del sistema .Los pasos a seguir son:

Paso 1. Elegir un número decimal de un número par en dígitos menor que 1 tomando al "azar", el cual será la semilla de los números generados (generalmente un número de cuatro dígitos).

Paso 2. El número aleatorio siguiente se obtiene elevando al cuadrado el número anteriormente obtenido (como decimal), tomando los dígitos de en medio en número por.

Paso 3. Repetir el paso 2 hasta definir un ciclo, es decir, hasta obtener el número del que se partió.

Ejemplo 1.

Obtener 10 números aleatorios partiendo del número 1449, con el método del cuadrado medio.

Solución:

$$
\begin{array}{llll}
 & & & X = 0.1449 \\
X_0^2 = (0.1449)^2 = 0.02049601 & \rightarrow & & X_1 = 0.0996 \\
X_1^2 = (0.0996)^2 = 0.00992016 & \rightarrow & & X_2 = 0.9920 \\
X_2^2 = (0.9920)^2 = 0.98406400 & \rightarrow & & X_3 = 0.4064 \\
X_3^2 = (0.4064)^2 = 0.16516090 & \rightarrow & & X_4 = 0.5160 \\
X_4^2 = (0.5160)^2 = 0.26625600 & \rightarrow & & X_5 = 0.6256 \\
X_5^2 = (0.6256)^2 = 0.39137536 & \rightarrow & & X_6 = 0.1375 \\
X_6^2 = (0.1375)^2 = 0.01890625 & \rightarrow & & X_7 = 0.8906 \\
X_7^2 = (0.8906)^2 = 0.79316836 & \rightarrow & & X_8 = 0.3168 \\
X_8^2 = (0.3168)^2 = 0.10036224 & \rightarrow & & X_9 = 0.0362 \\
X_9^2 = (0.0362)^2 = 0.00131044 & \rightarrow & & X_{10} = 0.1310
\end{array}
$$

Método congruencial multiplicativo.

Este método genera los números partiendo de un número inicial escogido aleatoriamente mediante el metodo siguiente:

Paso 1. Tomar un número inicial (como semilla).

Paso 2. Multiplicar el número generado por la constante "a".

Paso 3. Comparar el resultado con el número base *m*, si el producto resulta ser mayor que m, se le restan n veces m a ese producto hasta que sea menor que m, y este será el número generado. En caso de que el producto sea menor que el módulo m ese será el número generado. En otras palabras, el número X_{n+1} se puede obtener dividiendo el producto de la constante "a" por el número generado entre la constante m, y obteniendo el residuo como el nuevo número generado. La expresión con que se describe este método es la siguiente:

$$X_{n+1} \equiv a \cdot X_n \ (\text{módulo } m) \qquad \text{(Ec. 4.1)}$$

La variable m deberá ser un numero primo y deberá tener como raíz primitiva el número 2. El signo "≡" se lee congruencial cm.

Ejemplo 2.

Generar los números aleatorios correspondientes a un ciclo, con el método congruencial multiplicativo, de acuerdo con los siguientes datos; $a = 6$, $m = 23$, $X_0 = 13$.

Solución:

Empleando la ecuación 4.1, se tiene

$X_1 \equiv 6\cdot(13)$ (módulo 23) $= 3.(23)+09$ → $X_1 = 09$

$X_2 \equiv 6\cdot(09)$ (módulo 23) $= 2.(23)+08$ → $X_2 = 08$

$X_3 \equiv 6\cdot(08)$ (módulo 23) $= 2.(23)+02$ → $X_3 = 02$

$X_4 \equiv 6\cdot(02)$ (módulo 23) $= 0.(23)+12$ → $X_4 = 12$

$X_5 \equiv 6\cdot(12)$ (módulo 23) $= 3.(23)+03$ → $X_5 = 03$

$X_6 \equiv 6\cdot(03)$ (módulo 23) $= 0.(23)+18$ → $X_6 = 18$

$X_7 \equiv 6\cdot(18)$ (módulo 23) $= 4.(23)+16$ → $X_7 = 16$

$X_8 \equiv 6\cdot(16)$ (módulo 23) $= 4.(23)+04$ → $X_8 = 04$

$X_9 \equiv 6\cdot(04)$ (módulo 23) $= 1.(23)+01$ → $X_9 = 01$

$X_{10} \equiv 6\cdot(01)$ (módulo 23) $= 0.(23)+06$ → $X_{10} = 06$

$X_{11} \equiv 6\cdot(06)$ (módulo 23) $= 1.(23)+13$ → $X_{11} = 13$ *

* se repite el ciclo

El período es de 13.

Método congruencial multiplicativo mixto.

Este metodo es muy similar al método congruencial multiplicativo. En este caso se suma una constante al producto de aX_n, la expresión que representa esto, es:

$$X_{n+1} \equiv aX_n + c \text{ (módulo m)} \qquad \text{(Ec. 4.2)}$$

Ejemplo 3.

Obtener los números pseudoaleatorios que se generan con el método congruencial multiplicativo mixto , con los siguientes datos ; $a = 7$, $X_o = 3$, $c = 5$ y módulo = 10, y obtener el período.

Solución:

Empleando la ecuación 4.2, se tiene

$X_1 \equiv 7\cdot(3) + 5$ (módulo 10) $\rightarrow$ $X_1 = 6$

$X_2 \equiv 7\cdot(6) + 5$ (módulo 10) $\rightarrow$ $X_2 = 7$

$X_3 \equiv 7\cdot(7) + 5$ (módulo 10) $\rightarrow$ $X_3 = 4$

$X_4 \equiv 7\cdot(4) + 5$ (módulo 10) $\rightarrow$ $X_4 = 3$

Es necesario que los números pseudoaleatorios cumplan con los requisitos mínimos, para poder ser empleados la simulación. Estos requisitos se enuncian a continuación.

1) Deben seleccionarse de una distribución uniforme a un nivel de significancia adecuado. Para la determinación de este requisito se emplean pruebas estadísticas como la ji-cuadrada.

2) El orden de su secuencia debe ser aleatorio. Para la determinación de este requisito se emplean pruebas estadísticas similares a la de la prueba anterior.

Prueba ji-cuadrada.

Esta prueba sirve para verificar o negar la hipótesis. Un conjunto de observaciones proviene de una distribucuón uniforme. El estadístico que se usa en esta prueba es X_o^2. La secuencia a seguir para la aplicación de la prueba es la siguiente:

Paso 1. Se ordenan los números pseudoaleatorios en forma ascendente.

Paso 2. Se obtienen k intervalos de clase iguales para los rangos que son suceptibles de obtenerse (se recomienda que el número de intervalos sea entre 5 y 15).

Paso 3. Obtener la frecuencia observada para cada intervalo (FO).

Paso 4. Obtener la frecuencia esperada (FE_i) con la siguiente expresión:

$$FE_i = N/n \qquad \text{(Ec. 4.3)}$$

donde, N es el tamaño de la muestra y n es el numero de subintervalos.

Paso 5. Obtener el estadistico X_o^2, con la siguiente fórmula:

$$X_o^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(FO_i - FE_i)}{FE_i} \qquad \text{(Ec. 4.4)}$$

Paso 6. Obtener $X^2_{\alpha,(n-1)}$, la cual representa a la variable ji-cuaadrada con n-1 grados de libertad y un nivel de significancia α, (tabla 4.1).

Criterio de decisión:

Si $X_o^2 > X^2_{\alpha,(n-1)}$ se rechaza la hipótesis, por lo que se dice que la muestra no proviene de una distribución uniforme.

Ejemplo 4.

Compruebe mediante la prueba X^2 (ji-cuadrada) la aleatoriedad de los números pseudoaleatorios obtenidos en el ejemplo 2, complementando con los siguientes datos; n = 4 y α = 0.50.

Solución:

Ordenando los números alatorios obtenidos en el ejemplo 2, en forma ascendente se tiene:

1 2 3 4 6 8 9 12 13 16 18

los intervalos de clase se clasifican entre el cero y el 23, por ser los limites del rango de variabilidad. Tomando 5 intervalos de clase, y haciendo una tabla para simplificar calculos, se tiene:

intervalo de clase	frecuencia observada (FOi)	frecuencia esperada (FEi)	X^2_{oi}
0.0 - 4.6	4	2.2	1.473
4.7 - 9.2	3	2.2	0.291
9.3 - 13.8	2	2.2	0.182
13.9 - 18.4	2	2.2	0.182
18.5 - 23.0	0	2.2	2.200

de la tabla 4.1 se obtiene $X_{0.5,4} = 3.357$

Dado que $X^2_o > X_{\alpha,(n-1)}$, se rechaza la hipótesis, y se dice, que los números obtenidos no provienen de una distribución uniforme.

Prueba de la corrida.

Una "corrida" se define como un conjunto de números que aparecen ordenados en forma monótonica creciente o decreciente.

Por ejemplo: 03, 23, 57, 92, 99 contiene una sola corrida, mientras que 03, 99, 23, 92, 57 contiene tres corridas. Se utiliza el signo + para identificar que el número que aparece a la derecha es mayor, o el signo - si es menor. Se tiene para el ejemplo

03, 23, 57, 92, 99, $\Rightarrow$ +, +, +, +

y para el segundo

$$03,\ 99,\ 23,\ 92,\ 57 \quad \rightarrow \quad +,\ -,\ +,\ -$$

se puede observar en el segundo ejemplo que se tienen tres cambios de signo, y por lo tanto tres corridas.

Esta prueba se basa en el supuesto de que el número de corridas es una variable aleatoria distribuida en forma normal con media y varianza conocidas, y un tamaño muestral mayor de 20 números.

La prueba consiste en lo siguiente

Paso 1. Se selecciona una muestra de tamaño n ($n > 20$).

Paso 2. Se definen con los signos + y − las posibles corridas.

Paso 3. Se define al estadístico r como el número de corridas.

Paso 4. Si $n > 20$, entonces r se aproxima a una distribución normal con media:

$$\bar{X}(r) = \frac{1}{3}(2n - 1) \qquad \text{(Ec. 4.5)}$$

y varianza:

$$\mathrm{Var}(r) = \frac{1}{90}(16n - 29) \qquad \text{(Ec. 4.6)}$$

El criterio de decisión, es que se acepta la hipótesis, que se ajusta a una distribución normal si:

$$\frac{\alpha}{2} \leq Z\left[\frac{r - X(r)}{\sqrt{\mathrm{Var}(r)}}\right] \leq 1 - \frac{\alpha}{2}$$

donde $Z\left[\frac{r - X(r)}{\sqrt{\mathrm{Var}(r)}}\right]$ está tabulada en la distribución normal (Tabla 4.2).

Ejemplo 5.

Al generar 20 números aleatorios del ejemplo 1, determinar si es una secuencia de números aleatorios con la prueba de la corrida.

Solución:

La secuencia de números que se obtiene en el ejemplo 1, es:

0996		9920		4064		5160		6256		
	+		−		+		+		−	
1375		8906		3168		0362		1310		
	+		−		−		+		+	
7161		2799		8344		6223		7257		
	−		+		−		+		−	

6640 0896 8028 4487 1331

+ − −

Se tiene r = 13 corridas

la media, empleando la ecuación 4.5 es:

$$\bar{X}(r) = \frac{1}{3}(2n - 1) = \frac{1}{3}(40 - 1) = 13$$

y la varianza empleando la ecuación 4.6 es:

$$Var(r) = \frac{1}{90}(16n - 29) = \frac{1}{90}(320 - 29) = 3.23$$

para la ecuación 4.7 se tiene:

$$\frac{r - \bar{X}(r)}{\sqrt{Var(r)}} = \frac{13 - 13}{\sqrt{3.23}} = 0$$

de la tabla 4.2 se obtiene:

$$Z(0) = 0.50$$

con un nivel de significancia de 0.10 se tiene:

$$\frac{\alpha}{2} \leq Z(0) \leq 1 - \frac{\alpha}{2}$$

sustituyendo valores, se tiene:

$$0.05 < 0.50 < 0.95$$

∴ la secuencia de números se considera que es aleatoria.

4.5 GENERACION DE OBSERVACIONES ALEATORIAS.

El comportamiento de los fenómenos a simular puede ajustarse a una distribución de probabilidad conocida. Si se tiene este dato se puede simular el comportamiento del sistema a través del tiempo, siguiendo el método descrito a continuación.

Paso 1.- Encontrar la función de distribución acumulada $F(x)=P[x]$ donde x es una variable aleatoria que interviene en la función. Se puede hacer escribiendo la ecuación para cada función, o bien, trazando la gráfica de la función, o desarrollando una tabla que proporcione el valor de x para valores uniformemente espaciados.

Paso 2.- Generar un número aleatorio entre 0 y 1. Esto se hace obteniendo un número aleatorio que tenga el número deseado de dígitos (incluyendo los ceros a la izquierda si los hay) y a continuación, colocar un punto decimal al principio. Los numeros aleatorios pueden ser tomados de las tablas descritas en el capitulo II, o de otras tablas, o bien, generarlos con los métodos aritmeticos antes vistos, o bien obtenerse por medio de algun otro metodo congruencial.

Paso 3.- Igualar $P(x)$ al numero decimal aleatorio entre 0 y 1 y despejar x. Este valor de x es la observación aleatoria deseada obtenida a partir de la distribución de probabilidad. A este proceso se le conoce como transformada inversa.

Cuando no es posible encontrar la transformada inversa y se emplea una gráfica que representa la función, se sigue el método que se muestra en la gráfica 4.2.

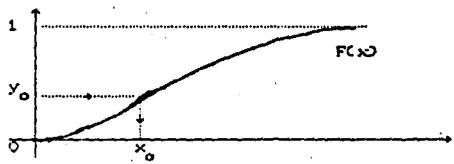


Figura 4.2

Cuando la distribución de probabilidad dada es continua, en realidad el procedimiento que acaba de describirse proporciona una aproximación de est. distribucion discreta cuyos puntos espaciados de manera irregular tienen probabilidades iguales de ocurrencia . Sin embargo, esto no es particularmante cierto, por que se puede hacer la aproximacion tan exacta como se desee, utilizando un numero lo suficientemente grande en digitos para el numero aleatorio.

Aunque el procedimiento semigráfico empleado en la figura 4.2 resulta conveniente si la simulación se hace manualmente. La computadora digital debe recurrir a algún procedimiento alternativo de generación de números aleatorios con varios digitos.

A continuación se muestra la transformada inversa de las distribuciones más usadas en los procesos de simulación. No se muestra el detalle de como se pasa de $F(x)$ a $F^{-1}(y)$.

Distribución exponencial.

Sea y una variable aleatoria distribuida exponencialmente, con media $1/\lambda$; su función de densidad es:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

y su distribución de probabiliodad acumulada es:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Entonces

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln (1-y) \qquad \text{(Ec 4.7)}$$

donde y es la variable aleatoria con distribución uniforme.

Distribución normal.

Sea x una variable aleatoria con distribución normal con media μ y variancia σ^2; su densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)}.$$

$$E(x) = \mu \text{ y } Var(x) = \sigma^2$$

Entonces, si $\mu=0$ y $\sigma=1$, la función inversa es aproximadamente igual a:

$$x = F^{-1}(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - n/2)}{\sqrt{n(\frac{1}{12})}} \qquad \text{(ec. 4.8)}$$

donde $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ son variables aleatorias independientes, con distribución uniforme en el intervalo [0,1]. Es recomendable que n sea mayor o igual a 10. Si se desea una variable aleatoria con distribución Normal con una media y varianza cualquiera, μ y σ respectivamente, la fórmula anterior se convierte en:

$$x = F^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (\sum_{i=1}^{12} y_i - 6)\sigma + \mu \qquad \text{(Ec. 4.9)}$$

Distribución de Poisson.

Sea x una variable aleatoria discreta, con distribución de Poisson con media λ:

$$P_r(x=k) = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^k}{k\,!}$$

donde

$$E(x) = \lambda \quad \text{y} \quad Var(x) = \lambda.$$

La función inversa se obtiene formando productos de variables aleatorias uniformemente distribuidas en [0,1], denotadas por y, hasta que este producto sea menor que $e^{-\lambda}$, es decir hasta que satisfaga la desigualdad

$$\prod_{i=1}^{x} y_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{x+1} y_i \qquad \text{(Ec. 4.10)}$$

Al cumplirse la desigualdad 4.10, se encuentra el valor de x con media λ.

Ejemplo 6.

Se ha visto estadísticamente en la caseta de cobro de una autopista que los vehículos automotores llegan con distribución Normal en promedio uno cada minuto, con una dispersion de 0.75 minutos por vehículos. Tambien mediante técnicas estadísticas se ha determinado que en promedio permanecen 30 segundos efectuando el pago con distribución exponencial. Se pide determinar el número de casetas de cobro que hacen falta si se desea que en promedio un automóvil permanezca más de un minuto haciendo cola. Simular el problema haciendo uso de una sucesión de números aleatorios.

Solución:

Para resolver este problema de simulación se consideran dos etapas. La primera, que es la de preparación de la información, consiste básicamente en transformar la sucesión de números aleatorios a observaciones aleatorias con las distribuciones de probabilidad especificadas en el problema. La segunda es propiamente la simulación, donde se manejan las observaciones aleatorias , de tal manera que numericamente representen el fenómeno físico que se intenta simular.

PRIMERA ETAPA:

Datos:

Distribución de llegadas normal con

media : μ = 1.00 minutos/auto

varianza : σ = 0.75 minutos/auto

Distribución de tiempo de pago (servicio) de tipo exponencial con

media : $\bar{x}$ = 0.50 minutos/auto

parámetro : λ = 2.00 autos/minuto

Para transformar los numeros aleatorios con distribución de probabilidad uniforme, en observaciones aleatorias con distribuciones normal y exponencial; se hace uso de las funciones de distribución acumuladas de tipo normal y exponencial respectivamente.

En el caso caso de la distribución normal se procede de la siguiente manera:

1.- Se considera la gráfica de la distribución normal acumulada N(0,1).

2.- Se selecciona un numero aleatorio entre cero UyU uno.

3.- Se traza una paralela al eje X que pasa por el punto y hasta intersectar a la curva.

4.- Se proyecta ortogonalmente al eje horizontal correspondiendo a un valor Z' con el que se entra a las tablas de la distribucion acumulada N(0.1) (tabla 4.1) de donde se obtiene el valor de Z.

5.- Se obtiene la observación X con $n(\mu,\sigma)$ de la siguiente relación.

$$X = \mu + \sigma Z$$

que proviene de:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

En el caso de la distribución exponencial es factible obtener analíticamente la función inversa de la distribución acumulada, por lo tanto se tiene:

distribución exponencial acumulada

$$Y = 1 - e^{-\lambda x}$$

inversa de la distribución exponencial acumulada

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-Y)$$

donde Y son números aleatorios entre cero y uno.

NUMERO ALEATORIO		V.A. CON DISTRIBUCION NORMAL. LLEGADAS			V.A. CON DISTRIBUCION EXPONENCIAL. SERVICIO			N
Y	0<Y<1	Z	σZ	X_n	1-Y	ln(1-Y)	X_e	
06	0.06	-1.55	-1.16	-0.15	0.94	-0.06	0.03	1
22	0.22	-0.75	-0.56	1.44	0.78	-0.25	0.12	2
97	0.97	1.89	1.42	3.42	0.03	-3.51	1.75	3
65	0.65	0.45	0.34	4.34	0.35	-1.05	0.52	4
95	0.95	1.75	1.31	6.31	0.05	-3.00	1.50	5
60	0.60	0.28	0.21	6.21	0.40	-0.92	0.46	6
61	0.61	0.29	0.22	7.22	0.39	-0.94	0.47	7
28	0.28	-0.61	-0.46	7.54	0.72	-0.33	0.16	8
66	0.66	0.41	0.31	9.31	0.34	-1.08	0.54	9
43	0.43	-0.19	-0.14	9.86	0.57	-0.56	0.28	0
75	0.75	0.69	0.52	11.52	0.25	-1.39	0.69	11
65	0.66	0.41	0.31	12.31	0.34	-1.08	0.54	12
39	0.39	-0.28	-0.06	12.31	0.61	-0.49	0.25	13
22	0.22	-0.75	-0.56	13.44	0.78	-0.25	0.12	14
30	0.30	-0.50	-0.38	14.63	0.70	-0.36	0.18	15
96	0.96	1.73	1.31	17.31	0.04	-3.22	1.61	16
82	0.82	0.94	0.71	17.71	0.18	-1.71	0.86	17
72	0.72	0.59	0.44	18.44	0.28	-1.27	0.64	18
34	0.34	-0.45	-0.34	18.66	0.66	-0.42	0.21	19
03	0.03	-1.85	-1.39	18.61	0.97	-0.03	0.02	20
93	0.93	1.50	1.13	22.13	0.07	-2.66	1.33	21
37	0.37	-0.32	-0.24	21.76	0.63	-0.46	0.23	22
37	0.37	-0.32	-0.24	22.76	0.63	-0.46	0.23	23
14	0.14	-1.05	-0.79	23.21	0.86	-0.15	0.08	24
98	0.98	2.10	1.58	26.58	0.02	-3.91	1.96	25

OBSERVACIONES:

X_n = Representa el tiempo de llegada, el cual no puede ser negativo, por lo que la primera observación equivale a tener el inicio, dado que es el único valor negativo y se encuentra próximo a cero, en otro caso se desecharía la observacion.

N = Número de observación.

SEGUNDA ETAPA:

En esta etapa se representa el fenómeno a simular a partir de las observaciones obtenidas anteriormente teniendose que:

X_n = Representa numericamente el tiempo de llegada a la caseta de cobro de un automóvil, distribuido Normalmente en minutos.

X_y = Representa el tiempo de duración del servicio, en este caso, el tiempo que permanece el auto pagando la cuota, distribuido exponencialmente en minutos.

Por tanto, en esta etapa interesa encontrar el tiempo promedio de espera en la cola de un auto para pagar su cuota, para lo cual se puede seguir el prodedimiento siguiente:

1.- Ordenar el tiempo de llegada X_n en orden ascendente asociado a cada tiempo de llegada su tiempo de servicio obtenidos ambos para el mismo numero aleatorio Y.

2.- El menor X_n corresponde al tiempo de entrada a la caseta del primer auto, al cual se le sumará el tiempo de servicio, obteniendo así el tiempo de salida de la caseta:

$$X_{s1} = X_{n1} + X_{Y1}$$

3.- Si $X_{s1} > X_{n2}$ entonces el segundo auto tendrá que esperar un tiempo $X_{E2} = X_{s1} - X_{n2}$.

4.- Se repite el paso 2, N veces obteniendose , así los tiempos de espera de los autos.

5.-Obtener el promedio de X_{ei} para N observaciones para mayor facilidad se puede construir la siguiente tabla:

ORDEN DE LLEGADA	TIEMPO DE LLEGADA	TIEMPO DE ENTRADA	DURACION DEL SERVICIO	TIEMPO DE SALIDA	TIEMPO DE ESPERA
1	0.00	0.00	0.03	0.03	
2	1.44	1.44	0.12	1.56	
3	3.42	3.42	1.75	5.17	
4	4.34	5.17	0.52	5.69	0.83
5	6.21	6.21	0.46	6.67	
6	6.31	6.67	1.50	8.17	0.36
7	7.22	8.17	0.47	8.64	0.95
8	7.54	8.64	0.16	8.80	1.10
9	9.31	9.31	0.54	9.85	
10	9.86	9.86	0.28	10.14	
11	11.52	11.52	0.69	12.21	
12	12.31	12.31	0.54	12.85	
13	12.94	12.94	0.25	13.19	
14	13.44	13.44	0.12	13.56	
15	14.63	14.63	0.18	14.81	
16	17.31	17.31	1.61	18.92	
17	17.71	18.92	0.86	19.78	1.21
18	18.44	19.78	0.64	20.42	1.34
19	18.61	20.42	0.02	20.44	1.81
20	18.66	20.44	0.21	20.65	1.78
21	21.76	21.76	0.23	21.99	
22	22.13	22.13	1.33	23.46	
23	22.76	23.46	0.23	23.69	0.70
24	23.21	23.69	0.08	23.77	0.48
25	26.58	26.58	1.96	28.54	
					Σ=10.58

$$\frac{10.58}{25} = 0.42 \text{ minutos} < 1 \text{ minuto}$$

∴ Es suficiente con una caseta dado que el promedio de los automóviles que esperan en la cola es 0.42 minutos, tiempo que es menor al tiempo máximo permitido de 1 minuto.

Ejemplo 7.

El avance en terracerias mensualmente en la construcción de una carretera se dacon una media de' $\lambda = 2$ km., distribuyendose en forma de Poisson. Simular 12 meses. ¿Cuánto avanzará? ¿En cuántos dias llegara a los 20 kilómetros?

Solución:

Para resolver este problema de simulación se consideran dos etapas; la primera, que es la de la preparación de la información, la cual consiste basicamente en transformar la sucesión de números aleatorios a observaciones aleatorias con distribución de probabilidad especificada en el problema y, la segunda, que es propiamente la simulación, en donde se manejan las observaciones aleatorias .de tal manera que numericamente representen el fenómeno físico que se intenta simular.

PRIMERA ETAPA:

Datos

Distribución de Poisson con:

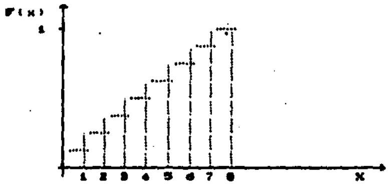
media: $\lambda = 2$ km.

Para transformar los numeros aleatorios con distribución de probabilidad constante, en observaciones con distribución de Poisson, se hace uso de la función de distribución de Poisson.

Para este caso se procede de la siguiente manera:

1.- Se calcula la gráfica de la distribución acumulada de Poisson, gráfica 4.3.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F(x)	0.135	0.406	0.677	0.857	0.947	0.983	0.995	0.999	1



2.- Se toma un número aleatorio entre cero y uno (tabla 2.1).

3.- Se traza una paralela al eje x que pasa por el punto hasta intersectar con la gráfica.

4.- Se proyecta al eje horizontal y se obtiene el valor de x.

Para facilitar calculos se construyó la siguiente tabla:

mes	y	0<y<1	xn
1	13	0.13	0
2	76	0.76	3
3	47	0.47	2
4	22	0.22	1
5	61	0.61	2
6	93	0.93	4
7	87	0.87	4
8	68	0.68	2
9	40	0.40	1
10	09	0.09	0
11	95	0.95	5
12	75	0.75	12

OBSERVACIONES:

x_n = Representa los kilómetros avanzados en el mes n.

SEGUNDA ETAPA:

En esta etapa interesa encontrar el avance que se tiene durante un año de trabajo, para lo cuál se irá sumando el avance de cada mes. Simplificando calculos se tiene:

mes	Avance en el mes	Avance total
1	0	0
2	3	3
3	2	5
4	1	6
5	2	8
6	4	12
7	4	16
8	2	18
9	1	19
10	0	19
11	5	24
12	3	27

∴ <u>Se tendrá un avance simulado en un año de 27 km. y se llegará al kilómetro 20 en el mes 11.</u>

Ejemplo 8.

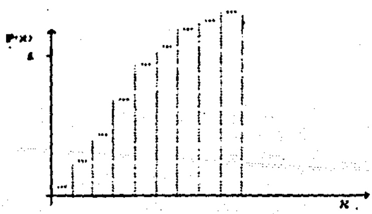
Una empresa de alquiler de maquinaria para construcción encuentra que la distribución de la vida util de sus camiones de volteo se describe segun la siguiente tabla:

Meses hasta remplazo	6	8	10	12	14	16	18	20	24
Probabilidad	0.05	0.10	0.15	0.20	0.20	0.10	0.10	0.05	0.05

Si la compañia mantiene una flotilla de 3 camiones, estimar por medio de la simulación el número de remplazos que se haran en un periodo de 3 años.

Solución:

Primero se constuye la gráfica de distribución de probabilidades acumulada, de acuerdo con los datos del problema:



Teniendo la grafica se tiene que generar tres numeros aleatorios (tabla 2.2) que corresponden uno a cada uno de los camiones, de la gráfica se obtendrá el primer remplazo de cada camión, para los posteriores remplazos se repite el ciclo, hasta que con algun remplazo se llega a los 36 meses que coresponden a 3 años. Para facilitar calculos se construye la siguiente tabla:

REMPLASO	Y_{1n}	MESES	Y_{2n}	MESES	Y_{3n}	MESES
1	0.13	8	0.76	16	0.47	12
2	0.22	10	0.61	14	0.93	20
3	0.87	18	0.87	18	0.40	12

OBSERVACIONES:

Y_{1n} = números aleatorios correspondientes al camión No. 1.

Y_{2n} = números aleatorios correspondientes al camión No. 2.

Y_{3n} = números aleatorios correspondientes al camión No. 3.

RESULTADO:

El camión No. 1 tiene 3 remplazos, el camión No. 2 tiene 2 remplazos y el camión No. 3 tiene 2 remplazos.

∴ Se tendrán en total 7 remplazos.

Problemas propuestos.

1. Generar números aleatorios partiendo del número 1639 con el método del cuadrado medio.

2. Generar números aleatorios partiendo del número 381 con el metodo del cuadrado medio.

3. Generar números aleatorios partiendo del numero 17859 con el metodo del cuadrado medio.

4. Generar números aleatorios con el método congruencial multiplicativo, con los siguientes datos; a=12, m=16, X_o=6 y comprobar si cumple con los requisitos minimos.

5. Generar números aleatorios con el método congruencial multiplicativo, con los siguientes datos; a=6, m=16, X_o=11 y comprobar si cumple con los requisitos minimos.

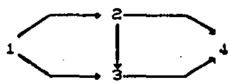
6. Generar números aleatorios con el método congruencial multiplicativo, con los siguientes datos; a=18, m=35, X_o=25 y comprobar si cumple con los requisitos minimos.

7. Generar números aleatorios con el método congruencial multiplicativo mixto, con los siguientes datos; a=12, m=16, X_o=6, c=4 y comprobar si cumple con los requisitos minimos.

8. Generar números aleatorios con el método congruencial multiplicativo mixto, con los siguientes datos; a=5, m=18, X_O=11, c=8 y comprobar si cumple con los requisitos minimos.

9. Generar numeros aleatorios con el metodo congruencial multiplicativo mixto, con los siguientes datos, a=18, m=85, X_o=25, c=17 y comprobar si cumple con los requisitos minimos.

10. Considere que para la terminación de un proyecto se tiene que realizar 5 actividades como se muestra en el siguiente diagrama de flechas.



En este diagrama las flechas representan las actividades, los nodos representan la terminación de una ó más actividades y el inicio de las subsecuentes actividades.

Las duraciones de las actividades estan distribuidas aleatoriamente y son estadisticamente independientes. Las posibles duraciones y su probabilidad asociada se dan en la siguiente tabla

Actividad	Duración (dias)	Probabilidad
1-2	2 3 4	1/3 1/3 1/3
1-3	4 5	1/2 1/2
2-3	1 2	1/2 1/2
2-4	2 3	1/2 1/2
3-4	2	1

Suponga que se tienen 6 dias para entregar el proyecto ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto sea completado a tiempo?

Una empresa de alquiler de maquinaria para construcción encuentra que la distribución de la vida util de sus camiones de volteo se describe según la siguiente tabla:

Meses hasta remplazo	2	4	6	8	10	16	18	20	24
Probabilidad	0.05	0.10	0.15	0.20	0.20	0.10	0.10	0.05	0.05

Si la compañia mantiene una flotilla de 12 camiones, estimar por medio de la simulación el número de remplazos que se haran en un periodo de 6 años.

TABLA 4.1 *(Distribución normal).*[1]

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9161	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9978	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

[1] Copiado de Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, Nueva Jersey, del libro *Probability and Statistic for Engineers,* de I. Miller y J. E. Freund, 1965

TABLA 4.2 *(Distribución ji-cuadrada).*[2]

ν \ α	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500
1	.044	.022	.040	.004	.016	.102	.455
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.341
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.340
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299	12.340
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.165	13.339
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.036	14.339
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.912	15.338
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	12.792	16.338
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	13.675	17.338
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	14.562	18.338
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	15.452	19.337
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	16.344	20.337
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	17.240	21.337
23	9.260	10.196	11.688	13.091	14.848	18.137	22.337
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	19.037	22.337
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	19.939	24.337
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	20.843	25.336
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	21.749	26.336
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	22.657	27.336
29	13.121	14.256	1[illegible].047	17.708	19.768	23.567	28.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	24.478	29.336
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.660	39.335
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	42.942	49.335
60	35.535	37.485	40.482	43.188	46.459	52.294	59.335
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	61.698	69.334
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	71.145	79.334
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	80.625	89.334
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	90.133	99.334

[2]*Biometrika tablas for statisticians*, Volumen 1, de Biometrika trustees. 1962.

V. CONCLUSIONES.

La investigación de sistemas es un proceso que se ha dado desde hace muchos años, en el cual, mediante el método científico un grupo interdisciplinario de personas analizan los problemas relacionados con el control de sistemas. Con la ayuda de las computadoras, que han sido la herrramienta mas potente del desarrollo de los estudios, se pueden analizar todas las posibles alternativas generadas dentro de un problema de investigación de sistemas, lo cual permite llegar a una solucion o a un análisis del problema que puede considerarse como óptimo en algunos casos.

Si se tiene un mayor numero de alternativas de solución para un mismo problema, se podra tener un sistema que tenga una coordinación de los multiples elementos o componentes que interactuan en el sistema y ademas, un mayor control en su comportamiento, pues se tendrá una supervisión adecuada al sistema en estudio, y cuando este puesto en practica se podrá ir modificando y adecuando a las necesidades del usuario. Si se llega a tener un comportamiento del sistema como el anterior se tendrá entonces un sistema que se apega a la realidad.

Es importante mencionar que la comunicacion entre el ingeniero de sistemas y el usuario del sistema real debe ser muy amplio, como se mencionó anteriormente, ningún ingeniero es experto en todas las areas por lo que sera necesario que el usuario del sistema ayude con su experiencia para el desarrollo del modelo que servira para el estudio de este.

En el proceso de análisis de un sistema el ingeniero tiene que evaluar los diferentes componentes del sistema, para lo cual se obtiene una muestra, que deberá representar, apegandose al comportamiento del sistema, la esencia de éste. De los diferentes tipos de muestreo que han sido presentados en el segundo capítulo, no se puede decir que alguno de estos sea el mejor. El resultado del estudio que se haga de un sistema dependerá del comportamiento de éste y de los antecedentes que se tengande sistemas similares.por lo que la experiencia del ingeniero para tomar las decisiones es un factor que influye notablemente para la selección del tipo de muestreo que se emplea para el problema planteado.

Para hacer un tipo de prueba "apriori" se podrá tener en mente que existe un rango de resultados para cada tipo de sistema. Como se menciona en el segundo capitulo, se puede dividir el espacio muestral y solo considerar el espacio en el cual se encuentra el rango de variación de los resultados; es o dependerá de la experiencia adquirida del ingeniero y el criterio que se tega en base a otros sistemas que se puedan considerar similares.

De los métodos descritos en éste trabajo para el análisis de sistemas se pueden destacar dos tipos. uno el método matemático y el otro por medio de la simulación. En los modelos matemáticos se tiene que describir el sistema mediante fórmulas explicitas. En la simulacion se carece de fórmulas y simplemente se imita el comportamiento del sistema.

En los procesos de análisis se presentan modelos que representan un sistema en el cual intervienen un gran número de componentes con influencias aleatorias, por lo que la representación de esos modelos se hace muy compleja. Si se presenta éste caso, es recomendable hacer un estudio por medio de la simulación, en donde, se pueden estudiar por separado cada uno de los componentes.

Lo anterior representa una ventaja para aumentar la comunicación que se tiene con las personas que representan al usuario y con el mismo usuario que tiene la necesidad de un estudio de éste tipo, como puede ser el gerente de una empresa constructora que no conoce ampliamente del área de investigación de sistemas y con la simulación podra comprender mejor el análisis que se le presenta.

La razón por la cual se aplica un estudio de simulación no es precisamente la descrita en el parrafo anterior. la razón principal es la capacidad de éste método para ocuparse de fenomenos complicados y dinamicos.

Una limitante para éste método de simulación es que la solución que se obtiene para el problema, no siempre es la óptima y los métodos matemáticos llegan a una solución en la cual el modelo se acerca a la solución óptima en el tiempo de operación y la economía del sistema.

En estos dos métodos y en general en la investigación de sistemas, la esencia del sistema es la representación mediante un modelo, el cual deberá de apegarse lo mejor posible al comportamiento real del sistema.

En cuanto al futuro de la investigaqción de sistemas en este país se puede decir que se espera un mayor auge. Existen muchos sistemas que se hallan trabajando con una estructura inadecuada, la cual se tendrá que corregir y se espera que sea en un corto tiempo.

VI. BIBLIOGRAFIA.

Capitulos

- Ackoff Russell L. y Sasieni Maurice W.
  Fundamentos de Investigación de Operaciones
  Editorial Limusa-Wiley S.A. I,II

- Benjamin Jack y Cornell Allin
  Probabilidad y Estadística en Ingeniería Civil
  Editorial McGraw-Hill. II

- Budnick Franch, Mojena Richard y Vollman Thomas
  Principles of Operation Research for Management
  Editorial Richard D. Irmin, Inc. I

- Cardenas Miguel Angel
  La Ingenieria de Sistemas
  Filosofia y Tecnicas
  Editorial Limusa S.A. I

- Chorafas D. N.
System and Simulation
Editorial Academic Press. IV

- De la Garza Campos Francisco
Apuntes de la materia de Ingeniería de Sistemas II. I-IV
Facultad de Ingeniería, UNAM.

- Hillier Federick S. y Lieberman Gerald J.
Introducción a la Investigación de Operaciones
Editorial McGraw-Hill. I-IV

- McMillan Claude y Gonzalez Richard
Analisis de Sistemas
Editorial Trillas. III,IV

- Parzon E.
Stochastic Processes
Editorial Holden-Day, Inc. III

- Taha Hamdy
Investigación de Operaciones
Editorial Servicios y Representaciones de Ingenieria. I-IV

- Thierauf Robert J. y Grosse Richard A.
Toma de Decisiones por medio de la Investigación
de Operaciones
Editorial Limusa. I,III,IV

- Sasieni M., Yaspan A. y Friedman L.
Introducción a la Investigación de Operaciones
Editorial Limusa. I-IV

- Shannon Robert E.
System and Simulation
Editorial Prentice-Hall. Inc. IV

- Walpole Ronald E. y Meyers Raymound
Probabilidad y Estadística para Ingenieros
Editorial Interamericana S.A. de C.V. II

- Wiley John
Desicion Making Through Operation Research
Editorial John Wiley and sons, Inc. I,III,IV