

24/43



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA

PROPOSICION DE PRACTICAS SOBRE
MOVIMIENTO EN UNA DIRECCION.
(TESIS)

ANA LAURA IBARRA MERCADO

INGENIERO QUIMICO

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1988
EXAMENES PROFESIONALES
FAC. DE QUIMICA





UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

Introducción.	1
Capítulo I	
Fundamentos Teóricos.	7
Capítulo II	
Desarrollo Experimental.	34
Movimiento Rectilíneo Uniforme.	36
Movimiento Uniformemente Acelerado.	41
Capítulo III	
Tratamiento de Datos.	48
Movimiento Rectilíneo Uniforme.	52
Movimiento Uniformemente Acelerado.	62
Capítulo IV	
Pruebas de Confiabilidad.	81
Movimiento Rectilíneo Uniforme.	82
Movimiento Uniformemente Acelerado.	106
Conclusiones.	128
Recomendaciones.	130
Apéndice A	
Bases de la Técnica Fotográfica.	132
Apéndice B	
Método Opcional para el Tratamiento de Datos.	141
Apéndice C	
Análisis de Regresión lineal y Correlación.	149
Apéndice D	
Series Aritméticas de Gauss.	155
Bibliografía.	160

I N T R O D U C C I O N

A través de nueve años de práctica docente en el Colegio de Ciencias y Humanidades impartiendo clases en la materia de Física y basándome en la teoría psicogenética de Jean Piaget, es como surgió el presente trabajo.

Piaget investigó como se pasaba de un nivel de menor conocimiento a un nivel de mayor conocimiento; él considera cuatro etapas del desarrollo (Piaget, 1981, pag. 11-225), que son:

- | | |
|--------------------------|---|
| 1.- Senso-Motriz | Estadio de los reflejos y primeros hábitos motores. |
| 2.- Pre-operatoria | Estadio de la inteligencia intuitiva. |
| 3.- Operatoria | Estadio de un sistema lógico del pensamiento. |
| 4.- Operaciones Formales | Estadio en el cual el individuo es capaz de formular hipótesis y abstraer |

Piaget establece que la formación de las estructuras del conocimiento se va formando mediante la interacción del sujeto con el objeto de conocimiento, esto es: El conocimiento de ir aumentando el grado de complejidad dentro del proceso de aprendizaje.

Los alumnos a quienes va dirigido el presente trabajo se

encuentran en la etapa operativa, por lo que el proceso de aprendizaje se logra pasando de lo concreto hacia lo abstracto mediante la interacción del sujeto con el objeto de conocimiento en forma gradual.

He encontrado en general que:

- El alumno tiene una posición pasiva dentro del proceso enseñanza-aprendizaje, provocando con esto la aparición de barreras en la formación de la estructura del conocimiento.

- El maestro tiene una estructura compleja en su pensamiento, permitiéndole el manejo de los conceptos de la ciencia con gran fluidez, dando por vistos o entendidos una serie de pasos que dan la conformación de la estructura del pensamiento formal; esto causa que el alumno no entienda dicho conocimiento; provocándole aversión a la materia.

- El estudiante por no comprender la secuencia lógica del desarrollo e la formalización de un concepto lo memoriza, no estructurándolo en su pensamiento, haciéndolo un conocimiento temporal que en el futuro olvidará e no lo relacionará con otros conocimientos formando alumnos dependientes.

- Las prácticas que se desarrollan trabajan dentro de los límites de precisión aceptable, pero ante la inexperiencia de los estudiantes o el desconocimiento del fenómeno, hacen que los experimentos con cierto grado de error se vean aumentados en proporciones que no les dejan una clara idea sobre el fenómeno o les produce una cierta incertidumbre en cuanto al manejo experimental.

- Existen experiencias que ayudan a la conformación y asimilación de estructuras más complejas y más abstractas del pensamiento, como es el trabajo experimental; es por eso que la finalidad de este trabajo es proponer un método para llevar a cabo prácticas en una dimensión en los movimientos rectilíneos uniforme y uniformemente acelerado, desde el punto de vista de la cinemática para el manual de laboratorio de Física de la Facultad de Química.

La técnica estroboscópica que aquí se propone no fué obtenida de una bibliografía en particular, ni tiene la pretensión de ser innovadora en cuanto a ésta, sino la intención de vincular al alumno con una participación más activa dentro de los experimentos propuestos y no solamente de espectador, guiándolo a una búsqueda y no a una comprobación de las leyes físicas.

Las ventajas de la fotografía estroboscópica o también llamada fotografía de exposición múltiple son:

- Puede emplearse cualquier cámara que tenga velocidad de bulbo, con lo cual se mantiene abierto el obturador de la cámara durante todo el experimento (Keiners, 1976, pag. 732).

- Es posible emplear lámparas estroboscópicas de las que se usan para fiestas, aún cuando su rango de centelleo es bajo y su graduación de intervalos de centelleo es nula.

- Se toman diferentes instantes del fenómeno por estudiar sobre una sola fotografía, quedando la secuencia del movimiento en una sola exposición; con lo cual literalmente se "congela" la acción.

4

- La combinación del estroboscopio con la cámara Pelaroid permite obtener casi instantáneamente fotografías de un suceso y los resultados ser chequeados rápidamente, además de ser usadas con facilidad por los estudiantes en el laboratorio.

Un inconveniente en la utilización de la técnica estroboscópica es que en la captación de imágenes de objetos con trayectorias cruzadas, se pierde la secuencia de los objetos en el momento que las trayectorias se cruzan; pero si es un sólo objeto en movimiento y es en una dimensión, este inconveniente desaparece.

No se puede dejar de mencionar en este trabajo al precursor de la evolución de la Física, Galileo Galilei (1564 - 1642); puesto que fué el primero que analizó detenidamente ciertos fenómenos, que aplicó íntegramente el método experimental, que empleó las funciones matemáticas en las ciencias y que publicó sus investigaciones; es por esto que se le conoce como "el padre de la Física".

Fué en su obra "Diálogos sobre dos nuevas ciencias" en donde inició el período de la experimentación, y por primera vez una ley física, en particular en cinemática (el movimiento uniformemente acelerado), se escribe matemáticamente.

Galileo se convenció que el movimiento gravitacionalmente gobernado sobre un plano inclinado era uniformemente acelerado, rechazando con esto las ideas Aristotélicas; por tanto, para probar la idea experimentalmente, hizo su plano con un tablón de madera de unas 12 varas (aproximadamente 6 metros) de longitud.

tud; sobre un borde formó un canal recto, liso y pulido; colocó esta tabla en una posición levemente inclinada e hizo rodar a lo largo del canal, una pelota de bronce, dura, lisa y muy redonda. Con este dispositivo midió los desplazamientos de la pelota.

Para la medición del tiempo, empleó un gran recipiente con agua, colocado en una posición elevada, al fondo le adaptó un tubo de pequeño diámetro del que escapaba un delgado chorro de agua, que recogía en un vase durante cada descenso de la pelota, el agua así reunida se pesaba en una balanza muy exacta - después de cada descenso.

Así llegó a la conclusión de que el cuerpo se movía con aceleración constante, es decir, que el movimiento de caída era uniformemente acelerado, esto es, $d \propto t^2$. Por lo tanto Galileo concluyó, que el movimiento de caída vertical también se producía con aceleración constante y además afirmó en virtud de sus descubrimientos anteriores, que esta aceleración sería la misma para todos los cuerpos (livianos o pesados).

C A P I T U L O I

FUNDAMENTOS TEORICOS

"La mecánica clásica es una estructura teórica que trata de dar explicación al movimiento que se observa en los cuerpos materiales, sólidos, líquidos y gases, como consecuencia de las fuerzas que se aplican sobre ellos. Para construir esta teoría, Newton tuvo que dar definiciones precisas sobre el significado de cada uno de los conceptos que usó en ella. Así, tuvo que definir con toda claridad y exactitud que se entiende por 'fuerzas', 'masas', y 'movimiento'. Sin una buena descripción del significado de estos términos no hubiera sido posible de hablar de mecánica, sin correr el riesgo de que cada persona interpretara a su manera las cosas" (Viniestra, 1986, pag.44)

Esta cita nos permite iniciar el desarrollo del primer capítulo, en donde se definirán algunos conceptos básicos que sirve de fundamento teórico a los resultados obtenidos en el trabajo experimental. El claro entendimiento de ellos ayudará a la mejor interpretación de las conclusiones.

En ningún momento se pretende hacer un análisis exhaustivo de ellos, sólo se hará una caracterización general de los conceptos básicos más importantes.

- Partícula
- Movimiento
- Sistema de referencia
- Tiempo
- Trayectoria
- Distancia

- Desplazamiento
- Cinemática
- Velocidad
- Movimiento rectilíneo uniforme
- Velocidad promedio
- Velocidad media
- Velocidad instantánea
- Aceleración
- Movimiento uniformemente acelerado
- Aceleración promedio
- Aceleración media
- Aceleración instantánea
- Caída libre
- Tiro vertical

Partícula.

Para describir el movimiento de los cuerpos es muy útil - el concepto de partícula; considerándose una partícula como un cuerpo de dimensiones muy pequeñas, incluso se le puede considerar como un punto en el que se supone concentrada toda la masa del cuerpo y de esta manera se evita el hacer consideraciones de rotación y/o vibración.

Movimiento.

Se dice que un cuerpo se encuentra en movimiento cuando cambia su posición de un punto a otro con respecto a otro punto fijo que sirve de referencia y con respecto al tiempo. Como ejemplo podemos pensar en el movimiento de embarcaciones y aviones durante la mayor parte de sus viajes, en el de gotas

de agua que caen, en el de electrones durante su ir y venir de algunas reacciones químicas, etc.

Sistema de referencia.

Se define como un sistema fijo que, como los ejes de las coordenadas, permiten determinar la posición de puntos u otros elementos variables, o bien, como la referencia arbitraria que se toma para observar si hay o no cambios de posición de un objeto. El fijar un sistema de referencia al iniciar un estudio, sobre todo en física, es de gran importancia ya que podemos decir que si una persona se encuentra en un salón de clases y permanece sentada durante un cierto tiempo, ésta no se ha movido; pero, cuando fijamos nuestro sistema de referencia fuera de la tierra, sí habrá movimiento, puesto que la tierra gira alrededor del sol y éste a su vez se mueve junto con la galaxia a través del universo.

Tiempo.

Es un profundo problema filosófico que tiene que ser analizado muy cuidadosamente en la física, pues la teoría de la relatividad demuestra que nuestra idea de tiempo no es tan simple como uno pueda pensaren primera instancia; sin embargo, para lo que nos interesa la podemos definir como la medida de duración entre dos sucesos. En el sistema internacional de unidades, la unidad fundamental del tiempo es el segundo, se basa en la vibración de radiación absorbida por átomos de cesio (Valero, 1964, pag. 218).

Trayectoria.

Cuando un cuerpo se encuentra en movimiento con respecto a un observador, va ocupando una serie de posiciones en el esp

espacio conforme transcurre el tiempo. La trayectoria es, entonces, el conjunto de puntos que ocupa un cuerpo en el espacio conforme transcurre el tiempo.

Distancia.

En el concepto anterior se hace referencia sobre la línea que describe un cuerpo móvil en el espacio, cuando se mide esa línea sin tomar en cuenta su dirección ni sentido, solamente su longitud, se dice que se mide su distancia, luego entonces distancia, es la longitud del camino que hay entre dos puntos. En el sistema internacional, la unidad de longitud es el metro (m), se define en 1960 como la longitud igual a 1 650 763.73 longitudes de onda en un vacío correspondiente a la transición entre los niveles $2p_{10}$ y $5d_5$ del átomo de Kriptón 86 (Valero, 1984, pag. 148).

Desplazamiento.

Representación vectorial de la distancia. Cuando una partícula se mueve de un punto P_1 a un punto P_2 de su trayectoria y en la medición de su cambio de posición solamente se toma en cuenta el punto inicial y el punto final de su variación, se está midiendo su desplazamiento (\vec{s}), el cual es una magnitud vectorial, pues toma en cuenta dirección, sentido y magnitud, sin importar el camino que haya seguido para llegar desde su punto inicial hasta el punto final. El cálculo de desplazamiento puede ser parcial o parciales y no solamente total, aplicándose los mismos fundamentos en éstos que para el desplazamiento total.

En la figura I-1, se muestran dos puntos sobre la trayectoria de una partícula, especificados por los vectores de posi

ción S_1 y S_2 , y se describe el "desplazamiento" o "cambio de posición" por ΔS (delta S). Por consiguiente, tenemos que el desplazamiento está definido por:

$$\Delta \vec{S} \equiv \vec{S}_2 - \vec{S}_1 \quad (I-1)$$

La expresión anterior indica sustracción de magnitudes vectoriales y puede ser transformada, transponiendo el término negativo, lo que nos dá:

$$\vec{S}_2 = \vec{S}_1 + \Delta \vec{S} \quad (I-2)$$

lo cual conduce a la útil imagen física de que el desplazamiento es la cantidad que añadimos a \vec{S}_1 con el fin de obtener \vec{S}_2 .

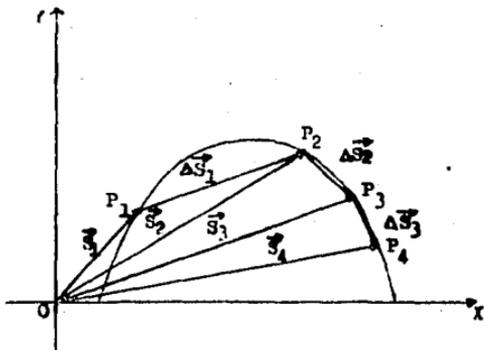


Figura I-1. Descripción de los desplazamientos $\Delta \vec{S}_1$ definido por $\vec{S}_2 - \vec{S}_1$, $\Delta \vec{S}_2 = \vec{S}_3 - \vec{S}_2$
 $\vee \Delta \vec{S}_3 = \vec{S}_4 - \vec{S}_3$

Cinemática.

Es la rama de la mecánica que describe el movimiento de un cuerpo conforme transcurre el tiempo sin importar la causa o los motivos que lo originan, en su estudio solamente necesita unidades de longitud y de tiempo.

Velocidad.

En párrafos posteriores se dará una explicación más detallada del concepto velocidad, por ahora se dirá que la rapidez con que se desplaza una partícula al transcurrir el tiempo es lo que se conoce en física como velocidad (\vec{v}). Si al graficar los diferentes desplazamientos con sus respectivos tiempos - (fig. L-2), se obtiene una línea recta inclinada en un gráfico S Vs. t, la velocidad es la pendiente de dicha gráfica o sea, la constante de proporcionalidad que resulta de dividir la distancia entre el tiempo.

$$m = \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} \quad (L-3)$$

Donde: m es la pendiente de la recta.
 $\Delta \vec{S}$ es el cambio de desplazamiento de la partícula.
 Δt es la variación del tiempo entre el cambio de desplazamiento de la partícula.

$$\Delta \vec{S} = \vec{S}_2 - \vec{S}_1$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Entonces m será:

$$m = \frac{\vec{S}_2 - \vec{S}_1}{t_2 - t_1} \quad (L-4)$$

si \vec{s}_1 y t_1 parten del origen, tenemos que $\vec{s}_1 = 0$ y $t_1 = 0$ de donde:

$$m = \frac{\vec{s}_2 - 0}{t_2 - 0} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \quad (L-5)$$

Como el significado físico de m es la velocidad tenemos:

$$\text{por lo que: } \vec{v} = \frac{\vec{s}}{t} \quad (L-6)$$

que es nuestro modelo matemático para la velocidad, cuando se mantiene constante durante todo el movimiento.

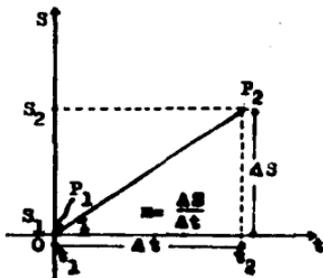


Figura L-2. Gráfica de la velocidad en el movimiento rectilíneo uniforme.

El análisis dimensional de la velocidad es:

$$[v] = \frac{L}{T}$$

Donde: L es longitud

T es tiempo

sus unidades en el S.I. son: metro(m), para la longitud y segundo(s) para el tiempo; quedando las unidades de velocidad como la relación de metros entre segundo. Se puede tener también combinación de éstas unidades como lo muestra la tabla L-1.

Magnitud

Sistema	Longitud	Tiempo	Velocidad
M.K.S. (S.I.)	(m) metro	(s) segundo	m/s
C.G.S.	(cm) centímetro	(s) segundo	cm/s
Inglés	(ft) pie	(s) segundo	ft/s

Tabla L-1

Movimiento Rectilíneo Uniforme.

En el punto anterior se definió a la velocidad en base a que no se presentaba ningún cambio de ésta durante todo el movimiento, figura L-3, o sea que la velocidad se mantenía constante, cuando esto sucede se tiene un caso particular de la cinemática, que es el movimiento uniforme.

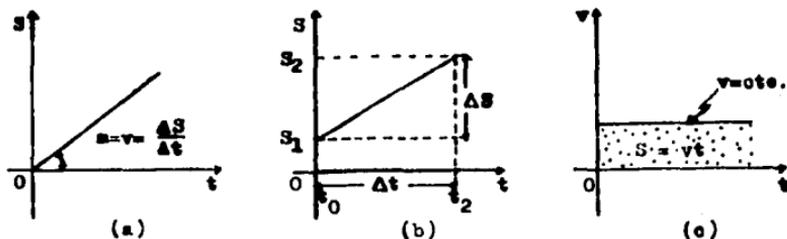


Figura L-3. a) Movimiento partiendo del origen, b) Con s_1 diferente de cero, c) Con velocidad constante.

Si el movimiento se realiza en una dirección fija ó a lo largo de una línea recta y la velocidad se mantiene constante durante todo el tiempo que dura el movimiento, se le denomina como Movimiento Monotónico ó más comunmente conocido como Movimiento Rectilíneo Uniforme (L.R.U.). En este movimiento se permite una inversión en la dirección, entonces la velocidad será negativa y ésto significa que su desplazamiento está disminuyendo.

Velocidad Promedio.

Se hace necesaria la velocidad promedio, como una idea del movimiento, cuando la velocidad de éste no es constante, figura L-4.

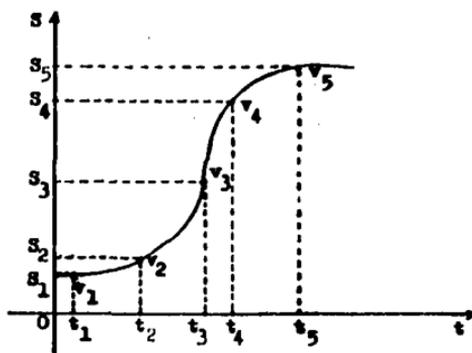


Figura L-4. Trayectoria de una partícula con velocidad variable.

La velocidad promedio (\vec{v}_p), es la razón entre la suma de las velocidades parciales con respecto al número de velocidades consideradas.

$$\vec{v}_p = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \dots + \vec{v}_n}{n} \quad (L-7)$$

De donde:
$$\vec{v}_p = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{v}_i}{n} \quad (\text{I-8})$$

Velocidad media.

Otra fórmula que nos da una información acerca del movimiento, es la velocidad media (\vec{v}_m), se refiere simplemente al desplazamiento entre dos puntos (pudiendo ser el punto inicial y el punto final), dividida por el intervalo de tiempo transcurrido, es decir:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} \quad (\text{I-9})$$

En la figura I-5 se representa la velocidad media entre el punto P y el punto Q, siendo igual a la pendiente de la cuerda PQ que une los dos puntos de la curva, correspondientes al tiempo t_1 y al desplazamiento \vec{S}_1 , y al tiempo t_2 con el desplazamiento \vec{S}_2 . La dirección de la velocidad media es la misma que para $\Delta \vec{S}$, puesto que son los únicos vectores en la ecuación.

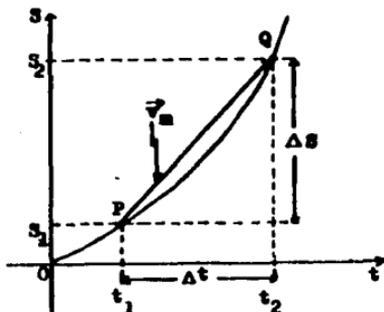


Figura I-5. La velocidad media entre t_1 y t_2 es igual a la pendiente de la cuerda PQ.

La velocidad media entre dos puntos de su trayectoria coincide con la velocidad promedio de esos mismos puntos, solamente en el movimiento uniformemente acelerado, como lo hizo ver Galileo.

Velocidad Instantánea.

Se denomina velocidad instantánea a la velocidad de la partícula en un cierto instante ó en determinado punto de su trayectoria.

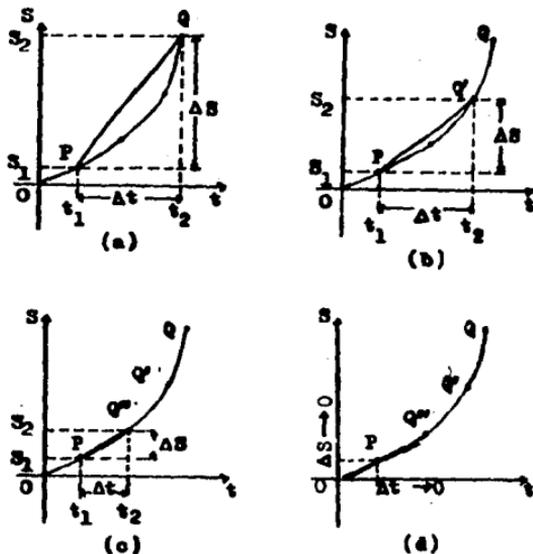


Figura 1-6. Muestran el movimiento de una partícula cuando Δt tiende a cero.

Supóngase que se desea encontrar la velocidad instantánea de la partícula en el punto P de la figura L-5; para encontrarla se necesita aproximar el punto Q al punto P, de manera que sea tan cercano al punto Q al P que la diferencia de puntos se haga muy pequeña tal que tienda a cero.

A medida que el punto Q se aproxima a P en la figura L-6 resulta que en el límite la pendiente de la cuerda PQ es igual a la pendiente de la tangente a la curva en el punto P, por lo que una definición de la velocidad instantánea es: la pendiente de la tangente en una gráfica S Vs. t en el instante deseado.

Empleando la notación del cálculo diferencial, el valor límite de:

$$\frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} \text{ cuando } \Delta t \text{ tiende a cero, se escribe } \frac{d\vec{S}}{dt}$$

y se denomina derivada del desplazamiento con respecto al tiempo.

Entonces si \vec{v} representa la velocidad instantánea se tiene:

$$\vec{v} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{S}_2 - \vec{S}_1}{t_2 - t_1} \quad (\text{L-10})$$

$$\text{Reduciendo} \quad \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt} \quad (\text{L-11})$$

$$\text{De donde:} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \dot{\vec{S}} \quad (\text{L-12})$$

Aceleración.

Al igual que cuando se definió velocidad, se indicó que en párrafos posteriores se daría una explicación más detallada de ésta, aquí también se hará lo mismo en cuanto a la aceleración.

Cuando la velocidad aumenta en valor absoluto con el tiempo, se dice que el movimiento es "acelerado" (\vec{a}). Se define - por tanto a la aceleración como la rapidez de cambio de la velocidad en el tiempo, siendo positiva si el valor absoluto de la velocidad aumenta y negativa ó sea "retardada" si el valor absoluto de la velocidad disminuye con el tiempo.

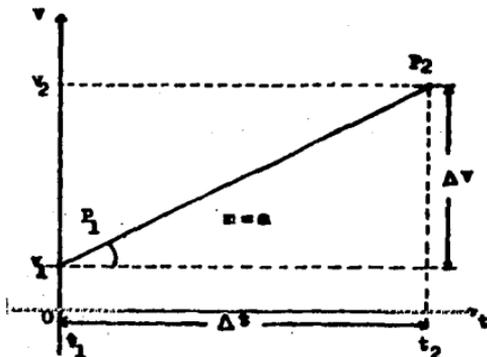


Figura I-7. Gráfica velocidad - tiempo para un movimiento uniformemente variable.

Si al graficar las diferentes velocidades con sus respectivos tiempos (Fig. I-7), se obtiene una línea recta inclinada en un gráfico v Vs. t , la aceleración es la pendiente de dicha gráfica o sea la constante de proporcionalidad que resulta de dividir la velocidad entre el tiempo.

$$m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (I-13)$$

Donde: $\frac{m}{\Delta \vec{v}}$ es la pendiente de la recta
 $\Delta \vec{v}$ es el cambio de velocidad de la partícula.
 Δt es el tiempo entre el cual transcurre v .

$$\text{Si } \Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad \text{y} \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

entonces la pendiente queda:

$$m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \quad (\text{L-14})$$

Cuando t_1 es igual a cero y \vec{v}_1 es diferente de cero, la pendiente es:

$$m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t} \quad (\text{L-15})$$

como el significado físico de ésta pendiente es la aceleración, tenemos:

$$m = \vec{a} \quad \text{y por tanto} \quad \vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t} \quad (\text{L-16})$$

que es nuestro modelo matemático para la aceleración cuando se mantiene ésta constante durante todo el movimiento.

La expresión anterior puede ser modificada despejando \vec{v}_2 , quedando:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{a} t \quad (\text{L-17})$$

lo cual conduce a la útil imagen física de que la aceleración es la cantidad que añadimos durante un cierto tiempo a la velocidad inicial, con el fin de obtener una velocidad final.

La aceleración se relaciona también con el desplazamiento combinando la ecuación L-6 con L-14, cuando la velocidad inicial y el tiempo inicial tienen valores igual a cero, quedando

$$\vec{a} = \frac{\vec{s}}{t} \quad (\text{L-18})$$

$$\text{y reduciendo} \quad \vec{a} = \frac{\vec{s}}{t^2} \quad (\text{L-19})$$

El análisis dimensional de la aceleración es:

$$[a] = \frac{L}{T^2}$$

Donde: L es longitud
T es tiempo

Sus unidades en el S.I. son: Para la longitud el metro (m) y para el tiempo el segundo (s); quedando las unidades de aceleración como la relación de metros entre segundos al cuadrado. Se puede tener también combinación de otras unidades, como lo muestra la tabla L-2.

Magnitud

Sistema	Longitud	Tiempo	Aceleración
M.K.S. (S.I.)	(m) metro	(s) segundo	m/s ²
C.G.S.	(cm) centímetro	(s) segundo	cm/s ²
Inglés	(ft) pie	(s) segundo	ft/s ²

Tabla L-2

Movimiento Uniformemente Acelerado.

Cuando se mantiene constante la aceleración durante todo el tiempo que dure el movimiento, se tiene un movimiento uniforme; si el movimiento se realiza en una dirección fija ó a lo largo de una línea recta y la aceleración se conserva constante durante todo el tiempo que dure el movimiento, figura L-8, se le conoce como movimiento uniformemente acelerado (M.U.A.)

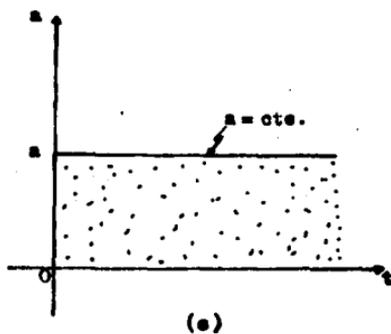
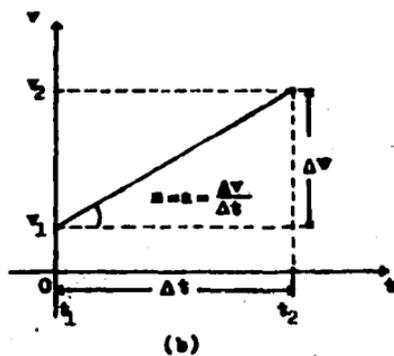
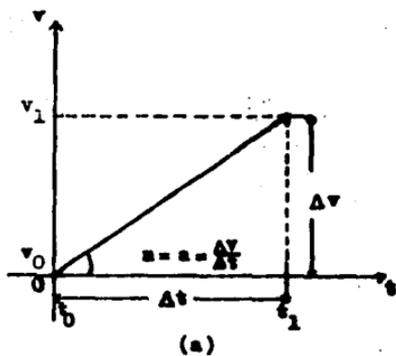


Figura L-8. Gráficas velocidad - tiempo para el movimiento uniformemente acelerado. a) $v_1 = 0$, b) $v_1 \neq 0$, c) Gráfica aceleración - tiempo para cuando $a = \text{constante}$.

En este movimiento se permite una inversión en la dirección, entonces la aceleración será negativa, esto significa - que su aceleración esta disminuyendo o sea se retarda.

Aceleración Promedio.

Se hace necesaria la aceleración promedio (\vec{a}_p), como una idea muy general del movimiento, cuando la aceleración de éste no es constante, figura L-9.

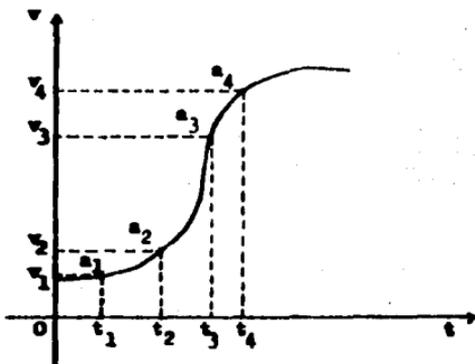


Figura L-9. Gráfica velocidad - tiempo, muestra la trayectoria de una partícula con aceleración variable.

La aceleración promedio es la razón entre la suma de las aceleraciones parciales con respecto al número de aceleraciones consideradas.

$$\vec{a}_p = \frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_n}{n} \quad (\text{L-20})$$

De donde:
$$\vec{a}_p = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{a}_i}{n} \quad (\text{L-21})$$

Aceleración Media.

Otra fórmula que nos da información del movimiento uniformemente acelerado, es la aceleración media (\vec{a}_m), se define como la razón del cambio de velocidad en un intervalo dividido por el tiempo transcurrido.

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (I-22)$$

En la figura I-10 se representa la aceleración media entre el punto P y el punto Q, siendo igual a la pendiente de la cuerda PQ que une los dos puntos de la curva correspondientes al tiempo t_1 y a la velocidad \vec{v}_1 , así como al t_2 y a la velocidad \vec{v}_2 . La dirección de la aceleración media es la misma que para $\Delta \vec{v}$, puesto que son los únicos vectores en la ecuación.

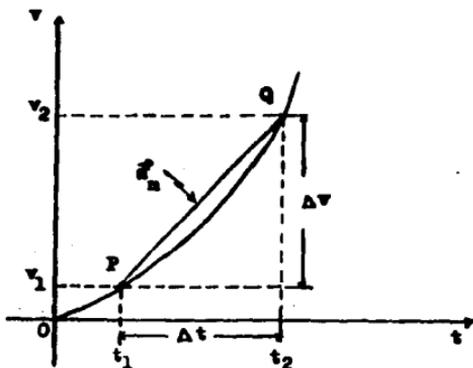


Figura I-10. Gráfica velocidad - tiempo. La aceleración media entre t_1 y t_2 es igual a la pendiente de la cuerda PQ.

Aceleración Instantánea.

Es la rapidez de variación de la velocidad instantánea.

Si se grafica la velocidad como función del tiempo y se desea encontrar la aceleración instantánea (\bar{a}) de una partícula en el punto P (figura L-11), se necesita aproximar el punto Q al punto P, de manera que sea tan cercano al punto P al Q que la diferencia de tiempos se haga muy pequeña tal que tienda a cero.

A medida que el punto Q se aproxima a P, el Δt tiende a cero, tal que en el límite la pendiente de la cuerda PQ es igual a la pendiente de la tangente a la curva en el punto P.

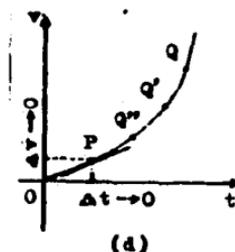
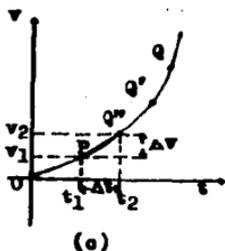
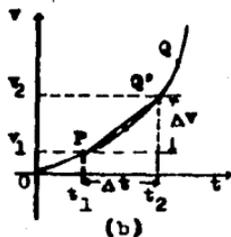
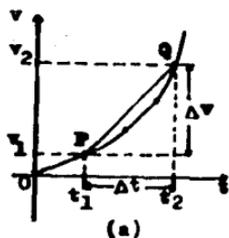


Figura L-11. Gráficas velocidad - tiempo cuando Δt tiende a cero.

Empleando la notación de cálculo diferencial, el valor límite de:

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \text{cuando } \Delta t \text{ tiende a cero se escribe } \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ y}$$

se denomina derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

Si \vec{a} representa la aceleración instantánea se tiene:

$$\vec{a} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (\text{L-23})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \quad (\text{L-24})$$

ó bien si sustituimos la ecuación L-12 en la ecuación L-24 se obtiene:

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} \quad (\text{L-25})$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{s}} \quad (\text{L-26})$$

Otra expresión útil para la aceleración es la que se obtiene al multiplicar y dividir el segundo miembro de la ecuación L-25 por $\int x$, obteniéndose:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{dx}{dx} \quad (\text{L-27})$$

que puede escribirse como:

$$\vec{a} = \frac{dx}{dt} \frac{d\vec{v}}{dx} \quad (\text{L-28})$$

pero $dx/dt = \vec{v}$, por lo que:

$$\vec{a} = v \frac{d\vec{v}}{dx} \quad (\text{L-29})$$

La dirección y el sentido de la aceleración instantánea son los que pertenecen a la posición límite del vector cambio de velocidad $\Delta \vec{v}$.

Caída Libre y Tiro Vertical.

El estudio del movimiento con aceleración constante desarrollado anteriormente, tiene una aplicación inmediata en la descripción del movimiento de caída de un cuerpo sobre la tierra, figura L-12(a), llamado Caída Libre y del movimiento de Tiro Vertical, figura L-12(b).

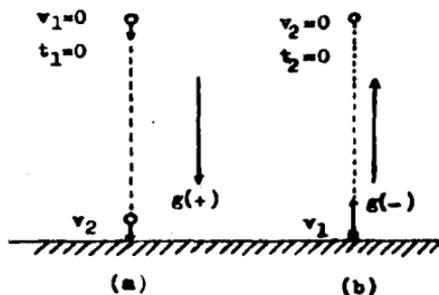


Figura L-12. a) Cuando un cuerpo cae su aceleración se considera positiva. b) En el movimiento de subida, la aceleración se considera negativa.

En virtud de la forma esférica de la tierra, las verticales de los distintos puntos de ella no son paralelas sino concurrentes, sin embargo, tratándose de puntos no muy alejados entre sí pueden considerarse paralelas.

No habiendo resistencia en el aire, se encuentra que todos los cuerpos, independientemente de su tamaño, peso o composición, caen o suben con la misma aceleración en el mismo punto de la superficie de la tierra. Si el desplazamiento no es demasiado grande la aceleración se mantendrá constante durante todo el movimiento, a ésta aceleración se le llama Aceleración de la Gravedad y se representa por la letra "g"; en la Ciudad de México la magnitud de la aceleración de la gravedad es de 9.78 m/s^2 y al nivel del mar es de 9.81 m/s^2 . En la tabla L-3 se presentan diferentes valores de "g" para diversas altitudes a la latitud de 45° y con respecto a la variación de la latitud al nivel del mar.

(a)		(b)	
Altitud (m)	g, (m/s^2)	Latitud	g, (m/s^2)
0	9.806	0°	9.78039
1 000	9.803	10°	9.78195
4 000	9.794	20°	9.78641
8 000	9.782	30°	9.79329
16 000	9.757	40°	9.80171
32 000	9.710	50°	9.81071
100 000	9.600	60°	9.81918
500 000	8.530	70°	9.82608
1 000 000 ¹	7.410	80°	9.83059
380 000 000 ²	0.00271	90°	9.83217

¹ Altura de un satélite típico (= 1 000 Km)

² Radio de la órbita de la luna (= 386 000 Km)

Tabla L-3. a) Altitudes tomadas a la latitud 45° ,
b) Respecto a la variación de la latitud al nivel del mar.

En un marco de referencia rigurosamente fijo a la tierra, el eje "Y" se tomará como positivo verticalmente hacia arriba, luego entonces la aceleración "g" debida a la gravedad será un vector que apunta verticalmente hacia abajo ó sea en dirección negativa del eje "Y", figura L-12 (a), tomándose como positiva "g" ya que acelera a la partícula. En caso que la partícula suba verticalmente, figura L-12 (b), "g" se tomará negativa pues el movimiento de la partícula será retardado.

Las ecuaciones que describen el movimiento de una partícula la son para:

1) Caída Libre.

Partiendo de las siguientes condiciones:

- 1.- El movimiento es de una partícula sin vibración ni rotación.
- 2.- Cae en el vacío o sea se desprecia la resistencia del aire.
- 3.- Como el movimiento es uniformemente acelerado, la velocidad promedio será igual a la velocidad media.
- 4.- Se iguala: $\vec{a} = \vec{g}$, $\vec{S} = \vec{h}$ y $\vec{v}_2 = \vec{v}_p = \vec{v}$
- 5.- Cae desde el origen de nuestro sistema de referencia con velocidad inicial nula en el tiempo inicial también nulo.

A partir de lo anterior se puede calcular:

- Altura en función del tiempo
- Tiempo empleado para llegar a un punto de su trayectoria, conociendo "g" y "h".
- Velocidad en cualquier punto de su trayectoria en función de la altura.
- Velocidad en cualquier punto de su trayectoria en función del tiempo.

Entonces, sustituyendo la ecuación L-7 en la ecuación L-6, se tiene:

$$\frac{h}{t} = \frac{v_2 + v_1}{2}$$

despejando h y tomando en cuenta las consideraciones anteriores queda:

$$h = \frac{v t}{2} \quad (\text{L-30})$$

despejando v de la ecuación L-16 se tiene:

$$v = a t \quad (\text{L-31})$$

sustituyendo la ecuación L-31 en la ecuación L-30 queda:

$$h = \frac{g t t}{2}$$

y reduciendo,

$$h = \frac{g t^2}{2} \quad (\text{L-32})$$

Obteniendo así la ecuación que relaciona la altura en función del tiempo; en caso de que se desconozca el tiempo, pero se conozca altura y gravedad, se despeja t de la ecuación L-32.

$$t = \sqrt{\frac{2 h}{g}} \quad (\text{L-33})$$

ecuación que sirve para determinar el tiempo empleado por la partícula para desplazarse a un punto de su trayectoria.

Al despejar t de la ecuación L-17 se tiene:

$$t = \frac{v_2 - v_1}{a}$$

sustituyendo t en la ecuación $S = \frac{v_2 + v_1}{2} t$ y tomando en cuenta las condiciones estimuladas resulta:

$$h = \frac{v}{2} \left(\frac{v}{g} \right) = \frac{v^2}{2g} \quad (\text{L-34})$$

despejando v , la ecuación anterior toma la siguiente forma:

$$v = \sqrt{2 g h} \quad (I-35)$$

modelo matemático que relaciona la velocidad en cualquier punto de su trayectoria en función de la altura.

Para obtener la ecuación que relacione la velocidad de cualquier punto de su trayectoria en función del tiempo, solamente se despeja v_2 de la ecuación I-17:

$$v_2 = v_1 + a t$$

tomando en cuenta las condiciones establecidas, queda finalmente:

$$v = g t \quad (I-36)$$

ii) Tiro Vertical.

Se parte de las mismas consideraciones que en caída libre, exceptuando el quinto punto, estimando ahora que el movimiento se inicia en el origen del sistema de referencia en el tiempo cero con velocidad inicial diferente de cero y al llegar al punto más alto de su trayectoria, la velocidad final es cero. En el caso de la gravedad se considerará con signo negativo por ir en sentido contrario al movimiento. La igualdad de velocidades considerada en el cuarto punto, ahora será $v_1 = v_0 = v$.

Las relaciones siguientes son las ecuaciones aplicables a tiro vertical para el cálculo de: altura en función del tiempo

$$h = \frac{g t^2}{2} ,$$

tiempo empleado en llegar a un punto de su trayectoria en función de la altura:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

velocidad en cualquier punto de su trayectoria en función de la altura:

$$v = \sqrt{2gh} \quad y$$

velocidad en cualquier punto de su trayectoria en función del tiempo:

$$v = g t$$

C A P I T U L O I I

DESARROLLO EXPERIMENTAL

Como ya se hizo mención en la introducción, el desarrollo experimental que se propone aquí no fué obtenido de una bibliografía en particular, sino que surgió y se estructuró a través de aproximadamente nueve años de mi práctica docente en el Colegio de Ciencias y Humanidades, impartiendo las materias de Física I, II y III, así como por el hecho de no contar con una práctica lo suficientemente clara para los alumnos sobre movimiento en una dirección, pues las prácticas tradicionales están diseñadas como una herramienta de comprobación del modelo matemático. El desarrollo propuesto, tiene la intención de vincular al alumno con una participación más activa dentro del experimento y no solamente de espectador, guiándolo a una búsqueda y no a una comprobación de las leyes físicas.

La técnica estroboscópica usada en la práctica, no tiene la pretensión de ser innovadora en cuanto a ésta, sino el acercar al alumno con la realidad y hacerlo avanzar dentro del análisis de datos experimentales.

Los objetivos que se persiguen académicamente son los siguientes.

Que el alumno:

- 1.- Empleando la parte de Cinemática aprenda a interpretar gráficas experimentales, ya que el fenómeno del movimiento está muy cercano al alumno.
- 2.- A partir de datos experimentales obtenga modelos matemáticos que relacionen las variables del experimento.

- 3.- **Contraste los modelos con los datos experimentales, haciendo una evaluación de la diferencia entre el valor del modelo y el valor experimental.**
- 4.- **Sea consciente de la utilidad como herramienta de algunos conceptos matemáticos dentro de la experimentación.**
- 5.- **Se motive al trabajo en equipo y de ser factible a nivel de grupo.**

Se establecerán los siguientes conceptos que deben tener los alumnos para el manejo de este desarrollo experimental:

- **Partícula**
- **Movimiento**
- **Sistema de referencia**
- **Tiempo**
- **Trayectoria**
- **Distancia**
- **Desplazamiento**
- **Velocidad**
- **Vector**
- **Coordenadas**
- **Pendiente**
- **Intersección**
- **Velocidad media y su relación con el tiempo medio**
- **Variable dependiente**
- **Variable Independiente**
- **Solución de un sistema de ecuaciones simultáneas**
- **Aceleración**
- **Ecuación general de primero y de segundo grado**

Movimiento Rectilíneo Uniforme

Dejarle al alumno una investigación sobre vectores y movimiento rectilíneo uniforme.

Plantearle los siguientes objetivos:

- Se identificarán las variables que intervienen en el estudio del movimiento, diferenciándolas en variables dependientes y variables independientes.

- Se encontrarán las relaciones matemáticas que describan el movimiento rectilíneo uniforme.

- Se dará un significado físico a la pendiente que resulte de una gráfica desplazamiento - tiempo.

- Se contrastarán los valores experimentales con los valores teóricos.

- Se hará una evaluación de la diferencia entre los valores teóricos y los experimentales.

Plantearle la siguiente hipótesis:

El movimiento rectilíneo uniforme es el movimiento más simple que existe en la naturaleza, pues durante toda la trayectoria del móvil, éste recorre distancias iguales en tiempos iguales, manteniendo su velocidad constante al transcurrir el tiempo.

Material:

- Papel mate negro
- Lámpara estroboscópica
- Cámara fotográfica

- Película fotográfica
- Riel con rampa
- Flexómetro
- Balín
- Revelador y fijador de películas fotográficas
- Papel manila
- Proyector de transparencias
- Papel milimétrico

Procedimientos:

Poner el papel negro como fondo de la trayectoria que va a seguir el balín, de preferencia papel terciopelo negro, tratando en lo posible que no refleje la luz; como referencia se hace una marca de un metro sobre ese fondo.

Nivelar el riel moviendo los tornillos en que descansa, hasta que el balín se mantenga en reposo en cualquier sitio sobre él. En seguida, se le asigna a cada uno de los equipos una altura diferente de la rampa, para soltar el balín, empezando con una elevación de un centímetro aumentándola hasta llegar a doce centímetros de altitud.

Con el propósito de tener cubierto todo el espacio de la trayectoria, se sitúa la cámara a una distancia de 2 a 2.5 metros, poniendo la lámpara estroboscópica lo más cercana posible al riel, evitando que esta interfiera en la toma de la fotografía, ver figura II-1. Cargar la cámara con la película y dejarla lista para el disparo en posición de bulbo, para la elección de abertura del diafragma consultar el apéndice A, tabla A-1.

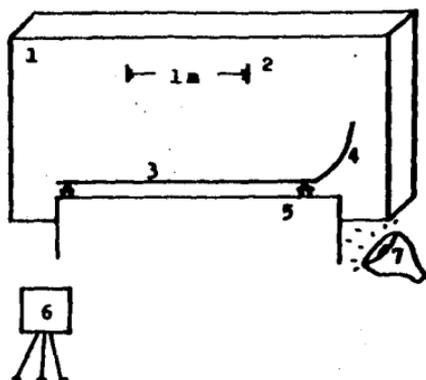


Figura II-1. Montaje del experimento. 1.) Pantalla, 2.) Marca de referencia, 3.) Riel, 4.) Rampa, 5.) Mesa de trabajo, 6.) Cámara fotográfica, 7.) Lámpara estroboscópica.

Encender la lámpara estroboscópica y disparar la cámara fotográfica, manteniendo oprimido el disparador para que permanezca abierto durante todo el movimiento e inmediatamente - después soltar el balón a la altura de rampa que fué asignado; se busca que la luz estroboscópica siga la trayectoria del objeto para lograr una mayor nitidez de la fotografía. Al momento de llegar el balón al extremo del riel, cerrar el obturador, se recomienda tomar dos o tres fotografías del movimiento con la finalidad de emplear la mejor toma.

Posteriormente se revela y fija el rollo (ver apéndice A), en seguida se recortan y enmarcan las fotografías. Se proyecta la fotografía para la obtención de datos, buscando que sea lo más cercano a la escala real, para lo cual se amplifica la proyección hasta que las marcas de referencia del fondo negro sean de un metro.

Colocar el papel manila como pantalla y marcar en éste los puntos que quedaron impresos del balón en la fotografía durante el movimiento, con lo cual se tendrá algo así como una fotografía al tamaño natural del balón en su trayectoria.

Obtención de Datos.

Bajo la supervisión del profesor, se deja al alumno que establezca su sistema de referencia. Se toman los datos de desplazamiento del balón y de los tiempos en llevar a cabo esos desplazamientos; a primera vista, el alumno notará que si el tiempo de centelleo no se alteró sino que permaneció constante, los desplazamientos entre cada destello también se mantuvieron constantes y en la fotografía aparecerán las imágenes del balón siempre, a una misma distancia de separación, cosa que verificará al realizar su medición.

Tratamiento de Datos.

Con los datos de desplazamiento "S" y tiempo "ue" (con la finalidad de manejar el tiempo con números enteros, se emplearán unidades estroboscópicas "ue", las cuales representan el tiempo entre destello y destello), se procede al cálculo de velocidad media relacionándola con el tiempo medio, se tabulan todos los valores; ya tabulados, se elaboran las gráficas desplazamiento - tiempo (S Vs. t) y velocidad media - tiempo medio (v_m Vs. t_m).

En función del tipo de gráfica obtenida, se deduce el modelo matemático, utilizando puntos sobre la trayectoria. Debido a la precisión del método los parámetros A y B, pueden describir la trayectoria del objeto con rango de error pequeño. El parámetro A es conocido como la pendiente de la recta y el parámetro B es la ordenada al origen o sea la intersección con el eje de las ordenadas.

Se recomienda que los parámetros A y B se calculen a partir de dos pares de puntos de la gráfica, preferentemente los más alejados, con estos puntos (S_1, t_1) y (S_2, t_2) , se forma el par de ecuaciones simultáneas o dos ecuaciones con dos incógnitas,

$$S_1 = At_1 + B$$

$$S_2 = At_2 + B$$

ecuaciones que se pueden resolver por cualquiera de los métodos conocidos; con ello tenemos los valores de A y B para poder obtener el modelo teórico del movimiento.

Con el modelo teórico se procede a calcular los valores de desplazamientos teóricos (S_t) , para contrastarlos con los valores experimentales y observar la precisión del modelo. Tomando como base el modelo teórico, ya que viene a ser la tendencia del movimiento, se comparan los valores teóricos con los experimentales, haciendo una evaluación de la diferencia entre ellos.

Análisis de Resultados.

Se hace un análisis de la ecuación obtenida, se establecen los significados físicos de los parámetros A y B, así como la desigualdad que existe entre las gráficas de los diferentes

equipos. Por último se hace un análisis de la diferencia entre los valores teóricos y los valores experimentales, para ver el grado de error que existe y con estos evaluar si el resultado experimental fué aceptable.

Conclusión.

Solicitar al alumno que concluya, en base a lo que sucedió en el experimento y lo que él se había planteado al inicio de la práctica; se sugiere que esto lo haga el alumno como trabajo en casa, para tratar de obligarlo a reflexionar sobre el experimento y si acaso es posible se recomienda que en la sesión siguiente, se puntualice lo más importante del experimento.

Movimiento Uniformemente Acelerado.

Los procedimientos del movimiento uniformemente acelerado son semejantes al movimiento anterior.

Se dejará al alumno una investigación acerca del movimiento uniformemente acelerado, haciendo énfasis sobre los siguientes conceptos: Velocidad media, velocidad promedio, velocidad instantánea, aceleración media, aceleración promedio y aceleración instantánea.

Establecer los siguientes objetivos:

- Encontrar las relaciones matemáticas que nos describan el comportamiento del movimiento uniformemente acelerado.
- Darle un significado físico a la pendiente que resulte de una gráfica velocidad - tiempo.
- Contrastar los valores experimentales con los valores teóricos.

- Hacer una evaluación de la diferencia entre los valores teóricos y los experimentales.

Plantearle la siguiente hipótesis:

El movimiento uniformemente acelerado es un movimiento - que modifica constantemente su velocidad durante todo el tiempo que dure su trayectoria, pero mantiene constante su aceleración al transcurrir el tiempo.

Material:

- Papel mate negro
- Lámpara estroboscópica
- Cámara fotográfica
- Película fotográfica
- Riel
- Flexómetro
- Balín
- Transportador
- Revelador y fijador de películas fotográficas
- Papel manila
- Proyector de transparencias
- Papel milimétrico

Procedimiento.

Poner el papel negro como fondo de la trayectoria que va a seguir el balín, de preferencia papel terciopelo negro, tratando en lo posible de que no refleje la luz; como referencia se hace una marca de un metro sobre ese fondo.

Se le asigna a cada uno de los equipos un ángulo diferente de inclinación del riel, comenzando con un ángulo de 10 grados y en lo posible tratando de llegar a los 50 grados.

Ya asignados los ángulos se procede a la nivelación del riel, moviendo los tornillos en que descansa éste, hasta llegar al ángulo que se les fijó.

Con el propósito de tener cubierto todo el espacio de la trayectoria, se sitúa la cámara a una distancia de dos a dos y medio metros, colocando la lámpara estroboscópica lo más cercano posible al riel, evitando que ésta interfiriera en la toma de la fotografía, ver figura II-2. Cargar la cámara con la película y dejarla lista para el disparo en posición de bulbo; para la elección de abertura del diafragma consultar el apéndice A, tabla A-1.

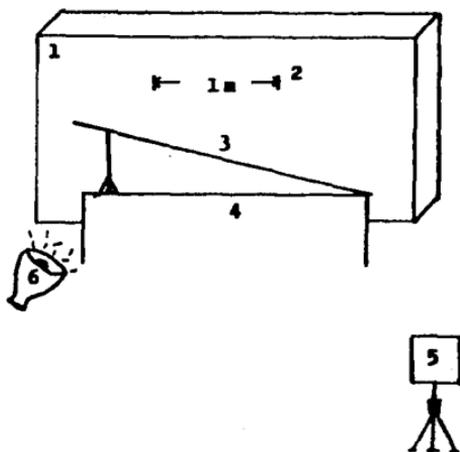


Figura II-2. Montaje del experimento. 1.) Pantalla, 2.) Marca de referencia, 3.) Riel, 4.) Mesa de trabajo, 5.) Cámara fotográfica, 6.) Lámpara estroboscópica.

Encender la lámpara estroboscópica y disparar la cámara - fotográfica, manteniendo oprimido el disparador para que permanezca abierto durante todo el movimiento e inmediatamente después soltar el balón en el extremo más alto del riel; se busca que la luz estroboscópica siga la trayectoria del balón para lograr una mayor nitidez de la fotografía. Al momento de - llegar el balón al otro extremo del riel, cerrar el obturador; se recomienda tomar dos o tres fotografías del movimiento con la finalidad de manipular la mejor toma.

Posteriormente se revela y fija el rollo (ver apéndice A), en seguida se recortan y enmarcan las fotografías. Se proyecta la fotografía para la obtención de datos, buscando que sea lo más cercano a la escala real, para lo cual se amplifica la proyección hasta que las marcas de referencia del fondo negro sean de un metro.

Colocar el papel manila como pantalla y marcar en éste - los puntos que quedaron impresos del balón en la fotografía durante el movimiento, con lo cual se tendrá algo así como una - fotografía al tamaño natural del balón en su trayectoria.

Obtención de Datos.

Bajo la supervisión del profesor se deja al alumno que establezca su sistema de referencia. Se toman los datos de desplazamiento del balón y el tiempo en llevarlos a cabo. A primera vista, el alumno notará que si el tiempo de centelleo no se alteró sino que permaneció constante, los desplazamientos entre cada destello no son constantes y en la fotografía aparecerán las imágenes del balón cada vez más separadas entre destello y destello.

Tratamiento de Datos.

Con los datos de desplazamiento "S" y tiempo "t" (como ya se hizo patente en el tratamiento de datos del movimiento rectilíneo uniforme, se emplearán unidades estroboscópicas "ue" - con la finalidad de manejar el tiempo con números enteros), se procede al cálculo de velocidades medias relacionándolas con los tiempos medios y la aceleración media relacionándola con el tiempo medio; tabular todos los valores y elaborar las gráficas desplazamiento - tiempo (S Vs. t), velocidad media - tiempo medio (v_m Vs. t_m) y aceleración media - tiempo medio (a_m Vs. t_m).

Teniendo las gráficas, se deducen los modelos matemáticos en función del tipo de gráfica obtenida, utilizando puntos sobre la trayectoria. Debido a la precisión del método los parámetros A, B y C, pueden describir la trayectoria del objeto - con rango de error pequeño. El parámetro A representa a la pendiente de la recta, el parámetro B es la ordenada al origen y C es un número constante de ajuste. Con la finalidad de obtener con mayor facilidad los parámetros de la ecuación, se recomienda utilizar puntos sobre la trayectoria para establecer las ecuaciones, que se pueden resolver por cualquiera de los métodos que se faciliten más.

Con el modelo teórico se procede a calcular los valores de desplazamientos teóricos (S_t), para contrastarlos con los valores experimentales y observar la precisión del modelo. Tomando como base el modelo teórico, ya que viene a ser la tendencia del movimiento, se comparan los valores teóricos con los experimentales, haciendo una evaluación de la diferencia entre ellos.

Análisis de Resultados.

Se hace un análisis de las ecuaciones obtenidas, estableciendo los significados físicos de los parámetros A, B y C, así como la desigualdad que existe entre las gráficas de los diferentes equipos. Por último se procede a efectuar un análisis de la diferencia entre los valores teóricos y los valores experimentales para ver el rango de desviación que tienen y con éstos evaluar si el experimento se encuentra dentro de los límites de incertidumbre aceptables.

Conclusión.

Solicitar del alumno que concluya en base a lo que sucedió en el experimento y lo que él había planteado al inicio de la práctica, se sugiere que esto lo haga el alumno como trabajo en su casa, para tratar de obligarlo a reflexionar sobre el experimento, si acaso es posible se recomienda que en sesión siguiente, se puntualice lo más importante del experimento.

C A P I T U L O I I I

TRATAMIENTO DE DATOS.

Para llegar a conocer como se relacionan las variables de un experimento, es necesario efectuar el manejo matemático de los datos que se obtienen. En este capítulo se muestra detalladamente la forma propuesta del tratamiento de datos y se dan algunos permeneres que deben cuidarse en dicho tratamiento, - con la finalidad de llegar a la obtención de los modelos matemáticos y poder hacer el cálculo de la tendencia teórica del movimiento, contrastándola posteriormente con la tendencia experimental; teniendo con éste los elementos suficientes para - poder apreciar que un modelo no es más que la representación de la realidad y que se aproxima a ella, pero no la iguala, pues por lo general no se cuenta con el control óptimo de las variables, teniendo por tanto, limitaciones.

Para la obtención de datos del experimento, se proyecta - la imagen obtenida por fotografía estroboscópica, sobre un - pliego de papel manila, la cual previamente se ha revelado y enmarcado. Con el propósito de tener la trayectoria del balón lo más aproximada a la real, al proyectar la imagen sobre el papel manila, se verifica que coincida la distancia de un metro entre las marcas de referencia, (Fig. III-1).

Hecho lo anterior, se procede a fijar el sistema de referencia más conveniente, el cual quedará determinado por un punto de la trayectoria del balón, (Fig. III-2).

Se obtienen las coordenadas de cada uno de los puntos para la consecución de datos experimentales, (Fig. III-2).

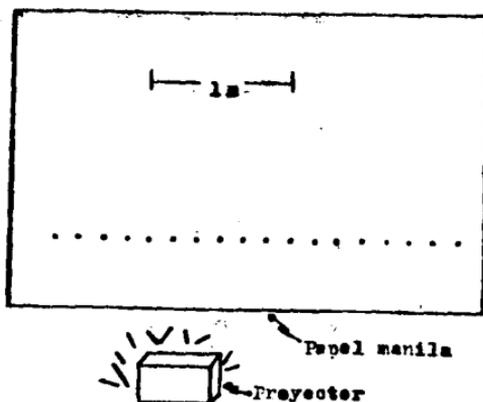


Figura III-1. Proyección de la imagen obtenida por fotografía estroboscópica sobre papel manila.

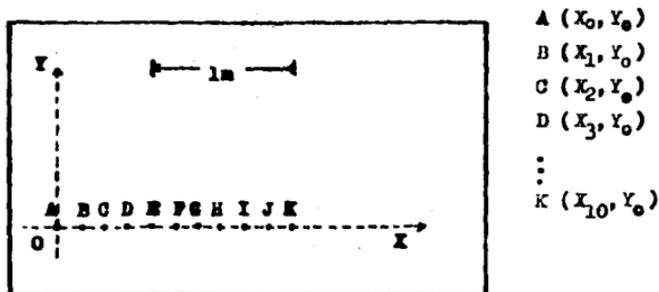


Figura III-2. Colocación del sistema de referencia y determinación de coordenadas.

Tiempo (μe)	Desplazamiento (cm)
0	0
1	3.6
2	7.2
3	10.7
4	14.3
5	17.6
6	21.2
7	24.8
8	28.1
9	31.5
10	35.2
11	38.5
12	41.9
13	45.5
14	48.8
15	51.9
16	55.5
17	59.1
18	62.2
18	65.6
20	69.0
21	72.1
22	75.5
23	78.7

Tabla III-A. Los datos de esta tabla fueron tomados del experimento número 3, correspondientes al tiro del balón, desde una altura de 5 cm de la rampa con respecto al nivel del riel.

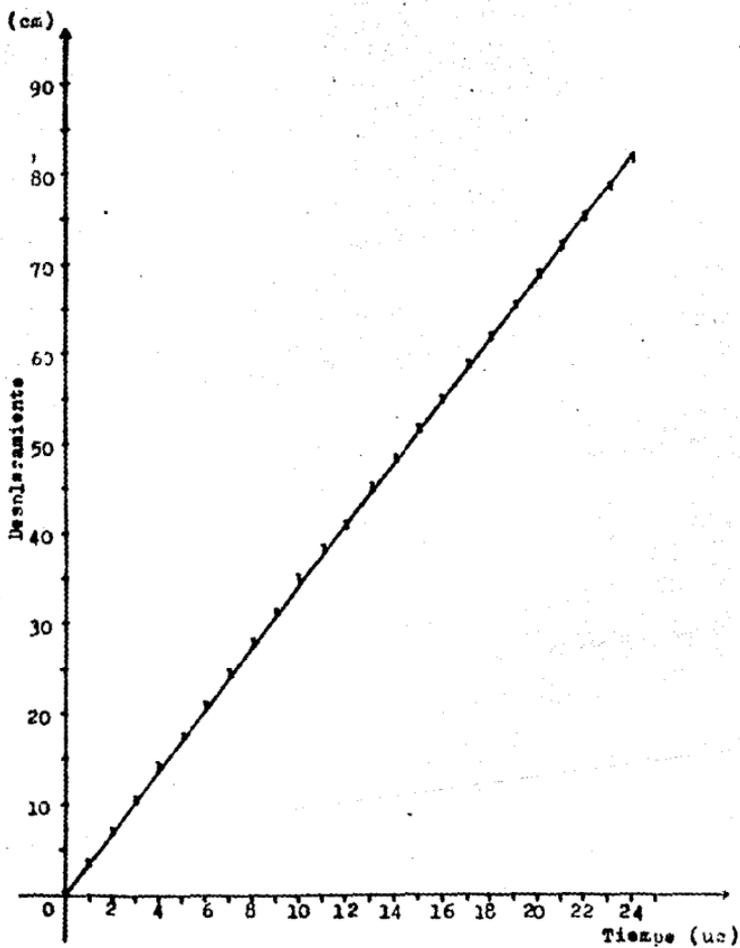


Figura III-3. Desplazamiento - Tiempo.

Como puede verse, las coordenadas de "Y" en todos los puntos del experimento tienen un valor de cero, con ésto confirmamos que el movimiento del balón se llevó a cabo en una sola dimensión.

La otra variable es el tiempo, se recomienda utilizar como medida arbitraria de tiempo el lapso entre los destellos de la lámpara estroboscópica "ue"; tomando el tiempo en esta forma se tendrán valores enteros de éste y la obtención de los parámetros de los modelos matemáticos se hará en forma más sencilla.

Tratamiento de Datos del Movimiento Rectilíneo Uniforme.

Después de obtenerse los datos de desplazamiento y tiempo se procede a tabularlos, como se muestra en la tabla III-A.

El siguiente punto consiste en graficar la variable dependiente (desplazamiento), contra la variable independiente -- (tiempo), lo cual se ilustra en la figura III-3.

Cálculo de Velocidades Medias.

Se obtienen las velocidades medias a partir de los datos de las coordenadas cartesianas y mediante la aplicación de la fórmula I-9, como una aproximación a la velocidad instantánea.

Tomando los dos primeros datos de la tabla III-A, tenemos:

Tiempo	Desplazamiento
t (ue)	X (cm)
0	0
1	3.6

Entonces, la velocidad media entre el punto 1 y el punto 2 es:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_m = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{3.6 \text{ cm} - 0 \text{ cm}}{1 \text{ ue} - 0 \text{ ue}} = \frac{3.6 \text{ cm}}{1 \text{ ue}}$$

$$\vec{v}_m = 3.6 \text{ cm/ue}$$

Esta velocidad media se acerca a la velocidad instantánea del tiempo medio, por lo tanto:

$$\vec{v}_m = 3.6 \text{ cm/ue} \quad t_m = 0.5 \text{ ue}$$

Empleando la siguiente pareja de datos de la tabla III-A se obtiene la subsecuente velocidad media.

Tiempo	Desplazamiento
t (ue)	X (cm)
1	3.6
2	7.2

$$\vec{v}_m = \frac{7.2 \text{ cm} - 3.6 \text{ cm}}{2 \text{ ue} - 1 \text{ ue}} = \frac{3.6 \text{ cm}}{1 \text{ ue}} = 3.6 \text{ cm/ue}$$

$$\vec{v}_m = 3.6 \text{ cm/ue} \quad t_m = 1.5 \text{ ue}$$

* Lapso entre los destellos de la lámpara estroboscópica.

De la misma forma se obtienen los valores de todas las velocidades medias, dando la tabla de datos III-B.

Intervalo de tiempo	Tiempo medio (μ s)	Velocidad media (ca/ μ s)
0 - 1	0.5	3.6
1 - 2	1.5	3.6
2 - 3	2.5	3.5
3 - 4	3.5	3.6
4 - 5	4.5	3.3
5 - 6	5.5	3.6
6 - 7	6.5	3.6
7 - 8	7.5	3.3
8 - 9	8.5	3.4
9 - 10	9.5	3.7
10 - 11	10.5	3.3
11 - 12	11.5	3.4
12 - 13	12.5	3.6
13 - 14	13.5	3.3
14 - 15	14.5	3.1
15 - 16	15.5	3.6
16 - 17	16.5	3.6
17 - 18	17.5	3.1
18 - 19	18.5	3.4
19 - 20	19.5	3.4
20 - 21	20.5	3.1
21 - 22	21.5	3.4
22 - 23	22.5	3.2

Tabla III-B. Velocidades medias con respecto a los intervalos de tiempo.

Con los datos de la tabla III-B se construye la gráfica velocidad media contra tiempo medio, (Fig. III-4).

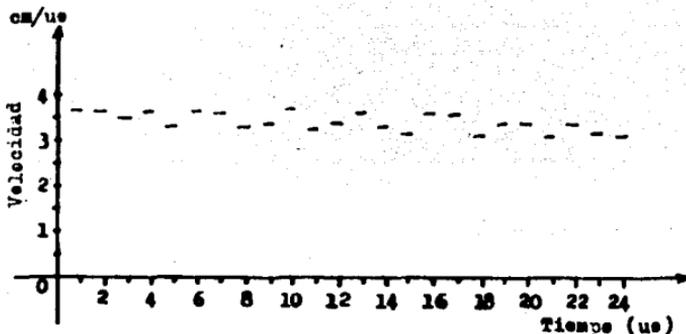


Figura III-4. Velocidad media - tiempo medio.

La disposición de la gráfica de la figura III-3, muestra un movimiento con tendencia a una velocidad constante, confirmando en la gráfica de la figura III-4, por tanto, no se requiere efectuar el análisis de la aceleración.

Determinación del Modelo Matemático.

En la gráfica de la figura III-3 se tiene una línea recta; correspondiente a una ecuación de primer grado:

$$Y = A X + B$$

en donde A y B son los parámetros de la ecuación de primer gra

do, quedando determinados por los datos de la gráfica en la siguiente forma:

A es la pendiente de la recta,

B es la intersección con el eje de las ordenadas.

Se toman dos pares de puntos experimentales que se encuentren sobre la línea recta de la gráfica antes referida, y como ejemplo, se toma el 4^{to}. par de puntos y el 17^{avo}, de la tabla IIL-A, con cuyos valores se construyó la gráfica mencionada.

Tiempo	Desplazamiento
t (ue)	X (cm)
3	10.7
16	55.5

Aplicando la ecuación II-1 para calcular el parámetro A se tiene que:

$$A = \text{pendiente} = m$$

$$\text{y si } m = A = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$\text{entonces } A = \frac{S_{17} - S_4}{t_{17} - t_4} = \frac{55.5 \text{ cm} - 10.7 \text{ cm}}{16 \text{ ue} - 3 \text{ ue}}$$

$$A = 44.8 \text{ cm}/13 \text{ ue}$$

$$A = 3.44 \text{ cm/ue}$$

Como el parámetro B es la intersección con el eje de las ordenadas, al observar la gráfica de la figura III-3, se aprecia que parte del origen, debido a éste;

$$B = 0$$

Por tanto el modelo matemático general queda:

$$Y = (3.44 \text{ cm/us}) X + 0$$

al reemplazar las variables de la ecuación general por las usadas en el experimento, $Y = S$ y $X = t$, se tiene ahora:

$$S = (3.44 \text{ cm/us}) t + 0$$

$$\text{ó bien } S = (3.44 \text{ cm/us}) t$$

Tomando como base el modelo teórico, ya que viene a ser la tendencia del movimiento, se calculan los desplazamientos teóricos (S_T) para contrastarlos con los desplazamientos experimentales (S_E), haciendo una evaluación de la desviación absoluta y del porcentaje de desviación; de ésta manera se establece la precisión del modelo, (tabla III-C).

Examinando los cálculos de la tabla III-C, se puede estimar la precisión del modelo, el cual reporta un porcentaje de desviación promedio de 1.74%. Esta desviación promedio porcentual se determina de la subsecuente manera:

$$\% E_{\text{prom}} = \frac{\sum_{i=1}^n \% E_i}{n} = \frac{41.9}{24}$$

$$\% E_{\text{prom}} = 1.74$$

Tiempo (us)	Desplazamiento experimental S_E (cm)	Desplazamiento teórico S_T (cm)	Desviación absoluta $E_a = S_E - S_T$	Porcentaje de desviación. $\%E = 100E_a/S_T$
0	0	0	0	0
1	3.6	3.44	0.16	4.65
2	7.2	6.88	0.32	4.65
3	10.7	10.32	0.38	3.68
4	14.3	13.76	0.54	3.92
5	17.6	17.20	0.40	2.32
6	21.2	20.64	0.56	2.71
7	24.8	24.08	0.72	2.99
8	28.1	27.52	0.58	2.10
9	31.5	30.96	0.54	1.74
10	35.2	34.40	0.80	2.32
11	38.5	37.84	0.66	1.74
12	41.9	41.28	0.62	1.50
13	45.5	44.72	0.78	1.74
14	48.8	48.16	0.64	1.32
15	51.9	51.10	0.30	0.58
16	55.5	55.04	0.46	0.83
17	59.1	58.48	0.62	1.06
18	62.2	61.92	0.28	0.45
19	65.6	65.36	0.24	0.36
20	69.0	68.80	0.20	0.29
21	72.1	72.24	0.14	0.19
22	75.5	75.68	0.18	0.23
23	78.7	79.12	0.42	0.53
			Σ 10.54	41.90

Tabla III-C. Cálculo de desviaciones en el desplazamiento para el M.U.R.

Para decidir si realmente se puede considerar a la velocidad como una constante, se procederá a evaluar el comportamiento de los datos de la tabla III-B.

El promedio de las velocidades es de 3.42 cm/ue, con éste dato se calcula las desviaciones absolutas de cada una de las velocidades de la tabla antes mencionada, obteniéndose las cifras que se reportan en la tabla III-D.

Intervalo de tiempo	Tiempo medio (ue)	Velocidad v_g (cm/ue)	Velocidad promedio (cm/ue)	Desviación absoluta (cm/ue)
0 - 1	0.5	3.6	3.42	0.18
1 - 2	1.5	3.6	3.42	0.18
2 - 3	2.5	3.5	3.42	0.08
3 - 4	3.5	3.6	3.42	0.18
4 - 5	4.5	3.3	3.42	0.12
5 - 6	5.5	3.6	3.42	0.18
6 - 7	6.5	3.6	3.42	0.18
7 - 8	7.5	3.3	3.42	0.12
8 - 9	8.5	3.4	3.42	0.02
9 - 10	9.5	3.7	3.42	0.28
10 - 11	10.5	3.3	3.42	0.12
11 - 12	11.5	3.4	3.42	0.02
12 - 13	12.5	3.6	3.42	0.18
13 - 14	13.5	3.3	3.42	0.12
14 - 15	14.5	3.1	3.42	0.32
15 - 16	15.5	3.6	3.42	0.18
16 - 17	16.5	3.6	3.42	0.18
17 - 18	17.5	3.1	3.42	0.32
18 - 19	18.5	3.4	3.42	0.02
19 - 20	19.5	3.4	3.42	0.02
20 - 21	20.5	3.1	3.42	0.32
21 - 22	21.5	3.4	3.42	0.02
22 - 23	22.5	3.2	3.42	0.22

Σ 3.56

Tabla III-D. Cálculo de desviaciones absolutas de la velocidad en el M.U.R.

Nota. En la tabla III-D, en la columna correspondiente a la velocidad promedio, ésta se obtiene con la consideración de que en el movimiento rectilíneo uniforme la velocidad es constante. En base a éste, la velocidad teórica (v_T) será igual a la velocidad promedio (v_{prom}), la que se calculó aplicando la fórmula:

$$v_{prom} = \frac{\sum_{i=1}^n v_{Ei}}{n}$$

siendo v_E la velocidad experimental.

Para calcular la desviación absoluta (E_a), se utilizó la ecuación: $E_a = v_E - v_{prom}$

Otra información valiosa que se determina a partir de los datos de la tabla III-D es la desviación absoluta promedio ($E_{a prom}$) y el porcentaje de la desviación (%E), las que se calculan a partir de:

$$E_{a prom} = \frac{\sum_{i=1}^n E_{ai}}{n}$$

$$E_{a prom} = \frac{3.56 \text{ cm}}{23 \text{ ue}} = 0.15 \text{ cm/ue}$$

$$\%E = \frac{E_{a prom}}{v_{prom}} (100)$$

$$\%E = \frac{0.15 \text{ cm/ue}}{3.42 \text{ cm/ue}} (100)$$

$$\%E = 4.38$$

Considerando que los errores se van incrementando al ir operando los datos, se admite la hipótesis de que la velocidad es constante para un movimiento rectilíneo uniforme.

Para la precisión del experimento, se construyen las gráficas de datos experimentales contrastándolas con los modelos matemáticos.

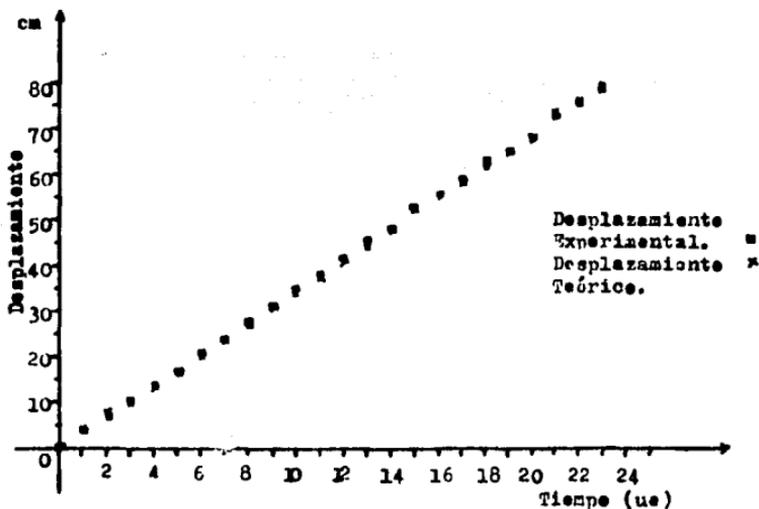


Figura III-5 (a). Contraste del desplazamiento teórico con el desplazamiento experimental en el M.U.R.

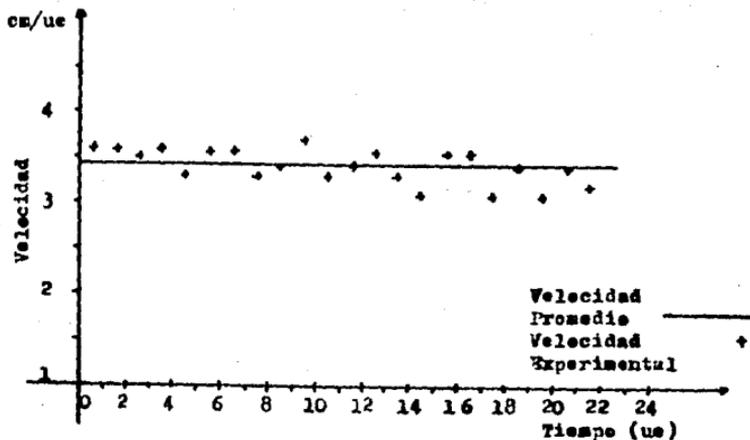


Figura IIL-5 (b). Contraste de la velocidad promedio con la velocidad experimental.

Tratamiento de Datos del Movimiento Uniformemente Acelerado.

Después de obtenerse los datos de desplazamiento y tiempo en la misma forma que se obtuvieron los del tratamiento anterior, o sea, proyectando la imagen sobre papel manila y fijando el sistema de referencia que más convenga (Fig. IIL-6), se procede a tabularlos como se muestra en la tabla IIL-E.

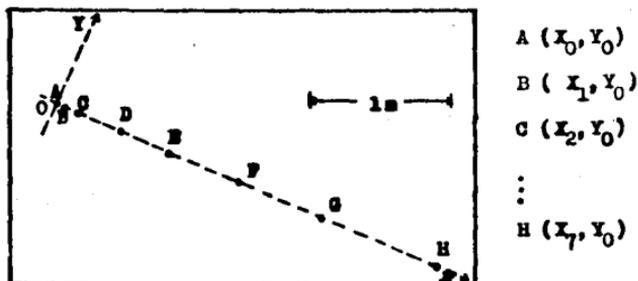


Figura III-6. Colocación del sistema de referencia y determinación de coordenadas.

Tiempo t (us)	Desplazamiento X (cm)
0	0
1	4.5
2	10.6
3	18.0
4	27.0
5	37.3
6	48.7
7	61.6
8	75.7
9	90.8

Tabla III-B. Los datos se tomaron del experimento No. 2 correspondientes al deslizamiento del balón sobre un riel que forma un ángulo de 30° con respecto a la mesa de trabajo.

A continuación se grafica la variable dependiente (desplazamiento), contra la variable independiente (tiempo), figura III-7.

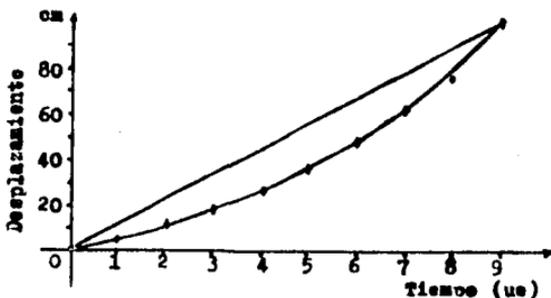


Figura III-7. Desplazamiento - tiempo para el M.U.A.

Modelo Matemático de la Gráfica Desplazamiento - Tiempo

La gráfica que se tiene en la figura III-7, es una curva del tipo parabólico, debiendo ser representada por un Modelo cuadrático de la forma:

$$Y = A X^2 + B X + C$$

Dentro de ésta ecuación se advierten tres parámetros (A, B, C). Para el cálculo de los tres parámetros se requieren 3

ecuaciones; sin embargo, partiendo de los datos de las coordenadas iniciales ($t = 0$ y $S = 0$), se observa que la ordenada al origen, la cual corresponde al parámetro C, es nula, quedando solamente dos parámetros desconocidos (A y B), que a través de un sistema de dos ecuaciones simultáneas se pueden obtener.

Se emplean dos pares de puntos experimentales que se encuentren sobre la trayectoria que describe al movimiento, para establecer el sistema de ecuaciones. Como ejemplo, de la tabla III-B, se toman el 3^{er} y 10^{mo} par de puntos:

Tiempo	Desplazamiento
t (us)	X (cm)
2	10.6
9	90.8

entonces:

$$\text{si } Y = A X^2 + B X + C$$

$$10.6 \text{ cm} = A (2 \text{ us})^2 + B (2 \text{ us}) + 0$$

$$10.6 \text{ cm} = A (4 \text{ us})^2 + B (2 \text{ us}) \quad (1)$$

$$90.8 \text{ cm} = A (9 \text{ us})^2 + B (9 \text{ us}) + 0$$

$$90.8 \text{ cm} = 81A \text{ us}^2 + 9B \text{ us} \quad (2)$$

Siendo (1) y (2) el par de ecuaciones simultáneas con las que se trabajará. Para su resolución se emplea el método que sea más fácil al alumno, aquí se usará el de suma y resta.

Cálculo del Parámetro A.

Se multiplica la ecuación 1 por menos nueve y la ecuación dos por dos, con el fin de igualar una incógnita y poderla eliminar.

$$\begin{aligned} [10.6 \text{ cm} &= 4A (\text{ue})^2 + 2B \text{ ue}] \quad (-9) \\ -95.4 \text{ cm} &= -36A (\text{ue})^2 - 18B \text{ ue} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} [90.8 \text{ cm} &= 81A (\text{ue})^2 + 9B \text{ ue}] \quad (2) \\ 181.6 \text{ cm} &= 162A (\text{ue})^2 + 18B \text{ ue} \end{aligned} \quad (4)$$

sumando las ecuaciones 3 y 4:

$$\begin{aligned} 181.6 \text{ cm} &= 162A (\text{ue})^2 + 18B \text{ ue} \\ -95.4 \text{ cm} &= -36A (\text{ue})^2 - 18B \text{ ue} \\ \hline 86.2 \text{ cm} &= 126A (\text{ue})^2 \end{aligned}$$

despejando A:

$$A = \frac{86.2 \text{ cm}}{126 (\text{ue})^2}$$

$$A = 0.68414 \text{ cm}/(\text{ue})^2$$

Cálculo del Parámetro B

Sustituyendo el valor de A en la ecuación 1, se obtiene:

$$10.6 \text{ cm} = 0.68412 \text{ cm}/(\text{ue})^2(4)(\text{ue})^2 + 2B \text{ ue}$$

$$10.6 \text{ cm} = 2.73648 \text{ cm} + 2B \text{ ue}$$

despejando B:

$$B = \frac{10.6 \text{ cm} - 2.73648 \text{ cm}}{2 \text{ us}}$$

$$B = \frac{7.86352 \text{ cm}}{2 \text{ us}}$$

$$B = 3.93176 \text{ cm/us}$$

Por tanto la ecuación matemática queda:

$$Y = [0.68412 \text{ cm}/(\text{us})^2] X^2 + [3.93176 \text{ cm/us}] X$$

reemplazando las variables de la ecuación general por las usadas en el experimento, $Y = S$ y $X = t$, se llega al modelo matemático siguiente:

$$S = [0.68412 \text{ cm}/(\text{us})^2] t^2 + [3.93176 \text{ cm/us}] t$$

Tomando como base el modelo teórico, se calculan los desplazamientos teóricos (S_T) para su contraste con los desplazamientos experimentales (S_E), haciendo una evaluación de la desviación absoluta y del porcentaje de desviación (tabla III-F), determinando de esta manera la precisión del modelo.

Tiempo (uc)	Desplazamiento experimental S_E (cm)	Desplazamiento teórico S_T (cm)	Desviación absoluta $E_a = S_E - S_T$	Porcentaje de desviación $\%E = 100 E_a / S_T$
0	0	0	0	0
1	4.5	4.62	0.12	2.60
2	10.6	10.60	0.00	0.00
3	18.0	17.95	0.05	0.28
4	27.0	26.67	0.33	1.24
5	37.3	36.76	0.54	1.47
6	48.7	48.22	0.48	1.00
7	61.6	61.04	0.56	0.92
8	75.7	75.24	0.46	0.61
9	90.8	90.80	0.00	0.00
			Σ 2.54	8.12

Tabla III-F. Cálculo de desviaciones en el desplazamiento para el M.U.A.

Examinando los cálculos de la tabla III-F, se puede estimar la precisión del modelo, el cual reporta un porcentaje de desviación promedio de 0.81%. Esta desviación se calcula de la manera siguiente:

$$\% E_{\text{prom}} = \frac{\sum_{i=1}^n \% E_i}{n} \quad (\text{III-1})$$

$$\% E_{\text{prom}} = \frac{8.12}{10}$$

$$\% E_{\text{prom}} = 0.81$$

De lo anterior se advierte que la precisión del modelo matemático obtenido es adecuada.

Modelo Matemático de Velocidad - Tiempo

Para determinar la expresión matemática que relacione la velocidad en función del tiempo es necesario, primero, tener - las velocidades medias experimentales (v_E), las cuales se obtienen de la misma forma que las calculadas en el análisis del movimiento rectilíneo uniforme, dando la tabla III-G.

Intervalo de tiempo	Tiempo medio (us)	Velocidad media (cm/us)
0 - 1	0.5	4.5
1 - 2	1.5	6.1
2 - 3	2.5	7.4
3 - 4	3.5	9.0
4 - 5	4.5	10.3
5 - 6	5.5	11.4
6 - 7	6.5	12.9
7 - 8	7.5	14.1
8 - 9	8.5	15.1

Tabla III-G. Velocidades medias con respecto a los intervalos de tiempo.

Con los datos de la tabla III-G, se construye la gráfica velocidad media - tiempo medio (Fig. IIL-8).

La gráfica obtenida exhibe una tendencia de línea recta, correspondiendo su modelo matemático a una ecuación de primer grado:

$$Y = A X + B$$

en donde A y B son los parámetros de la ecuación de primer

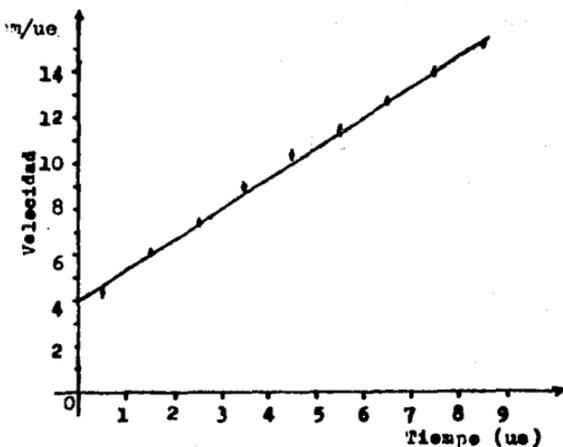


Figura III-8. Velocidad media - tiempo medio para el M.U.A.

grade, quedando determinados por los datos de la gráfica en la forma:

A es la pendiente de la recta

B es la intersección con el eje de las ordenadas.

Se toman dos pares de puntos experimentales que se sitúan sobre la línea recta de la gráfica de la figura III-8; para ejemplificar se toma el 2^{do} y 8^{avo} par de puntos de la tabla III-G.

Intervalo de tiempo	Tiempo medio (ue)	Velocidad media (cm/ue)
1 - 2	1.5	6.1
7 - 8	7.5	14.1

Aplicando al par de puntos experimentales, la ecuación II-1, para calcular el parámetro A se tiene que:

$$A = \text{pendiente} = m$$

$$\text{y si } m = A = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$\text{entonces } A = \frac{\Delta v_m}{\Delta t_m} = \frac{v_{m8} - v_{m2}}{t_{m8} - t_{m2}}$$

$$A = \frac{14.1 \text{ cm/ue} - 6.1 \text{ cm/ue}}{7.5 \text{ ue} - 1.5 \text{ ue}} = \frac{8 \text{ cm/ue}}{6 \text{ ue}}$$

$$A = 1.33\bar{3} \text{ cm/ue}^2$$

Al observar la gráfica de la figura III-8 se aprecia que el valor de la intersección del eje de las ordenadas es 4 cm/ue aproximadamente; por tanto el parámetro B adquiere el valor de 4 cm/ue.

Determinando, con lo anterior, la forma del modelo matemático general:

$$Y = [1.33\bar{3} \text{ cm/ue}^2] X + 4 \text{ cm/ue}$$

Al reemplazar las variables de la ecuación general por las usadas en el experimento, $Y = v$ y $X = t$, se consigue:

$$v = [1.333 \text{ cm}/(\mu\text{s})^2] t + 4 \text{ cm}/\mu\text{s}$$

Tomando como base al modelo teórico, se calculan las velocidades teóricas (v_T) para compararlas con las velocidades experimentales (v_E), haciendo una evaluación de la desviación absoluta y del porcentaje de desviación, de esta manera se establece la precisión del modelo (tabla III-H).

Intervalo de tiempo	Tiempo medio (μs)	Velocidad experimental, v_E ($\text{cm}/\mu\text{s}$)	Velocidad teórica, v_T ($\text{cm}/\mu\text{s}$)	Desviación absoluta, $E_n = v_E - v_T$	Porcentaje de desviación, $\%E = 100 E_n / v_T$
0 - 1	0.5	4.5	4.67	0.17	3.64
1 - 2	1.5	6.1	6.00	0.10	1.67
2 - 3	2.5	7.4	7.33	0.07	0.95
3 - 4	3.5	9.0	8.67	0.33	3.81
4 - 5	4.5	10.3	10.00	0.30	3.00
5 - 6	5.5	11.4	11.33	0.07	0.62
6 - 7	6.5	12.9	12.67	0.23	1.81
7 - 8	7.5	14.1	14.00	0.10	0.71
8 - 9	8.5	15.1	15.33	0.23	1.50
			Σ	1.60	17.71

Tabla III-H. Cálculo de desviaciones en la velocidad para el K.U.A.

Aplicando los cálculos de la tabla III-H, se puede estimar la precisión del modelo matemático con la ecuación III-1:

$$\% E_{\text{prom}} = \frac{17.71}{9}$$

$$\% E_{\text{prom}} = 1.96$$

De los cálculos anteriores, se advierte que la precisión del modelo matemático es todavía aceptable, aunque con respecto al primer modelo de este movimiento, la incertidumbre casi se duplicó; eso se debe a que se han manejado datos con desviaciones, las cuales con el aumento de tratamientos se han ampliado. Es de esperarse que para el análisis de la aceleración, el incremento de la incertidumbre sea mayor.

Modelo Matemático de Aceleración - Tiempo

Para determinar la expresión matemática que relacione la aceleración en función del tiempo, es necesario tener las aceleraciones medias experimentales, las cuales se obtienen mediante la aplicación de la fórmula I-22, como a continuación se muestra.

La aceleración media entre el primer dato y el segundo de la tabla III-G es:

Intervalo de tiempo	Tiempo medio (ue)	Velocidad media (cm/ue)
0 - 1	0.5	4.5
1 - 2	1.5	6.1

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$a_m = \frac{6.1 \text{ cm/ue} - 4.5 \text{ cm/ue}}{1.5 \text{ ue} - 0.5 \text{ ue}} = \frac{1.6 \text{ cm/ue}}{1 \text{ ue}}$$

$$a_m = 1.6 \text{ cm/(ue)}^2$$

Esta aceleración media se aproxima a la aceleración instantánea del tiempo medio, que es la aceleración experimental (a_p). La determinación de los valores de las demás aceleraciones experimentales, se efectúa siguiendo el mismo procedimiento; en la tabla III-I se presentan los valores de las aceleraciones experimentales obtenidas:

Intervale de tiempo	Tiempo medio (μs)	Aceleración $\frac{\Delta E}{\text{cm}/(\mu\text{s})^2}$
0.5 - 1.5	1	1.6
1.5 - 2.5	2	1.3
2.5 - 3.5	3	1.6
3.5 - 4.5	4	1.3
4.5 - 5.5	5	1.1
5.5 - 6.5	6	1.5
6.5 - 7.5	7	1.2
7.5 - 8.5	8	1.0

Tabla III-I. Aceleraciones experimentales con respecto a los tiempos medios en el M.U.A.

Considerando que el movimiento es uniformemente acelerado, la aceleración es constante; en base a éste la aceleración teórica (a_p), será igual a la aceleración promedio (a_{prom}), la que se calcula aplicando la fórmula:

$$a_{\text{prom}} = \frac{\sum_{i=1}^n a_{Ei}}{n}$$

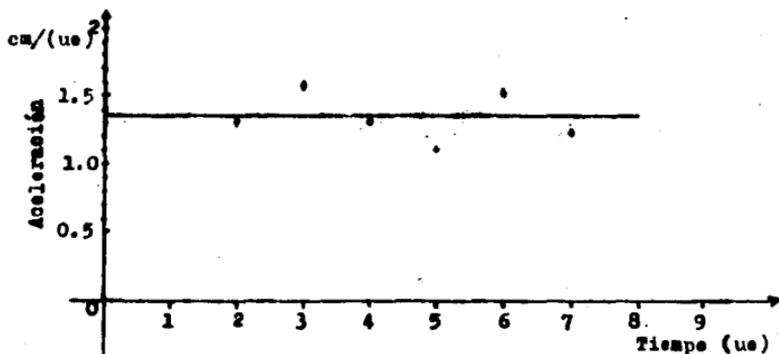


Figura IIL-9. Aceleración experimental - Tiempo medio para el M.U.A.

$$a_{\text{prom}} = \frac{10.64 \text{ cm}/(\text{us})^2}{8}$$

$$a_{\text{prom}} = 1.33\bar{3} \text{ cm}/(\text{us})^2$$

Si $a_{\text{prom}} = a_T$

entonces $a_T = 1.33\bar{3} \text{ cm}/(\text{us})^2$

Las desviaciones de las aceleraciones experimentales (a_E)^{*} con respecto a las aceleraciones teóricas (a_T)^{*} se tienen en la tabla III-J.

Intervalo de tiempo	Tiempo medio (us)	a_E^* cm/(us) ²	a_T^* cm/(us) ²	Desviación absoluta $E_a = a_E - a_T$	Porcentaje de desviación. $\%E = 100 E_a/a_T$
0.5 - 1.5	1	1.6	1.33	0.27	20.30
1.5 - 2.5	2	1.3	1.33	0.03	2.25
2.5 - 3.5	3	1.6	1.33	0.27	20.30
3.5 - 4.5	4	1.3	1.33	0.03	2.25
4.5 - 5.5	5	1.1	1.33	0.23	17.29
5.5 - 6.5	6	1.5	1.33	0.17	12.78
6.5 - 7.5	7	1.2	1.33	0.13	9.77
7.5 - 8.5	8	1.0	1.33	0.33	24.81
Σ				1.46	109.75

Tabla III-J. Cálculo de desviaciones en la aceleración para el K.U.A.

Empleando los cálculos de la tabla III-J, se puede estimar la precisión del modelo matemático con la Ec. III-1:

$$\% E_{\text{prom}} = \frac{109.75}{8}$$

$$\% E_{\text{prom}} = 13.71$$

Considerando que en la aceleración el promedio del porcentaje de desviación aumenta con el incremento de los tratamientos de datos originales (como se predijo con anterioridad), se admite la hipótesis de que la aceleración es constante para un movimiento uniformemente acelerado.

Para ratificar la precisión del experimento, se construyeron las gráficas de datos experimentales y datos teóricos para su contraste.

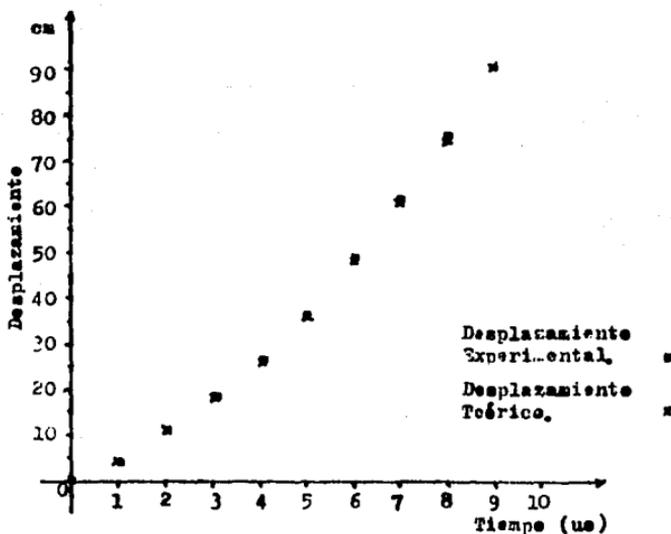


Figura III-10. Contraste del desplazamiento teórico con el desplazamiento experimental para el - M.U.A.

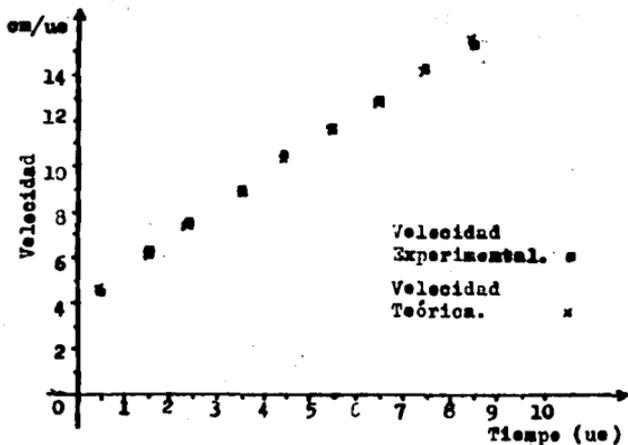


Figura III-11. Contraste de la velocidad teórica con la velocidad experimental para el M.U.A.

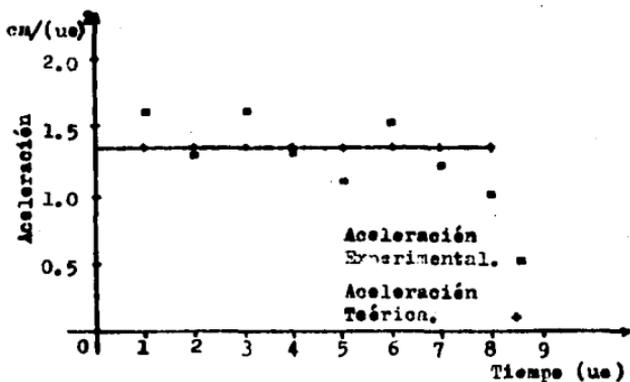


Figura III-12. Contraste de la aceleración teórica con la aceleración experimental para el M.U.A.

Para finalizar este capítulo, se presenta un resumen de los modelos matemáticos obtenidos por el método propuesto, acen tuando el porcentaje de desviación promedio.

Movimiento Rectilíneo Uniforme

Modelos matemáticos generales

$$S = v_0 t$$

$$v_0 = v = \text{constante}$$

Modelos matemáticos generados

$$S = (3.44 \text{ cm/ue}) t$$

$$\%E_{\text{prom}} = 1.7$$

$$v = 3.42 \text{ cm/ue}$$

$$\%E_{\text{prom}} = 4.3$$

Movimiento Uniformemente Acelerado

Modelos matemáticos generales

$$S = (a/2)t^2 + v_0 t$$

$$v = at + v_0$$

$$a = \text{constante}$$

Modelos matemáticos generados

$$S = [0.68412 \text{ cm/(ue)}^2] t^2 + 3.93176 \text{ cm/ue } t$$

$$\%E_{\text{prom}} = 0.8$$

$$v = [1.333 \text{ cm/(ue)}^2] t + 4 \text{ cm/ue}$$

$$\%E_{\text{prom}} = 1.9$$

$$a = 1.333 \text{ cm/(ue)}^2$$

$$\%E_{\text{prom}} = 13.7$$

C A P I T U L O I V

PRUEBAS DE CONFIABILIDAD.

En el capítulo III los datos de dos experimentos se han tomado como ejemplos y se les ha dado un tratamiento desde el punto de vista didáctico, empleando formas elementales de evaluación, puesto que se efectúan comparaciones directas entre los valores calculados contra los valores experimentales, obteniendo de manera elemental el porcentaje de diferencia que existe entre ellos, conduciendo al alumno a un modelo matemático que es una aproximación a la realidad y por tanto tiene un cierto grado de perfección ó imperfección, creándole un criterio experimental.

En el análisis de datos propuesto para los alumnos no se emplean procedimientos estadísticos, puesto que hay que tener en cuenta que los estudiantes que van a desarrollar estos experimentos (y a quienes va dirigida la investigación), son de los primeros semestres del nivel licenciatura de la Facultad de Química, lo que nos indica que la mayoría de ellos desconocen los métodos estadísticos, pues proceden de escuelas en donde los planes de estudio no consideran (hasta ahora), a la Estadística dentro de ellos; eventualmente se da el caso que en algunos planes de estudio se estima en forma opcional a la Estadística, pero en general los estudiantes no la conocen.

El propósito de este capítulo es el de efectuar pruebas estadísticas para obtener el nivel de confianza que apoye la bondad del método experimental propuesto sobre movimiento en una dimensión desde el punto de vista de la cinemática.

Pruebas de Confiabilidad en el Movimiento Rectilíneo Uniforme.

Para obtener el nivel de confianza de la bondad del método experimental, se lleva a cabo, primeramente la determinación del número de repeticiones del experimento; esta determinación se toma con base en la tabla diseñada por Cochran y Cox - (1985, pag. 39), la cual establece que para un experimento de seis tratamientos, el número de repeticiones para una prueba de significación al 90% aplicada a ensayos unilaterales, es de 44, cuatro por cada tratamiento.

En seguida se precisan los modelos matemáticos mediante el análisis de regresión^{*}, deduciendo la forma general de la expresión matemática por consideraciones gráficas, al representar en un diagrama el conjunto de puntos muestrales. Como los diagramas muestrales obtenidos representan una tendencia lineal, la ecuación de regresión queda de la siguiente forma:

$$Y = A X + B$$

Los parámetros de la ecuación de regresión se calculan por el método de mínimos cuadrados, el cual establece que "De todas las rectas de regresión que se pueden ajustar al conjunto de puntos muestrales dados, la mejor es aquella que tenga la propiedad de que la suma de los cuadrados de sus residuos sea mínima" (Olivera y Zuñiga, 1977, pag. 2).

* Una explicación de los modelos estadísticos usados en este capítulo, se encuentra en el apéndice C.

El grado de confianza con el cual el modelo representa al fenómeno físico, se obtiene con el análisis de correlación (r de Pearson), asociando el valor de cero a un ajuste del todo imperfecto y el valor de más menos uno a un ajuste perfecto - (será negativo para rectas de regresión con pendientes negativas y positivo para rectas de regresión con pendientes positivas).

Por último se comprueba que el coeficiente de correlación obtenido no es debido al azar sino que existe una correlación real, empleando una distribución para muestras pequeñas, pues en los experimentos realizados las muestras fueron pequeñas. Se emplea para los contrastes la t de Student en lugar de la chi-cuadrada, porque "los contrastes de t se basan en la hipótesis de que la población en estudio obedece a una población normal y en la chi-cuadrada no es necesario hacer dicha hipótesis siendo un estadígrafo no paramétrico o de distribución libre" (Downie y Heart, 1973, pag. 212).

Se emplea la distribución t de Student para ensayos unilaterales con $n-2$ grados de libertad a niveles de significancia de t a 95% y 99%.

A continuación se describe detalladamente las pruebas estadísticas propuestas para una sola repetición del experimento; considerando que no es necesario anotar el desarrollo de todos los procesos de cálculo de cada uno de las 24 repeticiones, pues eso nos llevaría a una confusión por el exceso de cálculos, procediendo a tabular únicamente los datos de tiempo y desplazamiento para cada repetición, así como los resultados de las pruebas estadísticas; esto se hace para cada uno

de los seis tratamientos.

Tratamiento	Altura	No. de repeticiones
I	15 cm	4
II	13 cm	4
III	10 cm	4
IV	8 cm	4
V	5 cm	4
VI	3 cm	4

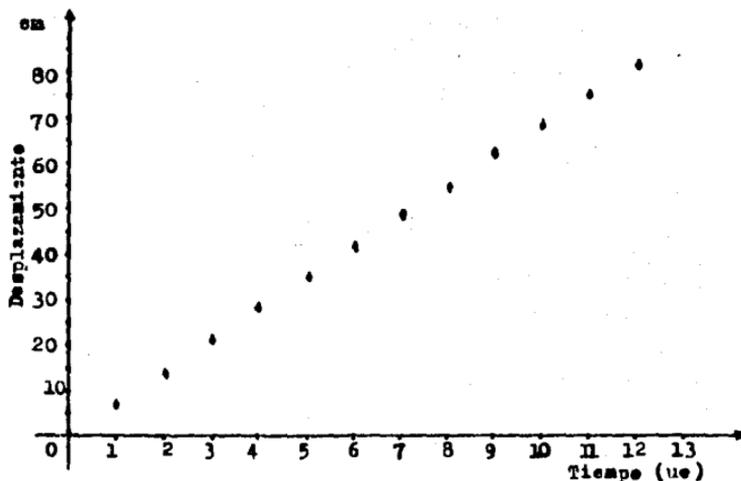
Tabla IV-1. Distribución del número de repeticiones para cada tratamiento (altura), en el M.R.U.

Comenzaremos por el tratamiento I, repetición 1; los datos del experimento son:

Tiempo t (us)	Desplazamiento S (cm)
0	0
1	6.9
2	13.7
3	20.6
4	27.5
5	34.3
6	41.1
7	47.7
8	54.5
9	61.1
10	67.8
11	74.5
12	81.1

Tabla IV-2. Datos del desplazamiento del balín desde una altura de 15 cm (repetición 1).

Se grafican los datos de la tabla IV-2 para observar la tendencia de éstos.



Gráfica IV-A. Desplazamiento - tiempo. Datos en la gráfica tomados de la tabla IV-2.

Como la tendencia es lineal, el modelo de regresión queda de la siguiente forma:

$$Y = A X + B \quad (IV-1)$$

Se calculan los parámetros A y B por el método de mínimos cuadrados, empleando para el parámetro A la ecuación:

$$A = \frac{n \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{n \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

y para el parámetro B la ecuación siguientes:

$$B = \frac{(\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum XY)}{n \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

Para poder obtener los parámetros A y B es necesario evaluar la $\sum X$, $\sum Y$, $\sum X^2$, $\sum XY$, $\sum Y^2$; por lo que se procederá a efectuarlos.

n	X	Y	X ²	Y ²	XY
1	0	0	0	0	0
2	1	6.9	1	47.61	6.9
3	2	13.7	4	187.69	27.4
4	3	20.6	9	424.36	61.8
5	4	27.5	16	756.25	110.0
6	5	34.3	25	1176.49	171.5
7	6	41.1	36	1639.21	246.6
8	7	47.7	49	2275.29	333.9
9	8	54.5	64	2970.25	436.0
10	9	61.1	81	3733.21	549.9
11	10	67.8	100	4596.84	678.0
12	11	74.5	121	5550.25	819.5
13	12	81.1	144	6577.21	973.2
Σ	78	530.8	650	29984.66	4414.7

Tabla IV-3. Términos necesarios para la obtención de los parámetros A y B.

Secuencia de cálculo de los parámetros A y B

$$A = \frac{13(4414.7) - (78)(530.8)}{(13)(650) - (78)^2}$$

$$A = \frac{57391.1 - 41402.4}{8450 - 6084} = \frac{15988.7}{2366}$$

$$A = 6.75769 \text{ cm/ue}$$

$$B = \frac{(530.8)650 - 78(4414.7)}{(13)650 - (78)^2}$$

$$B = \frac{345020 - 344346.6}{8450 - 6084} = \frac{673.4}{2366}$$

$$B = 0.284615 \text{ cm}$$

Sustituyendo los valores de A y B en la ecuación IV-1, se tiene:

$$Y = 6.75769X + 0.284615$$

reemplazando las variables de la ecuación general, por las usadas en el experimento;

$$Y = S \quad \text{y} \quad X = t$$

el modelo experimental queda de la siguiente forma:

$$S = 6.75769t + 0.284615$$

Posteriormente se determina el coeficiente de correlación, aplicando la fórmula:

$$r = \frac{n \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{[n \sum X^2 - (\sum X)^2] [n \sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

$$r = \frac{13(4414.7) - (78)530.8}{\sqrt{[13(650) - (78)^2] [13(29984.66) - (530.8)^2]}}$$

$$r = \frac{57391.1 - 41402.4}{\sqrt{(8450-6084)(389800.58 - 281748.64)}}$$

$$r = \frac{15988.7}{\sqrt{(2366)(100051.94)}} = \frac{15988.7}{\sqrt{255650890}}$$

$$r = \frac{15988.7}{15989.08}$$

$$r = 0.9999758$$

Por último se calcula la *t* de Student con la relación:

$$t = \frac{r \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

de dónde:

$$t = \frac{0.9999758(\sqrt{13-2})}{\sqrt{1 - (0.9999758)^2}}$$

$$t = \frac{0.9999758(\sqrt{11})}{\sqrt{1 - 0.9999516}} = \frac{3.316544527}{0.00695701}$$

$$t = 476.934763$$

Se compara el valor de *t* calculada con la distribución *t* de tablas, para ensayos unilaterales a niveles de significancia de 95% y 99%

$$t_0 = 476.93 \quad t_{35\%} = 1.796 \quad t_{99\%} = 2.718$$

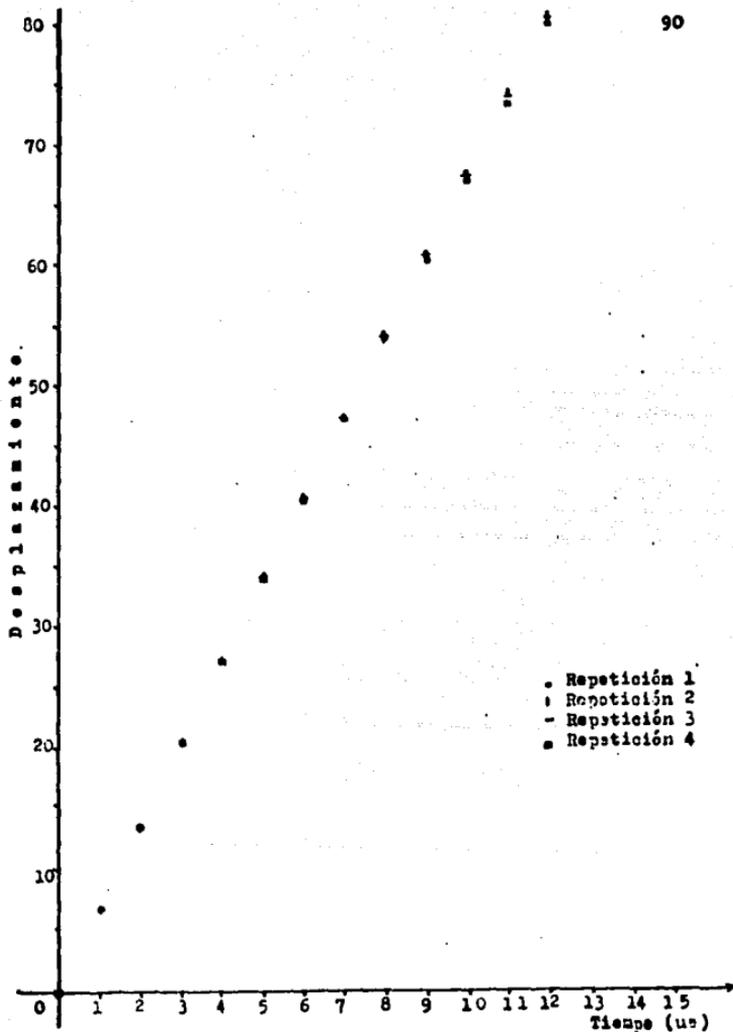
Se proseguirá en igual forma con las repeticiones 2, 3 y 4 para el tratamiento I. En la tabla IV-4 (a) se presentan los valores de las variables tiempo (t) y desplazamiento (S), para cada repetición del tratamiento I.

Repetición:	1	2	3	4
Tiempo t (us)	S (cm)	S (cm)	S (cm)	S (cm)
0	0	0	0	0
1	6.9	6.8	6.9	6.9
2	13.7	13.6	13.6	13.7
3	20.6	20.3	20.5	20.4
4	27.5	27.0	27.4	27.1
5	34.3	33.9	34.0	34.0
6	41.1	40.6	40.8	40.7
7	47.7	47.2	47.5	47.3
8	54.5	53.9	54.2	54.0
9	61.1	60.6	60.9	60.6
10	67.8	67.1	67.5	67.2
11	74.5	73.6	74.2	73.8
12	81.1	80.1	80.8	80.2

Tabla IV-4. (a). Tratamiento I (altura = 15 cm), 4 repeticiones.

Repetición A (pendiente)	B (Ordenada al origen)	Ecuación que representa al movimiento.
1	6.75769	$S = 6.75769t + 0.204615$
2	6.68461	$S = 6.68461t + 0.253846$
3	6.73186	$S = 6.73186t + 0.247252$
4	6.68901	$S = 6.68901t + 0.319760$

Tabla IV-4. (b). Parámetros A y B y ecuaciones que representan al movimiento. Tratamiento I.



Gráfica IV-B. Puntos muestrales del tratamiento I.

En la tabla IV-4 (b), se presentan los valores de los parámetros A y B, así como las ecuaciones que representan a los movimientos de las 4 repeticiones del experimento (tratamiento I).

Los coeficientes de correlación (r) y las t de Student - calculados a partir de los datos de los experimentos del tratamiento I, al igual que la t de Student de tablas, tanto al 95% como al 99% para ensayos unilaterales, se encuentran en la tabla IV-4 (c).

Repetición	r Coeficiente de correlación	t calculada	t _{95%}	t _{99%}
1	0.9999758	476.9347	1.796	2.718
2	0.9999724	447.0114	1.796	2.718
3	0.9999838	584.0911	1.796	2.718
4	0.9999723	445.9936	1.796	2.718

Tabla IV-4. (c). Coeficiente de correlación y t's de Student calculada, al 95% y al 99% para el tratamiento I.

A continuación se presentan en las tablas IV-5 (a), (b) y (c) datos y/o resultados de los métodos estadísticos aplicados a las cuatro repeticiones que se les atribuyó el tratamiento II, con base en que la tendencia de sus datos es lineal.

Repetición:	1	2	3	4
Tiempo t (us)	S (cm)	S (cm)	S (cm)	S (cm)
0	0	0	0	0
1	6.6	6.7	6.6	6.6
2	13.1	13.4	13.1	13.1
3	19.6	20.0	19.6	19.6
4	26.1	26.7	26.0	26.1
5	32.6	33.4	32.7	32.6
6	39.1	39.9	39.1	39.0
7	45.5	46.5	45.1	45.3
8	51.8	53.1	51.8	51.2
9	58.3	59.5	58.1	57.8
10	64.7	66.1	64.6	64.3
11	70.9	72.4	70.8	70.6
12	77.1	78.8	77.0	76.9
13	83.4	85.3	83.1	83.0

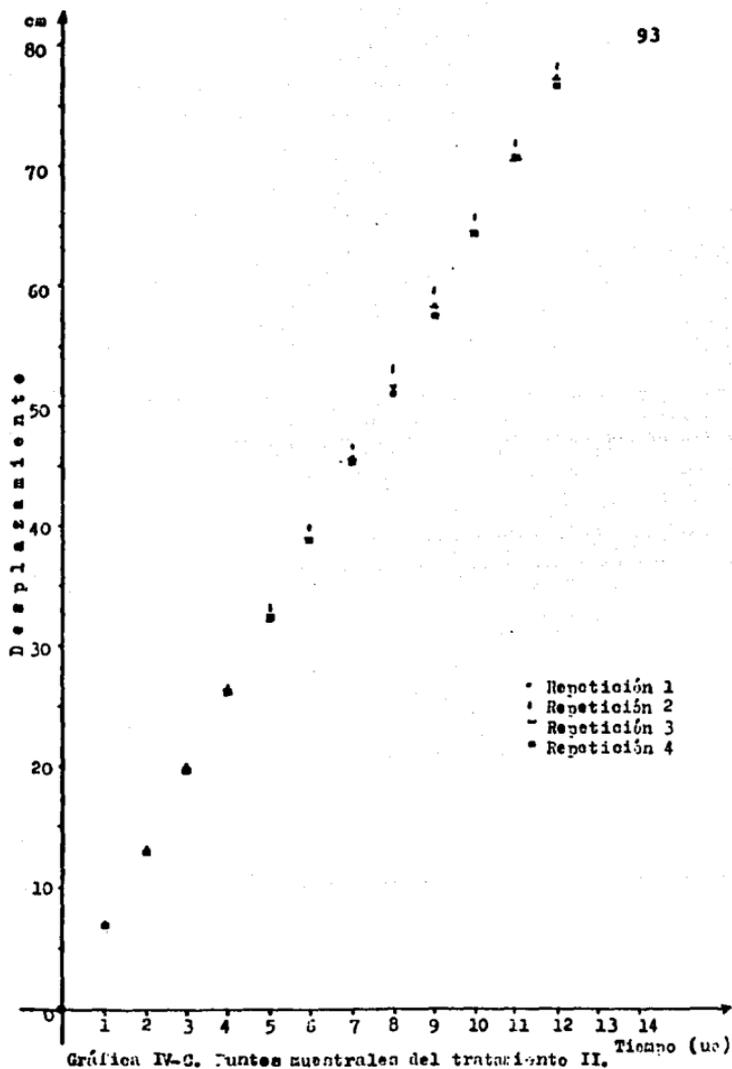
Tabla IV-5. (a). Tratamiento II (altura = 13 cm),
4 repeticiones.

Repetición A (pendiente)	B (Ordenada al origen)	Ecuación que representa al movimiento.
1	6.41890	$S = 6.4189t + 0.334285$
2	6.56131	$S = 6.5613t + 0.337142$
3	6.40175	$S = 6.4017t + 0.360000$
4	6.38087	$S = 6.3808t + 0.385571$

Tabla IV-5. (b). Parámetros A y B y ecuaciones que presentan al movimiento. Tratamiento II.

Repetición	r Coeficiente de correlación	t calculada	t _{95%}	t _{99%}
1	0.999968	435.5225	1.782	2.681
2	0.999967	429.6243	1.782	2.681
3	0.999958	331.7138	1.782	2.681
4	0.999963	407.6237	1.782	2.681

Tabla IV-5. (c). Coeficientes de correlación y t's de Student para el tratamiento II.



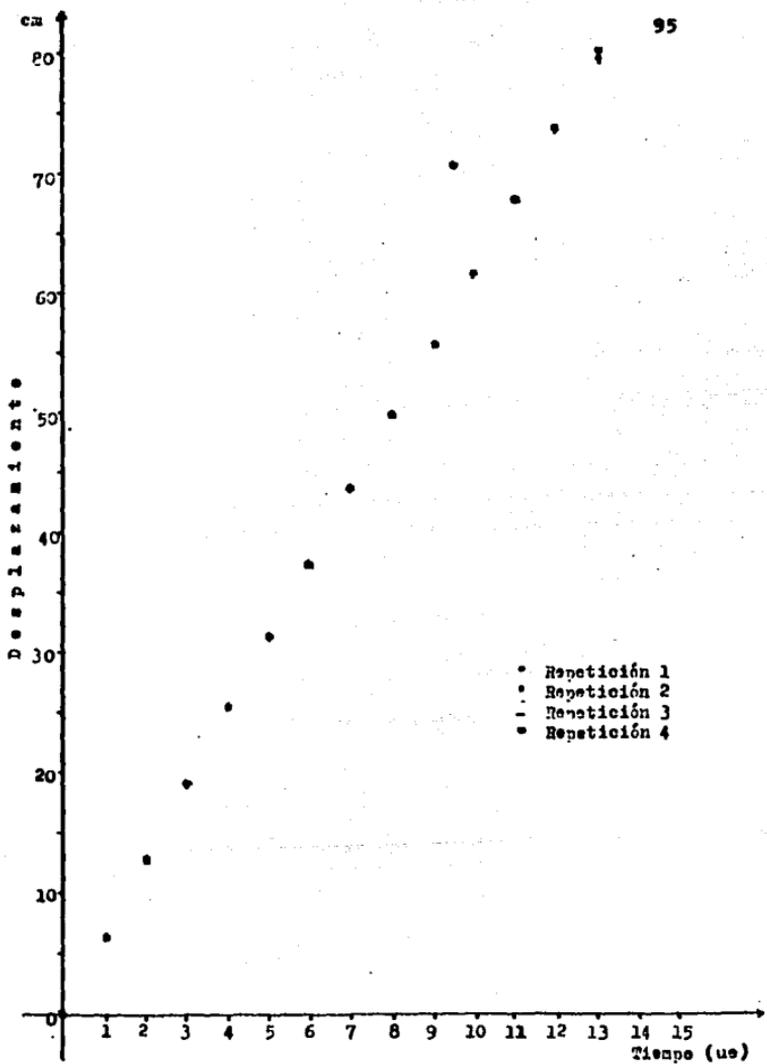
Las tablas IV-6 (a), (b) y (c), muestran los datos y/o resultados de los métodos estadísticos aplicados a las 4 repeticiones del tratamiento III, con base en que la tendencia de sus datos es lineal.

Repeticición:	1	2	3	4
Tiempo t (ue)	S (cm)	S (cm)	S (cm)	S (cm)
0	0	0	0	0
1	6.3	6.4	6.4	6.4
2	12.6	12.7	12.8	12.6
3	18.9	19.0	19.0	19.0
4	25.1	25.2	25.2	25.1
5	31.4	31.4	31.3	31.4
6	37.5	37.6	37.4	37.6
7	43.6	43.7	43.5	43.7
8	49.7	49.8	49.5	49.7
9	55.9	55.9	55.6	55.7
10	61.8	61.6	61.6	61.9
11	67.9	67.8	67.7	67.9
12	73.9	73.8	73.5	74.0
13	79.9	79.7	79.4	80.1
14	85.5	85.5	85.1	86.3

Tabla IV-6. (a). Tratamiento III (altura = 10 cm), 4 repeticiones.

Repeticición	A (pendiente)	B (Ordenada al origen)	Ecuación que representa al movimiento.
1	6.12107	0.485833	$S = 6.12107t + 0.485833$
2	6.10500	0.605000	$S = 6.10500t + 0.605000$
3	6.07821	0.652500	$S = 6.07821t + 0.652500$
4	6.14285	0.426666	$S = 6.14285t + 0.426666$

Tabla IV-6. (b). Parámetros A y B y ecuaciones que representan al movimiento (Tratamiento III).



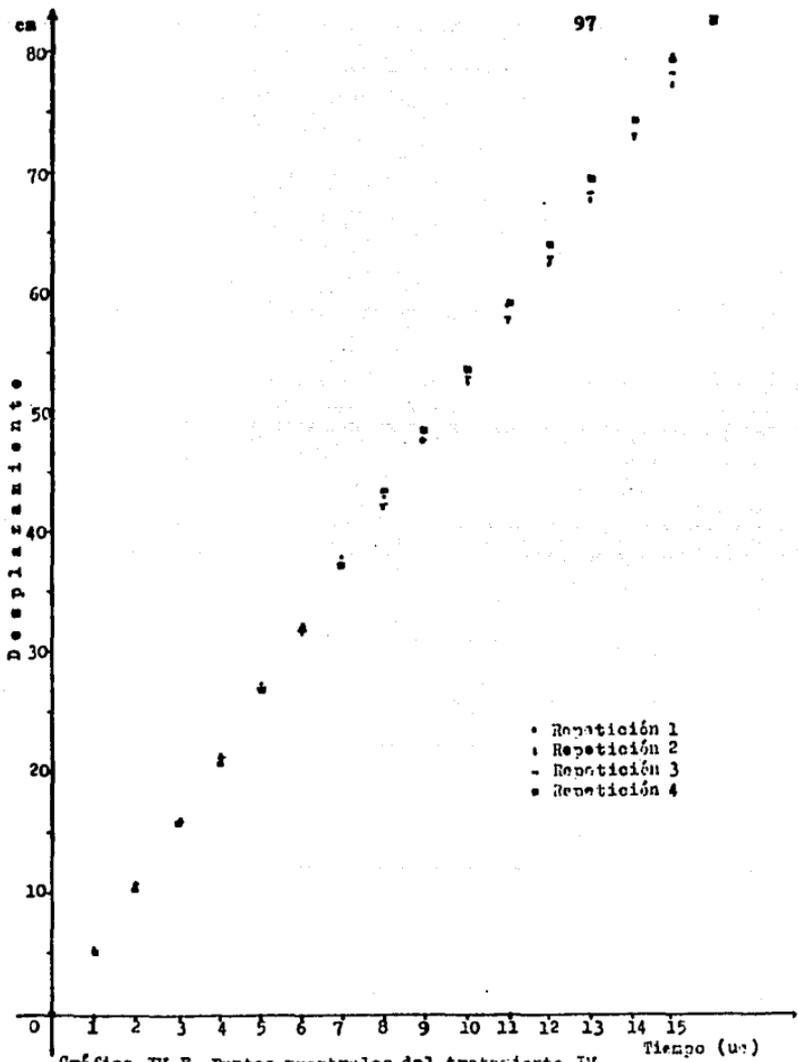
Gráfica IV-D. Puntos muestrales del tratamiento III.

Repetición	r Coeficiente de correlación	t calculada	t _{95%}	t _{99%}
1	0.999938	325.2742	1.771	2.650
2	0.999927	299.8414	1.771	2.650
3	0.999927	298.7133	1.771	2.650
4	0.999971	480.4467	1.771	2.650

Tabla IV-6. (c). Coeficientes de correlación y t's de Student calculada, al 95% y al 99%, para el tratamiento III.

Repetición:	1	2	3	4
Tiempo t (ue)	S (cm)	S (cm)	S (cm)	S (cm)
0	0	0	0	0
1	5.5	5.5	5.4	5.5
2	11.1	10.9	10.8	11.0
3	16.4	16.3	16.2	16.6
4	21.7	21.4	21.4	22.1
5	27.1	26.7	26.7	27.5
6	32.7	31.9	32.2	32.7
7	38.2	37.3	37.3	38.1
8	43.4	42.5	42.4	43.6
9	48.7	47.6	47.8	48.7
10	53.9	52.6	53.1	53.9
11	59.1	57.7	58.1	59.3
12	64.4	62.9	63.2	64.4
13	69.7	67.9	68.4	69.7
14	74.8	72.8	73.3	74.8
15	80.0	77.8	78.3	79.8
16	85.1	82.7	83.3	85.0

Tabla IV-7. (a). Datos de las variables del tratamiento IV (altura = 8 cm), 4 repeticiones.



Gráfica IV-E. Puntos muestrales del tratamiento IV.

Repetición	A (pendiente)	B (Ordenada al origen)	Ecuación que representa al movimiento
1	5.32034	0.484313	$S = 5.32034t + 0.484313$
2	5.16617	0.700000	$S = 5.16617t + 0.700000$
3	5.21176	0.535294	$S = 5.21176t + 0.535294$
4	5.30882	0.629411	$S = 5.30882t + 0.629411$

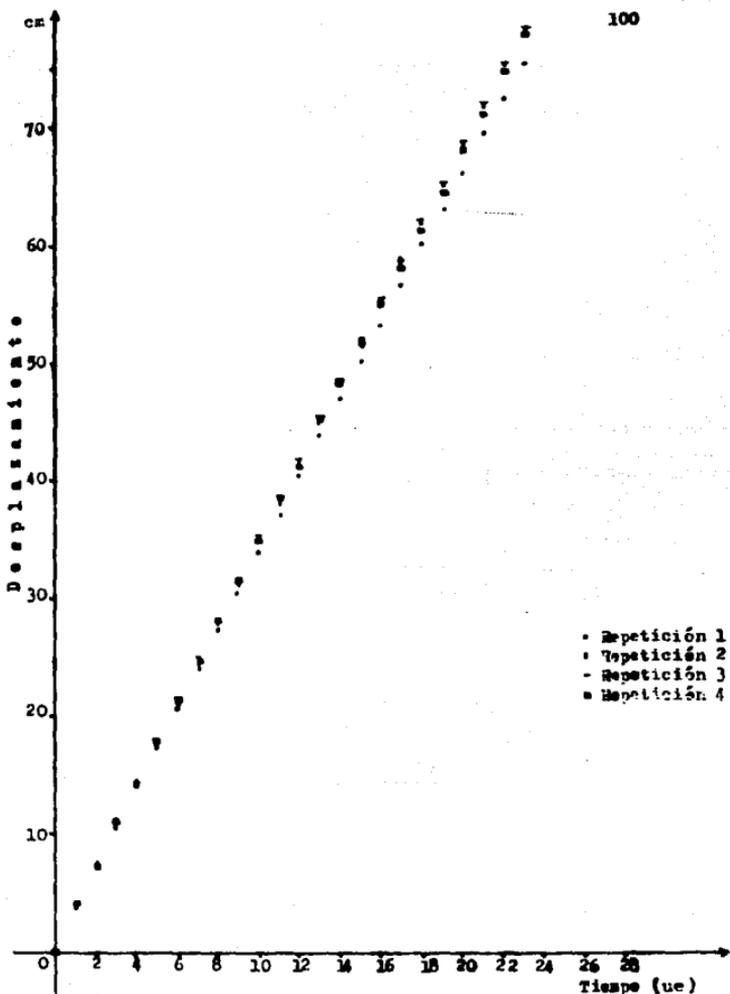
Tabla IV-7. (b). Parámetros A y B y ecuaciones que representan al movimiento (tratamiento IV).

Repetición	r Coeficiente de correlación	t calculada	t _{95%}	t _{99%}
1	0.9999431	363.1612	1.753	2.602
2	0.9999050	281.0050	1.753	2.602
3	0.9999224	310.9888	1.753	2.602
4	0.9999144	296.0298	1.753	2.602

Tabla IV-7. (c). Coeficientes de correlación y t's de Student calculada, al 95% y al 99%, para el tratamiento IV.

Repetición:	1	2	3	4
Tiempo t (ue)	S (cm)	S (cm)	S (cm)	S (cm)
●	0	0	0	0
1	3.6	3.6	3.7	3.7
2	7.2	7.2	7.4	7.3
3	10.5	10.7	10.9	10.9
4	14.0	14.3	14.6	14.4
5	17.3	17.6	18.1	17.9
6	20.7	21.2	21.5	21.4
7	24.0	24.8	25.0	24.8
8	27.5	28.1	28.4	28.1
9	30.6	31.5	31.9	31.7
10	34.1	35.2	35.3	34.9
11	37.4	38.5	38.9	38.5
12	40.6	41.9	42.0	41.2
13	44.0	45.5	45.5	45.2
14	47.4	48.8	48.9	48.6
15	50.4	51.9	52.4	52.0
16	53.7	55.5	55.7	55.1
17	56.9	59.1	58.8	58.4
18	60.3	62.2	62.3	61.7
19	63.7	65.6	65.5	64.9
20	66.7	69.0	68.9	68.4
21	69.9	72.1	72.4	71.7
22	72.9	75.5	75.6	75.0
23	75.9	78.7	78.8	78.1
24	79.2	81.8	82.0	81.2

Tabla IV-8. (a). Datos de las variables del tratamiento V (altura = 5 cm), 4 repeticiones.



Gráfica IV-2. Puntos muestrales del tratamiento V.

Repetición A (pendiente) B (Ordonada al origen) Ecuación que representa al movimiento.

1	3.29476	0.802769	$S = 3.29476t + 0.802769$
2	3.41492	0.632923	$S = 3.41492t + 0.632923$
3	3.40776	0.886769	$S = 3.40776t + 0.886769$
4	3.37753	0.873538	$S = 3.37753t + 0.873538$

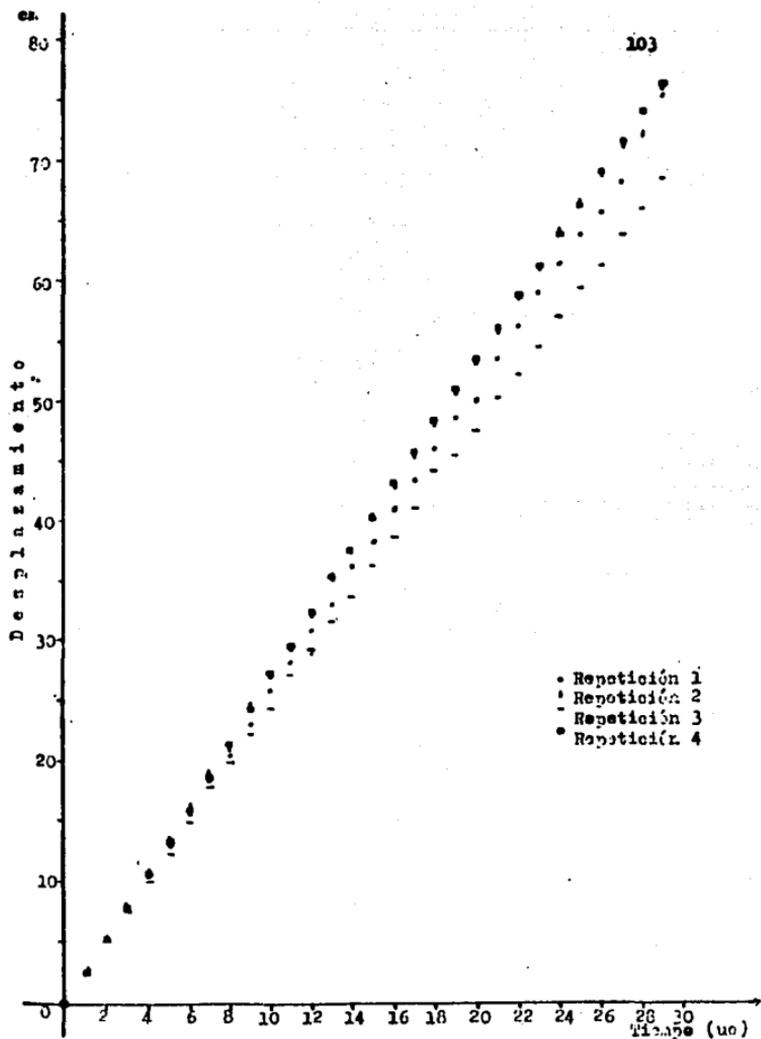
Tabla IV-8. (b). Parámetros A y B y ecuaciones que representan al movimiento (Tratamiento V).

Repetición	r Coeficiente de correlación	t calculada	t _{95%}	t _{99%}
1	0.999891	324.394	1.714	2.500
2	0.999909	355.636	1.714	2.500
3	0.999892	327.288	1.714	2.500
4	0.999886	318.913	1.714	2.500

Tabla IV-8. (c). Coeficientes de correlación y t's de Student calculada, al 95% y al 99%, para el tratamiento V.

Repetición:	1	2	3	4
Tiempo t (uc)	S (cm)	S (cm)	S (cm)	S (cm)
0	0	0	0	0
1	2.7	2.7	2.5	2.7
2	5.4	5.4	5.0	5.4
3	7.7	8.1	7.4	8.1
4	10.4	10.8	9.9	10.8
5	13.1	13.4	12.3	13.4
6	15.6	16.1	14.9	16.1
7	18.8	18.9	17.8	18.9
8	20.4	21.7	19.7	21.7
9	23.4	24.5	22.1	24.5
10	26.0	27.1	24.2	27.1
11	28.4	29.3	26.9	29.8
12	31.1	32.6	29.3	32.6
13	33.5	35.4	31.6	35.4
14	36.4	37.9	33.7	37.9
15	38.4	40.5	36.3	40.5
16	41.2	43.3	38.7	43.3
17	43.7	45.9	41.1	45.9
18	46.1	48.5	43.2	48.5
19	48.6	51.1	45.4	51.1
20	50.1	53.8	47.8	53.8
21	53.3	56.3	50.3	56.3
22	55.9	59.0	52.5	59.0
23	58.4	61.5	54.7	61.5
24	61.0	64.0	57.1	64.0
25	63.3	66.5	59.5	66.5
26	65.5	69.2	61.6	69.2
27	68.3	71.6	63.9	71.6
28	72.7	74.3	66.2	74.3
29	75.6	76.7	68.5	76.7

Tabla IV-9. (a). Datos de las variables del tratamiento VI (altura = 3 cm), 4 repeticiones.



Gráfica IV-G. Puntos muestrales del tratamiento VI.

Repetición A (pendiente) B (Ordenada al origen) Ecuación que representa al movimiento.

1	2.54197	0.307956	$S = 2.54197t + 0.307956$
2	2.65494	0.389892	$S = 2.65494t + 0.389892$
3	2.35454	0.662365	$S = 2.35454t + 0.662365$
4	2.65494	0.389892	$S = 2.65494t + 0.389892$

Tabla IV-9. (b). Parámetros A y B y ecuaciones que representan al movimiento (Tratamiento VI).

Repetición	r Coeficiente de correlación	t calculada	t _{95%}	t _{99%}
1	0.9997108	220.008	1.701	2.467
2	0.9999069	387.878	1.701	2.467
3	0.9998817	344.075	1.701	2.467
4	0.9999069	387.878	1.701	2.467

Tabla IV-9. (c). Coeficientes de correlación y t's de Student calculada, al 95% y al 99%, para el tratamiento VI.

Análisis de las Tablas Comparativas.

De los datos de las tablas IV-4 (a), IV-5 (a), IV-6 (a), IV-7 (a), IV-8 (a), y IV-9 (a), se observa que de cada repetición para los seis tratamientos presentan una tendencia de tipo lineal, siendo la ecuación de regresión, para esta tendencia, de la forma:

$$Y = A X + B$$

Se sabe que el parámetro B es la ordenada al origen por tanto, al analizar los datos se espera que el valor de B sea cero; sin embargo al contrastarlos con los valores de las tablas IV-4 (b), IV-5 (b), IV-6 (b), IV-7 (b), IV-8 (b) y IV-9 (b), encontramos que para cada caso la ordenada al origen es ligeramente mayor de cero, lo cual nos indica que al ajustar los datos a la recta más probable no se obtiene el origen en cero ($t = 0$, $S = 0$), debido a errores de tipo experimental, inherentes al experimento propuesto y a las condiciones bajo las cuales se efectuarán las corridas como son: la fricción que se presenta entre el balón y el riel, la precisión de los aparatos con los cuales se realizarán las mediciones, el error humano, etc.

En las tablas IV-4 (c), IV-5 (c), IV-6 (c), IV-7 (c), IV-8 (c) y IV-9 (c), se advierte que los coeficientes de correlación son muy cercanos a 1, pues sus valores fluctúan entre 0.9998 y 0.9999, lo que indica la existencia de una buena correlación entre las variables, pudiendo deducir de esto que los valores de los experimentos están casi sobre una línea recta de pendiente positiva.

En estas mismas tablas se observa que el coeficiente de correlación obtenido no es debido al azar sino que existe una correlación real y significativa, pues al comparar los valores de las t 's calculadas con los críticos de la distribución t al 95% y 99% de nivel de significación en un problema unilateral, se tiene:

$$t_c > t_{95\%}$$

$$t_c > t_{99\%}$$

Luego, debe rechazarse la hipótesis nula y afirmar que el coeficiente de correlación de los 24 experimentos es significativo.

Pruebas de Confiabilidad en el Movimiento Uniformemente Acelerado.

Para obtener el nivel de confianza de la bondad del método experimental, se lleva a cabo primeramente, la determinación del número de repeticiones del experimento; se toma como base la tabla diseñada por Cochran y Cox (1985, pag. 38), la cual establece que para un experimento de 4 tratamientos el número de repeticiones para una prueba de significación al 90% aplicada a ensayos unilaterales es de 16, cuatro por cada tratamiento.

Se precisan los modelos matemáticos mediante el análisis de regresión, deduciendo la forma general de la expresión matemática por consideraciones gráficas, al representar en un

diagrama el conjunto de puntos muestrales. Como los diagramas muestrales obtenidos representan una tendencia de curva cuadrática, se hace un ajuste de los puntos muestrales a un sistema de referencia en donde si se aproxime a una recta.

Para lograr que el conjunto de puntos (t, S) , de cada repetición y tratamiento se ajuste a una recta, se procede a elevar al cuadrado la variable independiente, quedando representada esta variable por:

$$P = t^2;$$

permaneciendo igual la variable dependiente.

Procediendo en esta forma, los diagramas muestrales ahora obtenidos, presentan una tendencia lineal, siendo la ecuación de la regresión de la forma siguiente:

$$Y = A X + B$$

sustituyendo X por P y Y por S , la ecuación de regresión adquiere la forma que a continuación se presenta:

$$S = A P + B \quad (IV-2)$$

Analizando las condiciones bajo las cuales se llevarón a cabo las repeticiones de cada tratamiento, se observa que la velocidad inicial en todas ellas es cero, haciendo con esto válido el ajuste anterior pues, si el modelo matemático de la curva cuadrática es:

$$Y = A X^2 + B X + C$$

en donde el parámetro C se define como la ordenada al origen, el parámetro B corresponde a la velocidad inicial y el paráme-

tro A es la mitad de la aceleración; entonces tomando en cuenta lo anterior, el término BX de la ecuación de la parábola se anula, adquiriendo la forma siguiente:

$$Y = A X^2 + C$$

Los parámetros de la ecuación de regresión lineal ajustada se calculan por el método de mínimos cuadrados, tal como se realizaron en las pruebas de confiabilidad en el movimiento rectilíneo uniforme. También se procede en igual forma para la obtención de los coeficientes de correlación y los valores de la t de Student.

Considerando que no es necesario anotar el desarrollo de todos los procesos de cálculo de cada una de las 16 repeticiones, pues eso nos llevaría a una confusión por el exceso de tablas y evaluaciones y, puesto que lo importante son los valores de los estadísticos calculados; se describirá detalladamente las pruebas estadísticas propuestas para una sola repetición del experimento, procediendo para las demás repeticiones a tabular únicamente los datos y los resultados de las pruebas estadísticas, esto se hace para cada uno de los 4 tratamientos.

Tratamiento	Angulo	No. de repeticiones
I	10°	4
II	20°	4
III	30°	4
IV	40°	4

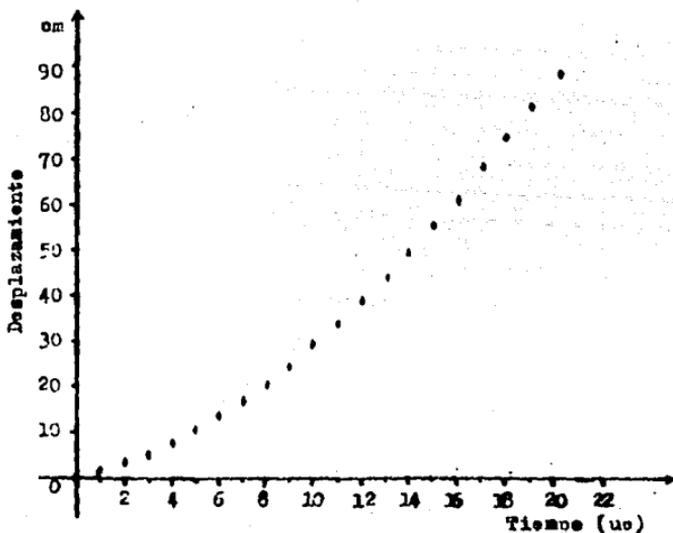
Tabla IV-10. Distribución del número de repeticiones para cada tratamiento en el E.U.A.

Principiaremos por el tratamiento I, repetición 1. Los datos del experimento son:

Tiempo t (us)	Desplazamiento S (cm)
0	0
1	1.3
2	3.2
3	5.3
4	7.7
5	10.6
6	13.6
7	17.1
8	20.9
9	24.9
10	29.9
11	34.1
12	39.1
13	44.1
14	49.1
15	55.7
16	61.8
17	68.8
18	75.1
19	81.8
20	88.7

Tabla IV-11. Datos del desplazamiento del balón, tratamiento I (ángulo = 10^0), repetición 1.

Se grafican los datos de la tabla IV-11 para observar la tendencia de éstos.



Gráfica IV-II. Desplazamiento - tiempo. Datos en la gráfica tomados de la tabla IV-11.

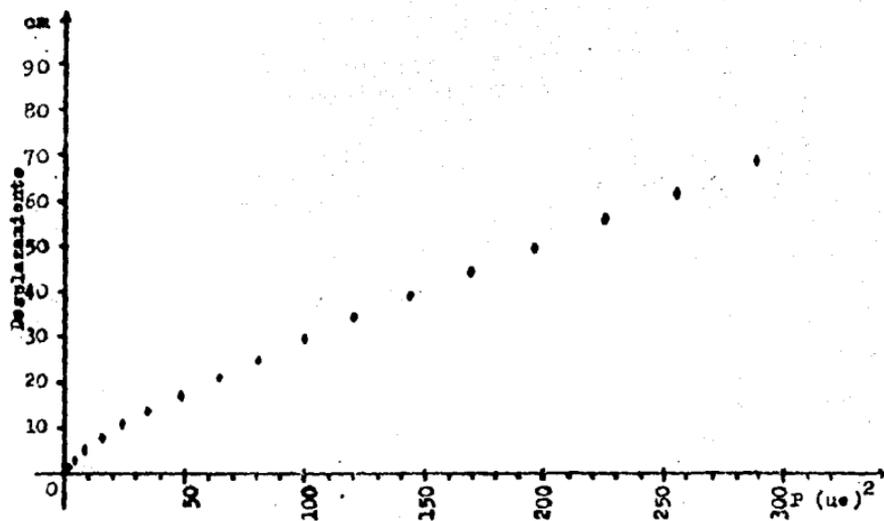
Como el diagrama obtenida presenta una tendencia de curva cuadrática, se hace un ajuste de los puntos muestrales elevando al cuadrado el tiempo, ahora las variables quedan representadas por:

$$P = t^2 \quad \text{y} \quad S = S$$

Los datos ahora son los representados en la tabla IV-12.

Tiempo al cuadrado	Desplazamiento
$P \text{ (ue)}^2$	$S \text{ (cm)}$
0	0
1	1.3
4	3.2
9	5.3
16	7.7
25	10.6
36	13.6
49	17.1
64	20.9
81	24.9
100	29.9
121	34.1
144	39.1
169	44.1
196	49.1
225	55.7
256	61.8
289	68.8
324	75.1
361	81.8
400	88.7

Tabla IV-12. Datos del desplazamiento del balón, tratamiento I (ángulo = 10°), repetición 1. Ajustados a una línea recta.



Gráfica IV-I. Desplazamiento - $(\text{tiempo})^2$. Datos tomados de la tabla IV-12.

Como la tendencia es lineal, el modelo de regresión queda de la siguiente forma:

$$S = A P + B$$

Se calculan los parámetros A y B por el método de mínimos cuadrados, empleando para el parámetro A la siguiente ecuación:

$$A = \frac{n(\sum P S) - (\sum P)(\sum S)}{n(\sum P^2) - (\sum P)^2}$$

El parámetro B se calcula aplicando la ecuación siguiente:

$$B = \frac{(\sum S)(\sum P^2) - (\sum P)(\sum P S)}{n(\sum P^2) - (\sum P)^2}$$

Es necesario evaluar la $\sum P$, $\sum S$, $\sum P^2$, $\sum S^2$ y $\sum PS$ por separado para facilitar la obtención de A y B, por lo que se procederá a efectuarlos.

n	S	P	P ²	S ²	PS
1	0	0	0	0	0
2	1.3	1	1	1.69	1.3
3	3.2	4	16	10.24	12.8
4	5.3	9	81	25.09	47.7
5	7.7	16	256	59.29	123.2
6	10.6	25	625	112.36	265.0
7	13.6	36	1296	184.96	489.6
8	17.1	49	2401	292.41	837.9
9	20.9	64	4096	436.81	1337.6
10	24.9	81	6561	620.01	2016.9
11	29.9	100	10000	894.01	2990.0
12	34.1	121	14641	1162.81	4126.1
13	39.1	144	20736	1528.81	5630.4
14	44.1	169	28561	1944.81	7452.9
15	49.1	196	38416	2410.81	9623.6
16	55.7	225	50625	3102.49	12532.5
17	61.8	256	65536	3819.24	15820.8
18	68.8	289	83521	4733.44	19883.2
19	75.1	324	104976	5640.01	24332.4
20	81.8	361	130321	6691.24	29529.8
21	88.7	400	160000	7867.69	35480.0
Σ	732.8	2870	722666	41541.22	172533.7

Tabla IV-13. Terminos necesarios para la obtención de los parámetros A y B y el coeficiente de correlación

Secuencia de cálculo de los parámetros A y B.

$$A = \frac{21(172533.7) - (2870)(732.8)}{21(722666) - (2870)^2}$$

$$A = \frac{3623207.7 - 2103136}{15175986 - 8236900} = \frac{1520071.7}{6939086}$$

$$A = 0.219059 \text{ cm}/(\mu\text{e})^2$$

$$B = \frac{(732.8)(722666) - (2870)(172533.7)}{21(722666) - (2870)^2}$$

$$B = \frac{529569644.8 - 495171719}{15175986 - 8236900} = \frac{34397925.8}{6939086}$$

$$B = 4.957126 \text{ cm}$$

Sustituyendo los valores de A y B en la ecuación IV-2 tenemos:

$$S = 0.219059 P + 4.957126$$

reemplazando las variables de la ecuación, P por t^2 , el modelo experimental queda de la forma que a continuación se presenta:

$$S = 0.219059 t^2 + 4.957126$$

Posteriormente se determina el coeficiente de correlación aplicando la fórmula:

$$r = \frac{n(\sum PS) - (\sum P)(\sum S)}{\sqrt{[n\sum P^2 - (\sum P)^2][n\sum S^2 - (\sum S)^2]}}$$

$$r = \frac{21(17253.7) - (2870)(732.8)}{\sqrt{[21(722666) - (2870)^2][21(41541.22) - (732.8)^2]}}$$

$$r = 0.99644$$

Por último se calcula la t de Student con la relación:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

de donde:

$$t = \frac{0.99644(\sqrt{21-2})}{\sqrt{1-(0.99644)^2}} = 51.517$$

Se compara el valor de t calculada con la distribución t de tabla, para ensayos unilaterales a niveles de significancia de 95% y 99%.

$$t_c = 51.517 \quad t_{95\%} = 1.729 \quad t_{99\%} = 2.539$$

Se procederá en igual forma para las repeticiones de los 4 tratamientos.

Repetición:	1	2	3	4
P (ue) ²	S (cm)	S (cm)	S (cm)	S (cm)
0	0	0	0	0
1	1.3	1.3	1.2	1.3
4	3.2	3.1	2.7	3.2
9	5.3	5.1	4.7	5.3
16	7.7	7.5	6.9	7.7
25	10.6	10.3	9.6	10.6
36	13.6	13.3	12.6	13.6
49	17.1	16.6	15.8	17.1
64	20.9	20.3	19.5	20.9
81	24.9	24.2	23.4	24.9
100	29.9	28.3	27.6	29.9
121	34.1	32.9	32.1	34.1
144	39.1	38.1	37.2	39.1
169	44.1	43.4	40.3	44.1
196	49.1	48.9	47.8	49.1
225	55.7	54.7	53.6	55.7
256	61.8	60.8	59.6	61.8
289	68.8	67.3	65.9	68.8
324	75.1	73.8	72.5	75.1
361	81.8	80.5	79.4	81.8
400	88.7	87.8	86.4	88.7

Tabla IV-14. (a). Datos de las variables ajustadas del tratamiento I (ángulo = 10°) 4 repeticiones. M.U.A.

En la tabla IV-14 (a) se muestran los valores de P y S para cada repetición del tratamiento I; la tendencia de los puntos P y S para éste tratamiento se aprecia en la gráfica IV-J.

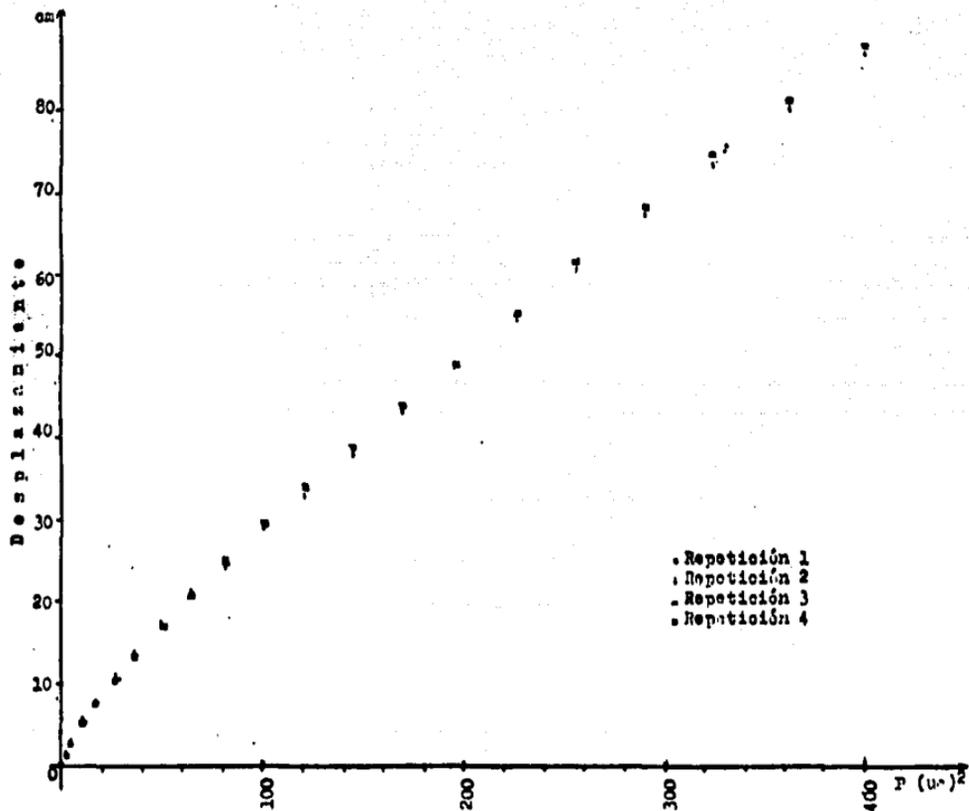


Gráfico IV-5. Datos muestrales del tratamiento I.

Repetición A (pendiente) B (Ordenada al origen) Ecuación que representa al movimiento.

1	0.219059	4.957126	$S=0.219059t^2 + 4.957126$
2	0.216276	4.642261	$S=0.216276t^2 + 4.642261$
3	0.213446	4.105153	$S=0.213446t^2 + 4.105153$
4	0.219059	4.957126	$S=0.219059t^2 + 4.957126$

Tabla IV-14. (b). Parámetros A y B y ecuaciones que representan al M.U.A. Tratamiento I.

En la tabla IV-14 (b) se muestran los valores de los parámetros A y B, así como la ecuación que representa al movimiento en cada repetición del experimento.

Los coeficientes de correlación (r) y las t's de Student calculadas a partir de los datos de los experimentos del tratamiento I, al igual que las t's de Student de tablas, tanto al 95% como al 99% para ensayos unilaterales, se encuentran en la tabla IV-14 (c).

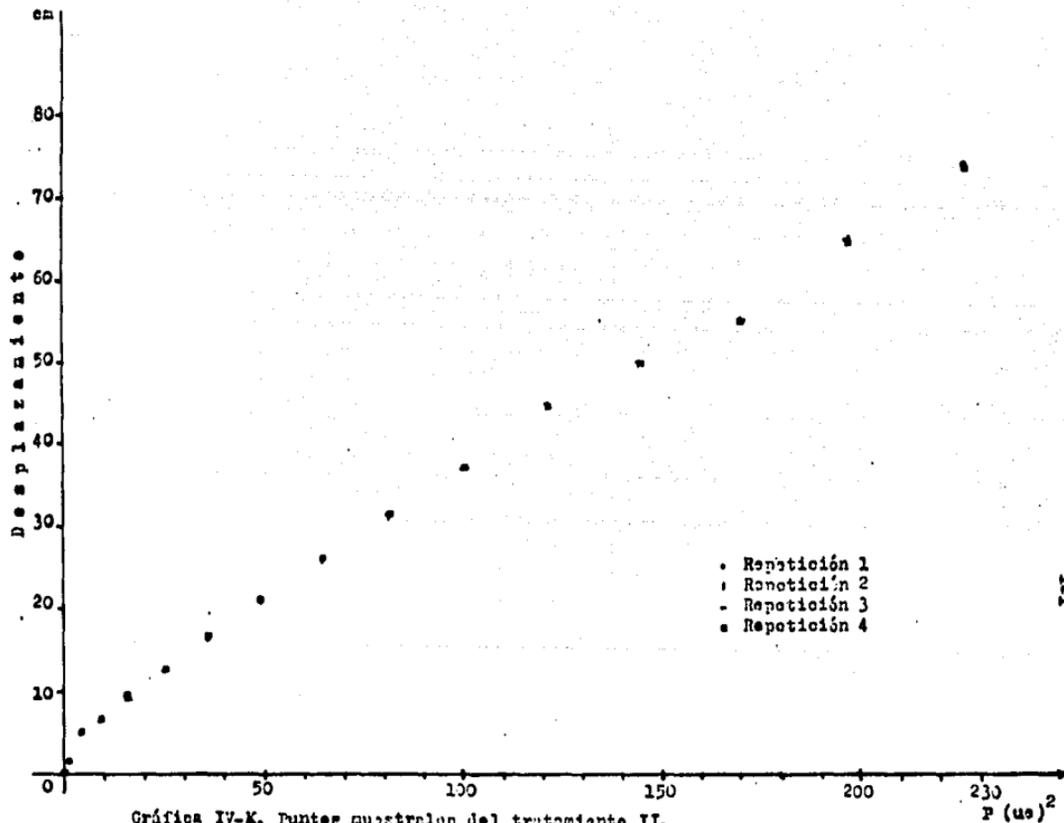
Repetición	r Coeficiente de correlación	t calculada	t _{95%}	t _{99%}
1	0.99644	51.517	1.729	2.539
2	0.99696	55.742	1.729	2.539
3	0.99744	60.749	1.729	2.539
4	0.99644	51.517	1.729	2.539

Tabla IV-14. (c). Coeficientes de correlación y t's de Student calculada, al 95% y al 99%, para el tratamiento I. M.U.A.

A continuación se presentan en las tablas IV-15 (a), (b) y (c), datos y/o resultados de los métodos estadísticos aplicados a las 4 repeticiones que se asignaron al tratamiento II, con base en que la tendencia de sus datos es lineal, después del ajuste de la curva cuadrática. (Gráfica IV-K).

Repetición:	1	2	3	4
P (ue) ²	S (cm)	S (cm)	S (cm)	S (cm)
0	0	0	0	0
1	1.4	1.4	1.4	1.3
4	3.6	3.6	3.6	3.7
9	6.1	6.5	6.1	6.6
16	9.2	9.4	9.2	9.5
25	12.7	12.8	12.7	12.9
36	16.1	16.5	16.1	16.3
49	21.1	21.1	21.1	21.2
64	26.0	26.0	26.0	26.1
81	31.4	31.3	31.4	31.4
100	37.1	37.1	37.1	37.1
121	43.6	43.5	43.6	43.4
144	50.2	50.1	50.2	50.0
169	57.4	57.3	57.4	57.2
196	64.9	64.8	64.9	64.6
225	73.1	72.9	73.1	72.9
256	81.3	81.2	81.3	81.1
289	90.4	89.9	90.4	89.8

Tabla IV-15. (a). Datos de las variables ajustadas del tratamiento II (ángulo = 20°) 4 repeticiones. M.U.A.



Repetición A (pendiente)	B (Ordenada al origen)	Ecuación que representa al movimiento.
1	0.308194	$S=0.308194t^2 + 4.193008$
2	0.306579	$S=0.306579t^2 + 4.341946$
3	0.308194	$S=0.308194t^2 + 4.193008$
4	0.305772	$S=0.305772t^2 + 4.433148$

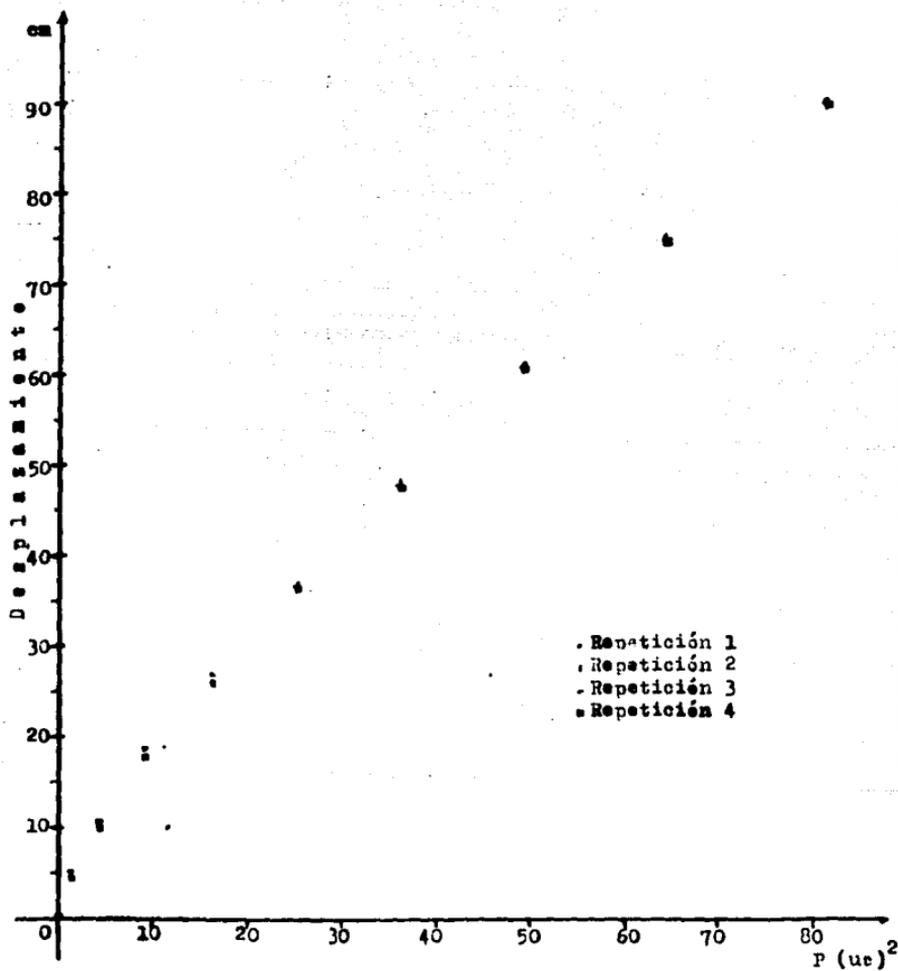
Tabla IV-15. (b). Parámetros A y B y ecuaciones que representan al M.U.A. Tratamiento II.

Repetición	Coefficiente r de correlación	t calculada	t _{95%}	t _{99%}
1	0.997570	57.283	1.746	2.583
2	0.997461	56.032	1.746	2.583
3	0.997571	57.284	1.746	2.583
4	0.997372	55.065	1.746	2.583

Tabla IV-15. (c). Coeficientes de correlación y t's de Student calculada, al 95% y al 99%, para el tratamiento II. M.U.A.

Repetición:	1	2	3	4
P (ue) ²	S (cm)	S (cm)	S (cm)	S (cm)
0	0	0	0	0
1	4.5	4.0	4.5	4.0
4	10.6	10.0	10.5	10.0
9	18.0	17.5	18.0	17.5
16	27.0	26.2	26.5	26.2
25	37.3	36.5	36.8	36.5
36	48.7	48.2	48.3	48.2
49	61.6	61.0	61.0	61.0
64	75.7	75.4	75.2	75.4
81	90.8	90.4	90.4	90.4

Tabla IV-16. (a). Datos de las variables ajustadas del tratamiento III (ángulo = 30°) 4 repeticiones. M.U.A.



Gráfica IV-L. Puntos muestrales del tratamiento III.

Repetición A (pendiente) B (Ordenada al origen) Ecuación que representa al movimiento.

1	1.093294	6.274150	$S=1.093294t^2 + 6.274150$
2	1.092836	5.761106	$S=1.092836t^2 + 5.761106$
3	1.086790	6.146482	$S=1.086790t^2 + 6.146482$
4	1.093294	5.761106	$S=1.093294t^2 + 5.761106$

Tabla IV-16. (b). Parámetros A y B y ecuaciones que representan al M.U.A. Tratamiento III

Repetición	r Coeficiente de correlación	t calculada	t _{95%}	t _{99%}
1	0.994000	25.704	1.812	2.764
2	0.994649	27.231	1.812	2.764
3	0.994369	26.540	1.812	2.764
4	0.994649	27.231	1.812	2.764

Tabla IV-16. (c). Coeficientes de correlación y t's de Student calculada, al 95% y al 99%, para el tratamiento III. M.U.A.

Repetición:	1	2	3	4
P (us) ²	S (cm)	S (cm)	S (cm)	S (cm)
0	0	0	0	0
1	5.0	4.9	5.0	4.9
4	10.8	10.0	10.5	10.0
9	18.3	17.0	18.0	17.0
16	27.8	26.0	27.0	26.0
25	39.5	37.0	38.1	37.0
36	52.6	49.8	51.2	49.8
49	68.2	65.0	67.4	65.0
64	85.6	82.0	83.8	82.0

Tabla IV-17. (a). Datos de las variables ajustadas del tratamiento IV (ángulo = 40°) 4 repeticiones. M.U.A.

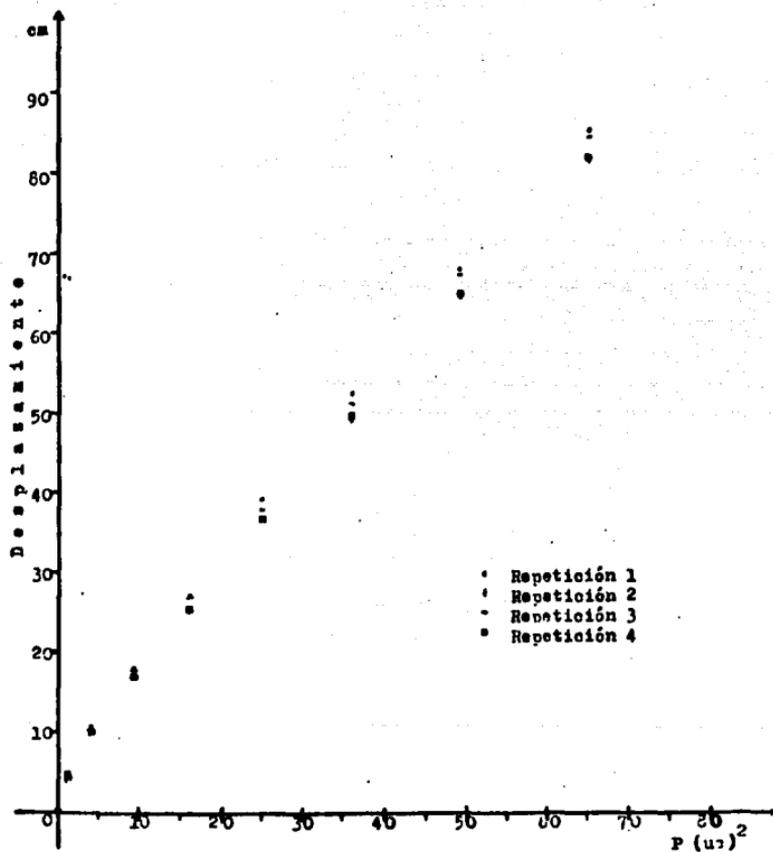


Gráfico IV-E. Puntos muestrales del tratamiento IV.

Repetición A (pendiente) B (Ordenada al origen) Ecuación que representa al movimiento.

1	1.297540	4.789071	$S=1.297540t^2 + 4.789071$
2	1.242245	4.253551	$S=1.242245t^2 + 4.253551$
3	1.272862	4.592896	$S=1.272862t^2 + 4.592896$
4	1.242245	4.253551	$S=1.242245t^2 + 4.253551$

Tabla IV-17. (b). Parámetros A y B y ecuaciones que representan al M.U.A. Tratamiento IV.

Repetición	r Coeficiente de correlación	t calculada	t _{95%}	t _{99%}
1	0.996822	33.109	1.895	2.998
2	0.997537	37.628	1.895	2.998
3	0.997094	34.633	1.895	2.998
4	0.997537	37.628	1.895	2.998

Tabla IV-17. (c). Coeficientes de correlación y t's de Student calculada, al 95% y al 99% para el tratamiento IV. M.U.A.

Análisis de las Tablas Comparativas.

Los datos de las tablas IV-14 (a), IV-15 (a), IV-16 (a) y IV-17 (a), se ajustaron a una línea recta haciendo la consideración de que la velocidad inicial del movimiento es nula, - siendo la ecuación de regresión para ésta tendencia de la siguiente forma:

$$Y = A X + B$$

Es de esperarse que la ordenada al origen sea cero, sin embargo al observar las tablas IV-14 (b), IV-15 (b), IV-16 (b) y IV-17 (b); se aprecia que la ordenada al origen es mayor de cero, indicandonos con esto que su desplazamiento no parte de cero, sino de una posición diferente de éste, la cual se encuentra especificada por B, en cada repetición de todos los tratamientos.

Analizando los coeficientes de correlación reportados en las tablas IV-14 (c), IV-15 (c), IV-16 (c) y IV-17 (c), se puede decir que existe una buena correlación entre las variables, pues sus valores fluctúan entre 0.9940 y 0.9975 indicando con esto, que existe una buena correlación entre las variables y que los puntos muestrales de los experimentos están casi sobre una línea recta de pendiente positiva.

Al contrastar los valores de las t 's calculadas con los críticos de la distribución t al 95% y 99% de niveles de significación en un problema unilateral, se tiene que:

$$t_c > t_{95\%}$$

$$y \quad t_c > t_{99\%}$$

Infiriendo con esto que el coeficiente de correlación obtenido no es debido al azar sino que existe una correlación real, rechazando la hipótesis nula y afirmando que el coeficiente de correlación de los 16 experimentos es significativo, mostrando con ésto la bondad del método propuesto.

CONCLUSIONES

Después de analizar el trabajo realizado, se llegó a las siguientes conclusiones:

- La bondad del experimento queda demostrada a través de las pruebas aplicadas, tanto en el método propuesto para los alumnos como en el método estadístico; se aprecia que los valores obtenidos por ambos métodos son muy cercanos, corroborando así la precisión del experimento.

- Se observa que el método propuesto para el tratamiento de resultados no es complicado y está de acuerdo con el nivel de los alumnos que van a aplicarlo, pues se basa en cálculos matemáticos sencillos que son de fácil comprensión para los estudiantes.

- En el aspecto didáctico, el método propuesto tiene la intención de llevar al alumno de una etapa concreta hacia una etapa hipotético-deductiva, estructurando con esto su pensamiento e involucrandolo más con la materia, lográndose así un estudiante más activo y con mayor capacidad de análisis.

- Se aprecia que el método propuesto trata de ser formativo y no informativo, llevando al estudiante a una participación más activa dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, intentando con esto que la posición pasiva del alumno ante el proceso del conocimiento disminuya o en el mejor de los casos, se elimine.

- Las suposiciones planteadas de que el método propuesto va a despertar la curiosidad y deseos de investigar del alumno, así como que se progresa en la interacción con otras áreas del conocimiento, no fueron probadas en el presente trabajo, ya que la finalidad de éste es proponer prácticas sobre movimiento en una dirección desde el punto de vista de la cinemática, dejando la posibilidad de tratar estos puntos en otro trabajo.

RECOMENDACIONES

Se recomienda tomar dos o tres fotografías de cada desplazamiento del balón con la finalidad de seleccionar la mejor toma.

Si la fotografía muestra pocas imágenes del objeto en movimiento, se recomienda aumentar la frecuencia de la lámpara - estroboscópica.

En caso de tener fotografías que presenten imágenes con muy poca separación entre ellas, se recomienda bajar la frecuencia del estroboscopio o, seguir el método opcional para el tratamiento de datos.

Debido a la prontitud con que se obtiene la fotografía, se recomienda el uso de cámara Pelaroid.

Se recomienda que de no contarse con un espacio para el revelado de la película fotográfica, se adapte uno en el mismo laboratorio y que sea el propio alumno quien lo revele.

El método propuesto se recomienda también para la práctica de Caída Libre y Tiro Vertical, así como la obtención de la constante de gravedad.

Como una forma de relacionar a la algebra con el movimiento (en cinemática), se sugiere calcular los parámetros tanto - del movimiento rectilíneo uniforme, como del movimiento uniformemente acelerado, empleando las series aritméticas planteadas por Gauss. Una explicación de las series aritméticas de Gauss se encuentra en el apéndice D.

A P E N D I C E A

BASES DE LA TÉCNICA FOTOGRAFICA

Fundamentos.

Existen sustancias que reaccionan a la luz, como en el caso de algunos pigmentos y frutas maduras, que se decoloran por acción de la luz solar. Algunos compuestos químicos que responden rápidamente a la acción de la radiación electromagnética son las sales de plata; entre éstas, las que muestran mayor sensibilidad a la acción de la luz son el nitrato de plata (AgNO_3) y los halogenuros de plata como el bromuro de plata (AgBr); los cuales son los más comúnmente empleados en la elaboración de películas fotográficas.

Una película fotográfica está compuesta generalmente por: una base de triacetato, que es plástico; nitrato de plata que es sensible a la luz, y posee también un halogenuro para acelerar la exposición; todo esto se adhiere al plástico con un aglutinante (gelatina natural), el cual hace posible que se curve la película.

Al incidir sobre los cristales de nitrato de plata, la radiación electromagnética hace que algunos electrones abandonen sus posiciones. Se cree que se mueven erráticamente dentro del cristal hasta que quedan finalmente congregados en la superficie de éste, pero debido a las acciones de sus cargas eléctricas se rompen las uniones entre la plata y el nitrato. Los iones de plata que se separan de los iones de nitrato, recuperan las características normales de la plata, dando lugar a un cambio en la película original, lo que se evidencia con la presen

cia de manchas opacas en los sitios donde se realizó el proceso anterior. A ésta distribución se le llama Imagen Latente.

Debido que sólo unos pocos átomos de plata se depositan en cada cristal, la imagen es muy débil, por lo que hay que tratarla posteriormente con una sustancia química llamada revelador. El revelador tiene como función liberar mayor número de átomos de plata, éste proceso normalmente es muy lento, tomando varias horas para llevarse a cabo, pero cuando hay presentes en el cristal algunas partículas de plata metálica, éstas actúan como núcleos mediante los cuales la plata se deposita rápidamente. En ésta forma el proceso emplea pocos minutos para desarrollar la totalidad del cristal; se ha calculado que por cada átomo de plata que se tenía inicialmente en la Imagen Latente, después de estar en contacto con el revelador se forman un mil millones (10^9) de átomos de plata más.

El tiempo que permanecerá la película en el revelado debe ser el suficiente para que la mayoría de los cristales que se expusieron a la radiación sean revelados y sólo quedan unos pocos sin exponer.

Después de revelar la emulsión, se sumerge en otra sustancia química llamada fijador, la cual remueve el nitrato de plata residual, ya que de no ser así una exposición posterior a la luz podría causar oscurecimiento adicional.

El proceso anterior da como resultado un "negative", que es una fotografía en donde todas las áreas originalmente blancas aparecen oscuras en la película, y las superficies origi-

nalmente oscuras se tornan blancas. Al elaborar una "copia" del negativo, se invertirán las áreas oscuras y blancas, obteniendo así los claros-oscuros originales; éste se hace pasando de la luz a través del negativo a una hoja de papel recubierta con emulsión; a su vez éste se revela y se obtiene finalmente la fotografía.

Si una fotografía se amplifica a varios tamaños se podrá observar la estructura granular de ésta.

Cá m a r a F o t o g r á f i c a

En esta sección se nombrarán las partes más importantes de la cámara fotográfica y algunos conceptos elementales referentes a la fotografía.

- 1.- Viser. Sirve para encuadrar la imagen que se desea fotografiar.
- 2.- Obturador. Determina el tiempo en que la luz pasará a través de la cámara y actuará sobre la película al oprimir el disparador.
- 3.- Disparador. Hace que actúe el sistema de obturación con la velocidad determinada en la cámara.
- 4.- Diafragma. Regula la cantidad de luz que va a penetrar en la cámara y que actuará sobre la película.

Los diafragmas se regulan por los números "f" (distancias focales), 1.4, 2.8, 4, 5.6, 8, etc. A menor número "f" mayor abertura, a mayor número "f" menor abertura. El

diafragma crea la densidad del negativo y controla la profundidad de campo; un negativo denso es aquel que deja pasar poca luz. Entre más transparente sea el negativo, mayor cantidad de luz pasará. Un negativo bien expuesto es el que tiene buen contraste entre el blanco y el negro, pasando por toda la gama de grises.

- 5.- **Luminosidad.** Es la máxima admisión de luz que puede captar una cámara y se establece con el número menor del diafragma, o sea la máxima abertura del diafragma.
- 6.- **Exposición fotográfica.** Es el tiempo y cantidad de luz que van a trabajar sobre la película.
- 7.- **Sensibilidad.** Está dada por el tamaño de los cristales de la película; si su grano es grueso, tendrán mayor sensibilidad. Si su grano es fino, la sensibilidad será menor.

La sensibilidad está anotada en la película por medio de los números ASA (Inglés) ó por los números DIN (Alemán), entre estos existe una relación logarítmica de aproximadamente 3. Los números ISO son la fusión de los ASA y los DIN.

Las sensibilidades ASA se pueden agrupar en:

- i) Sensibilidades bajas, de 25 a 80 ASA.
- ii) Sensibilidades medias, entre 80 y 200 ASA.
- iii) Sensibilidades altas, de más de 200 ASA.

Las sensibilidades bajas se utilizan en exposiciones con iluminación controlada para objetos estáticos, etc.

Las sensibilidades medias son las más comerciales, permitiendo trabajar en varias condiciones.

Con sensibilidades altas se reduce el tiempo de exposición.

8.- Velocidad de exposición. Tiempo que permanece abierto el obturador al tomar la fotografía.

El range que tienen las cámaras fotográficas van desde 1/1000 hasta 1 s, siendo éste último el de más baja velocidad de exposición, después del cual en el indicador de velocidades de exposición se encuentra la letra "B" que significa bulbe y que sirve para mantener el obturador abierto, cerrándose al saltar el disparador.

F o t o g r a f í a E s t r e b e s c ó p i c a

La fotografía estroboscópica es la que se realiza mediante destellos luminosos, producidos por descargas eléctricas - provenientes de una lámpara estroboscópica, la cual da nombre a esta técnica. Los destellos se pueden controlar mediante un mecanismo que determina el intervalo de tiempo entre destello y destello, encontrándose en la literatura que puede ser desde - 0.8 microsegundos hasta 3 microsegundos, (Meiners 1976, pag. 732). El número de destellos por unidad de tiempo determinará la cantidad de imágenes captadas en una exposición de película fotográfica.

Lo anterior se puede sincronizar con el tiempo de exposición del obturador de la cámara fotográfica. Esto ha permitido obtener fotografía en las cuales se muestra la secuencia en el movimiento de proyectiles, objetos en caída, el aleteo de un coque, etc.

La fotografía estroboscópica fue introducida por Mach hace aproximadamente un siglo, la complejidad de la técnica hizo que se utilizara solamente en laboratorios de investigación. Las recientes contribuciones de esta fotografía debidas a H. E. Edgerton, del Instituto Tecnológico de Massachusetts, ayudarán grandemente a la simplificación del procedimiento, de tal manera que hoy en día se usa la fotografía estroboscópica como un medio didáctico auxiliar en la enseñanza de ciertos contenidos.

Se puede señalar que la fotografía estroboscópica se divide, dependiendo de la técnica que se use para la toma de fotografía, en dos grupos: La fotografía rápida y la fotografía múltiple.

Fotografía Rápida.

En ésta se toma un sólo destello de la lámpara estroboscópica registrando solamente un instante del fenómeno por estudiar. Dependiendo del tipo de cámara fotográfica que se emplee, pueden tenerse a su vez dos variantes: la que toma una sola fotografía del fenómeno al presentarse el destello de la lámpara estroboscópica y la que toma una serie de fotografías continuamente, teniendo así una foto para cada destello. En esta técnica se emplea una cámara de las usadas en el cine, que son de muy alta velocidad, lo que permite tener la secuencia del fenómeno.

Fotografía Múltiple.

En la fotografía múltiple, se toman diferentes instantes del fenómeno por estudiar sobre una sola exposición, quedando la secuencia del movimiento sobre una sola fotografía. El número de imágenes en la fotografía estará determinada por la cantidad de centelleos que emite la lámpara estroboscópica y que son captados por la cámara mientras el obturador se mantiene abierto.

Al emplear la técnica estroboscópica hay que tener en cuenta las especificaciones de la lámpara, por ejemplo los datos que se tienen en la tabla A-1; habrá que considerar también la potencia de iluminación, pues dependiendo de ésta se podrá fijar la superficie por iluminar, así como el tipo de película que se necesite.

Range de velocidad (rpm)	Centelleo por minuto	Duración del centelleo ^a (microsegundos)
Bajo	700 - 100	3.0
Medio	4200 - 600	1.2
Alto	25000 - 40000	0.2

^a Se toma a partir de 1/3 del pico de intensidad de la luz.

Tabla A-1. Datos técnicos para un Strobac tipe 1531-A, (Meinera, 1976, pag. 732).

Otro punto que se debe considerar al usar esta técnica es

la intensidad de luz que emite el centelleo, pero como no se puede medir por ser emitida en fracciones muy pequeñas de tiempo, lo que se recomienda es consultar las tablas técnicas del fabricante, en cuanto a intensidad de luz y su relación con la distancia, para poder determinar la abertura del diafragma en la cámara.

La combinación del estroboscópio con la cámara Pelareid, permite al investigador obtener, casi instantáneamente, fotografías de un suceso y los resultados ser revisados rápidamente. De aquí que la técnica estroboscópica pueda ser usada con gran facilidad por los estudiantes en el laboratorio.

A P P E N D I C E B

METODO OPCIONAL PARA EL TRATAMIENTO DE DATOS

En el procedimiento seguido en el capítulo III, se obtuvieron valores de velocidades medias y/o aceleraciones medias entre punto y punto, relacionandolas con el tiempo medio, como un intento de acercamiento a las velocidades y/o aceleraciones instantáneas. En el procedimiento que aquí se propone, se obtienen las velocidades y/o aceleraciones medias en intervalos de cinco puntos, disminuyendo en forma apreciable los errores y aumentando la precisión del tratamiento de datos; puesto que al tener el balón un diámetro de 2.54 cm, cada medición de punto a punto tiene una incertidumbre de ± 1.27 cm, incertidumbre que se presenta ahora cada cinco puntos, ocasionando que disminuya el porcentaje promedio de desviación de cada modelo matemático.

Con la finalidad de demostrar que siguiendo este método - las desviaciones se reducen, se hace un resumen del tratamiento sin detallar cálculos, empleando para el caso del movimiento rectilíneo uniforme los datos del experimento número tres, correspondientes al tiro del balón desde una altura de cinco centímetros de la rampa con respecto al nivel del riel. Para el movimiento uniformemente acelerado, se utilizan los datos del experimento número dos, correspondientes al desplazamiento del balón sobre un riel que forma un ángulo de treinta grados con respecto a la mesa de trabajo.

Tratamiento de Datos del Movimiento Rectilíneo Uniforme

Tiempo (μ e)	Desplazamiento (cm)
0	0
1	3.6
2	7.2
3	10.7
4	14.3
5	17.6
6	21.2
7	24.8
	...

Tabla B- 1

8	28.1
9	31.5
10	35.2
11	38.5
12	41.9
13	45.5
14	48.8
15	51.9
16	55.5
17	59.1
18	62.2
19	65.6
20	69.0
21	72.1
22	75.5
23	78.7

Tabla B - 1

Tomando dos pares de puntos de la tabla B-1, se llega al siguiente modelo matemático para el desplazamiento:

$$s = (3.44 \text{ cm/ue }) t$$

a partir de este modelo se calculan los desplazamientos teóricos (S_T) para contrastarlos con los desplazamientos experimentales (S_E), haciendo una evaluación de la desviación absoluta y del porcentaje de desviación; de esta manera se establece la precisión del modelo.

Tiempo (ue)	Despl. Exp. (S_E) (cm)	Despl. Teórico (S_T) (cm)	Desviación absoluta $E_a = S_E - S_T$	Porcentaje de desviación $\%E = 100E_a/S_T$
0	0	0	0	0
1	3.6	3.44	0.16	4.65
2	7.2	6.88	0.32	4.65
3	10.7	10.32	0.38	3.68
4	14.3	13.76	0.54	3.92
5	17.6	17.20	0.40	2.32
6	21.2	20.64	0.56	2.71
7	24.8	24.08	0.72	2.99
8	28.1	27.52	0.58	2.10
9	31.5	30.96	0.54	1.74
10	35.2	34.40	0.80	2.32
11	38.5	37.84	0.66	1.74
12	41.9	41.28	0.62	1.50
13	45.5	44.72	0.78	1.74
14	48.8	48.16	0.64	1.32
15	51.9	51.60	0.30	0.58

...

16	55.5	55.04	0.46	0.83
17	59.1	58.48	0.62	1.06
18	62.2	61.92	0.28	0.45
19	65.6	65.36	0.24	0.36
20	69.0	68.80	0.20	0.29
21	72.1	72.24	0.14	0.19
22	75.5	75.68	0.18	0.23
23	78.7	78.12	0.42	0.53

Tabla B - 2 Evaluación de los desplazamientos teóricos con los experimentales.

Suma de desviaciones absolutas	10.54
Suma de por ciento de desviación	41.9
Desviación absoluta promedio	0.43
Promedio de por ciento de desviación	1.74

Siendo la precisión del modelo $\delta = (3.44 \text{ cm/ue})$ t de 1.74%

Como siguiente paso, se realiza el cálculo de las velocidades medias cada cinco puntos, obteniéndose con estos datos, la velocidad promedio así como la evaluación de la desviación absoluta y el por ciento de desviación, para establecer la precisión del modelo.

$$v = 3.42 \text{ cm/ue}$$

Intervalo de tiempo	Tiempo medio (ue)	Vel. Exp. v_e (cm/ue)	Vel. Teórica v_t (cm/ue)	Desviación absoluta $E_a = v_e - v_t$	Porcentaje de desv. $\%E = 100E_a/v_t$
0 - 5	2.5	3.52	3.42	0.10	2.92
1 - 6	3.5	3.52	3.42	0.10	2.92
2 - 7	4.5	3.52	3.42	0.10	2.92
3 - 8	5.5	3.48	3.42	0.06	1.75
4 - 9	6.5	3.44	3.42	0.02	0.58
5 -10	7.5	3.52	3.42	0.10	2.92
6 -11	8.5	3.46	3.42	0.04	1.17
7 -12	9.5	3.42	3.42	0.00	0.00
8 -13	10.5	3.48	3.42	0.06	1.75
9 -14	11.5	3.46	3.42	0.04	1.17
10 -15	12.5	3.34	3.42	0.08	2.34
11 -16	13.5	3.40	3.42	0.02	0.58
12 -17	14.5	3.44	3.42	0.02	0.58
13 -18	15.5	3.34	3.42	0.08	2.34
14 -19	16.5	3.36	3.42	0.06	1.75
15 -20	17.5	3.42	3.42	0.00	0.00
16 -21	18.5	3.32	3.42	0.10	2.92
17 -22	19.5	3.28	3.42	0.14	4.09
18 -23	20.5	3.30	3.42	0.12	3.51

Tabla B - 3

Suma de desviaciones absolutas	1.24
Suma de por ciento de desviación	36.21
Desviación absoluta promedio	0.065
Promedio de por ciento de desviación	1.906

Al analizar los resultados anteriores, se admite la hipótesis de que en un movimiento rectilíneo uniforme la velocidad es constante, puesto que el promedio del por ciento de error fué de 1.906 %.

Tratamiento de Datos del Movimiento Uniformemente Acelerado

Tiempo (ue)	Desplazamiento (cm)
0	0
1	4.5
2	10.6
3	18.0
4	27.0
5	37.3
6	48.7
7	61.6
8	75.7
9	90.8

Tabla B - 4 Datos del experimento número dos correspondientes al desplazamiento del balón sobre un riel que forma un ángulo de 30° con respecto a la mesa de trabajo.

Tomando dos pares de puntos de la tabla B -4, se llega al siguiente modelo matemático para el desplazamiento.

$$S = (0.68412 \text{ cm/ue}^2) t^2 + (3.93176 \text{ cm/ue}) t$$

A partir de este modelo, se calculan los desplazamientos teóricos (S_T) para contrastarlos con los desplazamientos experimentales (S_E), haciendo una evaluación de la desviación absoluta y del por ciento de desviación; de esta manera se establece la precisión del modelo.

Tiempo (ue)	Despl. Exp. S_E (cm)	Despl. Teórico S_T (cm)	Desviación absoluta $E_a = S_E - S_T$	Porcentaje de desv. $\%E = 100E_a/S_T$
0	0	0.00	0.00	0.00
1	4.5	4.62	0.12	2.60
2	10.6	10.60	0.00	0.00
3	18.0	17.95	0.05	0.28
4	27.0	26.67	0.33	1.24
5	37.3	36.76	0.54	1.47
6	48.7	48.22	0.48	1.00
7	61.6	61.04	0.56	0.92
8	75.7	75.24	0.46	0.61
9	90.8	90.80	0.00	0.00
Suma de desviaciones absolutas			2.54	
Suma de porcentaje de desviación			8.12	
Promedio de desviación absoluta			0.25	
Promedio de porcentaje de desviación			0.81	

Tabla B-5 Evaluación de los desplazamientos teóricos con los experimentales.

La precisión del modelo $3 = (0.6842 \text{ cm/ue}^2) t^2 + (3.93176)t$ es de 0.81 % en promedio.

Como siguiente paso se efectúa el cálculo de las velocidades medias cada cinco puntos.

Intervalo de tiempo	Tiempo medio (ue)	Velocidad media (cm/ue)
0 - 5	2.5	7.46
1 - 6	3.5	8.84
2 - 7	4.5	10.20
3 - 8	5.5	11.54
4 - 9	6.5	12.76

Tabla B-6 Datos de las velocidades experimentales

Con los datos de la tabla B-6, se determina la expresión matemática que relaciona la velocidad en función del tiempo, obteniéndose:

$$v = (1.35 \text{ cm/ue}^2) t + 4 \text{ cm/ue}$$

Tomando como base este modelo, se calculan las velocidades teóricas (v_T) para contrastarlas con las velocidades experimentales

les (V_E), haciendo una evaluación de la desviación absoluta y del por ciento de desviación, estableciendo de esta forma la precisión del modelo.

Intervalo de tiempo	Tiempo medio (ue)	Vel. Exp. V_E (cm/ue)	Vel. Teórica V_T (cm ^T / ue)	Desviación absoluta $E_a = V_E - V_T$	Porcentaje de desv. $\%E = 100E_a/V_T$
0 - 5	2.5	7.46	7.38	0.08	1.04
1 - 6	3.5	8.84	8.73	0.11	1.26
2 - 7	4.5	10.20	10.08	0.12	1.19
3 - 8	5.5	11.54	11.43	0.11	0.96
4 - 9	6.5	12.76	12.77	0.01	0.08
Suma de desviaciones absolutas				0.43	
Suma de porcentaje de desviación				4.53	
Promedio de la desviación absoluta				0.09	
Promedio del porcentaje de desviación				0.91	

Tabla B-7 Evaluación de la velocidad teórica con la experimental

La precisión del modelo $v = (1.35 \text{ cm/ue}^2) t + 4 \text{ cm/ue}$, determinado a partir de los puntos (5,5, 11.54) y (3.5, 8.84) es de 0.91 % en promedio.

A partir de los datos de la tabla B-6, se hace el cálculo de las aceleraciones medias, como una aproximación a la aceleración instantánea.

Intervalo de tiempo	Tiempo medio (ue)	Aceleración media ₂ (cm/ue ²)
2.5 - 3.5	3	1.38
3.5 - 4.5	4	1.36
4.5 - 5.5	5	1.34
5.5 - 6.5	6	1.22

Tabla B-8 Datos de aceleraciones experimentales

Se procede a obtener el modelo de la aceleración y establecer la precisión de éste.

$$a = 1.33 \text{ cm/ue}^2$$

Intervalo de tiempo	Tiempo medio (ue)	Acel. Exp. a_E (cm/ue ²)	Acel. Teórica a_T (cm ^T / ue ²)	Desviación absoluta $E_a = a_E - a_T$	porcentaje de desv. $\%E = 100E_a/a_T$
2.5 - 3.5	3	1.38	1.33	0.05	3.75
3.5 - 4.5	4	1.36	1.33	0.03	2.25
4.5 - 5.5	5	1.34	1.33	0.01	0.75
5.5 - 6.5	6	1.22	1.33	0.11	8.27
Suma de desviaciones absolutas			0.20		
Suma de porcentaje de desviación			15.02		
Promedio de la desviación absoluta			0.05		
Promedio del porcentaje de desviación			3.75		

Tabla B-9 Evaluación de la aceleración teórica con la experimental.

Para finalizar, se presenta una recopilación de los modelos matemáticos obtenidos en esta sección, asentando su promedio de porcentaje de desviación y comparandolos con los modelos y promedios de porcentaje de desviación obtenidos en el capítulo III, así como con los modelos generales. Con el propósito de mostrar la disminución de los errores mediante la aplicación de este procedimiento.

Modelos matemáticos Generales	Modelos matemáticos Obtenidos en apéndice "B"	Modelos matemáticos Obtenidos en el capítulo III
① $S = v_0 t$ $v_0 = v = \text{cte.}$	$S = (3.44 \text{ cm/ue}) t$ (1.7%) $V = 3.42 \text{ cm/ue}$ (1.9%)	$S = (3.44 \text{ cm/ue}) t$ (1.7%) $V = 3.42 \text{ cm/ue}$ (4.3%)
② $S = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t$ $V = at + v_0$ $a = \text{cte.}$	$S = (0.68412 \frac{\text{cm}}{\text{ue}}) t^2 + (3.93176 \frac{\text{cm}}{\text{ue}}) t$ (0.8%) $V = (1.35 \frac{\text{cm}}{\text{ue}}) t + 4 \text{ cm/ue}$ (0.9%) $a = 1.333 \text{ cm/ue}^2$ (3.7%)	$S = (0.68412 \frac{\text{cm}}{\text{ue}}) t^2 + 4 \frac{\text{cm}}{\text{ue}} t$ (0.8%) $V = (1.333 \frac{\text{cm}}{\text{ue}}) t + 4 \frac{\text{cm}}{\text{ue}}$ (1.9%) $a = 1.333 \text{ cm/ue}^2$ (13.7%)

Tabla B-10 ① Modelos para el movimiento rectilíneo uniforme
② Modelos para el movimiento uniformemente acelerado

A P E N D I C E C

ANÁLISIS DE REGRESIÓN LINEAL Y CORRELACION

Con el análisis de regresión se puede obtener la expresión matemática que explique el comportamiento de un fenómeno; para ello, se representa en una gráfica el conjunto de puntos muestrales del experimento, obteniéndose un diagrama de dispersión en el cual se aprecia la tendencia de éste, lo que conduce a la forma general de la expresión matemática que se piensa puede explicar el comportamiento del fenómeno. Si el diagrama que se obtiene corresponde al de una línea recta, recibe el nombre de recta de regresión.

Para obtener la ecuación de regresión del fenómeno en cuestión, deben de determinarse los valores de los parámetros desconocidos; en el caso de la regresión lineal se tiene un modelo de la forma:

$$Y = AX + B$$

con dos parámetros desconocidos, que son la ordenada B al origen de la recta y su pendiente A .

Existen diferentes métodos para determinar los parámetros, aquí se emplea el de los mínimos cuadrados, el cual establece que "... de todas las rectas de regresión que se pueden ajustar al conjunto de puntos muestrales dados, la mejor es aquella que tenga la propiedad de que la suma de los cuadrados de sus residuos sea mínima", (Olivera y Zuñiga, 1977, pag. 9).

Si la regresión es lineal se tiene:

$$\min \sum_{i=1}^n d_i^2 = \min \sum_{i=1}^n (y_i - y_i')^2 ; \text{ ya que } d_i = y_i - y_i' \text{ y si además } y_i' = B + AX_i', \text{ entonces queda finalmente:}$$

$$\min \sum_{i=1}^n d_i^2 = \min \sum_{i=1}^n [y_i - (B + AX_i')]^2 \quad (C-1)$$

Con el propósito de que tengan un punto extremo, se iguala con cero las primeras derivadas parciales de la función con respecto a cada una de sus variables. Derivando con respecto a B la ecuación C-1 se obtiene:

$$\min \sum_{i=1}^n d_i^2 = \min \sum_{i=1}^n [y_i - (B + \Delta X_i)]^2 \quad [C-1]$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dB} \sum_{i=1}^n d_i^2 &= \frac{d}{dB} \sum_{i=1}^n [y_i - (B + \Delta X_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dB} [y_i - (B + \Delta X_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n 2 [y_i - (B + \Delta X_i)] (-1) \\ &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - B - \Delta X_i) \\ &= -2 \sum_{i=1}^n y_i - 2Bn - 2 \sum_{i=1}^n \Delta X_i = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \Delta X_i + Bn \quad [C-2]$$

derivando con respecto a A se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dA} \sum_{i=1}^n d_i^2 &= \frac{d}{dA} \sum_{i=1}^n [y_i - (B + \Delta X_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dA} [y_i - (B + \Delta X_i)]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n 2 \left[\bar{y}_1 - (B + AX_i) \right] - (X_i) \\
 &= -2 \sum_{i=1}^n (X_i y_i - BX_i - AX_i^2) \\
 &= -2 \left[\sum_{i=1}^n X_i y_i - B \sum_{i=1}^n X_i - A \sum_{i=1}^n X_i^2 \right] = 0 \\
 \sum_{i=1}^n X_i y_i &= A \sum_{i=1}^n X_i^2 + B \sum_{i=1}^n X_i \quad [C - 3]
 \end{aligned}$$

Por comodidad se eliminan los índices de las variables así como los límites de las sumatorias. Agrupando las ecuaciones [C - 2] y [C - 3], se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{aligned}
 Bn + A \sum X &= \sum y \\
 B \sum X + A \sum X^2 &= \sum Xy
 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones, se calculan los parámetros A y B, éstos son:

$$B = \frac{(\sum y)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum Xy)}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} \quad [C - 4]$$

$$A = \frac{n \sum Xy - (\sum X)(\sum y)}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} \quad [C - 5]$$

Para especificar el grado de confianza con que el modelo representa al fenómeno, se hace un estudio estadístico, empleando la correlación.

Partiendo de la ecuación que representa a la desviación estandar de "y":

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad [C - 6]$$

Por comodidad se eliminan el índice de la variable y los límites de la sumatoria. De [C - 6] se tiene:

$$s_y^2 = \frac{1}{n} \sum (y - \bar{y})^2$$

desarrollando el cuadrado y separando las sumas de los términos;

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{1}{n} \sum (y^2 - 2y\bar{y} - \bar{y}^2) \\ &= \frac{1}{n} [\sum y^2 - 2\bar{y}\sum y - n\bar{y}^2] \end{aligned}$$

pero $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y$

luego

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{1}{n} \left[\sum y^2 - \frac{2}{n} (\sum y)^2 + \frac{1}{n} (\sum y)^2 \right] \\ s_y^2 &= \frac{1}{n} \left[\sum y^2 - \frac{1}{n} (\sum y)^2 \right] \quad [C - 7] \end{aligned}$$

como

$$r = \frac{1 - \frac{s_{y/x}^2}{s_y^2}}{1} \quad [C - 8]$$

y

$$s_{y/x}^2 = \frac{\sum (y - y')^2}{n} \quad [C - 9]$$

substituyendo [C - 7] y [C - 9] en [C - 8], se obtiene:

$$r = \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{n} \sum y^2 - B \sum y - A \sum xy}{\frac{1}{n} \left[\sum (y - y')^2 \right]}}$$

$$r = \sqrt{\frac{\sum y^2 - \frac{1}{n} (\sum y)^2 - B\sum y - A\sum xy}{\sum y^2 - \frac{1}{n} (\sum y)^2}}$$

$$r = \sqrt{\frac{B\sum y - A\sum xy - \frac{1}{n} (\sum y)^2}{\frac{1}{n} [n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

Substituyendo B y A por sus valores dados en [C - 4] y [C - 5] se llega a:

$$r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}} \quad [C - 10]$$

Para establecer la confiabilidad de las medidas de correlación, se aplican las pruebas de significancia o de hipótesis por ejemplo, si se desea "probar la hipótesis de que el coeficiente de correlación de la población teórica es significativamente diferente de cero, se usa la variable

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

que tiene distribución t de Student con n-2 grados de libertad" (Olivera y Zúñiga, 1977, pag. 24)

A P P E N D I C E D

SERIES ARITMETICAS DE GAUSS

Empleando las series aritméticas planteadas por Gauss, es posible obtener los parámetros tanto del movimiento rectilíneo uniforme, como del movimiento uniformemente acelerado.

Gauss observó que cuando se tiene una serie de números en los cuales la diferencia entre sus números consecutivos es -- constante, la suma de todos esos guarismos es:

$$S = p + (p+r) + (p+2r) + (p+3r) + \dots + p + \{(n-1)r\} \quad (1)$$

Invirtiendo los términos del segundo miembro de la ecuación 1, se tiene:

$$S = \{p + (n-1)r\} + \{p + (n-2)r\} + \{p + (n-3)r\} + \dots + p \quad (2)$$

Sumando la ecuación 1 y la ecuación 2, se llega a:

$$2S = \{2p + (n-1)r\} + \{2p + (n-1)r\} + \{2p + (n-1)r\} + \dots + \{2p + (n-1)r\}$$

$$2S = n\{2p + (n-1)r\}$$

$$S = \frac{n}{2}\{2p + (n-1)r\}$$

$$S = \frac{n}{2}\{p + p + (n-1)r\}$$

pero si $u = p + (n-1)r$

entonces:

$$S = \frac{n}{2}\{p + u\} \quad (3)$$

En la ecuación 3:

p es el primer término de la serie

u es el último término de la serie

r la razón (diferencia entre dos
números consecutivos)

S valor de la suma

n el número de términos de la serie

Obtención de los Parámetros del Movimiento Rectilíneo Uniforme

Como ejemplo, se tienen los siguientes datos de desplazamiento y tiempos:

t (s)	X (cm)
0	5
1	9
2	13
3	17
4	21
5	25

La serie aritmética es: $5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25$, en donde la diferencia entre dos números consecutivos corresponde a la razón y para este caso es de 4, la cual es constante y corresponde a la velocidad.

ΔX	r
$9 - 5$	4
$13 - 9$	4
$17 - 13$	4
$21 - 17$	4
$25 - 21$	4

La posición inicial del móvil se aprecia en los datos proporcionados, la cual para este caso vale 5. El tiempo se obtiene

ne aplicando la fórmula siguiente:

$$t = n - 1$$

Los parámetros así obtenidos, se sustituyen en el modelo matemático general ($d = v_0 t + d_0$), para así llegar a la ecuación que representa al movimiento, que para este ejemplo es:

$$d = 4t + 5$$

Obtención de los Parámetros en el Movimiento Uniformemente Acelerado.

Como ejemplo, se tienen los siguientes datos de desplazamiento y tiempo:

t (s)	X (cm)
0	2
1	13
2	40
3	83
4	142
5	217
6	308

Al calcular la diferencia entre los números consecutivos de los datos de desplazamiento, indirectamente se esta obteniendo las velocidades medias (ec. L-9), pues los incrementos del tiempo son unitarios

ΔX	v_m
13 - 2	11
40 - 13	27
83 - 40	43
142 - 83	59
217 - 142	75
308 - 217	91

Analizando los valores de las diferencias obtenidas, se aprecia que entre éstas existe una razón constante, la que corresponde a la aceleración; pues al calcular la diferencia entre dos números consecutivos de la serie anterior (11 + 27 + 43 + 59 + 75 + 91), indirectamente se está obteniendo la aceleración media, que para este tipo de movimiento permanece -- constante pues los incrementos de tiempo son unitarios.

Δv	a
27 - 11	16
43 - 27	16
59 - 43	16
75 - 59	16
91 - 75	16

La velocidad inicial del móvil se calcula aplicando la ecuación siguiente:

$$v_0 = \frac{u - p - \frac{(r/2)(n-1)^2}{n-1}}{n-1} \quad (4)$$

En la ecuación 4;

p es el primer término de la serie de desplazamiento.

u es el último término de la serie de desplazamiento.

r la razón

n el número de términos de la serie de desplazamiento.

v_0 la velocidad inicial

entonces:

$$p = 2$$

$$u = 308$$

$$r = 16$$

$$n = 7$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 4, se tiene:

$$v_0 = \frac{308 - 2 - (16/2)(7-1)^2}{7 - 1}$$

$$v_0 = \frac{306 - 8(6)^2}{6} = \frac{306 - 8(36)}{6}$$

$$v_0 = \frac{306 - 288}{6} = \frac{18}{6}$$

$$v_0 = 3$$

La posición inicial del móvil se aprecia en los datos proporcionados, la cual para este caso vale 2.

Los parámetros así obtenidos, se sustituyen en el modelo matemático general ($d = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + d_0$), para así llegar a la ecuación que represente al movimiento, que para este ejemplo es

$$d = \frac{16}{2} t^2 + 3t + 2$$

$$d = 8t^2 + 3t + 2$$

B I B L I O G R A F I A

- 1.- Alense, Marcelo y Finn, J. Edward. Fundamental university physics, Mecánica, vol. I, Washington, D.C. Ed. Addison-Wesley, 1971
- 2.- Arens, B. Arnold. Evolución de los conceptos de la física, trad. Lorenzo Razo Morales y Elieser Braun, México, Ed. Trillas, 1970
- 3.- Brusselle, Michael. El libro guía de la fotografía. Enciclopedia Salvat de la Familia, vol.3, Barcelona, España. Ed. Salvat, 1980
- 4.- Cochran, G. William y Cox, M. Gertrude. Diseños experimentales, 9a reimp., México. Ed. Trillas, 1985
- 5.- Downie, M. y Heath, R. Métodos estadísticos aplicados, México, Ed. Harla, 1973
- 5.- Feynman, P. Richard y Leighton, B. Robert. Mecánica, radiación y calor, vol. I. Trad. Enrique Celiker L. et al. México, Ed. Fondo Educativo Interamericano, 1971
- 6.- Hazen, E. Wayne y Pidd, W. Robert. Física, trad. Francisco Calve Greco y Guillermo Calderón, Colombia, Ed. Norma, 1969
- 7.- Ingard, Uno y Krauskopf, L. Williams. Introduction to mechanics, matter and waves. 2a ed., United States of America, Ed. Addison-Wesley, -- 1961
- 8.- Jay, Orear. Física fundamental, trad. Guillermo Aguilar Sahagun y Raúl Gómez González, 2a ed., México, Ed. Limusa, 1974

- 9.- Little, T. M. y Hills, F. J. Métodos estadísticos para la investigación en la agricultura, México, Ed. Trillas, 1985
- 10.- Mc Kelvey, P. Jehn y Howard, G. Física para Ciencias e Ingeniería, trad. Sergio Hernández Everest, - México, Ed. Harla, 1980
- 11.- Meiners, F. Harry. Physics demonstration experiments, vol. I New York, Ed. The Ronald Press Company, 1970
- 12.- Olivera, S. Antonie y Zufiga, B. Sergio. Regresión y correlación, México, Ed. IMPOSA, 1977 (Serie de -- probabilidad y estadística, 7)
- 13.- Oyarzabal, Juan. Ensayos sobre mecánica clásica, México, - Ed. Facultad de ciencias, UNAM, 1975
- 14.- Piaget, Jean. Seis estudios de psicología, trad. Nuria Petit, 7ma ed., México, Ed. Ariel - Seix Barral, 1975
- 15.- Resnick, Robert y Halliday, David. Física I, trad. Salvador Mesqueira, 2a ed., México, Ed. Continental, 1977
- 16.- Sears, W. Francis y Zemansky W. Mark. Física general, trad. Albine Yusta Almaraz, 5a ed., Madrid, España Ed. Aguilar, 1974
- 17.- Spiegel, R. Murray. Estadística, México, Ed. Mc Graw Hill, 1985 (Serie Schaum)
- 18.- Valere, Michel. Diccionario de Física, Cali, Colombia, Ed. Norma, 1984

- 19.- Valere, Michel. Física 1, México, Ed. Fondo Educativo inter americanos, 1980
- 20.- Viniestra, Fermín. Una mecánica sin talachas, México, Ed. - SEP - FCE - CONACYT, 1986 (La ciencia desde México, 7)