



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

Teoría de Bifurcación con Aplicación
a Modelos de Población

T e s i s

Que para obtener el título de

Matemático

Presenta

Francisco Javier Solís Lozano

México, D. F. 1988



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

| | |
|--------------|----|
| INDICE | 0 |
| INTRODUCCION | 1 |
| CAPITULO I | 5 |
| CAPITULO II | 13 |
| CAPITULO III | 28 |
| CAPITULO IV | 38 |
| CAPITULO V | 62 |
| BIBLIOGRAFIA | 83 |

INTRODUCCION

El efecto de edad estructurada en la dinámica del sistema presa-depredador ha sido ampliamente estudiado. M. Gurtin y D. Levine [G-L] supusieron tal efecto para la población de las presas en el sistema presa-depredador del tipo Lotka-Volterra y estudiaron los efectos que ocasiona el hecho de que los depredadores se alimenten exclusivamente de presas de cierta edad. Ellos encontraron que si los depredadores se alimentan únicamente de las crías, el sistema resultante es inestable, con oscilaciones no acotadas en el número de ambas especies.

Generalmente las situaciones inestables se deben a que en el modelo se han despreciado interacciones de saturación importantes. Es el objeto de este trabajo el modelar nuevos mecanismos biológicos que son candidatos razonables a estabilizar el sistema obteniendo una descripción mas apropiada de la ecología. Resulta de particular interes estudiar la aparición de fenomenos periódicos estables. Las modificaciones que se realizan en el trabajo (introducir efectos de pesca en la población de los depredadores y canibalismo en la población de las presas) no se habian considerado anteriormente, por lo que los resultados obtenidos son originales. Otro factor muy importante es la auto-limitación de las presas, el cual ha sido estudiado por Levine [Le], aunque de manera distinta de como lo haremos aqui.

Como nos interesa observar la dependencia de los factores que hemos agregado y como dichos factores están representados como funciones dependientes de parámetros, una herramienta matemática muy útil para estudiar esta dependencia paramétrica es la teoría de bifurcación. Esta teoría la usaremos aquí y de hecho juega un papel muy importante en biología teórica.

La Teoría de Bifurcación fue desarrollada mucho antes de ser aplicada a problemas biológicos. Fue introducida por Poincaré en sus estudios de mecánica celeste. Fue después aplicada a problemas de ingeniería eléctrica. La teoría original tiene el inconveniente que es para sistemas de ecuaciones diferenciales en dos dimensiones, y como los sistemas de ecuaciones diferenciales que son necesarios para el estudio de sistemas biológicos tienen mayor dimensión, se necesitan resultados para sistemas n-dimensionales.

En el capítulo I se discute el modelo a estudiar en primera aproximación y en los capítulos posteriores se añaden efectos adicionales.

En el capítulo II expondremos los resultados de bifurcación necesarios para el estudio de nuestro problema.

En el capítulo III veremos técnicas analíticas relacionadas con la teoría de bifurcación. Básicamente se estudiarán las partes más elementales de la teoría de bifurcación de los ceros de una función. En particular supongamos que tenemos el operador

$$M(x, \lambda) = Bx - \lambda Ax + N(x, \lambda)$$

donde se cumplen ciertas condiciones sobre M. Entonces se mostrará que siempre hay bifurcación en los puntos $(0, \lambda_0)$

donde λ_0 es un valor propio simple de (B, A) . También consideraremos las bifurcaciones de Hopf, es decir, la bifurcación de soluciones periódicas.

En el capítulo IV describiremos las técnicas numéricas que emplearemos para la resolución del problema planteado en el primer capítulo. Se harán análisis de bifurcación

- Sistemas algebraicos de la forma

$$1) \quad F(u, \lambda) = 0, \quad u, \lambda \in \mathbb{R}^n$$

donde λ denota uno o más parámetros.

- Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:

$$2) \quad u'(t) = F(u(t), \lambda), \quad u, \lambda \in \mathbb{R}^n$$

para 1) - Se calcularán las ramas solución.

- Se localizarán los puntos límite.

- Se calcularán los puntos de bifurcación.

- Se localizarán los puntos de bifurcación de Hopf y su continuación en dos parámetros.

para 2) - Se calcularán las ramas de soluciones periódicas (estables o inestables).

- Se localizarán los puntos límite.

En el capítulo V se darán los resultados del análisis efectuado para el problema planteado en el capítulo I, así como los resultados obtenidos para los problemas que surgen de incorporar los factores que se habían mencionado anteriormente.

Quiero agradecer a mi director de tesis, Dr. Benito Chen Charpentier, su apoyo en la elaboración de este trabajo, así

como la gran ayuda que me brindó a lo largo de la carrera. Agradezco al Dr. Antonmaría Minzoni por la inagotable paciencia que me tuvo y por sus valiosas aportaciones a este trabajo.

CAPITULO I

El proposito de este capitulo es el de formular el problema de interacción de poblaciones tomando en cuenta la estructura en edad de las mismas.

Antes de discutir el modelo cabe aclarar dos puntos:

a) Solo se estudiarán las interacciones presa-depredador donde los depredadores comen solo crías de la presa, o equivalentemente huevos. Esto podría sugerir una inutilidad del problema estudiado, pero se puede conjeturar que algunas pestes provocadas por insectos pueden ser controladas biologicamente por depredadores come-crias. En [Ha] se da una variedad de insectos parasitoides que afectan principalmente a los huevos o larvas de otras especies, y como los parasitos generalmente matan a sus huéspedes, el comportamiento cualitativo de tales sistemas (parásito-huésped) es en muchos aspectos similar al de un sistema presa-depredador.

b) El modelo usado esta basado en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias derivados de variantes de la ecuación de evolución de McKendrick-von Foerster.

EL MODELO

El modelo de edad estructurada empleado aquí ha sido desarrollado para una sola población por Mc Kendrick MC y elaborado por Gurtin y MacCamy [G-M].

Si $P(w,t)$ es el número total de individuos de edad w al tiempo t , la cual al ser integrada sobre todas las edades, da la población total

$$P(t) = \int_0^{\infty} p(w,t) dw \quad \dots (1)$$

El comportamiento de p es gobernado por la ecuación de evolución

$$p_w + p_t + \mu p = 0 \quad \dots (2)$$

(llamada ecuación de McKendrick-von Foester).

que puede ser derivada, si uno considera el cambio del número de individuos en un intervalo de edades, digamos $(w, w+\Delta w)$, $h = \Delta w$ uno obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_w^{w+h} P(z,t) dz = -\mu \int_w^{w+h} P(z,t) dz + P(w) - P(w+h)$$

Si dividimos entre h obtenemos

$$\frac{1}{h} \int_w^{w+h} P_t(z,t) dz = -\frac{\mu}{h} \int_w^{w+h} P(z,t) dz - \frac{P(w+h) - P(w)}{h}$$

al hacer tender a h a cero, obtenemos nuestra ecuación.

Aquí μ es la función que describe el proceso de muerte, es decir la tasa de mortalidad de individuos de edad w en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$. μ podría ser función de w (edad), de $P(t)$ (población total) o del número de individuos de otra población (de los depredadores si P representa a la presa). En nuestro caso consideraremos a μ independiente de la edad.

Asumimos que la tasa de natalidad de la población es, en cada tiempo t , dada por una ley de nacimiento de la forma:

$$B(t) = \int_0^{\infty} \beta(w) \rho(w, t) dw \dots \dots \dots (3)$$

donde $\beta(w)$ es la tasa de reproducción de individuos de edad w . Se esperaría que dicha tasa fuese cercana a cero para las crías y los viejos y se incrementara a un máximo para los jóvenes. Nosotros consideraremos a β de la forma:

$$\beta(w) = \beta_0 w e^{-\alpha w} \dots \dots \dots (4)$$

para $\beta_0 > 0$ y $\alpha \geq 0$

Si $\alpha > 0$ la función de nacimiento exhibe un comportamiento que es realista para muchos mamíferos. Si $\alpha = 0$ la función de nacimiento es de una forma que puede ser apropiada para ciertas especies de peces, donde la fecundidad incrementa con la edad.

Las ecuaciones que definen los modelos de depredación de edad estructurada serán derivados de (1) - (4). Para cada caso específico hay una variación en:

- 1) La dependencia de la función de supervivencia μ .
- 2) La tasa de supervivencia de los recién nacidos, la cual determina la relación entre $\rho(0,t)$ y la función de nacimiento $B(t)$.
- 3) La dinámica del comportamiento del depredador.

En lo que sigue, trataremos de encontrar ecuaciones para la población total $P(t)$ y la población de las crías $B(t)$, para esto integremos (2) desde $w=0$ hasta $w=\infty$

obtenemos

$$\dot{P} = -\mu(P)P + \rho(0,t) \dots (5)$$

Ahora si multiplicamos (2) por $\beta_0 w e^{-\alpha w}$ integramos nuevamente y usando integración por partes obtenemos:

$$\dot{B}(t) = -(\mu(P) + \alpha)B(t) + \beta_0 \int_0^{\infty} e^{-\alpha w} \rho(w,t) dw \dots (6)$$

Para cerrar nuestras ecuaciones definamos

$$A(t) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha w} \rho(w,t) dw.$$

ahora tratemos de encontrar una ecuación para A, para esto multipliquemos (2) por $e^{\lambda t}$ integramos nuevamente y usando integración por partes se tiene:

$$\lambda(t) = -(\mu(P) + a)A + p(0,t) \dots (7)$$

Vamos a asumir que P(t) representa la población de las presas (que cambiaremos por $P_1(t)$).

A dicho sistema le agregaremos la población de depredadores

$$P_2(t).$$

Hay que encontrar una ecuación para $p(0,t)$ en término de B(t) que son los nacimientos. La primera idea es la de cerrar el sistema tomando

$$p(0,t) = \lambda B(t)$$

es decir que el número de individuos de edad cero es proporcional al número de nacimientos.

Por otra parte las crías $p(0,t)$ son comidas por los depredadores de la población P_2 y lo usual es suponer que la muerte está dada por $\mu B(t) P_2(t)$. De donde la cantidad neta es

$$p(0,t) = \lambda B(t) - \mu B(t) P_2(t) = \lambda B(t) \left(1 - \frac{\mu}{\lambda} P_2(t)\right) \dots (*)$$

este término es negativo para P_2 grande y para evitar este comportamiento y mantener el comportamiento deseado para P_2 pequeño es habitual reescribir (*) como

$$p(0,t) = \frac{\lambda B(t)}{1 + \frac{\mu}{\lambda} P_2(t)} + O(P_2^2)$$

y utilizar esta última forma (saturada en P_2) como el modelo propuesto.

Nosotros consideraremos que el número de $e(0, t)$ es proporcional al número de nacimiento $B(t) - kP_2 B$, por lo que

$$p(0, t) = \frac{B}{1 + kP_2} \dots (8)$$

La función μ en (2) se asume que depende linealmente de $P_2(t)$ en el caso general, pero en el caso comensales es una constante, ya que la depredación no tiene efectos en los animales grandes.

Supondremos que la población $P_2(t)$ obedece a una ecuación del tipo Lotka-Volterra pero comen únicamente de las crías de la población $B(t)$.

Esta hipótesis junto con las ecuaciones (1) - (8) nos llevan al siguiente sistema para $P_1(t)$, $B(t)$, $A(t)$ y $P_2(t)$.

$$\dot{P}_1 = -\mu P_1 + \frac{B}{1 + kP_2}$$

$$\dot{B} = -\gamma B + \beta_0 A$$

$$\dot{A} = -\gamma A + \frac{B}{1 + kP_2}$$

$$\dot{P}_2 = -bP_2 + cBP_2$$

donde b , c , $\gamma - \alpha + \mu$ son constantes positivos.

Supondremos que $\beta_0 > \gamma^2$ que significa pedir que la tasa de reproducción de la presa es al menos 1.

Arregamos a la última ecuación del sistema el término $\lambda \{1 - \exp(-dP_2)\}$ que puede ser pensado como la pesca representante. El parámetro λ es la cota de pesca por unidad de tiempo. Si la población de los depredadores es pequeña la cota no puede ser hallada.

Finalmente el modelo resultante es:

$$\dot{P}_1 = -\mu P_1 + \frac{B}{1+kP_2}$$

$$\dot{B} = -\gamma B + \beta_0 A$$

$$\dot{A} = -\gamma A + \frac{B}{1+kP_2}$$

$$\dot{P}_2 = -bP_2 + cBP_2 - \lambda \{1 - e^{-dP_2}\}$$

Que en forma abstracta se puede escribir como

$$u' = F(u, \sigma)$$

donde u es la solución buscada y σ es el vector de parámetro.

La coexistencia estática de dos especies se refleja en los puntos de equilibrio $F(u, \sigma) = 0$ que son estables mientras que la coexistencia dinámica se refleja en atractores estables del sistema que pueden ser orbitas periódicas, toros invariantes etc. El propósito de esta tesis es el de estudiar este

tipo de soluciones y su dependencia de las hipótesis sobre el comportamiento de las poblaciones.

A continuación describimos algunas de las técnicas analíticas y numéricas que usaremos para estudiar estos problemas.

CAPITULO II

IDEAS DE TEORIA DE BIFURCACION NECESARIAS PARA EL ESTUDIO DEL MODELO.

Un número considerable de fenómenos estudiados llevan al estudio de ecuaciones de la forma:

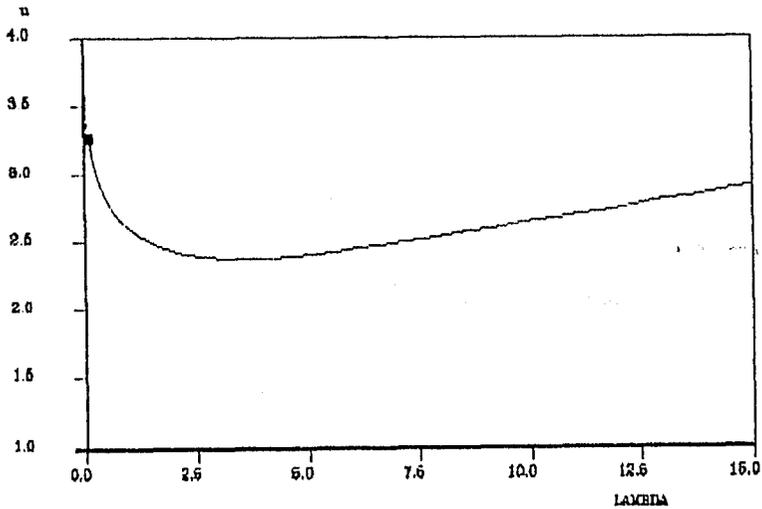
$$F(u, \lambda) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

donde F es un operador (en general) no lineal, u representa la solución buscada en un espacio de dimensión infinita y λ un vector de parámetros (en número finito, el tiempo puede ser uno de ellos).

La situación más simple ocurre cuando (1) tiene una única solución, la cual es función de λ por lo que la solución puede ser escrita como:

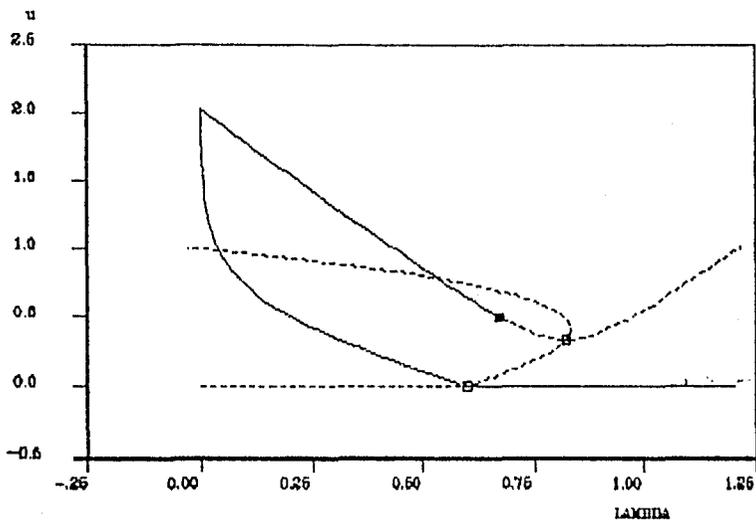
$$u = u(\lambda)$$

Esta situación puede ser representada por el siguiente diagrama:



(se debe de tener cuidado en ésta interpretación, ya que en general u podría ser una función vectorial y podría no ser descrita por éstos ejes).

Una situación más general surge cuándo la solución de (1) no es una función de λ . En éste caso las gráficas pueden ser más complicadas como se muestra a continuación:



El objetivo de la Teoría de Bifurcación es analizar (1) cuándo las soluciones no son funciones explícitas de λ . Algunos ejemplos son:

a) $\omega'' + \lambda\omega = 0$
 $\omega(0) = \omega(\pi) = 0.$

La solución de ésta ecuación es

$$\omega = 0$$

si $\lambda^2 \neq m^2, m \in \mathbb{N}.$

si $\lambda = m^2,$

la solución es $\omega = A \sin mx$

$$b) \quad \phi = 1 + \lambda \int_0^1 \phi^2 dx$$

Esta ecuación se resuelve fácilmente si se eleva al cuadrado y se integra de 0 a 1. El resultado es:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi^2 dx &= 1 + 2\lambda \int_0^1 \phi^2 dx + \lambda^2 \left(\int_0^1 \phi^2 dx \right)^2 \\ \Rightarrow \int_0^1 \phi^2 dx &= \frac{1 - 2\lambda \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda^2} \end{aligned}$$

ahora si sustituimos este valor de la integral en la ecuación original se obtiene:

$$\phi = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda}$$

$$c) \quad y^2 + (1 - \lambda)y - \lambda\delta = 0$$

Las soluciones del problema de bifurcación correspondiente ($\delta=0$) son $y(\lambda)=0$ y $y(\lambda)=\lambda-1$.

Están representadas en el siguiente diagrama con las soluciones de c) para valores representativos de δ , (δ_1, δ_2).

Así que $\lambda=1, y=0$ es el único punto en donde el número de soluciones cambia.

Cuando $\delta \rightarrow 0$, las ramas perturbadas se aproximan a las ramas de bifurcación. Las ramas perturbadas $y(\lambda, \delta)$ son funciones suaves de λ para cada δ , pero las ramas solución $y(\lambda, 0)$ tienen una "esquina" en el punto $\lambda=1, y=0$.

Así que $y(\lambda, \delta) \rightarrow y(\lambda, 0)$ cuando $\delta \rightarrow 0$ de manera no uniforme en λ en cualquier intervalo que contenga a $\lambda=1$. Por lo cual c) es una perturbación singular del correspondiente problema de bifurcación.

Como hemos visto, en algún punto del espacio de soluciones de cierta ecuación se tiene más de una solución, por lo que una idea natural es la de linealizar las ecuaciones cerca del "punto de bifurcación" y reducir el problema al estudio local del comportamiento de las intersecciones.

Existen una gama de técnicas aplicables a éste tipo de problemas.

- 1) Teoría de Perturbaciones
- 2) Estudio de Singularidades
- 3) Sistemas Dinámicos
- 4) Análisis Variacional
- 5) Combinación de Monotonidad y de Teoría de Grado
- 6) Teoría de Grupos
- 7) Topología
- 8) Métodos Numéricos.

En $[Ra]$ se pueden observar numerosos ejemplos.

Evidentemente estas técnicas no son exclusivas ni exhaustivas y al enfrentarse a un problema, es aconsejable usar parte de aquellas que puedan ser útiles.

FORMULACION MATEMATICA DEL PROBLEMA DE BIFURCACION

Supongamos que $F(u, \lambda)$ está definida para u en un espacio de Banach B y a valores en otro espacio de Banach E y λ en un abierto $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$.

Supongamos que conocemos una solución particular $u(\lambda)$ que depende continuamente de λ y sea $v \in B \times \Lambda$ el conjunto

$$v = \{(u(\lambda), \lambda), \lambda \in \Lambda\},$$

llamado el conjunto de soluciones triviales a la ecuación

$$F(u, \lambda) = 0.$$

DEFINIMOS

$(u(\lambda_0), \lambda_0)$ punto de v como punto de bifurcación para la ecuación (1) si en cada vecindad de $(u(\lambda_0), \lambda_0) \in B \times \Lambda$ existe una solución de (1) que no pertenece a v .

Ejemplo

Considérese

$$M: X \times \Lambda \rightarrow Z$$

con $X-Z=X^*$, $M(x,\lambda)=Bx-\lambda x$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y B es un operador lineal, entonces todo valor propio λ_0 de B es un punto de bifurcación.

En efecto si λ_0 es un valor propio de B entonces $\forall \epsilon > 0$ existe

$$x_0 \in X$$

tal que $\|x_0\| = \epsilon$ y $Bx_0 = \lambda_0 x_0$.

Gráficamente se acostumbra representar esta situación por un diagrama de bifurcación donde en un eje se "representa" u con alguna característica, tal como su norma o la proyección sobre algún subespacio, y en otro alguna característica de λ .

Si definimos $x = u + u(\lambda)$ entonces $G(x,\lambda) = F(x + u(\lambda), \lambda)$ y la ecuación (1) es equivalente a

$$G(x,\lambda) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Aquí la familia $x=0$ es solución de (2).

La idea básica para buscar soluciones pequeñas, es decir cercanas a $(0, \lambda_0)$ (aquí supondremos $\lambda_0=0$), es el uso de un desarrollo de $G(x, \lambda)$ en una serie de Taylor.

Así pues, supongamos que

$$G(x, \lambda) = G(0, \lambda) + G_x(0, \lambda)x + g(x, \lambda)$$

donde $g(x, \lambda)$ es un residuo, con $\|g(x, \lambda)\| = o(\|x\|)$

$$\text{y } G(0, \lambda) = 0, \quad G_x(0, \lambda) = G_x(0, 0) + G_{x\lambda}(0, 0)\lambda + \dots$$

por lo que (2) se puede escribir

$$G(x, \lambda) = Ax - T(\lambda)x - g(x, \lambda) = 0 \dots \dots \dots (3)$$

donde A y $T(\lambda)$ son operadores lineales y

$$\|g(x, \lambda)\| = o(\|x\|), \quad T(0) = 0.$$

(Se usará además la hipótesis $\|g(x, \lambda)\| = o(\|x\| + |\lambda|^{2^m+1})$ en cuyo caso no necesariamente existe una curva de soluciones triviales) [Iz].

Supondremos además que A y $T(\lambda)$ son operadores lineales continuos de B a E , que $T(\lambda)$ es analítico en λ y que

$$\|g(x, \lambda) - g(x', \lambda')\|_E \leq C \{M(r) \|x - x'\|_B + |\lambda - \lambda'|\}$$

donde $M(r)$ es una función continua sobre \mathbb{R}^+ y $M(0) = 0$ para $\|x\|, \|x'\| \leq r$, λ, λ' pequeños.

Caso 1) Si A es invertible, entonces una solución a (3) es solución de

$$x = A^{-1}T(\lambda)x + A^{-1}g(x, \lambda)$$

como $\|T(\lambda)\|$ tiende a cero cuando λ tiende a cero y $g(0, \lambda) = 0$ entonces la única solución en éste caso es $x = 0$ y $(0, 0)$ no es un punto de bifurcación.

Caso 2) A es casi invertible, es decir A es un operador de Fredholm.

DEFINICION

A es un operador de Fredholm si :

- a) A es un operador continuo de B a E
- b) $\text{Ker } A$ es de dimensión finita d
- c) El rango de A , $R(A)$, es cerrado y de dimensión finita f

EJEMPLO

Si A es un operador cerrado en E con propiedades b) y c) entonces, tomando B como el dominio de A y con la norma de la gráfica

$$\|x\|_B = \|x\|_E + \|Ax\|_E$$

A es Fredholm.

Además de motivación técnica, al pedir que A sea Fredholm se cubre una gama amplia de ejemplos concretos, como operadores integrales entre otros; ver [Iz].

Caso 3) A es semi Fredholm, con sólo f finito, o es casi sobre, donde el teorema de Nash-Moser puede aplicarse [Iz].

En éste caso no hay Teoría de Bifurcación satisfactoria ya que el campo de estudio es completamente virgen.

De aquí en adelante nos restringiremos al segundo caso.

LIMITACION AL SEGUNDO CASO

Sean P y Q dos proyecciones, P de B sobre $\text{Ker } A$ y Q de E sobre $R(A)$, entonces

$$B = \text{Ker } A \oplus B_2$$

donde B_2 es un subespacio cerrado de B ,

$$E = E_2 \oplus R(A)$$

donde $R(A)$ es cerrado por definición y E_2 tiene dimensión f .

Por lo tanto $x \in B$ se escribe $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in \text{Ker } A$, $P(x_1) = x_1$.

Como A es continuo, uno a uno de B_2 sobre $R(A)$, existe un inverso K de $R(A)$ sobre B_2 , es decir

$$AKQ = Q, \quad KA(I-P) = I-P$$

entonces

$$A(x_1 + x_2) - T(\lambda)(x_1 + x_2) = g(x_1 + x_2, \lambda)$$

puede escribirse como

$$a) \quad Ax_2 - QT(\lambda)(x_1 + x_2) = Qg(x_1 + x_2, \lambda)$$

sobre $R(A)$.

$$b) \quad -(I-Q)T(\lambda)(x_1 + x_2) = (I-Q)g(x_1 + x_2, \lambda)$$

sobre E

aplicando K a a) se tiene:

$$x_2 - KQT(\lambda)(x_1 + x_2) = KQg(x_1 + x_2, \lambda)$$

es decir

$$(I - KQT(\lambda))x_2 = KQT(\lambda)x_1 + KQg(x_1 + x_2, \lambda).$$

Como T es continuo en λ y $T(0) = 0$, entonces $I - KQT(\lambda)$ es invertible para λ pequeño y la ecuación se escribe:

$$x_2 = (I - KQT(\lambda))^{-1} KQT(\lambda)x_1 + KQg(x_1 + x_2, \lambda)$$

ahora como $T(0) = 0$ y g es Lipchitz con la constante $M(r)$ pequeña, se puede usar el Teorema de Contracción de Banach, o cualquier versión del Teorema de la Función Implícita [C-H], para obtener para cada (x, λ) , una única solución $x_2(x, \lambda)$, (x, λ) en una vecindad de $(0, 0)$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con las siguientes estimaciones

$$\|x_2(x_1, \lambda) - x_2(x_1', \lambda')\|_B \leq C \left\{ M(r) \|x_1 - x_1'\|_B + |\lambda - \lambda'| + |\lambda| \|x_1 - x_1'\|_B \right\}$$

$$\|x_2(x_1, \lambda)\|_B \leq C \left\{ \|x_1\|_B^2 + |\lambda|^{2m+1} + |\lambda| \|x_1\|_B \right\}$$

para λ, λ' pequeños y $\|x_1\|_B, \|x_1'\|_B \leq r$

por lo tanto se ha reducido el estudio de $G(x, \lambda) = 0$ a un número finito de ecuaciones, con d incógnitas. De hecho usando las relaciones

$$I + (I - KQT(\lambda))^{-1} KQT(\lambda) = (I - KQT(\lambda))^{-1}$$

$$I + T(\lambda)(I - KQT(\lambda))^{-1}KQ = (I - T(\lambda)KQ)^{-1}$$

la ecuación

$$(I - Q)(T(\lambda)(x_1 + x_2) + g(x_1 + x_2, \lambda)) = 0$$

se escribe, usando la expresión para

$$x_2(x_1, \lambda)$$

$$(I - Q)T(\lambda)(I - KQT(\lambda))^{-1}x_1 + (I - Q)(I - T(\lambda)KQ)^{-1}g(x_1 + x_2(x_1, \lambda), \lambda) = 0$$

llamada la ecuación de Bifurcación

Sea $h(x, \lambda)$ el segundo término y $B(\lambda)$ el primero, obtenemos

$$B(\lambda)x_1 = h(x_1, \lambda)$$

donde $B(\lambda)$ es una matriz analítica en $B(0) = 0$ y

$$\|h(x_1, \lambda) - h(x_1', \lambda')\| \leq C\{M(r)\|x_1 - x_1'\| + |\lambda - \lambda'| + |\lambda|\|x_1 - x_1'\|\}$$

$$\|h(x_1, \lambda)\| \leq C(\|x_1\|^2 + |\lambda|^{2m+1})$$

para λ, λ' pequeños y $\|x_1\|, \|x_1'\| \leq r$

Esta reducción a un sistema finito se llama método de Liapunov-Schmidt, únicamente válido en una vecindad del punto $(0,0)$, posible punto de bifurcación.

CAPITULO III

Primero veremos resultados de bifurcación que tienen el carácter especial de implicar que la existencia de bifurcación es determinada sólo por la aproximación lineal, pero por supuesto la naturaleza específica de la bifurcación depende de los términos no lineales.

Valores propios de (B,A)

Supóngase que $B, A: X \rightarrow Z$ son operadores lineales acotados. Podemos definir el resolvente $\rho(B, A)$ del par (B, A) como el conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $B - \lambda A$ tiene un inverso acotado. El espectro $\sigma(B, A)$ del par (B, A) es $\sigma(B, A) = \mathbb{C} - \rho(B, A)$. Un punto $\lambda \in \sigma(B, A)$ es un valor propio de (B, A) si cero es un valor propio de $B - \lambda A$, es decir $\dim \text{Ker}(B - \lambda A) \geq 1$.

DEFINICION

Decimos que un punto $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio simple del par (B, A) si:

$$\dim \text{Ker}(B - \lambda A) = 1 = \text{cod} R(B - \lambda A)$$

$$\lambda \text{Ker}(B - \lambda A) \oplus R(B - \lambda A) = Z$$

Ejemplo

Si $X = Z = \mathbb{R}^2$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0$$

entonces $\text{Ker}(B - \lambda A) = R(B - \lambda A) = \langle e_1 \rangle$

además $\text{AKer}(B - \lambda A) = \langle e_2 \rangle$, cero es un valor propio simple de (B, A) y por otro lado cero es un valor propio doble de $B - \lambda A$.

Nota:

El concepto de valor propio simple es independiente de la naturaleza del valor propio cero del operador $B - \lambda A$.

Ejemplo

Si $X = Z = \mathbb{R}^2$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0$$

entonces cero es un valor propio de $B - \lambda A$, y dado que $N(B - \lambda A) = \langle e_2 \rangle$, $Ae_2 = e_1 \in R(B - \lambda A)$ implica que cero no es un valor propio simple de (B, A) .

Teniendo el concepto de valor propio simple podemos probar el siguiente teorema:

Teorema

Suponga que $M \in C^m(X \times A, Z)$, $m \geq 2$, $A \subset \mathbb{R}$ un intervalo, X, Z son espacios de Banach reales.

$$M(x, \lambda) = Bx - \lambda Ax + N(x, \lambda)$$

$$N(0, \lambda) = 0$$

$$D_x N(0, \lambda) = 0$$

Si λ_0 es un valor propio simple de (B, A) y $y_0 \in \text{Ker}(B - \lambda_0 A)$, $y_0 \neq 0$ entonces

$$(x, \lambda) = (0, \lambda_0)$$

es un punto de bifurcación de $M(x, \lambda) = 0$. más aun, existen funciones C^{m-1}

$$\zeta(u) = \lambda_0 + C(u) \quad \dots \dots (1)$$

$$\chi(u) = uy_0 + C(u^2)$$

para u real cerca del cero tal que

$$M(\chi(u), \zeta(u)) = 0$$

Todos los ceros de M cerca de $(0, \lambda_0)$ son la solución trivial $x = 0$ o dados por (1).

Finalmente si M es una función analítica de λ, x cerca de $(0, \lambda_0)$ entonces ζ, χ son analíticas cerca de cero.

Prueba.

Si λ_0 es un valor propio simple de (B, A) y $y_0 \in \text{Ker}(B - \lambda_0 A)$, $y_0 \neq 0$ entonces los espacios X, Z pueden ser descompuestos como :

$$X = X_0 + X_1,$$

$$X_0 = \text{Ker}(B - \lambda_0 A) = \langle y_0 \rangle,$$

$$Z = Z_0 + Z_1,$$

$$Z_0 = \langle Ay_0 \rangle,$$

$$Z_1 = R(B - \lambda_0 A),$$

aplicando el método de Liapunov-Schmidt con $x = y + z$, $y \in X_0$, $z \in X_1$ y usando el hecho que $(B - \lambda_0 A)y = 0$ y $Q_1 A y = 0$ (donde Q_1 es la proyección sobre Z_1)

La ecuación auxiliar

$$Q_1(B - \lambda A)(y + z) + Q_1 N(y + z, \lambda) = Q_1(B - \lambda A)z + Q_1 N(y + z, \lambda) = 0$$

puede ser resuelta para una única $z = \psi(y, \lambda)$ en una vecindad Ω de $(0, \lambda_0)$

Si $N \in C^m(X \times A, Z)$, $m \geq 2$ entonces $\psi \in C^m(X, \Omega)$, $\psi(0, \lambda) = 0$

$D_y \psi(0, \lambda) = 0$ y $\psi(0, \lambda) = c(|y|^2)$ cuando $y \rightarrow 0$

La ecuación de bifurcación

$$Q_0 M(y + \psi(y, \lambda), \lambda) = 0$$

(donde Q_0 es la proyección sobre Z_0)

es 1-dimensional usando el vector base $A y_0$ de Z_0 y poniendo $y = u y_0$ la función de bifurcación

$$E(u, \lambda)$$

Satisface

$$E(u, \lambda) A y_0 =$$

$$Q_0(B - \lambda A)(u y_0 + \psi(u y_0, \lambda)) + Q_0 N(u y_0 + \psi(u y_0, \lambda), \lambda) =$$

$$-(\lambda - \lambda_0) u A y_0 + Q_0(B - \lambda A) \psi(u y_0, \lambda) + Q_0 N(u y_0 + \psi(u y_0, \lambda), \lambda)$$

así

$$E(u, \lambda) = -(\lambda - \lambda_0) u + G(u, \lambda)$$

donde

$$G(0, \lambda) = 0, \quad D_u G(0, \lambda) = 0$$

Si

$$G(u, \lambda) = u H(u, \lambda)$$

entonces

$$H(0, \lambda) = 0$$

y los ceros de E se obtienen resolviendo

$$-(\lambda - \lambda_0)u + H(u, \lambda) = 0$$

Por el teorema de la función implícita, estas soluciones forman una curva C^1

$$\lambda = \zeta(u) = \lambda_0 + C(|u|)$$

que pasa por

$$(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$$

La solución $x(u)$ representada aquí tiene la forma

$$x(u) = uy_0 + \psi(uy_0, \zeta(u)) = uy_0 + C(u^2)$$

en particular, la curva de soluciones es tangente al espacio X_0 .

Si $N \in C^m(X, A)$, $m \geq 2$ entonces la curva de bifurcación $\lambda - \zeta(u)$ y la solución $x(u)$ son C^{m-1} en una vecindad de $0 \in \mathbb{R}$. Si N es analítica entonces ζ y x son analíticas.

Este teorema puede ser generalizado para $M(x, \lambda) = L(\lambda)x + N(x, \lambda)$

donde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$

$$L(\lambda) = B - \sum_{j=1}^N \lambda_j A_j$$

cuya demostración es analoga a la del teorema anterior. Ver [C-H].

BIFURCACION DE HOPF

En este apartado consideraremos bajo qué hipótesis una solución periódica de un sistema de ecuaciones diferenciales aparece cuando un parámetro es variado.

E. Hopf ha dado una respuesta, la cual describiremos ahora:

Considèrese el sistema autónomo

$$u' = F(u, \lambda) \dots (2)$$

donde λ es un parámetro real. Supóngase que cada componente de F es una serie de potencias en u_1, \dots, u_n, λ la cual converge en un conjunto $G \times J$ donde G es un abierto en \mathbb{R}^n y $J = \{\lambda \mid |\lambda| < c\}$ donde c es una constante positiva. Suponemos que si $\lambda = 0$ entonces existe un punto $u_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(u_0, 0) = 0$ es decir la ecuación (2) tiene un punto de equilibrio u_0 .

Suponemos además que los exponentes característicos asociados a u_0 son todos diferentes de cero.

(Es decir los valores propios de la matriz $n \times n$

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial u_j} \right)$$

donde cada componente de la matriz es evaluada en

$$u = u_0, \quad \lambda = 0)$$

Entonces del Teorema de la Función Implícita se sigue que existen números positivos

$$\delta_1, \delta_2 \text{ tal que si } |\lambda| < \delta_1$$

entonces existe un único $\bar{u}(\lambda)$

tal que $|\bar{u}(\lambda) - u_0| < \delta_2, \quad \bar{u}(0) = u_0$

y tal que $F(\bar{u}(\lambda), \lambda) = 0$

es decir $\bar{u}(\lambda)$ es un punto de equilibrio de (2) además cada componente de $\bar{u}(\lambda)$ es una serie de potencias en λ , la cual converge para λ tales que $|\lambda| < \delta_1$.

Finalmente los exponentes característicos de $\bar{u}(\lambda)$ son series de potencias en λ los cuales convergen para λ tal que $|\lambda| < \delta_2$, donde δ_2 es un número positivo.

TEOREMA (Bifurcación de Hopf)

Suponga el que todos los exponentes característicos asociados con u_0 son diferentes de cero y que exactamente dos de ellos son imaginarios puros. Sea $\alpha(\lambda)$, $\bar{\alpha}(\lambda)$ los exponentes característicos de $\bar{u}(\lambda)$ tales que $\alpha(0)$, $\bar{\alpha}(0)$ son estos dos imaginarios puros diferentes de cero.

Suponga que la parte real de $\alpha'(0)$ es no cero i.e.

$$\operatorname{Re}[\alpha'(0)] \neq 0.$$

Entonces

hay una familia de soluciones periódicas de (2) para $\lambda < 0$ o $\lambda > 0$ o $\lambda = 0$, más precisamente hay un número positivo δ , y una función $u(t, \epsilon)$ definida para todo real t y para $|\epsilon| < \delta$, funciones $\lambda(\epsilon)$ y $T(\epsilon)$ definidas en el mismo intervalo con las siguientes propiedades:

- i) $\lambda(\epsilon)$ y $T(\epsilon)$ son series de potencias de ϵ ;
- ii) $T(0) = \frac{2\pi}{|\alpha(0)|}$ y $\lambda(0) = 0$;
- iii) $u(t, 0) = u(0) = u_0$, pero $u(t, \epsilon) \neq \bar{u}(\lambda(\epsilon))$;
- iv) $u(t, \epsilon)$ es solución de $u' = F(u, \lambda(\epsilon))$ y $u(t, \epsilon)$ tiene periodo $T(\epsilon)$;

v) La función $\lambda(\epsilon)$ es no negativa para todo $|\epsilon| < \delta$, o $\lambda(\epsilon)$ es no positiva para el mismo intervalo o $\lambda(\epsilon)$ es idénticamente cero.

Si para $\lambda < 0$ los exponentes característicos de $\bar{u}(\lambda)$ todos tienen parte real negativa entonces una de las siguientes alternativas se cumple:

a) $\lambda(\epsilon) > 0$ para todo $\epsilon \neq 0$ y cada solución periódica $u(t, \epsilon)$ es estable en el siguiente sentido: Existe $\delta > 0$ tal que si $u(t)$ es una solución de $u' = F(u, \lambda(\epsilon))$ y existen números t_1, t_2 tales que $|u(t_1) - u(t_2, \epsilon)| < \delta$ entonces hay un número \bar{t} tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - u(t + \bar{t}, \epsilon)| = 0.$$

b) $\lambda(\epsilon) < 0$ para todo $\epsilon \neq 0$ y cada solución periódica es inestable.

Cabe aclarar que extensiones al teorema de Hopf se han hecho, en las cuales las condiciones de los exponentes característicos son considerablemente más débiles.

Consideremos de nuevo la ecuación $u' = F(u, \lambda)$ (3) excepto que ahora se supone que cada componente de F tiene primeras derivadas continuas en $u_1, u_2, \dots, u_n, \lambda$ en cada punto en el conjunto $G \times J$. Como antes, se supondrá que hay un punto u_0 tal que $F(u_0, \lambda) = 0$.

Si $u(t, \lambda, \bar{u})$ denota la solución de (3), que satisface la condición inicial $u(0, \lambda, \bar{u}) = \bar{u}$ entonces el problema de encontrar una solución periódica a (3) es equivalente al problema de encontrar las soluciones (t, λ, \bar{u}) a la ecuación

$$u(l, \lambda, \bar{u}) = \bar{u} \dots (4)$$

Supongase que $i\beta$ y $-i\beta$ son valores propios de la matriz

$$\left[\frac{\partial F_l}{\partial u_j}(u_0, 0) \right]_{l,j}$$

y además que los valores propios de la matriz que son múltiplos enteros de $\pm i\beta$ son:

$$\pm i\beta, \pm im_1\beta, \dots, \pm im_l\beta$$

donde estos valores son contados con su multiplicidad algebraica i.e. su multiplicidad como raíces del polinomio característico. Para cada valor propio $im_k\beta$, ($m_k = 1, m_1, \dots, m_l$) de la matriz

$$\left[\frac{\partial F_l}{\partial u_j}(u_0, 0) \right]$$

le corresponde un valor propio $\alpha_m(\lambda) + i\beta_m(\lambda)$ de la matriz

$$\left[\frac{\partial F_l}{\partial u_j}(u_0, \lambda) \right]$$

donde $\alpha_m(\lambda)$ y $\beta_m(\lambda)$ son funciones de (valores reales) de λ y $\alpha_m(0) = 0$ y $\beta_m(\lambda) = m_k\beta$.

Suponemos que si $\lambda \neq 0$ entonces $\alpha_m(\lambda) \neq 0$ para $m_k = 1, m_1, \dots, m_l$. El valor propio $i\beta$ se dice tiene multiplicidad algebraica impar si un número impar de $\alpha_m(\lambda)$ cambia de signo cuando λ pasa por cero.

TEOREMA

Si $i\beta$ tiene multiplicidad impar, entonces existen números positivos γ_0 y ρ_0 tal que si $\gamma \in [0, \gamma_0)$ y $\rho \in [0, \rho_0)$ entonces (4) tiene una solución (λ, \bar{u}) tal que $\|\bar{u}\| = \gamma$

$$\text{y } |\lambda|^2 + \left| i - 2\frac{\pi}{\beta} \right|^2 < \rho^2$$

lo que es, si $\lambda - \lambda$ la ecuación (3) tiene una solución $u(t)$ de periodo 1 y $u(0) = \bar{u}$ [Cr].

Aún las extensiones al teorema de Hopf no dan información muy útil acerca de la estabilidad, más aun las hipótesis no son lo ideal para el uso en aplicaciones. La hipótesis de que $i\beta$ tenga multiplicidad algebraica impar es de un claro corte de significado matemático, pero no de aparente significado físico y podría ser difícil de verificar en un caso particular.

CAPITULO IV

En este capítulo daremos una descripción de los métodos en que están basados los algoritmos integrados en una colección de rutinas en el lenguaje de alto nivel Fortran llamada AUTO. Estos algoritmos conciernen al análisis numérico de sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales y de ecuaciones diferenciales ordinarias. El principal propósito del paquete es el cálculo de soluciones periódicas (estables o inestables) de

$$u' = F(u, \lambda) \dots (0)$$

$$u, F \in \mathbb{R}^n$$

donde λ denota un parámetro libre. Frecuentemente soluciones periódicas de (0) provienen de la bifurcación de soluciones estacionarias de (0). Por esta razón el paquete contiene algoritmos para calcular las ramas del estado estacionario y algoritmos para la determinación de puntos de bifurcación de Hopf.

La determinación de ramas del estado estacionario involucra a la estructura de las soluciones del sistema algebraico de ecuaciones $F(u, \lambda) = 0$. Por esto el paquete contiene algoritmos para

sistemas algebraicos más generales. Incluye además la capacidad de detectar puntos de bifurcación algebraicos a lo largo de una rama y de cambiar de rama en tales puntos.

El cálculo de soluciones periódicas de (0) puede ser visto como un problema con valores a la frontera con condiciones integrales adicionales. Por esta razón AUTO contiene algoritmos para la continuación de soluciones de sistemas de la forma (0) con condiciones en la frontera.

1. SISTEMAS ALGEBRAICOS

Como un primer paso en el análisis de bifurcación de (0) será la determinación de las ramas de solución estacionaria. Estas son las soluciones $(u(s), \lambda(s))$ del sistema no lineal de ecuaciones.

$$a) F(u, \lambda) = 0 \quad u, F \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

donde s denota alguna parametrización. El problema de determinar la estructura de las soluciones de un sistema algebraico de la forma a) puede provenir de muchas otras situaciones y se debe de considerar un número de estas, como por ejemplo, el cálculo de curvas de puntos límite y puntos de la bifurcación de Hopf.

1.1 CONTINUACION Y CAMBIO DE RAMAS

En AUTO se supone que una solución $u_0 = u(s_0)$ es conocida para algún valor particular $\lambda_0 = \lambda(s_0)$. En la mayoría de las aplicaciones tal solución (u_0, λ_0) es fácil de encontrar. Si no, entonces es

posible introducir un parámetro de homotopía para así alcanzar el punto inicial deseado. La dirección (u_0, λ_0) de la rama en el punto inicial coincide con el vector nulo de la matriz $n \times n+1$.

$$[F_u(u_0, \lambda_0) | F_\lambda(u_0, \lambda_0)]$$

como es visto al diferenciar la relación $F(u(s), \lambda(s)) = 0$ con respecto a s . Suponemos que el espacio nulo es unidimensional. Esto excluye tomar puntos de bifurcación como valor inicial. El vector nulo puede ser calculado por alguna técnica elemental; usando pivoteo uno puede triangularizar la matriz

$$[F_u(u_0, \lambda_0) | F_\lambda(u_0, \lambda_0)]$$

en la forma

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{pmatrix}$$

(aquí hemos representado la matriz para el caso $n=3$)

en donde la última fila no puede ser cero, ya que de lo contrario el espacio nulo tendría dimensión mayor que uno, lo cual contradice nuestra hipótesis.

El vector nulo v puede ser calculado al resolver $Av = e_n$, donde e_n es el vector unitario con ceros en todas sus entradas excepto en la n -ésima, que es igual a uno y A es de la forma

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El vector nulo $v=(u_0, \lambda_0)$ es escalado de acuerdo a

$$\theta_u^2 u_0^T u_0 + \theta_\lambda^2 \lambda_0^2 = 1$$

donde θ_u, θ_λ son constantes asignadas de antemano que pueden ser usadas para reflejar la diferencia en escala entre u y λ . Mas generalmente, damos al espacio $n \times n$ el producto interior

$$((u_1, \lambda_1), (u_2, \lambda_2)) = \theta_u^2 u_1^T u_2 + \theta_\lambda^2 \lambda_1 \lambda_2$$

Desde el punto inicial, la rama es trazada paso a paso usando la técnica de continuación pseudo-longitud de arco. Suponiendo que (u_{j-1}, λ_{j-1}) y (u_{j-2}, λ_{j-2}) han sido calculados esta técnica determina la siguiente solución (u_j, λ_j) usando las ecuaciones

$$1) F(u_j, \lambda_j) = 0$$

$$2) \theta_u^2 (u_j - u_{j-1})^T \dot{u}_{j-1} + \theta_\lambda^2 (\lambda_j - \lambda_{j-1}) \dot{\lambda}_{j-1} - \Delta s = 0$$

donde Δs es el tamaño del paso a lo largo de la rama. El vector de dirección $(\dot{u}_{j-1}, \dot{\lambda}_{j-1})$ puede ser calculado aproximadamente usando

$$\dot{u}_{j-1} \approx \frac{1}{\Delta s} (u_{j-1} - u_{j-2})$$

y similarmente para $\dot{\lambda}_{j-1}$. Es necesario checar que

$$0_u^2 u_{j-1}^T u_{j-1} + 0_\lambda^2 \lambda_{j-1}^2 = 1$$

ya que de lo contrario pueden aparecer inestabilidades en el proceso de continuación. La ventaja de usar el sistema de ecuaciones 1), 2) es la capacidad de calcular los puntos límite para esto hay que ver que el Jacobiano para 1), 2)

$$\begin{pmatrix} F_u(u, \lambda) & F_\lambda(u, \lambda) \\ u & \lambda \end{pmatrix}$$

es no solamente no singular en un punto solución regular (donde F es no singular) de a) si no también en un punto de retorno simple [Ra].

Uno puede escoger que el tamaño del paso sea fijo o "adaptivo". Nosotros usaremos lo siguiente: si el método de Newton converge rápidamente, entonces el tamaño es incrementado. Si la iteración de Newton converge lentamente o falla en la convergencia entonces el tamaño es reducido a la mitad. Si este tamaño alcanza un máximo preseleccionado, entonces Δs no excederá dicho valor. Análogamente para un mínimo, entonces el programa señalará la no convergencia. Se dice que converge si ocurre que los incrementos de Newton satisfacen

$$\frac{|\Delta \lambda|}{1 + |\lambda|} < \epsilon_\lambda$$

Y

$$\frac{\| \Delta u \|_{\infty}}{1 + \| u \|_{\infty}} < \epsilon_u$$

donde ϵ_1, ϵ_u pueden ser escogidos de antemano.

El determinante del Jacobiano para 1), 2) es calculado a lo largo de la rama solución. Puntos donde el determinante se anula son localizados por medio de un método de iteración, es decir, si $q(s)$ es la función de la cual se buscan los ceros entonces cualquier cambio de signo de $q(s)$ es localizado a lo largo de la rama y el cero es aproximado por una iteración secante.

Puntos solución en donde el determinante del Jacobiano del sistema 1), 2) se anula son puntos de bifurcación potenciales. Después del cálculo de una rama, cada punto potencial encontrado es considerado. Para cambiar de una rama estacionaria a otra en un punto de bifurcación estacionario usamos el siguiente método; sea $x = (u, \lambda)$ y sea x_0 un punto de bifurcación. Considérese x_0 la dirección de la rama dada a lo largo de la cual la bifurcación fué detectada. Dos soluciones que se intersectan en un ángulo distinto de cero dan origen a dos vectores nulos linealmente independientes de la matriz $n \times n+1$

$$F_x(x_0)$$

Encontramos una base ϕ_1, ϕ_2 de $\text{Ker}(F_x)$ tal que $x'_0 = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2$.

Entonces la dirección de la rama de bifurcación puede ser encontrada de las ecuaciones algebraicas de bifurcación [Ra]

$$\begin{aligned} \psi^T F_x(x_0) x'_0 x'_0 &= 0 \\ x'^T_0 x'_0 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

donde ψ genera el espacio nulo unidimensional de la matriz transpuesta $n+1 \times n$.

$$F_x^T(x_0)$$

Si $x_0' = (u_0', \lambda_0')$ ha sido obtenido en ésta forma entonces el cambio de rama es hecho al resolver

$$F(u_1, \lambda_1) = 0$$

$$\theta_u^2 (u_1 - u_0)^T u_0' + \theta_\lambda^2 (\lambda_1 - \lambda_0) \lambda_0' - \Delta s = 0$$

para (u_1, λ_1) , el primer punto de la rama bifurcada.

Aproximaciones iniciales a u_1 y a λ_1 son dadas por $u_1 = u_0 + \Delta s u_0'$ y $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta s \lambda_0'$.

Uno puede evitar tener que resolver las ecuaciones algebraicas de bifurcación al reemplazar x_0 por y_0 el cual satisface $y_0 \in \text{Ker}(F_x(x_0))$ y y_0 ortogonal a x_0 .

Tal vector es obtenido de

$$\begin{bmatrix} F_x(x_0) \\ \dot{x}_0^T \end{bmatrix} y_0 = 0$$

donde $F_x(x_0) = (F_u(u_0, \lambda_0) | F_\lambda(u_0, \lambda_0))$

En la implementación el cálculo de la rama básica y de cualquier rama de bifurcación es descontinuada si λ , o $\|u\|$ alcanza límites preseleccionados, si se usa un máximo de pasos o si el procedimiento no converge.

1.2 PUNTOS LIMITE Y SU CONTINUACION

La dirección (u, λ) de una rama solución de a) puede ser definida como

$$\begin{pmatrix} F_u(u, \lambda) & F_\lambda(u, \lambda) \\ \dot{u}_0 & \dot{\lambda}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde (u_0, λ_0) denota la dirección de la rama en un punto solución

(u_0, λ_0) .

Se supone que (u_0, λ_0) es suficientemente cercano a (u, λ) . Puntos límite cuadráticos a lo largo de la rama solución de (a) corresponden a ceros de la función $q(s) - \lambda(s)$ y estos son localizados correctamente usando una iteración secante.

Una vez que un punto límite cuadrático ha sido detectado puede ser continuado en dos parámetros, digamos λ y μ aplicando la técnica de continuación de longitud de arco al sistema (la cual anteriormente se ha aplicado)

$$\begin{aligned} F(u, \lambda, \mu) &= 0 \\ F_u(u, \lambda, \mu)v &= 0 \\ v^T v - 1 &= 0 \end{aligned}$$

estas ecuaciones definen un problema algebraico de continuación (o de bifurcación) de $2n+1$ ecuaciones con $2n+2$ incógnitas.

1.3 PUNTOS DE BIFURCACION DE HOPF Y SU CONTINUACION

Puntos de Bifurcación de Hopf a lo largo de una rama de soluciones estacionaria $(u(s), \lambda(s))$ de (0) son puntos donde un par de valores propios complejos conjugados cruzan el eje imaginario transversalmente.

En el software un método estandar es usado para calcular los valores propios de $F_u(u(s), \lambda(s))$ a lo largo de las ramas de solución estacionaria. Monitoreando el número de valores propios en el semiplano izquierdo junto con la parte real del valor propio más cercano al eje, imaginario, el software es capaz de detectar los puntos de bifurcación de Hopf. La localización precisa es determinada por la iteracion secante de la parte real del par de valores propios conjugados. El éxito de éste procedimiento depende de que el tamaño del paso siga siendo pequeño y que las bifurcaciones de Hopf no sean degeneradas.

Para la continuación en dos parámetros de los puntos de bifurcación consideremos la ecuación diferencial dada por

$$u'(t) = F(u, \lambda, \mu),$$

donde λ y μ son los dos parámetros libres. Una condición necesaria para la bifurcación de Hopf de una rama del estado estacionario es que en el punto de bifurcación, el problema linealizado

$$v'(t) = T F_u(u, \lambda, \mu)v(t),$$

tenga, para algún valor de T , una solución $v(t)$ distinta de cero que satisfaga que $v(0)=v(1)=0$.

Si $F_u(u, \lambda, \mu)$ tiene un par de valores propios imaginarios con parte imaginaria T entonces la solución del problema linealizado tiene la forma

$$v(t) = \text{sen}(2\pi t)\xi + \text{cos}(2\pi t)\eta$$

sustituyendola en la ecuación linealizada y separando los términos en seno y coseno obtenemos

$$\frac{T}{2\pi} F_u \xi + \eta = 0,$$

$$-\xi + \frac{T}{2\pi} F_u \eta = 0.$$

normalizamos el vector nulo (ξ, η) pidiendo $\xi^T \xi + \eta^T \eta = 1$.

Sin embargo, el espacio nulo es bidimensional, debido a la libertad de trasladar $v(t)$ en el tiempo. Esto requiere otra condición. Sea $v_0(t) = \text{sen}(2\pi t)\xi_0 + \text{cos}(2\pi t)\eta_0$ correspondiente al punto solución previamente calculado.

Para fijar la fase de $v(t)$ requerimos que

$$\delta(\sigma) = \int_0^1 (v(t+\sigma) - v_0(t))^T (v(t+\sigma) - v_0(t)) dt$$

sea minimizada sobre α . Esto da como resultado, la ecuación

$$\int_0^1 (v(t) - v_0(t))^T v_0'(t) dt = 0.$$

Sustituyendo las expresiones para $v(t)$ y $v'(t)$ en la ecuación de arriba, seguida de integración, da

$$\eta_0^T \xi - \xi_0^T \eta = 0.$$

Las ecuaciones anteriores definen un problema algebraico de bifurcación de la forma

$$F(\omega, \lambda) = 0$$

donde $\omega = (u, \xi, \eta, T, \mu) \in \mathbb{R}^{3n+2}$

el cual representa un sistema no lineal de $3n+2$ ecuaciones con $3n+3$ incógnitas, así que uno obtendrá curvas solución a esta ecuación, con posibles puntos de bifurcación.

2 ECUACIONES DIFERENCIALES

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden $u'(t) = F(u(t), \lambda) \dots \dots \dots (3)$

$$t \in [0, 1]$$

$$u, F \in \mathbb{R}^n$$

$$\lambda \in \mathbb{R}^n$$

sujeto a las condiciones de frontera (posiblemente no lineales o no separables)

$$b_i(u(0), u(1), \lambda) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n_b$$

y condiciones integrales lineales o no lineales.

$$\int_0^1 q_i(u(t), \lambda) dt = 0 \dots (4)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_f$$

Donde es válido que el número de condiciones de frontera o el número de condiciones integrales sea cero. Para que el problema este bien planteado es necesario que $n_1 = n_0 + n_r - n + 1$. Esto significa que siempre hay un parámetro libre, así que tenemos otra vez un problema de continuación.

2.1 DISCRETIZACION

La ecuación diferencial es aproximada por el método de colocación de Gauss en m puntos de Gauss con partes polinomiales que son $C[0,1]$. En AUTO m es un entero entre 2 y 7. Más precisamente, define una partición

$$\begin{aligned} \{0 = t_0 < t_1 \dots < t_N = 1\} \\ \Delta t_j = t_{j+1} - t_j \\ 0 \leq j \leq N-1 \end{aligned}$$

y para cada j introducimos los polinomios de Lagrange

$$\{\omega_{j,i}(t)\}$$

$$j = 0, 1, \dots, N-1$$

$$i = 0, 1, \dots, m$$

definidos por

$$\omega_{j,i} = \prod_{k=0, k \neq i}^m \frac{t - t_{j+k}}{t_{j+i} - t_{j+k}}$$

$$t_{j, \frac{i}{m}} = t_j + \frac{i}{m} \Delta t_j$$

El método de colocación consiste en encontrar

$$P_j(t) = \sum_{i=0}^m \omega_{j,i}(t) u_{j, \frac{i}{m}}$$

tal que

$$P'_j(z_{j,i}) = F(P_j(z_i), \lambda) \dots (5)$$

$$i=1, \dots, m$$

$$j=0, 1, \dots, N-1$$

donde en cada subintervalo

$$[t_{i-1}, t_i]$$

los puntos

$$\{z_{j,i}\}_{i=1}^m$$

son los ceros del polinomio de Legendre de m -ésimo grado relativos a ese subintervalo. Con la base descrita arriba u_j y $u_{j,i}$

aproximan a la solución $u(t)$ del problema continuo en t_j y t_{j+1}

respectivamente. Ver [D-K].

Las condiciones de frontera son $b_i(p_1(0), p_N(1), \lambda) = 0 \dots (6)$

$i = 1, \dots, n_b$

Las integrales en (4) pueden ser discretizadas por una formula de cuadratura. En vista de la discretización de la ecuación diferencial (3), la selección natural es la formula de cuadratura al aproximar la integración sobre cada subintervalo $[t_{j-1}, t_j]$.

Esto da:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^m \omega_{j,i} q_k(u_{j,i}, \lambda) = 0 \dots (7)$$

$$k = 1, \dots, n_q$$

donde las cantidades $\omega_{j,i}$ son los coeficientes de la cuadratura de Lagrange, que excepto por un factor de escala son independientes de j .

Ya que la continuación de longitud de arco es usada para el cálculo de ramas de solución a (3)-(4) necesitamos tomar en cuenta la ecuación

$$\theta_u^2 \int_0^1 (u(t) - u_0(t))^T u_0(t) dt + \theta_\lambda^2 (\lambda - \lambda_0)^T \dot{\lambda}_0 - \Delta s = 0$$

(ya que necesitamos escalar en cada paso)

donde (u_0, λ_0) es el punto previamente calculado en la rama solución y $(\dot{u}_0, \dot{\lambda}_0)$ es la dirección de la rama en ese punto. Después de la discretización la ecuación de longitud de arco se convierte en

$$\theta_u^2 \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^m \omega_{j,i} (u_{j,i} - u_{0,j,i})^T (\dot{u}_0)_{j,i} + \theta_\lambda^2 (\lambda - \lambda_0)^T \dot{\lambda}_0 - \Delta s = 0$$

El conjunto completo de ecuaciones discretas al tomar un paso a lo largo de una rama de soluciones consiste en resolver el sistema de $m_{NM} + n_b + n_r + 1$ ecuaciones no lineales, para las incógnitas

$$\{u, \mu\} \in \mathbb{R}^{m_{NM} + n_b + n_r + 1}, \lambda \in \mathbb{R}^{n_\lambda}$$

Esto es hecho con iteraciones de Newton.

2.3 PUNTOS LIMITE Y SU CONTINUACION

En la ecuación (1) tomemos a λ como el parámetro principal, con respecto al cual los puntos límite son localizados, y sea μ los restantes escalares. Reescribimos estas ecuaciones como

$$(8) \dots \dots \dots u'(t) = F(u(t), \mu, \lambda), \quad u, F \in \mathbb{R}^n$$

$$(9) \dots \dots \dots b(u(0), u(1), \mu, \lambda) = 0, \quad b \in \mathbb{R}^{n_b}$$

$$(10) \dots \dots \dots \int_0^1 q(u(t), \mu, \lambda) dt = 0, \quad q \in \mathbb{R}^{n_q}$$

Suponemos otra vez que $n_\lambda = n_b + n_r + n + 1$. Que en forma de operador, podemos escribir las ecuaciones anteriores como

$$H(u, \mu, \lambda) = 0$$

y una dirección $(u, \dot{\mu}, \dot{\lambda})$ de la rama puede ser obtenida de

$$H_u \dot{u} + H_\mu \dot{\mu} + H_\lambda \dot{\lambda} = 0$$

$$0_u^2 \int_0^1 u_0^T(t) dt + 0_\mu^2 \dot{\mu}_0^T \dot{\mu} + 0_\lambda^2 \dot{\lambda}_0 \dot{\lambda} - 1 = 0$$

donde $(u_0, \dot{\mu}_0, \dot{\lambda}_0)$ denota la dirección de la rama en el punto previamente calculado.

La dirección del vector en el punto se escala de tal forma que

$$0_u^2 \int_0^1 u_0^T(t) u(t) dt + 0_\mu^2 \dot{\mu}_0^T \dot{\mu} + 0_\lambda^2 \dot{\lambda}_0 \dot{\lambda} - 1 = 0$$

La cantidad λ es monitoreada a lo largo de la rama de solución y en caso de un cambio de signo la localización precisa del cero es determinada usando una iteración secante.

El sistema extendido para la continuación de puntos límite en dos parámetros es obtenido al agregar a (8)-(10) las ecuaciones que caracterizan al punto límite, que son:

$$v'(t) = F_u(u(t), \lambda, \mu)v(t) + F_\mu(u(t), \mu, \lambda)\xi = 0$$

$$b_{u(0)}(u(0), u(1), \mu, \lambda)v(0) + b_{u(1)}(u(0), u(1), \mu, \lambda)v(1) + b_\mu(u(0), u(1), \mu, \lambda)\xi = 0$$

$$\int_0^1 q_u(u(t), \mu, \lambda)v(t) + q_\mu(u(t), \mu, \lambda)\xi dt = 0$$

y la ecuación de normalización

$$\int_0^1 v(t)^T v(t) dt + \xi^T \xi - 1 = 0 \quad \text{ver D-K}$$

Las dimensiones de $v(t)$ y s son las mismas que las de $u(t)$ y μ respectivamente. El sistema extendido consiste ahora de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden con $2n$ condiciones de frontera y $2n + 1$ condiciones integrales. Se agregan $2n - 1$ incógnitas escalares aun mas tenemos un parámetro libre adicional. Por esto el sistema extendido tiene un grado de libertad y en general obtenemos una curva de soluciones

3. SOLUCIONES PERIODICAS

En esta sección explicaremos las técnicas empleadas para calcular soluciones periódicas (estables o inestables) con detalle, enfatizando las razones que hay detras de nuestro aparato numérico.

3.1 CONTINUACION Y PROCEDIMIENTO DE INICIO

Sea (u_0, λ_0) un punto de bifurcación de Hopf donde el Jacobiano $F_u(u_0, \lambda_0)$ tiene un par conjugado de valores propios imaginarios $\pm i\omega_0$ y no hay mas en el eje imaginario. Suponemos que el par cruza el eje imaginario transversalmente con respecto a λ . Estas condiciones aseguran la existencia de una rama de bifurcación de Hopf y cerca del punto de bifurcación de Hopf las órbitas de la rama son únicas.

Primero describamos el proceso de continuación. Indicamos cómo esencialmente el mismo procedimiento puede ser usado para comenzar a calcular la rama, dadas las estimaciones asintóticas.

$$u(t, \epsilon) = u_0 + \epsilon \phi(t) + O(\epsilon^2)$$

$$T(\epsilon) = T_0 + O(\epsilon^2)$$

$$\lambda(\epsilon) = \lambda_0 + O(\epsilon^2)$$

Aquí ϵ parametriza localmente a la rama de soluciones periódicas. $T(\epsilon)$ denota el periodo y $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

La función $\phi(t)$ es la solución periódica distinta de cero del problema lineal homogéneo

$$\phi'(t) = F_u(u_0, \lambda_0)\phi(t)$$

Los procedimientos de inicio y continuación pueden ser usados para calcular soluciones inestables y asintóticamente estables. Esto es posible al considerar el problema como uno con valores en la frontera en el intervalo fijo $[0, 1]$. La técnica de continuación usa la continuación de longitud de arco y esto da como resultado el no hacer modificaciones para cálculos cerca de los puntos límite.

Para fijar la fase usamos una condición integral. Hay dos incógnitas el periodo T y el parámetro libre λ . Más aun la periodicidad da condiciones de frontera no separables.

Una propiedad importante de nuestra condición de fase es que la distancia entre cualesquiera dos puntos solución en la rama es minimizada con respecto a la translación periódica. Esto es

sumamente benéfico al calcular soluciones periódicas que tienen una región de rápido crecimiento o decrecimiento. Con esta propiedad minimizante soluciones consecutivas a lo largo de la rama son en cierto sentido alineadas, así que una aproximación inicial a una solución puede ser obtenida al extrapolar puntos de soluciones precedentes. Esto permite aumentar el tamaño de los pasos a lo largo de la rama. La resolución en los cálculos puede ser muy importante.

Fijo el intervalo de periodicidad por medio de la función

$$t \rightarrow \frac{t}{T}$$

La ecuación (0) se convierte en

$$u'(t) = TF(u(t), \lambda) \dots \dots \dots (11)$$

y buscamos soluciones de periodo 1, es decir

$$u(0) = u(1) \dots \dots \dots (12)$$

Hay que notar que T es una de nuestras incógnitas. Suponga que se tienen puntos solución $(u_i(\cdot), T_i, \lambda_i)$

$$i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Debemos mostrar cómo proceder de $(u_{k-1}(\cdot), T_{k-1}, \lambda_{k-1})$ a $(u_k(\cdot), T_k, \lambda_k)$.

Sin embargo, aún con λ fijo las ecuaciones (11)-(12) no especifican a u y a T , ya que $u(t)$ puede ser trasladada libremente en el tiempo. Hay varias técnicas para quitar esta indeterminación. Sin embargo muchas de estas tienen la seria desventaja de permitir frentes puntiagudos o picos para seguir en la continuación.

(ya que los cambios bruscos provocan errores al tratar de obtener el siguiente punto en la continuación).

Por ejemplo, la condición clásica de ortogonalidad

$$(u(0) - u_{k-1}(0))^T u'_{k-1}(0) = 0$$

la cual es conveniente para probar existencia tiene éste inconveniente.

Fijando una de las componentes al tiempo $t = 0$ se tiene el mismo problema. Una condición mas conveniente es obtenida si se requiere que para dos puntos solución consecutivos

$$(u_{k-1}(\cdot), T_{k-1}, \lambda_{k-1}) \text{ y } (u(\cdot), T, \lambda)$$

la distancia entre u_{k-1} y u sea minimizada con respecto a la translación. Más precisamente si $\bar{u}(t)$ es una solución a (11)-(12) entonces $\bar{u}(t+\sigma)$ también lo es, para toda σ . Queremos a la solución que minimiza

$$g(\sigma) = \int_0^1 \|\bar{u}(t+\sigma) - u_{k-1}(t)\|_2^2 dt$$

Igualando la derivada de $g(\sigma)$ a cero y sea $\bar{\sigma}$ el valor crítico de σ y escribiendo $u = \bar{u}(t+\bar{\sigma})$ obtenemos la ecuación

$$\int_0^1 (u(t) - u_{k-1}(t))^T \dot{u}(t) dt = 0, \dots (13)$$

Usando integración por partes ésta última ecuación es equivalente a la condición de fase

$$\int_0^1 u(t)^T \dot{u}_{k-1}(t) dt = 0, \dots (14)$$

Notese que esta ecuación es simplemente la ecuación de ortogonalidad integrada. La eficiencia de los cálculos es mejorada al usar dicha ecuación en lugar de la anterior.

La presencia de puntos límite y órbitas de período infinito dificulta el uso del parámetro λ en la continuación, por lo que haremos la misma consideración de antes, es decir, extenderemos el sistema tratando a λ como una de nuestras incógnitas y agregaremos la ecuación

$$\theta_u^2 \int_0^1 (u(t) - u_{k-1}(t))^T \dot{u}_{k-1}(t) dt + \theta_T^2 (T - T_{k-1}) \dot{T}_{k-1} + \theta_\lambda^2 (\lambda - \lambda_{k-1}) \dot{\lambda}_{k-1} = \Delta s.$$

En los cálculos, usamos la aproximación

$$\dot{T}_{k-1} \sim \frac{1}{\Delta s} (T_{k-1} - T_{k-2}),$$

de manera análoga para \dot{u} y $\dot{\lambda}$.

escalamos de tal forma que

$$0_u^2 \|u_{k-1}\|^2 + 0_T^2 T_{k-1}^2 + 0_\lambda^2 \lambda_{k-1}^2 = 1.$$

El sistema a resolver en cada paso a lo largo de la rama de soluciones periódicas consiste ahora de las ecuaciones (11), (12), (13) y (14).

Consideremos ahora el procedimiento de inicio en el punto de bifurcación de Hopf (u_0, T_0, λ_0) , donde u es una solución estacionaria. El objetivo es determinar un punto solución $(u_1, T_1, \lambda_1) = (u, T, \lambda)$, con u no estacionaria, en la rama de soluciones periódicas cerca del punto de bifurcación. De las cuatro ecuaciones para el seguimiento de la rama, tres siguen sin cambio; (11), (12) y (15). En (15) usamos el hecho de que $\dot{u}_0 = \phi$, $\dot{\lambda}_0 = \dot{T}_0 = 0$.

La ecuación (14) requiere modificación. El problema es que $u'_{k-1} = 0$ cuando $k=1$. Sin embargo, para $\phi(t)$ en nuestras ecuaciones asintóticas que dimos anteriormente, se puede derivar la siguiente expresión

$$\phi(t) = \sin \frac{2\pi t}{T_0} w_s + \cos \frac{2\pi t}{T_0} w_c,$$

donde (w_s, w_c) satisface

$$\begin{pmatrix} -\omega_0 I & F_u(u_0, \lambda_0) \\ F_u(u_0, \lambda_0) & \omega_0 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_s \\ w_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinamos el vector nulo de la matriz anterior con una eliminación de Gauss con pivoteo completo. El espacio nulo es bidimensional, ya que si (w_1, w_2) es un vector nulo, entonces también lo es $(-w_1, w_2)$.

Salvo alguna normalización de $\phi()$ podemos aproximar

$$u_1 \sim u_0 + \Delta s \phi(t) = \hat{u}_1,$$

de manera análoga a como se dedujo la ecuación (14), se deduce la ecuación de fase modificada

$$\int_0^1 u_1^T(t) \phi'(t) dt = 0 \dots (17)$$

Así que el procedimiento de inicio consiste en resolver las ecuaciones (11), (12), (15) y (17).

CAPITULO V

En este capítulo usaremos las técnicas anteriormente descritas para resolver el problema planteado en el capítulo I, el cual es:

$$\dot{P}_1 = -\mu P_1 + \frac{B}{1+kP_2}$$

$$\dot{B} = -\gamma B + \beta_0 \Lambda$$

$$\dot{\Lambda} = -\gamma \Lambda + \frac{B}{1+kP_2}$$

$$\dot{P}_2 = -bP_2 + cBP_2 - \lambda \left\{ 1 - e^{-dP_2} \right\}$$

Fijamos todos los parámetros excepto λ : $d=5$, $\beta_0=20$, $\gamma=2$, $\mu=k=b=c=1$.

Los resultados se reportan en los siguientes diagramas.

Cuando ponemos la *norma de la solución contra el parámetro

estamos usando la norma euclidea de (P, B, A, P) para soluciones estacionarias. Para las soluciones periódicas la norma es

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T P^2(t) + B^2(t) + A^2(t) + P_2^2(t) dt}$$

donde T es el período de la oscilación. Con estas definiciones un punto de bifurcación de Hopf ocupa el mismo punto en el diagrama de bifurcación, ya sea considerado como un punto en la rama solución estacionaria o como un punto de la rama de solución periódica.

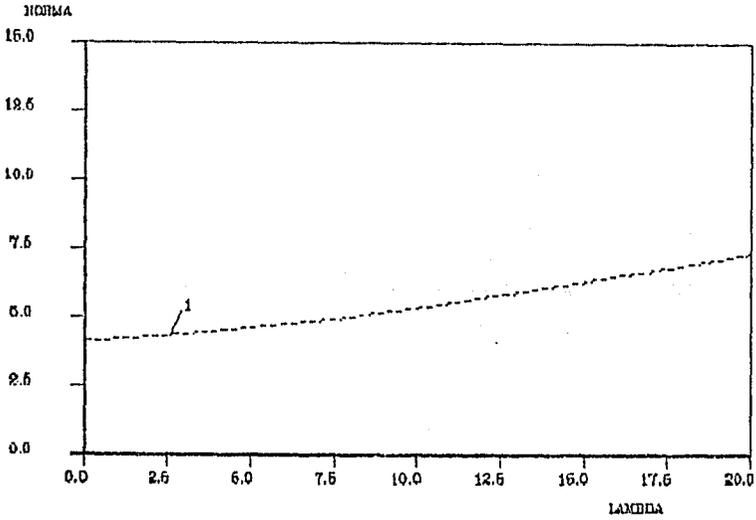


FIGURA 1

Hay una sola rama de solución el figura 1. Las soluciones estables son dibujadas con líneas sólidas y las inestables con líneas espaciadas. Para estos valores de las constantes no encontramos puntos de bifurcación estacionarios (de hecho no los hay para cualquier conjunto de valores) ni soluciones periódicas. A lo largo de la rama la población de depredadores P permanece constante al varía la cota de pesca, como lo muestra la figura 2.

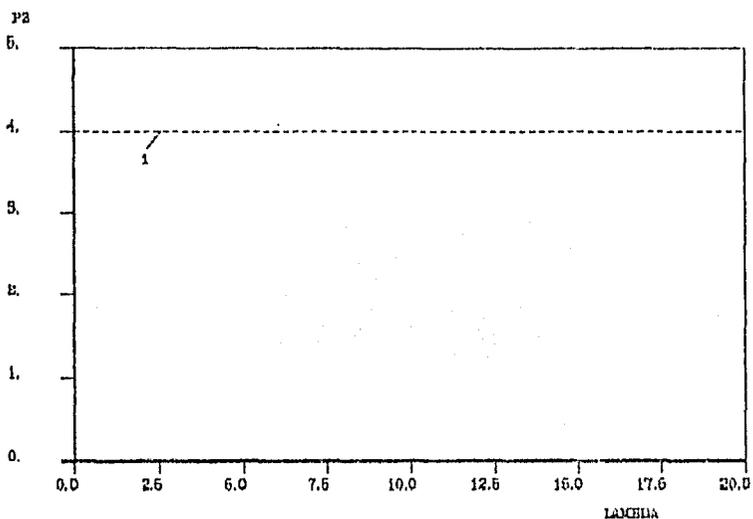


FIGURA 2

La población de las presas al igual que la población de las crías crece (aunque no en la misma medida) cuando la cota de pesca aumenta. La magnitud de estos crecimientos esta indicado en las figuras 3 y 4.

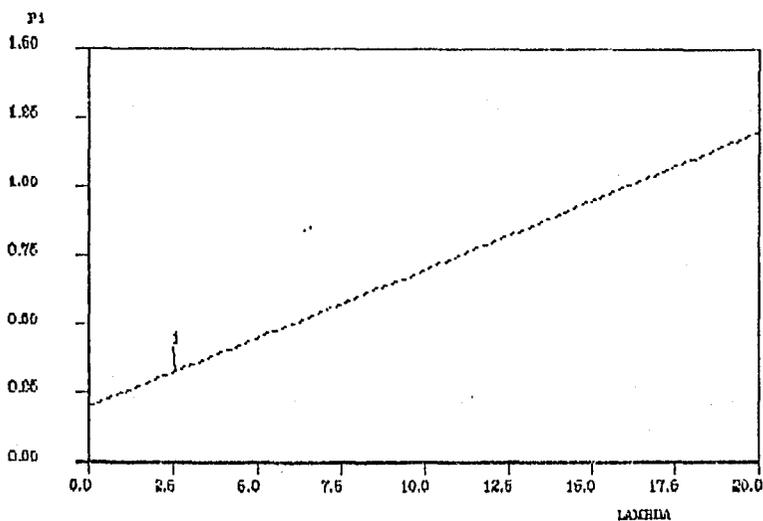


FIGURA 3

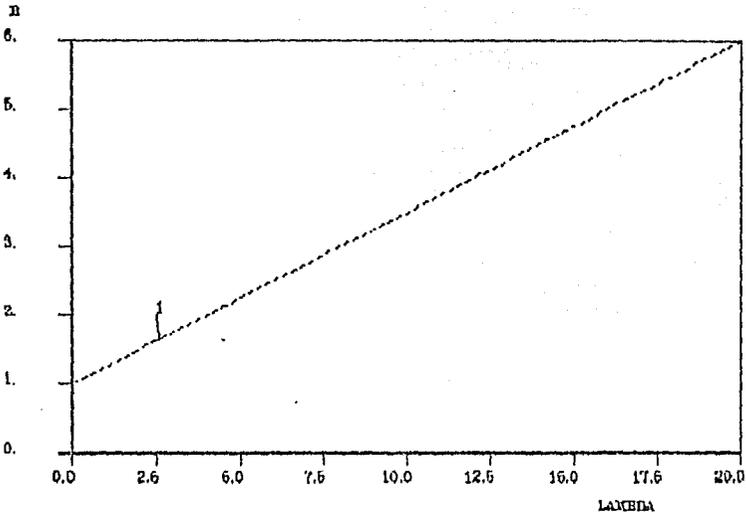


FIGURA 4

De estos resultados se puede deducir que existe cierto balance entre la pesca y el número de nacimientos de los depredadores, ya que no importa que tanto se pesque, el número de depredadores se mantendrá constante con un aumento en la población de las presas.

AUTOLIMITACION DE LAS PRESAS

El modelo de Lotka-Volterra ha sido estudiado frecuentemente de manera tal que considera los efectos dependientes de la densidad de la población de las presas. Dentro de estos factores se encuentran los causados por la limitación del abastecimiento de comida y por la sobrepoblación. El efecto de tal autolimitación es modelado en nuestro sistema al hacer a la función de mortalidad linealmente dependiente de la población total de las presas, es decir

$$\mu = \mu_0 + rP_1 \dots \dots \dots (9)$$

para r y μ constantes positivas.

Si (9) es impuesto a (1) - (8), las ecuaciones resultantes serán:

$$\dot{P}_1 = -\mu_0 P_1 - r P_1^2 + \frac{B}{1+kP_2}$$

$$\dot{B} = -\gamma B - r P_1 B + \beta_0 A$$

$$\dot{A} = -\gamma A - r P_1 A + \frac{B}{1+kP_2}$$

$$\dot{P}_2 = -bP_2 + cBP_2$$

En este caso no incorporaremos el término de pesca (podemos considerar el caso $\lambda=0$), es decir, consideraremos inexistente la pesca y que salvo por este término, nuestro primer sistema es generalizado por este último.

Ahora variaremos el parámetro r , que es el que refleja la autolimitación de las presas, para ver como la estructura de la solución depende de este parámetro. Al igual que antes fijaremos las otras constantes (con el mismo valor que antes).

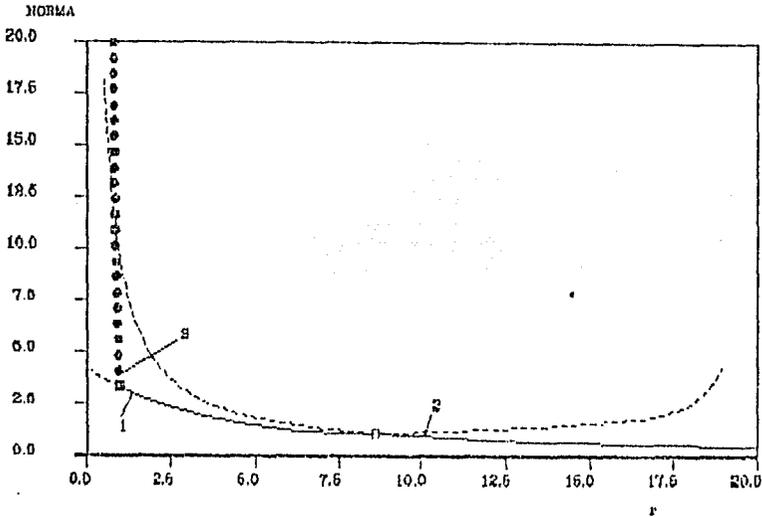


FIGURA 5

En la figura 5 vemos el resultado de haber variado r en nuestro sistema. Ahora se tiene una gráfica mas complicada que las anteriores. Se tienen tres ramas solución (en realidad hay más pero ellas no son de interes). Las ramas 1 y 2 son ramas solución estacionarias y la rama 3 consiste de soluciones periódicas. El cuadrado en blanco en la rama indica un punto de bifurcación estacionario y el cuadrado en negro representa un punto de bifurcación de Hopf. A lo largo de la rama 1 las presas tienden a crecer para valores de r muy pequeños o para valores muy cercanos a 20 y alcanzan su mínimo valor en el punto de bifurcación estacionario; en la otra rama el número de presas permanece constante. Para valores mayores de 20 se tienen otras ramas que no aparecen en la figura 5, pero estas no interesan ya que en ellas la poblacion de las presas es negativa, lo cual no tiene sentido. La poblacion de los depredadores solo aparece en la rama 1 (en la otra rama es cero) y decrece a medida que r

decrece, hasta extinguirse en el punto de bifurcación de las ramas 1 y 2. Esto puede verse con mayor claridad en las figuras 6 y 7 que muestran el comportamiento de las presas y los depredadores al variar r . En la figura 6 el eje horizontal es el parámetro de bifurcación r y el vertical es el máximo de P , es decir para soluciones estacionarias ponemos a P y para soluciones periodicas ponemos

$$\max_{[0, T]} P_1(t)$$

donde T denota el período. De manera analoga lo hacemos para P en la figura 7.

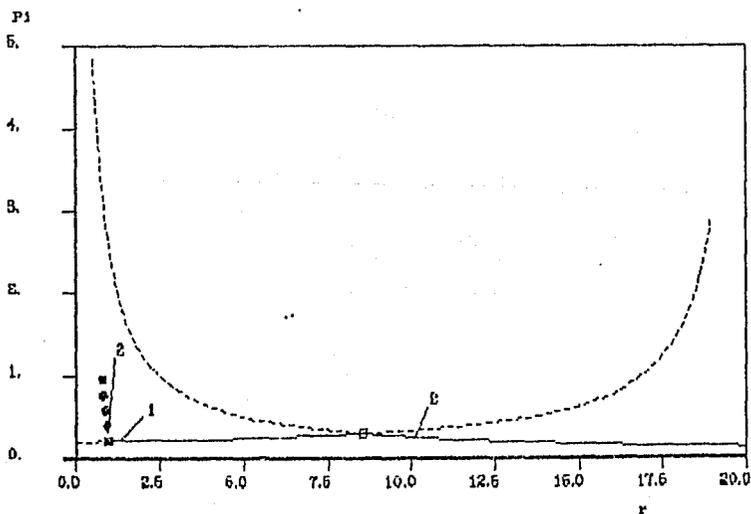


FIGURA 8

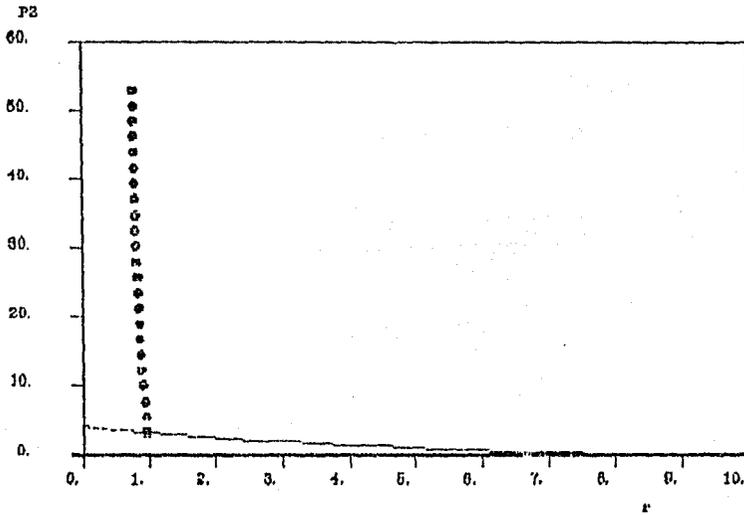


FIGURA 7

Las soluciones periódicas representadas por la curva 3 en la figura 5 son soluciones estables, el punto de bifurcación de Hopf se localiza en $r = 0.954$ y dicha rama de soluciones es vertical y a lo largo de ella su periodo va en aumento, empieza con valor de 7.128).

CANIBALISMO

El canibalismo en los jóvenes ha sido documentado en una variedad de especies, por ejemplo en peces como el salmón, el róbalo y la perca.

Sería interesante ver como influye en nuestro modelo el hecho que la población de las presas fuese canibal (unicamente las crias son afectadas). Para esto asumiremos que el canibalismo es importante como un recurso primario de alimentación y no como una forma de control en la población, que es como generalmente se piensa. Esto nos indica que el parámetro r es importante ya que es el que nos indica la autolimitación de las presas. Por simplicidad supondremos que el canibalismo sólo afecta a la población de las presas y supondremos además que la fracción de crias que sobreviven al canibalismo es $\frac{sB}{P_1}$

donde s es una constante positiva.

El parámetro s es importante ya que nos revela el grado de canibalismo presente en la población de las presas; para s pequeño la población de las presas se alimenta basicamente de las crias ("es muy canibal") y para s grande el canibalismo no es significativo. En [L-G] se pueden encontrar mas detalles al considerar una población canibal.

El tomar en cuenta estas consideraciones nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{P}_1 = -\mu_0 P_1 - r P_1^2 + \frac{B}{1+kP_2} + \frac{sB^2}{P_1}$$

$$\dot{B} = -\gamma B - r P_1 B + \beta_0 A$$

$$\dot{A} = -\gamma A - r P_1 A + \frac{B}{1 + k P_2}$$

$$\dot{P}_2 = -b P_2 + c B P_2$$

$\hat{\mu}_0$

es una constante positiva y está relacionada con μ en la misma forma que μ_α sólo que $\hat{\mu}_0 \geq \mu_0$ dado que la mortandad aumenta.

Por la importancia del parámetro s , variaremos este y fijaremos todos los demás parámetros con el mismo valor que antes. En este caso tomaremos $\hat{\mu}_0 - \mu_0$ solo con fines de tener seguridad en nuestros cálculos, ya que este sistema generaliza el anterior. Tomaremos $r = 0.53$.

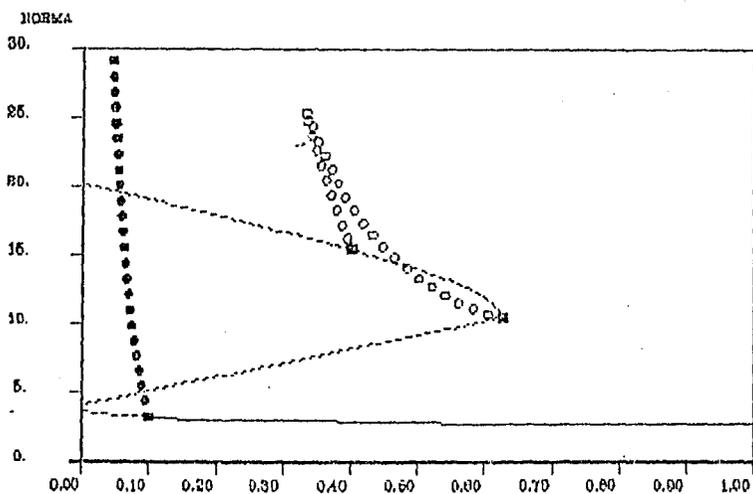


FIGURA 8

Al variar s obtenemos tres ramas solución (ver figura 8) donde la rama indicada por líneas es una solución estacionaria y al igual que antes, es estable donde la línea es sólida e inestable en la espaciada. Las ramas indicadas por círculos son soluciones periódicas. Los círculos negros representan soluciones periódicas estables y los blancos inestables. Hay tres puntos de bifurcación de Hopf, representados por cuadrados negros en la rama estacionaria.

Cuando s es disminuida en su valor, el comportamiento estable del sistema va de un comportamiento estacionario hasta alcanzar el valor de $s = 0.0989$, en donde el sistema tomará ahora un comportamiento oscilatorio para todo valor pequeño de s .

A lo largo de la rama estacionaria, la población de las presas crece al aumentar el valor de s , este hecho es lógico ya que valores grandes de s indican que el número de crías que no sufren el canibalismo es mayor y esto repercute en una mayor cantidad de presas. El crecimiento de hecho no es en forma desmedida ya que el número de nacimientos en esta rama permanece constante, como puede observarse en las figuras 9 y 10.

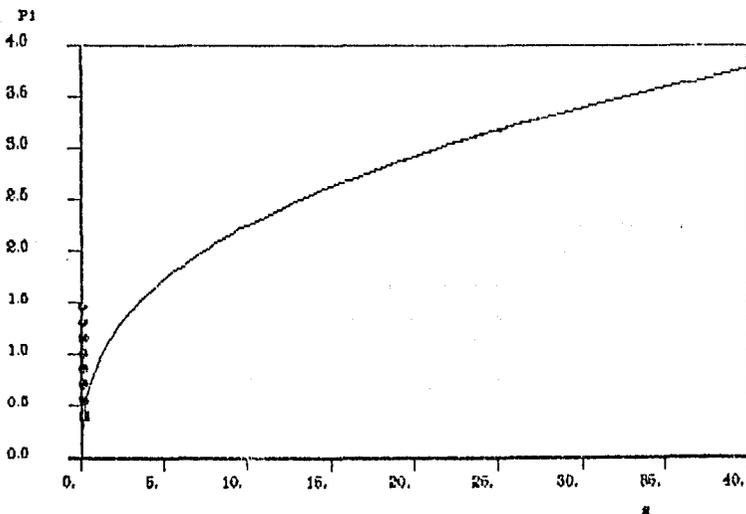


FIGURA 9

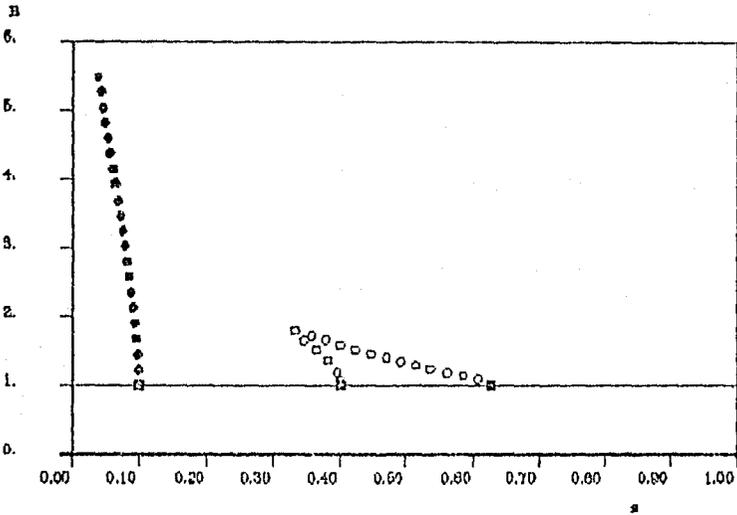


FIGURA 10

En la misma rama estacionaria, el comportamiento de los depredadores es sorprendente ya que al aumentar el valor de los depredadores tienden a extinguirse, por lo que esta población se ve afectada negativamente al disminuir el canibalismo; la posible respuesta a este hecho es que cuando hay muchos depredadores el número de presas es bastante pequeño, por lo cual la población tiende a disminuir y ya no se recupera de este factor. En la figura 11 ilustramos el comportamiento de los depredadores.

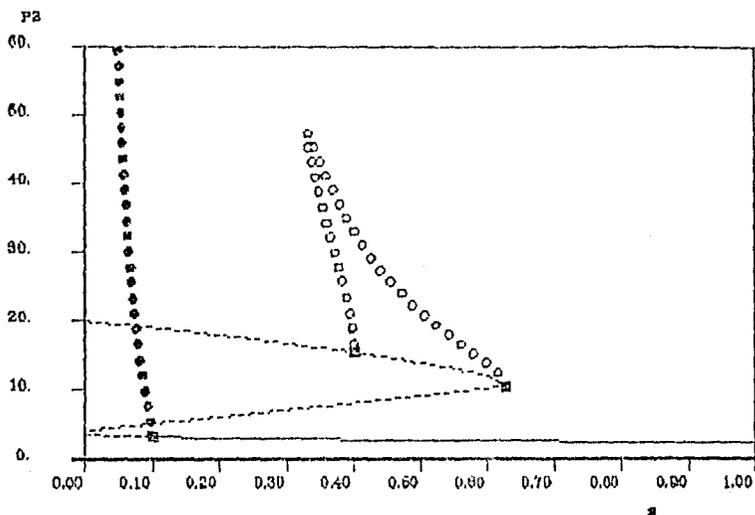


FIGURA 11

En la figura 12 mostramos proyecciones de algunas órbitas localizadas a lo largo de la solución periodica estable.

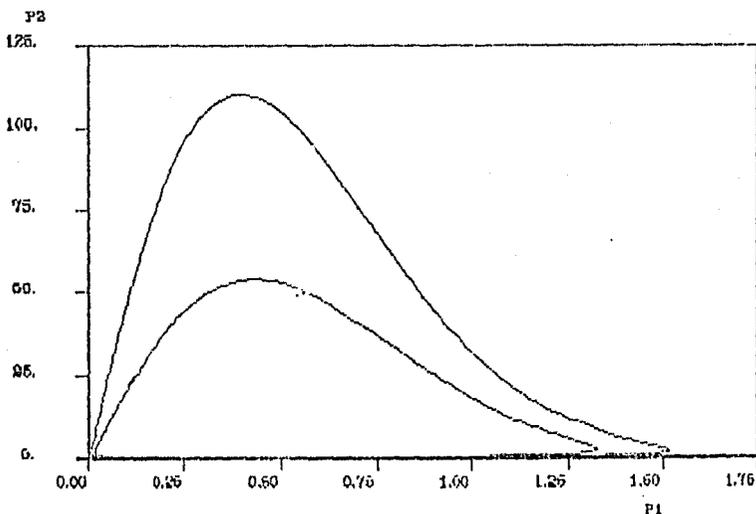


FIGURA 12

Es de gran interes conocer como cambia el diagrama de bifurcación cuando se varia un segundo parámetro. Aqui escogeremos r como este segundo parámetro, ya que nos dará información para corroborar nuestros resultados anteriores y

poder predecir para cualesquiera otros. En particular queremos determinar que sucede con los puntos de bifurcación de Hopf al variar r . Este fenómeno de hecho es estructuralmente estable, es decir persiste bajo pequeñas perturbaciones y se esperaría encontrar curvas de estos puntos en el plano r - s . Los resultados se muestran en la figura 13. Por ejemplo, la localización de los puntos de bifurcación de Hopf en la figura 8 pueden ser encontrados en la figura 13 dibujando un línea horizontal en $r=0.53$.

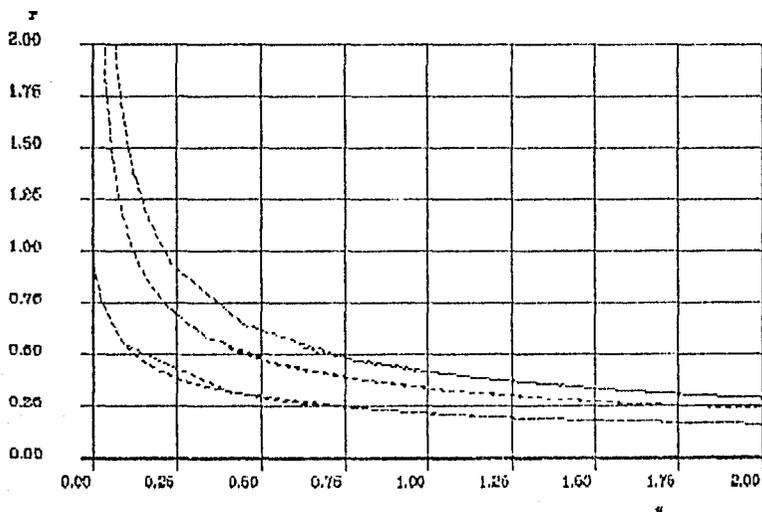


FIGURA 13

De la figura 13 podemos obtener las siguientes conclusiones: para r en el intervalo $(0,1)$ siempre tendremos como mínimo 3 puntos de bifurcación de Hopf, es decir, dos ramas de solución periódicas, una que conecta a dos de los puntos y la otra que se extiende de manera vertical. Para $r=0$, $s=0$ no tendremos soluciones periódicas lo cual concuerda con nuestro primer ejemplo, el cual se encuentra detallado en la figura 1. Para $s = 0$, es el caso que estudiamos anteriormente y que se mostró en las figuras 8 - 11. Para $s > 1$ tendremos solo dos puntos de bifurcación de Hopf. De estas conclusiones podemos determinar la importancia de la variación en dos parámetros de los puntos de

bifurcación de Hopf. Se podría hacer el intento de variar más parámetros, pero en muchas ocasiones no es posible, de hecho en muchos experimentos no se deja en libertad a todos los factores, sino que se mantienen fijas a muchas condiciones y se varían a unas cuantas.

A manera de completar el trabajo, incluiremos en nuestro sistema el término representativo de la pesca, el cual habíamos dejado excluido, para darnos el sistema final:

$$\dot{P}_1 = -\mu_0 P_1 - r P_1^2 + \frac{B}{1 + k P_2} + \frac{s B^2}{P_1}$$

$$\dot{B} = -\gamma B - r P_1 B + \beta_0 A$$

$$\dot{A} = -\gamma A - r P_1 A + \frac{B}{1 + k P_2}$$

$$\dot{P}_2 = -b P_2 + c B P_2 - \lambda \left(1 - e^{-d P_2} \right)$$

Al igual que antes, fijamos todos los parámetros, excepto uno. Dado que ya tenemos información para los parámetros r y s , el parámetro libre será ahora λ .

Los valores en este caso de los parámetros son: $r = 0.533$ y $s = 0.453$, los demás siguen conservando su valor original.

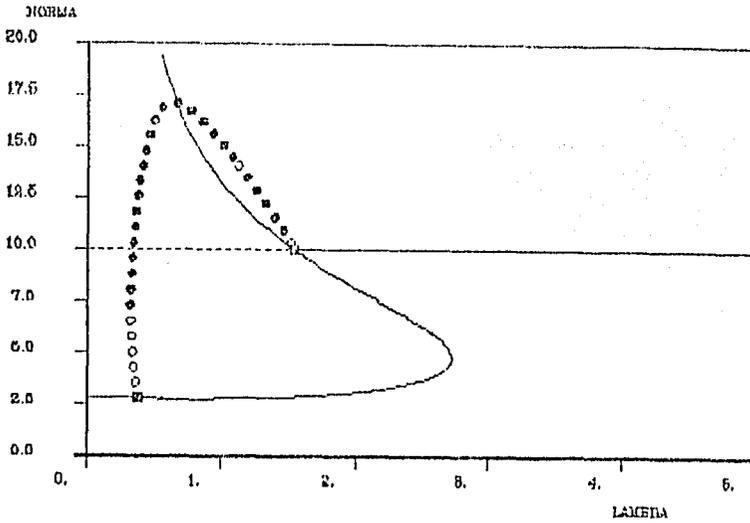


FIGURA 14

Al variar λ obtenemos tres ramas solución (ver figura 14). La estabilidad es indicada como en las figuras anteriores. Se tiene una rama estacionaria (indicada por el número 2) la cual permanece constante (que no es de interés ya que la población de los depredadores es negativa a lo largo de ella), sin embargo las otras dos ramas muestran características muy interesantes. Los cuadrados marcados con el número 2 son puntos de bifurcación, el negro es de Hopf y el blanco es del estado estacionario correspondiente al cruce de las ramas solución estacionarias. La figura 14 parece indicar que el arco de órbitas periódicas está conectado por los dos puntos de bifurcación, pero como habíamos notado, uno de ellos es estacionario; lo que sucede es que dicha rama termina en una órbita de periodo infinito. En la figura 15 mostramos un acercamiento a dicha órbita, mientras que en la figura 16 mostramos tal órbita. En la misma rama notamos un cambio en la estabilidad, lo cual nos indica la posible existencia de una rama de solución cuasi-periódica.

FIGURA

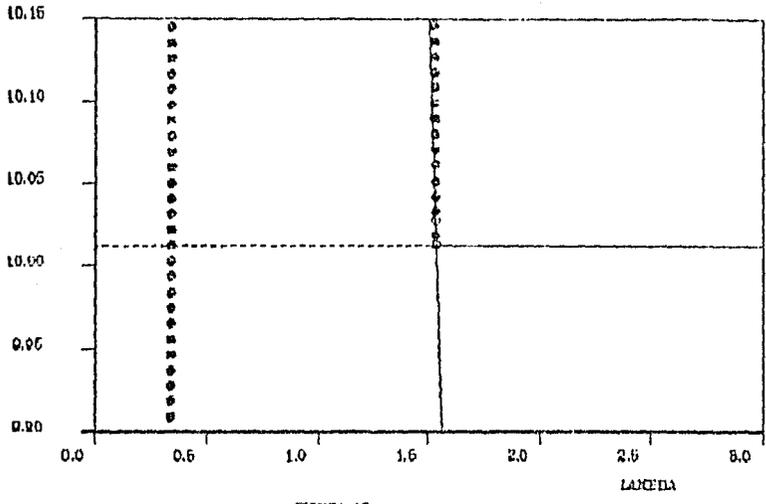


FIGURA 16

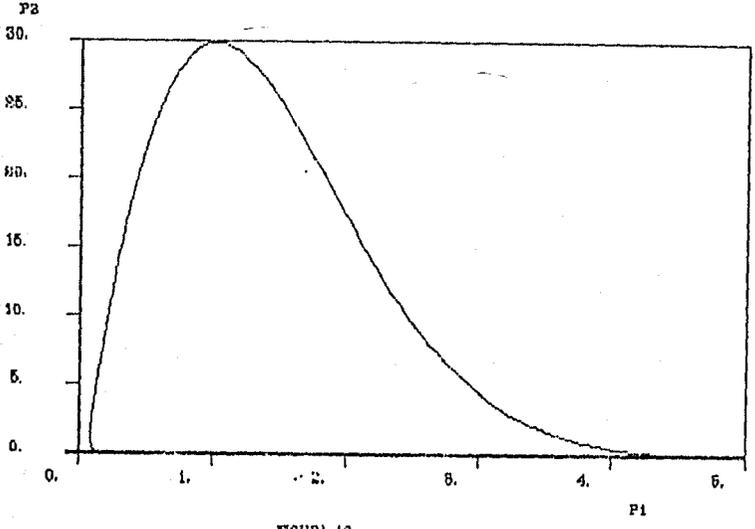


FIGURA 18

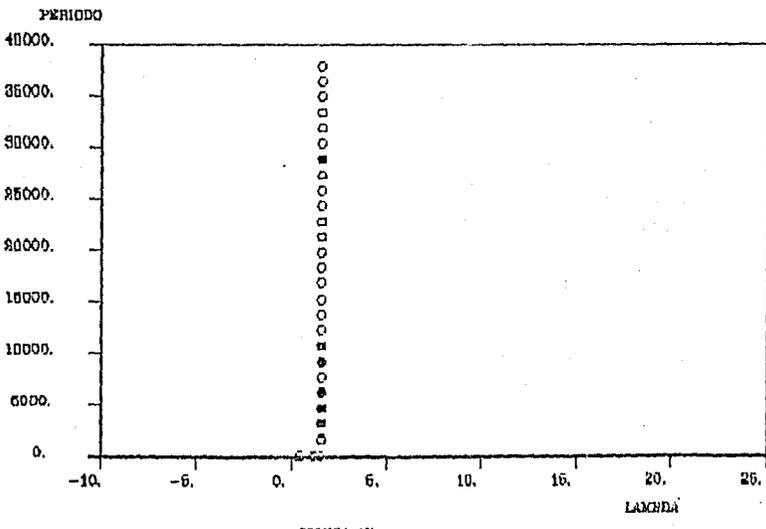


FIGURA 17

En la figura 17 mostramos como el periodo se va incrementando a lo largo de la rama solución periódica.

En la rama estacionaria, al aumentar la cota de pesca la población de los depredadores desaparece, como era de esperarse, esto provoca un cambio en la rama, la cual se va incrementando dado que basicamente representa a la población de las presas. Esto puede corroborarse al ver que la figura 18, que modela el comportamiento de las presas, es bastante similar a la figura 14. En la figura 19 mostramos como la población de los depredadores se extingue al variar λ .

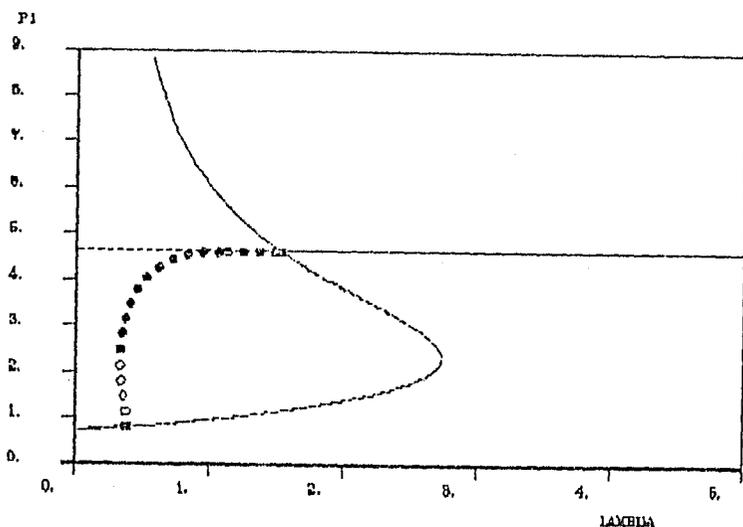


FIGURA 18

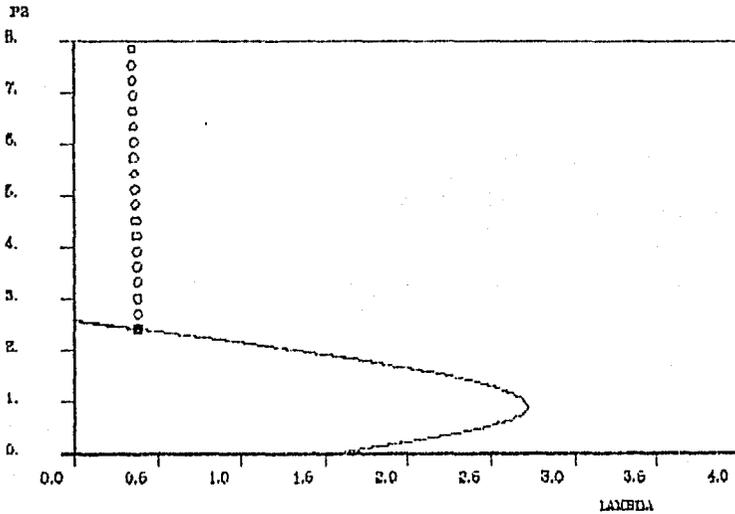


FIGURA 19

A partir de este momento, uno podría continuar estudiando el comportamiento del sistema al variar otros parámetros, por ejemplo λ y s o λ y r etc. como se hizo anteriormente, pero ya no lo haremos aquí.

Conclusiones

El estudiar el efecto de edad [←] estructurada en el sistema depredador-presa, donde los depredadores comen únicamente de las crías, nos ha llevado a concluir que el sistema es en realidad

inestable y depende de las modificaciones que se hagan al modelo, el hecho de que aparezcan soluciones periodicas y se pueda restaurar la coexistencia estable de las presas y los depredadores.

Como hemos visto, el introducir el factor de pesca no modificó el comportamiento inestable del sistema. El haber considerado las limitaciones propias de las presas nos llevó a encontrar las soluciones periodicas que habiamos estado buscando. El haber considerado a las presas que fuesen canibales nos llevo a los mismos resultados negativos, mientras que el haber considerado las limitaciones propias de las presas nos llevó a encontrar las soluciones periodicas que habiamos estado buscando.

El modelo podría seguir siendo estudiado al introducir otras características. De hecho uno podría estudiar el modelo al considerar factores como la mutua interferencia de los depredadores, lo cual sería modelado al sustituir el término BP_2 en nuestra última ecuación por el término que representa el número de presas que es comido, que sería $\frac{kkBP_2}{1+kP_2}$.

Se podría considerar la diferente capacidad de caza de los depredadores debido a su edad. En este caso trataríamos a los depredadores como un sistema dependiente de la edad, tal y como se hizo con las presas.

Otro factor es la difusión tanto de las presas como de los depredadores, para lo cual tendríamos que introducir una dimensión espacial x (esto por simplicidad), lo cual nos llevaría a tener ecuaciones diferenciales parciales.

Todos los efectos anteriores se podrían considerar, pero para eso se tendría que tener un interés muy especial en determinado modelo.

B I B L I O G R A F I A

- [C-H] Chow, S. and Hale, J., "Methods of Bifurcation Theory", Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Cr] Cronin, Jane, "Some Mathematics of Biological Oscillations", SIAM Review 19, No. 1, 1977, 100-138.
- [D-K] Doedel, E. and Kernevez, J., "AUTO: Software for Continuation and Burcation Problems in Ordinary Differential Equations, Technical Report, California Institute of Technology, 1986.
- [G-M] Gurtin, Morton and MacCamy, Richard, "Some Simple Models for Non- Linear Age-Dependent Population Dynamics", Mathematical Biosciences 43, 1979, 199-211.
- [Ha] Hassell, M.P., "The Dynamics of Arthropod Predator-Prey Systems", Princeton U.P., Princeton, 1978.

- [Iz] Ize, J., "Teoría de Bifurcación", México. IIMAS, 1981.
(Comunicaciones Técnicas, serie verde No. 19).
- [Le] Levine, Daniel, "On the Stability of a Predator-Prey System with Egg-Eating Predators", Mathematical Biosciences 56, 1981, 26-46.
- [L-G] Levine, Daniel and Gurtin, Morton, "Models of Predator and Cannibalism in Age-Structured Populations", Diff. Eqs. and Appl. in Ecology, 1981, 145-159.
- [Mc] McKendrick, A.C., "Applications of Mathematics to Medical Problems, Proc. Edinburg Math. Soc., 1926, 44: 98-130.
- [Ra] Rabinowitz, P., "Applications of Bifurcation Theory", ed., Academic press, 1977.