24° 79

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPEDEUTICO EN MATEMATICAS: SISTEMAS NUMERICOS

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

HUGO SANCHEZ ARROYO

México, D. F. 1988

I N D I C E

CAPITULO 1

I N T R O D U C C I O N

Con el presente trabajo, deseo hacer un bosquejo de los Sistemas Numéricos de tal forma que a los estudiantes de bachillerato le sirva como una guía para un conocimiento más completo en ésta area de las Matemáticas.

Inicialmente empezamos a dar un bosquejo histórico de puntos importantes, que han sido fundamentales, en el desarrollo de las Matemáticas.

En el capítulo 3 se determinan las propiedades, los conceptos y aquellos problemas que son utilizados como modelos o patrones en los números naturales. Así vemos problemas que se relacionan con la teoría combinatoria, con el principio de inducción matema'tica, con el binomio de newton, con la teoría de juegos, etc. Se remarca la necesidad de tener otro sistema de números, debe ser más completo y que nos permita realizar algunas operaciones que en éste sistema no están definidas.

En el capítulo 4 englobamos más que nada, el concepto de divisivilidad y el teorema de la división de Euclides enmarcados en el sistema de los números enteros. Se analizan algunos problemas típicos de la divisibilidad que nos permiten ejemplificar los teorema mencionados. No se hacen demostraciones rigurosas de teoremas pues se trata, más que nada, de darlos a conocer.

En el capítulo 5 se describen las propiedades y conceptos que determina el sistema de los números racionales. Se analiza el concepto de medida así como la necesidad de buscar otro sistema de números para algunos problemas que se mencionan.

En el capítulo 6 se describen las propiedades y conceptos que determina el sistema de los números reales. Se pone un ejemplo de como realizar operaciones aritméticas con entes diferentes a los números reales, ésta experiencia fue realizada por un ruso.

En el capítulo 7 empezamos por dar una breve reseña histórica del surgimiento de los números complejos así como sus aplicaciones en diferentes areas tanto de física como de matemáticas. Enseguida se describen las propiedades y conceptos que determinan éste sistema.

CAPITULO 2

A L G O D E H I S T O R I A

En la antigüa Grecia, la teoría de la divisibilidad infinita de la materia y el atomismo surgen en el siglo V a. de n.e. Anaxágoras, primer filósofo que la propuso, decía que la materia estaba constituida por elementos primarios, infinitamente pequeños, que el calificaba como las "Semillas de las Cosas".

Leucipo y Demócrito, fundadores del atomismo griego, consideraban que la materia es divisible, pero hasta cierto punto nada más; y los últimos elementos, los átomos, son impenetrables, absolutamente sólidos y se distinguen únicamente por la forma. A Demócrito se le debe la hipótesis de que la Vía Láctea está formada por infinitas estrellas, tan alejadas de nosotros que su luz se funde en un continuo y tenue resplandor; así también se puede concebir que la arena del mar vista de lejos parece una masa continua, pero de hecho, está formada por un número ingente de arenillas y por lo tanto, el agua del mar también está constituida por partículas aun más pequeñas.

Sin embargo, el postulado de los atomistas acerca del límite inferior de la divisibilidad de la materia, no convenció a todos los filósofos de la época, como por ejemplo a Zenón, quien la refutó basandose en la Lógica del Razonamiento. Zenón se basaba en el reconocimiento de la continuidad de la materia, pues cualquier cuerpo, por pequeño que sea, puede ser dividido en partes y por lo tanto se deduce la posibilidad potencial de una división infinita de la materia. Así, se propone desarrollar la teoría sobre la inmutabilidad de una existencia única y eterna, partiendo de las siguientes premisas :

1. La suma de un número infinitamente grande de magnitudes finitas y extensas, por pequeñas que sean, constituye una magnitud infinitamente grande;
2. La suma de cualquier número de magnitudes inextensas, por grande que sea, es igual a cero.

Llega así, a sus famosas paradojas, las cuales son :

i. La de Aquiles que corre tras una tortuga, en la que afirma que antes de que Aquiles recorra la mitad de la distancia que le separa de la tortuga, ésta se habrá adelantado un tanto; mientras recorra la mitad que le queda, la tortuga irá más lejos, etc. Al dividir infinitamente el camino a recorrer por la mitad, obtendremos un número ilimitado de segmentos finitos, cuya suma, según premisa 1, es infinitamente grande y por lo tanto Aquiles jamás alcanzará a la tortuga;

ii. Y la de la flecha, donde Zenón trata de mostrar la contradicción existente en la concepción del movimiento. Si consideramos que el movimiento es un proceso durante el cual el cuerpo que se mueve se encuentra primero en un punto, luego en otro, más tarde en otro y así sucesivamente, por lo que podemos decir que se trata de una suma de posiciones consecutivas del cuerpo en diversos puntos, i.e., de una suma de movimientos de reposo, pero los momentos de reposo jamás producen movimiento; ya que una suma de ceros, por muy grande que sea, siempre será cero. Por lo tanto, el movimiento es imposible.

Diógenes refuta ésta teoría paseandose en silencio, mostrandole la evidencia sensible.

Los Atomistas tuvieron históricamente muchas ventajas sobre los partidiarios de la divisibilidad infinita de la materia, aunque no pudieran refutarla, en la explicación de los fenómenos calóricos, reacciones químicas, procesos de difusión, evaporación, etc. que la teoría de la divisibilidad infinita no podía explicar con tanta claridad y evidencia.

Disgregada la sociedad esclavista y desaparecida la civilización antigüa, los problemas relativos a la estructura de la materia quedó interrumpido durante mucho tiempo. Para la iglesia, que dominaba las mentes de los hombres del feudalismo, la verdad se encerraba en la Biblia y en la obras de Aristóteles de las cuales eliminaban la parte viva y materialista y dejaban la parte que respondía al espíritu de la religión.

Aristóteles negaba la concepción atomista de la materia y consideraba que todos los cuerpos del mundo estaban constituidos por : Agua, Aire, Fuego y Tierra y que los cuerpos celestes y los seres sobrenaturales que rigen la naturaleza estaban formados de eter, cierta sustancia inmaterial.

Estas ideas prevalecieron hasta comienzos del siglo XVII pero gracias a los trabajos de Gassendi, Boyle, Galileo, Newton y otros sabios es que desempolvan la teoría atomista, hallando muchas aplicaciones en la Física y Química.

En los siglos XVIII y XIX la Física llegaba a los siguientes resultados : Los mejores atomistas se basaban en la suposición de que existían elementos discretos de la materia, pero no insistían en su absoluta indivisibilidad. Sin embargo, Descartes y Newton admitían una cierta continuidad en la estructura de la materia, pues aceptaban la posibilidad de que los átomos se dividiesen en partículas todavía menores.

Surge la teoría dinámica de la materia, enunciada por E. Kant, contra los atomistas; proclamaba la continuidad y divisibilidad infinita de la materia; la materia está constituída por fuerzas puras de atracción y repulsión, equilibradas entre sí y por lo tanto los cuerpos poseen estabilidad y sufren cambios interno constantemente.

Descubrimentos importantes que contribuyen grandemente a la teor atomista en el siglo XIX y principios del siglo XX :

i. El inglés J. Dalton descubrió la Ley Fundamental de la Química, la Ley de las Proporciones Múltiples y es el primero en definir el Peso Atómico de los elementos.

ii. El físico y químico italiano A. Avogadro descubrió la ley de la igualdad numérica de moléculas en volúmenes iguales de gases diferentes sometidos a las mismas condiciones de presión y temperatura.

iii. Faraday descubre la Ley de la Electrólisis en la cual admite la estructura atómica de la electricidad.

iv. Pierre y Madame Curie descubren la Radioactividad del Radio, lo que echaba por tierra la vieja idea de la indivisión e invariabilidad de los átomos.

v. Maxwell dá una descripción matemática de la Teoría Electromagnética de la Luz.

vi. Finalmente A. Einstein enuncia la Teoría de la Relatividad en la cual dice que no existe ningún medio universal que lo abarque todo, ningún sistema absoluto de referencia en la naturaleza; el espacio es una forma esencial de existencia de la materia , cuyas propiedades dependen de la estructura y distribución de la misma.

El hecho de que podamos dividir mentalmente los cuerpos en partes tan pequeñas como queramos no significa que esas partes existan objetivamente. Existe un límite cualitativo para la división, pasado el cual la operación de fraccionamiento en partículas todavía más pequeñas pierde todo sentido físico; sin embargo cualesquiera que sean los microobjetos que se descubran en el futuro, todos poseerán estructura compleja y propiedades inagotables y por más pequeños que sean, constituirán una unidad de lo finito y de lo infinito, unidad que tiene muchas manifestaciones concretas y en particular caracterizará a un cuerpo en su limitación en el tiempo y en el espacio. De ésto se deduce que el conocimiento de lo infinito dependerá siempre de nuestra capacidad de analizar con precisión y amplitud lo finito, pues como decía F. Engels (1) : "Todo verdadero conocimiento de la naturaleza es conocimiento de lo eterno e infinito y, por lo tanto, es absoluto por su esencia ".

Manifestaciones concretas de una unidad :

Se manifiesta en las leyes de existencia espacial de los objetos materiales, pues todo cuerpo está limitado en el espacio y por ello es finito, sin embargo cada cuerpo origina diversos campos que son potencialmente capaces de propagarse infinitamente en el espacio.

Se manifiesta en el caracter de la existencia de la materia en el tiempo, pues cada objeto concreto tiene su principio en el tiempo y por lo tanto debe tener su fin.

Se manifiesta en las propiedades propias de la materia en su conjunto y en el valor de cada una de ellas, pues todo objeto

---

(1). F. Engels, Dialectica de la Naturaleza, Gospolitizdat, pag. 186

material posee infinito número de propiedades y es lo que le dá su caracter inagotable a la materia, sin embargo, cada una de éstas propiedades tienen cierto valor finito pues en su determinación cuantitativa no pueden ser todo lo grande o pequeñas que se quiera.

De todas las propiedades de la materia tal vez sólo a la extensión en el espacio y a la duración en el tiempo se les puede considerar como infinitas, aplicado tanto al microcosmos como al cosmos, ya que lo mismo el espacio que el tiempo son formas universales de existencia de la materia.

CAPITULO 3

SISTEMA DE LOS NUMEROS NATURALES, ARITMETICA

3.1 SU CONCEPTO

Desde tiempos muy remotos el hombre primitivo se enfrentaba a colecciones de objetos que le interesaba manejar, por lo cual utilizaba ciertos nombres para denominar tales objetos. Estos nombres no tienen nada en común, pues por ejemplo para denominar "tres caballos" utilizaban cierto nombre y para "tres vacas" utilizaban otro muy diferente. Esto muestra que eran incapaces de desdoblar a la colección de la propiedad que nos expresa su cardinalidad, esto es, por un lado la colección y por otro su característica; y así con éste método, gradualmente se fueron acumulando en los pueblos, nombres distintos para denominar la misma cantidad de objetos.

Como entre grupos o tribus necesitaban comunicarse para saber, por ejemplo, cuántos miembros de una manada o de una familia habían, crean un lenguaje adecuado a través de la comparación y van descubriendo que las colecciones tienen ciertas propiedades y ciertas características, por lo que poco a poco se produce tal desdoblamiento.

Nuestro actual sistema de numeración utiliza la notación posicional en base 10 (la base la constituyen las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9). Esta notación en un número significa que cada cifra tiene un valor según sea el lugar o posición que ocupe en dicho número; por ejemplo :

$$(28)_{10} = 8\cdot10^{0} + 2\cdot10^{1}$$

$$(897)_{10} = 7\cdot10^{0} + 9\cdot10^{1} + 8\cdot10^{2}$$

$$(1011)_{10} = 1\cdot10^{0} + 1\cdot10^{1} + 0\cdot10^{2} + 1\cdot10^{3}$$

y en general un número de m cifras será de la forma

$$10^{m} C_{m} + 10^{m-1} C_{m-1} +\cdots+ 10^{2} C_{2} + 10^{1} C_{1} + 10^{0} C_{0}$$

Donde $C_{0}, C_{1}, C_{2}, C_{3},\cdots, C_{m}$

son cifras de la base, es decir son cualquiera de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Evidentemente que el sistema en base 10 ó decimal no es el único. Recordemos que los Babilónicos utilizaban el sistema sexagesimal o en base 60. Su influencia se conserva hasta la actualidad en mediciones específicas como la división en el reloj en 60 minutos, o en la circunferencia de 360 grados, etc. En los lenguajes de máquina de los procesos de programación en las computadoras se usan los sistemas en base 2 y en base 8. El sistema en base 20 de los mayas, excepto por una "falla", no se usó más que para fechar acontecimientos y magnitudes pues no fué posible que operaran con dicha representación. Escribamos finalmente algunos números, digamos en base 3 :

$$(2001)_3 = 2\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 = (55)_{10}$$

$$(201)_3 = 2\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 = (19)_{10}$$

$$(10201)_3 = 1\cdot 3^4 + 0\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 = (100)_{10}$$

Observese que en este caso usamos solo las cifras 0, 1 y 2 en su sentido usual. El número 3 en este sistema hace las veces del 10 en el sistema decimal y debe sobreentenderse como 10. En lugar de $3^2 = 9$ lo entendemos como 10^2.

Comparar las nociones de <u>número</u> <u>y</u> <u>estructura</u> <u>aritmética</u> en contraposición con las nociones <u>geométricas</u> <u>básicas</u> nos lleva a concluir grados de abstracción más altos en las primeras nociones que en las segundas. Seguramente por eso la humanidad batalló más para lograr las primeras, pues las segundas ya aparecen en una forma bastante elaborada desde la época de Euclides (s. III a.n.e.) mientras que el concepto de número, propiamente aparece hasta el siglo pasado.

Para precisar la noción de número natural no basta con dar su conjunto, que usualmente se denota como : N = { 1, 2, 3, ... } (véase APENDICE 3.00), sino que es preciso considerarlo ordenado en una sucesión, precisamente la sucesión 1, 2, 3, ... que cumple de manera informal e intuitiva con las siguientes propiedades :

i. Se parte de un primer elemento especial, el 1.

ii. La sucesión no termina nunca ni se ramifica (es un conjunto infinito).

iii. La sucesión tampoco se cierra sobre sí misma (como la numeración de un reloj).

iv. La sucesión no tiene puntos de confluencia (o sea que ningún elemento sigue inmediatamente a dos distintos),

v. La sucesión no admite números "naturales" intercalados entre dos, ni excluidos de ella.

Estas propiedades, ya formalizadas, llevaron a Dedekind y a Peano a definir al número natural a través de 5 axiomas, los llamados axiomas de Peano de los números naturales (véase APENDICE 3.1).

Resumiendo, un número natural es todo elemento de la sucesión 1, 2, 3, ... que cumpla con las propiedades i) a v).

3.2 CONTAR

Métodos de numeración hay de muchas clases y muy diversos, mediante varios ejemplos ilustraremos algunos de los métodos de contar más usuales.

3.2.1 COORDINABILIDAD

Históricamente este proceso fué creado por el hombre no instantáneamente ni por la ocurrencia de un científico notable, sino que corresponde a un período largo y penoso, donde primitivamente se tomaba el conjunto "patrón natural": los dedos de las personas como el conjunto patrón de comparación (en éste clan hay tantas personas como los dedos de mis manos y los dedos de mi pie izquierdo).

Aún más antigüa es la manera como el hombre respondía a la pregunta " dónde hay más"; lo ejemplificaremos como sigue: A todos los guerreros de una tribu se les quiere dar un caballo. ¿ Hay caballos suficientes que alcancen para todos ?

Soluciones : Contar las personas y los caballos y checar si alcanzan o pedirle a cada guerrero que tome un caballo y si no quedan caballos libres es evidente que hay tantos caballos como personas.

Esto es, sin conocer en realidad el número de caballos o personas, uno sabe que el número de elementos de cada conjunto son iguales. Esto se debe a la correspondencia uno-a-uno o biunívoca (véase APENDICE 3.3) que se establece entre las dos clases de entes. A cada persona le corresponde un caballo y reciprocamente, a cada caballo, le corresponde una persona.

Al contar cualquier clase de objetos, éste es el método que se emplea. Una clase de objetos contiene las cosas que deben ser contadas y la otra clase siempre está a mano. Es la clase de los " números naturales " los que, por conveniencia, consideramos que aparecen ordenados de la siguiente manera : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... (por convención el cero puede o nó incluirse como un número natural; incluirlo en particular facilita definir y manipular con la relación de orden "≤", lo más usual es no incluirlo).

Equiparando, en una correspondencia uno-a-uno, los elementos de la primera clase de objetos con la clase de los números naturales el último número natural necesario para completar las parejas indica cuántos elementos tiene dicha clase de objetos. El existir tal número natural nos define a los conjuntos finitos. La no existencia de tal número natural nos define a los conjuntos infinitos.

Otra forma de contar sería utilizando los dedos, palillos, piedritas, etc. que nos permita establecer correspondencias biunívocas entre dos clases.

Conluyendo, podemos decir que el proceso de contar consiste en la coordinabilidad de los elementos de un conjunto dado con las palabras "uno", "dos", "tres", etc. ; en otros términos, al contar comparamos los elementos del conjunto dado con los elementos de un conjunto estandar escogido de una vez y para siempre como el conjunto patrón de comparación que es el conjunto de los números naturales N.

El método de coordinabilidad entre conjuntos es también aplicable a conjuntos infinitos. Por ejemplo, ¿ tienen el mismo número de elementos el conjunto de números naturales N y el conjunto de números pares positivos P^{+} ? Dado que a cada número natural n se le puede unívocamente poner en correspondencia con el número natural par 2n, entonces la correspondencia es uno-a-uno

$$n \longleftrightarrow 2n$$

hace necesaria la convención de que N y P^{+} tienen el mismo número de elementos. Esta correspondencia también puede establecerse mediante la función $y = 2x$, con $x \in N$ y $y \in P^{+}$.

Geométricamente en muchos casos es muy claro si dos conjuntos son coordinables, por ejemplo los segmentos A y B ¿ son conjuntos coordinables ?

A : |---------|

B : |------------------|

En efecto, proyectando un segmento sobre el otro, o sea definiendo convenientemente O queda claro que a cada punto de A le corresponde uno y solo uno de B.

```
             O
            /|\
           / | \
          /  |  \
         /   |   \
        /----|----\ A
       /     |     \
      /      |      \
     /       |       \
    /        |        \
   |---------|---------| B
```

PROBLEMAS

I). Establecer la correspondencia uno-a-uno entre el conjunto N de números naturales y el conjunto P de todos los posibles números pares. (véase el APENDICE 3.2)

II). Establecer la correspondencia uno-a-uno entre los números naturales N y el conjunto de números racionales Q[0,1] del segmento [0,1]. (véase el APENDICE 3.2)

III). Demuestra que si podemos establecer una correspondencia biunívoca entre los conjuntos W y X y entre X y Z, entonces también puede establecerse dicha correspondencia biunívoca entre W y Z. (véase el APENDICE 3.2)

IV). En cualquier día hábil de la semana a las 12 hrs. en el primer cuadro de la ciudad de México hay más de 5 millones de habitantes. Cada persona no posee más de 300 000 cabellos en su cabeza. Demuestre que en el primer cuadro de la ciudad de México a las 12 hrs. de cualquier día hábil hay al menos dos personas con el mismo número de cabellos en sus cabezas. (véase el APENDICE 3.2)

* * *

Resumiendo, podemos decir que la idea de coordinabilidad, o sea la idea de tener el mismo número de elementos puede darse independientemente del concepto de número de elementos. Por ésto, en lugar de usar el número de elementos para verificar la coordinabilidad se usa la coordinabilidad de conjuntos para definir el concepto de número, a saber : Se dice que el <u>número cardinal</u> de un conjunto A es la clase de todos los conjuntos coordinables con A.

Matemáticamente lo que resulta es que la coordinabilidad es una relación de equivalencia y por lo tanto por abstracción nos da una definición de número cardinal como clase de equivalencia (véase APENDICE 3.3).

3.2.2 PERIODICIDAD

Esta forma de contar es muy importante cuando se tiene que contar una cantidad de elementos relativamente grande en los cuales se ubica la repetición de algún ciclo. Así, para contar todo el conjunto de elementos solo es suficiente que identifiquemos el período de un tal ciclo, lo analizemos para así darnos cuenta del número de elementos de todo el conjunto. Por ejemplo :

Problema, ¿ en que día de la semana es más frecuente que caiga el lo. de Enero ?

Lo resolveremos analizando los casos hipotéticos más sencillos hasta llegar al caso real :

i. Supongamos que no hay años bisiestos, es decir cada año tiene exactamente 365 días.

Como el análisis se empezará desde el primer año podemos suponer que el día cae en Lunes.

Para el siguiente año dividimos 365 por 7, como residuo obtenemos 1. Esto quiere decir que el calendario se recorrerá un día, caerá en Martes.

Para el siguiente año dividimos $365 \cdot 2 = 730$ por 7, como residuo obtenemos 2. Esto quiere decir que el calendario se recorrerá dos días con respecto al día original, caerá en Miercoles.

Y así sucesivamente hasta llegar al año 7 donde vuelve a caer en el mismo día en el que empezamos (Lunes) pues al dividir $365 \cdot 7$ por 7 como residuo obtenemos cero. Y si seguimos obteniendo los demás años encontraremos que se van a ir repitiendo por ciclos cada 7 años. Entonces decimos que es igualmente probable que caiga en cualquier día de la semana.

ii. Suponiendo que exactamente cada 4 años hay un bisiesto.

Por el inciso anterior, se tiene que en los años normales el 1o. de Enero se recorre un día de la semana pero cuando sea año bisiesto se recorrerá 2 días de la semana.(ver Tabla 1, DDD significa que es año bisiesto y se recorre 2 días).

T a b l a 1

Lun	Mar	Mie	Jue	Vie	Sab	Dom
1	2	3	4	DDD	5	6
7	8	DDD	9	10	11	12
DDD	13	14	15	16	DDD	17
18	19	20	DDD	21	22	23
24	DDD	25	26	27	28	DDD
29	30	31	32	DDD	33	34
35	36	DDD	37	38	...	...

De aquí observamos que el ciclo se repite cada 28 años y que la frecuencia de cada día de la semana es la misma para todos, es decir el Lunes, Martes, Miercoles, Jueves, Viernes, Sábado y Domingo ocurren sólo una vez en un período de 28 años.

Por lo tanto el lo. de Enero cae en cualquier día de la semana con la misma frecuencia.

iii. Finalmente consideremos la definición exacta de año bisiesto : El año calendárico usual consta de 365 días, excepto los años divisibles por 4 llamados bisiestos y que constan de 366 días (se agrega el 29 de febrero). Pero ésta regla también tiene sus excepciones pues de éstos últimos, los años que son divisibles por 100 pero nó por 400 no son bisiestos, es decir la regla dice que todos los años múltiplos de 4 son bisiestos con excepción de los múltiplos de 100 que no sean múltiplos de 400. Así tenemos que los años 1800 y 1900 no fueron bisiestos y no será bisiesto el año 2100, pero el año 2000 si será bisiesto pues es divisible por 4 y no es excepción (es divisible por 100 y también por 400).

Analizaremos los últimos 16 años de cada siglo pues en los 3 primeros períodos de 28 años de cada siglo (primeros 84 años) todos los días ocurren el 1o. de Enero con la misma frecuencia ($4 \cdot 3 = 12$ veces). Ver tabla 2.

T a b l a   2

Lun	Mar	Mie	Jue	Vie	Sab	Dom
1	2	3	4	DDD	5	6
7	8	DDD	9	10	11	12
DDD	13	14	15	16	DDD	17
18	19	20	DDD	21	22	23
24	DDD	25	26	27	28	...
85	86	87	88	DDD	89	90
91	92	DDD	93	94	95	96
DDD	97	98	99	100	101	102
103	104	DDD	105	106	107	108
DDD	109	110	111	112	DDD	113
114	115	116	DDD	117	118	119
120	DDD	121	122	123	124	DDD
125	126	127	128	...	185	186
187	188	DDD	189	190	191	192
DDD	193	194	195	196	DDD	197
198	199	200	201	202	203	204

DDD	205	206	207	208	DDD	209
210	211	212	DDD	213	214	215
216	DDD	217	218	219	220	DDD
221	222	223	224	DDD	225	226
227	228	...	285	286	287	288
DDD	289	290	291	292	DDD	293
294	295	296	DDD	297	298	299
300	301	302	303	304	DDD	305
306	307	308	DDD	309	310	311
312	DDD	313	314	315	316	DDD
317	318	319	320	DDD	321	322
323	324	DDD	325	326	327	328
...	385	386	387	388	DDD	389
390	391	392	DDD	393	394	395
396	DDD	397	398	399	400	DDD
401	402	403	404	DDD	405	406
407	408	DDD	409	410	411	412
DDD	413	414	415	416	DDD	417
418	419	420	DDD	421	422	423
424	DDD	425	426	427	428	...
85	86	87	88	DDD	89	90
...	...	...	...	...	...	...

Se observa que después de un ciclo de 400 años (número entero de semanas: un no bisiesto tiene 52 semanas más 1 día y el bisiesto 52 semanas más 2 días. Durante 4 años tenemos

4·52·7 más 5 días. En 400 años esos 5 días se transformarían en 500 días, pero de los años que cubren un período de 400 años siempre hay 3 que son divisibles entre 100 pero no entre 400 (las excepciones) que no son bisiestos, luego tendremos 500 - 3 = 497 días adicionales, ésto es, 71 semanas exactas. En total en 400 años se tienen 400·52 más 71 semanas) la secuencia vuelve a repetirse y por lo tanto el análisis puede limitarse a un período cualquiera de 400 años.

La frecuencia con que ocurre el 1o. de Enero en los días de la semana son :

Frecuencias por días

Dia	Frecuencia	Total
Lunes	8 + 48	56
Martes	10 + 48	58
Miercoles	9 + 48	57
Jueves	9 + 48	57
Viernes	10 + 48	58
Sabado	8 + 48	56
Domingo	10 + 48	58

El 48 se obtiene de multiplicar 4 (número de veces que se repite cada día en cada período de 28 años con base en ii.) por 3 (número de veces enteras que se repite el período de 28 años en cada siglo) y por 4 (número de siglos en los que se completa el ciclo).

Los números que se suman al 48 se obtienen de contabilizar la frecuencia con que ocurre cada día en los últimos 16 años de cada siglo en un período de 400 años.

Por lo tanto los días en los que el lo. de Enero ocurre con mayor frecuencia son : Martes, Viernes y Domingo.

En particular todo lo anterior pudo haberse tomado, por ejemplo, en el período 1900 a 2299, donde el lo. de Enero de 1987 cayó en Jueves y verificar que la conclusión arriba mencionada para cualquier período de 400 años es correcta.

PROBLEMAS.

V). ¿ En que día de la semana cae más frecuentemente el día 30 de cada mes ? (véase el APENDICE 3.2)

VI). En el triángulo numérico de la figura cada número es igual a la suma de los tres números que sobre él aparecen en la fila anterior (si alguno de dichos tres no aparece, se sustituye por cero). Demostrar que a partir de la tercera fila todas ellas contienen un número par.

1

1 1 1

1 2 3 2 1

1 3 6 7 6 3 1

. . . .

(véase el APENDICE 3.2)

3.2.3 DEL FINAL DEL CONTEO, AL PRINCIPIO

Este método de contar es muy interesante pues nos dicen siempre el número de unidades restantes del problema al terminar el conteo y lo que hay que indagar es el número de unidades con que se inició éste proceso.

Lo ejemplificaremos mediante un problema expuesto en (2) el cual dice lo siguiente :

Tengo una cierta cantidad de discos los cuales decido venderlos. Lo hice en dos etapas.

i. Vendí la mitad de los discos, más la mitad de un disco, a Guillermo.

ii. Vendí la mitad de los discos restantes, más la mitad de un disco a Tito.

Todavía me queda un disco. ¿ Cuántos discos tenía inicialmente ?

Existen dos formas de resolver éste problema, una es hacerlo mentalemente y la otra es plantear y resolver por métodos algebraicos la ecuación correspondiente. Lo haré mentalmente y a tí te toca plantear el problema en forma algebraica y resolverlo.

Por la naturaleza del problema, no puede ser posible que venda mitades de discos, ¿ verdad ? Entonces la idea está en darse cuenta que la mitad de un número impar de discos , más medio disco,. es un número entero.

Supongamos que tengo 5 discos inicialmente, entonces le vendí a Guillermo 5/2 discos más 1/2 de disco, o sea le vendí 3 discos y me quedaron 2. Luego le vendí a Tito 2/2 discos más 1/2 de disco, pero éste ya no dá una solución entera, por lo tanto ésta no es la solución.

Partamos pues del final : me quedo con un disco, ¿ qué número de discos debería tener en la etapa anterior para que al venderle a Tito la mitad más medio disco me sobre precisamente un disço completo ?. Ya vimos que debe ser un número impar. Podriamos probar con muchos impares pero necesitamos el impar más pequeño que satisfaga nuestra condición. Probemos con tres discos; en efecto la mitad de los restantes más la mitad de un disco aquí signifca 3/2 más 1/2 de disco, o sea dos discos le vendo a Tito y me sobra un disco. Finalmente regresemos a la primera etapa.

Supongamos que ahora tengo 7 discos inicialmente, pues con 5 no resolvimos el problema, entonces le vendí a Guillermo 7/2 discos más 1/2 de disco, o sea le vendí 4 discos y me quedaron 3. Por lo tanto, tenía inicialmente 7 discos.

PROBLEMAS.

VII). Un muchacho era aficionado a criar pececillos de colores, pero un día decide venderlos. Lo consigue en seis etapas :

1. Vende la mitad de sus peces, más medio pez.
2. Vende la tercera parte de los restantes, más el tercio de un pez.
3. Vende la cuarta parte de los restantes, más la cuarta parte de un pez.
4. Vende la quinta parte de los restantes, más la quinta parte de un pez.
5. Vende la sexta parte de los que aún tiene, más la sexta parte de un pez.
6. Si todavía le quedan 9 pececillos, ¿ cuántos tenía inicialmente ? (véase el APENDICE 3.2)

VIII). Tres amigos y un chango pernoctan en un cierto lugar. Ellos llevan consigo una carga de cacahuates. Cuando todos dormian, a uno de los tres se le antoja probar los cacahuates, por lo cual se levantó y dividió la carga en tres partes iguales, notando que sobraba un cacahuate decide darselo al chango. Se lleva su tercera parte y se acuesta sin que el resto se dé cuenta. Tiempo después otro de los tres, sin haber notado que el primero ya había tomado cacahuates, se dirige a la carga restante, la divide en tres partes iguales y un cacahuate sobrente se lo regala al chango. Finalmente, se levanta el tercer amigo y sin sospechar lo yá sucedido y sin notar ausencia de cacahuates separa y se lleva una tercera parte de la nueva carga restante y un cacahuate sobrante se lo dá al chango. Al levantarse todos, observan que queda una cierta cantidad de cacahuates y todos manifiestan haber tomado la tercera parte de lo que encontró. Deciden dividir en tres partes iguales lo que queda, tocandole a cada uno siete cacahuates y sobra uno que le es dado al chango. ¿ Cuántos cacahuates había inicialmente ? (véase el APENDICE 3.2)

3.2.4 PRINCIPIO GENERAL DEL CONTEO (COMBINATORIA)

En éste principio se fundamenta todo un método de la matemática para contar y que introduce a lo que se llama COMBINATORIA, que no es otra cosa sino la teoría de los conjuntos finitos.

PRINCIPIO GENERAL DEL CONTEO. Si un evento puede realizarse de n formas distintas y otro evento de m formas diferentes, entonces el total de posibles formas como simultaneamente pueden realizarse ambos eventos es nm.

PROBLEMA 1 : Si consideramos que en la zona metropolitana hasta hace poco tiempo los números telefónicos estaban formados por seis cifras precedidas por la cifra constante 5. Calcule el número de aparatos que podían ser instalados con tal disposición de cifras.

Tenemos 6 posibles cifras cada una de las cuales puede tomar 10 posibles valores (del 0 al 9); para obtener todos los posibles números telefónicos tendremos que multiplicar todas las formas distintas de formar los números, es decir : 10^6 teléfonos.

Este esquema corresponde a las llamadas ordenaciones con repetición de 10 elementos tomados de 6 en 6. Son "ordenaciones" porque interesa el orden en que quedan dispuestos los diferentes elementos y "con repetición" dado que está permitido que dichos elementos se repitan. (véase el APENDICE 3.4)

PROBLEMA 2 : ¿ De cuántas formas distintas pueden realizarse 3 trabajos distintos por 5 personas disponibles para realizarlos ?

El primer trabajo lo puede realizar cualquiera de las 5 personas :

$\underline{5}$ $\underline{?}$ $\underline{?}$

El segundo trabajo lo podrá realizar cualquiera de las 4 personas restantes, ya que una de las personas por fuerza tendrá que realizar el primer trabajo :

$\underline{5} \cdot \underline{4}$ $\underline{?}$

y el tercer trabajo lo podrá realizar alguna de las tres personas restantes, pues ya dos de las cinco personas originales estarán realizando los dos primeros trabajos :

$\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3}$

Por lo tanto en base al principio del conteo para realizar simultaneamente los tres trabajos el número total de formas en que podrán realizarse serán de :

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ formas.}$$

Este esquema de resolución corresponde a lo que se llama una <u>ordenación</u> de 5 elementos tomados de 3 en 3. "Ordenaciones" porque realmente el orden es lo único que importa, pues ahora ya no los podemos repetir. (véase el APENDICE 3.4)

<u>PROBLEMA</u> <u>3</u> : ¿ De cuántas formas se pueden disponer los <u>cuatro</u> tomos de una enciclopedia en un anaquel de <u>cuatro</u> lugares ?

Este es el caso en que el número de elementos que queremos ordenar es igual al número de formas en que los podemos disponer, usualmente se llaman <u>ordenaciones</u> de 4 elementos tomados de 4 en 4 ó <u>permutaciones</u> de 4 elementos. Que denotamos así :

$$O_4^4 = P_4$$

Si los lugares en el anaquel los representamos por las rayitas entonces todas las posibles formas en que podemos acomodar los cuatro tomos de la enciclopedia serán :

$$\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1}$$

que simbólicamente se denota por 4! (y que leeremos como "cuatro factorial", las multiplicaciones sucesivas desde 1 hasta dicho número).

Si denotamos por A, B, C y D los nombres de los 4 tomos de la enciclopedia, entonces un diagrama de "árbol" que nos representa todos los posibles arreglos de los tomos de la enciclopedia en el anaquel es :

Maneras de llenar la 1a. posición del anaquel	Maneras de llenar la 2a. posición del anaquel	Maneras de llenar la 3a. posición del anaquel	Maneras de llenar la 4a. posición del anaquel	Conteo del número de arreglos
A	B	C	D	1
		D	C	2
	C	B	D	3
		D	B	4
	D	B	C	5
		C	B	6
B	A	C	D	7
		D	C	8
	C	A	D	9
		D	A	10
	D	A	C	11
		C	A	12
C	A	B	D	13
		D	B	14
	B	A	D	15
		D	A	16
	D	A	B	17
		B	A	18
D	A	B	C	19
		C	B	20
	B	A	C	21
		C	A	22
	C	A	B	23
		B	A	24

o sea de 24 formas distintas. (véase el APENDICE 3.4)

PROBLEMA 4 : Ocho animales experimentales han sido inoculados con cierta droga; tres con la droga de tipo A, tres con la de tipo B y dos con la de tipo C. Cada animal debe colocarse en una de ocho jaulas adyacentes para su observación; si los animales solo se distinguen con base en el tipo de droga que recibieron ¿ cuántos arreglos distintos son posibles ? (véase el APENDICE 3.4).

Observemos que éste problema cae dentro del esquema del problema 3 de esta sección, con la diferencia de que los ocho animales no fueron inoculados con 8 drogas distintas, sino solo con 3. Sin embargo podemos hacernos el siguiente planteamiento : si en efecto fuera 1 droga distinta para cada uno de los ocho animales, entonces tendriamos en total 8!. Por otro lado este total de formas de colocar los animales en las jaulas es el mismo si ahora tomamos no las 8 drogas, sino solo las 3 drogas de nuestro problema, calculamos el número total de formas con 3 drogas y tal número lo multiplicamos respectivamente por el número de formas en que cada grupo de animales pudiera diferenciarse internamente, es decir por 3! por 3! y 2! (que son respectivamente el número de formas en que el grupo de 3 animales puede ponerse en 3 jaulas distintas, el otro grupo de 3 y el grupo de 2). Esto significa que $8! = n3!3!2!$ donde n será el número buscado originalmente. De esto obtenemos que $n = 8!/3!3!2!$, es decir $n = 560$ formas distintas. Este esquema corresponde a las distintas formas de disponer 8 objetos, pero con 3 de un mismo tipo 3 de otro tipo y finalmente 2 también de otro tipo, con 8 = 3 + 3 + 2. Usualmente se les llama <u>Permutaciones de objetos no todos diferentes</u>.

<u>PROBLEMA 5</u> : Hallar el número de diagonales (rectas entre dos vértices no consecutivos) de un polígono de n lados.

Lo haremos analizando paso a paso y ver si así podemos deducir una fórmula general que establezca alguna relación entre el número de lados y el número de diagonales de un polígono.

Es obvio que un polígono de 3 lados no tiene diagonales, por lo tanto nuestro análisis lo empezaremos con los polígonos de 4 lados en adelante. Para un polígono de 4 lados, desde cada vértice se puede trazar una diagonal sólamente, por lo tanto, habrá $4 \cdot 1 = 4$ diagonales, sin considerar el sentido del trazado de las diagonales, pero como todas las diagonales son trazadas dos veces (en dos sentidos) entonces habrá en total $4/2 = 2$ diagonales en un polígono de 4 lados.

Para un polígono de 5 lados, desde cada vértice podemos trazar 2 diagonales, por lo tanto en total habrá $5 \cdot 2 = 10$ diagonales diferentes pero sucede que todas las diagonales son trazadas dos veces, por lo tanto el número total de diagonales en un polígono de 5 lados es $10/2 = 5$.

Para un polígono de 6 lados, analizamos cuántas diagonales se pueden trazar desde cada vértice y vemos que son 3, como tiene 6 vértices entonces el total de diagonales es $6 \cdot 3 = 18$ pero, como el trazado de las diagonales se hace dos veces entonces el número total de diagonales en un polígono de 6 lados es $18/2 = 9$.

Buscando una fórmula general para saber cual es el número de diagonales que se pueden trazar desde cada vértice, encontramos que es igual a $n - 3$ donde n es el número de lados del polígono (comprureba que para $n > 6$ se cumple). Entonces el total de diagonales es $n(n - 3)$, por el principio general del conteo, pero como cada diagonal es trazada dos veces (por lo visto en los casos particulares) entonces tenemos que el total de diagonales en un polígono de n lados es :

$$\frac{n(n - 3)}{2}$$

Otra forma de resolver éste problema es el siguiente : Los vértices del polígono forman un conjunto de n puntos en el plano, de los cuales ninguna terna de ellos son colineales. Uniendo de todas las formas posibles los n puntos por pares, obtenemos así todas las posibles diagonales y además los lados mismos del polígono de n lados.

Pero unir de todas las formas posibles los n puntos o vértices de 2 en 2 sin tomar en cuenta el orden y sin repeticiones, nos dá :

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

restándole a éste número, la cantidad de lados formados, nos lleva a que el número de diagonales está dado por la siguiente función :

$$D(n) = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Este problema en su parte principal genera lo que se acostumbra llamar <u>combinaciones</u>, en éste, caso de n elementos tomados de 2 en 2. (véase el APENDICE 3.4)

3.2.5 PRINCIPIO DE INDUCCION MATEMATICA

Muchas veces en las ciencias naturales se obtiene una ley mediante " inducción empírica " utilizando un gran número de muestras, y la cual se espera se cumpla generalmente. Ahora, puede suceder que exista un " evento o hecho" que rompa ésta ley y entonces su grado de certidumbre dependerá del total de "eventos" observados. Así por ejemplo, supongamos que nuestra hipótesis es que los "obesos son cardiacos", ya sea por la observación de cierto número de correlaciones entre la obesidad y la enfermedad o bien por el estudio de la función del corazón en la circulación. Para verificar ésta hipótesis en forma general no es posible hacerlo exhaustivamente (auscultando a todos los seres humanos presentes, pasados y futuros) ni tampoco directamente. Lo que se hace es tomar una muestra suficientemente grande de personas y examinarlas todas y de ésta forma poder verificar nuestra hipótesis, aunque nos hubiera gustado mucho formular leyes más generales en las cuales basarnos para verificar nuestra hipótesis. Con ésto se comprueba que no existen reglas infalibles que garanticen por anticipado el descubrimiento de nuevos hechos y la invención de nuevas teorías pues la ciencia en general es empírica en el sentido de que la comprobación de sus hipótesis involucra la experimentación; pero no es necesariamente experimental, v.gr. la Astronomía, la Economía, etc.

En Matemáticas, la inducción se utiliza para establecer con certidumbre lógica la exactitud de un teorema o una ley para una sucesión infinita de casos y no sucederá que un caso o un evento rompa o esté en contradicción con el teorema o ley, una vez probada. La formulación general de éste principio, para que en lo sucesivo sea utilizado como un hecho básico de lógica, se dá a continuación :

i. Se propone una hipótesis A como una propiedad que tiene cualquier número natural la cual se desea saber su veracidad.

ii. Se prueba para el caso más simple, ésto es, para el número natural más simple que es el número uno o para el primer número natural que se requiera probar, y la hipótesis A debe cumplirse.

iii. Se supone que la hipótesis A es verdadera para un cierto número natural, digamos $n = k$.

iv. Hay que hacer una demostración general para el siguiente número natural del cual sabemos por hipótesis que la propiedad se cumple; en otras palabras, hacemos $n = k + 1$ y tratamos de probar que la hipótesis A se cumple tambien para éste número natural.

v. Si podemos hacer ésto, podemos concluir que la hipótesis A es válida para todos los números naturales.

Ilustraremos mediante algunos problemas cómo se llegan a enunciar definiciones, descubrir fórmulas, etc. , en forma inductiva acerca de los números naturales y después haremos las demostraciones utilizando el Principio de Inducción Matemática.

Por mera coincidencia se descubrió que la raíz cúbica de 512 es igual a la suma de sus cifras, ésto es :

$$\sqrt[3]{512} = 5 + 1 + 2$$

Ahora, ¿ habrá más números que tengan ésta misma propiedad ? A continuación plantearemos el problema en forma más general.

<u>PROBLEMA</u> :

Se desea saber en que casos la raíz cúbica de un número de n cifras es igual a la suma de éstas, ésto es,

$$\sqrt[3]{abc\ldots w} = a + b + c + \ldots + w$$

ó lo que es lo mismo

$$abc\ldots w = (a + b + c + \ldots + w)^3$$
$$\text{con } 1 \le a \le 9;\ 0 \le b, c, \ldots, w \le 9$$

Lo demostraremos por casos, èsto es, primero para una cifra, luego para dos cifras, luego para tres cifras y así hasta descubrir una fórmula, si es que existe, que nos permita generalizar para que números se cumple ésta propiedad.

1. Para n = 1 (el número tiene una cifra)

$$a = (a)^3 \text{ solo cuando } a = 1$$

pues 1 es igual a 1^3

2. Para n = 2 (el número tiene dos cifras)

$$ab = (a + b)^3 \quad \text{(ver nota al final)}$$

Utilizando alguna de las formas enunciadas en la nota al final de ésta sección se concluye que no existe ningún número que cumpla con ésta propiedad.

3. Para n = 3 (el número tiene tres cifras)

$$abc = (a + b + c)^3 \quad \text{(ver nota al final)}$$

El único número que satisface ésta propiedad es el 512 porque la raíz cúbica de 512 es igual a 5 + 1 + 2, ésto es,

$$512 = (5 + 1 + 2)^3$$

4. Para n = 4 (el número tiene cuatro cifras)

$$abcd = (a + b + c + d)^3$$

Hay dos números que cumplen ésta condición que son el 4913 y el 5832, o sea, las raices cúbicas de 4913 y 5832 son 17 y 18 respectivamente.

5. Para n = 5 (el número tiene cinco cifras)

$$abcde = (a + b + c + d + e)^3$$

También aquí, hay dos números que satisfacen ésta propiedad los cuales son el 17576 y el 19683, ésto es,

$$17576 = (1 + 7 + 5 + 7 + 6)^3 = 26^3$$
$$19683 = (1 + 9 + 6 + 8 + 3)^3 = 27^3$$

6. Para $n = 6$ (el número tiene seis cifras)

$$abcdef = (a + b + c + d + e + f)^3$$

No existe ningún número que cumpla con ésta propiedad.(véase nota al final)

Sí nos damos cuenta, ésto se hace muy tedioso, pues estarlo verificando para cada uno de los casos se hace muy tardado, cuando nó imposible. Vamos a buscar una fórmula, que nos permita asegurar que para $n > 6$ ya no hay más números que cumplan con ésta propiedad y después, la demostraremos utilizando el Principio de Inducción Matemática.

Demostración :

Primero buscaremos una fórmula de inducción para basarnos en élla y poder así comprobar nuestra hipótesis.

Una cota inferior para un número de n cifras es 10^{n-1}

es decir

$abc...w > 10^{n-1}$ (puede checarse fácilmente !)

Una cota superior para la suma de un número de n cifras es 9n ya que cada cifra está acotada superiormente por 9 y hay n cifras, ésto lo podemos escribir así,

$$a + b + c + ... + w \leq 9n$$

Pero ésto quiere decir que si :

$$\sqrt[3]{abc...w} = a + b + c + ... + w$$

Entonces

$$\sqrt[3]{abc...w} = a + b + c + ... + w \geq 10^{\frac{n-1}{3}}$$

Esto quiere decir que la suma está acotada inferiormente por

$10^{\frac{n-1}{3}}$ y superiormente por 9n,

es decir

$$10^{\frac{n-1}{3}} \leq a + b + c + \ldots + w \leq 9n$$

Por ejemplo, se puede comprobar que para n < 7 se cumple que

$$10^{\frac{n-1}{3}} \leq 9n$$

En efecto

Para n = 2; $\quad 10^{\frac{1}{3}} = 2.154 \leq 9 \cdot 2 = 18$

Para n = 3; $\quad 10^{\frac{2}{3}} = 4.60 \leq 9 \cdot 3 = 27$

Para n = 4; $10^{1} = 10 \leq 9\cdot 4 = 36$

Para n = 5; $10^{\frac{4}{3}} = 21.5 \leq 9\cdot 5 = 45$

Para n = 6; $10^{\frac{5}{3}} = 46.4 \leq 9\cdot 6 = 54$

Pero para n = 7; $10^{2} = 100 > 9\cdot 7 = 63$

no se cumple que $10^{\frac{n-1}{3}} \leq 9n$

Si logramos demostrar que para n > 6 se cumple que

$$10^{\frac{n-1}{3}} > 9n$$

estaremos demostrando que la raíz cúbica de dicho número siempre es mayor que la suma de sus cifras y por lo tanto nunca coincidirán, ésto es,

$$10^{\frac{n-1}{3}} > 9n > a + b + c + \cdots + w$$

$$\Longrightarrow \quad abc\ldots w > a + b + c + \ldots + w$$

Entonces nuestra fórmula de inducción es :

$$10^{\frac{n-1}{3}} > 9n$$

Haremos la demostración utilizando el Principio de Inducción Matemática.

i. Para $n = 7$ la fórmula se cumple, pues se tiene que

$$10^2 = 100 > 9 \cdot 7 = 63$$

ii. Suponemos que la fórmula es válida para el número natural $n=k$, ésto es, se cumple qué

$$10^{3^{k-1}} > 9k$$

iii. Entonces, hay que demostrar que la fórmula es válida para el siguiente número natural, ésto es, para $n=k+1$, debe cumplirse que

$$10^{3^{k}} > 9(k+1) = 9k+9$$

Demostración:

$$10^{3^{k}} = 10^{3^{1}}\,10^{3^{k-1}} > 2\cdot 10^{3^{k-1}} = 10^{3^{k-1}} + 10^{3^{k-1}} > 9+9k$$

Por lo tanto $10^{3^{k}} > 9(k+1)$

$\square$

Hemos pues demostrado que para $n > 6$ ya no existen números que satisfagan la propiedad pedida. Como conclusión, podemos decir que los únicos números cuya raíz cúbica es igual a la suma de sus cifras son los siguientes seis: 1, 512, 4913, 5832, 17576 y 19683.

N O T A :

Para determinar cuándo yá no hay más números que cumplan con la propiedad formulada, lo podemos hacer por tres métodos distintos :

a) Hacer un programa de computadora, ejecutarlo, si se tiene acceso a ella, y así obtener todos los posibles resultados.

b) Hacer un análisis "a pie" y de ahí obtener los números que cumplan con ésta propiedad.

c) Determinar en que rango tengo que buscar dichos números.

Se determinan las cotas mínima y máxima del número qe se desea obtener su raíz. Por ejemplo, sí se desea saber cuántos números, de tres cifras hay, cuya raíz cuarta sea igual a la suma de sus cifras.

Sea x = cota inferior (Número mínimo de tres cifras);

Sea w = cota superior (Número máximo de tres cifras)

Entonces $x = 100$ y $w = 999$

Enseguida se obtiene la raíz cuarta de w y x las cuales son 5.62 y 3.16 respectivamente; x se aproxima al siguiente número entero (4) y w al número entero anterior (5). Esto quiere decir que para saber si existe algún número que cumpla con la propiedad enunciada basta con elevar a la cuarta todos los números enteros que esten en el intervalo cerrado [4,5]. Así $4^4 = 256$ pero $2 + 5 + 6$ no es igual a 4, tampoco con el 5 se cumple (¡ compruébalo !), por lo tanto, concluímos que no hay ningún número con esta propiedad.

bajo las siguientes restricciones :

i. Cada jugada consiste en mover un solo disco de una casilla a cualquiera de las otras.

ii. Queda prohibido colocar un disco mayor sobre uno menor.

PROBLEMA 1. ¿ Podrá hacerse el traslado de los tres discos ?

Para resolver éste problema la clave está en la experimentación directa, por ejemplo con monedas de diferente tamaño . Esto nos lleva de inmediato a que con un número de discos no muy grande siempre es posible tal traslado.

PROBLEMA 2. Las Torres de Hanoi para 3 discos.

¿ Cuál es el mínimo número de pasos necesarios para trasladar 3 discos de una casilla a otra ?

Para ello conviene introducir algún lenguaje que facilite la notación, por ejemplo (a),

N(3) = mínimo número de pasos para pasar la pirámide de 3 discos de la casilla A a cualquiera de las otras (B o C).

A,B,C = nombres de la la., 2a. y 3a. casillas de izquierda a

(a). En cada persona ésto puede revestir una forma diferente y esa es parte de la riqueza a explotar o errores a corregir.

Utilizando el mismo método comprueba que para un número de 4 cifras el rango donde hay que buscar es [6,9], para uno de 5 es [10,17], etc.

Usando la misma metodología se pide que resuelvas los siguientes problemas:

1. En qué casos, la raíz cuarta de un número de n cifras es igual a la sumas de éstas.
2. Hallar la suma de los primeros n números impares.

3.2.6 JUEGOS

El contar en muchos juegos es usual, aunque no siempre es fácil. Tampoco el hecho de ser juego nos lleva al mismo esquema de conteo, sin embargo presentaremos algunos juegos que nos llevan a un mismo esquema de conteo.

Las Torres de Hanoi con 3 discos

El juego de las Torres de Hanoi con 3 discos consiste precisamente de 3 discos de diámetros distintos (el número de discos puede cambiar) y 3 casillas (el número de casillas es constante en las diferentes variantes). Los discos están dispuestos de mayor (diámetro) a menor, quedando el mayor abajo.

El juego consiste en trasladar a otra casilla la pirámide de discos derecha.

1,2,3 = nombres de los tres discos del más chico al más grande.

y un esquema o notación adicional para los traslados, por ejemplo (b), con las mismas casillas y dentro de ellas los números correspondientes a los discos :

(b). Este también puede ser un paso decisivo para la solución del problema y varía de persona a persona, pero puede representar una dificultad sobre todo con pretensiones a generalizar, pues la experimentación directa en cada caso concreto no requiere necesariamente de un esquema de este tipo.

PASO	A	B	C
0 (iniciamos)	1 2 3		
1	2 3		 1
2	3	2	1
3	 3	1 2	
4		1 2	 3
5	1	2	3
6	 1		2 3
 7 (terminamos)			1 2 3

En éste caso (3 discos), da la impresión que 7 es el mínimo número de pasos necesarios para pasar la pirámide de 3 discos de la casilla A a la C. Es decir N(3) es 7. Demostremos que ésto efectivamente es el mínimo. Para ello tendriamos que darnos cuenta de que los primeros 3 pasos, del caso anterior analizado, consisten en mover los 2 primeros discos de la casilla A a otra de las casillas, en éste caso a la B; luego en el 4o. paso, mover el disco más grande a la casilla C y en los últimos 3 pasos, de nuevo se traslada la pirámide de los 2 primeros discos de la casilla B a la C, dejándolos encima del 3er. disco más grande.

Si denotamos por N(2) al número mínimo de pasos para trasladar 2 discos de una casilla a otra, tendremos que lo anteriormente descrito no es sino :

$$N(3) = N(2) + 1 + N(2)$$

o sea

$$N(3) = 2N(2) + 1$$

pero a su vez hemos supuesto que $N(2) = 3$ es el <u>mínimo</u> de pasos que hay que dar para lograr que $N(3) = 7$, pues de lo contrario 7 no sería el mínimo para 3 discos, lo cual hace coherente el resultado directo de contar pues $N(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$. Así como el caso de 3 discos lo pudimos visualizar a través del caso de 2 discos (caso anterior), ahora intentemos visualizar, a través del caso anterior con un solo disco, el caso de dos discos. Ahora bién, el caso con 1 solo disco, es evidente que su traslado se realiza con 1 solo movimiento y sí es el mínimo de movimientos, luego N(1), que denotaría el mínimo número de pasos con los cuales trasladar a 1 disco de una de las casillas a otra, será : $N(1) = 1$ y además

$$N(2) = N(1) + 1 + N(1)$$

$$= 2N(1) + 1$$

que a su vez coincide con lo que directamente se visualizó : 3 pasos

$$N(2) = 1 + 1 + 1 = 3$$

PROBLEMA 3. La Torre de Hanoi para n discos

Se tiene una pirámide formada por n anillos de diámetros distintos colocados en una torre (véase a.1), de manera que el anillo más grande se encuentra hasta el fondo, el siguiente en magnitud se encuentra sobre el lo. y así sucesivamente. El juego consiste en trasladar todos estos anillos a otra de las torres usando como auxiliar la tercera torre. La única prohibición consiste en poner un anillo de mayor diámetro sobre otro de menor dimensión .

El problema que se plantea es el siguiente ¿ cuál es el mínimo de pasos (c) con el que puede realizarse tal traslado ?

SOLUCION

Denotemos por N(n) el mínimo número de pasos con el que se puede trasladar la pirámide de A a alguna de las otras torres (B o C) para n anillos.

La experimentación directa es casi el único camino inicial en éste tipo de problemas, incluyendo alguna notación, algún lenguaje que

---

(c). Por paso se sobreentiende el movimiento de un anillo de una de las torres a otra, no quedando excluído el traslado de un "monton" de anillos, simpre y cuando tal traslado se realice en el número de pasos que le corresponde sin desobedecer la prohibición.

nos conduzca a algún modelo que dé respuesta a las interrogantes planteadas.

Evidentemente que N(1) = 1

PASO	A	B	C
0 (iniciamos)	1 2		
1	2		1
2		2	1
3		1 2	

de donde se tiene que N(2) = 3

Figura a.1

Así se puede seguir experimentando para darse cuenta si es conveniente que el anillo más chico siempre pase a la posición C o es indistinto. Si el número de anillos es par o impar deberá tenerse diferentes estrategias o es indistinto, en fin, a éste nivel también puede darse un salto cualitativo en la manera de contar, ésto es para el siguiente caso n = 3 (tres anillos) a que es igual N(3).

PASO	A	B	C
0 (iniciamos)	1 2 3		

N(3) = ?

puede intentarse no contar directamente cuál es el mínimo de pasos para trasladar los anillos, digamos a C, sino hacer el siguiente razonamiento: dejar fijo el anillo más grande y tomar como bloque los dos últimos anillos, dado que éstos dos pueden ser trasladados a B como se indica en el paso anterior en N(2) = 3 pasos, luego trasladar el anillo más grande a C y finalmente los 2 anillos que se encuentran en B trasladarlos como bloque a C en N(2) = 3 pasos, o sea

	A	B	C
En N(2) = 3 pasos	3	1 2	
En 1 paso		1 2	3
En N(2) = 3 pasos			1 2 3

$$
\begin{aligned}
\text{Total de pasos} &= N(2) + 1 + N(2) \\
&= 2N(2) + 1 \\
N(3) &= 2N(2) + 1 \\
&= 2\cdot 3 + 1 \\
&= 7
\end{aligned}
$$

Esta manera de razonar hace que podamos reducir el problema de determinar digamos N(4) al problema anterior, o sea conocer N(3). Esta forma recurrente de razonar resuelve nuestro problema, ya que por ejémplo

	A	B	C
	1 2 3 4		
En N(3) = 7 pasos	4		1 2 3
En 1 paso		4	1 2 3
En N(3) = 7 pasos		1 2 3 4	

$$
\begin{aligned}
\text{Total: } N(4) &= N(3) + 1 + N(3) \\
N(4) &= 2N(3) + 1 \\
&= 2\cdot 7 + 1 \\
&= 15
\end{aligned}
$$

Esta manera recurrente de razonar nos dá la pauta para lanzar una hipótesis de inducción, a saber

$$N(n-1) = 2N(n-2) + 1,$$

entonces

$$N(n) = 2N(n-1) + 1$$

que en efecto corresponde a dejar fijo el anillo más grande y los (n-1) anillos restantes trasladarlos a otra torre, si n-1 es par a B y si es impar con N(n-1) pasos a C, luego respectivamente el anillo más grande a la otra torre y finalmente los (n-1) anillos con otros N(n-1) pasos a encimarlos sobre el más grande.

Esta última fórmula permite dar respuesta al problema planteado. En efecto

$$\begin{aligned} N(n) &= 2N(n-1) + 1 = 2[2N(n-2) + 1] + 1 \\ &= 2^2N(n-2) + 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2^2[2N(n-3) + 1]+2+1 = 2^3N(n-3) + 2^2 +2 +1 \\ &= 2^3[2N(n-4) + 1] +2^2+2+1 = 2^4N(n-4) +2^3+2^2+1 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$= 2^{n-2}[2N(n-(n-1)) + 1]+2^{n-3}+\cdots+ 2^2+ 2 + 1$$
$$= 2^{n-1}N(1) +2^{n-2}+ 2^{n-3}+\cdots+ 2^2+ 2 + 1$$

$$= 2^{n-1}+ 2^{n-2}+ 2^{n-3}+\cdots+ 2^2+2^1+2^0 \text{ de donde}$$
$$N(n) = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = \frac{1 - 2^n}{-1} = 2^n - 1$$
es decir, $N(n) = 2^n - 1, \quad \forall\, n \in N$

Obsérvese que el razonamiento recurrente aplicado a partir de N(3), donde se fija el anillo más grande, pero se mueven bloques de anillos no es trivial y posiblemente requiera de mucha experimentación previa o de caminos alternativos ayudandose de alguna operación aritmética entre los números mínimos de pasos, en particular de la diferencia entre las cantidades de pasos.

Muchas de las etapas mencionadas podrían ser cubiertas de maneras muy distintas, lo cual generaría sanas discusiones para interrelacionar hechos diversos.

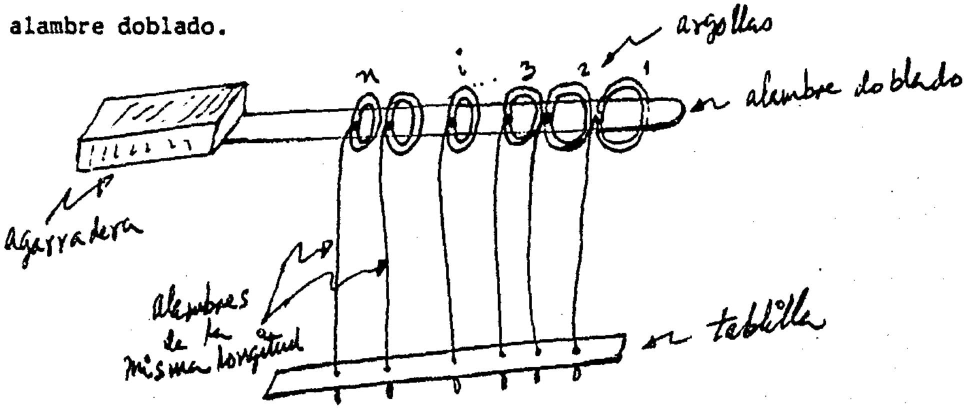
Además podrían plantearse un gran número de problemas relacionados con número de pasos, ubicación de los diferentes anillos, etc. la mayoría de los cuales generan fórmulas de comportamientos válidos por inducción.

Las argollas chinas

Este juego es una especie de rompecabezas construido de la siguiente forma : n argollas de la misma dimensión, que unidas mediante alambres de la misma longitud a una tablilla, quedan atravezadas por otro alambre doblado de manera que todos los alambres de la misma longitud pasan por el interior del alambre doblado y quedan enganchados a las argollas por encima del alambre doblado y las argollas caben de canto en el alambre doblado. (ver la figura)

PROBLEMA.

En que número mínimo de pasos se pueden sacar las n argollas del alambre doblado.



Argollas Chinas.

3.2.7 PROBLEMAS LOGICOS

Problema de la Moneda Falsa.

Hay muchas variantes de éste problema. Hé aquí la siguiente :

Se sabe que entre 80 monedas, en apariencia "iguales", hay una falsa en el sentido que pesa menos que las restantes 79. Hallar la falsa moneda mediante 4 pesadas con la balanza romana sin pesas.

SOLUCION

Dividamos las 80 monedas en 3 grupos :

Grupo 1 : 27 monedas

Grupo 2 : 27 monedas

Grupo 3 : 26 monedas

Primero pesamos los grupos de 27 monedas. Si los platos de las balanzas no quedan en equilibrio la moneda falsa quedará en el plato más ligero (el que sube). Si los platos quedan en equilibrio, entonces la moneda falsa evidentemente estará en el grupo de 26.

El problema entonces se reduce a identificar la moneda falsa de un grupo de 27 monedas, ya que el problema de la falsa moneda para 26 se reduce al anterior, puesto que del resto de las 54 monedas estamos seguros que todas son iguales, luego a las 26 podemos agregarle una cualquiera de dichas 54.

La 2a. pesada la realizamos dividiendo el grupo de 27 en 3 grupos de 9 monedas y comparando dos de ellos en la balanza y por lo tanto determinando en qué grupo se encuentra la moneda falsa.

La 3a. pesada la realizamos dividiendo el grupo de 9 en 3 grupos de 3 monedas, que comparando dos de los grupos identificaremos en cual se encuentra la moneda falsa , luego finalmente de éste grupo de 3 monedas con la última 4a. pesada identificamos la falsa pesando 2 de ellas.

Generalización del problema de las 80 monedas.

Se sabe que entre las n monedas con que se cuenta hay una falsa, más ligera que las restantes de igual peso. Cuál es el mínimo número k de pesadas en una balanza romana para identificar la moneda falsa.

3.2.8 CONTEO MENTAL APROXIMADO

Redondear a una sola cifra significativa, como por ejemplo :

928.83 ~ 900, 17832.1 ~ 20 000, 0.00368 ~ 0.004

Por exceso a una sola cifra mayor que 5 :

5933.7 ~ 10000 , 0.00714 ~ 0.01 , 0.00312 ~ 0.003

Por orden de magnitud (potencia de 10 a la que se aproxima):

6711.3 de orden 4(~ 10000),

3.1415.. de orden 0(~ 3) y

0.0435 de orden -2(~ 0.04)

Donde ~ significa " aproximadamente igual a "

PROBLEMAS :

IX). Calcula mentalmente en forma aproximada el número de segundos que ha recorrido la era después de Cristo.

X). Calcula mentalmente en forma aproximada cuántos latidos tendrás en los proximos 50 años, sabiendo que tu corazón late 80 veces por minuto.

XI). Dí mentalmente el orden de magnitud de

$$\frac{[\,(8.71 - 2.15)3.2 - 5.12\,]}{\left[\,8.17 - \frac{(\,2.19 + 4.27\,)}{2}\,\right]}$$

y luego compruébalo.

3.3 DEFINICION DE NUMERO

Daremos una definición de número, similar a las obtenidas anteriormente, que esperemos no sea muy complicada :

Dada una clase C de objetos, que contiene ciertos elementos, es posible encontrar otras clases, tales que los elementos de cada una de ellas puedan ser equiparados uno a uno con los elementos de C. Cada una de estas clases es así llamada "equivalente a C". Todas éstas clases, incluyendo a C, cualquiera que sea el caracter de sus elementos, tienen una propiedad en común: todas ellas tienen el mismo número cardinal, que se denomina número cardinal de C. Entonces, el número cardinal de la clase C es el símbolo que representa el conjunto de todas las clases que pueden ponerse en correspondencia uno-a-uno con C.

Conluyendo, el número de elementos de una clase es el número cardinal de dicha clase o su cardinalidad.

Por ejemplo, ¿ cuál es la cardinalidad de la clase cuyos elementos son las letras que forman la palabra murciélago ? o lo que es lo mismo, ¿ cuántas letras hay en la palabra murciélago ?

```
M <-------------> 1
U <-------------> 2
R <-------------> 3
C <-------------> 4
I <-------------> 5
E <-------------> 6
L <-------------> 7
A <-------------> 8
G <-------------> 9
O <-------------> 10
```

¿ Qué pasaría si desordenamos la palabra murciélago y volvemos a contar ?, ¿ cambiará el resultado ? es obvio que no, pues el resultado de contar, es independiente respecto al orden o forma de contar.

Por lo tanto, podemos decir que el número es la imágen abstracta de la cantidad de objetos en una colección; es un representante de la clase de colecciones con la misma cardinalidad.

3.4 RELACIONES Y OPERACIONES

El hombre se dió cuenta que debía tener un método concreto para contar objetos, debido a ésto fue descubriendo las relaciones existentes entre las colecciones de objetos y con ésto se empieza a efectuar operaciones con los números. Con el paso del tiempo se establecen ciertas leyes generales que van surgiendo a partir de la experiencia, como en la de una suma, donde no depende del orden de los sumandos el resultado, etc.

Para definir la suma como una operación entre dos o más números o colecciones, el hombre prehistórico coloca juntos o unidos dos o más números o colecciones y expresa el resultado utilizando operaciones efectuadas anteriormente con colecciones más pequeñas, así por ejemplo para expresar el número 17 junta una colección de 10 unidades con una colección de 7 y lo expresa en su lenguaje natural asi: encima de un diez coloco un siete (diez y siete).

Para definir la multiplicación se recurre al hábito de contar colecciones iguales, así por ejemplo si se quiere contar una colección que tiene cuatro colecciones de 100 elementos, se dice que la colección tiene cuatro cientos de elementos. Y lo mismo se vá haciendo con la división y la sustración, esto es, se ván llenando huecos respecto a como nombrar a los números de tal forma que su necesidad o su problema quede resuelto, de ésto concluímos que las operaciones entre números naturales son la imágen abstracta de las relaciones reales entre colecciones de objetos.

Así, vá surgiendo la Aritmética con la necesidad de operar a los números y de organizar todo el conocimiento adquirido y acumulado en la practica, como un sistema, el cual esté formado por ciertos elementos (números) que cumplan con determinadas reglas (axiomas) y que existan interrelaciones (operaciones) entre ellos.

3.5 SIMBOLOS NUMERICOS

Con el paso del tiempo, la humanidad se va planteando nuevos y más complicados problemas, tales como la recaudación o pago de tributos (actualmente impuestos o intereses de alguna deuda), repartición de las cosechas, organización del trueque y del ejército, medición de fenómenos fisicos, económicos, sociológicos, etc. Para lo cual necesita símbolos que le permitan comunicar los resultados de las operaciones a toda la gente de una tribu o de una ciudad por ejemplo, entonces introduce una simbología adecuada para cada concepto de número; ésto trae como consecuencia que cada tribu, pueblo o ciudad utilice una simbología diferente para el mismo concepto de número, v.gr., para el número cinco los árabes utilizan el símbolo 5, los mayas el símbolo —, los romanos el símbolo V, etc.

La importancia de utilizar símbolos numéricos en lugar del lenguaje natural radica en que podemos realizar operaciones muy complejas en una forma realmente concisa; así, vá surgiendo la Aritmética (Arte de Calcular) como una ciencia la cual especifica las relaciones cuantitativas entre las colecciones de objetos, pero consideradas de manera abstracta, por lo cual la Aritmética se empieza a desarrollar más rápidamente pues dan una materialización sencilla del concepto de número abstracto, sin necesidad de tener perfectamente claro qué es un número.

Al conjunto de los números naturales también podemos representarlo sobre una linea recta de la siguiente manera :

Seleccionamos un punto arbitrario A, como el origen o inicio del cual empezaremos a representar nuestro conjunto, después seleccionamos una longitud cualquiera como unidad de medida (digamos el segmento AB de la figura), y la marcamos sobre la linea hacia la derecha del origen tantas veces como números querramos representar.

```
           A        B        C        D        E
------|-----|-----|-----|-----|-----------> 
           1        2        3        4        5    ...
```

Un número asociado con un punto es llamado la coordenada del punto; el punto es llamado la gráfica del número y al conjunto de puntos equidistantes sobre la línea es la gráfica del conjunto de los números naturales.

El conjunto de puntos marcados sobre la línea y el conjunto de números están en una correspondencia uno-a-uno; esto es, cada punto es la gráfica de exactamente un número, y cada número es la coordenada de exactamente un punto.

3.6 LA ARITMETICA COMO TEORIA MATEMATICA

En Egipto y Babilonia se tienen los textos más antigüos que se conocen sobre la Aritmética, donde dan soluciones particulares a muchos problemas dados, ésto es, su Aritmética era una colección de soluciones a ciertos problemas y de reglas de cálculo. Todavía no se podía hablar de un número arbitrario y sus propiedades en forma general. La introducción de símbolos numéricos permitió operar con números tan grandes que difícilmente pudieron haberse identificado con colecciones de objetos. Esto permite a los griegos concebir la idea de que la sucesión de números podía prolongarse indefinidamente y poder hablar de números en general (entra la noción de infinito así como los conceptos y razonamientos abstractos).

La Aritmética dá así un salto significativo al hablar de las propiedades de un número arbitrario, que se verifican para números particulares y se convierte así en una rama de la Matemática : La teoría de los números.

3.7 ESTRUCTURA GENERAL DEL SISTEMA

Toda la experiencia acumulada en incontables generaciones, se trata de organizar, sistematizando todo el conocimiento adquirido, a través de axiomas a partir de los cuales poder deducir más propiedades y relaciones no establecidas a éste nivel.

Asi definimos lo siguiente :

Sea N el conjunto de los números naturales, ésto es,

$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \cdots \}$

Propiedades Básicas :

Sean v,w,m,n elementos arbitrarios de N, lo cual

denotaremos asi : $v, w, m, n \in N$

1. Propiedades de Igualdad

   i. $m = m$ para todo elemento m (Reflexiva)

   ii. Si $m = n \implies n = m$ (Simétrica)

   iii. Si $m = n$ y $n = w \implies m = w$ (Transitiva)

2. Propiedades de Suma y Multiplicación

   i. Si $m = n$ y $v = w \implies m + v = n + w$ y $mv = nw$ (Bien Definida)

   ii. $m + v$ y nw son elementos de N (Cerradura)

   iii. $m + n = n + m$ y $mn = nm$ (Conmutativa)

   iv. $(m + n) + v = m + (n + v)$ y

   $(mn)v = m(nv)$ (Asociativa)

   v. Existe un elemento k en N tal que $mk = m$ llamado Elemento Identidad y que se define como unidad o uno (1).

   vi. Si $m + n = w + n \implies m = w$ (Cancelación para la suma)

   Si $mn = wn \implies m = w$ (Cancelación para la Multiplicación)

vii. $m(v + w) = (mv) + (mw)$ (Distributiva, propiedad que relaciona las operaciones de Suma y Multiplicación.)

3. Principio de Inducción Matemática.

Propiedad que caracteriza a las proposiciones verdaderas que dependen de los números naturales. (vea la sección correspondiente)

Todo conjunto M que admita las siguientes condiciones :

i. La unidad pertenece a M [$1 \in M$]

ii. Si n pertenece a M y ocurre que $(n + 1)$ también pertenece a M entonces M contiene a todos los números naturales $(M = N)$

4. Propiedades de Orden

Definición : Se dice que el número natural m es mayor que el número natural n y se denota como $m > n$, si existe un número natural w tal que $m = n + w$

i. Para dos números naturales m y n se cumple una y solamente una de las tres siguientes relaciones (Tricotomía) :

a) $m > n$;

b) $m = n$;

c) $n > m$

ii. Si $m < n \implies m + v < n + v$

iii. Si $m < n \implies mv < nv$

iv. Si $m < n$ y $n < v \implies m < v$ (Transitiva)

3.8 NECESIDAD DE AMPLIACION DEL SISTEMA

Con el paso de los años fueron apareciendo problemas cotidianos los cuales no podían resolverse con éste sistema, tales como pérdidas y ganancias, temperaturas, etc. pues no se podían representar simbólicamente, ésto es, el universo de números hasta ese tiempo creados, no era suficiente. Por lo cual es necesario "extender" éste sistema de números para poder interpretar y manipular los nuevos resultados.

También surgen problemas matemáticos que implican la necesidad de extender dicho conjunto de números tales como:

1. Definir un conjunto de números que sea cerrado bajo las operaciones binarias no solo de suma y multiplicación, sino también de resta.
2. Establecer una correspondencia uno-a-uno entre el conjunto de los números enteros y un conjunto de puntos sobre una línea recta y no solo sobre un rayo. Esto es, poder graficarlos.

3. Poder encontrar la solución de la ecuacion :

$m + x = n$ donde x es la incognita y $m,n \in N$.

3.9 CUESTIONARIO

i. Establece de una manera geométrica, la correspondencia biunívoca entre los segmentos de recta formado por los intervalos $[7,13]$ y $[1,20]$.

ii. Pongamos en correspondencia a cada persona con su nombre. ¿ Resulta ser, esta correspondencia entre el conjunto de personas y el conjunto de nombres de personas, biunívoca (uno-a-uno) ?

iii. Podremos medir nuestra clase para medir, ésto es, ¿ podremos contar los números naturales ?

3.10 APENDICES

3.10.1 APENDICE 3.00

CONJUNTOS

La noción intuitiva de CONJUNTO, lleva a entenderlo como cualquier agregado o colecciión de objetos o entes de cualquier índole, con o sin relación entre ellos. Esta colección de objetos debe estar bien definida, de tal forma que podamos decir que solo vale una de las siguientes afirmaciones :

i. El objeto está en la colección ($x \in A$) ó

ii. El objeto no está en la colección ($x \notin A$)

Ningún objeto de la colección se debe contar más de una vez y el orden en que se enumeren los objetos de la colección carece de importancia.

La notación usual de conjunto es con letras mayúsculas A, B, ..., X, ... mientras que sus elementos se denotan también usualmente con letras minúsculas a, b, ..., x, ... Existen dos formas para especificar un conjunto :

1. Listar todos sus elementos, separarlos con comas y encerrarlos entre llaves, v.gr., { camisa, pantalón, casa, coche } ó

2. Encerrar entre llaves una propiedad definitoria que especifique los requisitos que deben satisfacer cada elemento que pertenezca al conjunto, v.gr., $\{ x : x < 1000;\ x= 2n,\ n= 1,2,\ldots \}$

Decimos que el conjunto A es un subconjunto del conjunto B si todo elemento de A es a su vez elemento de B, se denota por $A \subset B$. Si A no es subconjunto de B, se denota por $A \not\subset B$. En particular $A \subset A$.

El conjunto A es igual al conjunto B ($A \equiv B$), si ambos conjuntos tienen los mismos elementos.

Propiedad de transitividad de la inclusión :

$A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Métodos de demostración :

a) Partir directamente de la hipótesis para llegar a la conclusión.

Demostremos la propiedad de transitividad con éste método. Sea cualquier $x \in A$, pero por hipótesis $A \subset B$, luego todo elemento de A estará también en B, ésto es $x \in B$, pero también por hipótesis $B \subset C$, luego el mismo elemento x pertenecerá también a C. Todo el razonamiento se hizo para un elemento arbitrario x.

$\square$

b) Por reducción al absurdo.

Se parte de la negación de la conclusión para llegar a la negación de la hipótesis (esto es válido por un resultado obtenido a su vez en Lógica, véase más adelante). Demostraremos con éste método por ejemplo la siguiente propiedad : El conjunto vacío ϕ es subconjunto de cualquier conjunto A.

En efecto, si $\phi \not\subset A$, , entonces por definición de no contención, existe un $x \in \phi$ tal que $x \notin A$; lo cual nos indica que el conjunto ϕ no es vacío, lo cual contradice nuestra hipótesis de que el conjunto ϕ es el vacío.

$\square$

Existen dos conjuntos muy especiales, los cuales son : El conjunto universal(Ω), el cual consta de todos los elementos a los que se pueda referir alguna situación. Para definirlo se tiene que considerar que éste conjunto no es único; pues depende del problema que se esté considerando ya que puede cambiar según sea la situación de que se trate. Aún para un mismo problema, el conjunto universal, no está definido en forma única, pues se puede elegir a nuestra conveniencia con relativa libertad. El otro conjunto especial es el conjunto vacío (ϕ) o nulo, el cual es un conjunto que no tiene elementos.

Generación de nuevos conjuntos (operaciones con conjuntos)

i. La <u>unión</u> entre el conjunto A y el conjunto B es otro conjunto, denotado por $A \cup B$ y definido como :

$A \cup B = \{ x: x \in A$ ó $x \in B \}$ (donde el "ó" no necesariamente es excluyente, pues bien puede haber elementos que esten tanto en A como en B).

ii. La <u>intersección</u> entre el conjunto A y el conjunto B es otro nuevo conjunto, denotado por $A \cap B$ y definido como :

$$A \cap B = \{ x: x \in A \text{ y } x \in B \}$$

Si la intersección de dos conjuntos es vacía, $A \cap B = \phi$, entonces se dice que tales conjuntos son <u>ajenos</u>.

iii. El <u>complemento</u> de un conjunto A con respecto a otro B es un nuevo conjunto denotado por A - B y definido como :

$$A - B = \{ x: x \in A \text{ y } x \notin B \}$$

iv. El <u>producto cartesiano</u> de un conjunto A por otro B es un nuevo conjunto que denotamos por AxB y queda definido como el conjunto de posibles parejas ordenadas a formar con el primer elemento perteneciente al primer conjunto y el segundo elemento perteneciente al segundo conjunto, es decir :

$$A \times B = \{ (x,w): x \in A \text{ y } w \in B \}$$

Existen dos propiedades muy importantes, llamadas Leyes de DeMorgan.

Utilizando el concepto de complemento entre conjuntos se tiene que :

1.

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

2.

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

3.10.2 APENDICE 3.1

DEFINICION AXIOMATICA DE NUMERO NATURAL

Toda teoría matemática deductiva es una sistematización estructurada lógicamente, que partiendo de ciertos conceptos u objetos básicos o primitivos indefinidos (conjunto N, ente 1(uno), relación en N dada por "el siguiente de") que tiene frecuentemente un sentido claro e intuitivo y de ciertas proposiciones básicas tomadas como verdaderas, llamadas axiomas, a partir de los cuales se pueden demostrar el resto de las proposiciones llamadas teoremas. Los axiomas de Peano resultan ser la formalización de las 5 propiedades intuitivas mencionadas arriba en el texto.

Axioma 1 : El ente 1(uno) está en N ($1 \in N$).

Axioma 2 : Si $x \in N$ existe y es único el $Sigx \in N$, donde Sigx significa el "siguiente de x" (el siguiente de todo número queda unívocamente determinado, Sig: N ----> N)

Axioma 3 : Para cualquier $x \in N$ el $Sigx \neq 1$ (el 1 no es siguiente de ningún número)

Axioma 4 : Si Sigx = Sigw entonces x = w (un número natural no puede ser siguiente de dos distintos)

Axioma 5 : Si C es un subconjunto de N ($C \subset N$) y i). $1 \varepsilon C$

ii). $x \varepsilon C \Longrightarrow Sigx \varepsilon C$ entonces $C = N$ (axioma de inducción, se dice que C es un conjunto inductivo).

Aunque objetada por los lógicos, suele decirse que los axiomas dan una definición implícita de los términos primitivos de la teoría.

A partir de los entes indefinidos N, 1 y sigx y de los axiomas del 1 al 5 se pueden demostrar todas las proposiciones relacionadas con los números naturales. Por ejemplo :

<u>Teorema 1</u> : Si $x \neq y$, entonces $sigx \neq sigy$, para todo $x,y \varepsilon N$

<u>Demostración</u> : Supongamos, por reducción al absurdo, que $sigx = sigy$, entonces por el axioma 4 tendríamos que $x = y$ (contradicción). Es decir partimos de la negación de la tesis y llegamos a la negación de la hipótesis.

<u>Teorema 2</u> : El siguiente de un número natural es distinto a él, es decir $sigx \neq x$.

<u>Demostración</u> : Definamos como $C = \{ x \varepsilon N : sigx \neq x \}$. Para este conjunto se cumplen las condiciones del axioma 5. En efecto, por el axioma 1 : $1 \varepsilon N$ y por el 3 para todo $x \varepsilon N$ el $sigx \neq 1$, luego $sig1 \neq 1$, por lo tanto $1 \varepsilon C$ (primera condición). Si $x \varepsilon C$, esto es $sigx \neq x$, entonces por el teorema 1 : $sig(sigx) \neq sigx$ por consiguiente $sigx \varepsilon C$ (segunda condición). Entonces por el axioma 5 de Peano : $C \equiv N$. Es decir que hemos demostrado que para todo $x \varepsilon N$: $sigx \neq x$.

Y así sucesivamente podrían demostrarse las propiedades de los números naturales a través, por ejemplo de los siguientes teoremas :

Teorema 3 : Si $x \neq 1$ existe un número natural y tal que $x = \text{sig}\,y$

Teorema 4 : El elemento y del que se habla en el teorema 3 es único.

Suma y multiplicación

Teorema 5 : Existe una operación binaria en N, que a cada par ordenado (x,y) de números naturales asigna un tercer número natural, denotado por $x + y$ tal que :

i. Para todo $x \varepsilon N$: $x + 0 = x$, donde el 0 es un número especial que adjuntamos a nuestro conjunto original N con la propiedad indicada.

ii. Para todo $x,w \varepsilon N$: $x + \text{sig}\,w = \text{sig}(x + w)$

(Para cada x fijo la unicidad de $x + w$ se prueba por inducción en w y viceversa).

Teorema 6 : Para todo $x,w,z \varepsilon N$: $(x + w) + z = x + (w + z)$

(Para cada x,w fijos, inducción en z).

Teorema 7 : $x + w = w + x$ (w fijo, inducción en x).

Teorema 8 : Si $w \neq z$, entonces $x + w \neq x + z$, para todo $x \varepsilon N$ (inducción en x).

Corolario : Propiedad cancelativa de la suma :
$x + w = x + z \Longrightarrow w = z$

Teorema 9 : Dados x, w ocurre uno y solo uno de los siguientes casos :

i. $x = w$
ii. Existe $u \neq 0$ tal que $x + u = w$
iii. Existe $v \neq 0$ tal que $x = w + v$

Teorema 10 : Existe una operación binaria en N, que a cada par ordenado de números naturales (x,w), le asigna un número natural indicado por $x \cdot w$ tal que :

i. Para todo $x \in N$: $x \cdot 0 = 0$
ii. Para todo $x \in N$ y todo $w \in N$ tenemos que
$x \cdot \text{sig}w = x \cdot w + x$

Teorema 11 : $x \cdot w = w \cdot x$ (w fijo, inducción en x)

Teorema 12 : $x(w + z) = x \cdot w + x \cdot z$ (x,w fijos, inducción en z)

Teorema 13 : $(x \cdot w)z = x(w \cdot z)$ (x,w fijos, inducción en z)

Teorema 14 : $x \leq w, \; w \leq z \Longrightarrow x \leq z$

Teorema 15 : La relación $\leq$ cumple con las siguientes propiedades :

i. $x \leq x$ (reflexiva)

ii. $x \leq w$, $w \leq x$ $\Longrightarrow$ $x = w$ (antisimétrica)

iii. $x \leq w$, $w \leq z$ $\Longrightarrow$ $x \leq z$ (transitiva)

Teorema 16 : Si $x < w$ ó $x = w$ ó $x > w$, entonces respectivamente

$x + z < w + z$ ó $x + z = w + z$ ó $x + z > w + z$ y recíprocamente.

Teorema 17 : (Del buen orden) Todo conjunto A de números naturales que tenga al menos un elemento tiene uno menor que todos los demas.

Teorema 18 : $x > 0, w > 0 \Longrightarrow x \cdot w > 0$

Teorema 19 : $x \neq w, z \neq 0 \Longrightarrow z \cdot x \neq z \cdot w.$

3.10.3 APENDICE 3.2

RESPUESTA A LOS PROBLEMAS

I. Dispongamos todos los números pares, o sea todos los elementos del conjunto P, de la siguiente manera :

0, 2, -2, 4, -4, ... , 2n, -2n, ... y pongamoslos en correspondencia con

1, 2, 3, 4, 5, ... , 2n, 2n + 1, ..., así :

$$
\begin{array}{rcl}
0 & \longleftrightarrow & 1 \\
2 & \longleftrightarrow & 2 \\
-2 & \longleftrightarrow & 3 \\
4 & \longleftrightarrow & 4 \\
-4 & \longleftrightarrow & 5 \\
 & \vdots & \\
2n & \longleftrightarrow & 2n \\
-2n & \longleftrightarrow & 2n + 1 \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

con lo que queda establecida la correspondencia biunívoca entre N y P.

II. $N \longleftrightarrow Q\ [0,1]$ se establece por ejemplo así : cada número racional $r \in Q\ [0,1]$ lo escribimos como una fracción irreducible y llamamos <u>altura</u> de r a la suma de su numerador y denominador. Es claro que para cada altura dada, existe solo un número finito de fracciones en [0,1] tales que tengan dicha altura. La idea consiste en ordenar tales números en orden creciente de su altura :

Altura	Fracciones
1	0/1 = 0
2	1/1 = 1
3	1/2
4	1/3
5	1/4, 2/3
6	1/5
7	1/6, 2/5, 3/4

....

Si una misma altura admite varias fracciones, éstas se disponen juntas en orden creciente. Es así que los elementos de Q [0,1] los disponemos en la siguiente sucesión (a):

0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 2/3, 1/5, 1/6, 2/5, 3/4, 1/7, 3/5, 1/8,...

y cada número de esta sucesión que nos agota los números de Q[0,1] lo ponemos en correspondencia con aquel número natural n que le corresponde en la sucesión. De éste modo queda establecida la correspondencia uno-a-uno entre N y Q [0,1].

III. Demostración de la transitividad en correspondencias biunívocas.

Se tiene que podemos hacer una correspondencia biunívoca entre

---

(a).Por sucesión estamos entendiendo a la lista ordenada de números (el orden lo dá su comparación con los números naturales).

el conjunto W y X, ésto quiere decir que existe una función $f:W \longrightarrow X$ tal que a cada elemento $w \epsilon W$ le asocio un elemento $x \epsilon X$; es decir :

$$(1) \quad f(w) = x$$

Y lo mismo podemos hacer entre el conjunto X y Z, es decir, existe una función $g:X \longrightarrow Z$ tal que a cada elemento $x \epsilon X$ le asocio un elemento $z \epsilon Z$; o sea :

$$(2) \quad g(x) = z$$

Sustituyendo el valor de x en (2) tenemos que:

$g(f(w)) = z$ sin haber alterado nada. Llamemos a $g(f(w))$ como la función h cuyo dominio es el dominio de f, W, y codominio el codominio de g, o sea Z. Està nueva función, $h(w) = g(f(w))$, tiene la interpretación siguiente : a cada elemento $w \epsilon W$ lo asocio con el elemento $x \epsilon X$ bajo la función f, despues a este elemento, $f(w) \epsilon X$, lo asocio con el elemento $z \epsilon Z$. Pero ésto quiere decir que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto W y Z.

IV. Se sabe que la población en el primer cuadro de la cuidad no es menor que 5 millones de habitantes, es decir al menos tiene 5 millones de habitantes. Para hallar la solución, empezamos a enumerar todos los casos posibles. En los humanos, según el dato del problema, el número de cabellos no supera los 300,000. Si no hubiera dos cabezas "iguales", en el mejor de los casos podría suceder que hubiese un calvo, una persona con un solo pelo, otra con dos y así sucesivamente. Pero tan pronto pasamos de las 300,000 personas con distintos números de cabellos, nos vemos obligados a repeticiones. El cuidadano número 300,001 tiene con certeza el mismo número de cabellos que alguno de los primeros 300,000; y como la población al menos tiene 5 millones de personas, no solo habrá dos personas de igual número de cabellos a las de alguna otra, ¡ sino unas 300,000 !.

V. Se resuelve análogamente al problema ¿ en que día cae más frecuentemente el 1o. de Enero ? En este problema el día 30 de cada mes cae durente un ciclo de 400 años :

Domingo	687 veces
Lunes	685 veces
Miercoles	687 veces
Jueves	684 veces
Viernes	688 veces
Sabado	684 veces.

luego el día en que cae con más frecuencia el 30 de cada mes es el día Viernes.

VI. Para ubicar el período del ciclo en donde aparece lo que nos preguntan escribamos a partir de la tercera fila, por ejemplo la paridad o no de los 4 primeros números pues ahí están ya incluídos desde el principio números pares, en efecto tenemos, denotando por p e i a los pares e impares :

```
              ipip
              iipi
             ippp
            iiip
          ipip  --|  Cada fila de éste período
          iipi    |  siempre contiene, en efecto,
         ippp     >  un número par y periódicamente
        iiip      |  se repite el ciclo.
      ipip      __|
      iipi
     ippp
    iiip
  ipip
  .....
```

VII. Sea x la cantidad de peces que tenía inicialmente :

En la primera etapa vende $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ peces (1)

y le quedan $w = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ peces (2)

En la segunda etapa vende $\frac{w}{3} + \frac{1}{3}$ peces (3)

y le quedan $u = \frac{2w}{3} - \frac{1}{3}$ peces (4)

En la tercera etapa vende $\frac{u}{4} + \frac{1}{4}$ peces (5)

y le quedan $v = \frac{3u}{4} - \frac{1}{4}$ peces (6)

En la cuarta etapa vende $\frac{v}{5} + \frac{1}{5}$ peces (7)

y le quedan $y = \frac{4v}{5} - \frac{1}{5}$ peces (8)

En la quinta etapa vende $\frac{y}{6} + \frac{1}{6}$ peces (9)

y le quedan $t = \frac{5y}{6} - \frac{1}{6}$ peces (10)

¿ Si todavía le quedan 9 pececillos ?, ¿ cuántos tenía inicialmente ?

Esto quiere decir que la ecuación (10) es igual a 9 por ser $t = 9$, entonces, sustituyendo en (10) obtenemos que $y = 11$ y sustituyendo en la ecuación (9) obtenemos que en la quinta etapa, vende 2 peces. Sustituyendo en la ecuación (8), el valor de $y = 11$, obtenemos que $v = 14$ pero ésto quiere decir que en la cuarta etapa vende 3 peces. Sustituyendo en la ecuación (6), el valor de $v = 14$, obtenemos que $u = 19$ pero esto quiere decir que en la tercera etapa vendió 5 peces, por la ecuación (5). Sustituyendo en la ecuación (4), el valor de u, obtenemos que $w = 29$, pero ésto quiere decir que en la segunda etapa vendió 10 peces, por la ecuación (3). Finalmente, sustituyendo el valor de w en la ecuación (2), obtenemos que la cantidad de peces que se tenía inicialmente es $x = 59$, pero ésto quiere decir que en la primera etapa vende 30 peces.

VIII. Partiendo del final, se tiene que a cada quien le tocaron 7 cacahuates y sobró uno , es decir, al levantarse todos, habían $3 \cdot 7 + 1 = 22$ cacahuates.

Como al levantarse el tercer amigo deja dos partes iguales de las tres en las que dividió lo que había, entonces quiere decir que cada parte es igual a 11; como fueron 3 partes y le sobró uno, entonces había $3 \cdot 11 + 1 = 34$ cacahuates.

El segundo amigo deja 34 cacahuates que deben ser dos partes iguales, ésto es dos partes de 17 cacahuates cada una, porque se lleva una parte igual y el cacahuate que le sobra se lo dá al chango; pero ésto quiere decir que antes de levantarse el segundo amigo habían $3 \cdot 17 + 1 = 52$ cacahuates.

El primer amigo que se levanta luego de dividir la carga de cacahuates en tres partes iguales y darle al chango el cacahuate que le sobraba deja 52 cacahuates; como éste amigo se lleva su tercera parte quiere decir que lo que deja son dos partes iguales de cacahuates o sea de 26 cacahuates cada una. Por lo tanto la carga inicial es igual a $3 \cdot 26 + 1 = 79$ cacahuates.

IX. Un minuto tiene 60 segundos.

Una hora tiene 60 minutos, es decir 4000 segundos.

Un día tiene 20 horas, es decir tiene 80000 segundos.

Un año tiene 365 dias pero lo aproximamos a 400, por lo tanto tiene 32000000 segundos.

De aquí obtenemos que hasta la fecha han transcurrido aproximadamente 64000000000, aproximando 1988 al año 2000.

X. En un minuto el corazón late 80 veces pero lo aproximamos a 100.

En una hora late aproximadamente 6000 veces.

En un día, aproximamos a 20 horas, late 120000 veces.

En 365 días, aproximamos a 400, late 48000000 veces

Por lo tanto en 50 años el corazón dará 240000000 latidos.

XI. En el numerador quitamos todos los decimales y nos dá que (9-2)3-5 es 16. En el denominador nos dá, 8 - 3, 5. Por lo tanto al hacer el cociente nos dá 3

XII. <u>LAS ARGOLLAS CHINAS</u>.

Nuestro problema consiste en determinar el mínimo número de pasos que se necesita realizar para sacar del alambre doblado n argollas, para cualquier n natural. Denotemos pues por M(n) como el mínimo número de pasos para sacar las n argollas del alambre doblado.

Experimentando nos podemos dar cuenta que de la posición inicial podemos sacar una argolla en un solo paso de dos formas distintas ya sea sacando la primera argolla o bién sacando la segunda (fig. 2 y fig. 3).

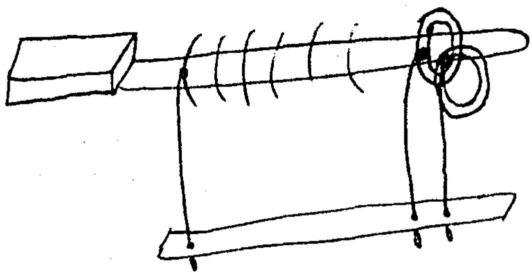


Fig. 2

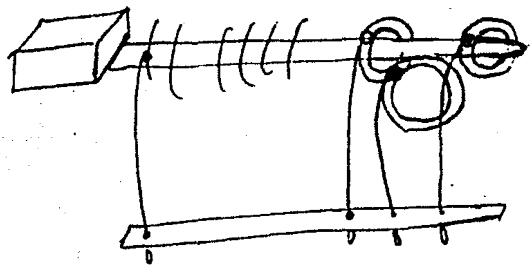


Fig. 3

Es así que

(1) $K(1) = 1$

y

(2) $K(2) = 2$

en este caso sacando primero la 2a. argolla y luego la 1a. de lo contrario es imposible.

A esta altura del juego se necesita una buena dosis de experimentación para poder dar el salto cualitativo que representa el poder hacer el razonamiento general que ahora haremos y que nos da la clave para resolver el problema planteado.

Para sacar la i-ésima argolla es necesario que las (i-2) argollas anteriores hayan sido sacadas del alambre doblado pues en caso contrario la i-ésima argolla no podrá ser trasladada al extremo del alambre doblado.

Por otro lado, si la (i-1)-ésima argolla ha sido sacada, entonces la i-ésima argolla será imposible sacar (la misma situación que se presenta en la 2a. luego de sacar la 1a. en el caso de 2 argollas) véase la fig. 4, donde se ilustra el caso de 3 argollas sacadas y la 4a. es imposible sacarla.

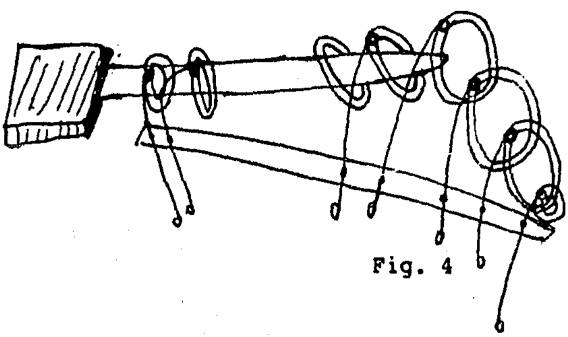


Fig. 4

En cambio si el (i-1)-ésimo anillos ha sido sacado, entonces el (i + 1)-ésimo puede sacarse sin dificultad. Véase las figs. 5a. y 5b.

Fig. 5a

Fig. 5b

Observese de nuevo que, para llegar a estas conclusiones, se necesita experimentar y proponer caminos varios que enriquecen la discusión y dan una diversidad de caminos para quedar listos a dar respuesta a la pregunta planteada.

Para poder sacar la última argolla, la n-ésima argolla, es necesario haber sacado las (n-2) anteriores y esto último, según nuestra notación, es posible hacerlo en M(n-2) pasos. Luego sacar la n-ésima argolla en un paso más y quedarnos con la argolla (n-1) aun dentro del alambre doblado, o sea que

$$M(n) = M(n-2) + 1 + \text{No. de pasos para sacar la } (n-1) \text{ argolla}$$

La última parte de la fórmula la podemos expresar también simbólicamente si introducimos la siguiente notación :

$N(n)$ = No. de pasos necesarios para sacar la única, n-ésima, argolla bajo la hipótesis de que el resto de argollas han sido sacadas.

Por lo tanto

$$(3) \quad M(n) = M(n-2) + 1 + N(n-1)$$

Hallemos pues explícitamente como es $N(n)$ para de ahí obtener $N(n-1)$ y poderla sustituir en (3) y así llegar a una fórmula recursiva en M que resuelta nos dé respuesta a nuestro problema. Hallemos pues una expresión para $N(n)$.

Para sacar del alambre doblado la n-ésima argolla, siendo ésta la única que quede sin sacar, hay que meter de nuevo la (n-1) argolla (de lo contrario es imposible sacarla). Pero meter de nuevo en el alambre doblado la (n-1) argolla lo podemos hacer en $N(n-1)$ pasos (que son exactamente los pasos que hay que realizar para que la (n-1) argolla sea sacada del alambre doblado, solo que en orden inverso). Luego de ésto, se supone que ya es fácil sacar la n-ésima argolla (1 paso más) y finalmente de nuevo sacar la (n-1) argolla que, como de nuevo quedó sola, se puede sacar precisamente en $N(n-1)$ pasos, ésto es

$$N(n) = N(n-1) + 1 + N(n-1)$$

o sea

$$(4) \quad N(n) = 2N(n-1) + 1 \text{ (b)}$$

es decir

$$N(n) = 2N(n-1) + 1 = 2[2N(n-2) + 1] + 1$$
$$= 2^2 N(n-2) + 2 + 1$$

$$= 2^2[2N(n-3)+1] +2+1=2^3 N(n-3) +2^2 +2+1$$
$$= 2^3[2N(n-4)+1]+2^2+2+1=2^4 N(n-4)+2^3+2^2+1$$
$$\cdots\cdots$$

$$= 2^{n-2}[2N(n-(n-1))+1] +2^{n-3}+\cdots+2^2+ 2^1+1$$
$$= 2^{n-1}N(1) + 2^{n-2}+ 2^{n-3}+\cdots+ 2^2+ 2^1+ 2^0$$

(b). Recu`rdese que esta fue la misma f}rmula recurrente a la que llegamos en el juego de las Torres de Hanoi, (ver soluci}n).

pero evidentemente N(1) = 1, por lo que

$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 2^0$ de donde

$$N(n) = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = \frac{1 - 2^n}{-1} = 2^n - 1$$

es decir, $N(n) = 2^n - 1, \quad \forall\, n \in N$

Luego N(n-1) será

(5) $N(n-1) = 2^{n-1} - 1$

que sustituyendo en (3) obtenemos

(6) $M(n) = M(n-2) + 2^{n-1}$

esta es una ecuación en diferencias de orden 2 que requiere de dos valores iniciales para que nos quede unívocamente definida, pero de (1) y (2) tenemos que M(1) = 1 y que M(2) = 2, luego entonces recurrentemente obtendremos, con saltos de dos unidades, la solución del problema pero como los saltos son de dos en dos (de n pasos a n-2) el resultado puede variar si n es par o impar, por lo cual analizaremos separadamente ambos casos :

i). Si $n = 2k, \; k \in N$, entonces

$$M(n) = M(2k) \overset{(1)}{=} M(2k-2)+2^{2k-1} = M(2k-4)+2^{2k-1} + 2^{2k-3}$$
$$= M(2k-6) + 2^{2k-1} + 2^{2k-3} + 2^{2k-5} = \quad \cdots$$

$$= M(2k-(2k-2))+2^{2k-1}+2^{2k-3}+2^{2k-5}+\cdots+ 2^{2k-(2k-3)}$$
$$= M(2)+2^{2k-1}+2^{2k-3}+2^{2k-5}+\cdots+ 2^{3}$$

$$\overset{(2)}{=} 2^{2k-1} + 2^{2k-3} + 2^{2k-5} +\cdots+ 2^{3} + 2$$

$$= \frac{2 - 2^{2k+1}}{1 - 4} = \frac{1}{3}\left(2^{2k+1} - 2 \right)$$

ii). Si $n = 2k + 1$, $k \in N$, entonces

$$M(n) = M(2k+1) \overset{(1)}{=} M(2k-1)+ 2^{2k} = M(2k-3)+ 2^{2k} + 2^{2k-2}$$
$$= M(2k-5)+2^{2k}+2^{2k-2}+2^{2k-4} = \quad \cdots$$

$$=M(2k-(2k-3))+2^{2k}+2^{2k-2}+2^{2k-4}+\cdots+2^{2k-(2k-4)}$$

$$=M(2k-(2k-1))+2^{2k}+2^{2k-2}+2^{2k-4}+\cdots+2^{4}+2^{2k-(2k-2)}$$

$$= M(1)+2^{2k}+2^{2k-2}+2^{2k-4}+\cdots+2^{4}+2^{2}$$

$$\overset{(1)}{=} 2^{2k}+2^{2k-2}+2^{2k-4}+\cdots+2^{4}+2^{2}+1$$

$$= \frac{1-2^{2k+2}}{1-4} = \frac{1}{3}\left(2^{2k+2}-1\right) = \frac{1}{3}\left(2^{2k+1+1}-1\right)$$

Por lo tanto

$$M(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(2^{n+1}-2\right), & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1}{3}\left(2^{n+1}-1\right), & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

En este juego también debe notarse la infinidad de problemas que podemos proponernos cuya diversidad de métodos dan una riqueza a explotar con la enseñanza vía problemas.

XIII. GENERALIZACION DEL PROBLEMA DE LAS 80 MONEDAS.

Como k nos representa el mínimo de pesadas para identificar, en n monedas, la moneda falsa vía el hacer 3 grupos de monedas, entonces propongamos como solución del problema aquella k que satisfaga las desigualdades :

$$\begin{cases} 3^k \geq n \\ 3^{k-1} < n \end{cases}$$

Mostremos que en efecto una tal k satisface las condiciones del problema.

i. Mostremos que con k pesadas siempre podemos determinar la moneda falsa.

En efecto, dividamos nuestras monedas en 3 grupos de manera que dos de los grupos tengan la misma cantidad de monedas

3^{k-1} (o menos)

y el tercer grupo no tenga más de

3^{k-1}

ésto es posible dado que

$n \leq 3^k$

Comparando los dos grupos con igual número de monedas, determinamos en cual de los tres grupos se encuentra la moneda falsa (véase la solución del problema de las 80 monedas).

De este modo luego de la 1a. pesada nuestro problema consiste en determinar la moneda falsa de un grupo de

3^{k-1} monedas,

ya que si la moneda falsa estuviera en el grupo de menos de

3^{k-1} monedas

lo completaríamos con monedas de cualquiera de los otros dos grupos hasta completar

3^{k-1} monedas

(dado que tales monedas con seguridad sabemos son de las buenas).

En cada nueva pesada dividimos el conjunto restante de monedas en 3 grupos "iguales", siguiendo la modalidad descrita anteriormente, llevandonos éste procedimiento a que en el segundo paso tendremos grupos de

3^{k-2} monedas,

en el 3er. paso grupos de

3^{k-3} monedas y así sucesivamente,

de manera que en el k-ésimo paso tendremos grupos de

$3^{k-k} = 3^0 = 1$ moneda

y por lo tanto, comparando dos de ellas en la balanza unívocamente determinamos cual de las tres es la moneda falsa. Con esto hemos, en efecto, mostrado que con k pesadas siempre podemos determinar la moneda falsa.

ii. Falta mostrar que el k obtenido es el mínimo de pesadas con el que siempre podemos determinar la moneda falsa.

En otras palabras que k sea mínima significa que, cualquiera que sea la manera como hagamos las pesadas, obtengamos como resultado que en (k-1) pesadas no quede determinada la moneda falsa.

Con el método descrito en i) en cada pesada de monedas el total de las restantes se divide en 3 grupos : en el 1er. grupo entran las monedas que quedan en el primer platillo de la balanza, en el 2o. grupo las que se quedan en el segundo platillo y en el 3er. grupo las que quedan fuera de la pesada. Si con el mismo número de monedas en los platillos el primero de estos bajas, entonces la moneda falsa estará en el 2o. grupo. Finalmente si en los platillos de la balanza se ponen diferente número de monedas y el platillo con más monedas baja, entonces la moneda falsa puede estar en cualquiera de los tres grupos de monedas y una tal pesada no nos aporta nada respecto de la ubicación de la moneda falsa. Supongamos ahora que mediante cualquier tipo de pesadas que se realicen el resultado de cada pesada es el más desfavorable, es decir en cada pesada la moneda falsa se encuentra en aquel de los 3 grupos que tiene más monedas. Entonces en cada pesada el número de monedas del grupo que contiene a la moneda falsa disminuye en no más de 3 veces (ya que al dividir un número cualquiera en 3 grupos siempre al menos uno de los 3 grupos contiene no menos de la tercera parte del total), luego entonces después de (k-1) pesadas el número de monedas del grupo que contiene la moneda falsa es no menor que

$$(\geq) \frac{n}{3^{k-1}}$$

y puesto que k debe ser tal que

$n > 3^{k-1}$ entonces

$$\frac{n}{3^{k-1}} > 1$$

lo cual significa que al menos se necesita una pesada más para determinar la moneda falsa, lo que a su vez significa que con la (k-1) pesadas la moneda falsa no queda determinada.

3.10.4 APENDICE 3.3

FUNCIONES

La correspondencia uno a uno o correspondencia biunívoca no es otra cosa sino el concepto de función.

Existen al menos dos maneras distintas de definir función : mediante una "regla de correspondencia" o a través de "relaciones".

i. Una función es una regla que asocia a cada elemento de un conjunto A un único elemento de otro conjunto B. Dicha regla puede darse de múltiples formas : con un enunciado, mediante una fórmula, etc. lo importante es tener el conjunto A que se le llama dominio de la función, el conjunto B que se le llama el contradominio o codominio de la función y la regla misma que pone en correspondencia a los elementos de A con los elementos de B, pero de suerte que a cada elemento de A le corresponda un único de B. Hay veces que la regla no es lo más importante, sino que importa sobremanera saber el elemento que corresponde a cada elemento del dominio; esta situación nos lleva a la otra forma de definir una función :

ii. En el APENDICE 3.00 se definió el producto cartesiano de dos conjuntos A y B como :

$A\times B = \{ (x,w): x\in A ; w\in B \}$

Si consideramos ahora solo aquellos pares ordenados (x,w) de $A\times B$ que satisfacen una cierta condición o propiedad P, entonces tendremos un subconjunto de $A\times B$, digamos un subconjunto $R < A\times B$

A todo subconjunto de un producto cartesiano se le llama RELACION (ésta identificación entre el conjunto R y la relación como subconjunto de un producto cartesiano en matemáticas es usual hacerlo). Si un par ordenado (x,w) pertenece a la relación, o sea $(x,w)\in R$, entonces también se acostumbra escribir xRw y se lee "x está en la relación R con w".

Una función del conjunto A en el conjunto B es una relación R de $A\times B$ tal que

a) $\forall \; x\in A \; \exists \; w\in B \; \cdot\!\!\ni\!\cdot \; (x,w)\in R$ (para todo x de A existe w en B tal que x está en la relación R con w).

b) Si (x,w) y $(x,v)\in R$, entonces $w = v$ (a todo elemento del dominio le corresponde uno y solo uno del contradominio).

Si a la función convenimos en denotarla con una letra digamos f, entonces la definición anterior suele representarse con el símbolo $f : A \longrightarrow B$ que se lee "f es una función de A en B".

Si $x \in A$, el único elemento w tal que $(x,w) \in R$ se llama la imagen de x bajo f o el valor de f en x, usualmente se escribe $w = f(x)$.

Dado que para cada $x \in A$ existe un único w tal que $(x,w) \in R$ y esto se representa por $w = f(x)$, a la función f se le denota formalmente como :

$$f : A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto w = f(x)$$

A = Dominio de f = Domf

B = Contradominio de f = Codf

$w = f(x)$ = Regla de correspondiencia

$\{ w \in B$: existe $x \in A$ para la que $w = f(x) \}$
= Imagen de f = Imf = $f(A)$

Si la relación R además de satisfacer a) y b) cumple con

c) Si para todo $w \in B$ implica que existe $x \in A$ tal que $f(x) = w$. Entonces decimos que la función es de A <u>sobre</u> B o también que la función es "<u>sobre</u>", de A en B, o también se puede decir que la imágen de f es todo B (Imf = B).

Si además de a) y b) cumple que

d) Si para todo $x \epsilon A$ y $x_1 \epsilon A$, con $x \neq x_1$ se tiene que $f(x) \neq f(x_1)$ se dice que la función es "uno a uno" ó inyectiva. Esto equivale a decir que, si $f(x) = f(x_1)$ implica $x = x_1$.

e) Finalmente, si f cumple con las propiedades anteriores se dice entonces que f es una función biyectiva, en otras palabras decimos que f es inyectiva y sobreyectiva.

OPERACIONES

Entre las funciones hay una especialmente interesante, la llamada operación binaria. Se llama OPERACION BINARIA en el conjunto A a la función

$$F : AxA \longrightarrow A$$

Ejemplos importantes de operaciones binarias en N son :

La operación suma (+) de elementos en N es una operación binaria en N, más precisamente

$$(+) : NxN \longrightarrow N$$

$$(n,m) \longmapsto k = n + m$$

La operación multiplicación (·) de elementos de N es una operación binaria en N, o sea

$(\cdot) : N \times N \longrightarrow N$

$(n,m) \longmapsto k = nm$

Evidentemente la sustracción no es una operación binaria en N, pues digamos la pareja $(3,5) = 3 - 5 = -2 \notin N$.

RELACION DE EQUIVALENCIA

Consideremos solo productos cartesianos AxA del conjunto A.

Una relación $E \subset A \times A$ la llamaremos RELACION DE EQUIVALENCIA en A, si :)

a) Si $x \in E$, entonces $(x,x) \in E$ (es reflexiva).

b) Si $(x,x_1) \in E$, entonces también $(x_1,x) \in E$ (es simétrica)

c) Si $(x,x_1) \in E$ y $(x,x_2) \in E$, entonces también $(x,x_2) \in E$ (es transitiva)

Los <u>elementos</u> x, x_1 y $x_2 \in A$, siendo E una relación de equivalencia en A se llaman <u>iguales</u> <u>o</u> <u>equivalentes</u>.

Lo que interesa al introducir una relación de equivalencia es clasificar o formar nuevos conjuntos; éstos nuevos conjuntos se llaman CONJUNTOS de CLASES de EQUIVALENCIA, más precisamente :

Si E es una relación de equivalencia en un conjunto A, entonces a cada elemento $x \in A$ le podemos asociar el conjunto C_x formado por todos los elementos de A relacionados por E con el elemento x; este conjunto puede expresarse de la manera siguiente

$$C_x = \{ w: \quad w \in A \ \text{ y } wEx \}$$

y se llama CLASE de EQUIVALENCIA de x respecto de E.

Se demuestra que si dos clases de equivalencia tienen un elemento común coincide :

Si $x \in C_v$ y $x \in C_w$, entonces $C_v = C_w$

Por lo tanto, dos clases de equivalencia distintas son ajenas, ésto es, sin elementos comunes. Además, todo elemento $x \in A$ está en alguna clase de equivalencia, pues de $x \in E_x$ tenemos que $x \in C_x$.

Consecuentemente las clases de equivalencia son dos a dos ajenas y su unión forma el conjunto A.

3.10.5 APENDICE 3.4

COMBINATORIA

El esquema de resolución del problema 4 nos lleva a las llamadas <u>permutaciones de objetos no todos distintos</u>, esto es a

$_{n}P_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ igual al número de arreglos distintos que pueden formarse a partir de n objetos tomados n a la vez, cuando de ellos n_1 son de un tipo, n_2 son de un segundo tipo, etc. hasta n_k que son de un k-ésimo tipo y además se cumple que

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

Del ejemplo 4 se induce la generalización a :

$$n! = (nPn_1 n_2 \cdots n_k) n_1! n_2! \cdots n_k!, \text{ de donde}$$

$$nPn_1 n_2 \cdots n_k = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

El problema 5 nos lleva a las llamadas <u>combinaciones</u>.

<u>Combinaciones</u> : Sea M un conjunto finito formado por n elementos, llamaremos combinación de n elementos tomados de m en m ($0 \leq m \leq n$) a cualquier subconjunto de m elementos del conjunto M.

Dos combinaciones, digamos de n elementos tomados de m en m se consideran diferentes si estan formadas por elementos distintos (si al menos difieren en uno de sus elementos).

Para fijar ideas tomaremos como M a un conjunto finito con n elementos, digamos al { 1, 2, 3, ..., n }.

El número de combinaciones de n elementos tomados de m en m lo representaremos por el símbolo

$$C_n^m$$

Así tendremos que $C_{n,1}$ es igual al número de subconjuntos de 1 elemento tomados de los n elementos del conjunto dado y es igual al número de elementos del propio conjunto, análogamente $C_{n,2}$ es igual al número de subconjuntos de 2 elementos formados con los elementos dados y que son igual a :

---------------- n parejas ------------

{ 1, 2 }, { 1, 3 }, { 1, 4 }, ... , { 1, n } |
{ 2, 3 }, { 2, 4 }, ... , { 2, n } |
{ 3, 4 }, ... , { 3, n } > (n - 1)
parejas
.... |
{ n-1, n } |

El número $C_{n,2}$ puede calcularse, por ejemplo si cada elemento del conjunto dado se combina respectivamente con el resto de los elementos obteniendo así la tabla de pares de elementos siguiente :

$\{ 1, 2 \}, \{ 1, 3 \}, \{ 1, 4 \}, \ldots , \{ 1, n \}$

$\{ 2, 1 \}, \{ 2, 3 \}, \{ 2, 4 \}, \ldots , \{ 2, n \}$

$\{ 3, 1 \}, \{ 3, 2 \}, \{ 3, 4 \}, \ldots , \{ 3, n \}$

....

$\{ n-1, 1 \}, \{ n-1, 2 \}, \{ n-1, 3 \}, \ldots, \{ n-1, n \}$

$\{ n, 1 \}, \{ n, 2 \}, \{ n, 3 \}, \ldots , \{ n, n-1 \}$

donde se repiten, por ejemplo el elemento $\{ 1, 2 \}$ y el $\{ 2, 1 \}$.

En esta tabla tenemos n renglones por (n - 1) columnas, por lo tanto las parejas distintas que se forman son n(n - 1)/2, o sea que :

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

De paso recordamos que los subconjuntos impropios de cualquier conjunto son dos : el mismo conjunto total y el conjunto vacío. Esto significa que el único subconjunto de n elementos de un conjunto de n elementos es el mismo, esto es $C_{n,n} = 1$ y puesto que solo hay un solo subconjunto vacío inherente a todo conjunto, se considera que $C_{n,0} = 1$

Definición : El factorial de un número n es :

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ (lo leeremos como "ene factorial")

y definimos 0! como 1.

Para números negativos fraccionarios y reales en álgebra no se le asocia ningún significado, aunque en cálculo integral se verá como generalizar este concepto a cualquier número real a través de una integral.

<u>Teorema 1</u> :

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m} = \frac{O_n^m}{P_m}$$

Esto es lo mismo que

$$C_n^m = \frac{[n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)][(n-m)(n-m-1)\cdots 2(1)]}{[1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m\ ]\ [\ (n-m)(n-m-1)\cdots 2(1)\ ]} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Demostración:

Para una n fija, aunque arbitraria, y por inducción en m

a) Por ejemplo para $m = 0$ se tiene que $C_{n,0} = 1$ y de la fórmula se tiene que

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$$

ó bien, para m = 1 se obtuvo anteriormente que $C_{n,1} = n$ y aplicando la fórmula tenemos que

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

ó bien para m = 2 obtuvimos que $C_{n,2} = n(n-1)/2$ y de la fórmula se tiene que

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

b) Si suponemos que la fórmula es válida para m = k, o sea se tiene que

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

c) Entonces hay que demostrar que también la fórmula es cierta para m = k + 1, es decir, hay que demostrar que :

$$C_n^{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

En efecto, supongamos ya formadas todas las posibles combinaciones de n elementos tomados de k en k, o sea $C_{n,k}$ dada por b). Si a cada una de éstas combinaciones le adjuntamos sucesivamente un elemento de los restantes (n-k) que no aparecieron en dichas combinaciones, formaremos todas las posibles combinaciones de n elementos tomados de (k+1) en (k+1) elementos, esto es $C_{n,k+1}$.

Al tomarse en la forma señalada tales nuevas combinaciones, cada una de ellas, aparece (k+1) veces repetida. En efecto, sin perder generalidad podemos analizar lo que ocurre con una combinación específica, digamos con :

$$\{ 1, 2, 3, \ldots k, k + 1 \}$$

Bajo el procedimiento descrito para la formación de las combinaciones de n elementos tomados de (k+1) en (k+1) elementos, éstas pueden formarse de las siguientes (k+1) formas posibles :

A $\{ 2, 3, 4, \ldots, k, k + 1 \}$ se le suma el elemento 1

A $\{ 1, 3, 4, \ldots, k, k + 1 \}$ se le suma el elemento 2

A $\{ 1, 2, 4, \ldots, k, k + 1 \}$ se le suma el elemento 3

A $\{ 1, 2, 3, 5, 6, \ldots, k, k + 1 \}$ se le suma el elemento 4

....

....

....

A { 1, 2, 3, ..., k - 1, k + 1 } se le suma el elemento k

A { 1, 2, 3, ..., k - 1, k } se le suma el elemento k + 1

De ésta forma efectivamente nos damos cuenta de que cada una de las combinaciones formadas con el procedimiento explicado se repite (k+1) veces.

A su vez tenemos que cada una de las combinaciones de Cn,k (de k elementos) nos genera (n-k) nuevas combinaciones, o sea que se forman (n-k)Cn,k nuevas combinaciones(de k+1 elementos) pero como acabamos de ver cada una de estas combinaciones aparece repetida (k+1) veces, por lo tanto

$$C_n^{k+1} = \left[\frac{n-k}{(k+1)} \right] C_n^k$$

$$= \frac{(n-k)n!}{(k+1)k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

que es la fórmula que queríamos demostrar.

Por lo tanto, por el teorema de inducción, para n fijo pero arbitrario, esta fórmula es cierta para todos los números naturales m, con $0 \leq m < n$, con n un número natural cualquiera.

A los números Cn,m se les conoce también como <u>números combinatorios</u> y también se acostumbra llamarles <u>coeficientes binomiales</u> pues aparecen como coeficientes en el desarrollo de la fórmula del binomio de Newton.

<u>EL BINOMIO DE NEWTON</u>

<u>PROBLEMA</u>

Demostrar que :

$$(X + Y)^n = C_n^0 X^n + C_n^1 X^{n-1} Y^1 + \cdots + C_n^n Y^n$$

Antes de entrar a la demostración de esta la llamada fórmula del binomio, introduciremos el operador de suma finita, Σ.

Recordemos que

$\sum_{K=1}^{n} x_K$ significa que

$\forall$ $x \in R$, denota la suma $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

Este símbolo llamado sumatoria (suma finita) tiene las siguientes propiedades :

$\forall\ x_K,\ y_K,\ z_K \in R\ \ y\ \ \forall\ \lambda,\mu,\sigma,\tau\in Z,$ con $\mu>\lambda,\tau>\sigma$

a)

$$\sum_{K=\lambda}^{\mu} X_K = \sum_{K=\lambda}^{\mu-1} X_K + X_\mu = X_\lambda + \sum_{K=\lambda+1}^{\mu} X_K$$

b)

$$\sum_{K=\lambda}^{\mu} cX_K = c\sum_{K=\lambda}^{\mu} X_K,\ \forall\ c\in R$$

c)

$$\sum_{K=\lambda}^{\mu} X_K + \sum_{K=\lambda}^{\mu} Y_K = \sum_{K=\lambda}^{\mu} (X_K + Y_K)$$

Estas propiedades, a), b) y c), son realmente de la operación suma y no de la sumatoria Σ.

d)

$$\sum_{\kappa=\lambda}^{\mu} X_{\kappa} = \sum_{\alpha=\lambda}^{\mu} X_{\alpha}$$

e)

$$\sum_{\kappa=\lambda}^{\mu} X_{\kappa} = \sum_{\kappa=\lambda+1}^{\mu+1} X_{\kappa-1} = \sum_{\kappa=\lambda-1}^{\mu-1} X_{\kappa+1}$$

Estas propiedades, d) y e), son imposibles de escribir para las sumas explícitas.

Notación :

$$\sum_{\kappa=\lambda}^{\mu} \left(\sum_{\alpha=\sigma}^{\tau} X_{\kappa\alpha} \right) = \sum_{\kappa=\lambda}^{\mu} \sum_{\alpha=\sigma}^{\tau} X_{\kappa\alpha}, \forall\, X_{\kappa\alpha} \in R$$

f)

$$\sum_{\alpha=\sigma}^{\tau} \sum_{\kappa=\lambda}^{\mu} X_{\kappa\alpha} = \sum_{\kappa=\lambda}^{\mu} \sum_{\alpha=\sigma}^{\tau} X_{\kappa\alpha}$$

g)

$$\sum_{K=\lambda}^{\mu} \sum_{\alpha=\sigma}^{\tau} X_{K\alpha} Y_K = \sum_{K=\lambda}^{\mu} \left[Y_K \sum_{\alpha=\sigma}^{\tau} X_{K\alpha} \right]$$

f) y g) son propiedades de las sumas dobles.

h)

$$\sum_{K=\lambda}^{\mu} \left[Y_K \sum_{\alpha=\sigma}^{\tau} Z_\alpha X_{K\alpha} \right] = \sum_{\alpha=\sigma}^{\tau} Z_\alpha \sum_{K=\lambda}^{\mu} Y_K X_{K\alpha}$$

i) La ley distributiva puede generalizarse a :

$$\left(\sum_{K=1}^{\lambda} X_K \right) \left(\sum_{\alpha=1}^{\sigma} Y_\alpha \right) = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} \sum_{K=1}^{\lambda} X_K Y_\alpha, \ \forall\ X_K, Y_\alpha \in R; \lambda, \sigma \in N$$

Demostración :

$$\left(\sum_{K=1}^{\lambda} X_K \right) \left(\sum_{\alpha=1}^{\sigma} Y_\alpha \right) = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} \left(\sum_{K=1}^{\lambda} X_K \right) Y_\alpha$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\sigma} \left(Y_\alpha \sum_{\kappa=1}^{\lambda} X_\kappa \right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\sigma} \sum_{\kappa=1}^{\lambda} X_\kappa Y_\alpha \qquad \square$$

Pero como

$$= \sum_{\alpha=1}^{\sigma} \sum_{\kappa=1}^{\lambda} X_\kappa Y_\alpha = (X_1Y_1 + X_2Y_1 + \cdots + X_\lambda Y_1) + \cdots + (X_1Y_\alpha + X_2Y_\alpha + \ldots + X_\lambda Y_\alpha$$

usualmente se denota así :

$$\left(\sum_{\kappa=1}^{\lambda} X_\kappa \right) \left(\sum_{\alpha=1}^{\sigma} Y_\alpha \right) = \sum_{\substack{\kappa=1,2,\cdots,\lambda \\ \alpha=1,2,\cdots,\sigma}}^{\sigma} \sum^{\lambda} X_\kappa Y_\alpha$$

Ahora sí, regresemos al <u>Binomio de Newton</u> :

Para todo $n \in N$ y $x, y \in R$(distintos de cero) se cumple

$$(1)\quad (X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^{n-k}Y^k$$

Donde

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

que son las combinaciones de n elementos tomados de k en k, ya demostrada arriba.

Demostración.

La basaremos en el principio de inducción, por lo cual verificaremos que para algún valor específico de n el teorema se cumple.

Sea n = 1, entonces (1) se cumple, ya que

$$(X+Y)^1 = \sum_{K=0}^{1} C_1^K X^{1-K}Y^K$$

$$= C_1^0 X^{1-0}Y^0 + C_1^1 X^{1-1}Y^1 = X + Y$$

ya que $C_1^0 = \frac{1!}{0!(1-0)!} = 1$ y $C_1^1 = \frac{1!}{1!(1-1)!} = 1$

ya también utilizadas arriba.

Supongamos ahora que para cierto número natural $n > 1$ la fórmula (1) sea cierta.

Demostremos entonces que (1) es cierta para el siguiente número natural (n+1), ésto es que

$$(X + Y)^{n+1} = \sum_{K=0}^{n+1} C_{n+1}^K X^{n+1-K}Y^K$$

En efecto

$$(X + Y)^{n+1} = (X + Y)\cdot(X + Y)^n = (X + Y)\sum_{K=0}^{n} C_n^K\ X^{n-K}Y^K$$

$$= X\sum_{K=0}^{n} C_n^K\ X^{n-K}Y^K + Y\sum_{K=0}^{n} C_n^K\ X^{n-K}Y^K$$

$$= \sum_{K=0}^{n} C_n^K\ X^{n+1-K}Y^K + \sum_{K=0}^{n} C_n^K\ X^{n-K}Y^{K+1}$$

$$= C_n^0X^{n+1-0}Y^0 + \sum_{K=1}^{n} C_n^K\ X^{n+1-K}Y^K + \sum_{K=1}^{n+1} C_n^K\ X^{n-K}Y^{K+1}$$

$$= X^{n+1} + \sum_{\kappa=1}^{n} C_n^{\kappa} X^{n+1-\kappa} Y^{\kappa} + \sum_{\kappa=1}^{n} C_n^{\kappa-1} X^{n+1-\kappa} Y^{\kappa} + C_n^{n+1} \cdot X^{n-(n+1)+1} Y^{\kappa+1}$$

$$= X^{n+1} + \sum_{\kappa=1}^{n} \left[\underline{C_n^{\kappa} + C^{\kappa-1}} \right] X^{n+1-\kappa} Y^{\kappa} + Y^{\kappa+1}$$

$$= X^{n+1} + \sum_{\kappa=1}^{n} C_{n+1}^{\kappa} X^{n+1-\kappa} Y^{\kappa} + Y^{\kappa+1}$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{n+1} C_{n+1}^{\kappa} X^{n+1-\kappa} Y^{\kappa} \qquad \square$$

En el penúltimo paso usamos la identidad combinatoria :

$$C_n^K + C_n^{K-1} = C_{n+1}^K$$

La cual es inmediata al sustituir cada combinación por su valor. Es así que por el teorema de inducción queda demostrada la fórmula del binomio.

CAPITULO 4

SISTEMA DE LOS NUMEROS ENTEROS, ALGEBRA

4.1 SU CONCEPTO

Bajo la hipótesis de que ya tenemos definida la suma de números naturales, se define su diferencia o resta, como la operación inversa de la suma, decir 8 - 3 significa hallar un número tal que sumado a 3 nos de el 8, esto significa que 8 - 3 = 5 porque 5 + 3 = 8, o como usualmente se escribe :

$$a - b = x \text{ es lo mismo que } x + b = a.$$

Sin embargo, como ya notamos desde el capítulo 3, en el conjunto de los números naturales la resta no siempre está definida, pues digamos 5 - 9 no puede realizarse dentro de N, dado que no existe ningún número natural que sumado con 9 nos dé 5. Esta dificultad, conduce a la necesidad de ampliar el conjunto N para que la operación de resta quede siempre bién definida. Esto se realiza introduciendo para cada número natural n su opuesto - n, ampliando ción de suma mediante la convención llamada, propiedad del número opuesto :

$$n + (-n) = (-n) + n = 0$$

Esto significa que - 9 es por definición el número que sumado con 9 nos da 0. Donde además se considera que $-0 = 0$ ya que $0 + 0 = 0$. Ahora sí : $5 - 9$ será $- 4$, pues $5 - 9$ sumado con su opuesto 4 nos da 0.

Con esta ampliación se obtiene el conjunto de los números enteros. (véase el APENDICE 4.3 para ver otra manera de definir los números enteros).

Podemos definirlos como el conjunto de todas las posibles soluciones de la ecuación :

$m + x = n$ donde $m,n \in N$

Estas soluciones tienen la siguiente estructura :

a. Si $m < n$ entonces la solución de la ecuación es el entero positivo $(n - m)$.
b. Si $m > n$ entonces la solución de la ecuación es el entero negativo $(n - m)$.
c. Si $m = n$ entonces la solución de la ecuación es el entero cero(0); el cero no es un entero positivo ni un entero negativo, fué introducido por los Mayas y por los Indúes ss V y VI-X de n.e.

De lo cual, podemos concluir que la principal ventaja de los números enteros respecto de los naturales, es la posibilidad de siempre tener definida la resta. Esta manera de proceder, resulta ser todo un método en Matemáticas consistente en extender diferentes conceptos, para garantizar la realización de cierta operación.

A éste conjunto lo denotaremos con el símbolo Z, podríamos haber elegido cualquier otro símbolo, ¿ verdad ?, el cual está formado por tres conjuntos disjuntos, que no tienen elementos en común, los cuales son :

1. El conjunto de los números naturales ó enteros positivos, denotado como

   $$N = \{ 1, 2, 3, \ldots \} = Z^{+}$$

   Tradicionalmente en los bancos, financieras e instituciones similares tales números se escriben de color negro.

2. El conjunto de los números naturales equipados con el signo "menos" que son llamados números enteros negativos, denotado como

   $$Z^{-} = \{ -1, -2, -3, \ldots \}$$

   En las instituciones de la banca se acostumbra trabajar estos números como números rojos y con tal color los denotan.

3. El conjunto que contiene como único elemento al cero, denotado como

$Z^{\circ} = \{\ 0\ \}$

Esto es, el conjunto de los números enteros es la unión de los tres conjuntos anteriores y lo denotaremos así :

$Z = Z^{-} \cup Z^{\circ} \cup Z^{+}$

4.2 RELACIONES Y OPERACIONES

1. Suma de números enteros

El sistema de los números enteros es una extensión del sistema de los números naturales, por lo tanto si se dá una definición de suma de números enteros ésta debe cumplirse para los números naturales.

i. Suma de enteros positivos

Hallar la suma del entero positivo 5 y el entero negativo 7. Definiremos a éstos enteros mediante ecuaciones de la siguiente forma :

$x = 5 \ ; \ w = 7$

Como la suma de números naturales está bien definida, tenemos que :

$x + w = (5 + 7) \implies x + w = 12$

pero ésto quiere decir que $5 + 7 = 12$

ii. <u>Suma de un entero positivo y un entero negativo</u>

Hallar la suma del entero positivo 5 y el entero negativo 7,(-7), sean las ecuaciones siguientes :

$x = 5$; $w + 7 = 0$

cuyas soluciones son $x = 5$ y $w = -7$ respectivamente.

$x + (w + 7) = 5 + 0$

por la propiedad asociativa de los números naturales se tiene que

$(x + w) + 7 = 5$ entonces la solución de ésta ecuación es

$x + w = -2$ pero ésto implica que $5 + (-7) = -2$

iii. <u>Suma de dos enteros negativos</u>

Hallar la suma de (-2) y (-3). Estos enteros negativos pueden ser definidos mediante las ecuaciones siguientes :

$x + 2 = 0$ y $w + 3 = 0$, ésto quiere decir que las soluciones de ambas ecuaciones son $x = -2$ y $w = -3$.

Como la operación de suma de números enteros debe tener todas las propiedades de la suma de números naturales, entonces

$$(x + 2) + (w + 3) = 0$$

$$(x + w) + 5 = 0$$

entonces $x + w = -5$

pero ésto quiere decir que $(-2) + (-3) = -5$

iv. <u>Suma de un entero negativo y el cero</u>

Hallar la suma de (-2) y (0). Los definiremos mediante las ecuaciones

$x + 2 = 0$; $w = 0$ respectivamente, o sea $x = -2$ y $w = 0$ son sus soluciones

$(x + 2) + w = 0$, $(x + w) + 2 = 0$, $\Longrightarrow$ $(x + w) = -2$

pero ésto quiere decir que $(-2) + (0) = -2$

Definición de suma :

Sean w , x dos números enteros que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$x + m = n$$
$$w + k = p$$

donde $m,n,k,p \in N$

Entonces $(x + w)$ es la solución de la ecuación:

$(x + w) + (m + k) = (n + p)$ donde $w,x \in Z$

2. Multiplicación de números enteros.

Para definir la operación de multiplicación entre dos números enteros se hará en función de la operación de suma; se define como una suma repetida de factores iguales.

i. Multiplicación de enteros negativos

Esta operación es la misma que se efectua con los números naturales. Hallar el producto entre 5 y 3. Si $u = 5$ y $v = 3$ entonces sea $w = uv$

entonces $w = 5(3) = 5 + 5 + 5$ (tres veces el cinco)

$= 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ (cinco veces el tres)

por lo tanto, $w = 15$

ii. Multiplicación de un entero positivo y el cero

Hallar el producto de 3 y 0(cero)

Sean $u = 3$; $v = 0$ y $w = uv$

entonces $w = 3(0) = 0 + 0 + 0$ (tres veces el cero)

por lo tanto $w = 0$

iii. Multiplicación de un entero positivo y un entero negativo

Hallar el producto entre -5 y 3

Sean $u = -5$; $v = 3$ y $w = uv$

entonces $w = (-5)(3) = -[5 \cdot 3]$ por el teorema 2 (ver apendice 4.4)

por lo tanto el resultado se reduce a multiplicar los dos números enteros como si ambos fueran positivos y a éste producto anteponerle el signo menos(-).

por lo tanto w = -[5 + 5 + 5; (tres veces cinco)]

= -[3 + 3 + 3 + 3 + 3; (cinco veces tres)]

entonces w = -15

iv. <u>Multiplicación de dos enteros negativos</u>

Hallar el producto entre -5 y -3

Sean u = -5 ; v= -3 y w = uv

entonces w = (-5)(-3) = (5)(3) pues por el teorema 2(ver apendice 4.4) el producto de dos enteros negativos es igual al producto de los dos enteros positivos y por lo tanto éste caso se reduce al primer caso.

v. <u>Multiplicación de un entero negativo y el cero</u>

Hallar el producto entre -2 y 0

Sean u = -2; v = 0 y w = uv

entonces w = (-2)(0) = -(2)(0) por el teorema 2 y utilizando lo hecho en los dos casos anteriores tenemos que w = 0

Esta manera de multiplicar nos lleva a la siguiente :

Definición de Multiplicación :

Sean u, v números entero, entonces su producto $w = uv$ se define como sigue :

(a) w es igual a la suma del primer factor el número de veces equivalente al segundo factor, es decir,

$w = (u + u + u + \ldots + u)$ [v veces].

o tambien así :

(b) w es igual a la suma del segundo factor el número de veces equivalente al primer factor, es decir,

$w = (v + v + v + \ldots + v)$ [u veces].

3. <u>Resta de números enteros.</u>

Esta operación se define como la operación inversa de la suma, es decir,

$u - v = w$ sí y solo sí $u = w + v$

Por ejemplo, haremos las siguientes operaciones de resta.

$7 - 5 = 2$ pues $7 = 2 + 5$

$5 - (-3) = 8$ pues $5 = 8 + (-3)$

$(-3) - 2 = -5$ pues $-3 = -5 + 2$

$(-9) - (-4) = -5$ pues $-9 = -5 + (-4)$

Escribamos de otra forma los ejemplos

$7 - 5 = 2$	y	$7 + (-5) = 2$
$5 - (-3) = 8$	y	$5 + [\,-(-3)\,] = 8$
$(-3) - 2 = -5$	y	$(-3) + (-2) = -5$
$(-9) - (-4) = -5$	y	$(-9) + [\,-(-4)\,] = -5$

Esto trae como consecuencia que las operaciones de resta reduzcan a los casos de suma que se analizaron anteriormente.

4. División o divisibilidad de números enteros

Cuando consideramos la relación > para números naturales dijimos que $m > n$ si existe $k \in N$ tal que $m = n + k$. Ahora consideraremos otra relación en los números enteros en la cual diremos que m está relacionado con n cuando :

$n = mk$ donde $m,n,k \in Z$; ésta nueva relación así descrita se denomina como "m divide a n" y la denotaremos como $n \div m = k$, esta operación así definida es la operación inversa de la multiplicación.

Definición : Decimos que m divide a $n, (n \div m)$ si y solo si existe un número $k \in Z$ tal que $n = mk$; si m divide a n, otras formas de decirlo también son : m es un divisor de n, m es un factor de n, n es divisible por m, n es un múltiplo de m o k es el cociente de m entre n.

Por ejemplo, haremos las siguientes operaciones de división de enteros.

$51 \div 17 = 3$ pues $51 = 17 \cdot 3$

$12 \div (-4) = -3$ pues $12 = (-4) \cdot (-3)$

$(-192) \div 32 = -6$ pues $-192 = 32 \cdot (-6)$

pero para $27 \div 5$ no existe ningún número entero k tal que $27 = 5k$, es decir ningún número entero multiplicado por 5 es igual a 27, siendo 5 y 27 dos números enteros cualesquiera; ésto quiere decir que habrá una infinidad de casos en los cuales suceda ésto.

Esto implica que la división de enteros es válida sólo para ciertos números y por lo tanto es una operación "parcialmente valida" para los números enteros; por lo tanto decimos que en Z la división no está definida totalmente.

Algunas veces será necesario saber cuando cierto número es divisible por otro, otras veces será necesario saber todos los divisores comunes de dos o más números así como todos sus factores comunes; a continuación daremos los criterios más importantes de divisibilidad y los métodos para determinar los divisores comunes y los factores comunes de los números más elementales.

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

1. Un número entero es divisible por 2 si su última cifra es un número par o cero.
2. Un número es divisible por 3 o por 9, si la suma de sus cifras o dígitos que lo componen es divisible entre 3 o entre 9.
3. Un número es divisible por 4, si sus dos últimas cifras son múltiplos de 4 o son divisibles entre 4.
4. Un número es divisible por 5, si su última cifra es 5 o es 0.
5. Un número es divisible por 6, si es divisible por 2 y además la suma de sus cifras o dígitos que lo componen es múltiplo de 3.
6. Sí existe una regla que nos dice cuando un número es divisible por 7, pero es tan complicada que no es válida como un criterio práctico para verificar la divisibilidad por 7, por lo cual ni siquiera la enunciamos.
7. Un número es divisible por 8, si las tres últimas cifras son múltiplos de 8.
8. Un número es divisible por 11, si la diferencia de la suma de sus cifras de orden par con la suma de sus cifras de orden impar es multiplo de 11.

Las demostraciones de estos criterios pueden verse en el

APENDICE 4.1

Tómese dos números naturales cualesquiera y fórmese su suma, diferencia y producto de los mismos. Comprueba, con ejemplos concretos, que al menos uno de los números obtenidos, con las operaciones indicadas, es divisible entre 3. En efecto, por ejemplo 7 y 5 nos dan 12, 2 y 35 de los cuales 35 no es divisible entre 3, el 2 tampoco lo es, pero al menos el 12 si lo es. Compruebalo para algunos otros ejemplos concretos.

Problema I. Demuestra, en general, que dados dos números naturales arbitrarios, de su suma, diferencia y producto al menos uno de ellos es divisible entre 3. (véase el APENDICE 4.2).

Problema II. Demostrar que cualquier número natural y su quinta potencia terminan en la misma cifra. (véase el APENDICE 4.2).

Problema III. Para todo número par que sea suma de dos cuadrados (exactos) se tiene que su mitad es también suma de dos cuadrados. (véase el APENDICE 4.2).

Problema IV. Obsérvese que

$3^2 = 9,\ 5^2 = 25,\ 7^2 = 49,\ 9^2 = 81\ \ldots$

cada uno de éstos resultados es divisible entre 8 con residuo 1, o sea que :

$$9 = 8\cdot 1 + 1, \qquad 25 = 8\cdot 3 + 1,$$
$$49 = 8\cdot 6 + 1, \qquad 81 = 8\cdot 10 + 1,$$
$$121 = 8\cdot 15 + 1, \qquad 169 = 8\cdot 21 + 1, \quad \text{etc.}$$

en fin, ¿ qué es ésto ? una casualidad o una ley a la que están sujetos todos los números cuadrados de los números impares. (véase el APENDICE 4.2).

Problema V. Demuestra que el cuadrado de un número, representable como una suma de dos cuadrados, es a su vez representable como una suma de cuadrados. (véase el APENDICE 4.2).

Problema VI. Demuestra que el producto de dos números enteros, cada uno de los cuales es la suma de dos cuadrados, es representable como otra suma de cuadrados. (véase el APENDICE 4.2).

Problema VII. Demuestra que la suma de cuadrados de dos números impares no puede ser un cuadrado. (véase el APENDICE 4.2).

Problema VIII. ¿ Cuántos ceros tiene el número

$1\cdot 2\cdot 3\cdots 99\cdot 100$? (véase el APENDICE 4.2).

Existen otras propiedades de la divisibilidad todas ellas susceptibles de verificarse directamente, por ejemplo : Si cada uno de los números enteros a, b son divisibles por c(a y b múltiplos de c) entonces la suma a + b también es divisible por c. En efecto por hipótesis $a = ck$ y $b = cm$, pero entonces $a + b = ck + cm = c(k + m)$ y ésto último significa que la suma a + b es múltiplo de c(a + b es divisible por c). Comprueba que el inverso también es cierto, ésto es si a y a + b son divisibles por c entonces b también es divisible por c.

Todo número natural distinto del 1 admite al menos dos divisores : la unidad y él mismo. Es por lo anterior que surge en forma natural diferenciar entre los números que solo admiten por divisores a la unidadd y a sí mismos llamados primos y los que admiten algún divisor además de los que necesariamente ya lo son la unidad y el mismo número(llamados compuestos).

A la unidad se acostumbra no clasificarlo ni como primo ni como compuesto. Algunos de los primeros primos son : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... Observese en particular que, el 2 es el único par que es primo, los restantes son impares. Recuerdese también que, entendemos por número par a todo número divisible por 2(o múltilpo de 2); los números naturales que no son pares, se llaman impares. El conjunto de los números naturales es la unión del conjunto de números pares e impares.

Desde la antigüedad(s. II a.n.e. Euclides) quedó establecido que había infinitos números primos. La idea de la demostración de Euclides es en extremo simple : Partamos de lo contrario que se afirma, o sea partamos del suponer que hay solo un número finito de números primos. Si los enumeramos a todos, digamos, en orden creciente : 2,3,5, ..., p y formamos un nuevo número igual al producto de todos los supuestos números primos más la unidad, o sea

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p + 1$$

Este número evidentemente no es divisible entre ninguno de los supuestos primos, luego entonces el mismo número n es primo o bien si es un número compuesto tiene por divisor a algún divisor primo distinto de los supuestos primos originales 2, 3, 5, ..., p. Pero esto contradice la hipótesis original de que en 2, 3, 5, ..., p estaban enumerados todos los números primos.

Históricamente, la idea de ésta demostración es muy importante, pues es la primera vez en que se parte de la negación de la conclusión y se llega a la negación de la hipótesis(éste método se fundamenta en la lógica matemática) y usualmente se le conoce como método de reducción al absurdo o método por contradicción.

Otro método también muy usado en demostraciones matemáticas es el llamado método "existencial", consistente en demostrar la existencia de algún ente u objeto determinado. Este método de demostración puede ser de dos tipos, a saber : constructivista o no constructivista; en la primera se demuestra la existencia de un tal ente mediante su construcción explícita, mientras que en el segundo se demuestra que tal ente existe, aunque no se sepa como és ni como obtenerlo.

Definición : Un número primo es un número natural $p > 1$ que solo tiene dos divisores, 1 y p. Un número compuesto es un número natural $n > 1$ que tiene más de dos divisores(al menos tiene dos, 1 y n). Por ejemplo 2, 3, 5, 11, 13, 19, son números primos; 4, 6, 8, 10, 20, 24, 30 son números compuestos, nótese que cada número mayor que 1 es o primo o compuesto pero no ambos; al 0 y al 1, no se les considera como primos ni como compuestos.

Si $n > 1$ y no es primo, entonces n puede escribirse como un producto de primos, llamada factorización prima de n, por ejemplo dar la(s) factorización(es) prima(s) de 180 :

$$180 = 20\cdot 9 = 4\cdot 5\cdot 3^2 = 5\cdot 2^2\cdot 3^2$$

$$180 = 60\cdot 3 = 20\cdot 3^2 = 5\cdot 2^2\cdot 3^2$$

$$180 = 90\cdot 2 = 45\cdot 2^2 = 15\cdot 3\cdot 2\cdot 2 = 3\cdot 5\cdot 3\cdot 2\cdot 2$$

$180 = 10 \cdot 18 = 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$

Nótese que la única diferencia en éstas factorizaciones, es el orden en el cual los factores primos son escritos, ésta propiedad que tiene cada uno de los números compuestos se conoce como :

Teorema Fundamental de la Aritmética : Dado un número $n > 1$, se cumple solo una de las dos siguientes condiciones :

a) n es primo

b) n puede ser escrito como un producto de primos; excepto por el orden en el cual éstos primos son escritos, ésta factorización prima es única.

Teorema del joven Gauss : Si n es un número primo, entonces puede construirse el polígono regular de n lados, con regla y compás sí y solo sí n es de la forma :

$2^{\alpha} + 1$, donde $\alpha=2^{\kappa}$, κ un entero positivo (1).

Si n es un número compuesto, entonces hay que descomponerlo en sus factores primos impares y el polígono regular de n lados podrá construirse con regla y compás sí y solo sí todos los factores primos impares son distintos y cada uno de los cuales tiene la forma (1).

* * *

Analicemos el siguiente ejemplo : Si a los números 4373 y 826 los dividimos entre un mismo número, obtenemos 8 y 7 como residuos respectivamente, se pregunta ¿ entre que número dividimos ? Nos dicen que :

$$4373 = ?(\text{algo}) + 8$$
$$826 = ?(\text{ALGO}) + 7$$

luego

$$4373 - 8 = 4365 = ?(\text{algo})$$
$$826 - 7 = 819 = ?(\text{ALGO})$$

El divisor buscado (?) será un divisor común de los números 4365 y 819, pero entre ellos el divisor común más grande es el que resuelve el problema. Descomponiendo tales números en sus factores primos tendremos que :

$4365 = 3^2 \cdot 5 \cdot 97$

$819 = 3^2 \cdot 91$

por lo cual tendremos que el divisor común más grande es

$3^2 = 9$

que es el número buscado.

MAXIMO COMUN DIVISOR (MCD)

Definición : El Maximo Común Divisor(MCD) de dos o más números, es el divisor común más grande de dichos números. Se obtiene de varias formas :

i. Se encuentran todos los divisores de cada número, por ejemplo de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12, y de 18 son 1, 2, 3, 6, 9 y 18.

   Luego se encuentran todos los divisores que son comunes a cada número, por ejemplo de 12 y 18, sus divisores comunes son : 1, 2, 3 y 6.

   De ellos, el divisor común más grande recibe el nombre de Máximo Común Divisor, es decir, el MCD(12,18) = 6

ii. Otra forma es, hallar la factorización prima de cada número y luego obtener el producto de los factores primos comunes afectados del menor exponente, por ejemplo, hallaremos el MCD(150,375,450).

Las factorizaciones primas son :

$150 = 2\cdot 3\cdot 5^2$

$375 = 3\cdot 5^3$

$450 = 2\cdot 3^2\cdot 5^2$

Entonces el MCD(150,375,450) = $3\cdot 5\cdot 5$ = 75

iii. Otra forma de obtener el MCD de dos números es utilizando el Algoritmo de la División de Euclides, el cual dice que :

Si m, n son números enteros cualesquiera, con $m \neq 0$, entonces existen q, r únicos, llamados cociente y residuo respectivamente, tales que satisfacen las siguientes condiciones :

a). $n = mq + r$

b). $r < m$

De éste algoritmo se obtiene el siguiente resultado : $MCD(n,m) = MCD(m,r)$, ésto nos permite poder encontrar el MCD de un número más pequeño en lugar de uno más grande, por ejemplo, para hallar el MCD(12,18) procedemos como sigue:

$n = 18$ y $m = 12$, encontramos que $q = 1$ y $r = 6$;

$$18 = 12(1) + 6$$

$$\Longrightarrow MCD(12,18) = MCD(12,6)$$

Aplicando otra vez el algoritmo, tenemos que $12 = 6(2) + 0$; ésto quiere decir que 6 divide a 12 y por lo tanto el $MCD(12,18) = 6$

Como vimos en el ejemplo anterior, el MCD(n,m) es el último residuo diferente de cero, obtenido en el proceso de divisiones sucesivas.

Vamos a dar otro ejemplo utilizando éste método. Hallar el MCD(645,168).

$$\begin{array}{rlrl}
645 &= 168\cdot 3 + 141 & MCD(645,168) &= MCD(168,141) \\
168 &= 141\cdot 1 + 27 & &= MCD(141,27) \\
141 &= 27\cdot 5 + 6 & &= MCD(27,6) \\
27 &= 6\cdot 4 + 3 & &= MCD(6,3) \\
6 &= 3\cdot 2 + 0 & &= 3
\end{array}$$

Sí, de dos números dados, uno de ellos es divisor del otro, éste divisor es el MCD de ámbos números.

Definición : Dos números m y n, se dice que son primos entre sí ó primos relativos, si el único factor común de ambos es la unidad, es decir, si el MCD(m,n) = 1

MINIMO COMUN MULTIPLO (mcm)

Comencemos por discutir el siguiente problema : Dispongamos los enteros del 1 al 1000 marcados sucesivamente a lo largo de una circunferencia. Empezando con el 1 tachamos la cifra correspondiente a cada 15 números, así tacharemos el 1, 16, 31, 46, ... Este proceso lo paramos al regresar de nuevo al número 1, si es preciso después de dar varias vueltas a la circunferencia. ¿ Cuántos números quedan sin tachar ?

La cantidad de taches que hay que realizar para poder regresar al número 1 será cualquier múltiplo común entre 1000 y 15 (solo así coincidirán). En particular, el múltiplo común más pequeño. Para ello escribimos los múltiplos de 1000 y 15 : 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, ... mientras que los múltiplos de 15 son : 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180, 195, 210, ..., 975, 990, 1005, 1020, .., 1980, 1995, 2010, 2025, ..., 2970, 2985, 3000, 3015, ..., luego, el menor común múltiplo resulta ser 3000 luego, se necesitan 3000 números tachados para de nuevo llegar al 1, es decir se necesita dar tres vueltas a la circunferencia para llegar de nuevo al 1. La cantidad de números que se tachan son 3000/15 = 200 (más exactamente, 199 porque el 1 se tacha dos veces) luego entonces, la respuesta a la pregunta de cuántos números se quedan sin tachar, es 801.

Definición : El Mínimo Común Múltiplo (mcm) de dos o más números, es el menor múltiplo común de dichos números. Se obtiene de varias formas :

(a) Se encuentran todos los múltiplos de cada número, por ejemplo los múltiplos de 12 son 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, ... y los múltiplos de 18 son 0, 18, 36, 54, 72, 90, 108, ... Luego se determina cuáles son los múltiplos comunes de los números y el menor, será el Mínimo Común Múltiplo, por ejemplo los múltiplos comunes son 36, 72, ... y por lo tanto el mcm(12,18) = 36.

(b) Se encuentra la factorización prima de cada número, separar el que tenga la máxima potencia y multiplicarlo por los demás factores primos ya sean comunes a los números o nó, por ejemplo, hallar el mcm(12,18).

Las factorizaciones primas de 12 y 18 son :

$12 = 3 \cdot 2^2$

$18 = 2 \cdot 3^2$

Entonces el mcm(12,18) = $3^2 \cdot 2^2$

Problema IX. Un barco hace un viaje en 17 días. Si empieza su primer viaje un Jueves, ¿ qué día empezará su 2o. viaje ?, ¿ el 15o. viaje ?, ¿ el 73o. viaje ?

Problema X. Doña María de los Angeles tiene una huerta arribita de Zitácuaro y bajó para su venta, manzanas cuyo número no sobrepasa a 500. Cuando las dispuso por pares le sobró una, al acomodarlas en pilas de 3 de nuevo le sobró una manzana. Al ponerlas en pilas de 4, de 5 y de 6 manzanas respectivamente también le sobraba una manzana, pero al ponerlas en pilas de 7 no le sobró ninguna. ¿ Cuántas manzanas bajó para su venta en la terminal de "Tres Estrellas de Oro" Doña María de los Angeles ?

Problema XI. Pienso un número de 3 cifras. Si a tal número le agrego 6, entonces es divisible entre 7; si al número pensado le agrego 7, entonces es divisible entre 8 y finalmente si le agrego 8, entonces es divisible entre 9. ¿ Qué número pensé ?

Problema XII. ¿ Cuál es el menor número, que al dividirlo entre 2, 3, 4, 5 y 6 nos dá respectivamente 1, 2, 3, 4 y 5 como residuos ? pero su división entre 7 no deja residuo.

Problema XIII. Un número de 3 cifras al dividirlo entre 13 deja un residuo de 11. Al dividirlo entre 11 nos dá un residuo de 9 y al dividirlo entre 7 dá un residuo de 5. Halla tal número.

Problema XIV. Al número 523 le escribí a su derecha otro número de 3 cifras y el número de 6 cifras obtenido resultó divisible entre 7, 8 y 9. Luego le escribí al mismo número 523 otro número de 3 cifras, mayor que el anterior, y el número obtenido de nuevo resultó ser divisible entre 7, 8 y 9. ¿ Cuál es el 1er. número y cual el segundo que escribí después del 523 ?

Problema XV. Escoge el mayor de los números de cuatro cifras que al dividirlo entre cualquier dígito (excepto 1) nos dé a 1 como residuo.

Problema XVI. De los niños que asisten al curso de Logo uno de ellos nos mostró un ejemplo interesante basado en el número 945, a saber, si a éste número (al 945) le agregamos cualquier dígito impar, entonces su suma es divisible entre el doble de la cifra agregada (por ejemplo si a 945 le agregamos 1 tendremos el 946 que es divisible entre el doble del 1, o sea el 2. Si al mismo 945 le agregamos 7 entonces al número resultante, 952, es divisible entre el doble de 7 (o sea entre 14) pues en efecto 952/14 = 68). A tí te proponemos hallar un nuevo número de 3 cifras que satisfaga la propiedad mencionada.

* * *

Ahora, una pregunta, ¿ podremos representar sobre una línea recta todos y cada uno de los elementos de los números enteros ?

Igual como se hizo para los números naturales, lo haremos para éste sistema, y es de la siguiente manera :

Seleccionamos un punto arbitrario A sobre la recta como el origen o inicio y le asignaremos el cero a éste punto del cual empezaremos a representar el sistema de números enteros, despues seleccionamos una longitud cualquiera como unidad de medida (digamos el segmento AB de la figura), y la marcamos sobre la linea hacia la derecha del origen para representar números enteros positivos y hacia la izquierda del origen para representar números enteros negativos tantas veces como números querramos representar. Aparece por primera vez la noción de dirección de segmentos de recta, pues en la gráfica la línea recta tiene dos direcciones.

```
        F     G      H     A     B     C     D     E
<--------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|--------->
    ... -3    -2     -1     0     1     2     3     4   ...
```

Un número asociado con un punto es llamado la coordenada del punto; el punto es llamado la gráfica del número y al conjunto de puntos equidistantes sobre la línea es la gráfica del conjunto de los números enteros.

El conjunto de puntos marcados sobre la línea y el conjunto de números estan en una correspondencia uno-a-uno; esto es, cada punto es la gráfica de exactamente un número, y cada número es la coordenada de exactamente un punto.

4.3 EL ALGEBRA COMO TEORIA MATEMATICA

La Aritmética se desarrolla bajo el criterio de saber reconocer ciertas características de los objetos que están ahí : las cuantitativas y la Geometría surge con la abstracción de otra característica de los objetos : su forma.

Pero el hombre se plantea nuevas metas, pues ya no se contenta con saber cuantos objetos hay en una colección dada o cuanto mide cierta magnitud dada, y se plantea obtener una colección de tamaño preestablecido y diseñar, construir un cuerpo con ciertas magnitudes dadas de antemano.

La pregunta ? Cuánto cabe en un recipiente con tales magnitudes ? exige para ser respondida el establecimiento de la relación entre las magnitudes(conocidas) y el volúmen(desconocido). Una vez conocidas plenamente èstas relaciones es que podemos plantear el problema inverso : ? Cuánto han de medir las magnitudes de un recipiente para que contenga tal volúmen ?

Las relaciones entre Aritmética y Geometría, es decir relaciones entre cantidades y magnitudes, se formularon mediante operaciones que expresaban la relación entre las magnitudes conocidas con la magnitud desconocida(incógnita) y en concordancia con las manipulaciones que habrían de ser hechas con los objetos , es decir se formularon mediante ecuaciones.

El término ALGEBRA significa originalmente restitución o reducción y se refiere a la transferencia de cualquier término de un miembro de una ecuación al otro miembro de la misma y fué utilizado por primera vez por los Arabes (en particular se habla del matemático árabe Mohamed ben Musa el cual era conocido como Al-Jwarizmi en el siglo IX).

El álgebra surge como un instrumento teórico para resolver los problemas prácticos del cálculo numérico y de las investigaciones aritméticas. Se desarrolló en dos direcciones como son la sustitución de números por literales con la correspondiente generalización de aquellos, y el cálculo de fórmulas que contienen cantidades desconocidas o incógnitas.

Actualmente, las operaciones algebraicas más comunes han sido sustituidas por leyes o reglas de composición, definidas por un grupo reducido de axiomas y sirven de base para varios sistemas, diferentes de números o de otros objetos. La combinación de éstas leyes de composición constituyen las estructuras algebraicas, cuyo estudio es el objetivo fundamental del álgebra.

Estas estructuras algebraicas se han introducido en casi todas las ramas de la matemática y por lo cual podemos decir que la matemática entera se encuentra sometida a un proceso de algebrización continuo.

Finalmente, podemos decir que el álgebra se ha extendido al estudio de las asociaciones de estructuras algebraicas con estructuras no-algebraicas, como son las estructuras de orden, las combinatorias y las topológicas.

4.4 ESTRUCTURA GENERAL DEL SISTEMA

Toda la experiencia acumulada en incontables generaciones, se trata de organizar, sistematizando todo el conocimiento adquirido, a través de Axiomas a partir de los cuales poder deducir más propiedades y relaciones no establecidas a éste nivel.
Asi definimos lo siguiente :

Sea Z el conjunto de los números enteros, ésto es,

$$Z = \{ \ldots \; -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

Propiedades Básicas :

Sean v,w,m,n elementos arbitrarios de Z, lo cual

denotaremos asi : $v,w,m,n \in Z$

1. Propiedades de igualdad

i. $m = m$ para todo elemento m (Reflexiva)

ii. Si $m = n \implies n = m$ (Simétrica)

iii. Si $m = n$ y $n = w \implies m = w$ (Transitiva)

2. Propiedades de suma y multiplicación

i. Si $m = n$ y $v = w \implies m + v = n + w$ y $mv = nw$ (Bien Definida)

ii. $m + v$ y nw son elementos de Z (Cerradura)

iii. $m + n = n + m$ y $mn = nm$ (Conmutativa)

iv. $(m + n) + v = m + (n + v)$ y

$(mn)v = m(nv)$ (Asociativa)

v. Existe un elemento $k \varepsilon Z$ tal que $mk = m$ llamado Elemento Identidad para la multiplicación o neutro multiplicativo y que definimos como la unidad o uno ($k = 1$).

vi. Existe un elemento $c \varepsilon Z$ tal que $m + c = m$ llamado Elemento Identidad para la suma o neutro aditivo el cual llamamos cero ($c = 0$).

vii. Para cada elemento $m \varepsilon Z$, existe $n \varepsilon Z$ tal que $m + n = 0$ ésto es, su suma nos dá el neutro aditivo y se define como $n = - m$ y le llamamos Inverso Aditivo o contrario.

viii. Si $m + n = w + n \implies m = w$ (Cancelación para la suma)

Si $mn = wn \implies m = w$ con $n \neq 0$ (Cancelación para la Multiplicación)

ix. $m(v + w) = (mv) + (mw)$. (Distributiva, propiedad que relaciona las operaciones de Suma y Multiplicación.)

3. Propiedades de orden

Definición : Decimos que un número entero m es mayor que un número entero n lo cual denotaremos como $m > n$, si $m - n$ es un número natural, es decir $m - n > 0$ o también que $m - n \in N$.

i. Si m es un número entero se cumple una y solamente una de las tres condiciones siguientes (Tricotomía) :

a) $m > 0$;

b) $m = 0$;

c) $-m > 0$

ii. Si $m > n \implies m + v > n + v$

iii. Si $m > n$; $v > 0 \implies mv > nv$

iv. Si $m > n$ y $n > v \implies m > v$ (Transitiva)

4.5 NECESIDAD DE AMPLIACION DEL SISTEMA

La necesidad de extender nuestro concepto del conjunto de números enteros a otro conjunto de números es motivado por la consideración de tres tipos de problemas matemáticos, que son :

i. Definir un conjunto de números que contenga al conjunto de números enteros como un subconjunto y que sea cerrado bajo las operaciones binarias de suma, resta, multiplicación y división.

ii. Establecer una correspondencia uno-a-uno entre elementos de tal conjunto con los elementos de otro conjunto de puntos sobre una linea recta, ésto es, poder representar sobre una linea recta todos y cada uno de los elementos del conjunto nuevo, sin que haya ambigüedad.

iii. Encontrar soluciones a las ecuaciones de la forma:

$nx = m$ donde x es la incognita y $m, n \in Z$

iv. La necesidad de medir magnitudes continuas tales como la longitud, el volumen, el peso, etc.

v. Medidas de tiempo (horas, días , semanas, meses, años, siglos, milenios, etc.), medidas de temperatura (grados Farenheit, Centígrados, Kelvin, Rankin, etc.), medidas de intensidad de terremotos (escalas de Mercalli, Ritcher), etc.

4.6 CUESTIONARIO

1. Hoy domingo, de Zihuatanejo zarparon 3 barcos. Luego de cuánto tiempo éstos 3 barcos de nuevo zarparán de Zihuatanejo en domingo si el 1er. barco zarpa una vez cada 3 dias, el 2o. una vez cada 4 dias y el tercero una vez cada 6 dias.

2. Una mercancía tarda en producirse 26 hrs. Si se empieza a trabajar un día a las 19 hrs. y al terminar una mercancía no se descansa. ¿ Qué hora será cuando se hallan terminado 22 ejemplares de esa mercancía ?

3. Se tiene un equipo de 5 alumnos que van a presentar un examen oral, pero entre ellos no logran ponerse de acuerdo cuál de ellos ha de pasar primero. A alguien se le ocurre utilizar el siguiente método para determinar quien pasa primero. Los alumnos se forman y el profesor los irá contando hacia adelante y hacia atrás, tocandole el siguiente número al penúltimo de la fila, gráficamente :

A	B	C	D	E	
1	2	3	4	5	
9	8	7	6	5	
9	10	11	12	13	
17	16	15	14	13	...

Si los alumnos proponen contar hasta 1985, cómo hace el profesor para inmediatamente decir cual de ellos ha de pasar ha examinarse ¿ Dar una respuesta si la cuenta se decide terminar en un número cualquiera ?

4. Un biólogo cazó varias arañas y escarabajos, en total 8, y los guardó en una caja. Contó el número total de patas y le dió 54. ¿ Cuántas arañas y cuántos escarabajos hay en la caja ? Nota : El escarabajo tiene 6 patas y la araña tiene 8, hacerlo sin

emplear ecuaciones.

5. ¿ El mínimo común múltiplo (mcm) de varios números es divisible entre su máximo común divisor (MCD) ?

6. ¿ A qué es igual el MCD de dos números, si sabemos que su mcm es igual al producto de dichos números ?

4.7 APENDICES

4.7.1 APENDICE 4.1

DEMOSTRACIONES DE LOS CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD.

A continuación daremos demostraciones directas de los criterios de divisibilidad más simples, pero nó por ello menos importantes.

1. Un número es divisible por 2 si su última cifra es un número par ó cero.

   Demostración :

   Sea w un número de 4 cifras, el cual se puede escribir en sistema decimal como sigue :

   $$w = C_3 10^3 + C_2 10^2 + C_1 10 + C_0$$

   Por lo tanto, si dividimos por 2 obtenemos que :

   $$\frac{w}{2} = 500C_3 + 50C_2 + 5C_1 + \frac{C_0}{2}$$

   y de aquí se obtiene que para que w sea divisible por 2 solo es suficiente que la última cifra (C_0 en éste caso) sea par ó cero. Este razonamiento es extendible a números de cualquier número de cifras. Sea v un número de una cantidad cualesquiera, digamos n, de cifras C_i, ésto es

$$w = C_n C_{n-1} \cdots C_2 C_1$$

que lo podemos representar como

$$w = C_n C_{n-1} \cdots C_2 C_1 = C_n C_{n-1} \cdots C_2(0) + C_1$$

pero el primer sumando de la última expresión, o sea $C_n C_{n-1} \cdots C_3 C_2(0)$ es divisible entre 10(por terminar en 0) luego entonces es un número par y por lo tanto la suma será par, si C_1 es par ó cero; ésta condición también resulta necesaria.

Por ejemplo, decir cuales de los siguientes números son divisibles por 2 : 123456789, 9876543210.

El 123456789 no es divisible por 2 porque su última cifra(9) no es divisible por 2 y 9876543210 si lo es, pues su última cifra (0) sí es divisible por 2 ya que 0+2=0.

2. Un número es divisible por 3 ó por 9, si la suma de sus cifras ó dígitos que lo componen es múltiplo de 3 ó de 9(es decir, divisible entre 3 ó entre 9).

Demostración :

Sea w un número de 4 cifras, el cual se puede escribir en sistema decimal como sigue :

$$\begin{aligned} w &= C_3 10^3 + C_2 10^2 + C_1 10 + C_0 \\ &= 999C_3 + C_3 + 99C_2 + C_2 + 9C_1 + C_1 + C_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si dividimos por 3 obtenemos que :

$$\frac{w}{3} = 333C_3 + 33C_2 + 3C_1 + \frac{[\, C_3 + C_2 + C_1 + C_0 \,]}{3}$$

Por lo tanto para que w sea divisible por 3 es suficiente que la suma de sus cifras sea divisible por 3. Para completar la demostración, se hace este mismo razonamiento para un número de cualquier cantidad n de cifras. Además tal condición también resulta ser condición necesaria.

Otra demostración :

Sea w un número cualquiera de n cifras, donde las C_i son cualquiera de las cifras 0, 1, 2, ..., 9. Escribamos tal número en notación decimal :

$$
\begin{aligned}
w &= 10^n C_n + 10^{n-1} C_{n-1} + \cdots + 10^2 C_2 + 10 C_1 + C_0 \\
&= (99\cdots9+1)C_n + \cdots + (99+1)C_2 + (9+1)C_1 + C_0 \\
&= (99\cdots9)C_n + (99\cdots9)C_{n-1} + \cdots + 99C_2 + 9C_1 + \\
&\quad (C_n + C_{n-1} + \cdots + C_2 + C_1 + C_0)
\end{aligned}
$$

Todos los sumandos son divisibles entre 9 luego serán divisibles entre 3, excepto el último, por eso resulta que w es divisible entre 3 ó entre 9 si y solo si el último sumando ($C_1 + C_2 + \ldots + C_{n-1} + C_n$) resulta divisible entre 3 ó entre 9.

Por ejemplo, decir cuales de los siguientes números son divisibles por 3 : 168, 12345 y el 2468654.

El 168 si es divisible por 3 pues 1 + 6 + 8 = 15 es divisible por 3. El 12345 también lo es por lo mismo y el 2468654 no es divisible por 3 ya que

2 + 4 + 6 + 8 + 6 + 5 + 4 = 35 no es múltiplo de 3.

Por ejemplo, decir cuales de los siguientes números son divisibles por 9 : 168, 123453 y el 2468654.

El 168 no es divisible por 9 pues 1 + 6 + 8 = 15 no es múltiplo de 9.

El 123453 si es divisible por 9 pues $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 3 = 18$ es múltiplo de 9.

y el 2468654 no es divisible por 9 ya que

$2 + 4 + 6 + 8 + 6 + 5 + 4 = 35$ no es múltiplo de 9.

3. Un número es divisible por 4, si sus dos últimas cifras son múltiplos de 4.

Demostración :

Sea w un número de 4 cifras, el cual se puede escribir en sistema decimal como sigue :

$$\begin{aligned} w &= C_3 10^3 + C_2 10^2 + C_1 10 + C_0 \\ &= 250(4)C_3 + 25(4)C_2 + 8C_1 + 2C_1 + C_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si dividimos por 4 obtenemos que :

$$\frac{w}{4} = 250C_3 + 25C_2 + 2C_1 + \frac{(2C_1 + C_0)}{4}$$

Por lo tanto para que w sea divisible por 4 es suficiente que las 2 últimas cifras de w sean divisibles por 4, ó bién, que la penúltima cifra (C_1) multiplicada por 2 más la última cifra (C_0) de w sea múltiplo de 4. Para completar la demostración basta con hacer éste mismo razonamiento para un número de cualquier cantidad n de cifras. Además tal condición resulta no solo ser suficiente sino también necesaria.

Otra demostración :

Sea $w = C_1C_2\ldots C_{n-1}C_n$

donde las C_i son cifras cualesquiera 0, 1, ..., 9

Entonces

$$w = C_1C_2\ldots C_{n-3}C_{n-2}C_{n-1}C_n$$

$$w = C_1C_2\ldots C_{n-3}C_{n-2}(00) + C_{n-1}C_n$$

En ésta última representación el primer sumando es divisible entre 100 y por lo tanto entre 4, luego para que la suma sea divisible entre 4 es necesario y suficiente que el último sumando, o sea $C_{n-1}C_n$, sea divisible entre 4.

Por ejemplo, dí cuales de los siguientes números es divisible por 4 : 168, 23456736 y el 246809.

El 168 es divisible por 4 ya que el 68 es múltiplo de 4; el 23456736 también es divisible por 4 pues 36 es múltiplo de 4; el 246809 no es divisible por 4 ya que el 09 no es múltiplo de 4.

4. Un número es divisible por 5, si su última cifra es 5 ó es 0.

Demostración :

Sea w un número de 4 cifras, el cual se puede escribir en sistema decimal como sigue :

$$w = C_3 10^3 + C_2 10^2 + C_1 10 + C_0$$

Por lo tanto, si dividimos por 5 obtenemos que :

$$\frac{w}{5} = 200C_3 + 20C_2 + 2C_1 + \frac{C_0}{5}$$

y de aquí se obtiene que para que w sea divisible por 5 solo es suficiente que la última cifra (C_0 en éste caso) sea un cinco ó cero. Para concluir basta generalizar este razonamiento a cualquier número con una cantidad arbitraria n de dígitos. Además resulta que dicha condición no solo es suficiente, sino también necesaria.

Otra demostración :

Sea $w = C_1C_2 \ldots C_{n-1}C_n$ luego

$$w = C_1C_2 \ldots C_{n-1}(0) + C_n$$

pero en esta última representación el primer sumando es divisible entre 10 y por tanto es divisible entre 5. Su suma será divisible entre 5 si y solo si su segundo sumando C_n es 0 ó 5.

Por ejemplo dí cuales de los siguientes números son divisibles por 5 : 168, 234 y el 12345.

El 168 y el 234 no son divisibles por 5 porque no terminan ni en 5 ni en cero y el 12345 sí lo és.

5. Un número es divisible por 6, si es divisible por 2 y además la suma de sus cifras ó dígitos que lo componen es múltiplo de 3.

Demostración :

Todo número que sea múltiplo de 6 tiene que ser par y por lo tanto es divisible entre 2 y para ser divisible entre 3 ya vimos en el criterio 2 que es necesario y suficiente que la suma de sus cifras sea divisible entre 3.

6. No existe una regla que nos diga cuando un número es divisible por 7 (dar una razón porque se afirma ésto.)

7. Un número es divisible por 8, si las tres últimas cifras son múltiplos de 8.

Demostración :

Sea w un número de 4 cifras, el cual se puede escribir en sistema decimal como sigue :

$$v = C_3 10^3 + C_2 10^2 + C_1 10 + C_0$$
$$v = 125(8)C_3 + 12(8)C_2 + 4C_2 + 8C_1 + 2C_1 + C_0$$

Por lo tanto, si dividimos por 8 obtenemos que :

$$\frac{v}{8} = 125C_3 + 12C_2 + C_1 + \frac{(4C_2 + 2C_1 + C_0)}{8}$$

Por lo tanto para que w sea divisible por 8 es suficiente que las 3 últimas cifras de w sean divisibles por 8, ó bién, que la antepenúltima cifra (C_2) multiplicada por 4 más la penúltima cifra (C_1) multiplicada por 2 más la última cifra (C_0) de w sea múltiplo de 8.

Por ejemplo, dí cuales de los siguientes números es divisible por 8 : 168, 23456736 y el 246809.

El 168 es divisible por 8 ya que el 168 es múltiplo de 8.

El 23456736 también es divisible por 8 pues 736 es múltiplo de 8.

El 246809 no es divisble por 8 ya que el 109 no es múltiplo de 8.

8. Un número entero es divisible por 11, si la diferencia de la suma de sus cifras de orden par con la suma de sus cifras de orden impar es múltiplo de 11.

Demostración :

Introduzcamos la siguiente notación :

$$W = C_n C_{n-1} \cdots C_2 C_1 C_0$$

Un número de n cifras, donde las C_i son cifras que pueden tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. En la notación decimal :

$$W = 10^n C_n + 10^{n-1} C_{n-1} + \cdots + 10^2 C_2 + 10 C_1 + C_0$$

Ahora, nos conviene restarle un número que contenga todos los C_i, pero cuyos coeficientes sumados ó restados de los coeficientes de W sean tales que los nuevos coeficientes sean divisibles entre 11. En efecto, el nuevo número debería contener a $+C_0$ para que restado se nos simplifique, y a $-C_1$ para que restado a W nos quede sumado a $10C_1$, obteniendo $11C_1$ el cual es divisible entre 11; similarmente, éste nuevo número debería contener a $+C_2$, para que restado a W con $10^2 C_2$ nos dé $99C_2$, el cual también es divisible entre 11; si además, contiene a $-C_3$, entonces al restarlo con $10^3 C_3$ tendremos que $(10^3 + 1)C_3 = 1001C_3$ también es divisible entre 11. Por lo tanto, concluímos que tal nuevo número deberá contener C_{2k} y $-C_{2k+1}$ para toda $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, es decir,

$$N = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \cdots + (-1)^n C_n$$

el cual ya tiene un asombroso parecido al enunciado del criterio.

Restando éstos dos números, nos dá :

$$\begin{aligned} W - N &= 10^n C_n + 10^{n-1} C_{n-1} + \cdots + 10^2 C_2 + 10 C_1 + C_0 \\ &\quad -(C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \cdots + (-1)^n C_n) \\ &= (10+1)C_1 + (10^2-1)C_2 + (10^3+1)C_3 + \cdots + [10^n - (-1)^n] C_n \end{aligned}$$

el cual es divisible entre 11, puesto que cada sumando contiene coeficientes todos ellos divisibles entre 11 ya que, en efecto 10^k es divisible entre 11 con resto 1 si k es par y con resto (-1) si k es impar, por lo tanto, todos los parentesis de la parte derecha son divisibles por 11.

Resumiendo, tenemos que N es construído de tal forma que la diferencia con W siempre es divisible por 11. Por ejemplo :

Si W = 172845 entonces N = 5 - 4 + 8- 2 + 7 - 1 = 13

$$\frac{W - N}{11} = \frac{W}{11} - \frac{N}{11} = 15713 + \frac{2}{11} - \left(1 + \frac{2}{11} \right)$$
$$= 15713 + \frac{2}{11} - 1 - \frac{2}{11} = 15712$$

Como vemos en éste sencillo ejemplo, al hacer la diferencia entre W y N, los residuos se anulan dando como resultado un número entero. Entonces se tienen dos casos a saber :

a. Si N es múltiplo de 11 los residuos son ambos cero y entonces W es múltiplo de 11.

b. Si N nó es múltiplo de 11 los residuos son diferentes de cero pero se anulan al hacer la diferencia, de lo cual W no es múltiplo de 11.

Por lo tanto es necesario y suficiente que N sea divisible por 11 para determinar si W es ó nó divisible por 11.

4.7.2 APENDICE 4.2

RESPUESTA A LOS PROBLEMAS

I. De los ejemplos concretos, si hiciste la división en cada paso, pudiste haber intuido que a través del residuo de las divisiones practicadas se puede agotar el análisis de los posibles casos susceptibles de analizar que agoten todas las posibilidades. Así se puede uno dar cuenta de que hay que considerar 3 posibles casos :

1) Cuando al menos uno de los dos números dados originalmente es divisible entre 3.
2) Al dividir entre 3 los dos números dados originalmente, nos dá un mismo residuo, 1 ó 2.
3) Al dividir entre 3 los dos números dados originalmente, uno de ellos dá residuo 1 y el otro residuo 2.

II. Si M es un número natural cualquiera, entonces la diferencia con su quinta potencia, M^5, nos dará un número cuya última cifra será 0, bajo la hipótesis de que en efecto ambos números terminan en la misma cifra. Por lo tanto

$$M^5 - M$$

deberá ser divisible entre 10. Para verificar que es divisible entre 10 intentemos la descomposición siguiente :

$$M^5 - M = M^5 + 4M - 5M = M^5 + 4M - 5M \pm 5M^3$$

$$= M^5 - 5M^3 + 4M + 5M^3 - 5M$$

$$= M(M^4 - 5M^2 + 4) + 5M^3 - 5M$$

$$= M(M^2 - 1)(M^2 - 4) + 5M(M^2 - 1)$$

Pero éste último número siempre es divisible entre $10 = 5 \cdot 2$ lo cual es verificable haciendo el análisis por ejemplo para los M pares ó M impares, digamos si M es par no terminado en cero, porque entonces ya sería divisible entre 10, entonces es divisible entre 2, pero además M^2-1 ó M^2-4 son divisibles entre 5, ya que si M es par, M^2 terminaría en 4 ó en 6 y si terminara en 4 el factor M^2-4 terminaría en 0 y por lo tantó sería divisible entre 5, pero si terminara en 6, el factor M^2-1 terminaría en 5 y por lo tanto también sería divisible entre 5. Seguimos, si M es par el sumando $5M(M^2-1)$ nos daría siempre un factor de $5 \cdot 2 \cdot k$ donde

M=2k luego entonces sería divisible entre 10. Análogamente, se analiza para el caso M impar.

III. Si N es par y es representable como suma de dos cuadrados digamos

$$N = K^2 + M^2$$

entonces :

$$\frac{N}{2} = \frac{(K^2 + M^2)}{2} = \frac{(K^2 \pm K^2M^2 + M^2)}{2}$$

$$= \frac{(2K^2 + 2K^2M^2 - 2K^2M^2 + 2M^2)}{4}$$

$$= \frac{(K^2 + 2K^2M^2 + M^2)}{4} + \frac{(K^2 - 2K^2M^2 + M^2)}{4}$$

$$= \left(\frac{(K + M)}{2} \right)^2 + \left(\frac{(K - M)}{2} \right)^2$$

Por ejemplo :

$$\frac{20}{2} = \left[\frac{(2 + 4)}{2} \right]^2 + \left[\frac{(2 - 4)}{2} \right]^2$$

IV. Consideremos el par arbitrario 2K + 1 y comprobemos si su cuadrado menos el supuesto residuo 1 es divisible entre 8.

$$(2K + 1)^2 - 1 = 4K^2 + 2 \cdot 2K + 1 - 1$$

$$= 4K^2 + 4K = 4K(K + 1)$$

En efecto, si K es par el primer factor 4K será divisible entre 8 y si K es impar K + 1 será par, por los tanto será divisible entre 2 y el factor 4 hace que 4(K + 1) sea divisible entre 8. Lo anterior significa que $(2K + 1)^2$ es representable como un número divisible entre 8 con residuo 1, es decir :

$$(2K + 1)^2 = 8K + 1$$

V. Si un número N es representable como suma de cuadrados, entonces

$$N = K^2 + M^2$$

En la proposición se afirma que

$$N^2 = \left[K^2 + M^2 \right]^2 = K^4 + 2K^2M^2 + M^4$$

$$= K^4 - 2K^2M^2 + M^4 + 4K^2M^2$$

por lo tanto

$$N^2 = \left[K^2 - M^2 \right]^2 + (2KM)^2 \qquad \square$$

VI.

$$mn = (A^2 + B^2)(C^2 + D^2)$$

$$= A^2C^2 + A^2D^2 + B^2C^2 + B^2D^2$$

$$= A^2C^2 + 2ACBD + B^2D^2 + A^2D^2 - 2ACBD + B^2C^2$$

$$= (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2 \qquad \square$$

Obsérvese que pueden tomarse los signos al revés y por tanto hay dos tales representaciones.

VII. El cuadrado de un número par es divisible entre 4, en efecto

$$(2K)^2 = 4K^2$$

pero nuestro problema habla de la suma de cuadrados de números impares, es decir :

$$(2K + 1)^2 + (2M + 1)^2 = 4K^2 + 4K + 1 + 4M^2 + 4M + 1$$

$$= 4K(K + 1) + 4M(M + 1) + 2$$

que como directamente se vé solo son divisibles entre 4 los dos primeros sumandos, pero el tercer sumando, o sea el 2 no es divisible entre 4, luego la suma de los cuadrados de dos impares cualesquiera no pueden expresarse como un cuadrado perfecto, pues de poderse realizar ésto debería ser un número divisible entre 4. □

VIII. En el número $1\cdot2\cdot3\cdots100$ el número de ceros viene de los factores de 10 que contenga, pero dichos factores son 10 (10, 20, 30, ..., 100). Por otro lado el número de 2 es más grande que el de 5 en el producto en cuestión. Por lo tanto el número de factores de 10 estará determinado por el número de factores de 5. Pero los factores de 5 también generan números como 25, 50, 75 y 100 que contienen dos factores de 5. Luego tendremos $20 + 4 = 24$ ceros en el número $1\cdot2\cdot3\cdots100$.

Otra variante : contar cuántos naturales hay entre los primeros

100 que sean divisibles entre 5 y 25. Entre 5 son 20 números y entre 25 son 4 por lo tanto en total hay 24 ceros.

IX. Supongamos que el siguiente viaje lo inicia el mismo día que llega del viaje anterior. Al hacer la división de 17 entre 7 nos dá que la duración del viaje es de dos semanas y 3 días, por lo tanto el segundo viaje lo iniciará en domingo.

Para iniciar el 15o. viaje necesita haber hecho yá 14 viajes y su duración es de 14(17) = 238. Al hacer la división de 238 entre 7 nos dá como residuo cero, por lo tanto el 15o. viaje lo inicia en jueves.

La duración de 72 viajes es de 72(17) = 1224 pero al hacer la división entre 7 nos dá como residuo 6, por lo tanto el 73o. viaje lo empezará en miércoles.

X. Si al número buscado de manzanas x le restamos 1 (la manzana que queda como residuo al dividir entre 3, 4, 5 y 6), tendremos que x-1 es ahora divisible sin residuo entre 3, 4, 5 y 6 por lo tanto es también divisible entre su mcm, o sea entre mcm(3,4,5,6) = $3 \cdot 2^2 \cdot 5$ = 60. Luego, el número x-1 puede ser 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480 (ya que el número de manzanas no sobrepasa a 500, por hipótesis), consecuentemente el número de manzanas x podrá ser 61, 121, 181, 241, 301, 361, 421, 481. Ahora tenemos que escoger entre éstos números aquel que sea divisible entre 7 (sin residuo), y precisamente será el 301.

XI. Sea x el número buscado, entonces

$(x+6)|7$, o sea $(x-1)+(6+1)|7$, es decir $(x-1)|7$

$(x+7)|8$, o sea $(x-1)+(7+1)|8$, es decir $(x-1)|8$

$(x+8)|9$, o sea $(x-1)+(6+1)|9$, es decir $(x-1)|9$

Pero sí $(x-1)$ es divisible por 7, 8 y 9 entonces $(x-1)$ es divisible entre su mínimo común múltiplo, ésto es

$(x-1)|7\cdot 8\cdot 9 = 504$

luego entonces $x = 504\cdot k + 1$

Por lo tanto, nuestro número será algún múltiplo de 504 más 1, o sea puede ser 504 + 1, 1008 + 1,... pero recordando que por hipótesis x es de 3 dígitos, entonces solo puede ser el 505. En efecto, el número pensado es el 505 pues sumado con 6, 7 y 8 dá los números 511, 512 y 513 que son respectivamente divisibles entre 7, 8 y 9.

XII. Si x es el número buscado, consideremos a $x + 1$

Por hipótesis del problema tenemos que :

$x=2k_1+1 \Longrightarrow x+1=2k_1+2 \Longrightarrow x+1=2(k_1+1) \Longrightarrow (x+1)|2$

$x=3k_2+2 \Longrightarrow x+1=3k_2+3 \Longrightarrow x+1=3(k_2+1) \Longrightarrow (x+1)|3$

$$x=4k_3+3 \Longrightarrow x+1=4k_3+4 \Longrightarrow x+1=4(k_3+1) \Longrightarrow (x+1)|4$$

$$x=5k_4+4 \Longrightarrow x+1=5k_4+5 \Longrightarrow x+1=5(k_4+1) \Longrightarrow (x+1)|5$$

$$x=6k_5+5 \Longrightarrow x+1=6k_5+6 \Longrightarrow x+1=6(k_5+1) \Longrightarrow (x+1)|6$$

Luego $x + 1$ será divisible entre el $mcm(2,3,4,5,6) = 60$ o sea $(x + 1)|60$, es decir $x + 1 = k60$

Por lo que $x = k60 - 1$, como deseamos el x más pequeño que satisfaga las condiciones supuestas, empezaremos a verificar, para $k = 1$, cual es el número buscado :

$$x = 1\cdot 60 - 1 = 59$$

pero 59 no es divisible entre 7, que es la última condición del problema. Probemos con $k = 2$:

$$x = 2\cdot 60 - 1 = 119$$

y 119 si es divisible entre 7, luego entonces el x buscado es 119.

XIII. Si el número de 3 dígitos es x , las condiciones del problema establecen que :

$x = 13k_1 + 11$

$x = 11k_2 + 9$

$x = 7k_3 + 9$

Por lo tanto para hacerlo divisible entre 13, 11 y 7 agreguemosles 2, o sea analicemos a $x + 2$. En efecto :

$x+2 = 13k_1 + 13 \implies x+2 = 13(k_1 + 1) \implies (x+2)|13$

$x+2 = 11k_2 + 11 \implies x+2 = 11(k_2 + 1) \implies (x+2)|11$

$x+2 = 7k_3 + 7 \implies x+2 = 7(k_3 + 1) \implies (x+2)|7$

Pero ésto quiere decir que $x + 2$ es divisible por el mínimo común múltiplo de 13, 11 y 7, es decir

$(x+2)|13 \cdot 11 \cdot 7 = 1001$

luego entonces $x = 1001k - 2$

De lo cual para que x sea de 3 dígitos k debe valer 1 y x por lo tanto vale 999.

XIV. El número tiene la forma 523??? (donde el signo de interrogación representa los dígitos incognita). Por hipótesis tenemos que :

523???|7

523???|8 $\Longrightarrow$ 523???|mcm(7,8,9)

523???|9

pero esto quiere decir que 523???|7·8·9

por lo tanto 523???|504

Si por ejemplo suponemos que el número es 523000, al dividirlo entre 504 nos dá un residuo de 352, luego entonces puedo agregarle 504 - 352 = 152, o bien 2(504) - 352 = 1008 - 352 = 656 para que sean exactamente divisibles entre 504. Así pues, obtenemos los dos números buscados que serán : 523152 y 523656 que en efecto son divisibles entre 7, 8 y 9.

XV. Por hipótesis, si x es el máximo número de 4 dígitos buscado, se cumple que x es divisible entre 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 con residuo 1, luego entonces :

$x = 2k_1 + 1 \qquad x - 1 = 2k_1$

$x = 3k_2 + 1 \qquad x - 1 = 3k_2$

$\cdots \implies \qquad \cdots \implies (x-1)|2,3,\ldots,9$

$x = 9k_8 + 1 \qquad x - 1 = 9k_8$

por lo tanto $(x-1)|mcm(2,3,\ldots,9)$ luego entonces

$(x-1)|mcm(2,3,2^2,5,2\cdot3,7,2^3,3^2)$ entonces

$(x-1)|2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7 \implies (x-1)|2520$

Pero ésto quiere decir que $x - 1 = 2520k$, por lo tanto $x = 2520k + 1$. Probando para diferentes k obtenemos que :

si $k = 1$; $x = 2521$

si $k = 2$; $x = 5041$

si $k = 3$; $x = 7561$

si $k = 4$; $x = 10081$

para éste caso, x yá es de 5 dígitos, por lo tanto el máximo número de 4 cifras es $x = 7561$, que es el número buscado.

4.7.3 APENDICE 4.3

EL NUMERO ENTERO

Aparece producido por el movimiento, la variación en dos sentidos opuestos, como v.gr., ganar y perder en el comercio, subir y bajar pisos en un elevador de una mina, la variación de la temperatura, los movimientos de capital que se dan en cada país (deber y haber), etc.

Vamos a representar ésta situación mediante un par de elementos que expresen los dos sentidos del cambio, donde una vez adjudicado un sentido a uno de ellos, el otro expresará el sentido opuesto, así, un número entero lo podemos representar como un par de numeros naturales, tales como : (10,5), (20,0), (0,3), (15,27), ... donde cada uno expresa el movimiento en un sentido, es decir donde (10,5) significa 10 - 5, etc.

Analicemos las ecuaciones de la forma : $m + x = n$ donde $m,n \in N$. Como ya vimos esta ecuación no siempre tiene solución en N aunque cuando la tiene entonces es única, por eso se dice que la resta es una "operación parcialmente definida" en N. Así pues $a - b$ no siempre está definida en N, pero cuando sí lo está, entonces dos diferencias, digamos

$a - b = c - d$ son iguales si y solo si $a + d = c + b$ (por ejemplo $8 - 3 = 6 - 1$ equivale a $8 + 1 = 6 + 3$) por esto resulta bastante natural la forma de introducir los números enteros como pares ordenados de naturales (a,b) que reemplaza a la diferencia a - b y llamar, por lo anterior, <u>equivalentes</u>($\equiv$) a dos pares ordenados

$$(a,b) \equiv (c,d) \text{ si y solo si } a + d = c + b$$

Similarmente cuando en N están definidas las diferencias a - b y c - d podemos escribir :

$$(a-b) + (c-d) = (a+c) - (b+d) \quad \text{y}$$

$$(a-b)(c-d) = (ac+bd) - (ad+bc)$$

y procede entonces definir la suma y el producto de parejas ordenadas como :

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d) \quad \text{y}$$

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac+bd,\ ad+bc)$$

así con éstas operaciones introducidas se logra ampliar N al nuevo conjunto de los números enteros. Este nuevo conjunto se caracteriza porque su definición de suma y multiplicación coinciden con las introducidas en N cuando a los enteros que se les aplican son naturales, además todas sus leyes formales siguen siendo validas y queda siempre definida la resta mediante la ecuación $m + x = n$.

4.7.4 APENDICE 4.4

Las propiedades básicas de la multiplicación de enteros no spermiten formular varias regals para ésta operación. El producto de dos enteros positivos y el producto de un entero positivo y el cero es el mismo como se definió para los naturales. La propiedad de la multiplicación por cero implica que el producto de un entero negativo y el cero es cero. Las reglas para los otros dos tipos de productos necesitan ser formuladas :

i. El producto de un entero positivo y un entero negativo y

ii. El producto de dos enteros negativos.

Primero consideremos los siguientes teoremas :

Teorema 1. Para cada entero n

$$(-1)n = -n$$

Teorema 2. Si $m,n \in Z$, entonces

$$(-m)n = -(mn)$$

Teorema 3. Si $m,n \in Z$, entonces

$$(-m)(-n) = mn$$

Esto significa que con ésto completamos las reglas para multiplicar cualquier par de números enteros. Las demostraciones no se realizan pues no es el objetivo de éste trabajo.

CAPITULO 5

SISTEMA DE LOS NUMEROS RACIONALES, GEOMETRIA

5.1 NOCION DE NUMERO RACIONAL

Como vimos en el capítulo anterior, al definir la división entre números enteros encontramos que para ciertos casos ésta operación no está definida, es decir la división era una operación parcialmente definida en Z, por lo tanto extenderemos nuestro concepto de número de tal forma que la división siempre esté definida, así como las operaciones de suma, multiplicación y resta.

En los capítulos anteriores se estableció una correspondencia uno-a-uno entre los elementos del sistema de números naturales y los puntos situados en una línea recta, así mismo se hizo con los números enteros, es decir, pudimos graficarlos. La pregunta que ahora nos hacemos es, ¿ podremos graficar éste nuevo sistema de números ?

Motivados por la definición de la división de enteros, estudiaremos la ecuación que se genera en su forma general de tal forma que podamos deducir todas sus soluciones.

Dijimos que $m/n = x$ sí y solo sí $m = nx$ con $m,n \in Z$ y $n \neq 0$, entonces a ésta nueva entidad x diremos que es un número y como m/n representa una proporción, una fracción o una razón es que a x se le llama racional, no creas que por inteligente ! Ahora lo que debemos probar es que ésta entidad así definida cumple con todas las propiedades de los números enteros; con la división es obvio que siempre la cumplirá, que podamos graficarlos lo veremos más adelante, pero como siempre un número entero lo vamos a poder representar como un número racional entonces todas las propiedades para números enteros se cumplirán.

Con lo discutido anteriormente daremos la siguiente :

Definición provisional : El sistema de los números racionales, denotado por Q está formado por todas las soluciones de las ecuaciones de la forma

$$nx = m \quad \text{donde } m,n \in Z \quad \text{con } n \neq 0.$$

Esta solución x es única y es igual al número racional m/n.

5.2 CONCEPTO DE FIGURA.

Desde la prehistoria, el hombre observa a la naturaleza buscando todo aquello que le permita transformarla. Y es así como identifica y selecciona aquellos objetos que le permitan cavar la tierra, que le sirvan como recipientes, como armas para poder alimentarse y defenderse de sus enemigos, etc. Es así como ésta práctica de selección cotidiana de objetos vá formando una imágen en el hombre sobre la forma de éstos, desarrollando así, el concepto de figuras geométricas.

5.3 MAGNITUDES GEOMETRICAS.

En la época del desarrollo de la sociedad egipcia, ya se encuentra establecida la propiedad privada y existe yá la parcelación de la tierra. Surgen así, algunos problemas en el desarrollo de la agricultura tales como :

i. Al desbordarse el río Nilo destruye las marcas que delimitan las parcelas, por lo tanto es necesario reconstruirlas conservando las magnitudes anteriores.

ii. Es necesario conocer de manera cabal, las épocas del año para empezar a sembrar y para poder cosechar a tiempo.

iii. Es necesario almacenar la cosecha de tal forma que alcance para todo el año.

Todos éstos problemas llevaron a los egipcios a preguntarse lo siguiente : ¿ como medir las parcelas ?, ¿ con que capacidad hay que construir un almacen ?, ¿ como administrarlo para que alcance para todos ?, ¿ cual es la mejor temporada para cosechar ?, etc. Y lo que hicieron fue elaborar todo un catálogo de reglas prácticas para solventar todos éstos problemas.

5.4 MEDICIONES

Como hemos mencionado anteriormente, los números(naturales y enteros) surgen en forma natural como resultado del proceso de contar. Otra manera de llegar al concepto de número es a través del proceso de medir. Medir una magnitud dada, es comparar o hallar una relación entre dicha magnitud con otra de su misma especie elegida arbitrariamente como unidad de medida. Lo explicaremos mediante algunos ejemplos :

5.4.1 Medición De Segmentos.

Se desea medir el segmento AB, tomemos como unidad de medida la longitud del segmento U.

```
U :   |-----|

AB:   |-----|-----|-----|-----|-----|
      A     C     D     E     F     B
```

Marcamos sobre el segmento AB los segmento AC, CD, DE, EF y FB cada uno de los cuales tiene la longitud unitaria U. Si la unidad de medida U cabe en AB un número exacto de veces(n) entonces decimos que AB tiene n unidades U de longitud.

Si la unidad U no cabe un número entero de veces en el segmento a medir GH, entonces se marca tantas veces la unidad U como sea posible(en el ejemplo 5) y se dice que la longitud del segmento GH es mayor que n unidades U y menor que (n+1) unidades U.(en el ejemplo mayor que 5 y menor que 6 unidades).

```
U :     |-----|

GH:     |-----|-----|-----|-----|-----|---|
        G                                 H
```

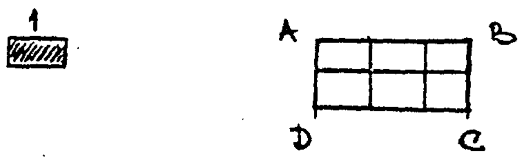
5.4.2 Medición De Pesos.

Mediante pesadas en una balanza comparamos el peso de un cuerpo P con el peso unitario de otro cuerpo P_K(pesa) tomado como unidad de medida. Como resultado de la medición tendremos que el peso del cuerpo P estará comprendido entre n y (n + 1) unidades P_K de peso.

5.4.3 Medición De Areas.

Tomemos como unidad de medición de superficies al cuadrado de lado unitario 1, entonces el área de este cuadrado será 1 también.

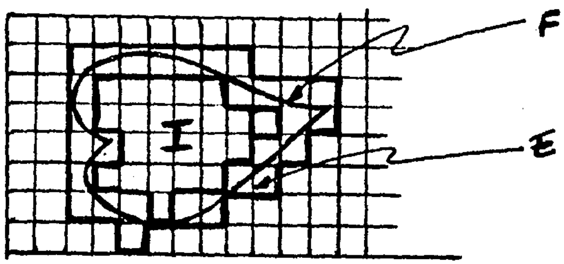
Si deseamos medir por ejemplo el área del rectángulo ABCD teniendose que las longitudes de los lados son números enteros n y m (respecto de la unidad de longitud elegida), entonces el cuadrado unitario elegido como unidad cabe mn veces y el área de la figura es $\underline{mn}$ unidades cuadradas(en el ejemplo $n = 2$ y $m = 3$).



Análogamente, se pueden medir figuras más complicadas pero siempre formadas con cuadrados unitarios.

Si la figura a medir no contiene un número entero de veces al cuadrado unitario, entonces la medición puede efectuarse de la siguiente manera: Dividimos el plano donde se encuentra la figura a medir mediante rectas paralelas tanto verticales como horizontales con distancia entre cualesquiera 2 de ellas igual a la longitud unitaria.

Es así que el plano nos queda dividido en cuadrados de área unitaria(¡ nuestra unidad de medida para superficies !).



Medición de areas.

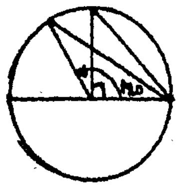
Denotemos por F la figura cuya área queremos medir, I la figura formada por cuadrados de área unitaria totalmente contenida en F y finalmente por E la figura formada por cuadrados que tengan con F al menos un punto en común. La figura interior I y exterior E estan formadas por cuadrados unitarios, luego sus áreas quedan expresadas mediante números enteros, digamos m y n. Entonces se dice que el área de la figura F es mayor que m y menor que n. La principal distinción entre éste caso y los otros tipos de medición mencionados, consiste en que aquí la diferencia entre m y n puede ser mayor que 1, ésto es, mayor que nuestra unidad de medida (¡ construir un ejemplo donde ésto ocurra !).

Podemos señalar a los siguientes como los rasgos característicos del proceso de <u>medir</u> :

1. Los objetos a medir deben poseer cierto <u>atributo</u> de homogeneidad, respecto del cual tales objetos puedan ser comparados(peso, longitud, temperatura, volumen, área, etc.)
2. Uno de los objetos se toma como unidad de medida(patrón).
3. Es necesario un algoritmo que permita comparar el objeto a medir con el patrón unitario repetido varias veces.
4. Como resultado de la medición obtenemos dos números enteros que denotan una " aproximación por exceso y por defecto ", la primera aproximación significa que la correspondiente medición múltiplo de la unidad patrón es mayor que la medición exacta y la segunda que es menor.

   A la diferencia entre los valores de la aproximación por exceso y por defecto se le llama <u>exactitud de la medición</u>.

Uno de los problemas que resuelve la medición de objetos consiste en poder distinguir objetos cuantitativamente, cuando tales objetos cualitativamente son muy parecidos. La posibilidad de tal distinción sustancialmente depende de la exactitud con la que se realice la medición. Por ejemplo, dos cuerdas generadas por arcos subtendidos por ángulos de 90 y 120 grados (véase la figura)



no son evidentemente iguales, pero si tomamos como unidad de medida al radio del círculo, entonces tales cuerdas son indistinguibles en sus longitudes. En efecto, cada cuerda en este caso es mayor que 1(mayor que la longitud del radio) pero menor que 2(longitud del diámetro). Por esto, para alcanzar la longitud deseada en la diferenciación de objetos, es necesario disponer de una amplia colección de unidades de medición. Lo mas cómodo, desde el punto de vista práctico, es elegir las unidades más grandes que sean múltiplos enteros de las mas pequeñas(suficientemente) y los cálculos realizarlos con partes enteras de éstas unidades.

Es importante señalar que para el análisis en Matemáticas son significativas, sobre todo, las magnitudes " infinitamente divisibles ", para las cuales cada unidad de medida pueda dividirse en cualquier número de partes iguales. En geometría se demuestra que tal propiedad la tiene, por ejemplo la longitud de un segmento.

Observese también que, desde el punto de vista material(físico), la propiedad de que una magnitud sea " infinitamente divisible " no siempre es justificable. Una regla, un segmento físico, por ejemplo, no es divisible en pedazos tan pequeños como se quiera, digamos, de dimensiones menores que los átomos. Pero incluso en éstos casos, la idealización matemática consistente en sustituir las magnitudes " atómicas " y " discretas ", por magnitudes que " cambian continuamente ", resulta altamente provechosa, sobre todo en razonamientos e investigaciones teóricas.

5.5 DEFINICION DE NUMERO RACIONAL

Medición de Magnitudes Geométricas

Si se quisiera medir una determinada longitud, bastaba con tomar una unidad de medida con las mismas propiedades de lo que se va a medir. Entonces, vemos cuántas veces cabe en lo que queremos medir y ése es nuestro resultado. Ahora, ¿ qué pasa si la unidad elegida no cabe un número exacto de veces en lo que se está midiendo ?, entonces, se procede a fragmentar la unidad elegida en cierto número de partes; sin embargo, ¿ qué tanto podemos fraccionar la unidad sin que pierda su sentido original ?

Así pues, es en el proceso de medición de ciertas magnitudes donde aparecen los números racionales. En un primer nivel la unidad se fragmenta, se divide en cierto número de partes que no necesariamente son diez. Sin embargo, en Grecia los números racionales son considerados como proporciones entre magnitudes y nó como números. Como muestra de ello tenemos la teoría de los cocientes entre magnitudes, fundada por Eudoxio y recogida por Euclides.

Esta "limitación", en cuanto a la concepción sobre los racionales, nó como números sino como expresión de la relación entre ciertas magnitudes y la carencia de un sistema de numeración adecuado, fué la causa de que en Grecia la Aritmética no se desarrollara tanto como la Geometría.

Como conclusión podemos decir que todas las mediciones se basan en hallar la relación(razón), entre la magnitud dada y otra de su misma especie elegida arbitrariamente como unidad de medida. Dicha relación o razón constituye la medida dada, la cual es un número abstracto. Por ejemplo, el largo de un salón se medirá eligiendo una unidad de longitud específica(yarda, metro, cuarta, vara, etc.) y determinando la razón o relación entre el largo buscado y dicha unidad. Así decimos que el salón mide 30 metros; treinta es la medida y el metro la unidad de longitud tomada. Equivale a decir que la razón o relación entre el largo del salón y el metro, es 30 (número abstracto).

5.6 RELACIONES Y OPERACIONES

A continuación derivaremos algunas propiedades de los números racionales, utilizando su definición y las propiedades de los números enteros.

5.6.1 Igualdad De Números Racionales.

Al símbolo m/n le llamaremos fracción común, las fracciones m/n y mk/nk ; $k = 1,2,3,...$ son obtenidas como formas distintas de medir una misma magnitud. En la primera fracción la unidad original de medición se dividió en n partes, mientras que en la segunda fracción se hizo en nk partes iguales.

Otra forma de verlo es utilizando el siguiente enfoque, si $x = m/n$ es la solución de la ecuación $nx = m$ entonces $w = mk/nk$; $k = 1,2,3,...$ también es solución de la misma ecuación. Cuando ésto sucede decimos que : dos números racionales son iguales sí y solo sí son soluciones de ecuaciones equivalentes de la forma $nx = m$ donde $m,n \in Z$ y $n \neq 0$, x y w son llamadas fracciones equivalentes.

Consideremos las siguientes ecuaciones equivalentes :

$$nx = m$$
$$pw = k$$

donde $m,n,k,p \in Z$ con n y $p \neq 0$.

Las soluciones de éstas ecuaciones son los números racionales m/n y k/p, entonces $m/n = k/p$. Como el sistema de números racionales es una extensión de los números enteros, queremos que la definición de igualdad de números racionales sea válida si las soluciones son enteras. Consideremos a x y w como números enteros, y determinemos la relación entre los enteros m,n,k y p, como

$$nx = m$$

$$\Longleftrightarrow \quad pnx = pm$$

$$\Longleftrightarrow \quad npx = mp$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = mp/np$$

y

$$pw = k$$

$$\Longleftrightarrow \quad npw = nk$$

$$\Longleftrightarrow \quad w = nk/np$$

Como $x = w$, entonces

$$mp/np = nk/np \quad \Longrightarrow \quad mp = nk$$

De lo comentado anteriormente, daremos la siguiente definición : Los números racionales m/n y k/p son iguales, denotado como m/n = k/p sí y solo sí mp = nk.

Regresemos al enfoque de que m/n y k/p expresan el resultado de medir de maneras distintas una misma magnitud. En efecto, elijamos como nueva unidad de medición la 1/np parte de la unidad original.

La magintud a medir contiene mp veces la nueva unidad, medida con la fracción m/n y nk veces medida con la fracción k/p, pero recordando que por hipótesis mp = nk, entonces las magnitudes medidas con las fracciones m/n y k/p son iguales.

Inversamente, si las fracciones m/n y k/p miden una misma magnitud, entonces introduciendo la nueva unidad común igual a 1/np parte de la unidad original tendremos que mp = nk.

Por ejemplo, deseamos medir la magnitud AB.

```
                1/2

AB:   |-----|-----|-----|-----|
      A    1/8   2/8   3/8    B

                2/4
```

m/n = 1/2 y k/p = 2/4

La magnitud AB contine mp veces(4) la nueva unidad 1/8 medida con 1/2 y nk veces(4) la nueva unidad 1/8 medida con 2/4.

Por lo tanto todas las fracciones equivalentes entre sí denotan de maneras distintas a un mismo número. Para que las fracciones podamos considerarlas como números es necesario definirles sus operaciones aritméticas básicas para poder hacer buen uso de ellos, poder compararlos y saber particularmente cuando dos fracciones expresan el resultado de medir una misma magnitud, es decir cuando se pueden considerar equivalentes.

Una vez dadas las definiciones mínimas indispensables y obtengamos las propiedades características de éstos números podremos olvidarnos de su orígen y considerar éstas propiedades como axiomas.

5.6.2 Multiplicación De Números Racionales.

De la misma forma en que se motivó la definición de igualdad, utilizando la definición de números racionales como la solución de una ecuación, podemos motivar una definición del producto de dos números racionales.

Consideremos las siguientes ecuaciones : $2x = 6$; $3w = 15$

Cuyas soluciones son 3 y 5 respectivamente. Como x y w son enteros, y por las propiedades de Z tenemos que :

$$(2x)(3w) = 6(15)$$
$$6xw = 90$$

La solución xw de ésta ecuación es el número racional 90/6, ésto es, 15. Nótese que :

$$2x = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3$$
$$3w = 15 \quad \Longleftrightarrow \quad w = 5$$

$$6xw = 90 \quad \Longleftrightarrow \quad xw = 15$$

En general, si las ecuaciones

$$nx = m \quad y \quad pw = k$$

tienen soluciones x y w enteras respectivamente, entonces el producto xw es la solución de la ecuación :

$$np(xw) = mk$$

Como $\quad x = m/n \; ; \; w = k/p \;$ y $\; xw = mk/np$

entonces $\quad (m/n)(k/p) = mk/np$

Como los números racionales m/n y k/p están definidos por las ecuaciones

$$nx = m \; y \; pw = k$$

el producto de dos números racionales será consistente con lo anteriormente expuesto y por lo tanto daremos la siguiente :

Definición : Sean m/n , k/p dos números racionales cualesquiera, entonces su producto $(m/n)(k/p)$ está definido como mk/np, es decir :

$$(m/n)(k/p) = mk/np$$

Multiplicación de números racionales en forma gráfica.

Hallar el producto de $3\div4$ y $1\div2$ es lo mismo que decir cuánto es $3\div4$ de $1\div2$.

Un entero se divide en dos partes iguales y se toma una de ellas ($1\div2$), 1+2

```
!----!----!
!||||!    !
!----!----!
!||||!    !
!----!----!
!||||!    !
!----!----!
!||||!    !
!----!----!
```

Esta parte se divide en 4 partes iguales y tomamos 3 partes (3+4) de ellas, éste último es el resultado que es igual a 3+8, es decir , 3+4 de 1+2 es 3+8.

3+4 de 1+2

```
!----!----!
!||||!||||!
!----!----!
!||||!||||!
!----!----!
!||||!||||!
!----!----!
!||||!||||!
!----!----!
```

El resultado de 3+4 por 1+2 es :

3+8

```
!----!----!
!||||!    !
!----!----!
!||||!    !
!----!----!
!||||!    !
!----!----!
!    !    !
!----!----!
```

Hallar el producto de 3+5 y 4+7.

Un entero se divide en 7 partes iguales y se toman 4 partes de ellas (4÷7), éstas partes son fraccionadas en 5 partes iguales de las cuales tomamos 3 (3÷5), éste es el resultado, (3÷5)(4÷7) = 12÷35.

(3÷5)(4÷7)

```
|----|----|----|----|----|----|----|
|||||||||||||||||||||    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
|||||||||||||||||||||    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
|||||||||||||||||||||    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
```

5.6.3 División De Números Racionales.

Igual como se definió ésta operación en los números enteros, la definiremos aquí, es decir en el sistema de los números racionales la división está definida como la operación inversa de la multiplicación.

Diremos que :

$(m/n)/(k/p) = x$ sí y solo sí $(k/p)x = m/n$, con $k/p \neq 0$.

Por ejemplo, haremos la división de algunos números racionales utilizando ésta definición.

Como $(3\div7)(2\div5) = 6\div35$ entonces $(6\div35)/(2\div5) = 3\div7$

y también se tiene que $(6\div35)/(3\div7) = 2\div5$

También, $(13\div3)/(1\div2) = 26/3$ pues $(26\div3)(1\div2) = 13\div3$

En general, la ecuación $(k/p)x = m/n$ donde $k,p,m,n \in Z$ siempre tiene una solución única y es igual al cociente de los números racionales m/n y k/p, es decir, $x = (m/n)/(k/p)$ con $k/p \neq 0$; ésta solución siempre existe en los números racionales.

Demostración :

Sean v y w dos soluciones distintas de la ecuación :

$$(k/p)x = m/n, \text{ entonces}$$

$$(k/p)v = m/n \text{ y } (k/p)w = m/n$$

Por la propiedad transitiva y simétrica de la igualdad de los numeros racionales, se tiene que

$$(k/p)v = (k/p)w$$

Por la propiedad de la cancelación de la multiplicación de los números racionales tenemos que

$$v = w$$

Por lo tanto dos soluciones distintas de la ecuación son iguales, es decir, la solución, si es que existe, es única.

Nótese que como k/p es diferente de cero entonces su inverso multiplicativo p/k existe en Q y también es diferente de cero, o sea que si $k/p \neq 0$ entonces $p/k \neq 0$. Por lo tanto

$$(p/k)[(k/p)x] = (p/k)(m/n)$$
$$(p/k)(k/p)x = (p/k)(m/n)$$
$$x = (p/k)(m/n) = (m/n)(p/k)$$

Como el producto de dos números racionales es un número racional, entonces la solución x siempre existe en Q.

Todo lo que hicimos anteriormente se puede resumir en el siguiente :
Teorema : Sean m/n, $k/p \varepsilon Q$, donde $k/p \neq 0$. La solución de la ecuación $(k/p)x = m/n$ existe en Q, es única y es igual a :

$$x = (m/n)/(k/p)$$

Como una consecuencia directa de éste teorema y de la definición de división, como la operación inversa de la multiplicación, se tiene que :

Si m/n, $k/p \varepsilon Q$, donde $k/p \neq 0$, entonces

$$(m/n)/(k/p) = (m/n)(p/k)$$

Esto quiere decir que para encontrar el cociente o división de dos números racionales m/n y k/p, donde $k/p \neq 0$, es suficiente que multipliquemos m/n por el inverso multiplicativo de k/p. Por lo tanto el sistema de números racionales, diferentes de cero, es cerrado bajo la operación de división.

5.6.4 Suma De Números Racionales.

Como el sistema de los números racionales es una extensión de los números enteros, queremos dar una definición de la suma de números racionales de tal forma que incluya entre sus propiedades las propiedades de la suma definidas en el sistema de los números enteros.

Consideremos las siguientes ecuaciones :

$$2x = 6 \text{ y } 5w = 20$$

cuyas soluciones son $x= 3$ y $w= 4$ respectivamente. Nótese que

$$\begin{array}{llll} & 2x = 6 & & 5w = 20 \\ \Longleftrightarrow & 5(2x) = 5(6) & \Longleftrightarrow & 2(5w) = 2(20) \\ \Longleftrightarrow & 10x = 30 & \Longleftrightarrow & 10w = 40 \end{array}$$

Como x y w son enteros, entonces

$$10x + 10w = 30 + 40$$

$$10(x + w) = 70$$

La solución de ésta ecuación es el número racional 70/10, o sea 7. Escribiendolo de otra forma, vemos que :

$$2x = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3$$

$$5w = 20 \quad \Longleftrightarrow \quad w = 4$$

y

$$10(x + w) = 70 \quad \Longleftrightarrow \quad x + w = 7$$

En general, si se tiene las siguientes ecuaciones

$$nx = m \quad y \quad pw = k$$

donde las soluciones x y w son enteros, entonces se tiene que

$$nx = m \quad \Longleftrightarrow \quad npx = mp \quad y$$

$$pw = k \quad \Longleftrightarrow \quad npw = nk$$

La suma $x + w$ es la solución de la ecuación

$$np(x + w) = mp + nk$$

Como $x = m/n$, $w = k/p$ y $x + w = (mp + nk)/np$ entonces

$$m/n + k/p = (mp + nk)/np$$

Como los números racionales x y w están definidos por las ecuaciones

$$nx = m \quad y \quad pw = k$$

la suma de dos números racionales será consistente con lo anteriormente expuesto y por lo tanto daremos la siguiente :

Definición : Sean m/n, k/p dos números racionales cualesquiera, entonces su suma está definida como :

$$m/n + k/p = (mp + nk)/np$$

la cual es un número racional, por lo tanto decimos que Q es cerrada bajo la operación de suma.

5.6.5 Representación Gráfica De Los Números Racionales.

Son usualmente representados en forma gráfica mediante puntos en una línea recta usando segmentos de recta congruentes o iguales para poder establecer una correspondencia uno-a-uno entre todos los puntos de una línea recta y cada número racional. Tomamos un punto arbitrario de la recta como el origen o inicio al cual le asignamos el cero, a partir del cual, mediante una unidad de medida elegidad anteriormente como escala, se dibuja, como es costumbre, un punto P a la derecha del origen; así decimos que la dirección de P es positiva y si está a la izquierda diremos que su dirección es negativa.

```
                          /------x------\
---------|------------|-------------|-------------->
         Q            0             P
```

P representa un número racional positivo pues se encuentra a la derecha del origen, a una distancia de x unidades.

Por geometría elemental sabemos que todo segmento de recta puede ser subdividido en un número cualquiera de partes iguales. Por lo tanto cualquier longitud racional puede ser construída utilizando éste hecho, ya que, supongamos que la línea recta es subdividida en n partes iguales donde a cada subdivisión le llamaremos intervalo y cada uno es de longitud 1/n. (ver la figura).

```
                                              P
------|-------|----|-----|-----|---------|----|----|---------->
      Q       0   1/n   2/n   3/n       m/n    (m+1)/n
```

Entonces, los extremos de los intervalos son números racionales de la forma m/n y por lo tanto, todo punto P sobre la línea recta, de la forma m/n o bien se encuentra entre dos puntos racionales sucesivos m/n y (m+1)/n. Como cada intervalo mide 1/n unidades entonces podemos encontrar un punto racional m/n cuya distancia desde P no exceda m/n unidades pues 1/n puede hacerse tan pequeño como se quiera tomando a n lo suficientemente grande. Aunque no se afirme que todo punto de la línea recta es un punto racional, se presiente que, al menos se pueden encontrar puntos racionales tan próximos como se quiera a cualquier punto P de la línea recta.

En efecto, si $k > m$ y $m > n$ y si en particular tomamos el punto medio de k y n como m, es decir $m = (k + n)/2$, entonces decimos que al menos existe un número racional que está entre k y n.

5.7 LA GEOMETRIA COMO TEORIA MATEMATICA.

Los griegos al comerciar con Egipto, Babilonia y China entran en contacto con todo el conocimiento desarrollado por las civilizaciones agrícolas y cuando éste conocimiento queda concentrado en sus manos, junto con los problemas que el mismo comercio les planteaba, se dá la posibilidad de obtener nuevos resultados.

De éste modo en Grecia se empieza a sistematizar todo el conocimiento adquirido, destacando ciertos resultados como aquellos a partir de los cuales se pueden desprender los demás. Así es como se establecen lós axiomas, los postulados y los teoremas.

Euclides en el siglo III a.n.e desarrolla sus tratados, con lo cual queda construída la geometría como una teoría formal y rigurosa.

5.8 ESTRUCTURA GENERAL DEL SISTEMA

Toda la experiencia acumulada en incontables generaciones, se trata de organizar, sistematizando todo el conocimiento adquirido, a través de Axiomas a partir de los cuales poder deducir mas propiedades y relaciones no establecidas a éste nivel.

Asi definimos lo siguiente :

Sea Q el conjunto de los Números Racionales, ésto es,

$$Q = \{ \frac{p}{q} \ ; \ p,q \varepsilon Z \ ; \ q \neq 0 \}$$

Propiedades Básicas :

Sean v,w,m,n elementos arbitrarios de Q, lo cual denotaremos así : $v,w,m,n \varepsilon Q$.

5.8.1 Propiedades De Igualdad.

i. $m = m$ para todo elemento m (reflexiva)

ii. Si $m = n \implies n = m$ (simétrica)

iii. Si $m = n$ y $n = w \implies m = w$ (transitiva)

5.8.2 Propiedades De Suma Y Multiplicación.

i. Si $m = n$ y $v = w \implies m + v = n + w$ y $mv = nw$ (bien definida)

ii. $m + v$ y nw son elementos de Q (cerradura)

iii. $m + n = n + m$ y $mn = nm$ (conmutativa)

iv. $(m + n) + v = m + (n + v)$ y

$(mn)v = m(nv)$ (asociativa)

v. Existe un elemento $k \varepsilon Q$ tal que $mk = m$ llamado <u>elemento identidad</u> para la multiplicación o neutro multiplicativo y que definimos como la unidad o uno ($k = 1/1$).

vi. Existe un elemento $q \varepsilon Q$ tal que $m + q = m$ llamado elemento identidad para la suma o neutro aditivo el cual llamaremos cero ($q = 0/1$).

vii. Para cada elemento $m \varepsilon Q$ existe otro $n \varepsilon Q$ tal que $m + n = 0$, ésto es, su suma nos dá el neutro aditivo y se define como $n = - m$, le llamaremos inverso aditivo.

viii. Para cada elemento $m \neq 0$ (diferente de cero) de Q existe otro $w \varepsilon Q$ tal que $mw = k$, ésto es su producto nos dá el neutro multiplicativo y se define como $w = 1/m$ y le llamaremos inverso multiplicativo.

ix. Si $m + n = w + n \implies m = w$ (cancelación para la suma). Si $mn = wn \implies m = w$ con $n \neq 0$ (cancelación para la multiplicación)

x. $m(v + w) = (mv) + (mw)$ (distributiva, propiedad que relaciona las operaciones de suma y multiplicación.)

5.8.3 Propiedades De Orden.

Definición : Decimos que un número racional m es mayor que un numero racional n lo cual denotaremos como $m > n$, si $m - n$ es un número racional positivo, es decir, si $m - n > 0$.

i. Si m es un número racional se cumple una y solamente una de las tres condiciones siguientes (tricotomía) :

a) $m > 0$;

b) $m = 0$;

c) $-m > 0$

ii. Si $m > n \implies m + v > n + v$

iii. Si $m > n$; $v > 0 \implies mv > nv$

iv. Si $m > n$ y $n > v \implies m > v$ (transitiva)

5.8.4 Propiedad De Densidad.

Entre dos números racionales cualesquiera existe un número racional.

5.9 MAGNITUDES INCONMENSURABLES.

Cuando el hombre se plantea medir, no requiere que la medición obtenida tenga una precisión absoluta pues en la práctica basta con una aproximación de la magnitud y esto se consigue con las fracciones de la unidad.

Sin embargo, existen magnitudes que no se pueden expresar mediante una fracción : las magnitudes inconmensurables. Es decir, magnitudes para las cuales no hay ninguna unidad común con otra.

A través del Teorema de Pitágoras se descubrió que en algunos casos no se puede llegar a encontrar una magnitud que quepa un número entero de veces en otra.

Textualmente, una magnitud inconmensurable quiere decir que es una magnitud que no se puede medir, pero en Matemáticas, lo que quiere decir es que no existe una unidad de medida adecuada para poder medir tales magnitudes, lo cual ejemplificaremos con los siguientes problemas:

1. Encontrar la relación entre la diagonal de un cuadrado de lado uno y sus lados.
2. Encontrar la relación entre el diámetro y la longitud de un circulo.
3. Encontrar la relación entre el radio y el area de una circunferencia.
4. Pesar las estrellas, los átomos, los planetas, etc.
5. Medir la rapidez de una piedra cayendo desde lo alto de un edificio.
6. Encontrar la relación entre las sustancias existentes en una reacción química.
7. y muchos más, tales como : interés compuesto, desintegración radioactiva, crecimientos de población, etc.

5.10 CUESTIONARIO

a. En la granja que está cerca de la casa hoy las gallinas no pusieron como de costumbre. De la cola que es costumbre que se forma en la "ventanita" sólo pudieron atender a 3 compradores. El primer comprador se llevó la mitad de los huevos en existencia y un huevo adicionalmente, el segundo compró la mitad de los restantes más uno, el tercero la mitad del nuevo restante más otro huevo y el vendedor se quedó con 10 huevos. ¿ Cuántos huevos tenía para vender hoy la granja ?

b. De una caja llena de naranjas se tomó primeramente la mitad mas media naranja, luego se sacó la mitad de las restantes naranjas más media naranja y finalmente se volvió a tomar la mitad del nuevo resto de naranjas y media naranja más. Al término de la operación quedaron 31 naranjas en la caja. ¿ Cuántas naranjas había al principio en la caja ?

c. ¿ Cómo dividir en partes iguales 7 melones entre 12 comensales?
   i. Si sólo un melón es permitido dividirlo en más de dos partes.
   ii. Si ninguno de los melones se permite dividir en más de cuatro partes.

d. Para estimar las perdidas por almacenaje en las bodegas de la central de abastos en cuanto se refiere a las miles de toneladas que se concentran anualmente de pepino, se realiza el siguiente experimento. Se toma una muestra de 100 kg. (un quintal métrico) de pepinos recien llegados y se determina su humedad (cantidad contenida de agua) siendo de 99%. A los 90 días, evidentemente se han secado algo, se les vuelve a determinar su humedad, resultando que es el 98%. Entonces, ¿ cuál será el peso de los pepinos a los 50 días de ser almacenados ?

e. En las últimas olimpiadas compitieron en los 50 km. dos marchistas mexicanos, uno grandote y el otro chaparrito. Iniciaron la carrera simultáneamente, pero el paso del chaparrito era 20% menor que el del grandote, sin embargo él avanzaba en un mismo lapso 20% más pasos que el grandote. ¿ Quién ganó la carrera ?

f. En las minas de carbón de Chihuahua se sabe que el carbón recién extraido de las mismas, contiene el 2% de agua. A los dos días de haber estado al aire libre contiene 12% de agua. ¿ En cuántos kilogramos aumentó, en éstos dos días, el peso de 100 kg. de carbón extraído de las minas ?

g. El agua convertida en hielo aumenta su volumen en 9%. ¿ En qué tanto por ciento disminuye el volumen de un pedazo de hielo cuando se derrite ?

h. La primera edición de un libro de matemáticas data desde 1958. Para 1979 (su décima octava edición) el libro valía 120% más que su valor en 1958. En 1985 la décima octava edición (la de 1979) se vendió rebajada en un 20%. ¿ Cuándo costó menos el libro, en 1958 o en 1985 ?

i. El profesionista de una financiera don Félix Pobre Quintero hace una proposición a la empresa para que se economice en tiempo de máquina el 30%. Pero el muy callado y discreto, aunque muy eficiente, Mi Nabo Sumisito (de origen japonés) hace también una proposición para economizar el 70% de tiempo de máquina de la gran computadora "IF-YOU-WANT" de la compañia. Bajo la hipótesis de que la aplicación de una de las proposiciones no influye en el efecto de aplicación de la otra aparece en escena el director de la financiera Don Victor Ladrón de Huevara quién propone : "Introduzcamos ambas proposiciones" ¿ Quién resulta más abusado ?, en otras palabras tomando la proposición del director de la empresa ¿ qué porcentaje se economiza ?

j. En un autobús "Villa Coapa - CU" resulta que casualmente viajan 80% de personas con pelo negro y 70% hombres. Puede afirmarse, entonces que en el autobús la mayoría de los pasajeros son hombres de pelo negro.

k. Los lugareños del parque nacional quieren formar una cooperativa que entre otras cosas levante la cosecha de hongo comestible (sobre todo el blanco) que crece en sus bosques. Para empezar se proponen tener para el proximo otoño 100 kg. de hongo deshidratado (seco) que se piensa vender para preparar sopa. Pero les surge una duda ¿cuántos kilogramos de hongo fresco hay que juntar para lograr la cantidad propuesta ? Para resolver el problema se sabe experimentalmente que el hongo fresco contiene el 95% de agua y el seco 10%

CAPITULO 6

SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES, ANALISIS

6.1 SU CONCEPTO Y SU DESARROLLO.

Los números racionales, aunque densos, no bastan como base teórica de medición por medio de números. Pues, utilizando el teorema de Pitágoras, los griegos ya en los siglos V o VI a.n.e. descubrieron que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a 2, lo cual creyeron que era un "defecto" de la creación divina, y como sus matemáticas estaban fundamentadas totalmente en conceptos geométricos, entonces el sistema de los números racionales no era suficiente para la geometría, por lo cual es necesario "inventar" nuevos números como medidas de cantidades no-medibles o inconmensurables, ¡ aunque parezca contradictorio !, que nos permita poderlos manipular, que sean un instrumento coherente y completo para cualquier medición, de tal forma que cumplan con todas las propiedades del sistema de los números racionales.

Esto trae como consecuencia que en la línea recta, donde graficamos los números racionales exista una infinidad de puntos que no corresponden a ningún número racional. Fué hasta el año de 1872 cuando el matemático alemán Richard Dedekind (1831-1916) demostró que su sistema de números tiene la propiedad de que todo punto sobre la recta puede asociarse con uno y solo un elemento de este sistema, llamado sistema de los números reales.

6.2 ANTECEDENTES.

Durante los 12 años de estudio en primaria, secundaria y bachillerato se estudian los números. Usualmente en el orden siguiente : naturales, racionales positivos, negativos (enteros y racionales) e implícita o explícitamente se llegan a tratar números irracionales como $\sqrt{2}$ y π. Incluso se llega a mencionar que la unión de los conjuntos de números racionales Q y de los números irracionales I forman el conjunto de los números reales R. A su vez lo más frecuente es denotar a los conjuntos de números naturales y enteros a través de N y Z respectivamente.

Es usual también que en forma implícita el estudiante con frecuencia haya trabajado con números reales al enfrentarse, en temas de diferentes tipos de Geometría, a la noción de distancia entre dos puntos.

La conveniencia de tener una notación unificada lleva a la notación decimal y así aparecen las fracciones decimales finitas e infinitas como :

$\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{2}{5} = 0.4$, $\frac{2}{3} = 0.666... = 0.\hat{6}$ (periodo 6)

$\sqrt{2} = 1.41421356...$, $\pi = 3.1415926535...$, $Ln3 = 1.0986129$

pudiendose, incluso las fracciones decimales finitas, escribir como infinitas completando con infinitos ceros a la derecha. En fin la notación general para un número real r es la siguiente :

$r = a_0.a_1a_2a_3...a_n...$

donde a_0 es la parte entera de r, denotada por $[r]$ y cada a_K es un dígito, o sea que el número :

$0.a_1a_2a_3...a_n...$

es la parte fraccionaria del real r, la cual se denota por $\{r\}$.

Recuérdese que todas éstas representaciones numéricas se fueron formando en un proceso lento y acumulativo con gran influencia de la vida práctica diaria y así surgen y se van usando para contar y medir.

Como sabemos, para contar basta con el conjunto de los enteros no negativos, ésto es con :

$Z_0 = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots \}$

El asunto cambia cuando queremos medir, distancias, áreas ó volumenes pues son magnitudes del tipo 315.8 km, 18.45 m^2, 7.825 u^3. Todas las mediciones empíricas son aproximadas y por ello nos basta con los números racionales o decimales finitos; por ejemplo la diagonal de un cuadrado de 1 m. de lado es aproximadamente igual a 1.41 m (con un error que no sobrepasa a 1 cm.) o bién 1.414 m (si el error admitido es de 1 mm.)

Pero la matemática tiene la carcterística (virtud o deficiencia) de abstraer el peculiar caracter aproximado que tienen las mediciones practicas. En particular en geometría se demuestra que la relación entre la longitud de la diagonal de un cuadrado y la longitud de su lado es precisamente un número cuyo cuadrado es 2 (es decir $\sqrt{2}$). Pero sabemos que un tal número cuyo cuadrado es 2 no puede ser racional, por lo cual se le bautizó como no representable por un número racional, o como es usual decir, como un número irracional. Estos, los números irracionales también son representables como decimales infinitos, pero no periódicos.

Resumiendo, todo número representable como una fracción decimal infinita es un número real. Una teoría completa de los números reales no está contemplada a éste nivel, sin embargo se puede dar la idea de una construcción de los números reales a grandes rasgos.

1. Primero hagamos las siguientes suposiciones : A cada número real α se le hace corresponder, en calidad de notación, la fracción decimal infinita :

$$a_0.a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$$

Y cada fracción decimal infinita es la notación de un número real.

A ésto hay que agregar que los números terminados en el último dígito (9) infinitas veces tiene dos expresiones decimales que lo representan. En la primera el decimal con infinitos 9 y en la 2a. el decimal con infinitos ceros con el dígito antes de los 9 en 1 mayor que en la primera notación, por ejemplo

$$7.65999\ldots = 7.66000\ldots$$

$$0.9999\ldots = 1.000\ldots$$

y por ejemplo en éste último caso nuestra convención puede tener la siguiente explicación :

$0.999... = 0.\hat{9} = 3\times 0.\hat{3} = 3\times \frac{1}{3} = 1$

Resumiendo : si excluimos a los números con período 9 podemos obtener una correspondencia biunívoca entre el conjunto de números reales y el conjunto de fracciones decimales infinitas, quitando las excepciones.

2. Se introduce un criterio mediante el cual se puedan comparar dos números reales cualesquiera x, y.

Si $[x] < [y]$, entonces evidentemente $x < y$, por ejemplo $3.14 < 4.14$.

Si $[x] = [y]$, entonces para $\{x\} < \{y\}$, tenemos que $x < y$, por ejemplo $53.408\underline{1}... < 53.408\underline{2}...$, ya que $1 < 2$. En otras palabras :

$a_0.a_1a_2a_3... < b_0.b_1b_2b_3...$

Si $a_k < b_k$ para algun k y $a_i = b_i$ para las $i < k$

3. Se muestra que las desigualdades y las operaciones aritméticas definidas en el conjunto de números reales conservan las propiedades principales que se cumplen en el conjunto de números racionales, a saber :

i. De dos reales distintos uno es mayor que el otro.

ii. Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$. (para cualesquiera a, b, c reales)

iii. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$

iv. Si $a > b$, entonces $ac > bc$ (si $c > 0$)

v. Si $a > b$, entonces $ac < bc$ (si $c < 0$)

De éstas propiedades pueden obtenerse por ejemplo :

vi. Si $a > b$ y $c > d$, entonces

$$a + c > b + d \text{ ó } a - d < b - c$$

vii.

$\forall\, a, b, c, d \in R^{+}$, si $a > b$ y $c > d$

entonces

$$ac > bd \quad y \quad \frac{a}{d} > \frac{b}{c}$$

En estas propiedades nos basamos al ejecutar transformaciones idénticas, por ejemplo para demostrar que :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

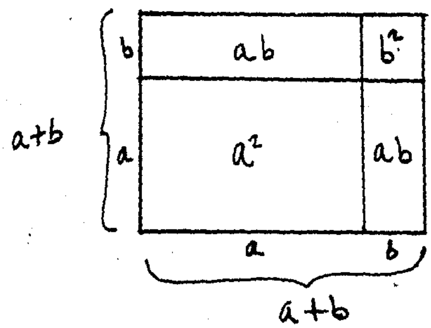
Demostración :

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = (a+b)a + (a+b)b$$

$$= a^2 + \underline{ba} + ab + b^2 = a^2 + \underline{ab} + ab + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 \qquad \square$$

Gráficamente ésta operación se vería así :



Demostrar basandose en las propiedades de las operaciones aritméticas las siguientes identidades :

i). $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$(a+b)(a-b) = (a+b)a - (a+b)b$$

$$= a^2 + ba - ab - b^2$$

$$= a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2 \qquad \square$$

ii). $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a+b)^2 a + (a+b)^2 b$$
$$= (a^2 + 2ab + b^2)a + (a^2 + 2ab + b^2)b$$
$$= a^3 + 2a^2b + b^2a + a^2b + 2ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad \square$$

iii). $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$(a^2+ab+b^2)(a-b) = (a^2+ab+b^2)a - (a^2+ab+b^2)b$$
$$= a^3 + a^2b + b^2a - a^2b - ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - b^3 \qquad \square$$

Simplificar las siguientes expresiones

iv). $\dfrac{a^3+b^3}{a+b} - \dfrac{a^3-b^3}{a-b}$

$$= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)} - \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)}$$
$$= a^2 - ab + b^2 - a^2 - ab - b^2 = -2ab$$

Simplificar las expresiones y calcular sus valores

v). $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ en $a=6,\ b=2$

$$= \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) - \sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} = \frac{a+\sqrt{ab}-\sqrt{ab}+b}{a-b} = \frac{a+b}{a-b}$$

En $a=6,\ b=2$ el valor es 2.

vi). $\dfrac{1}{a+a\sqrt{b}} - \dfrac{1}{a-a\sqrt{b}}$ en $a=5,\ b=10$

$$= \frac{a-a\sqrt{b}-a-a\sqrt{b}}{\left(a+a\sqrt{b}\right)\left(a-a\sqrt{b}\right)} = \frac{-2a\sqrt{b}}{a^2-a^2b} = -\frac{2\sqrt{b}}{a(1-b)}$$

Sustituyendo:

$$-\frac{2\sqrt{10}}{5(1-10)} = \frac{2\sqrt{10}}{45}$$

6.3 APROXIMACION DECIMAL DE UN NUMERO REAL.

Quedamos que la representación de cualquier número real x es :

$$x = a_0.a_1a_2a_3\ldots a_n$$

Al número

$$x_n = a_0.a_1a_2a_3\ldots a_n$$

se le llama la <u>aproximación</u> <u>decimal</u> <u>por</u> <u>defecto</u> de x con n cifras ó con aproximación a 10^{-n}, mientras que

$$x_n^1 = a_0.a_1a_2a_3\ldots a_n + 10^{-n} = x_n + 10^{-n}$$

se le llama la <u>aproximación</u> <u>decimal</u> <u>por</u> <u>exceso</u> de x con aproximación a 10^{-n}.

Del criterio de comparación de dos números reales se tiene que

$$x_n < x < x_n^1$$

Ejemplo. Escribir las aproximaciones decimales de $x = \text{Log}3 = 0.47712\ldots$ por defecto y exceso con exactitud de 1, 0.1, 0.01, ..., 0.00001

$0 < x < 0 + 1 = 1$

$0.4 < x < 0.4 + 0.1 = 0.5$

$0.47 < x < 0.47 + 0.01 = 0.48$

....

$0.47712 < x < 0.47712 + 0.00001 = 0.47713$

Las operaciones de suma y multiplicación de números reales pueden quedar definidas mediante las mismas operaciones, pero de sus aproximaciones decimales.

Si $x, y \in Q$, entonces su suma $x + y$, ya está bien definida, incluso

$$x_n + y_n \leq x + y < x_n^1 + y_n^1$$

y esta propiedad es deseable, pero para toda $x,y \in R$. En efecto, en los cursos sistemáticos de calculo diferencial e integral se demuestra que $\forall \; x,y \in R$ existe z tal que :

$$x_n + y_n \leq z < x_n^1 + y_n^1$$

a éste número z se la llama la suma de x con y, es decir $z = x + y$.

Ejemplo. Hallar los primeros cuatro dígitos decimales exactos de la suma, si $x = 1.23001...$, $y = 0.78044...$

Basta con escribir la aproximación con 5 dígitos de la suma :

$$x_5 + y_5 = 1.23001+0.78044, \; x_5^1 + y_5^1 = 1.23001+10^{-5}+0.78044+10^{-5}$$

pero

$$x_5 + y_5 = 2.01045 \leq x + y < x_5^1 + y_5^1 = 2.01047$$

y en efecto constatamos que los primeros 4 decimales son los mismos, por lo tanto la suma de x, y es 2.0104...

Análogamente se define la multiplicaión de números reales no negativos. Se puede mostrar que para todo par $x,y \in R$ existe un único z tal que único z tal que

$$x_n \cdot y_n \leq z < x_n^1 \cdot y_n^1$$

a z se le llama el producto de x por y y se denota como $z = xy$.

Para números con signo contrario se tiene la siguiente definición :

$$xy = -|x||y| \text{ , donde } |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La resta y la división se definen como operaciones inversas de la suma y multiplicación respectivamente.

Las principales propiedades del módulo se obtienen de las definiciones de las operaciones aritméticas :

$$|x|-|y| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$$

$$|xy| = |x|\cdot|y|$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Recordemos que si

$$|x - a| \leq h$$

a x se le llama <u>valor</u> <u>aproximado</u> del número a con un error no mayor que h y usualmente se escribe

$$x \sim a \text{ (con exactitud } h \text{)}$$

ó

$$x = a \pm h$$

<u>Ejemplos</u>

$1/3 \sim 0.33$ con exactitud de 0.01, es decir

$$\frac{1}{3} = 0.33 \pm 0.01, \text{ o sea } \left| \frac{1}{3} - 0.33 \right| \leq 0.01$$

Otro

$\sqrt{2} = 1.4142$ con exactitud de 0.0001, es decir

$\sqrt{2} = 1.4142 \pm 0.0001$, o sea $\left| \sqrt{2} - 1.4142 \right| \leq 0.0001$

$\pi = 3.14159$ con exactitud de 0.00001, es decir

$\pi = 3.14159 \pm 0.00001$ o sea $\left| \pi - 3.14159 \right| \leq 0.00001$

Finalmente tenemos que

$x \sim x_n$ con exactitud de 10^{-n} o sea $x = x_n \pm 10^{-n}$

es decir

$| x - x_n | \leq 10^{-n}$

$x \sim x_n^1$ con exactitud de 10^{-n} o sea $x = x_n^1 \pm 10^{-n}$

es decir

$$| x - x_n^1 | \leq 10^{-n}$$

Ejercicios Hallar las aproximaciones decimales por defecto y exceso con exactitud de 0.1, 0.01, 0.001 para los números : 0.2664, -1.27 y 5/6.

$$0.2 < x < 0.2 + 0.1 = 0.21$$

$$0.26 < x < 0.26 + 0.01 = 0.27$$

$$0.266 < x < 0.266 + 0.001 = 0.267$$

$$-1.3 = -0.1 \quad -1.2 < x < -1.2$$

$$-1.28 = -0.01 \quad -1.27 < x < -1.27$$

$$-1.271 = -0.001 \quad -1.270 < x < -1.270$$

5/6 = 0.83333 por lo tanto

$$0.8 < x < 0.8 + 0.1 = 0.9$$

$$0.83 < x < 0.83 + 0.01 = 0.84$$

$$0.833 < x < 0.833 + 0.001 = 0.834$$

Comprobar que los números 2.6 y 2.7 son aproximaciones decimales al número $\sqrt{7}$ con exactitud de 0.1 por defecto y exceso.

$$\sqrt{7} = 2.6457...$$

y por lo tanto $2.6 < \sqrt{7} < 2.6 + 0.1 = 2.7$

Sabiendo que $x = 0.5638413...$ y $w = 1.34114825...$ hallar los 5 primeros dígitos decimales de su suma. Observando donde se definió la suma de dos números reales y procediendo de la misma manera encontramos que la suma es igual a 1.90498 con exactitud de 10^{-5}.

6.4 SU CONSTRUCCION.

6.4.1 CORTADURAS DE DEDEKIND.

El sistema de números racionales es incompleto pues es incapaz de satisfacer algunas demandas muy simples. Así por ejemplo, como es bien sabido, no existe un número racional cuyo cuadrado es igual a 2. Al contrario podemos decir que el cuadrado de cada número racional positivo es ó < 2 ó > 2 y en ambos casos existe un número cuyo cuadrado es arbitrariamente cercano a 2 y menor ó mayor qué él, respectivamente.

Esto, en la representación gráfica en una línea recta, nos deja que dividamos todos los números racionales en dos clases : una clase U, en la cual pongamos cada número racional positivo cuyo cuadrado es menor que 2, el cero y todos los números racionales negativos, y otra clase W que contenga cada núemro racional positivo cuyo cuadrado es mayor que 2. La pregunta surge, con ésta clasificación, la cual denotaremos como $(U|W)$ y la cual llamaremos Cortadura de Dedekind en el dominio de los números racionales, puede ser considerada como un sustituto para los números, aún no existentes, cuyo cuadrado es igual a 2, y, en particular, que pueda ser considerada como un número con el cual podamos operar así como lo hacemos con los números racionales.

Esta pregunta puede ser contestada en la siguiente forma : Consideremos la totalidad de todas las cortaduras de Dedekind concebibles (U|W) en el dominio de los números racionales, es decir, de todas las divisiones imaginables de todos los números racionales en dos clases no vacías U y W las cuales satisfacen el único requerimiento de que cada número de la clase U sea menor que cada número de la clase W. Entonces mostraremos que estas cortaduras son "otras entidades" las cuales, bajo apropiadas suposiciones, considerando su orden (<, =, >) así como su suma(+) y multiplicación(·), obedecen todas las leyes fundamentales válidas para los números racionales. Si ahora denotamos a tales cortaduras por una letra r, digamos r = (U|W), y llamamos a éstas cortaduras números, entonces, con èstas estipulaciones, ellos obedecen sin excepción todas las leyes fundamentales de validés para los números racionales. Las entidades obtenidas de ésta manera son por lo tanto números, y en su totalidad constituyen el sistema de los números reales. El sistema de los números reales es una extensión del sistema de los números racionales pues una parte de los números reales es equivalente a los números racionales exis·entes y la otra parte que no son racionales son llamados numeros irra(on. es y los denotaremos con una I.

Hasta éste momento, un número ı.al es considerado como definido o dado si es un racional, y entonces puede ser represenetado en la forma p/q con q distinto de cero, o si es obtenido por alguna cortadura en el dominio de los números racionales.

Se puede mostrar que no existe otro sistema, diferente del sistema de los números reales, mas extensivo de entidades el cual satisfaga las leyes fundamentales nombradas anteriormente (teorema de unicidad y teorema de completes para el sistema de los números reales).

Una clasificación renombrada en el dominio de los números reales nos lleva a lo mismo, es decir, si todos los números reales son divididos en dos clases no vacías U y W de tal forma que cada número u en U es menor que cada número w en W entonces éstas entidades son números que satisfacen todas las propiedades mencionadas anteriormente. Entonces podemos decir que los números reales son continuos, es decir, pueden ponerse en correspondencia uno-a-uno con la totalidad de puntos de una línea recta llamada ahora eje real, eje numérico o línea real.

6.5 ESTRUCTURA GENERAL DEL SISTEMA.

Toda la experiencia acumulada en incontables generaciones, se trata de organizar, sistemat zando todo el conocimiento adquirido, a través de axiomas a pa-ti- de los cuales poder deducir mas propiedades y relaciones no es lecidas a éste nivel, aunque existe la experiencia de un p-ofesor ruso en la cual trata de ilustrar las operaciones aritméticas básicas sobre entes distintos a los números reales. (ver APENDICE 6.1)

Asi definimos lo siguiente :

Sea R el conjunto de los números reales, ésto es,

$$R = \{ x;\ x \in Q \text{ ó } x \in I \}$$

Donde Q es el conjunto de los números racionales e I representa el de los irracionales.

Propiedades básicas :

Sean v,w,m,n elementos arbitrarios de R, lo cual denotaremos asi : $v,w,m,n \in R$

6.5.1 Propiedades De La Igualdad.

i. $m = m$ para todo elemento m (reflexiva)

ii. Si $m = n \implies n = m$ (simétrica)

iii. Si $m = n$ y $n = w \implies m = w$ (transitiva)

6.5.2 Propiedades De Suma Y Multiplicación

i. Si $m = n$ y $v = w \implies m + v = n + w$ y $mv = nw$ (Bien Definida)

ii. m + v y nw son elementos de R (cerradura)

iii. m + n = n + m y mn = nm (conmutativa)

iv. (m + n) + v = m + (n + v) y

(mn)v = m(nv) (asociativa)

v. Existe un elemento r en R tal que mr = m llamado elemento identidad para la multiplicación o neutro multiplicativo y que definimos como la unidad o uno (r = 1).

vi. Existe un elemento q en R tal que m + q = m llamado elemento identidad para la suma o neutro aditivo el cual llamamos cero (q = 0).

vii. Para cada elemento m de R existe otro $n \varepsilon R$ tal que m + n = q ésto es su suma nos dá el neutro aditivo y se define como n = -m y le llamamos inverso aditivo.

viii. Para cada elemento $m \neq 0$ de R, existe otro $v \varepsilon R$ tal que mv = k, ésto es, su producto nos dá el neutro multiplicativo y se define como v = 1/m y le llamaremos inverso multiplicativo.

ix. Si m + n = w + n ==> m = w (cancelación para la suma)

Si mn = wn ==> m = w con n $\neq 0$ (cancelación para la multiplicación)

x. m(v + w) = (mv) + (mw) (distributiva, propiedad que relaciona las operaciones de suma y multiplicación).

6.5.3 Propiedades De Orden.

Definición : Decimos que un número real m es mayor que un numero real n, lo cual denotaremos como $m > n$, si $m - n$ es un número real positivo, es decir, si $m - n > 0$.

i. Para cada par de elementos m y n exactamente una de éstas condiciones es verdadera (tricotomía) :

a) $m > n$;

b) $m = n$;

c) $m < n$

ii. Si $m > n$ entonces $m + v > n + v$ (suma)

iii. Si $m > n$; $v > 0$ $\Longrightarrow$ $mv > nv$

iv. Si $m > n$; $v = 0$ $\Longrightarrow$ $mv = nv$

v. Si $m > n$; $v < 0$ $\Longrightarrow$ $mv < nv$ (multiplicación)

vi. Si $m > n$ y $n > v$ $\Longrightarrow$ $m > v$ (transitiva)

6.5.4 Propiedad De Densidad.

Entre dos números reales cualesquiera siempre hay un número real.

6.5.5 Propiedad De Completes.

A todo punto de la recta numérica le corresponde un número real y cada número real le corresponde un punto sobre la recta numérica.

6.6 NECESIDAD DE AMPLIACION DEL SISTEMA.

Con el correr del tiempo, una vez que los matemáticos ya manejaban un lenguaje propio, surgieron problemas, principalmente en la solución de ecuaciones, donde había que conocer las raíces cuadradas de números negativos, la demostración del teorema fundamental del algebra,etc. De aquí surge la necesidad de extender nuestro concepto del conjunto de números reales a otro conjunto de números que engloben éste tipo de necesidades.

6.7 APENDICES.

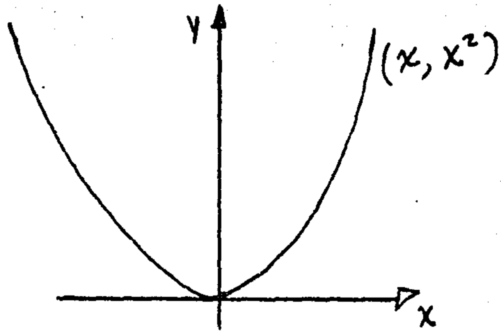
6.7.1 ALGO MAS SOBRE LA PARABOLA.

La presente nota se recomienda sea usada a nivel de bachillerato, cuando se quiera ilustrar las operaciones aritméticas básicas sobre entes distintos a los números reales.

Este material también podría constituir un buen tema para ser desarrollado por grupos de alumnos que manifiesten un mayor interés por la matemática.

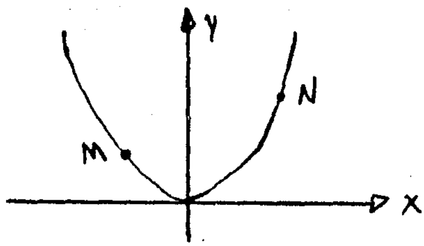
Consideremos los puntos de una parábola, que para fijar ideas, supondremos es la más simple en un sistema cartesiano de coordenadas, a saber :

$y = x^2$



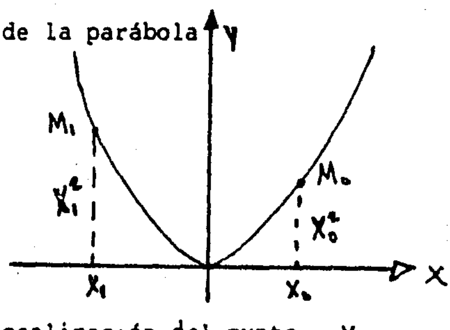
Gráfica de la parábola.

Como decíamos, si vivieramos en la parábola, ¿ tendría sentido, por ejemplo, la operación de suma entre los puntos de la parábola ?, ¿cómo quedaría definida y qué sentido geométrico adquiriría ?



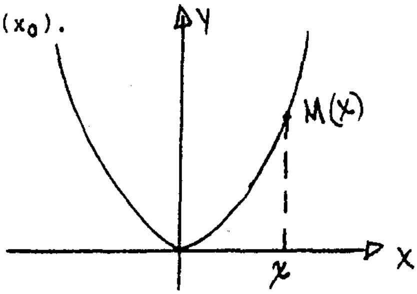
¿Qué significaría la suma de los puntos M y N ?

Sea M_0 un punto de la parábola



Localización del punto M_0.

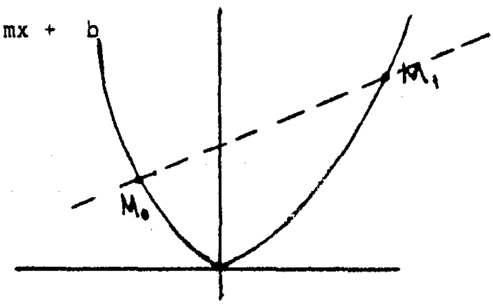
Obsérvese que lo que hace las veces de parámetro y determina al punto M_0 es la abscisa x_0, por lo cual tiene sentido el que denotemos a cada punto de la parábola solo dependiendo de su abscisa, o sea $M_0(x_0)$.



El punto M queda unívocamente determinado por x.

Antes que nada veamos cuál es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos cualesquiera M_0 y M_1 pertenecientes a la parábola. Tal ecuación la podemos representar en la forma :

$$y = mx + b$$



Gráfica de los puntos.

e indaguemos cual es su pendiente m y su ordenada al orígen b :

$$m = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = \frac{(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)}{x_1 - x_0}$$

Por lo tanto

$$m = x_1 + x_0$$

significa que la pendiente nos queda definida como la suma de las abscisas de los puntos en cuestión $M_0(x_0)$ y $M_1(x_1)$.
Por otro lado, dado que M_1 está en la parábola, entonces debe satisfacer también la ecuación de la recta que pasa por M_1, luego

$$y_1 = (x_0 + x_1)x_1 + b,$$

O sea

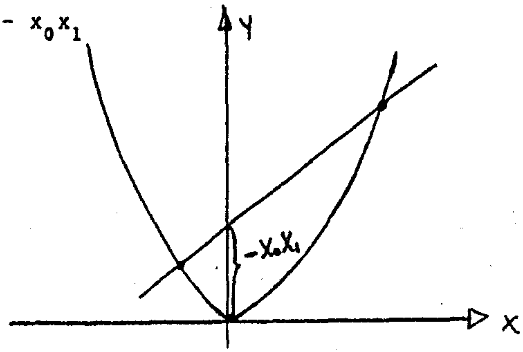
$$x_1^2 = (x_0 + x_1)x_1 + b,$$

es decir

$b = - x_0 x_1$

¡Al fin!, la recta que pasa por M_0 y M_1 de la parábola es :

$y = (x_0 + x_1)x - x_0 x_1$



Gráfica de la recta y la parábola

Hay que fijarse que ésto fué deducido para cualquier par de puntos arbitrarios M_0 y M_1 en la parábola. Este resultado tan modesto (trivial diria el más entrenado) nos dá la clave para efectivamente intuir que las operaciones aritméticas usuales con puntos de la parábola pueden ser introducidas y tendrán propiedades similares a las operaciones aritméticas con números reales.

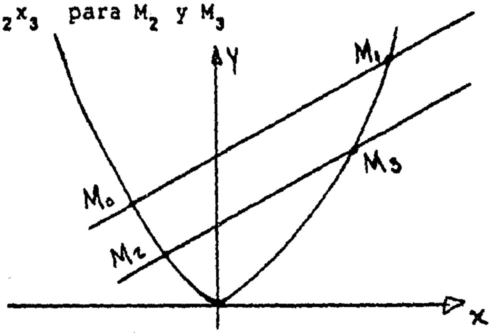
Los siguientes esquemas y gráficas darán la pauta. Del lector se pide papel y lápiz para poder completar los detalles de lo que se afirmará con monitos.

¿Cual es la condición para que dos rectas que unen puntos de la parábola sean paralelas ?

La condición necesaria y suficiente de paralelismo entre dos rectas que unen puntos de la parábola, o sea entre

$y = (x_0 + x_1)x - x_0x_1$ para M_0 y M_1

$y = (x_2 + x_3)x - x_2x_3$ para M_2 y M_3

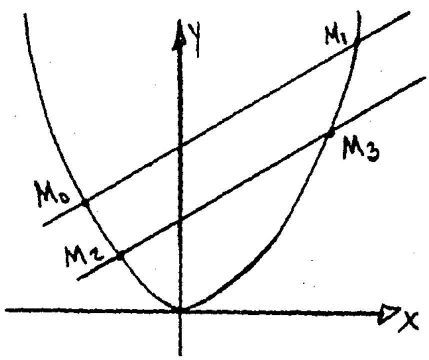


Gráfica de las rectas paralelas y la parábola

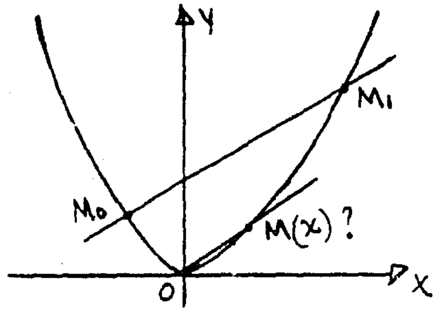
Será el que sus pendientes sean iguales, ésto es que :

$$x_0 + x_1 = x_2 + x_3$$

6.7.1.1 Suma De Los Puntos De La Parábola. -



$M_0M_1 \parallel M_2M_3 \implies m_{M_0M_1} = m_{M_2M_3} \implies x_0 + x_1 = x_2 + x_3$



$M_0M_1 \parallel OM \implies m_{M_0M_1} = m_{OM} \implies x_0 + x_1 = 0 + x$

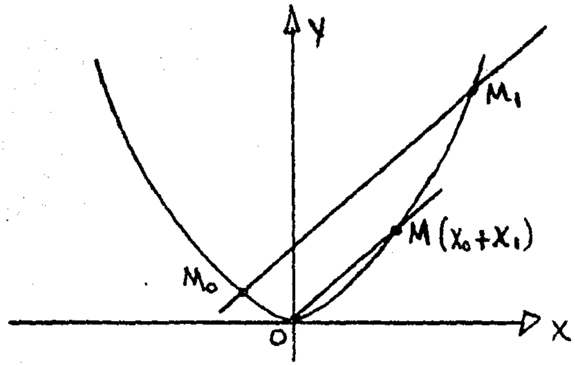
$$\implies x = x_0 + x_1$$

Por lo tanto

$$M_0(x_0) + M_1(x_1) = M(x_0 + x_1)$$

La suma de dos puntos de la parábola, determinados por sus abscisas x_0 y x_1 es un tercer punto también perteneciente a la parábola tal que su abscisa es la suma de las abscisas $x_0 + x_1$ de los puntos dados.

Geométricamente el punto suma se construye lanzando una paralela a M_0M_1 que pase por el origen. La intersección de ésta paralela con la parábola nos determina dicho punto.



Gráfica del punto suma en la parábola.

PROBLEMAS :

i. Verifica la definición de suma para abscisas enteras y luego para racionales.

ii. Con la definición deducida de suma de puntos pertenecientes a una parábola, qué sentido geométrico tiene la suma M + M.

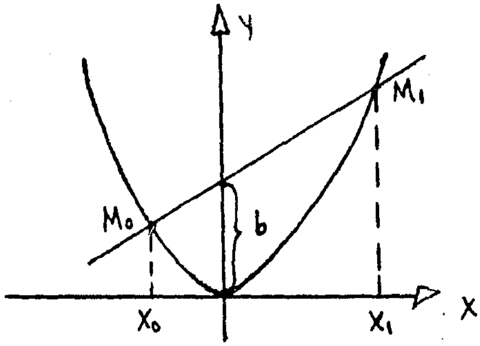
iii. Con ésta definición de suma de puntos de una parábola, ¿ serán verdaderas las propiedades :

a. M + N = N + M, (conmutativa)

b. (M + N) + P = M + (N + P), (asociativa)

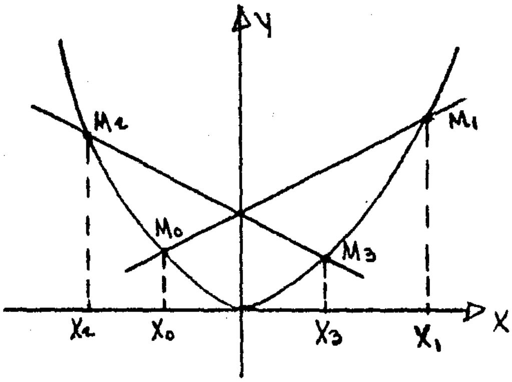
iv. ¿Cómo queda definida la suma de tres o más puntos de una parábola ?, ¿ y de infinitos puntos ?

6.7.1.2 Producto De Puntos De La Parábola. -



$y = mx - x_0 x_1$

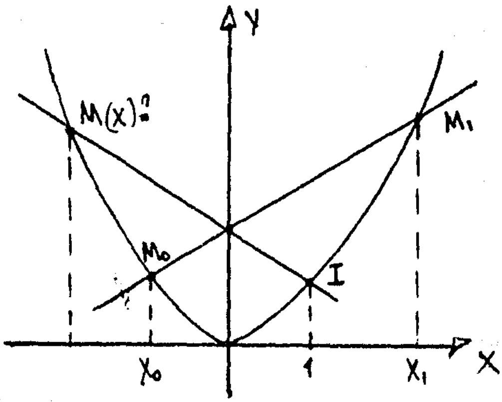
Entonces



M_0M_1 y M_2M_3 tienen la misma ordenada al origen

sí y solo sí

$x_0 x_1 = x_2 x_3$



Las rectas M_0M_1 y MI

tienen la misma ordenada al origen, sí y solo sí

$x_0x_1 = 1 \cdot x$

Por lo tanto

$M_0(x_0)M_1(x_1) = M\ (x_0x_1)$

El producto de dos puntos de la parábola es otro punto de la parábola tal que la abscisa que lo determina es el producto de las abscisas de los puntos originales.

Geométricamente el punto producto se obtiene trazando la recta que pasa por el punto I (correspondiente a la abscisa igual a 1) con la ordenada al origen de la recta que une los puntos factor. La intersección de la prolongación de la recta IN con la parábola nos dá el punto producto.

PROBLEMAS :

i. ¿Cual sería la interpretación geométrica de :

$$M_0M_0 = M_0^2$$

ii. Con la definición introducida del producto de dos puntos de la parábola, será posible definir el producto de tres puntos de la parábola, o de cualquier número finito de factores. ¿Que sentido tendría el producto infinito de puntos de la parábola ?

iii. Comprobar geométricamente que las principales propiedades del producto de números reales son verdaderas para puntos de la parábola, a saber :

$$M_0M_1 = M_1M_0 \quad (\text{ conmutativa })$$

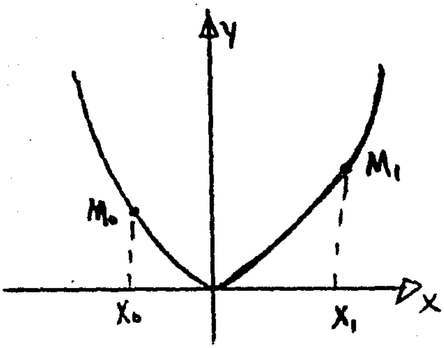
$$(M_0M_1)M_2 = M_0(M_1M_2) \quad (\text{ asociativa })$$

$$(M_0 + M_1)M_2 = M_0M_2 + M_1M_2 \quad (\text{ distributiva })$$

Evidentemente $0 \cdot M = 0$

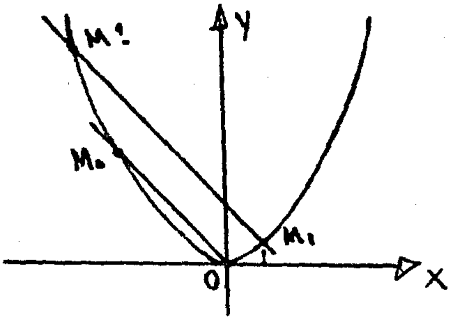
6.7.1.3 Resta De Puntos De La Parábola -

Similarmente a como lo hacemos para números, la resta de dos puntos de la parábola puede definirse a través de la suma :



$M_0 - M_1 = M$ si y solo si $M_0 = M_1 + M$

Geométricamente :



$M(x)$ tal que $M_0 = M_1 + M$

Por lo tanto

$M_1M || OM_0$ entonces $x_1 + x = x_0$ de lo cual $x = x_0 - x_1$

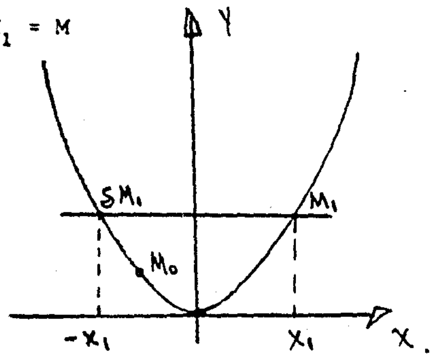
Entonces

$$M_0(x_0) - M_1(x_1) = M(x_0 - x_1)$$

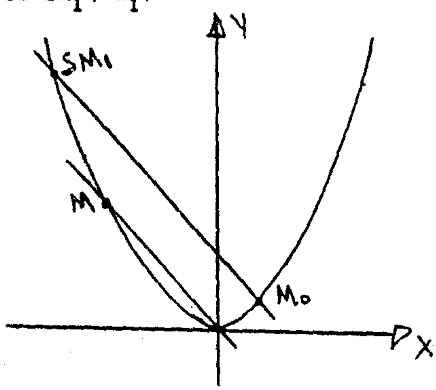
También podríamos definir "el contraio" de un punto $M(x)$ como aquel que queda definido por el punto simétrico de la parábola con respecto al eje vertical (eje de la parábola), el cual denotaremos por $SM(-x)$. Mediante el punto contrario a M podríamos ahora definir la resta de dos puntos de la parábola :

$$M_0 - M_1 = M_0 + SM_1 = M$$

Geométricamente



Si $M_1(x_1)$ entonces $SM_1(-x_1)$



$M(x)$ es tal que $M_0(x_0) + SM_1(-x_1) = M(x)$

Por lo tanto

$M_0SM_1 || OM$ entonces $x_0 - x_1 = x$

Entonces

$$M_0(x_0) - M_1(x_1) = M_0(x_0) + SM_1(-x_1) = M(x_0 - x_1)$$

<u>PROBLEMAS</u> :

i. ¿Qué significa geométricamente $M_1 - M_1$? y ¿ $M_1 + SM_1$?

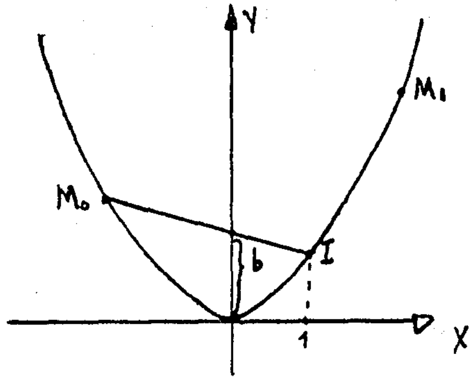
ii. Conociendo el punto $M_0(x_0)$ construir geométricamente el punto $M(2x_0)$. (Recomendación : usa $0 + x_0 = -x_0 + 2x_0$ correspondiente a que $OM_0 || SM_0M$)

6.7.1.4 División De Puntos De La Parábola -

Como es usual, la división la definiremos a través de la multiplicación diciendo que un punto de la parábola M_0 se divide entre otro M_1 (distinto de cero) de la misma si existe un tercer punto de la parábola M tal que el producto de éstos últimos dos es M_0, ésto es :

$\frac{M_0}{M_1} = M$ si $M_0 = M_1 M$

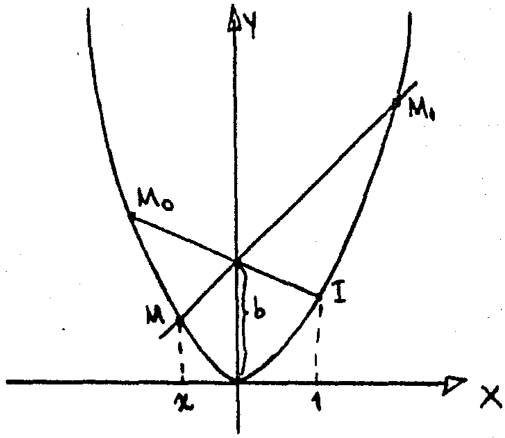
y geométricamente



$M(x)$ es tal que $M_0 = M_1 M$

Por lo tanto

$M_0 I = M_1 M$, entonces $b(M_0 I) = -x_0 \cdot 1$



$b(M_1M) = -x_1x$, por lo tanto $b(M_0I) = b(M_1M)$

entonces

$$-x_0 \cdot 1 = -x_1 x$$

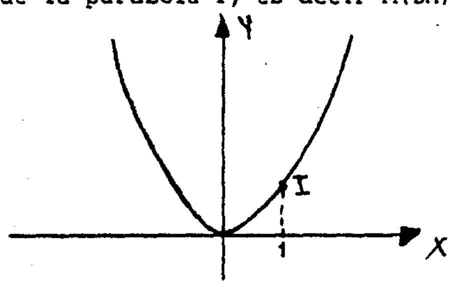
y por lo tanto

$$x = \frac{x_0}{x_1} \quad (x_1 \neq 0)$$

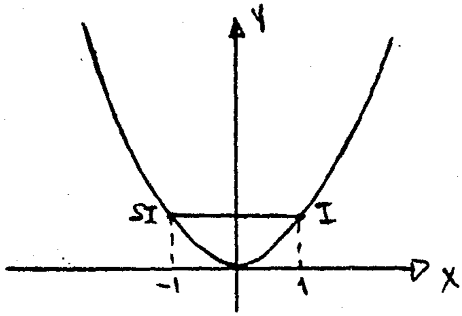
Por lo tanto tenemos que :

$$\frac{M_0(x_0)}{M_1(x_1)} = M\left(\frac{x_0}{x_1}\right)$$

Podríamos haber definido la división de puntòs de la parábola introduciendo "el inverso" de un punto de la parábola. En efecto, podemos llamar inverso a los puntos de la parábola cuyo producto sea el punto unitario de la parábola I, es decir M(DM) = I.



I(1), punto unitario de la paraábola.



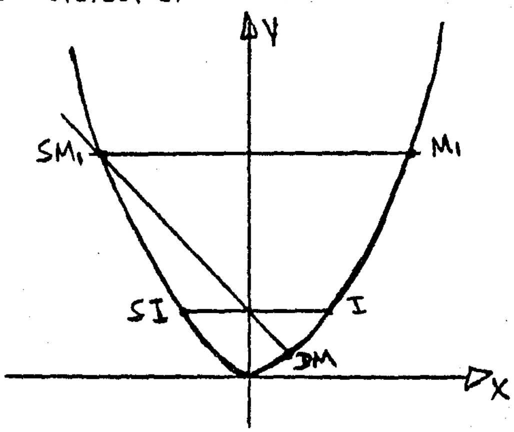
I(1) y su punto contrario SI(-1)

DM(x) es tal que $M_1DM(x) = I$

Por lo tanto

$M_1DM \cdot SI = I \cdot SI$, entonces $M_1SI \cdot DM = I \cdot SI$

$M_1(x_1)SI(-1)DM = I(1)SI(-1)$



$$SM_1(-x_1)DM(x) = I(1)SI(-1)$$

$$b(\ SM_1 DM\ ) = b\ (\ I(1)SI(-1)\ )$$

$$-(-x_1)x = -1(-1),\ \text{es decir}\ x_1 x = 1$$

Por lo tanto

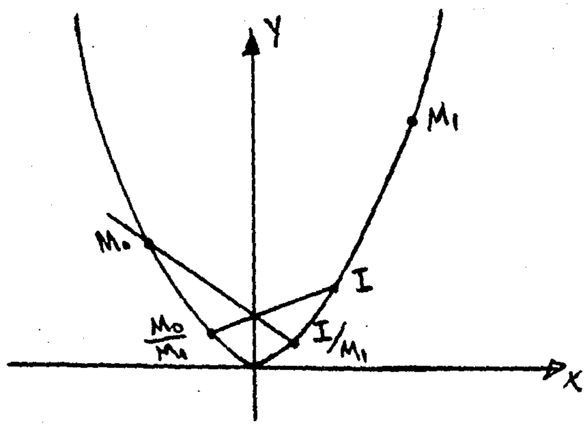
$$DM\ (\frac{1}{x_1}) = \frac{I(1)}{M_1(x_1)}$$

Podría usarse otro símbolo para denotar a ésta última igualdad.

Luego entonces la división entre dos puntos de la parábola puede definirse como el producto del punto divisor por el inverso del otro punto de la parábola, es decir :

$$\frac{M_0}{M_1} = M_0\ \frac{I}{M_1}$$

y geométricamente



Descripción gráfica de la división.

PROBLEMAS :

i. ¿Qué significa geométricamente ?

$\frac{M_0}{M_1}$, cuando $M_1 = 0$

ii. Construye

$$M_0(x_0)\cdot M_0(x_0) = M(x_0^2)$$

A partir de conocer $M_0(x_0)$. (Hint: parte de cualquier identidad que refleje en números lo que necesitas e interpretalo geométricamente, por ejemplo

$$x_0(-x_0) = (-1)x_0^2$$

que refleja que las ordenadas al origen de las rectas M_0SM_0 y SIM son iguales, donde M(x) es el punto incognita).

iii. Construye la tercera potencia de un punto dado de la parábola.

iv. Podrían considerarse los puntos de la parábola, respecto de las operaciones de suma y producto, como un grupo, anillo o campo ?

NOTA

Este tema fué motivado por problemas relacionados con dinámicas complejas (cuasialeatorias) generadas por modelos deterministicos simple del tipo : $y = 4\lambda x(1-x)$. La única referencia dada por el Prof. Kuznietzov G. B de Yaroslav, comunicación personal, respecto a éste problema aparece como el problema iv. de ésta sección en el libro de Shmidt O. Yu, Algebra Superior, 1934.

CAPITULO 7

SISTEMA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

7.1 ALGO DE HISTORIA

En matemáticas, los números complejos aparecieron hace mas de 400 años en relación con problemas algebraicos, sobre todo con la solución de la ecuación de tercer grado. Claro que, primeramente surgieron en las ecuaciones de segundo grado al aparecer en las raíces cuadradas de números negativos, llegando con frecuencia a raíces que tenían la forma $\alpha + \beta \sqrt{-1}$, donde α y β son números reales.

Sin embargo, de éstas dificultades se salía fácilmente anunciando que cuando aparecía $\sqrt{-1}$ en alguna expresión, tal expresión no "tenía sentido". Tales expresiones eran "magnitudes sofisticadas puras", eran "números falsos" y las ecuaciones cuadráticas de la forma :

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

que al resolverse tuvieran raíces de números negativos deberían considerarse que no tenían solución. En efecto, en tal caso la función

$$g(x) = Ax^2 + Bx + C$$

no se reduce a cero para ningún valor(real) de x. El mayor desasosiego lo trajo el problema de la solución de las ecuaciones de tercer grado cuando aparecian en él, raices de números negativos.

A principios del siglo XVI, algunos matemáticos italianos entre ellos Essipión del Ferro, Tartaglia y Cardano sabian resolver ecuaciones de tercer grado. Por ejemplo, en el libro de texto que editó Cardano en 1545, de hecho yá contenía la fórmula para hallar las raices de la ecuación de tercer grado. En notación actual, ésto sería así :

las raices de $x^3 + px + q = 0$ (1)

pueden considerarse como

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{D}} \qquad (2)$$

Donde

$$D = \left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3 \qquad (3)$$

pero ésta fórmula fallaba cuando la ecuación cúbica tenía tres raíces reales distintas : en éste caso, D resulta negativo y bajo la raíz cúbica aparecían raices cuadradas de números negativos. Digamos, en el ejemplo numérico :

$$x^3 - 19x + 30 = 0$$

obtenemos tres raices reales distintas, a saber : 2, 3 y -5 (comprobables directamente, pero si quisieramos hallar tales raíces directamente de la fórmula (2), obtendríamos :

$$x = \sqrt[3]{-15 + \sqrt{-784}} + \sqrt[3]{-15 - \sqrt{-784}}$$

así pues, a los matemáticos de esa época se les dificultaba entender de qué manera pueden obtenerse de éstas fórmulas los números 2, 3 y -5.

Para poder resolver cualquier ecuación de tercer grado, los matemáticos necesitaban hallar la forma de operar con números de la forma :

$$\alpha + \beta \sqrt{-1}$$

con α y β reales y en particular saber obtener su raíz cúbica.

Luego de la aparición del libro de Cardano, uno de sus discípulos, Ferrari, halló un método para resolver las ecuaciones de cuarto orden, reduciendolas a una de tercer orden y haciéndose más patente la necesidad de saber operar con los números de la forma mencionada

$$\alpha + \beta \sqrt{-1}$$

Los matemáticos muy a su pesar tuvieron que enfrentarse a los números complejos. A tales números los llamaron "imaginarios" (Descartes), "inexistentes", "imposibles", "sofisticados puros", "surgidos de la especulación excesiva". Se consideraba evidente que no tubieran ningún contenido real. Incluso los grandes matemáticos de los siglos XVII-XVIII con asombro e incredulidad se relacionaron con los números complejos, por ejemplo, Euler (1707-1783) que excelentemente sabía aplicar y operar con los números complejos, sin embargo expresó que la raíz cuadrada de números negativos, dado que no son mayores, ni menores, ni iguales a cero, no pueden ser considerados dentro de los posibles tipos de números existentes hasta esa época. Leibnitz (1646-1716) llamaba a los números complejos elegante y prodigioso refugio del espíritu divino, así como degeneración del mundo de las ideas, casi un ente dual entre el ser y el no ser; incluso dejó dicho que sobre su tumba se dibujara el signo $\sqrt{-1}$ como símbolo del otro lado del mundo.

Cada vez se sentían más fuertes los toquidos de éstos números en las puertas de la matemática y así por ejemplo, si se usaban los tales números complejos, entonces eran fácilmente computables sumas tales como :

$$(4) \qquad \sum_{K=0}^{n} C_n^K \cos K\alpha$$

que sin números complejos eran mucho más complicadas. Fué descubierto que con números complejos también fácilmente podía expresarse el $\cos n\alpha$ como un polinomio de $\cos\alpha$. Mediante números complejos podían calcularse diferentes expresiones del cálculo diferencial e integral que sin ellos resultaba más difícil.

Matemáticos como Euler, Moivre, Laplace y otros en el siglo XVII hallaron un buen número de fórmulas y aplicaciones de los números complejos. Un problema que inquietó, por la dificultad intrínseca del mismo, a los matemáticos de los siglos XVII y XVIII fué el relativo al llamado teorema fundamental del Algebra. Si se restringe a las raíces reales, el polinomio de grado n :

(5) $$\sum_{K=0}^{n} A_K X^{n-K} = 0$$

podemos solo afirmar que a lo más tendrá n soluciones. Pero si se toman en cuenta los números complejos, entonces la respuesta es exhaustiva : las raices del polinomio (5) son exactamente n (evidentemente que las raices múltiples hay que contarlas tantas veces como su multiplicidad).

Hasta Gauss y otros matemáticos contemporáneos a él (finales del siglo XVIII y principios del XIX) se obtienen las interpretaciones geométricas de los números complejos tanto la de puntos del plano como la de vectores. Luego de esto, el matemático irlandés Hamilton pudo construir una teoría clara, lógica y rigurosa de los números complejos. Los números complejos a la Hamilton son pares de números reales tomados en un orden determinado, con reglas dadas que permiten realizar las operaciones aritméticas sobre tales parejas. La unidad imaginaria $\sqrt{-1}$ = i está dada también por un par de números reales, esto es por el par (0,1).

Al darse cuenta Gauss de lo impropio de los nombres dados a tales números, pues el ya estaba convencido del contenido real de dichos números al parejo con los números reales, propuso llamarlos "complejos", nombre que conservan hasta la fecha.

Durante los últimos doscientos años, tanto los números complejos como las funciones complejas (o sea aquellas en que tanto la variable como los valores de la función son números complejos), han tenido grandes e inesperadas aplicaciones : ya desde Euler y D'Alembert (mediados del siglo XVIII) se dieron cuenta de lo conveniente de aplicar las funciones complejas al estudio de flujos de planos de líquidos; en particular, un interés singular representaban las llamadas funciones analíticas (aquellas que para cada z de una cierta región puedan representarse como una serie de potencias en z, es decir :

$$f(Z) = \sum_{K=0}^{\infty} A_K(Z-C)^K \qquad \text{con } C \text{ y } A_K \text{ constantes}$$

Luego de un cuarto de siglo (1777) Euler y Lagrange aplicaron las funciones complejas a la solución de problemas acerca de la construcción de cartas geográficas. Desde antes a tales fechas ya era conocida la imposibilidad de dibujar un mapa del globo terraqueo de manera que cualquier distancia igual en el globo correspondiera a iguales distancias en el mapa, en otros términos todo mapa del globo terraqueo da cierta alteración de las distancias. En la practica son particularmente valiosos aquellos mapas que reflejan al globo terraqueo de una manera "conforme" (de manera que se conservan los ángulos entre las líneas correspondientes). Por ejemplo, los mapas construídos con el método de Mercator, los cuales gozaban de mucho prestigio entre los marinos. Resulta que mediante funciones de variable compleja pueden obtenerse una gran cantidad de maneras de construir los mapas con la propiedad de ser "conformes".

En el diseño de alas de avión han sido usadas las funciones de variable compleja. También han sido aplicadas las variables complejas en los cálculos de distintas construcciones altamente resistentes.

Recordemos algunas aplicaciones dentro de la misma matemática, un ejemplo ilustrativo lo constituye el problema resuelto por el joven Gauss, quién usó los números complejos para resolver el problema de la construcción de polígonos regulares con regla y compás.(a)

Los números complejos han jugado un papel importante en las investigaciones sobre la teoría de números, así por ejemplo, con su ayuda se demostró que el número π es un número trascendente (no

---

(a). El teorema de Gauss dice :

1) Si n es un número primo, entonces el polígono regular de n lados puede construirse con regla y compás si y solo si n es de la forma $2^{\theta} + 1$, donde $\theta = 2^{\omega}$, con ω un número entero no negativo.
2) Si n es un número compuesto, entonces hay que desarrollarlo en sus factores primos y el polígono regular de n lados podrá construirse con regla y compás únicamente, si y solo si todos los factores primos son distintos y todos ellos son de la forma $2^{\theta} + 1$, donde $\theta = 2^{\omega}$.

es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros o racionales).

El "último" teorema de Fermat (1601-1665) afirma que para los naturales $\alpha \geq 3$ no existen tres números naturales X, Y, Z tales que se satisfaga la igualdad :

$$X^{\alpha} - Y^{\alpha} = Z^{\alpha}$$

Las primeras demostraciones, por ejemplo, para todas las α menores que 600, realizada por Kummer, fueron hechas usando números complejos.

Aplicaciones muy amplias a encontrado la variable compleja en circuitos y redes eléctricas, en la teoría de filtración de suelos y en física teórica. Especial valor han tenido los números complejos en el estudio del movimiento de los satélites naturales y artificiales, de los cuerpos celestes.

Por ejemplo, en el ya clásico problema de los tres cuerpos, uno de los problemas difíciles de la mecánica celeste: ¿ Cómo se mueven tres cuerpos celestes bajo la acción de sus mutuas atracciones ? La primera respuesta a un problema "restringido" de los tres cuerpos fué dada por el matemático finlandés Zundman (1913) con ayuda de los números complejos.

A la solución de los más difíciles problemas de la teoría de números (ciencia que estudia las propiedades de los números enteros) ha sido usada la variable compleja, misma que también ha sido aplicada en una de las variantes más efectivas de la solución dada al problema planteado con el lanzamiento de los primeros satélites artificiales, a saber : ¿ cómo se moverá un satélite artificial bajo la influencia de la gravedad de un esferoide achatado ? (es bién sabido que tal es la forma que tiene la "esfera celeste": una "esfera" algo achatada en los polos, pues el diámetro polar es aproximadamente 42 kilómetros menor que el diámetro ecuatorial).

7.2 DEFINICIONES BASICAS.

En los capítulos anteriores, hemos pasado de los naturales con las operaciones cerradas de suma y producto : $(N,+,\cdot)$ a los enteros con las operaciones cerradas de suma, producto y resta : $(Z,+,\cdot,-)$, luego a los racionales con las operaciones cerradas de suma, producto, resta y división : $(Q,+,\cdot,-,\div)$ hasta llegar a los números reales R, donde además tenemos la propiedad de completes y podemos realizar operaciones como la extracción de raíces de números positivos. Vimos que éstas sucesivas ampliaciones eran logradas mediante las ecuaciones :

$X + b = a$; donde $a,b \in N$

$b \cdot X = a; \quad a,b \in Z$ con b diferente de cero

$X^2 = a; \quad a \in Q^+$

Aun con estas sucesivas ampliaciones, donde $x \in Z$ ó $x \in Q$ ó $x \in R$ e incluso en éste último, es decir en el conjunto de los números reales R, no todas las operaciones son realizables, por ejemplo en R es imposible la extracción de raíces de números negativos, es decir en R no tiene solución la ecuación

(1) $X^2 + 1 = 0$

Obsérvese que si la ecuación parecida

$X^2 - 1 = 0$

tiene solución incluso en el conjunto de los enteros ($X = \pm 1$) y la ecuación

$X^2 - \frac{1}{4} = 0$

tiene solución en el conjunto de los racionales ($X = \pm 1 \div 2$) y la ecuación

$x^2 - 2 = 0$

tiene solución en el conjunto de los números reales, sin embargo la ecuación (1) no tiene solución en los números reales. En efecto, el cuadrado de cualquier número real es un número no negativo y si le sumamos la unidad siempre será positivo, es decir

$$x^2 + 1 > 0$$

Es así que obtenemos para ecuaciones aparentemente tan parecidas como :

$$x^2 + 1 = 0 \quad y \quad x^2 - 1 = 0$$

resultados tan distintos por sus resultados. La segunda tiene dos soluciones, mientras que la primera no tiene ninguna en el conjunto R de los números reales. Tal situación puede arreglarse si se introduce un nuevo tipo de números , los llamados números complejos, que amplien el de los números reales exactamente en la forma como N fué ampliado con Z o éste con Q o éste con R. Con ésta ampliación tendremos no solo posibilidad de darle sentido a las raíces de números negativos, sino que todas las ecuaciones algebraícas tendrían siempre solución en dicho conjunto ampliado.

Para poder definir los nuevos números llamados complejos, primero introduciremos un nuevo símbolo, que denotaremos con i, que llamaremos <u>unidad imaginaria</u>. A este símbolo se le adjudica (se le postula) la propiedad de satisfacer la ecuación (1), es decir i es tal que

$i^2 + 1 = 0$ es decir $i^2 = -1$

Luego introduciremos el conjunto de todos los posibles binomios

$$a + bi$$

con a y b números reales arbitrarios. Condicionaremos que tales binómios pueden operarse (suma, resta y producto) con las reglas usuales del álgebra con una única propiedad adicional, a saber que

$i \cdot i = i^2 = -1$

El conjunto de las expresiones $a + bi$ se llama <u>conjunto de los números complejos</u> que se denota por C y a las expresiones $z = a + bi$ se les llama <u>números complejos</u>.

Dado un número complejo $W = a + bi$, se dice que a es la parte real de W ($a=ReW$) y que b es la parte imaginaria de W ($b=ImW$), aunque algunos llaman a $bi=ImW$ como la parte real e imaginaria respectivamente del complejo W.

Se dice que dos complejos son iguales

$W_1 = W_2$, es decir, $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$

sí

$a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$

E inversamente, sí

$a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$

entonces también

$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$

Una segunda convención consiste en que los números reales han de ser un caso particular de los complejos. En efecto si en $w = a + bi$ tomamos la parte imaginaria $b = 0$, tendremos que $w = a + i0$, o sea que $w = a$ y se identifica a este número complejo con el número real a. En particular $a + bi = 0$ $(=0 + i0)$ si $a = 0$ y $b=0$ e inversamente si $a=b=0$ entonces también $a + bi = 0$. Los complejos W con $\mathrm{Re}W = 0$ tienen la forma $W = bi$ y se llaman imaginarios puros.($b \neq 0$).

Dos números complejos con iguales partes reales y partes imaginarias de signos contrarios, se llaman <u>complejos conjugados</u> y se denotan como $W = a + bi$ y su conjugado como $Z = \mathrm{CONJ}(W) = a - bi$. Es evidente que $\mathrm{CONJ}(Z) = W$.

7.3 OPERACIONES RACIONALES CON COMPLEJOS.

Como ya se dijo en la primera concvención, las operaciones sobre números complejos se sobreentienden como las operaciones sobre los binomios algebraicos, por eso si

$Z_1 = a_1 + b_1 i$ y $Z_2 = a_2 + b_2 i$

tendremos

(2) $Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ (aa)

(3) $Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

En particular

$$Z + \mathrm{Conj}(Z) = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$

y

$$Z - \mathrm{Conj}(Z) = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$$

Análogamente, se obtiene la suma algebráica de cualquier número de sumandos. En cuanto al producto tendremos :

(aa). Observemos que al ser introducida la notación a + bi para un número complejo el signo "+" era formal y no tenía el sentido de "suma", puesto que sumar a y bi en ese momento aún no sabíamos hacerlo, pero ya teniendo la operación de suma de complejos tenemos que :

$$(a + 0i) + (0 + bi) = (a + 0) + (0 + b)i = a + bi.$$

$Z_1 Z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$

Haciendo operaciones tenemos que :

(4) $Z_1 Z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$

Ejemplos :

i. Hallar $Z_1 + Z_2 - Z_3$, si $Z_1 = 3+4i$, $Z_2 = 7-2i$, $Z_3 = -10+3i$

$Z_1 + Z_2 - Z_3 = (3+4i)+(7-2i)-(-10+3i) = 20-i$

ii. Hallar $Z_1 \cdot Z_2$, si $Z_1 = 3 + 4i$ y $Z_2 = 7 - 2i$

$Z_1 \cdot Z_2 = (3 + 4i)(7 - 2i) = 29 + 22i$

Particularmente es relevante el producto de un número complejo por su conjugado, pues da como resultado siempre un número positivo, en efecto :

(5) $Z \cdot \mathrm{Conj}(Z) = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$

A la raíz cuadrada de éste número se le llama <u>módulo</u> o valor absoluto del número complejo Z y se denota por $| Z |$:

(6) $|Z| = \sqrt{Z\,\mathrm{Conj}(Z)} = \sqrt{a^2 + b^2}$

En particular cuando $b = 0$, entonces $Z = a$ y $|Z| = \sqrt{a^2} = |a|$, el módulo del número complejo $a + 0i$ coincide con el módulo del número real a.

De la definición misma de número complejo conjugado se tiene que :

$|Z| = |\mathrm{Conj}(Z)|$

ya que en ambos casos el módulo es $\sqrt{a^2 + b^2}$

De ésto y de (6) concluímos que :

$Z \cdot \mathrm{Conj}(Z) = |Z|^2 = |\mathrm{Conj}(Z)|^2$

El producto de varios números complejos se obtiene multiplicando sucesivamente los factores.

Las potencias naturales de números complejos, digamos

$(a + bi)^3$, $(a+bi)^5$ y en general $(a + bi)^n$

pueden ser obtenidas mediante la fórmula de Newton, teniendose además que para ello se necesitan las diferentes potencias de i.

$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1,\ \ldots$

de donde destaca que

$i^{4K} = 1,\ K\in N$

Ejemplos :

$i^{348} = i^{4\cdot 87+1} = (i^4)^{87}\cdot i = 1^{87}\cdot i = i$

$(3+2i)^3 = 3^3+3^3\cdot 2i+3^2\cdot(2i)^2+(2i)^3 = 27+54i-36-8i = 9+46i$

La operación aritmética que nos falta, es decir la división de números complejos, la definiremos a través de la multiplicación, o sea

$$(8)\quad \frac{Z_1}{Z_2} = Z \quad {\scriptstyle Z_2 \neq 0} \quad \text{si y solo si } Z_1 = Z\cdot Z_2$$

es decir

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = x + wi$$

si y solo si

$$a_1 + b_1 i = (a_2 + b_2 i)(x + wi)$$

$$a_1 + b_1 i = (a_2 x - b_2 w) + (a_2 w + b_2 x)i$$

pero de la igualdad de dos números complejos se tiene que :

$$a_1 = a_2 x - b_2 w$$

y

$$b_1 = a_2 w + b_2 x$$

hemos pues obtenido un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas, el cual resolviendolo nos dá :

$$w = \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_2^2 + b_2^2}$$

y

$$x = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Pero ésto significa que

$$(9)\quad \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) + \left(\frac{b_1a_2-b_2a_1}{a_2^2 + b_2^2} \right) i$$

más complicado de lo que hubieramos deseado, pero así opera la división entre números complejos. Finalmente, obsérvese que Z_2 es diferente de cero luego, también su módulo lo es, es decir la división es realizable para todo Z_2 diferente de cero.

En la práctica no se usa la fórmula deducida (9) para efectuar divisiones entre complejos. Se efectua así :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1 \cdot \mathrm{Conj}(Z_2)}{Z_2 \cdot \mathrm{Conj}(Z_2)} = \frac{Z_1 \cdot \mathrm{Conj}(Z_2)}{|\, Z_2 \,|^2}$$

y como el denominador es yá un número real, la división queda efectuada.

Ejemplo. Dividir 4 - 2i entre 5 + 3i

$$\frac{4-2i}{5+3i} = \frac{(4-2i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)} = \frac{14-22i}{34}$$

Finalmente, las operaciones racionales sobre los conjugados de números complejos resultan ser iguales a los conjugados sobre las operaciones con los números complejos originales, es decir

$$\mathrm{Conj}(Z_1) \pm \mathrm{Conj}(Z_2) = \mathrm{Conj}(Z_1 \pm Z_2)$$

$$\mathrm{Conj}(Z_1)\cdot\mathrm{Conj}(Z_2) = \mathrm{Conj}(Z_1\cdot Z_2)$$

$$\frac{\mathrm{Conj}(Z_1)}{\mathrm{Conj}(Z_2)} = \mathrm{Conj}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right), \text{ con } Z_2 \neq 0$$

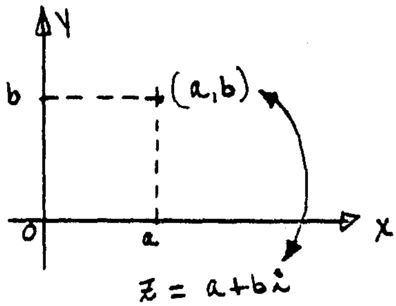
cuya veracidad se demuestra directamente verificando cómo ambos terminos de cada igualdad tienen un valor común.,

7.4 INTERPRETACION GEOMETRICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

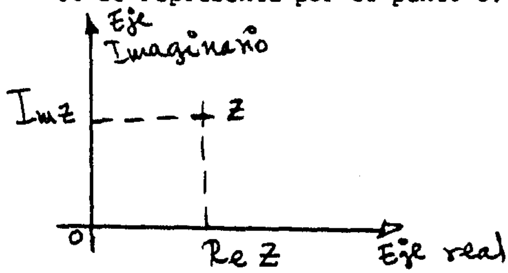
Dar un número complejo $z = a + bi$ es equivalente a dar una pareja ordenada de números reales a y b (la parte real e imaginaria de dicho número complejo).

Pero una pareja ordenada (a,b) de números reales se representa en un sistema ortogonal de coordenadas cartesianas por un punto con coordenadas (a,b). Es por ésto que este punto puede servir como representación del número complejo z = a + bi. Es así que se establece una correspondencia 1 a 1 entre el conjunto de números complejos **C** y los puntos del plano cartesiano R^2.

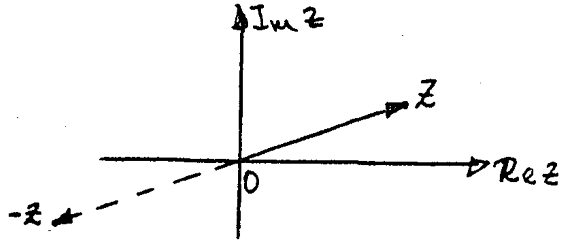
$C \longleftrightarrow R^2$



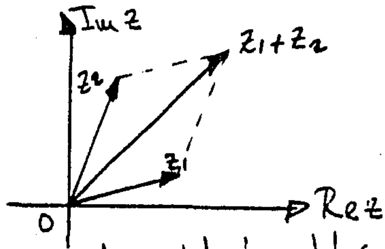
Al representar a los números complejos en el plano cartesiano usualmente al eje horizontal se le llama eje real y al eje vertical eje imaginario, dado que la parte real (imaginaria) se toma como la abscisa (ordenada) del número complejo. Se denota por Rez e Imz a la parte real e imaginaria respectivamente del complejo z. El número complejo cero, 0 + 0i se representa por el punto O.



Es frecuente que al número complejo z se le asocie no solo con el punto M de coordenadas cartesiana (a,b) que representa a dicho número complejo, sino que también se le relaciona con el vector de posición OM (como un segmento dirigido en el plano del punto O al M)

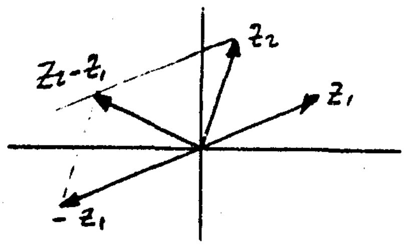


Representación geométrica de -z.



Ley del paralelogramo

Representación geométrica de la suma $z_1 + z_2$



Representación geométrica de la resta $z_1 - z_2$

B I B L I O G R A F I A

1. Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N. y Laurent'ev, M.A. "Mathematics its Content, Methods and Meaning" Vol. 1. The MIT PRESS, Massachusetts Institute Technology. Cambridge. Massachusetts.
2. Apostol, T.M. "Calculus", Vol. 1 Blaisdell Publishing Company. A division of Giun and Company, 1967.
3. Apostol, T.M. "Mathematical Analysis A Modern Approach to Advanced Calculus". Addison-Wesley, 1965.
4. Birkhoff, G., y Maclane, S.A. "A Survey of Modern Algebra". The Macmillan Company, New York 1965.
5. Cárdenas, Humberto; Lluis Emilio; Raggi Francisco y Tomás Francisco, "Algebra Superior". Editorial Trillas, México 1976.
6. Courant, R. y John, F. "Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático", Vol. 1. Editorial Limusa, México 1982.
7. Courant, R., y Robbins, H. "What is Mathematics ?". Oxford University Press, New York 1941.
8. Haaser, N.B; Lasalle J.P y Sullivan J.A. "Análisis Matemático 1 Curso de Introducción". Editorial Trillas, México 1975.
9. Hauser Jr. A.A. "Variable Compleja". Fondo Educativo Interamericano, S. A. 1973.

10. Kleiman, A. y K. de Kleiman E. "Conjuntos, Aplicaciones matemáticas a la Administración". Editorial Limusa, México 1981.

11. Kuratowski, K. "Introduction to Calculus". Reading, MA. Addison-Wesley 1969.

12. Moise, E.E. "Calculus". Reading, MA. Addison-Wesley 1966.

13. Newman, J. R. "Sigma: El mundo de las matemáticas". Barcelona, Grijalbo 1983.

14. Rudin, W. "Principles of Mathematical Analysis". New York, McGraw-Hill, 1964.

15. Peters, M. y Schaaf W.L. "Algebra, Un Enfoque Moderno". Editorial Reverte Mexicana, S. A. 1979.

16. Zwier, P. J. y Nyhoff, L. R. "Essentials of College Mathematics". New York, Holt, Rinehart and Winston. 1979.